BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

PROMOVIENDO EL CAMBIO CONCEPTUAL DEL INFINITO EN PROFESORES DE MATEMÁTICAS DE BACHILLERATO A TRAVÉS DE UN TALLER

TESIS
PARA OBTENER EL TÍTULO DE
MAESTRO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

PRESENTA
LIC. IRVING AARÓN DÍAZ ESPINOZA

DIRECTOR DE TESIS
DR. JOSÉ ANTONIO JUÁREZ LÓPEZ

CODIRECTORA DE TESIS
DRA. ESTELA DE LOURDES JUÁREZ RUIZ

PUEBLA, PUE. MARZO 2024

DR. SEVERINO MUÑOZ AGUIRRE
SECRETARIO DE INVESTIGACIÓN Y
ESTUDIOS DE POSGRADO, FCFM-BUAP
P R E S E N T E:

Por este medio le informo que el C:

IRVING AARON DÍAZ ESPINOZA

Estudiante de la Maestría en Educación Matemática, ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 08 de noviembre de 2023, con la tesis titulada:

"PROMOVIENDO EL CAMBIO CONCEPTUAL DEL INFINITO EN PROFESORES DE MATEMÁTICAS DE BACHILLERATO A TRAVÉS DE UN TALLER"

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

A T E N T A M E N T E.
H. Puebla de Z. a 09 de febrero de 2024

DRA. LIDIA AURORA HERNÁNDEZ REBOLLAR
COORDINADORA DE LA MAESTRÍA
EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA.

DRA'LAHR/l'agm*

Facultad
de Ciencias
Físico Matemáticas

Av. San Claudio y 18 Sur, edif. FM1
Ciudad Universitaria, Col. San
Manuel, Puebla, Pue. C.P. 72570
01 (222) 229 55 00 Ext. 7550 y 7552

AGRADECIMIENTOS

Agradezco al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías (CONAHCYT) por su apoyo financiero a través del numero de beca CVU. 569097 sin el cual este trabajo de investigación ni los estudios de posgrado hubiesen sido posible.

DEDICATORIA

Agradezco a mis padres por siempre motivarme a seguir estudiando, porque ahora que estoy en el papel de papá sé lo mucho que se esforzaron para que yo esté aquí. Gracias a ambos.

A mi esposa por su paciencia, su guía, su motivación y su apoyo para lograr esto. Sabe que, sin sus consejos no podría seguir avanzando. Como ella dice: “un buen hombre tiene al lado una buena mujer”. Muchas gracias.

A mi hija por saber esperar cuando estaba ausente.

A mis profesores del Posgrado que sin ellos no hubiera logrado la investigación en estos dos años: al Dr. José Antonio, por su apoyo siempre que era necesario y su guía cuando tenía dudas; a la Dra. Estela, por el apoyo metodológico muy acertado y conciso; a la Dra. Lidia por sus retroalimentaciones precisas cuando me escuchaba hablar y sabía que podía mejorar. Un honor haberlos conocido y sobre todo poder hacer esta investigación juntos. Infinitas [potential conception] gracias.

ÍNDICE

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE FIGURAS

INTRODUCCIÓN

El concepto de infinito está teóricamente entrelazado con casi todas las ramas de las matemáticas (Tall, 2001a). Según Hannula et al., (2006) "El infinito actual no se puede conceptualizar solo a través del proceso infinito potencial, sino que requiere la conceptualización de un punto final del proceso" (p. 321). Además, como lo muestra el trabajo de Manfreda Kolar y Čadež (2012), existe una tendencia a interpretar el problema con el infinito potencial y no con el infinito actual en maestros que a la vez transmiten este conocimiento a sus alumnos.

En Tall y Tirosh (2001) se menciona que:

> John Monaghan [observa] (…) dos peligros potenciales (…) que pueden afectar la investigación sobre las ideas de infinito de los jóvenes. Primero, el mundo real es finito y no hay referentes reales para el discurso sobre el infinito. (…) El segundo, (…) tiene que ver con los significados del lenguaje utilizado cuando se habla con el niño sobre el infinito (p.134).

En investigaciones entre estudiantes y profesores en formación se ha evidenciado la existencia de comprensiones incompletas en expresiones del tipo $0.999\ldots = 1$ (Díaz-Espinoza et al., 2023; Dubinsky et al., 2005b; Juter, 2019; Kattou et al., 2010; Schwarzenberger y Tall, 1978; Vinner y Kidron, 1985; Wistedt y Martinsson, 1996; Yopp et al., 2011). En Díaz-Espinoza et al. (2023) concluyen que el profesor no tiene una imagen clara de infinito; se tiene una resistencia a aceptar la igualdad $0.999\ldots = 1$ y que el efecto de redondeo surge como argumento para aceptar la igualdad $0.999\ldots = 1$; además, la creencia de que un proceso infinito debe tener un final en la realidad.

Festinger (1957, como se citó en Yopp et al., 2011) sugiere que "la incomodidad causada por la inconsistencia o contradicción lógica motiva a un individuo a modificar sus creencias y acercarse a la realidad" (p.306). Además, "La reflexión, en el sentido de prestar atención consciente a las operaciones que se realizan, es una parte importante tanto del aprendizaje como del conocimiento" (Asiala et al., 1996, p. 6).

Recientemente, en Krátká et al. (2021) se proponen cuatro concepciones del infinito: natural, potencial, posición omega-épsilon y actual. Como se ha mencionado líneas arriba, en la literatura están presentes investigaciones que abordan el infinito potencial y actual, por mencionar algunos, en Kidron y Tall (2015) se describe “desde la época griega, la concepción natural del infinito es el concepto de infinito potencial, incluyendo la posibilidad ilimitada de contar o la posibilidad de dividir un intervalo en partes sucesivamente más pequeñas” (p. 186). También, Singer y Voica (2008) señalan que “el infinito potencial es funcional y natural en los niños” (p. 200), dando pauta al infinito natural como una fase previa al infinito potencial. De manera similar, Cihlář et al. (2015) proponen la posición omega-épsilon del infinito como una fase previa del infinito actual. Además, concluyen que es necesario ampliar las concepciones acerca del infinito que presentan los estudiantes.

> La mayoría de las investigaciones existentes no funcionan con un concepto de infinito que encajaría en la posición omega-épsilon. Por lo tanto, los estudiantes cuyas ideas no se corresponden con la concepción del infinito natural o el infinito actual a menudo se clasifican en la concepción del infinito potencial. (Krátká et al., 2021, p. 19)

Particularmente, en un estudio realizado con profesores en servicio se halló que cerca del 72% de los docentes tienen una imagen del infinito como proceso sin fin (infinito potencial) y sólo el 28% definen el infinito como un objeto (infinito actual) (Kattou et al., 2010, p. 1775).

Esto sienta las bases de la investigación con el propósito de diseñar e implementar un taller que mejore las concepciones de los profesores acerca del infinito, ya que “el taller procura que la práctica se transforme en estímulo para la reflexión teórica” (Ander-Egg, 1999, p. 39).

En el capítulo 1 se definen las preguntas de investigación, los objetivos y la justificación de la investigación. En el capítulo 2 se habla de las cuatro concepciones presentes en estudiantes y que han sido reportadas recientemente en la literatura: infinito natural, infinito potencial, posición omega-épsilon e infinito actual. Además, se exponen autores que han trabajado con la teoría del cambio conceptual y que sentaron las bases de esta investigación como forma de superar las concepciones del infinito en profesores.

En el capítulo 3 se propone el método utilizado en la investigación que, como advierte el título mismo, es un taller como intervención para lograr el cambio conceptual en los profesores de matemáticas de bachillerato acerca del infinito. De igual manera, se exponen resultados previos que se obtuvieron en el estudio piloto como validación del instrumento de pretest y postest. Este instrumento será el encargado, mediante un pretest y un postest, de permitir analizar el impacto del taller como intervención para el cambio conceptual del infinito en los profesores.

En el capítulo 4 se muestran los resultados obtenidos en el pre y post test y se discuten las respuestas de dos profesores en particular que, desde el punto de vista del autor, permiten observar la evaluación de los argumentos y la profundidad en la comprensión del infinito.

Finalmente, en el capítulo 5 se presentan conclusiones generales de esta investigación que fueron relevantes y las limitaciones que se presentaron. Además de las sugerencias a futuro para continuar trabajos de investigación en esta misma línea.

Capítulo 1

1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1 Problemática de estudio

El infinito es un concepto clave en el proceso cognitivo y merece un mayor análisis dentro de la psicología cognitiva (Fischbein et al., 1979). Se puede ver en la literatura existente que en los últimos años se ha estudiado las concepciones del infinito, particularmente, en el Volumen 48, Números 2-3 de la revista *Educational Studies in Mathematics* reservada exclusivamente al estudio del infinito, por mencionar algunas, las investigaciones de Fischbein (2001), Monaghan (2001), Tall (2001a) y Tall y Tirosh (2001).

Alrededor de los años de 1980's a la actualidad se han presentado múltiples investigaciones acerca del infinito trabajando con estudiantes y profesores ya sea en formación o en servicio. A grandes rasgos, y a modo de ejemplificar, algunos de los trabajos de investigación acerca del infinito pueden clasificarse en: estudio de paradojas que involucran al infinito (Dubinsky et al., 2005a; Mamolo y Zazkis, 2008; Medina Ibarra et al., 2019; Roa-Fuentes y Oktaç, 2014; Waldegg, 2005), del estudio de la expresión $0.999\ldots = 1$ (Ángeles-Navarro y Pérez-Carreras, 2010; Díaz-Espinoza et al., 2023; Eisenmann, 2008; Hannula et al., 2006; Mena-Lorca et al., 2015; Wistedt y Martinsson, 1996; Yopp et al., 2011), de problemas de series y sucesiones al infinito (Kidron y Tall, 2015; Monaghan, 2001; Schwarzenberger y Tall, 1978), de la comparación de conjuntos infinitos (Homaeinejad et al., 2021; Kattou et al., 2010; Singer y Voica, 2003; Tsamir, 1999), de problemas geométricos que involucran al infinito (Cihlář et al., 2009; Fischbein et al., 1979; Krátká, 2013; Tall, 1980; Tall y Tirosh, 2001), el infinito en el cálculo diferencial e integral (Villabona Millán et al., 2022; Wijeratne y Zazkis, 2015), o combinaciones de algunas de las anteriores (Belmonte y Sierra, 2011; Cihlář et al., 2015; Juter, 2019; Krátká et al., 2021; Luis et al., 1991; Manfreda Kolar y Čadež, 2012; Zippin, 1962).

Según Manfreda Kolar y Čadež (2012) "el infinito potencial está relacionado con un proceso continuo sin fin" y, por otro lado, "el infinito actual atribuye una entidad finita a este proceso infinito" (p. 390). Estudios demuestran que hay limitaciones en el proceso de construcción del infinito actual ya que los estudiantes y profesores se forman una imagen mental del infinito solo como un proceso interminable (infinito potencial) y no logran darse cuenta que el infinito actual no es un número, sino un objeto (Date-Huxtable et al., 2018; Dubinsky et al., 2005a; Kattou et al., 2010; Tall y Tirosh, 2001; Wistedt y Martinsson, 1996).

Montes et al. (2014) mencionan que:

> Un panorama amplio de los contenidos curriculares nos lleva a preguntarnos si la formación docente debe contemplar la inclusión de aspectos matemáticos, además de consideraciones didácticas, para que los docentes conozcan y comprendan la infinidad cuando se presente en el currículo, y, más significativamente, sean capaces de reconocerlo como una presencia latente subyacente a una serie de temas matemáticos. (…) Los docentes deben tener un buen conocimiento práctico de las etapas por las que deben pasar los alumnos para alcanzar la comprensión del infinito. (…) [Además,] los profesores también deben saber cómo introducir el concepto a su clase de tal manera que no limite el desarrollo de sus alumnos. (p. 234)

De ahí que es importante que el profesor en servicio y en formación desarrolle una profunda comprensión del concepto de infinito, es decir, realice conexiones entre el infinito natural, potencial, posición omega-épsilon y actual en ejemplos de la vida diaria con sus estudiantes (Singer y Voica, 2003). Como afirma Manfreda Kolar y Čadež (2012) “sólo sobre la base de un conocimiento sólido y amplio puede un profesor adquirir la confianza necesaria para afrontar nuevos retos y satisfacer las necesidades de los alumnos curiosos” (p. 399).

Esto lleva a plantear la siguiente pregunta: ¿Cómo realizar un cambio conceptual de las concepciones erróneas presentes en profesores de matemáticas de bachillerato en servicio sobre el concepto de infinito?

1.2 Objetivo general

Explorar el impacto de un taller que permita un cambio conceptual en profesores de matemáticas de bachillerato en servicio acerca del concepto de infinito.

1.2.1 Objetivos específicos

- Analizar las concepciones que tienen profesores de matemáticas en servicio acerca del concepto de infinito.
- Categorizar las concepciones que tienen profesores de matemáticas en servicio acerca del concepto de infinito.
- Probar un taller como instrucción para desarrollar un cambio conceptual en profesores de matemáticas en servicio acerca del concepto de infinito.

1.3 Preguntas de investigación

- ¿Cómo son las concepciones que tienen profesores de matemáticas en servicio acerca del concepto de infinito?
- ¿Qué impacto tiene un taller para modificar las concepciones que tienen profesores de matemáticas en servicio acerca del concepto de infinito?

1.4 Justificación

El infinito es un elemento intrínseco a las matemáticas escolares, con frecuencia no explícito, que requiere un enfoque más allá de la consideración del proceso por el cual se aprende (Montes et al., 2014).

En un estudio de Kattou et al., (2010) se encontró que cerca del 42% de los profesores opinan que la igualdad $0.333\ldots = \frac{1}{3}$ es correcta, mientras que alrededor del 5% de esos mismos profesores aceptan como correcta la igualdad $0.999\ldots = 1$ (p. 1777). Este contraste en los porcentajes refleja que los profesores están más familiarizados con representaciones decimales periódicas infinitas de fracciones, que con representaciones decimales periódicas infinitas de números naturales. Esto puede explicarse ya que "puede ser más fácil aceptar, por ejemplo, que $0.333\ldots = \frac{1}{3}$, ya que ninguno de ellos es un número entero y una representación no parece ser más pequeña que la otra, como lo hace $0.999\ldots$ en comparación con 1" (Juter, 2019, p. 84).

En el mismo sentido, Juter (2019) halló que los estudiantes no consideran que $0.999\ldots$ y 1 son representaciones del mismo número. En contraste, una minoría de los estudiantes en dicha investigación no están de acuerdo con que $0.999\ldots$ y 1 sean números diferentes, lo que revela creencias incoherentes entre los estudiantes restantes, ya que, casi todos los estudiantes que afirmaron que no hay números entre $0.999\ldots$ y 1, y que son números diferentes, también afirmaron que hay números entre dos números diferentes cualesquiera. Así, la propia naturaleza discreta de los números naturales entra en conflicto con nuevas representaciones para dichos números, en otras palabras, "el hecho de que las representaciones $0.999\ldots$ y 1 difieran tanto en apariencia puede aumentar el conflicto cognitivo" (Juter, 2019, pp. 83–84). Como mencionan Yopp et al. (2011), la idea de que "creen que uno es un todo, es decir, que se puede expresar de una sola manera y su valor está explícitamente ligado a nociones de unidad" (p. 310) dificulta aún más superar la concepción de infinito potencial al infinito actual.

Tener una concepción clara en el concepto del infinito en profesores de matemáticas es de vital importancia, porque si comunican concepciones erróneas a sus estudiantes, esto puede convertirse en una fuente de las dificultades que tienen los estudiantes con este concepto (Kattou et al., 2010; Schwarzenberger y Tall, 1978). Además, como sostienen Date-Huxtable et al. (2018) "está fuertemente influenciado por modelos tácitos y creencias conflictivas" (p. 546) entre profesores y estudiantes, lo que dificulta aún más su aprendizaje. Esto es reforzado en la investigación de Cihlář et al. (2015) ya que sólo en dos estudiantes (10% de todos los encuestados) su percepción está en el infinito actual.

Como mencionan Krátká et al. (2021):

> El hecho de que diferentes ideas de infinito para un profesor y un alumno puedan ser la causa de una variedad de malentendidos entre ellos es una conclusión importante de nuestra investigación para la enseñanza de las matemáticas. Cuando un maestro con la concepción del infinito actual formula ciertas declaraciones durante el curso de la enseñanza, un estudiante con una concepción diferente del infinito puede atribuirles un significado diferente. (p. 23)

Los profesores incluso indican que enseñan a sus estudiantes matemáticas que no son correctas (Yopp et al., 2011). Por ello no sólo es importante identificar las concepciones de los profesores, sino que, además, idear prácticas que ayuden a modificar la imagen del infinito y construirlo efectivamente como un objeto.

Capítulo 2

2 MARCO CONCEPTUAL

2.1 Las cuatro concepciones del infinito

Según Krátká et al. (2021) "el concepto de infinito está inevitablemente ligado al concepto de horizonte como 'una línea' que separa la parte iluminada (visible) de un objeto observado (o conocido) de la parte no iluminada (o desconocida, respectivamente)" (p. 4).

Esta investigación muestra dos concepciones más del infinito: natural (Krátká, 2013) y posición omega-épsilon (Cihlář et al., 2015). El estudio describe el infinito natural como un fenómeno subjetivo con un horizonte inamovible. Luego, si el estudiante entiende el horizonte como móvil, pero situado dentro del conjunto discutido, entonces trabaja con el infinito potencial. Cuando el estudiante coloca su horizonte 'detrás' del conjunto considerado y extendido a un objeto impropio, trabaja con la posición omega-épsilon. Finalmente, si la situación ha traspasado todos los horizontes, el estudiante trabaja con el infinito actual.

En Krátká et al. (2021) se advierte que "los individuos atraviesan la fase del infinito natural al comienzo de su conciencia (…) el desarrollo después de esta fase no tiene que ser necesariamente lineal" (p. 6). Además, un individuo puede alternar repetidamente entre la posición omega-épsilon y el infinito actual (Cihlář et al., 2015).

A continuación, se describe con más detalle las fases de la concepción del infinito.

2.1.1 El infinito natural y el infinito potencial

En Krátká (2013) se expresa que:

> El concepto de infinito más simple y antiguo que encuentran los estudiantes es el infinito natural. El infinito natural es un fenómeno subjetivo: para un individuo, un conjunto o un objeto pueden parecer naturalmente infinitos si se extienden hasta su horizonte. (p. 98)

En Cihlář et al. (2015) describen al infinito natural como una primera fase conectada con objetos reales, los conjuntos, puntos y rectas les parecen infinitos siempre que se extiendan dentro de sus horizontes. Así, un primer acercamiento al infinito se da cuando en números que son muy grandes, por ejemplo, la cantidad de granos de arena en la Tierra o números como $10^{10^{10^{10}}}$ que son finitamente grandes, pero pensados como infinitos (Dubinsky et al., 2005a).

Krátká (2013) pone de manifiesto el ejemplo de comparar el número de todos los átomos en la Tierra y el número de todos los segmentos de línea centrados en un punto dado: “un estudiante entiende el conjunto de átomos como naturalmente infinito, el conjunto existe, no lo creamos, mientras que esos segmentos solo hay números potencialmente infinitos. (…) Intuitivamente, el conjunto naturalmente infinito es más numeroso que el conjunto potencialmente infinito” (p. 93).

Lo anterior es presentado en Manfreda Kolar y Čadež (2012) donde se definen tres ideas sobre la percepción del infinito:

> El concepto de 'infinitamente grande' [visión a distancia según Krátká et al. (2021)] (…) en el sentido de expansión, (…) [el de] 'infinitamente muchos' (…) íntimamente relacionado con la densidad de elementos dentro de un conjunto acotado. (…) [e] 'infinitamente cerca' [visión a profundidad según Krátká et al. (2021)] (…) [con] acercarse a un objeto determinado lo más cerca posible (p. 399).

Concluyendo que, “en promedio, los encuestados tuvieron más éxito con tareas del tipo 'infinitamente grande', seguidas por tareas del tipo 'infinitamente muchas' y finalmente tareas del tipo 'infinitamente cerca'” (p.407). Además, “la idea de que el infinito puede existir dentro de un espacio confinado o estar relacionado con una cantidad muy pequeña es en su mayoría ajena a ellos” (p.407). Esto está en concordancia con lo reportado en Krátká (2013) ya que:

> El número de algunos objetos es tan grande que supera su horizonte. Los átomos son inalcanzables en profundidad [‘infinitamente cerca’], las líneas rectas en distancia [‘infinitamente grande’], (…) la cantidad de hormigas [‘infinitamente muchos’] está más allá de su horizonte. Aprender más sobre los átomos o las hormigas cambiará su horizonte. (p. 93)

En el estudio de Krátká et al. (2021) se concluye que la concepción del infinito natural desaparece con la edad, mientras que la concepción del infinito actual está poco presente en estudiantes jóvenes

(15 años aproximadamente). Sin embargo, en Díaz-Espinoza et al. (2023) se registraron concepciones del infinito natural en el profesor que se entrevistó.

Otro ejemplo de la transición del infinito natural al infinito potencial es descrito en Krátká (2013):

> Una noción más avanzada es el infinito potencial. El estudiante ya es consciente de la posibilidad de que se cruce cualquier horizonte. (…) La diferencia entre infinito natural e infinito potencial se manifiesta claramente, por ejemplo, en el problema de la existencia de la intersección de rectas divergentes cuyas imágenes en el papel no se cortan. Mientras que un estudiante con idea de infinito natural rechaza la existencia de una intersección, un estudiante con idea de infinito potencial alarga las imágenes de líneas rectas y confirma la existencia de una intersección. (p. 98)

2.1.2 La posición omega-épsilon y el infinito actual

Como se ha mencionado en la sección anterior, la concepción más simple y temprana del infinito es la de infinito natural. El infinito potencial, por otro lado, es una concepción más avanzada, pero aun dentro de su horizonte y el infinito actual representa el momento en que el sujeto ha traspasado todos los horizontes (Cihlář et al., 2015). Esta 'categorización' del infinito también está presente en la investigación de Kidron y Tall (2015) quienes consideran cuatro categorías diferentes para el enfoque del infinito. Así, la categoría I corresponde con el infinito natural; la categoría II, con el infinito potencial; y la categoría IV, con el infinito actual. Sin embargo, dentro de la categoría III (un 28% de estudiantes) los autores describen que:

> La suma infinita de funciones se percibe como un objeto legítimo, pero no claramente como la definición formal del límite. (…) el estudiante ve el polinomio infinito como un objeto legítimo, pero aún no comprende completamente (…) una definición formal de la suma infinita actual. (Kidron y Tall, 2015, p. 194)

Es decir, "percibe la suma infinita como un objeto límite genérico" (Kidron y Tall, 2015, p. 194), por lo cual, Cihlář et al. (2015) consideran necesario una concepción adicional acerca del infinito que denominan posición omega-épsilon.

> La posición omega[-épsilon] es una fase de desarrollo de transición entre el infinito potencial y el actual y que se crea predominantemente por medio de la intuición primaria, cuando el

> individuo se ve obligado a cambiar su acercamiento potencial del infinito al actual, por aplicar un nuevo contexto. Esto significa que el enfoque potencial puede ser un obstáculo para la comprensión actual. Sin embargo (…) ha traído incluso otra posibilidad de que la posición omega[-épsilon] se presente por medio de la intuición secundaria solo después de que los estudiantes obtengan alguna información sobre el infinito actual. (Cihlář et al., 2015, p. 70)

Finalmente, "sólo cuando los estudiantes 'rompen todos los horizontes' en su concepción, entran en la fase del infinito actual" (Cihlář et al., 2015, p. 69). Esto es confirmado por Krátká et al. (2021), quienes mencionan que:

> En la concepción actual del infinito, todos los horizontes ya están destrozados. Esto significa que un individuo tiene que descartar la idea del horizonte por completo, lo cual es extremadamente difícil. Desde este punto de vista, es comprensible que los estudiantes trabajen más a menudo con las concepciones de infinito potencial y posición omega-épsilon a través de diferentes contextos y perspectivas. (p. 22)

2.2 El infinito y el cambio conceptual

El término cambio conceptual fue introducido por Kuhn (1970) para indicar que los conceptos integrados en una teoría científica cambian de significado cuando la teoría (paradigma) cambia. Por otro lado, según Carey (1991) el cambio conceptual requiere la reasignación de un concepto a una categoría ontológica diferente o la creación de nuevas categorías ontológicas.

Según Chi (2008) "categorizar es el proceso de identificar o asignar un concepto a una categoría a la que pertenece" (p. 62). Por tanto, la categorización es un mecanismo de aprendizaje importante porque un concepto, una vez que se categoriza, puede heredar características de su categoría superior.

Si se piensa en estas categorías como un árbol, aquellas que se presentan en diferentes ramas de un mismo árbol se denominan laterales, mientras que, aquellas que se presentan en diferentes árboles son ontológicas. Así, una propiedad de una categoría se puede aplicar a los miembros de esa categoría o subcategorías, mientras que no se puede aplicar a un miembro de una categoría lateral.

Vosniadou et al. (2008) mencionan que:

> La ausencia de pensamiento crítico, la fragmentación del conocimiento, la falta de transferencia y los conceptos erróneos caracterizan el razonamiento y la resolución de problemas de muchos estudiantes, particularmente en aquellos casos en los que la información nueva que se debe adquirir entra en conflicto con la estructura de la información existente. (p. 4)
>
> Para evitar la incongruencia interna, o la creación de modelos sintéticos, el alumno debe primero tomar conciencia de la incongruencia que existe entre la información que recibe y su conocimiento previo. La conciencia metaconceptual y el aprendizaje intencional son necesarios para lograr el cambio conceptual. (Vosniadou et al., 2008, p. 10)

Por ejemplo, uno de estos modelos sintéticos consiste en conceptualizar el conjunto de números racionales como la terna de conjuntos disjuntos: números enteros, decimales y fracciones. Así, a medida que llegan a comprender el principio de densidad a través de la instrucción, los estudiantes aplican este principio de forma acumulativa a los diferentes conjuntos de números. Incluso, difícilmente aceptan que pueda haber fracciones entre dos decimales, o viceversa. Como mencionan Vosniadou et al. (2008) “la nueva información presentada a través de la instrucción entra en conflicto con las presuposiciones de la teoría marco existente” (p. 15).

Smith III et al. (1994) argumentan que los conceptos erróneos deben ser reconcebidos como extensiones defectuosas del conocimiento productivo, que los conceptos erróneos no siempre son resistentes al cambio, y que la instrucción que “enfrenta los conceptos erróneos con miras a reemplazarlos está equivocada y es poco probable que tenga éxito” (p. 153).

El estudio del concepto del infinito en estudiantes mayores muestra que sus ideas acerca del mismo están influencias por sus experiencias previas (Tall, 2001b). Por ello, si el modelo se forma en el momento justo, la acción didáctica habrá funcionado y el estudiante se habrá construido el modelo correcto del concepto (D’Amore et al., 2006).

Así, como mencionan Vosniadou et al. (2008):

> Enseñar para el cambio conceptual requiere que los profesores presten atención al conocimiento previo que los estudiantes aportan a la tarea de aprendizaje y encuentren

> formas no solo de enriquecer este conocimiento previo sino también de cambiarlo, lo que eventualmente conducirá a la formación de nuevas estructuras. (p. 26)
>
> Los problemas del cambio conceptual requieren que los profesores también enseñen a los estudiantes mecanismos para la reestructuración del conocimiento, como el razonamiento basado en modelos, el razonamiento deliberado, usos de analogías y mapeos de dominios cruzados. (p. 27)

Investigadores como Thagard (2008) han interpretado el término cambio conceptual de manera más amplia para indicar todos los diferentes tipos de cambios conceptuales que ocurren en el proceso de aprendizaje y desarrollo. Chi (2008) distingue tres tipos de cambios conceptuales que ocurren en el proceso de aprendizaje: revisión de creencias, transformación del modelo mental y cambio categórico.

2.2.1 Revisión de creencias

Como se ha mencionado antes, las creencias previas de los estudiantes pueden faltar o estar incompletas, pero para que ocurra un cambio conceptual el conocimiento previo debe entrar en conflicto con la nueva información. Cuando el conflicto ocurre en alrededor de una sola idea se refiere a una creencia falsa.

Por tanto, "si las creencias falsas y la información correcta entran en conflicto en el sentido contradictorio, entonces el diseño de la instrucción dirigida a refutar las creencias falsas pudiera corregirlas, lo que resulta en una revisión de creencias" (Chi, 2008, p. 66).

2.2.2 Transformación del modelo mental

De manera similar que con las creencias, un modelo mental puede estar en conflicto con el modelo correcto. El modelo mental del estudiante entra en conflicto con el modelo correcto cuando falla. Así, un modelo mental defectuoso entra en conflicto con el modelo correcto en el sentido de que los dos generan predicciones y explicaciones diferentes y pueden contener elementos diferentes.

Por transformación del modelo mental se comprende como la modificación exitosa del modelo defectuoso, una confrontación holística podría inducir con éxito dicha transformación. Una forma de diseñar una confrontación holística podría ser hacer que los estudiantes examinen una representación visual del modelo mental defectuoso y luego contrastarlo con el diagrama del modelo correcto (Chi, 2008).

2.2.3 Cambio categórico

Existen conceptos erróneos sólidos, en el sentido de que son persistentes y resistentes al cambio conceptual a pesar de las correcciones a nivel de creencias individuales. Esto sugiere que, para conceptos erróneos sólidos, el cambio conceptual a través de revisión de creencias o transformación del modelo mental no es adecuado. Así, según Chi (2008) la instrucción debe diseñarse para enfocar el cambio conceptual en el nivel de cambio categórico.

Chi (2008) afirma que algunas creencias falsas o modelos mentales defectuosos son resistentes porque han sido mal categorizados, ya sea lateral u ontológicamente. Para evidenciar esto, tenemos que caracterizar la naturaleza de los conceptos erróneos y la naturaleza de la información correcta para ver si pertenece a categorías diferentes, por lo que entran en conflicto.

En resumen, la falta de conciencia de la necesidad de cambiar lateralmente las categorías se debe a la baja frecuencia de tales cambios en el mundo real y a las similitudes superficiales entre muchos fenómenos. La instrucción destinada a promover tales cambios debe comenzar por hacer que los estudiantes se den cuenta de que han cometido errores de categoría. (Chi, 2008, p. 78)

Capítulo 3

3 DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN

3.1 Paradigma de la investigación

Según Sfard (1998) "los conceptos deben entenderse como unidades básicas de conocimiento que pueden acumularse, refinarse gradualmente y combinarse para formar estructuras cognitivas cada vez más ricas" (p. 5). Así, el aprendizaje puede presentarse en al menos tres casos diferentes:

1) Falta de conocimientos previos: el estudiante no tiene conocimientos previos de los conceptos a aprender, en este caso, el aprendizaje consiste en añadir nuevos conocimientos.
2) Conocimiento incompleto: el estudiante tiene conocimientos previos correctos, pero están incompletos, en este caso, el aprendizaje consiste en rellenar lagunas del conocimiento.
3) Conocimientos en conflicto: el estudiante tiene conocimientos que entran en conflicto con el conocimiento correcto, en este caso, el aprendizaje consiste en cambiar la conceptualización del estudiante por la correcta.

En los primeros dos casos, la adquisición del conocimiento es del tipo enriquecedor (Carey, 1991); mientras que, en el tercer caso es del tipo cambio conceptual. En este, no se trata de agregar nuevos conocimientos o llenar vacíos incompletos, sino que, el aprendizaje se da al cambiar el conocimiento previo mal concebido por el conocimiento correcto.

Se ha visto que para un cambio conceptual exitoso se requiere de un cambio categórico del concepto del infinito, así desde el paradigma sociocrítico "se requiere de una metodología dialógica transformativa, que elimine la falsa conciencia y anime a la intervención y transformación" (Flores-Fahara, 2004, p. 5).

Según Sánchez-Santamaría (2013), desde un punto de vista sociocrítico, "el profesor pueda generar un conocimiento permanente a través de la reflexión acerca de la práctica" (p. 98) donde este "se construye siempre por intereses que parten de las necesidades de los grupos" (Díaz-López y Pinto-Loría, 2017, p. 47). Por tanto, la metodología de la investigación se encamina a una cambio conceptual del concepto del infinito y del nivel de participación del profesorado; ya que "el taller no solo exige del trabajo cooperativo; es, también, por su propia naturaleza, un entrenamiento para el trabajo cooperativo" (Ander-Egg, 1999, p. 17).

Desde el paradigma sociocrítico se considera una unidad dialéctica entre lo teórico y lo práctico (Díaz-López y Pinto-Loría, 2017; Ferrada-Torres y Cisterna-Cabrera, 2003; Sánchez-Santamaría, 2013), lo cual está acorde con una de las estrategias pedagógicas del taller, ya que según Ander-Egg (1999):

> Se trata de una forma de 'aprender haciendo' con la ayuda de otros y actuando cooperativamente con los demás. El aprendizaje dentro del taller es un proceso dialéctico y repetitivo del pensamiento-acción. Para educador y educando se trata de ir integrando en un mismo proceso la acción y la reflexión que se transforma en praxis, en cuanto ésta supone una práctica que suscita y enriquece los conocimientos teóricos. (…) [Así] el sistema de taller enseña a relacionar la teoría y la práctica, estableciendo una relación dialéctica entre 'lo pensado' y 'lo realizado' a través de la solución de problemas concretos. (p. 34)

Por otro lado, Ballesteros-Velázquez (2015) menciona que:

> Un taller no es un grupo de discusión donde un analista estudia y descubre el discurso de un colectivo (…) sino un momento de auto investigación-acción protagonizado por los participantes en los que los conductores-coordinadores (…) ayudan a sistematizar los resultados promoviendo la participación de todos y cada uno de los asistentes. (p. 122)

Además, "la naturaleza dialéctica [del paradigma sociocrítico] habilita al investigador de la educación para ver a la escuela no sólo como un lugar de adoctrinamiento, socialización o instrucción, sino como un terreno cultural que promueve la afirmación del estudiante y su autotransformación" (Díaz-López y Pinto-Loría, 2017, p. 47).

Así, una metodología de investigación-acción participante y un método de taller para profesores de matemáticas acerca del concepto del infinito ayudará a lograr un cambio conceptual exitoso, no sin antes diseñar las herramientas o instrumentos necesarios para que esto ocurra, ya que "lo que uno considera un conocimiento mal concebido determina el nivel en el que la instrucción debe apuntar al cambio conceptual, (…) [es decir,] como se defina el conflicto, determina cómo debe diseñarse la instrucción" (Chi, 2008, p. 66).

Según Colmenares (2012) la investigación-acción participativa tiene características particulares: en cuanto al acercamiento al objeto de estudio, se parte de un diagnóstico inicial sobre un tema o problemática que sea desea cambiar; tiene por propósitos no sólo investigar acerca del problema, sino además, para solucionar el problema (Martínez, 2009); los participantes se convierten en investigadores, participando en el problema, en la recolección de información, toma de decisiones, en la reflexión y acción; procedimentalmente se comparten discusiones, observaciones, foros, talleres, etc.; y sus metas son transformar la práctica educativa y acercarse a la realidad vinculando el cambio y el conocimiento (Latorre, 2010).

Así, las fases de la investigación-acción participativa son: 1) diagnóstico, 2) la construcción de planes de acción, 3) la ejecución de dichos planes y 4) la reflexión permanente de los participantes de la investigación, que permite redimensionar, reorientar o replantear nuevas acciones en atención a las reflexiones realizadas (Colmenares, 2012; Latorre, 2010; Martínez, 2009; Ortiz y Borjas, 2008; Pérez-Serrano, 1998).

Por lo cual, siguiendo estas fases de la metodología se presenta: 1) al inicio un pretest con los profesores para evidenciar las concepciones presentes antes de la intervención del taller; 2) se diseñó las situaciones en sesiones que llevaron a cabo los profesores a fin de superar sus concepciones desde el infinito natural hasta el infinito actual según la teoría del cambio conceptual (Chi, 2008; Thagard, 2008; Vosniadou et al., 2008); 3) se llevó a cabo el taller; 4) la participación grupal en el taller se vuelve primordial porque "cuando se habla del aprendizaje de las matemáticas (…) los alumnos pueden dominar las tareas matemáticas más fácilmente en grupos que individualmente" (Wistedt y Martinsson, 1996, p. 173); y 5) se aplicó un postest para saber el impacto del taller como intervención para el cambio conceptual de infinito en los profesores.

3.2 Método

En este trabajo se plantea un estudio de intervención: un taller para profesores de matemáticas de bachillerato para desarrollar un cambio conceptual del infinito. El taller estuvo constituido por nueve sesiones de una duración de cuatro horas cada una y al profesor se le proporcionó el material necesario para trabajar en cada sesión. Primero se define por taller aquella forma de aprendizaje mediante la realización de 'algo' que se lleva a cabo conjuntamente, es decir, aprendiendo haciendo en grupo (Ander-Egg, 1999). Particularmente, para este trabajo de investigación ese ‘algo’ es el concepto de infinito.

Chi (2008), Mena-Lorca et al. (2015) y Vosniadou et al. (2008) mencionan que para una construcción apropiada del infinito se deben plantear situaciones donde el estudiante enfrente sus limitaciones y contradicciones de sus propias concepciones para un cambio conceptual del infinito. Una de estas formas es a través de paradojas matemáticas.

Como afirman Roa-Fuentes y Oktaç (2014) “cuando un individuo afronta un situación paradójica, contemplando soluciones que parecen desprenderse de razonamientos lógicos, pero que resultan contradictorias entre ellas, es fundamental que detecte la diferencia” (p. 89), lo cual, desde el punto de vista del cambio conceptual se refiere a una revisión de creencias de primer nivel que tiene el individuo alrededor del infinito.

Sin embargo, en la investigación de Roa-Fuentes y Oktaç (2014) se analiza la paradoja del Gran Hotel de Hilbert desde la teoría APOE con estudiantes de posgrado en Educación Matemática y de Humanidades llegando a la conclusión de que persisten las ideas realistas aun después de la instrucción. De manera similar, Mamolo y Zazkis (2008) advierten que los estudiantes no notan las ideas en conflicto entre el infinito potencial y actual. Esto sugiere que la revisión de creencias como cambio conceptual no es suficiente y debe revisarse los modelos mentales ya que, como se mencionó anteriormente, esta resistencia al cambio puede deberse a una incorrecta categorización del concepto de infinito. Así, la investigación propone un cambio conceptual a nivel categórico para una concepción actual del infinito.

Por otro lado, “la práctica del taller ha demostrado que hay que comenzar con lo fácil para seguir con lo difícil” (Ander-Egg, 1999, p. 35). Así, el taller está compuesto por tres fases: de diagnóstico, de desarrollo y de impacto. En la primera fase, a los sujetos de estudio se les propuso situaciones donde emergieran las concepciones que presentan alrededor del infinito con un instrumento de pretest modificado de Krátká et al. (2021) (ver sección 3.5.1) y contrastar dichas concepciones con las presentes en la bibliografía. En la segunda fase, se aplicaron actividades a los sujetos de estudio en diferentes tiempos que les permitiera lograr esa transición del infinito natural al infinito actual. En la última fase, se aplicó un postest con el mismo instrumento que en la fase de diagnóstico, que permitió determinar el impacto del taller como actividad de intervención para un cambio conceptual del infinito.

Para el análisis de las respuestas de los profesores en el pre y post test se consideraron los criterios de evaluación que se muestran en la Tabla 1. Estos fueron tomados y modificados de Krátká et al. (2021, pp. 12–13).

Ítem 2	
Contexto geométrico e infinitamente grande	
Natural	El profesor dibuja el punto Y al final de la imagen de la línea recta (ítems 2b) y 2c)); y al mismo tiempo, para 2d) considera uno de los segmentos $\overline{AY}$ o $\overline{BZ}$ como uno más corto y el otro más largo.
Potencial	El profesor contesta para los ítems 2b) y 2c): ‘el punto Y no se puede construir’ o ‘el punto Y está en el infinito’; y al mismo tiempo, para 2d) considera uno de los segmentos $\overline{AY}$ o $\overline{BZ}$ como más largo.
Omega-épsilon	El profesor dibuja el punto Y al final de la imagen (ítem 2b)) o responde: ‘el punto Y no se puede construir’ o ‘el punto Y está en el infinito’ (igual ítem 2c)); y al mismo tiempo, la respuesta al ítem 2d) es: ‘los segmentos $\overline{AY}$ y $\overline{BZ}$ tienen la misma longitud’ o ‘es imposible compararlos porque son infinitos’.
Actual	El profesor contesta para los ítems 2b) y 2c): ‘es imposible construir el punto Y’ o ‘el punto Y está en el infinito’; y al mismo tiempo, para 2d): ‘los segmentos $\overline{AY}$ y $\overline{BZ}$ no se pueden comparar porque los segmentos no existen’.
Ítem 5	
Contexto geométrico e infinitamente cerca	
Natural	El profesor responde al ítem 5d) usando un valor concreto muy pequeño y a la vez al ítem 5e): ‘el área de uno de los triángulos ABY o SBY es mayor y el otro menor’.
Potencial	El profesor responde al ítem 5d): ‘el triángulo ABY no existe’ o ‘es imposible determinarlo con precisión’ o ‘el área es infinitamente pequeña’; y al mismo tiempo, para 5e) la respuesta es: ‘el área de uno de los triángulos ABY o SBY es mayor y el otro menor’.

Omega-épsilon	El profesor responde al ítem 5d): 'el triángulo ABY no existe' o 'es imposible determinarlo con precisión' o 'el área es infinitamente pequeña' o 'el área es igual o tiende a cero'; y al mismo tiempo, para 5e): 'las áreas son iguales o las áreas no se pueden comparar por ser infinitamente pequeñas'.
Actual	El profesor responde al ítem 5d): 'el triángulo ABY no existe' o 'es imposible determinarlo con precisión' o 'el área es infinitamente pequeña'; y al mismo tiempo, para 5e): 'las áreas no se pueden comparar ya que los triángulos no existen'.
Ítems 1 y 3	
Contexto aritmético e infinitamente grande	
Natural	El profesor responde a los ítems 1b) y 3) con un valor concreto muy grande.
Potencial u omega-épsilon	El profesor responde al ítem1b) con el símbolo '∞'; y al mismo tiempo, el símbolo '∞' o la palabra 'infinito' en el ítem 3).
Actual	El profesor responde al ítem1b): 'ese número no existe'; y al mismo tiempo, para el ítem 3): 'tal número no existe' o 'esto no se puede decir'.
Ítems 1 y 4	
Contexto aritmético e infinitamente cerca	
Natural	El profesor responde a los ítems 1c) y 4) con un valor concreto muy pequeño.
Potencial u omega-épsilon	El profesor responde al ítem1c): 'es imposible determinarlo con precisión' o 'infinitamente cercano al tres' o '$3.000 \ldots 01$'; y al mismo tiempo, para el ítem 4): 'es imposible determinarlo con precisión' o 'infinitamente cercano al cero' o '$0.000 \ldots 01$'.
Actual	El profesor responde al ítem 1c) y 4): 'ese número no existe'.

Tabla 1. *Criterios de evaluación para cada uno de los ítems del pre y post test.*

3.3 Participantes

La muestra estuvo conformada por 15 profesores de matemáticas en servicio en el nivel bachillerato (6 hombres y 9 mujeres) tanto del sistema público (5/15) como del privado (10/15) del Estado de Tlaxcala, México. Algunos de los participantes (4/15) laboraban de igual manera en educación secundaria. Para la selección de los participantes se tomaron en cuenta los siguientes criterios: 1), una antigüedad en el servicio de al menos un año como profesor de bachillerato; 2), que los profesores tuviesen una formación en matemáticas (puras o aplicadas) o ingenierías afines; 3), que la mayoría de sus horas-clases frente a grupo fuesen afines a materias de matemáticas, por ejemplo, álgebra o cálculo diferencial e integral; y 4), que laborasen en instituciones educativas o radiquen en el Estado de Tlaxcala, México.

3.4 Estudio piloto

Para el primer momento se consideró un pretest con los profesores de matemáticas con el fin de evidenciar las concepciones que presentaban, previo a las situaciones que se abordaron en el taller. En primer lugar, este cuestionario es considerado ya que, según los autores, permite identificar las cuatro concepciones del infinito en cada reactivo en un contexto aritmético y geométrico, así como en una visión a distancia (‘infinitamente grande’) y una visión a profundidad (‘infinitamente cerca’) (Krátká et al., 2021).

Se realizó un estudio piloto con el propósito de contrastar los resultados obtenidos con estudiantes que han sido reportados y con los de profesores en servicio de esta aplicación. El supuesto que se esperó comprobar es que dicho instrumento es igual de aplicable con profesores y evidencia las mismas concepciones que los estudiantes. El instrumento para el estudio piloto consta de cinco ítems y es el mismo que el mostrado en Krátká et al. (2021, pp. 9–10) con ciertas modificaciones menores a modo de que el profesor pueda justificar sus respuestas de forma abierta (ver sección 3.5.1). Para la implementación se consideraron ocho profesores en servicio (cinco de nivel básico y tres de bachillerato) y un profesor en formación de nivel básico, todos de diferentes instituciones educativas y de sostenimiento público o privado.

Los resultados del estudio piloto que son mostrados en Díaz-Espinoza y Juárez-López (2023) llevan a comprobar que dicho instrumento presentado en Krátká et al. (2021), el cual fue aplicado en estudiantes, también muestra resultados similares para profesores de educación básica y media superior en servicio y en formación.

3.5 Instrumentos

A continuación, se justifican los problemas que se tomaron para cada una de las fases de la investigación. Los problemas completos se muestran en la sección de Anexos.

3.5.1 *De diagnóstico*

En primer lugar, el instrumento pretest fue aplicado en Krátká et al. (2021) con estudiantes entre los 8 y 15 años y como se observó en el estudio piloto con profesores se muestran similitudes en los resultados obtenidos por estudiantes. El cuestionario completo se muestra a continuación y fue tomado de la literatura con ciertas modificaciones que permitieran justificar las respuestas de los profesores (Krátká et al., 2021, pp. 9–10).

1. La siguiente inecuación está dada por $x - 1 > 2$

   a) Encierre en un círculo los números que satisfacen la desigualdad:

   1.5 3.0 3.01 7

   b) ¿Cuál es el número más grande que satisface esta desigualdad? Seleccione una de las opciones siguientes.

   A. 999 999 999 999 999 999

   B. Un billón

   C. ∞

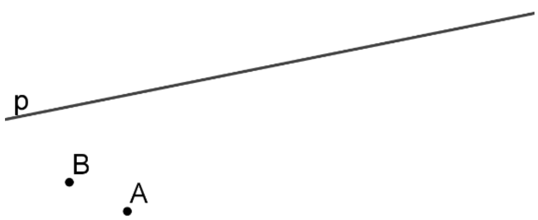
   D. Ese número no existe

   E. Otro número. Especifique:

   c) Justifique su respuesta.

d) ¿Cuál es el número positivo más pequeño que satisface la desigualdad? Explique su respuesta.

2. Dada la línea recta p y los puntos A y B, que no están sobre la línea recta.



a) Construya el segmento $\overline{AX}$ con el punto X, donde el punto X está sobre la línea recta p y el segmento $\overline{AX}$ es lo más corto posible.

b) Construya el segmento $\overline{AY}$ con el punto Y, donde el punto Y está sobre la línea recta p y el segmento $\overline{AY}$ es lo más largo posible.

c) Construya el segmento $\overline{BZ}$ con el punto Z, donde el punto Z está sobre la línea recta p y el segmento $\overline{BZ}$ es lo más largo posible.

d) ¿Qué puede decir acerca de las longitudes de los segmentos $\overline{AY}$ y $\overline{BZ}$? Seleccione una de las opciones siguientes.

A. La longitud del segmento $\overline{AY}$ es menor que la longitud del segmento $\overline{BZ}$.

B. La longitud del segmento $\overline{AY}$ es mayor que la longitud del segmento $\overline{BZ}$.

C. La longitud del segmento $\overline{AY}$ es igual que la longitud del segmento $\overline{BZ}$.

D. Las longitudes de los segmentos $\overline{AY}$ y $\overline{BZ}$ no pueden ser comparadas porque los segmentos $\overline{AY}$ y $\overline{BZ}$ no existen.

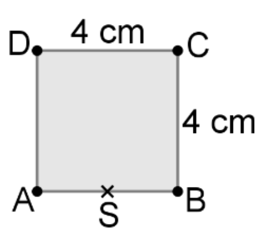
E. Las longitudes de los segmentos $\overline{AY}$ y $\overline{BZ}$ no pueden ser comparadas porque son interminables.

e) Justifique su respuesta.

3. ¿Cuál es el número real más grande?

4. ¿Cuál es el número real más pequeño mayor que cero?

5. Dado el cuadrado $ABCD$ con lados de longitud de 4 cm.



a) Halle el punto X sobre el lado $\overline{BC}$ para que el triángulo $\triangle ABX$ tenga la mayor área posible.

b) Calcule el área del triángulo $\triangle ABX$.

c) Halle el punto Y sobre el lado $\overline{BC}$ para que el triángulo $\triangle ABY$ tenga la menor área posible. (¡El punto Y debe ser diferente del punto B¡)

d) Calcule el área del triángulo $\triangle ABY$.

e) El punto S es el punto medio del lado $\overline{AB}$. ¿Qué puede decir acerca de las áreas de los triángulos $\triangle ABY$ y $\triangle SBY$? Seleccione una de las opciones siguientes.

A. El área del triángulo $\triangle ABY$ es más grande que la del triángulo $\triangle SBY$.

B. El área del triángulo $\triangle ABY$ es más pequeña que la del triángulo $\triangle SBY$.

C. El área del triángulo $\triangle ABY$ es idéntica que la del triángulo $\triangle SBY$.

D. Las áreas no pueden ser comparadas porque los triángulos no existen.

E. Las áreas no pueden ser comparadas porque son infinitamente pequeñas.

f) Justifique su respuesta.

En segundo lugar, dada la importancia de los problemas y los resultados obtenidos en otras investigaciones se consideró dichos problemas como un análisis previo de las concepciones de los profesores.

Particularmente, los ítems 1 y 3 (ver sección 3.5.1) han sido estudiados en otras investigaciones (Belmonte y Sierra, 2011; Cihlář et al., 2015; Hannula et al., 2006; Homaeinejad et al., 2021; Manfreda Kolar y Čadež, 2012), por ejemplo, en Hannula et al. (2006) se observó un porcentaje alto (más del 50%) de estudiantes entre los 11 y 14 años que responden con un numero finito grande (999 999 999 999 999 999) dejando ver, en palabras de Krátká et al. (2021), una concepción del infinito natural. Al contrario, en Belmonte y Sierra (2011) se observó un porcentaje menor (un poco más del 5%) de estudiantes entre los 11 y 13 años que responden, por ejemplo, que el número de granos de arena en la Tierra y el número de células en el cuerpo humano no se pueden ordenar porque son infinitos, dejando ver, nuevamente una concepción del infinito natural. Estos porcentajes son nuevamente reflejados en Manfreda Kolar y Čadež (2012) y Homaeinejad et al. (2021).

Por otro lado, los ítems 2 y 5 (ver sección 3.5.1) han sido mostrados con anterioridad con ciertas semejanzas o diferencias, pero el mismo objetivo de estudio (Belmonte y Sierra, 2011; Cihlář et al., 2009, 2015; Fischbein et al., 1979; Manfreda Kolar y Čadež, 2012). Por ejemplo, el ítem 2 aparece en Cihlář et al. (2009) y se estudia cualitativamente con el propósito de superar los obstáculos entre la imagen mostrada de una línea recta y el concepto abstracto en el desarrollo de una entrevista, concluyendo que el estudiante supera su obstáculo y no existe tal punto. Por otro lado, el ítem 5 aparece en Manfreda Kolar y Čadež (2012) y se observó que un porcentaje muy bajo de sujetos (2%) notan que ese punto no existe; al contrario, un porcentaje mayor de individuos (54%) dibujan tal punto por encima de la línea recta para formar el triángulo.

Finalmente, el ítem 4 (ver sección 3.5.1) ha sido investigado en Belmonte Martínez (2009), Cihlář et al. (2015), Hannula et al. (2006) y Monaghan (2001). Por ejemplo, en Cihlář et al. (2015) se observó que menos de una tercera parte de los estudiantes entre los 12 y 18 años pudieron superar la concepción del infinito natural. En promedio, sólo un 6% de estudiantes superaron la concepción de infinito natural y se ubicaron en el infinito actual. En Belmonte y Sierra (2011) se observó que alrededor de un 30% de los estudiantes entre los 12 y 16 años evidencian una concepción de infinito potencial. Similarmente, en Monaghan (2001) cerca de un 50% de los estudiantes evidencian una concepción de infinito potencial.

3.5.2 *De desarrollo*

Para el segundo momento se llevó a cabo el taller con los profesores. Como se ha mencionado antes, la intención del taller es un cambio conceptual del infinito (Chi, 2008) recorriendo las diferentes concepciones de éste: natural, potencial, posición omega-épsilon y actual (Krátká et al., 2021) y considerando la dificultad presente en las situaciones planteadas del tipo ‘infinitamente grande, ‘infinitamente muchos’ e ‘infinitamente cerca’ (Manfreda Kolar y Čadež, 2012). Las situaciones que se consideran en este segundo momento son una recopilación de los presentados en la literatura bajo ciertas modificaciones. A continuación, se tienen los propósitos para cada una de las sesiones y actividades a desarrollar durante el taller.

3.5.2.1 *Sesión 1*

El propósito de la primera sesión es explorar el infinito natural y potencial en situaciones del tipo ‘infinitamente grande’. Primero, se pidió que dieran una definición del infinito (Homaeinejad et al., 2021; Kattou et al., 2010), después debían ordenar conjuntos finitos (Belmonte y Sierra, 2011), luego preguntarse por el número más grande posible (Cihlář et al., 2015; Hannula et al., 2006; Homaeinejad et al., 2021; Krátká et al., 2021; Manfreda Kolar y Čadež, 2012), una situación geométrica sobre rectas que se intersecan (Cihlář et al., 2009) y por último sobre la construcción de líneas rectas (Cihlář et al., 2015). Las actividades completas se muestran en el Anexo A.

3.5.2.2 *Sesión 2*

El propósito de la segunda sesión era explorar el infinito potencial y posición omega-épsilon en situaciones del tipo ‘infinitamente grande’. Para ello se consideró la situación de comparar tres conjuntos: los números naturales, los números pares y los números cuadrados perfectos (Fischbein et al., 1979; Juter, 2019; Monaghan, 2001; Moreno Armella & Waldegg, 1991). Además se tiene una situación geométrica referente a cruzar una línea recta “rodeándola” (Cihlář et al., 2009). Las actividades completas se muestran en el Anexo C.

3.5.2.3 Sesión 3

El propósito de la tercera sesión era explorar la posición omega-épsilon e infinito actual en situaciones del tipo ‘infinitamente grande’. En esta parte se consideró la comparación de conjuntos infinitos (Belmonte y Sierra, 2011; Homaeinejad et al., 2021; Kattou et al., 2010; Tsamir, 1999) así como una situación geométrica de comparación de líneas rectas (Krátká, 2013).

Además, la paradoja del Gran Hotel de Hilbert, como mencionan diferentes autores permitió explorar las concepciones iniciales del infinito y generar los conflictos cognitivos entre sus intuiciones generadas por el mundo real (infinito potencial) y el infinito actual presente en esta paradoja matemática (Dubinsky et al., 2005a; Mamolo y Zazkis, 2008; Roa-Fuentes y Oktaç, 2014; Villabona Millán et al., 2022; Wijeratne y Zazkis, 2015). Se consideró el problema como lo muestran Mamolo y Zazkis (2008) y Roa-Fuentes y Oktaç (2014) con ciertas modificaciones. Las actividades completas se muestran en el Anexo D.

3.5.2.4 Sesión 4

El propósito de la cuarta sesión era explorar el infinito natural y potencial en situaciones del tipo ‘infinitamente muchos’. Para iniciar se propuso una situación que involucra la cantidad de números en un intervalo cerrado (Hannula et al., 2006; Juter, 2019; Manfreda Kolar y Čadež, 2012) y una situación geométrica de la cantidad de puntos en un segmento de recta (Fischbein et al., 1979; Manfreda Kolar y Čadež, 2012). Las actividades completas se muestran en el Anexo E.

3.5.2.5 Sesión 5

El propósito de la quinta sesión era explorar el infinito potencial y posición omega-épsilon en situaciones del tipo ‘infinitamente muchos’. Aquí se presentó una situación que involucra la comparación de intervalos cerrados de diferentes rangos (Monaghan, 2001; Moreno Armella & Waldegg, 1991) y una situación de comparación de segmentos de recta usando una relación uno a uno de manera geométrica (Fischbein et al., 1979; Moreno Armella & Waldegg, 1991; Tall, 1980). Las actividades completas se muestran en el Anexo F.

3.5.2.6 Sesión 6

El propósito de la sexta sesión era explorar la posición omega-épsilon e infinito actual en situaciones del tipo ‘infinitamente muchos’. Se presentó una situación geométrica de partición de un cuadrado (Eisenmann, 2008) y de un triángulo equilátero (Fischbein et al., 1979). Por último, una situación de la equivalencia entre un segmento de recta, un cuadrado y un cubo unitarios (Fischbein et al., 1979; Moreno Armella & Waldegg, 1991). Las actividades completas se muestran en el Anexo G.

3.5.2.7 Sesión 7

El propósito de la séptima sesión era explorar el infinito natural y potencial en situaciones del tipo ‘infinitamente cerca’. Para comenzar se exploró la proximidad al cero (Belmonte y Sierra, 2011; Cihlář et al., 2015; Hannula et al., 2006; Juter, 2019; Manfreda Kolar y Čadež, 2012), la igualdad de $\frac{1}{3}$ y $0.333\ldots$ (Eisenmann, 2008; Kattou et al., 2010; Monaghan, 2001; Wistedt y Martinsson, 1996) y números decimales periódicos (Zippin, 1962). Las actividades completas se muestran en el Anexo H.

3.5.2.8 Sesión 8

El propósito de la octava sesión era explorar el infinito potencial y posición omega-épsilon en situaciones del tipo ‘infinitamente cerca’. Se tomó la situación de la equivalencia entre $0.999\ldots$ y 1 (Eisenmann, 2008; Juter, 2019; Kattou et al., 2010; Mena-Lorca et al., 2015; Yopp et al., 2011; Zippin, 1962), una situación de división de un segmento de recta (Belmonte y Sierra, 2011; Fischbein et al., 1979; Tall y Tirosh, 2001) y una situación geométrica sobre el triángulo de menor área (Cihlář et al., 2015; Manfreda Kolar y Čadež, 2012). Las actividades completas se muestran en el Anexo I.

3.5.2.9 Sesión 9

El propósito de la novena sesión era explorar la posición omega-épsilon e infinito actual en situaciones del tipo ‘infinitamente cerca’. Por último se propusieron situaciones sobre la existencia de un rectángulo (Zippin, 1962), de áreas mínimas (Eisenmann, 2008; Fischbein et al., 1979) y la paradoja de las pelotas de tenis (Mamolo y Zazkis, 2008; Roa-Fuentes y Oktaç, 2014). Las actividades completas se muestran en el Anexo J.

3.5.3 De cierre

Para cerrar la intervención del taller y con la finalidad de saber el impacto de este en la superación de las concepciones del infinito en los profesores de matemáticas en servicio, se aplicó el postest considerando el cuestionario mostrado en la sección 3.5.1.

Capítulo 4

4 RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En esta sección se muestran los resultados del pretest y postest considerando las respuestas de los profesores de matemáticas que estuvieron presentes durante todas las sesiones del taller. Tanto para el pretest y postest se les proporcionó un tiempo de 50 minutos para su finalización y posteriormente se analizaron las respuestas según la rúbrica mostrada en Krátká et al. (2021, pp. 12–13).

Los resultados obtenidos fueron organizados con relación al tipo de situación y contexto. Además, estos fueron clasificados de acuerdo con la concepción del infinito que los profesores presentaron. La Figura 1 muestra los resultados a manera de resumen.

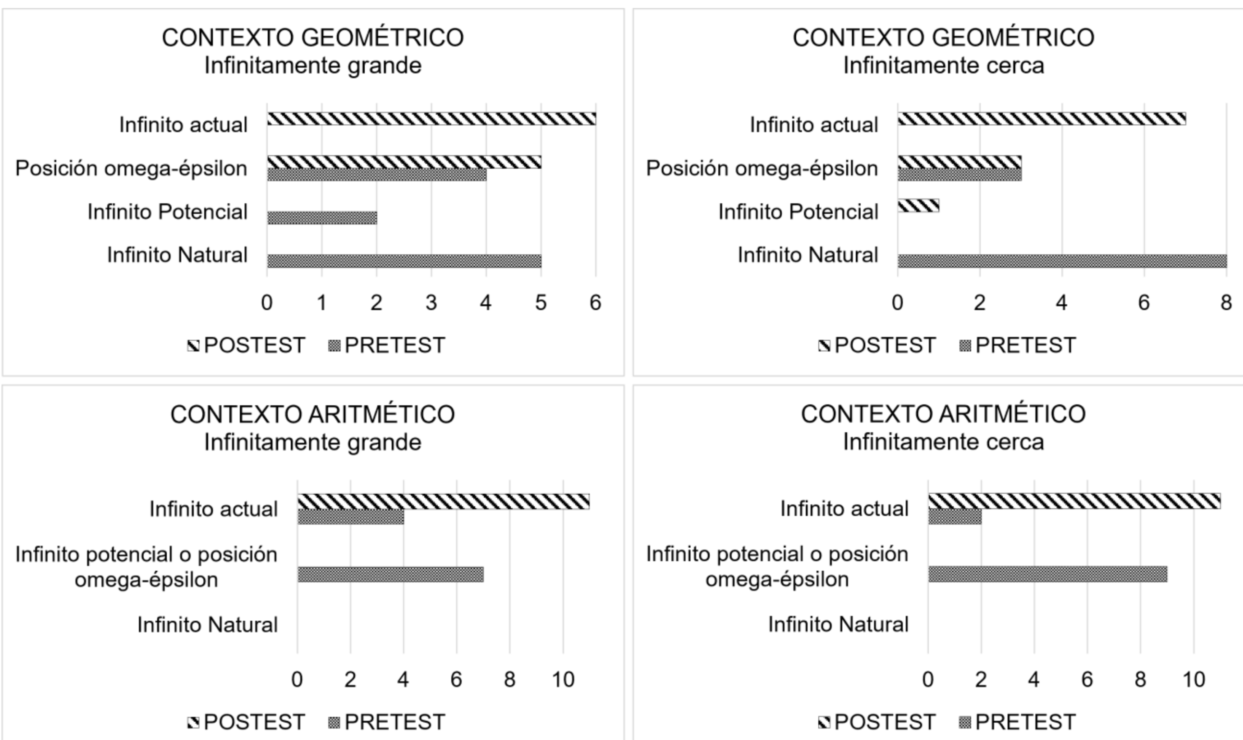


Figura 1. *Número de profesores que presentaron la concepción del infinito en el contexto y tipo de situación antes y después del taller.*

4.1 Pretest

El pretest fue aplicado a 15 profesores antes de la intervención del taller, sin embargo, solo se muestran los resultados de 11 profesores ya que no todos concluyeron la intervención o estuvieron presentes durante todas las sesiones del taller. De manera general se obtuvieron los resultados que se muestran en la Tabla 2. Los porcentajes que se muestran en la tabla corresponden a los profesores que presentaron la concepción en el tipo de vista y en el contexto correspondiente.

CONTEXTO	VISTA	CONCEPCIÓN	PORCENTAJE PROFESORES
Geométrico	Infinitamente grande	Infinito natural	45.4% (5/11)
		Infinito potencial	18.2% (2/11)
		Posición omega-épsilon	36.4% (4/11)
		Infinito actual	0% (0/11)
	Infinitamente cerca	Infinito natural	72.7% (8/11)
		Infinito potencial	0% (0/11)
		Posición omega-épsilon	27.3% (3/11)
		Infinito actual	0% (0/11)
Aritmético	Infinitamente grande	Infinito natural	0% (0/11)
		Infinito potencial o posición omega-épsilon	63.6% (7/11)
		Infinito actual	36.4% (4/11)
	Infinitamente cerca	Infinito natural	0% (0/11)
		Infinito potencial o posición omega-épsilon	81.8% (9/11)
		Infinito actual	18.2% (2/11)

Tabla 2. *Resultados del pretest con profesores de matemáticas.*

En general, sin importar el contexto geométrico o aritmético pocos profesores tuvieron una concepción actual del infinito, de hecho, en un contexto geométrico en una vista 'infinitamente cerca' no hubo profesores que presentaran una concepción actual. De manera similar, en un contexto geométrico en una vista ‘infinitamente grande’ no hubo profesores que presentaran una concepción potencial del infinito.

Por otro lado, hay una fuerte tendencia a concebir al infinito natural en contextos geométricos con una diferencia sutil en vistas ‘infinitamente grande’ que ‘infinitamente cerca’ y tiende a desaparecer en contextos aritméticos. Así, los profesores tienen mayor éxito en concebir al infinito potencial o posición omega-épsilon en un contexto aritmético que geométrico.

En el contexto geométrico en una vista ‘infinitamente grande’, en el ítem 2 la mayoría de los profesores (11/15) dibujaron los segmentos de recta con el punto extremo al final de la recta p de la ilustración (véase Figura 2), contestando que alguno de ellos es mayor, evidenciando una concepción natural del infinito. Algunos profesores (2/15) incluso extienden la línea recta p pero siguen colocando al final los extremos de los segmentos (véase Figura 3), sin embargo, hacen la aclaración que en realidad no podría realizarse dicho trazo, es decir, que el extremo del segmento no puede ser construido y por ende concluyeron que los segmentos no pueden ser comparados al no existir, evidenciando una posición omega-épsilon del infinito (véase Figura 4 y Figura 5).

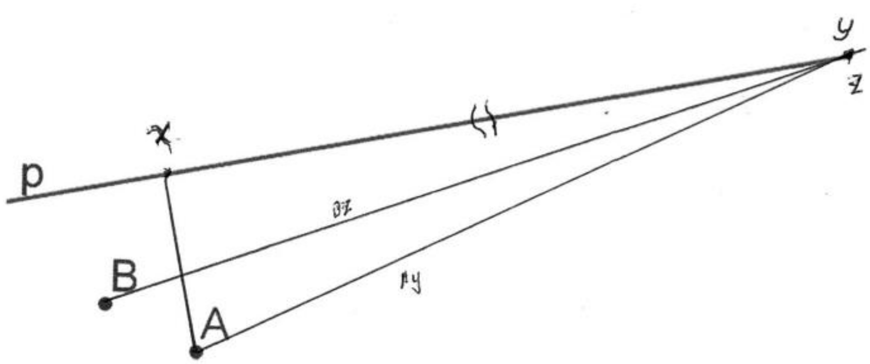


Figura 2. *Trazos realizados por el P14 en el ítem 2).*

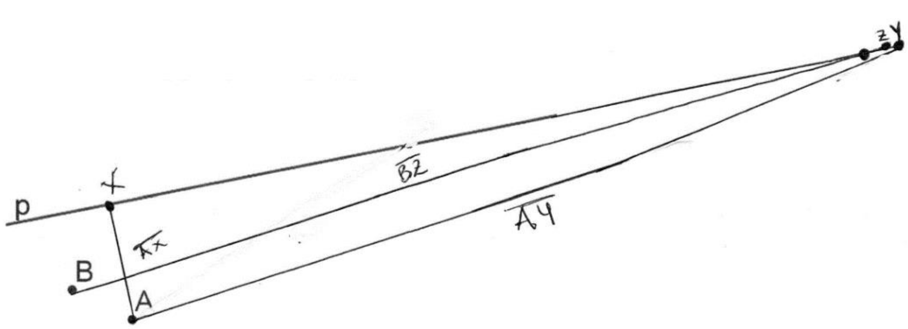


Figura 3. *Trazos realizados por el P5 en el ítem 2).*

b) Construya el segmento $\overline{AY}$ con el punto Y, donde el punto Y está sobre la línea recta p y el segmento $\overline{AY}$ es lo más largo posible. (lo tracé considerando el tamaño de la hoja, sin embargo si no hubiera la limitante de la hoja entonces no sería posible trazarlo.

Figura 4. *Respuesta del P5 a los trazos realizados en el ítem 2b).*

Porque la línea es infinita, el concepto tal cuál indica que en un conjunto INFINITO de puntos consecutivos por tanto NO se pueden especificar los segmentos $\overline{AY}$ y $\overline{BZ}$

Figura 5. *Respuesta del P10 a los trazos realizados en el ítem 2).*

En el contexto geométrico en una vista 'infinitamente cerca', en el ítem 5 la mayoría de los profesores (9/15) dan valores concretos pequeños como área el triángulo resultante (véase Figura 6) y contestaron que algún área es mayor que otra, evidenciando una concepción del infinito natural. Una posición omega-épsilon se observó en cuatro profesores al justificar que las áreas de los triángulos son infinitamente pequeños y no pueden compararse (véase Figura 7).

$$A = \frac{(4)(0.1)}{2} \qquad \therefore A = 0.02\,cm^2$$

$$A = \frac{0.04}{2} = 0.02$$

Figura 6. *Respuesta del P5 al ítem 5d).*

Por geometría si $\overline{BB'}$ es la base, $\overline{AD}$ y $\overline{SB}$ las alturas, entonces las áreas de los ~~ΔBB~~ $\Delta ABB'$ y $\Delta SBB'$ son infinitamente pequeñas.

Figura 7. *Respuesta del P14 al ítem 5f).*

En el contexto aritmético en una vista 'infinitamente grande', en los ítems 1b) y 3 algunos profesores (3/15) presentaron una concepción del infinito natural al considerar como respuesta números finitos muy grandes (véase Figura 8). La mayoría de los profesores (11/15) están en la posición omega-épsilon del infinito o infinito potencial considerando como respuesta la palabra infinito o el símbolo ∞. Solamente un profesor consideró que no existe un número real más grande, evidenciando una concepción del infinito actual (véase Figura 9).

Una vez leí que es el gogol.

Figura 8. *Respuesta del P6 al ítem 3).*

Porque ~~existe~~ este número tiene una "n" cantidades o cifras posibles. El dominio de la ecuación no tiene un límite

Figura 9. *Respuesta del P10 al ítem 1c).*

Por último, en el contexto aritmético en una vista 'infinitamente cerca', en los ítems 1d) y 4 algunos profesores presentaron una concepción naturalista (2/15) contestando de manera similar al ítem 1c) pero con valores numéricos pequeños (véase Figura 10), una mayoría (12/15) una concepción potencial o posición omega-épsilon al contestar que es infinitamente pequeño (véase Figura 11) y solo un profesor una concepción actual al decir que ese número no existe (véase Figura 12).

Pues como podría ser 3.0000000........1 ó 3.001 hasta dónde podría escribir ceros y un uno al final ~~des~~ a la derecha del punto decimal

Figura 10. *Respuesta del P2 al ítem 1d).*

3.00...1 Un número que tienda a 3 pero que no sea 3 de tal manera que tenga decimas que indiquen q'ese número es mayor que 2 al restarle el uno.

Figura 11. *Respuesta del P11 al ítem 1d).*

No hay un número como tal, ya que siempre se le puede agregar un cero a la respuesta, es decir yo puedo decir que el número más pequeño es:
3.00000000000000000000000000000000000000000000000000000000001
que es lo que cabe en el recuadro, pero siempre va a haber alguien que diga que si le agrega otro cero entonces será más pequeño el número y cumple la desigualdad.

Figura 12. *Respuesta del P5 al ítem 1d).*

Cabe mencionar que los profesores que presentaron concepciones actuales o posición omega-épsilon del infinito en contextos aritméticos no necesariamente también lo hacen en contextos geométricos. Por ejemplo, el profesor P10 tuvo nociones actuales en contextos aritméticos, pero posición omega-épsilon en contextos geométricos. Esto refuerza lo que mencionan Cihlář et al. (2015) en que los estudiantes pueden alternar entre la posición omega-épsilon e infinito actual. Sin embargo, algunos profesores (por ejemplo, el profesor P3) presentaron nociones del infinito potencial en contextos aritméticos, pero presentan concepciones naturalistas en contextos geométricos, por lo tanto, consolidar concepciones omega-épsilon o actuales del infinito es importante para tener un mayor éxito en ambos contextos y ambos tipos de vistas (véase Figura 13 y Figura 14).

R= Usamos la simbología de (∞) para representar una gama infinita de posibilidades númericas como aquellas que $\lim_{x \to \infty} x-1>2$ dando a entender que siempre existira un número mucho más grande que satisfaga a la desigualdad.

Figura 13. *Respuesta del P3 al ítem 1c).*

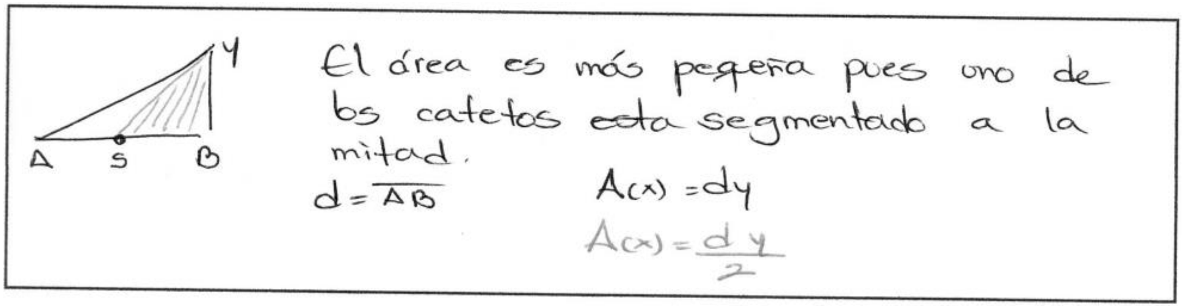


Figura 14. *Respuesta del P3 al ítem 5f).*

4.2 Postest

Se aplicó el postest a los mismos profesores al finalizar el taller con un espacio de una semana entre la última sesión y dicha aplicación. De manera general se obtuvieron los resultados que se muestran en la Tabla 3. Los porcentajes que se muestran en la tabla corresponden a los profesores que presentaron la concepción en el tipo de vista y en el contexto correspondiente.

CONTEXTO	**VISTA**	**CONCEPCIÓN**	**PORCENTAJE PROFESORES**
Geométrico	Infinitamente grande	Infinito natural	0% (0/11)
		Infinito potencial	0% (0/11)
		Posición omega-épsilon	45.4% (5/11)
		Infinito actual	54.6% (6/11)
	Infinitamente cerca	Infinito natural	0% (0/11)
		Infinito potencial	9.1% (1/11)
		Posición omega-épsilon	27.3% (3/11)
		Infinito actual	63.6% (7/11)
Aritmético	Infinitamente grande	Infinito natural	0% (0/11)
		Infinito potencial o posición omega-épsilon	0% (0/11)
		Infinito actual	100% (11/11)
		Infinito natural	0% (0/11)

	Infinitamente cerca	Infinito potencial o posición omega-épsilon	0% (0/11)
		Infinito actual	100% (11/11)

Tabla 3. *Resultados del postest con profesores de matemáticas.*

En general, en un contexto geométrico los profesores presentaron una concepción actual o posición omega-épsilon, de hecho, solo un profesor presentó una concepción potencial del infinito en una vista ‘infinitamente cerca’. En un contexto aritmético y sin importar el tipo de vista, todos los profesores presentaron una concepción actual del infinito. Esto siguiere que en situaciones aritméticas se tiene mayor facilidad para superar concepciones del infinito que en contextos geométricos.

En un contexto geométrico en una vista ‘infinitamente grande’ no hubo concepciones naturales o potenciales del infinito, las respuestas de los profesores se dividieron dos clases: una en la que los segmentos no pueden ser comparados porque no existen, y otra porque son interminables (véase Figura 15). Algunos profesores (2/11) argumentaron que ambas respuestas pueden ser igual de válidas al parecer sin darse cuenta de la contradicción entre estas dos respuestas (véase Figura 16), así se considera que su concepción del infinito está en la posición omega-épsilon.

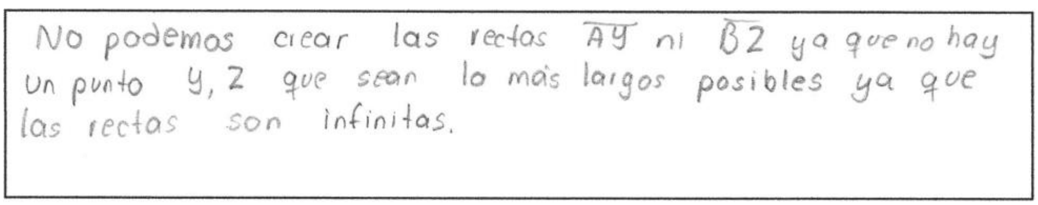


Figura 15. *Respuesta del P10 al ítem 2e).*

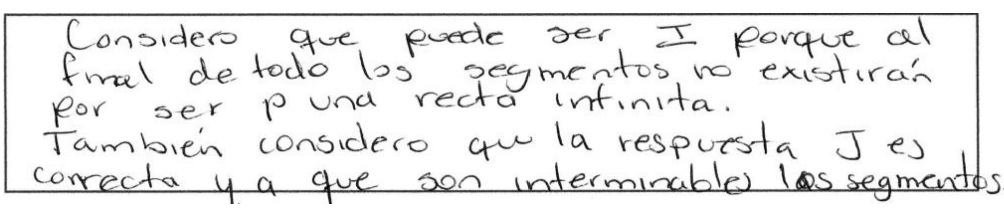


Figura 16. *Respuesta del P5 al ítem 2e).*

En un contexto geométrico en una vista ‘infinitamente cerca’, la mayoría de las respuestas de los profesores se concentran en que las áreas de los triángulos no pueden ser comparadas porque no existen o porque son infinitamente pequeñas (véase Figura 17). Un profesor indica que las áreas son infinitamente cercanas a valores diferentes y por tanto una es mayor que otra, así se considera que su concepción es potencial (véase Figura 18).

El punto Y no existe, no hay un punto tal que el área sea lo más pequeña posible, por tanto ni el triángulo ΔABY ni el ΔSBY pueden ser comparados, ambos son infinitamente pequeños.

Figura 17. *Respuesta del P10 al ítem 5f).*

Como S es el punto medio del lado $\overline{AB} = 2$, el punto Y sobre $\overline{BC}$ es casi el punto B por lo tanto so $A \to 1$ y como las áreas son pequeñas una tiende a 2 y la otra a 1

Figura 18. *Respuesta del P9 al ítem 5f).*

En un contexto aritmético tanto en una vista 'infinitamente grande' como 'infinitamente cerca', todos los profesores presentaron una concepción actual del infinito respondiendo que no existe un número más grande o un número más cercano al cero, respectivamente (véase Figura 19 y Figura 20).

No existe, no hay un número que sea el más grande, siempre podemos pensar en que ~~es~~ se puede agregar uno más.

Figura 19. *Respuesta del P14 al ítem 3).*

No existe, ya que siempre habrá
una infinidad de números cercanos
más pequeños cercanos a cero.

Figura 20. *Respuesta del P5 al ítem 4).*

Después de las situaciones planteadas en el taller se observó una superación en las concepciones de profesores de matemáticas en contextos aritméticos y geométricos, por ejemplo, el profesor P3 presentó concepciones actuales en un contexto aritmético y en un contexto geométrico con una vista 'infinitamente cerca' (véase Figura 21) mientras que en una vista 'infinitamente grande' presentó una concepción de posición omega-épsilon (véase Figura 22).

No existe

Por la definición de triángulo $A=\frac{b\times h}{2}$ $h\neq 0$.
y $0.\bar{0}1 \cong 0$ por tal razón no existe un $h\neq 0$
y encontramos una contradicción

No podemos comparar algo que no existe por definición
de triángulo, por tal motivo no existen ambos triángulos.

Figura 21. *Respuesta del P3 a los ítems 5d) y 5f), respectivamente.*

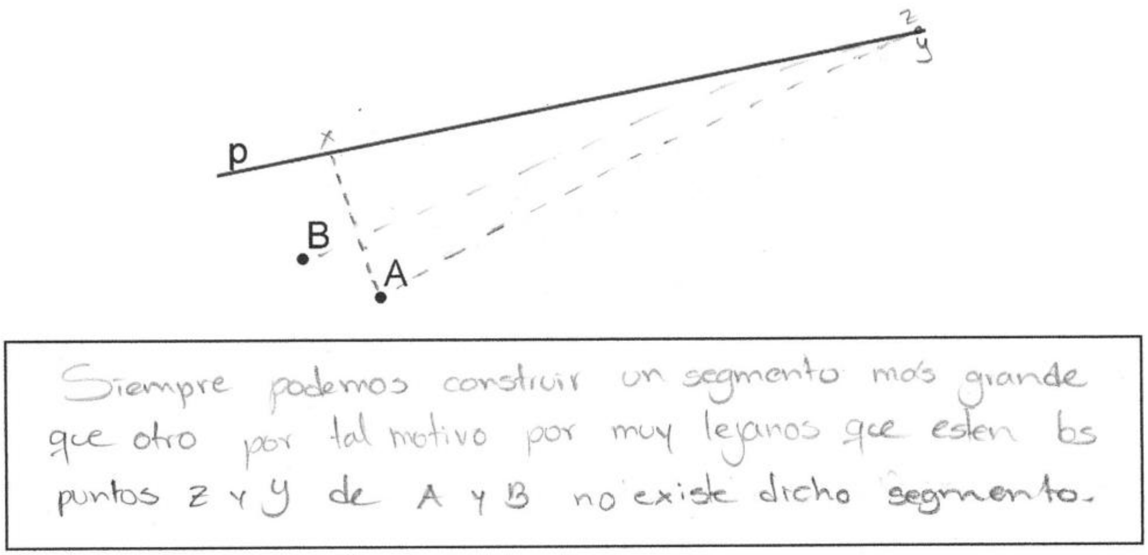


Figura 22. *Trazos y respuesta del P3 a los ítems 2) y 2e), respectivamente.*

4.3 Discusión

Para la discusión se exponen las respuestas transcritas de la profesora (P4) 'Cathy' y del profesor (P15) 'John' (como seudónimos) porque permiten el análisis de la evolución de sus concepciones acerca del infinito durante el transcurso del taller, así como por su facilidad para exponer cometarios, preguntas y retroalimentaciones durante cada una de las sesiones del taller. Las respuestas mostradas aquí son tomadas del material que se abordó durante el taller.

Una de las primeras actividades que se realizaron durante el taller en una vista 'infinitamente grande' corresponde con la comparación de conjuntos finitos e infinitos, (Belmonte y Sierra, 2011) titulada *Números que son muy grandes*, lo que se esperó en primer lugar con los profesores es que identificaran los conjuntos finitos de aquellos infinitos. Un profesor con una concepción del infinito natural pensaría que todos los conjuntos son infinitos, por ejemplo, la cantidad de granos de arena sobre la playa.

Este fue el caso la profesora Cathy que ante la situación de ordenar los conjuntos mencionó que:

> *'Creo que todos los conjuntos son conjuntos infinitos porque no tienen fin, por lo que no podemos clasificar que conjunto tiene menor o mayor número de elementos'.*

Ante el cuestionamiento de sus compañeros del por qué considera que todos son infinitos hace la afirmación de que:

> *'Es que no puedo contar todos los granos de arena que hay en la playa, mucho menos en la Tierra'.*

Aquí puede notarse que la profesora Cathy conoce los conjuntos y está familiarizada con ellos, es decir, "entiende el conjunto de átomos [aquí los granos de arena] como naturalmente infinito, el conjunto existe, no lo creamos" (Krátká, 2013, p. 93) pero la incapacidad de contar una totalidad de elementos limita su concepción del infinito a lo natural. Esto está en concordancia con lo reportado en Cihlář et al. (2015) donde al trabajar con estudiantes los conjuntos con concebidos como infinitos siempre y cuando se extiendan dentro de sus horizontes.

Para un cambio conceptual del infinito, según la teoría del cambio conceptual, primero es importante revisar sus creencias. Aquí modificar su creencia de que todos los conjuntos son infinitos es la primera parte. Así, para generar un conflicto entre su creencia y la información de la situación y que a la vez esta revisión de creencias permita un cambio conceptual (Chi, 2008), el instructor les pregunta a los profesores ¿cuántos divisores tiene el número 24?, ¿cuántos divisores tiene el número 100? ¿y cuántos divisores tiene 10^{100}? Algunos profesores los calculan y otros intuyen que, aunque son una cifra considerable (101^2), debe ser finito. Entre ellos está la profesora Cathy:

> *'Bueno… si es un número, entonces es finito… quizá exagere al decir que era infinito, es que no sabía cómo calcularlo'.*

El instructor le preguntó qué piensa acerca de la cantidad de arena: ¿siempre habrá más arena por contar o en algún momento se le acabará? La profesora Cathy responde rápidamente que se tiene que acabar, así esto debería ser un número finito al igual que los divisores de 10^{100}:

> *'Pues se acabaría, al final debe de haber un último grano de arena… ¡Ah! Entonces es un número muy muy grande… bueno, pero sigue siguiendo un número'.*

Al finalizar la situación, el instructor menciona otros conjuntos finitos muy grandes (número de estrellas y el número de células en el cuerpo humano), con el propósito de notar si los profesores (entre ellos Cathy) tienen o han cambiado la creencia de que no todos los conjuntos son infinitos. En el caso de la profesora Cathy, en este punto del taller fue suficiente la revisión de su idea de infinito, para hacer notar que no todos los conjuntos son infinitos.

Una respuesta inesperada que se obtuvo en esta situación fue la del profesor John, donde propone un ordenamiento de los conjuntos, pero para él, el más pequeño de todos es el de los naturales. Al ser cuestionado por el instructor de como justificaría su argumento, el profesor John menciona:

> *'Bueno es que todos tienen una cantidad determinada, pero sé que el más pequeño debe ser los naturales porque algunos autores citan a los números naturales como los elementos primarios hasta el 10 sin contar al cero'*.

Si bien se podría concluir que su concepción inicial no es de infinito natural porque es capaz de identificar que no todos los conjuntos son infinitos, no está superada del todo ya que para el profesor John los números naturales sólo son del uno al diez. Su concepción natural del conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ está influida por la creencia de que $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, 9, 10\}$.

Desde la teoría del cambio conceptual, modificar su creencia haría que su concepción del infinito también se modificara. Para ello, los profesores construyen los números naturales, la diferencia de la base 10 (que podría ser el origen de la confusión del profesor John), y hacer notar al profesor John que este conjunto es infinito.

> *'No sé porque lo confundí, creí que los naturales no más eran los que contábamos con los dedos, por eso natural. Lo he estado explicando mal estos años'*.

El instructor solicitó al profesor John una nueva ordenación de los conjuntos considerando la nueva construcción de los números naturales. Luego, el profesor John estableció que el último ahora sería los números naturales. Así, para el profesor John la concepción del infinito natural al comparar conjuntos ha sido superada en esta situación.

Una vez que los profesores establecieron criterios para determinar conjuntos finitos de infinitos, ahora procedieron a la comparación de conjuntos infinitos, específicamente, los números naturales $\mathbb{N}$, los números pares E y los cuadrados perfectos S a partir de la situación titulada *Comparando conjuntos infinitos* (Fischbein et al., 1979; Juter, 2019; Monaghan, 2001; Moreno Armella &

Waldegg, 1991). Lo que se esperó es que los profesores identificaran que los tres conjuntos son infinitos y establecer una relación uno a uno entre $\mathbb{N}$ y E y $\mathbb{N}$ y S y, por tanto, que tienen la misma cantidad de elementos. Un profesor con una concepción natural o potencial pensaría, por ejemplo, que hay el doble de números naturales que de pares o menor cantidad de cuadrados perfectos que naturales. Este tipo de argumentos también son reportados en Juter (2019) donde se reporta que casi el 40% de los estudiantes creen que hay menos números pares que naturales y en Luis et al. (1991) alrededor del 40% de los estudiantes creen que hay menos cuadrados perfectos que naturales. Por otro lado, en Monaghan (2001) un 46% de los estudiantes creen que hay la misma cantidad de pares que naturales.

Tanto la profesora Cathy como el profesor John argumentaron que hay tantos números naturales como pares, pero por un lado Cathy afirma que no se puede saber si hay más naturales o cuadrados perfectos porque ambos son infinitos, mientras que para John hay una menor cantidad de cuadrados perfectos que de naturales. John afirma que:

> *'Porque para ser cuadrado perfecto debe de existir la condición de que el número multiplicado por sí mismo resulte el otro número'*.

Al parecer el profesor consideró ahora los naturales y observó que no todos son cuadrados perfectos. Si bien es cierto, la condición real es que dado el conjunto de los cuadrados perfectos S puede obtener su natural asociado dentro de $\mathbb{N}$. Para hacer esto evidente el instructor solicitó al profesor John que organice los primeros diez cuadrados perfectos y si puede determinar el natural que los origina:

> *'Como todos son cuadrados perfectos, sí puedo hacerlo, sería buscar el número [natural] que multiplicado por sí mismo resulte ese cuadrado perfecto, por ejemplo, del cuadrado perfecto 16 su natural asociado sería el 4 porque* $4 \times 4 = 16$*'*.

Ahora, el instructor hizo ver al profesor John que construyó una relación entre los cuadrados perfectos y los naturales, y si esto puede usarlo como argumento para decir algo al respecto sobre la igualdad de elementos en ambos conjuntos S y $\mathbb{N}$ como lo hizo con los pares y naturales.

> *'Es que estaba pensando en los huecos en los naturales que hay cuando no hay cuadrado perfecto, pero si lo pienso como lo hice en los pares, pues si son iguales hay lo mismo, porque*

la relación ahí está de los naturales saco su cuadrado y obtengo los cuadrados perfectos, y al revés, si saco la raíz cuadrada al cuadrado perfecto pues tengo el natural de antes'.

Por otro lado, la profesora Cathy construyó una relación entre los naturales $\mathbb{N}$ y cuadrados perfectos S, incluso afirmó que siempre tendrá un cuadrado perfecto de un natural. Sin embargo, ante la pregunta: ¿qué hay más: naturales o cuadrados perfectos? Su respuesta sugiere que no utiliza la relación y una concepción anterior emerge nuevamente, tratando de contar los elementos totales y ver cuál es mayor como se hace con conjuntos finitos:

> *'Como los cuadrados perfectos surgen de la sucesión de los números naturales hay un número infinito de ellos y, por lo tanto, no se pueden comparar'.*

Ya que su creencia a contabilizar muestra resistencia a desaparecer, según la teoría del cambio conceptual, esto puede deberse a que el modelo mental necesita ser transformado. El instructor le solicitó que construyera una relación uno a uno, pero ahora entre los cuadrados perfectos y los naturales, para lo cual la profesora Cathy contestó que sería la raíz cuadrada. Nuevamente, el instructor le hizo la observación si al encontrar una doble relación entre un conjunto y otro, su argumento puede ser igual que como lo hizo con los pares y naturales y de ser así en qué cambia su argumento.

> *'Si es igual, puedo decir que habría los mismos si para cada natural hay un cuadrado perfecto y viceversa. Creo que ya no me preocupa el contar uno por uno, como que ya no me fijo en ir viendo cada número natural o par, sino como si ya tuviera todos, como en conjunto. La relación me sirve para comparar conjuntos, si está es porque son ambos iguales en cantidad de elementos'.*

Esta respuesta evidencia que la concepción del infinito potencial que presentó la profesora Cathy en esta situación fue superada, entró en conflicto con el proceso de contar cada elemento porque no tendría fin, desde una concepción potencial. Entonces, la nueva información sugiere que ya no es necesario contar, solo establecer relaciones sobre todo el conjunto, cambiando el modelo de comparar conjuntos infinitos.

Por último, la situación paradójica *El Gran Hotel de Hilbert* (Mamolo y Zazkis, 2008; Roa-Fuentes y Oktaç, 2014) muestra que la profesora Cathy después de diferentes situaciones del tipo ‘infinitamente grande’ ha llegado a construir una concepción actual del infinito.

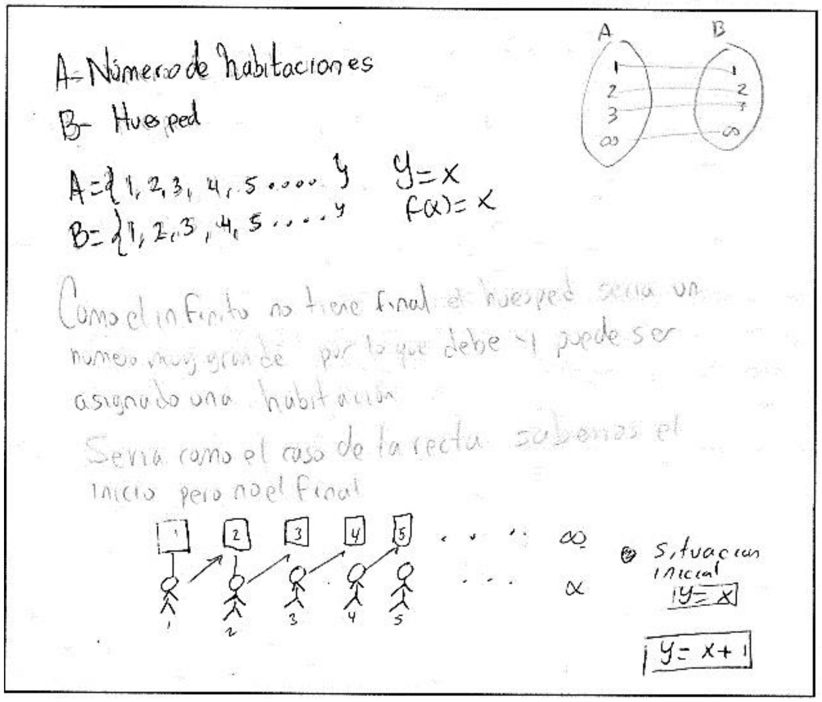


Figura 23. *Respuesta de la profesora Cathy a la pregunta: ¿Cómo podría ubicar a un nuevo huésped en un hotel de habitaciones infinitas llenas?*

La respuesta mostrada en la Figura 23 sugiere que la profesora Cathy ha profundizado en la comparación de conjuntos infinitos, denota una función $y = x$ que relaciona el número de huésped con el número de habitación y encuentra una nueva función $y' = x + 1$ que relaciona el número de huésped con la habitación contigua. Ahora la profesora Cathy no solo usó las relaciones para comparar conjuntos, sino que además le permitieron ‘mover’ elementos para generar el ‘espacio’ para el nuevo huésped.

De hecho, muy pocos profesores (2/15) en esta situación presentaron una solución como la de la profesora Cathy, la mayoría de los profesores con una concepción potencial (como el profesor John) se centró en colocar al nuevo huésped al final argumentando que si son infinitas debe haber una habitación más que esté vacía. Después de que Cathy muestra a los demás cómo podría solucionarse la situación, John menciona que:

‘No me queda claro, siento que es lo mismo que si lo pones al final, porque si estás moviendo a todos los infinitos huéspedes de habitación a la siguiente habitación, al final la última debe estar desocupada para poder meter ahí al último huésped de la habitación anterior, y si está vacía pues mejor ahí poner al que llegó y ya no mueves a nadie’.

Así como el profesor John, los demás profesores muestran una resistencia a la solución de la profesora Cathy, ya que como se evidencia en Mamolo y Zazkis (2008) los estudiantes tienden a resistirse a la solución actual por encima de asociarlo a un significado realista. El profesor John, aunque ha presentado concepciones potenciales, evidencia que también cómo emergen ideas naturales, como el hecho de hablar de una última habitación cuando son infinitas. Para remover esta idea el instructor les pregunta si este hecho no violaría que todas las habitaciones estén llenas. Nuevamente el profesor John también argumenta que en la solución de Cathy no se entiende como los acomodarían si es infinito, no terminaría el proceso. Nuevamente, la resistencia a aceptar la solución está limitada por un significado realista, es decir, un “proceso de reacomodación infinita, (…) [que] nunca dejarían [los huéspedes] de moverse” (Mamolo y Zazkis, 2008, p. 175).

Para ayudar a los profesores a cambiar su concepción, el instructor puso de manifiesto las diferentes contradicciones en los argumentos que expusieron, por ejemplo, el profesor John al mencionar un último huésped o habitación cuando son infinitas. Para el profesor John, no fue suficiente la revisión de creencias, ni transformar el modelo de comparación de conjuntos infinitos. Según la teoría del cambio conceptual, esto puede deberse a que está mal categorizada su concepción. Aquí, los argumentos realistas y dar sentido físico al proceso infinito limita el cambio conceptual.

Nuevamente, la profesora Cathy evidenció concepciones superiores a la potencial al cuestionarle ahora ¿Qué sucedería si hubiese huéspedes infinitos por llegar?

‘Si se tiene un conjunto infinito y se tiene una función biyectiva $y = x$, esta la multiplicamos por 2, $y = 2x$, permitiendo que ciertas habitaciones infinitas queden vacías para albergar a huéspedes infinitos. En este caso los conjuntos de habitaciones son infinitas, el número de huéspedes son infinitos y se debe crear un conjunto de habitaciones vacías infinitas para el conjunto de huéspedes’.

Así, para la profesora Cathy la comparación de conjuntos infinitos a través de funciones biyectivas permitió una construcción del infinito actual. Esto pone de manifiesto que las situaciones abordadas en el taller para comparar conjuntos infinitos han construido un mejor modelo de comparación de conjuntos infinitos para la profesora Cathy y, por otro lado, ha construido una concepción actual del infinito en situaciones del tipo ‘infinitamente grande’ en ella.

Capítulo 5

5 CONCLUSIONES

Las concepciones de los profesores de matemáticas que se evidenciaron antes de la intervención del taller son consistentes con las reportadas en la literatura. Durante el proceso del taller se desarrollaron diferentes situaciones que, como muestran los resultados de esta investigación, las concepciones que fueron desarrollando los profesores van desde el infinito natural hasta el infinito actual, sin embargo, como se ha advertido anteriormente, este recorrido no es lineal.

Por ejemplo, la profesora Cathy en situaciones del tipo ‘infinitamente grande’ e ‘infinitamente muchos’ al finalizar las situaciones presentó concepciones del infinito actual, pero en situaciones del tipo ‘infinitamente cerca’ no comenzó con concepciones actuales. Esto pone de manifiesto que, las concepciones que presenta el profesor de matemáticas acerca del infinito no solo dependen de del contexto (aritmético o geométrico), sino también del tipo de situación presente.

Esto es evidente con el profesor John donde en diferentes momentos del taller presentó resistencia a argumentos del infinito actual, por ejemplo, en la situación del Gran Hotel de Hilbert. Así, desde la teoría del cambio conceptual no es suficiente una revisión de creencias o transformación del modelo mental para superar sus concepciones, dada la resistencia a aparecer de nuevo ciertas creencias del infinito natural o potencial en el profesor John.

El postest reveló que los profesores, en general, presentaron concepciones posición omega-épsilon e infinito actual después de la intervención del taller, pero las situaciones individuales por profesor no son así. Algunos de ellos presentaron aún resistencia a creencias del infinito, como el uso de reglas de comparación de conjuntos finitos en conjuntos infinitos. Así, una investigación a futuro debería idear nuevas situaciones que permitan, según la teoría del cambio conceptual, superar las creencias resistentes.

REFERENCIAS

Ander-Egg, E. (1999). *El taller: una alternativa de renovación pedagógica* (3rd ed.). Magisterio del Río de la Plata.

Ángeles-Navarro, M., & Pérez-Carreras, P. (2010). A socratic methodological proposal for the study of the equality 0 . 999 . . . = 1. *The Teaching of Mathematics*, *XIII*(1), 17–34.

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D., & Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. In J. Kaput, A. H. Schoenfeld, E. Dubinsky, & T. Dick (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education. II* (Vol. 6, pp. 1–32). CBMS Issues in Mathematics Education. https://doi.org/10.1090/cbmath/006/01

Ballesteros-Velázquez, B. (2015). *Taller de investigacion cualitativa*. UNED - Universidad Nacional de Educacion a Distancia. http://elibro.bibliotecabuap.elogim.com/es/lc/bibliotecasbuap/titulos/48783

Belmonte, J. L., & Sierra, M. (2011). Modelos intuitivos del infinito y patrones de evolución nivelar. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matematica Educativa*, *14*(2), 139–171.

Belmonte Martínez, J. L. (2009). *Modelos intuitivos y esquema conceptual del infinito en estudiantes de educación primaria, secundaria obligatoria, bachillerato y universidad* [Universidad de Salamanca]. https://doi.org/10.14201/gredos.76247

Carey, S. (1991). Knowledge aquisition: enrichment or conceptual change? In S. Carey & R. Gelman (Eds.), *The Epigenesis of Mind: Essays on biology and cognition* (pp. 257–291). Psychology Press. https://doi.org/10.4324/9781315807805-18

Chi, M. T. H. (2008). Three types of conceptual change: Belief revision, mental model transformation, and categorical shift. In S. Vosniadou (Ed.), *International Handbook of Research on Conceptual Change* (pp. 61–82). Routledge, Taylor & Francis Group.

Cihlář, J., Eisenmann, P., & Krátká, M. (2015). Omega Position – a specific phase of perceiving the notion of infinity. *Scientia in Educatione*, *6*(2), 51–73. https://doi.org/10.14712/18047106.184

Cihlář, J., Eisenmann, P., Krátká, M., & Vopěnka, P. (2009). Cognitive conflict as a tool of overcoming obstacles in understanding infinity. *Teaching Mathematics and Computer Science*, *7*(2), 279–295. https://doi.org/10.5485/TMCS.2009.0240

Colmenares, A. M. (2012). Investigación-acción participativa: una metodología integradora del conocimiento y la acción. *Voces y Silencios. Revista Latinoamericana de Educación*, *3*(1), 102–115. https://doi.org/10.18175/vys3.1.2012.07

D’Amore, B., Laborde, C., Romero, L. R., Puga, A. B., Brousseau, G., & Pinilla, M. I. F. (2006). *Didáctica de la matemática*. Cooperativa Editorial Magisterio Bogotá.

Date-Huxtable, E., Cavanagh, M., Coady, C., & Easey, M. (2018). Conceptualisations of infinity by primary pre-service teachers. *Mathematics Education Research Journal*, *30*(4), 545–567. https://doi.org/10.1007/s13394-018-0243-9

Díaz-Espinoza, I. A., & Juárez-López, J. A. (2023). Mathematics teachers’ conceptions about infinity: A preliminary study at the secondary and high school level. *Union: Jurnal Ilmiah Pendidikan Matematika*, *11*(3), 426–435. https://doi.org/10.30738/union.v11i3.16006

Diaz-Espinoza, I. A., Juárez-López, J. A., & Juárez-Ruiz, E. (2023). Exploring a mathematics teacher’s conceptions of infinity: The case of Louise. *Indonesian Journal of Mathematics Education*, *6*(1), 1–6. https://doi.org/10.31002/ijome.v6i1.560

Díaz-López, C., & Pinto-Loría, M. de L. (2017). Vulnerabilidad educativa: Un estudio desde el paradigma socio crítico. *Praxis Educativa*, *21*(1), 46–54. https://doi.org/http://dx.doi.org/10.19137/praxiseducativa-2017-210105

Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M. A., & Brown, A. (2005a). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An APOS-based analysis: Part 1. *Educational Studies in Mathematics*, *58*(3), 335–359. https://doi.org/10.1007/s10649-005-2531-z

Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M. A., & Brown, A. (2005b). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An APOS analysis: Part 2. *Educational Studies in Mathematics*, *60*(2), 253–266. https://doi.org/10.1007/s10649-005-0473-0

Eisenmann, P. (2008). Why is it not true that 0.999 … < 1? *Teaching of Mathematics*, *11*(1), 35–40.

Ferrada-Torres, D., & Cisterna-Cabrera, F. (2003). La producción de conocimiento científico en educación desde el paradigma y la racionalidad socio-crítica. *REXE-Revista de Estudios y Experiencias en Educación*, *2*(4), 83–90. https://revistas.ucsc.cl/index.php/rexe/article/view/251

Fischbein, E. (2001). Tacit models and infinity. *Educational Studies in Mathematics*, *48*(2–3), 309–329. https://doi.org/https://doi.org/10.1023/A:1016088708705

Fischbein, E., Tirosh, D., & Hess, P. (1979). The intuition of infinit. *Educational Studies in Mathematics*, *10*(1), 3–40. https://doi.org/https://doi.org/10.1007/BF00311173

Flores-Fahara, M. (2004). Implicaciones de los paradigmas de investigación en la práctica educativa. *Revista Digital Universitaria*, *5*(1), 1–9. http://www.revista.unam.mx/vol.5/num1/art1/art1.htm

Hannula, M. S., Pehkonen, E., Maijala, H., & Soro, R. (2006). Levels of students' understanding on infinity. *Teaching Mathematics and Computer Science*, *4*(2), 317–337. https://doi.org/10.5485/tmcs.2006.0129

Homaeinejad, M., Barahmand, A., & Seif, A. (2021). The relationship between notions of infinity and strategies used to compare enumerable infinite sets. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1941362

Juter, K. (2019). University students' general and specific beliefs about infinity, division by zero and denseness of the number line. *Nordic Studies in Mathematics Education*, *24*(2), 69–88.

Kattou, M., Thanasia, M., Katerina, K., Constantinos, C., & George, P. (2010). Teachers' perceptions about infinity : a process or an object ? In V. Durand-Guerrier, S. Soury-

Lavergne, & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the 6th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1771–1780). www.inrp.fr/editions/cerme6

Kidron, I., & Tall, D. (2015). The roles of visualization and symbolism in the potential and actual infinity of the limit process. *Educational Studies in Mathematics*, *88*(2), 183–199. https://doi.org/https://doi.org/10.1007/s10649-014-9567-x

Krátká, M. (2013). Zdroje epistemologických překážek v porozumění nekonečnu. *Scientia in Educatione*, *1*(1), 87–100. https://doi.org/10.14712/18047106.7

Krátká, M., Eisenmann, P., & Cihlář, J. (2021). Four conceptions of infinity. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 1–25. https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1897894

Kuhn, T. S. (1970). *The structure of scientific revolutions* (Vol. 111). Chicago University of Chicago Press.

Latorre, A. (2010). *La investigación-acción: conocer y cambiar la práctica educativa*. Graó.

Mamolo, A., & Zazkis, R. (2008). Paradoxes as a window to infinity. *Research in Mathematics Education*, *10*(2), 167–182. https://doi.org/10.1080/14794800802233696

Manfreda Kolar, V., & Čadež, T. H. (2012). Analysis of factors influencing the understanding of the concept of infinity. *Educational Studies in Mathematics*, *80*(3), 389–412. https://doi.org/10.1007/s10649-011-9357-7

Martínez, M. (2009). *Ciencia y Arte en la Metodología Cualitativa*. Trillas.

Medina Ibarra, L., Romo-Vázquez, A., & Sánchez Aguilar, M. (2019). Using the work of Jorge Luis Borges to identify and confront students' misconceptions about infinity. *Journal of Mathematics and the Arts*, *13*(1–2), 48–59. https://doi.org/10.1080/17513472.2018.1504270

Mena-Lorca, A., Mena-Lorca, J., Montoya-Delgadillo, E., Morales, A., & Parraguez, M. (2015). El obstáculo epistemológico del infinito actual: persistencia, resistencia y categorías de análisis. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *18*(3), 329–

358. https://doi.org/10.12802/relime.13.1832

Monaghan, J. (2001). Young peoples' ideas of infinity. *Educational Studies in Mathematics*, *48*(2–3), 239–257. https://doi.org/https://doi.org/10.1023/A:1016090925967

Montes, M. A., Carrillo, J., & Ribeiro, C. M. (2014). Teachers knowledge of infinity, and its role in classroom practice. In P. Liljedahl, S. Oesterle, C. Nicol, & D. Allan (Eds.), *Proceedings of the 38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 36th Conference of the North American Chapter of the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 233–239). North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. https://eric.ed.gov/?id=ED599915

Moreno Armella, L. E., & Waldegg, G. (1991). The conceptual evolution of actual mathematical infinity. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(3), 211–231. https://doi.org/10.1007/BF00368339

Ortiz, M., & Borjas, B. (2008). La investigación acción participativa: aporte de Fals Borda a la educación popular. *Espacio Abierto*, *17*(4), 615–627.

Pérez-Serrano, G. (1998). *Investigación cualitativa: retos e interrogantes*. Muralla.

Roa-Fuentes, S., & Oktaç, A. (2014). El infinito potencial y actual : descripción de caminos cognitivos para su construcción en un contexto de paradojas. *Educación Matemática*, *26*(1), 73–102. http://www.revista-educacion-matematica.com/revista/2016/05/15/vol26-1-3/

Sánchez-Santamaría, J. (2013). Paradigmas de investigación educativa: de las leyes subyacentes a la modernidad reflexiva. *ENTELEQUIA Revista Interdisciplinar*, *16*, 91–102.

Schwarzenberger, R. L. E., & Tall, D. (1978). Conflicts in the learning of real numbers and limits. *Mathematics Teaching*, *82*, 44–49.

Sfard, A. (1998). On two metaphors for learning and the dangers of choosing just one. *Educational Researcher*, *27*(2), 4–13. https://doi.org/10.3102/0013189X027002004

Singer, M., & Voica, C. (2003). Perception of infinity: does it really help in problem solving? In

A. Rogerson (Ed.), *Proceedings of the International Conference The Decidable and the Undecidable in Mathematics Education* (pp. 1–7). http://dipmat.math.unipa.it/~grim/21_project/21_brno_03.htm

Singer, M., & Voica, C. (2008). Between perception and intuition: Learning about infinity. *The Journal of Mathematical Behavior*, *27*(3), 188–205. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2008.06.001

Smith III, J. P., DiSessa, A. A., & Roschelle, J. (1994). Misconceptions reconceived: a constructivist analysis of knowledge in transition. *Journal of the Learning Sciences*, *3*(2), 115–163. https://doi.org/10.1207/s15327809jls0302_1

Tall, D. (1980). The notion of infinite measuring number and its relevance in the intuition of infinity. *Educational Studies in Mathematics*, *11*(3), 271–284. https://doi.org/10.1007/BF00697740

Tall, D. (2001a). Natural and formal infinities. *Educational Studies in Mathematics*, *48*(2–3), 199–238. https://doi.org/10.1023/A:1016000710038

Tall, D. (2001b). A child thinking about infinity. *Journal of Mathematical Behavior*, *20*(1), 7–19. http://10.0.3.248/S0732-3123(01)00058-X

Tall, D., & Tirosh, D. (2001). The never-ending struggle. *Educational Studies in Mathematics*, *48*(2–3), 129–136.

Thagard, P. (2008). Conceptual change in the history of science: Life, mind and disease. In S. Vosniadou (Ed.), *International Handbook of Research on Conceptual Change* (pp. 374–387). Routledge, Taylor & Francis Group.

Tsamir, P. (1999). The transition from comparison of finite to the comparison of infinite sets: Teaching prospective teachers. *Educational Studies in Mathematics*, *38*, 209–234. https://doi.org/https://doi.org/10.1023/A:1003514208428

Villabona Millán, D., Roa Fuentes, S., & Oktaç, A. (2022). Concepciones dinámicas y estáticas del infinito: procesos continuos y sus totalidades. *Enseñanza de las Ciencias. Revista de*

Investigación y Experiencias Didácticas, *40*(1), 179–197. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3277

Vinner, S., & Kidron, I. (1985). The concept of repeating and non-repeating decimals at the senior high level. In L. Streefland (Ed.), *Proceedings of the 9th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 357–361). https://eric.ed.gov/?id=ED411130

Vosniadou, S., Vamvakoussi, X., & Skopeliti, I. (2008). The framework theory approach to the problem of conceptual change. In S. Vosniadou (Ed.), *International Handbook of Research on Conceptual Change* (pp. 3–34). Routledge, Taylor & Francis Group.

Waldegg, G. (2005). Bolzano's approach to the paradoxes of infinity: Implications for teaching. *Science & Education*, *14*(6), 559–577. https://doi.org/10.1007/s11191-004-2014-0

Wijeratne, C., & Zazkis, R. (2015). On painter's paradox: Contextual and mathematical approaches to infinity. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, *1*(2), 163–186. https://doi.org/10.1007/s40753-015-0004-z

Wistedt, I., & Martinsson, M. (1996). Orchestrating a mathematical theme: Eleven-year olds discuss the problem of infinity. *Learning and Instruction*, *6*(2), 173–185. https://doi.org/10.1016/0959-4752(96)00001-1

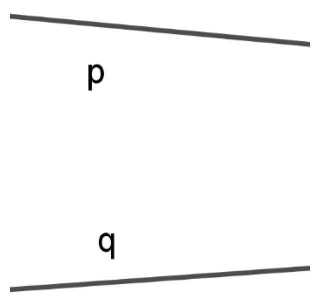
Yopp, D. A., Burroughs, E. A., & Lindaman, B. J. (2011). Why it is important for in-service elementary mathematics teachers to understand the equality .999...=1. *Journal of Mathematical Behavior*, *30*(4), 304–318. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2011.07.007

Zippin, L. (1962). *Uses of infinity*. The Mathematical Association of America.

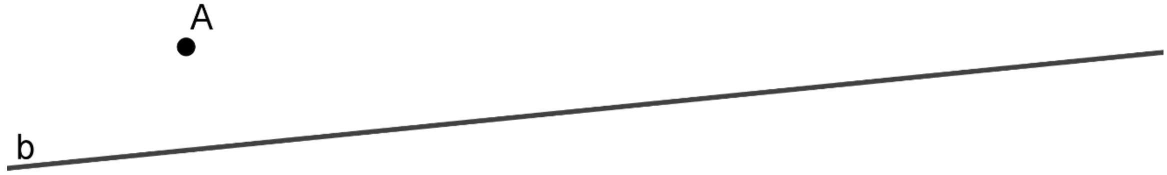
ANEXOS

A. Actividades para abordar en la primera sesión del taller

1. ¿Cuál es la definición de infinito que tienes en tu mente?
2. Ordena de menor a mayor los siguientes conjuntos y explica tu respuesta:
   A. Número de estrellas
   B. Número de granos de arena en la Tierra
   C. Números naturales $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$
   D. Números divisores de un "googol" (10^{100}, un uno seguido de cien ceros)
   E. Número de células que forman el cuerpo humano
3. ¿Cuál es el número más grande?
   A. $999\ 999\ 999\ 999\ 999\ 999$
   B. $999\ 999\ 999\ 999\ 999\ 999 \dots 999$
   C. $999\ 999\ 999\ 999\ 999\ 999 \dots$
4. Se tiene una línea recta p y otra línea recta q como muestra la figura siguiente. ¿Existe un punto de intersección entre ellas?



5. Dada una línea recta b y el punto A, que no se encuentra en esta línea recta. Construya el segmento $\overline{AB}$, con el punto B que se encuentra en la recta dada b, con el segmento $\overline{AB}$ tan largo como sea posible. Selecciona la oración que más se ajuste a tu construcción.



   A. El punto B está al final de la línea recta.
   B. El punto B está en el infinito.
   C. El punto B no existe.

C. Actividades para abordar en la segunda sesión del taller

1. Considera la siguiente lista de los primeros 100 números naturales como se muestra a continuación:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

a) Encierra todos los números que son cuadrados perfectos de la lista anterior. ¿Cuántos cuadrados perfectos hay en la lista?

b) Escribe en potencias cuadradas (por ejemplo, $16 = 4^2$) todos los elementos del conjunto del inciso a).

c) Continua la lista hasta el 200, ¿Cuántos cuadrados perfectos hay en la lista?

d) Si continua la lista hasta el 1 000, 10 000 o 1 000 000, ¿Cuántos cuadrados perfectos habría en cada caso?

e) Imagina que puedes escribir todos los cuadrados perfectos que hay, ¿Qué oración sería la más apropiada para ti?

A. La cantidad de términos es muy grande, pero finita.
B. La cantidad de términos nunca termina, siempre puedo escribir otro más.
C. La cantidad de términos es muy grande que no puede escribirse, infinita.
D. No existe un último cuadrado perfecto.

f) Imagina que puedes escribir todos los números enteros que hay, ¿Qué oración sería la más apropiada para ti?

A. La cantidad de términos es muy grande, pero finita.
B. La cantidad de términos nunca termina, siempre puedo escribir otro más.
C. La cantidad de términos es muy grande que no puede escribirse, infinita.

D. No existe un último número entero.

g) Imagina que puedes escribir todos los números pares que hay, ¿Qué oración sería la más apropiada para ti?

A. La cantidad de términos es muy grande, pero finita.

B. La cantidad de términos nunca termina, siempre puedo escribir otro más.

C. La cantidad de términos es muy grande que no puede escribirse, infinita.

D. No existe un último número par.

2. Completa la siguiente tabla con los valores pares y cuadrados perfectos para cada número natural indicado.

Natural	Número par	Cuadrado perfecto
1		
2		
3		
4	$\mathbf{4} \times 2 = 8$	$\mathbf{4}^2 = 16$
5		
6		
7		
8		
9		
10		
n		

a) Regresa a la pregunta 1a) y compara los valores de la tercera columna, ¿son los mismos?

b) Continua la tabla hasta un número natural grande (por ejemplo, 1 000 000), ¿puedes encontrar un número par asociado a ese número natural?

c) Imagina que completas la tabla con todos los números naturales, ¿puedes encontrar un número par asociado para cada natural?

d) Selecciona la oración que más represente tu idea hasta el momento.

A. Hay el doble de números pares que números naturales.

B. No puedes comparar la cantidad de números pares con los números naturales porque hay infinitos de ellos.

C. Hay tantos números pares como números naturales.

e) Continua la tabla hasta un número natural grande (por ejemplo, 1 000 000), ¿puedes encontrar un cuadrado perfecto asociado a ese número natural?

f) Imagina que completas la tabla con todos los números naturales, ¿puedes encontrar un cuadrado perfecto para cada natural?

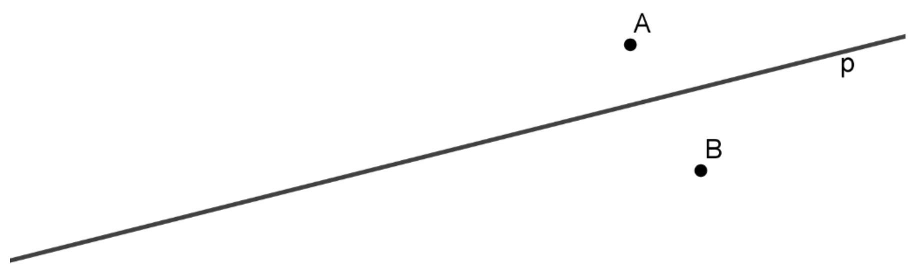
g) Selecciona la oración que más represente tu idea hasta el momento.

A. Hay menos cuadrados perfectos que números naturales.

B. No puedes comparar la cantidad de cuadrados perfectos con los números naturales porque hay infinitos de ellos.

C. Hay tantos cuadrados perfectos como números naturales.

3. ¿Es posible unir los puntos A y B con una línea que no corte a la línea recta p? (esta línea no necesita ser recta).



D. Actividades para abordar en la tercera sesión del taller

1. Observa los siguientes conjuntos.

$$A = \{10, 20, 30, 40, 50, \dots\}$$

$$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, \dots, 19, 21, \dots, 29, 31, \dots\}$$

$$C = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

$$D = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

$$E = \{-1, -2, -3, -4, -5, \dots\}$$

$$F = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$$

$$G = \{1, 4, 9, 16, 25, \dots\}$$

$$H = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\right\}$$

a) Encuentra una relación (si la hay) para cada pareja de elementos en los conjuntos que se indica a continuación. Puedes usar una tabla de valores para encontrar dicha relación como lo hizo en el ítem 2 de la sesión 2.

A. A y C.

B. C y B.

C. B y A.

D. C y D.

E. C y E.

F. C y F.

G. C y G.

H. E y G.

I. G y F.

J. C y H.

2. Si piensas que los conjuntos son incomparables, usa el símbolo $\times$. Si piensas que los conjuntos son comparables y tienen la misma cantidad de elementos, usa el símbolo $=$. Si piensas que los conjuntos son comparables, pero no tienen la misma cantidad de elementos, usa el símbolo $\neq$.

   a) Tamaño de A _____ tamaño de C.

   b) Tamaño de C _____ tamaño de B.

   c) Tamaño de B _____ tamaño de A.

   d) Tamaño de C _____ tamaño de D.

   e) Tamaño de C _____ tamaño de E.

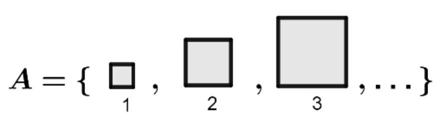
   f) Tamaño de C _____ tamaño de F.

   g) Tamaño de C _____ tamaño de G.

   h) Tamaño de E _____ tamaño de G.

   i) Tamaño de G _____ tamaño de F.

   j) Tamaño de C _____ tamaño de H.

3. Dados los conjuntos 

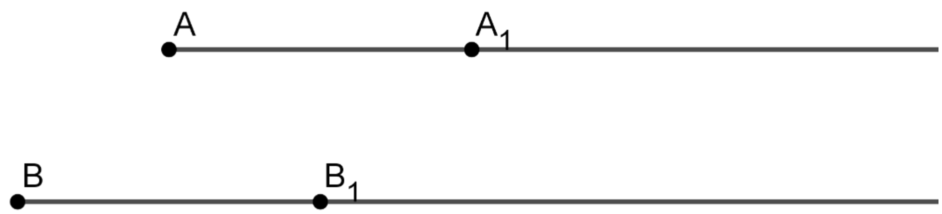
y $B = \{1^2, 2^2, 3^2, \ldots\}$, ¿Qué conjunto tiene más elementos? Selecciona la oración que más represente tu idea hasta el momento.

   A. El conjunto A.

   B. El conjunto B.

C. Ninguno, no puedes comparar la cantidad de cuadrados con los números potencia porque hay infinitos de ellos.
D. Son iguales, hay tantos cuadrados como números potencia.

4. Aquí hay dos semi líneas rectas AA_1 y BB_1. ¿Alguna de ellas es más larga y, de ser así, cuál?

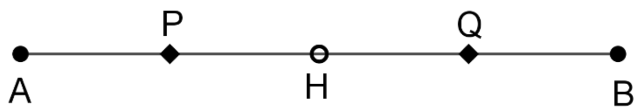


5. Imagina que eres el administrador del mejor hotel del mundo que tiene una cantidad infinita de habitaciones (sin preocuparnos del espacio necesario para el hotel) donde una noche todas las habitaciones están ocupadas. Justo en ese momento llega un huésped muy famoso que no se le puede negar el servicio y él te solicita una habitación para hospedarse.
   a) Si solo se permite un huésped por habitación, ¿Cómo podrías ubicar al nuevo huésped en una habitación?
   b) Peor aún, después de un tiempo llega una cantidad infinita de huéspedes. ¿Podrías ubicarlos a todos?

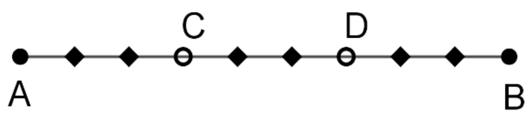
E. Actividades para abordar en la cuarta sesión del taller

1. Selecciona la oración que mejor se relaciona con tu idea en este momento.
   A. Hay un numero infinito de números entre dos números diferentes cualesquiera.
   B. Hay al menos un número entre dos números diferentes cualesquiera.
   C. No hay números entre dos números diferentes cualesquiera.
2. Considera dos números decimales diferentes, por ejemplo, 0.8 y 1.1.
   a) Escribe dos números decimales que estén entre los dos mostrados arriba.
   b) Escribe dos nuevos números decimales que estén entre los que propusiste en el paso anterior.
   c) Imagina que continuas el proceso, ¿llegará un punto donde ya no encuentres nuevos números decimales? Explica tu respuesta.
3. Divida el segmento $\overline{AB}$ en dos partes iguales. El punto H es el punto medio del segmento. Ahora divida $\overline{AH}$ y $\overline{HB}$. Los puntos P y Q representan los puntos medios de los segmentos

$\overline{AH}$ y $\overline{HB}$, respectivamente. Siga dividiendo de la misma manera. Con cada división, los fragmentos se vuelven cada vez más pequeños. Pregunta: ¿Llegará a una situación tal que los fragmentos sean tan pequeños que no pueda dividirlos más? Explica tu respuesta.



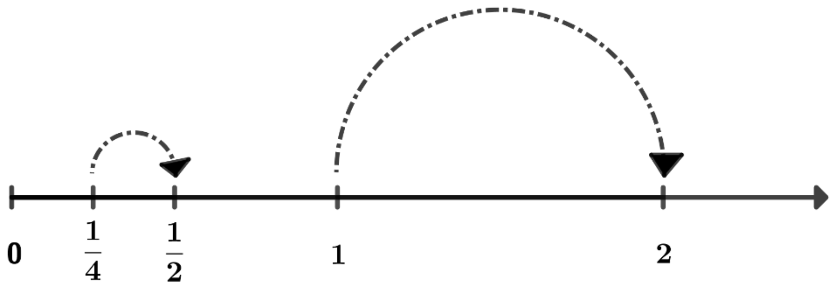
4. Considere nuevamente el segmento $\overline{AB}$ de la pregunta anterior. Esta vez, en lugar de dividir el segmento en dos partes iguales, lo divide en tres partes iguales. ¿Llegará a una situación en la que los segmentos serán tan pequeños que no pueda seguir dividiéndolos? Explica tu respuesta



5. ¿Cuántos puntos hay sobre el segmento $\overline{AB}$? Explica tu respuesta.

F. Actividades para abordar en la quinta sesión del taller

1. Considera todos los números decimales entre 0 y 1 y todos los números decimales entre 0 y 10. Selecciona la oración que mejor se ajuste a tu idea en este momento.
   A. Hay más números entre 0 y 1.
   B. Hay más números entre 0 y 10.
   C. No se puede comparar porque siempre hay números decimales entre dos diferentes.
   D. Hay la misma cantidad de números decimales en ambos casos.
2. Observa el conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$. Este conjunto es el intervalo $[0,1]$. Ahora, definamos el conjunto $B = \{y : y = 2x, x \in A\}$. En el conjunto B, cada elemento x en A es reubicado en la posición $2x$ sobre la línea numérica. Así, 0 no cambia de posición, $\frac{1}{4}$ cambia a $\frac{1}{2}$, 1 cambia a 2, etc.



a) Completa la siguiente tabla algunos valores que serían reubicados.

x	$2x$
0	
$\frac{1}{8}$	
0.45	
$\frac{2}{3}$	
0.83	
0.9	
$\frac{10}{11}$	
$0.999\ldots$	
1	

b) ¿El conjunto B tiene todos los puntos del intervalo $[0,2]$? Explica tu respuesta.

c) ¿Los conjuntos A y B tienen el mismo número de elementos? Explica tu respuesta.

3. Considera un segmento $\overline{AB} = 6\ cm$ y un segmento $\overline{CD} = 4\ cm$.

   a) ¿Cuántos puntos hay en los segmentos? Selecciona la oración que mejor represente tu idea en este momento.

      A. Hay un muy largo, pero finito, número de puntos.

      B. No se puede saber porque es indeterminado.

      C. Hay una cantidad infinita de puntos.

   b) Si tuvieras que comparar los puntos del segmento $\overline{AB}$ y del segmento $\overline{CD}$, ¿Quién tiene más puntos? Selecciona la oración que mejor represente tu idea en este momento.

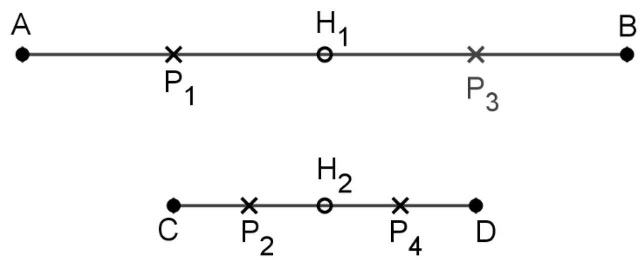
      A. Hay más puntos sobre el segmento $\overline{AB}$.

      B. Hay más puntos sobre el segmento $\overline{CD}$.

C. No se puede comparar porque hay infinitos puntos en ambos segmentos.

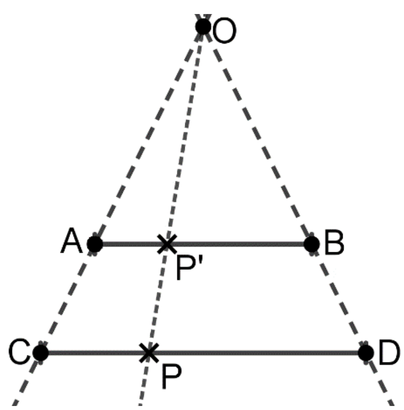
D. Hay tantos puntos en $\overline{AB}$ como en $\overline{CD}$.

4. Sean $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ dos segmentos de diferentes longitudes, de modo que $\overline{AB}$ es más largo que $\overline{CD}$. Divide el segmento $\overline{AB}$ y llama al punto medio H_1. Divide el segmento $\overline{CD}$ y llama a su punto medio H_2. Denominemos *puntos correspondientes* a H_1 y H_2. Sigamos dividiendo los segmentos resultantes. Llamaremos a los puntos medios de AH_1 y H_1B respectivamente P_1 y P_3 y a los puntos medios de CH_2 y H_2D, P_2 y P_4, respectivamente. P_1 corresponde a P_2, P_3 corresponde a P_4. Sigamos realizando este proceso.



a) ¿Llegaremos a una situación tal que para un punto de división en el segmento $\overline{AB}$ no haya más puntos correspondientes en el segmento $\overline{CD}$? Explica tu respuesta.

5. Considera el segmento $\overline{AB}$ y el segmento $\overline{CD}$ que se muestran en la figura. Dibuja la línea punteada CA y DB que interseca en O. Sea P algún punto sobre $\overline{CD}$, dibujando PO determinamos el punto P' sobre $\overline{AB}$.



a) Para cada punto sobre $\overline{CD}$, ¿habrá un punto sobre $\overline{AB}$ determinado de esta manera?

b) Para cada punto sobre $\overline{AB}$, ¿habrá un punto sobre$\overline{CD}$ determinado de esta manera?

c) ¿Todos los puntos sobre $\overline{CD}$ tienen un punto correspondiente sobre $\overline{AB}$?

d) ¿Todos los puntos sobre $\overline{AB}$ tienen un punto correspondiente sobre $\overline{CD}$?

e) ¿Qué segmento de recta tiene más puntos? Selecciona la oración que mejor represente tu idea en este momento.

   A. Tiene más puntos $\overline{AB}$.

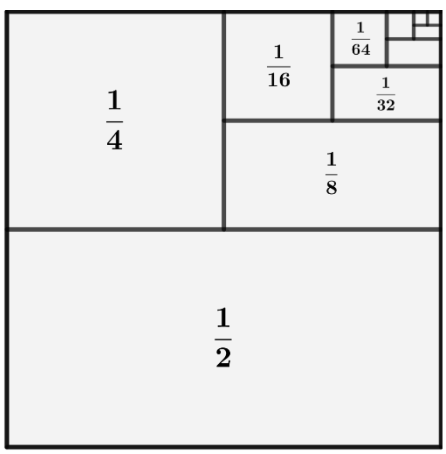
   B. Tiene más puntos $\overline{CD}$.

   C. No se puede saber porque hay una infinidad de puntos en ambos segmentos.

   D. Ambos segmentos tienen la misma cantidad de puntos.

G. Actividades para abordar en la sexta sesión del taller

1. Considera un cuadrado que divides en dos rectángulos iguales. Toma uno de ellos y divídelo nuevamente por la mitad ahora en dos cuadrados iguales. Luego, toma uno de los cuadrados y divídelo en rectángulos iguales nuevamente. Imagina que repites este proceso indefinidamente.



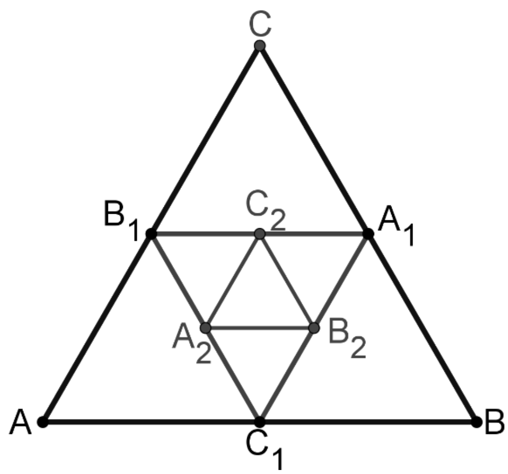
   a) ¿Llegará un momento donde no puedas hacer nuevas particiones en rectángulos o cuadrados? Selecciona la oración que mejor represente tu idea en este momento.

      A. Si, en algún punto ya no habrá espacio para más.

      B. No, siempre puedo generar un nuevo rectángulo o cuadrado dentro de la figura.

      C. No, hay una infinidad de ellas.

2. Sea ABC un triángulo equilátero. Divide cada lado en dos partes iguales y etiquete los puntos medios A_1, B_1 y C_1. Consideremos el triángulo $A_1B_1C_1$ y marquemos los puntos medios de sus lados A_2, B_2 y C_2 como muestra la figura. Continúe el proceso de la misma manera.



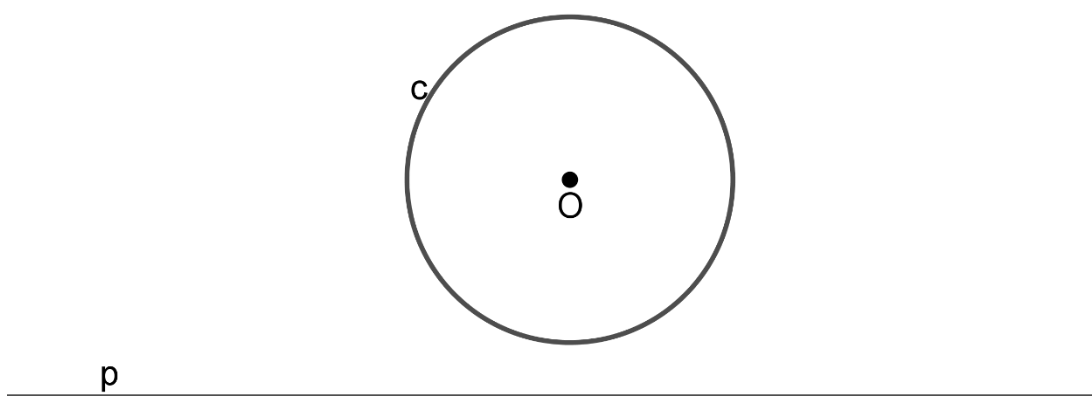
a) ¿Este proceso llegará a su fin en algún momento? Selecciona la oración que mejor represente tu idea en este momento.

A. Si, en algún punto ya no habrá espacio para más.

B. No, siempre puedo generar un nuevo triangulo equilátero.

C. No, hay una infinidad de ellos.

3. Sea una línea recta p y una circunferencia c con centro en el punto O. (Zippin, 1962, p. 12)



a) Construye una recta OA donde A es un punto lo más cerca de O sobre la línea recta p. ¿Hay un punto A' sobre la circunferencia c que también este sobre OA?

b) Construye una recta OB donde B es un punto lo más lejos de O sobre la línea recta p. ¿Hay un punto B' sobre la circunferencia c que también este sobre OB?

c) ¿Existe una recta para cada punto X' sobre la circunferencia que pase por algún punto X sobre la recta p?

A. No, porque hay más puntos sobre la recta p.

B. No, porque hay más puntos sobre la circunferencia c.

C. No, porque puntos sobre c que no se asocian a una recta.

D. Si, porque hay la recta es infinita.

E. Si, porque hay una infinidad de puntos en ambos.

H. Actividades para abordar en la séptima sesión del taller

1. Usando solamente ceros y unos:
   a) Construye una expansión decimal con muy largo periodo.
   b) Construye sistemáticamente una secuencia de expansiones, cada uno con un periodo más largo que el anterior.
   c) Construye un decimal infinito no periódico.
2. Piensa en la división $\frac{2}{0}$, ¿Cuál será el resultado de dicha división? Selecciona la oración que represente mejor tu idea hasta el momento.
   A. Dos dividido entre cero es un número.
   B. Dos dividido entre cero es igual a infinito.
   C. No puedes calcular dos dividido entre cero.
3. ¿Cuál es el número positivo más cercano al cero? Selecciona la oración que represente mejor tu idea hasta el momento.
   A. 0.1
   B. 0.0000000000000001
   C. $0.0 \ldots 01$
   D. $0.\overline{0}1$
   E. Tal número no existe.
   F. $\frac{1}{\infty}$
4. Considera un numero positivo cualquiera. Luego, lo divides entre dos; el resultado lo vuelves a dividir entre dos; el resultado de nuevo entre dos y así sucesivamente.
   a) ¿Llegará un punto donde ya no puedas dividir nuevamente entre dos? Selecciona la oración que represente mejor tu idea hasta el momento.
      A. Sí, porque al hacerlo en la calculadora en algún momento da como resultado cero.
      B. No, porque siempre hay un número para dividir.
5. Los números $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ están en constante decremento. ¿Cuál será el menor número que se puede obtener de esta manera?
   A. 0.1

B. 0.0000000000000001

C. $0.0 \ldots 01$

D. $0.\overline{0}1$

E. Tal número no existe.

F. $\frac{1}{\infty}$

6. Considera la fracción $\frac{1}{3}$.

   a) ¿A qué es igual en número decimal? Explica tu respuesta.

   b) ¿Está de acuerdo con la expresión $\frac{1}{3} = 0.\overline{3}$? Selecciona la oración que represente mejor tu idea en este momento.

      A. No, porque siempre le falta un poco al $0.\overline{3}$ para llegar a ser $\frac{1}{3}$.

      B. No, porque hay una infinidad de 3 en el número decimal y el $\frac{1}{3}$ es un racional finito.

      C. Sí, porque al hacer división sale ese resultado.

      D. Sí, porque es un número periódico infinito.

      E. Sí, porque $\frac{1}{3}$ y $0.\overline{3}$ son representaciones del mismo número.

I. Actividades para abordar en la octava sesión del taller

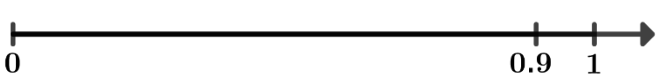
1. Piense en los números $0.999 \ldots$ y 1. Selecciona la oración que represente de mejor manera tu idea en este momento.

   A. El número $0.999 \ldots$, donde el número de nueves después del punto es infinito, es igual a 1 ya que no hay números entre $0.999 \ldots$ y 1.

   B. No hay números entre $0.999 \ldots$ y 1, pero $0.999 \ldots$ y 1 son números diferentes de todos modos.

   C. Hay números entre $0.999 \ldots$ y 1, por lo que son números diferentes.

2. Considera los números 0.9 y 1 en la recta numérica como se muestra en la figura.



   a) Calcula el punto medio entre 0.9 y 1, ¿Cuál es ese número?

   b) Calcula el punto medio entre el valor anterior y 1, ¿Cuál es ese valor?

   c) Imagina que repites ese proceso indefinidamente y que llegas al último número, ¿Cuál sería? Selecciona la oración que representa mejor tu idea en este momento.

A. 0.9999999999999999

B. 0.999 ...

C. 1

3. Considere la división para hallar las representaciones decimales de $\frac{1}{9}$ y $\frac{2}{9}$

a) ¿Cuál es su representación en número decimal?

b) Considera el número $\frac{2}{9}$, ¿Cuál es su representación en número decimal?

c) Considera que tiene todas las decimales de las fracciones anteriores. Realiza las operaciones con números decimales y complete la siguiente tabla.

Representación					
Fracción	$\frac{1}{9}$	$+$	$\frac{1}{9}$	$=$	$\frac{2}{9}$
Decimal	____________	$+$	____________	$=$	____________

d) ¿Es la misma representación que el inciso b)?

e) Encuentra las representaciones en número decimal de las cantidades en la siguiente tabla y calcula el total correspondiente.

Representación	
Fracción	Decimal
$\frac{1}{9}$	
$\frac{2}{9}$	
$\frac{3}{9}$	
$\frac{4}{9}$	
$\frac{5}{9}$	
$\frac{6}{9}$	
$\frac{7}{9}$	
$\frac{8}{9}$	

$\frac{9}{9}$	

f) ¿Qué sucede cuando llega a $\frac{9}{9}$?

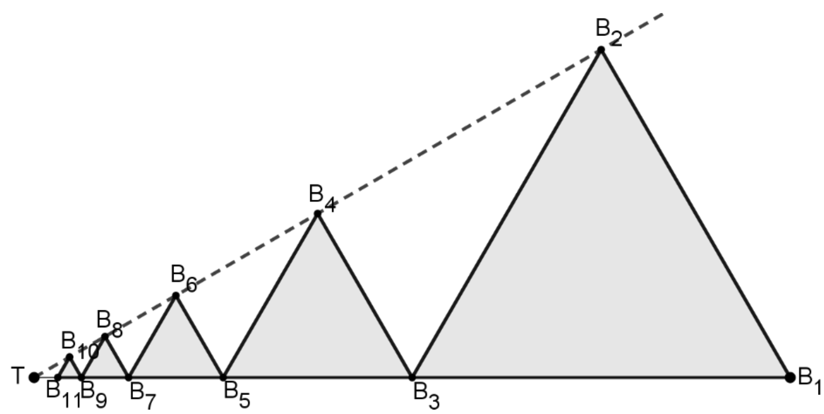
g) Si realiza la suma $\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}$ y por otro lado $0.\bar{1}+0.\bar{1}+0.\bar{1}+0.\bar{1}+0.\bar{1}+0.\bar{1}+0.\bar{1}+0.\bar{1}+0.\bar{1}$, ¿obtendrá el mismo valor? Explica tu respuesta.

4. Ahora recuerda la representación racional de números decimales periódicos.

a) ¿Puedes identificar los números $0.909090\ldots$ y $0.090909\ldots$ en su representación racional?

b) ¿Qué sucede cuando sumas estas expresiones como si fueran números? ¿Qué esperas conseguir? Esta forma decimal periódica del número 1 es uno de los problemas menores que debe resolverse antes de aceptar los decimales periódicos como representación de números.

5. Suponga que tiene un segmento unitario $\overline{TB_1}$ sobre la cual descansa las bases de una sucesión infinita de triángulos equiláteros, con bases de longitud decreciente: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ (Zippin, 1962, p. 62)



a) ¿Cuál será la longitud del zigzag de los lados restantes de los triángulos? Selecciona la oración que mejor represente tu idea en este momento.

A. 1.999999999999999

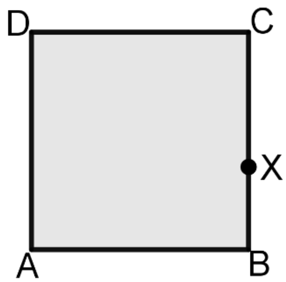
B. Un valor infinitamente cercano al 2.

C. 2

6. No se puede saber porque siempre hay nuevos triángulos. Sea C un punto arbitrario en algún lugar del segmento $\overline{AB}$. Dividimos y subdividimos el segmento $\overline{AB}$ por mitades, es decir, cada nuevo segmento que surge de la división se divide a la mitad nuevamente, y así

sucesivamente. ¿Llegaremos a una situación tal que uno de los puntos de división coincida con el punto C? Explica tu respuesta.

7. Sea $ABCD$ un cuadrado cualesquiera. Hallar el punto X sobre el lado BC tal que el triángulo ABX tendrá el área más pequeña posible. Selecciona la oración que represente mejor tu idea en este momento.



A. El punto X está muy cerca de B.

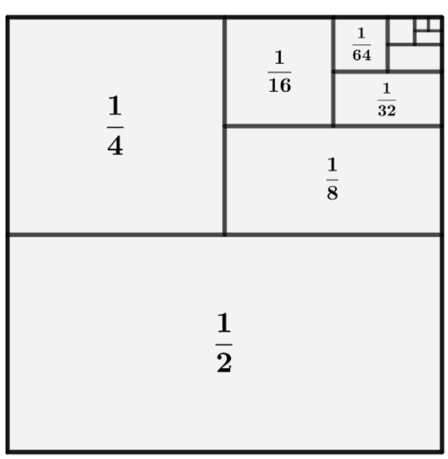
B. El punto X está sobre B.

C. El punto X no puede ser hallado porque es infinitamente pequeño.

D. El punto X no existe porque no puede encontrarse dicho triángulo.

J. Actividades para abordar en la novena sesión del taller

1. ¿Hay un rectángulo de área unitaria tal que uno de sus lados sea cero? Explica tu respuesta.
2. Considera un cuadrado que divides en dos rectángulos iguales. Toma uno de ellos y divídelo nuevamente por la mitad ahora en dos cuadrados iguales. Luego, toma uno de los cuadrados y divídelo en rectángulos iguales nuevamente. Imagina que repites este proceso indefinidamente.



a) ¿Cuál será el área de la última figura que se puede generar? Selecciona la oración que mejor representa tu idea en este momento.

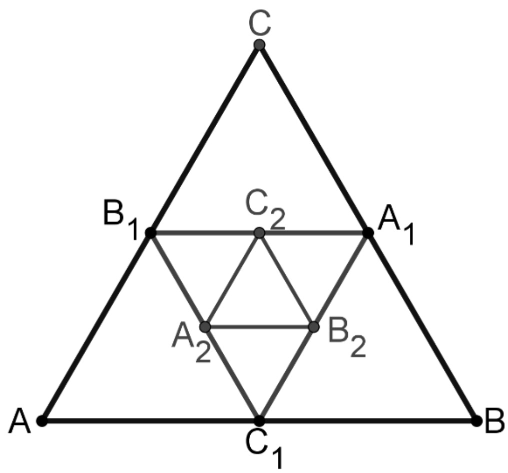
A. $0.0000000000000001\ u^2$

B. $0.\bar{0}1\ u^2$

C. No se puede saber porque no existe dicha figura.

D. 0

3. Sea ABC un triángulo equilátero. Divide cada lado en dos partes iguales y etiquete los puntos medios A_1, B_1 y C_1. Consideremos el triángulo $A_1B_1C_1$ y marquemos los puntos medios de sus lados A_2, B_2 y C_2 como muestra la figura. Continúe el proceso de la misma manera.



a) Imagina que llegas al último triángulo que se puede construir. ¿Cuál será el área de dicha figura? Explica tu respuesta.

4. Considera el rectángulo $ABCD$.

a) Construye un nuevo rectángulo que tenga el mismo perímetro, pero su largo sea mayor y su ancho menor a la figura anterior.

b) Imagine que construye nuevos rectángulos aumentando su largo y disminuyendo su ancho de tal manera que el perímetro permanezca constante. ¿Qué sucede con las áreas de los rectángulos a medida que continúa el proceso? Explica tu respuesta.

5. Construya un semicírculo con el segmento $\overline{AB}$ como diámetro.
    a) Divide $\overline{AB}$ en dos partes iguales, $\overline{AC}$ y $\overline{CB}$, y construye dos semicírculos sobre $\overline{AC}$ y $\overline{CB}$.
    b) Divide $\overline{AC}$ y $\overline{CB}$ en dos partes iguales, $\overline{AD}$ y $\overline{DC}$, $\overline{CE}$ y $\overline{EB}$, respectivamente; y construye cuatro semicírculos sobre $\overline{AD}$, $\overline{DC}$, $\overline{CE}$ y $\overline{EB}$.
    c) Imagina que continúas dividiendo y construyendo semicírculos de la misma manera. ¿Qué pasará con la longitud de la línea ondulada a medida que acortamos la longitud de cada subsegmento? Explica tu respuesta.
6. Imagina que tienes un conjunto infinito de pelotas de ping-pong numeradas $1, 2, 3, ...$ y un barril muy grande; estás a punto de iniciar un experimento. El experimento terminará exactamente en un minuto ni más ni menos. Tu tarea es tomar las primeras 10 pelotas e introducirlas en el barril y remover la número 1 en 30 segundos. En la mitad del tiempo anterior, vas a colocar las pelotas de la 11 a la 20 dentro del barril y vas a sacar la pelota número 2. Siguiendo en la mitad del tiempo restante (y trabajando cada vez más y más rápido), coloca las pelotas 21 a la 30, y quita la pelota 3. Continua con esta tarea al infinito. Después de 60 segundos, al final del experimento. ¿Cuántas pelotas de ping-pong permanecen dentro del barril?