



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

**CARACTERIZACIÓN DE RELACIONES EN EL
CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DE UN PROFESOR MEXICANO Y UNA
PROFESORA COLOMBIANA EN LA ENSEÑANZA DE LAS SIMETRÍAS**

PARA OBTENER EL TÍTULO DE

MAESTRO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

PRESENTA

LIC. OSCAR IVAN PATERNINA BORJA

DIRECTOR DE TESIS

DRA. ESTELA DE LOURDES JUÁREZ RUIZ

CO-DIRECTOR DE TESIS

DRA. DIANA ZAKARYAN

PUEBLA, PUE.

ENERO 2023



DR. SEVERINO MUÑOZ AGUIRRE
SECRETARIO DE INVESTIGACIÓN Y
ESTUDIOS DE POSGRADO, FCFM-BUAP
P R E S E N T E:

Por este medio le informo que el C:

OSCAR IVÁN PATERNINA BORJA

Estudiante de la Maestría en Educación Matemática, ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 28 de noviembre de 2022, con la tesis titulada:

"CARACTERIZACIÓN DE RELACIONES EN EL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DE UN PROFESOR MEXICANO Y UNA PROFESORA COLOMBIANA EN LA ENSEÑANZA DE LAS SIMETRÍAS"

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

A T E N T A M E N T E.
H. Puebla de Z. a 05 de enero de 2023

DRA. LIDIA AURORA HERNÁNDEZ REBOLLAR
COORDINADORA DE LA MAESTRÍA
EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA.



DRA LAHR/Agm*

Facultad
de Ciencias
Físico Matemáticas

Av. San Claudio y 18 Sur, edif. FMI
Ciudad Universitaria, Col. San
Manuel, Puebla, Pue. C.P. 72570
01 (222) 229 55 00 Ext. 7550 y 7552

Esta investigación fue realizada gracias al financiamiento otorgado por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) con la beca asignada al CVU 1101001 a partir del 01 de enero de 2021 hasta el 31 de diciembre de 2022

AGRADECIMIENTOS

Pon en manos del Señor todas tus obras, y tus proyectos se cumplirán

Proverbios 16:3

Agradezco a Dios por permitirme culminar este proceso. A mis familiares y amigos en Colombia por motivarme siempre a seguir adelante. Al programa por permitirme estar entre sus estudiantes y ser merecedor de la beca. A mi directora y codirectora de tesis por tener siempre tiempo, disposición y una voz de aliento para seguir adelante con la investigación. A mis profesores por su tiempo, dedicación y conocimientos. A mis compañeros y amigos de curso quienes fueron excelentes anfitriones. A México por darme la oportunidad de formarme como Maestro en Educación Matemática. A todas las personas que hicieron posible mi estadía en Puebla compartidos. A todos y todas, muchas gracias.

ÍNDICE

RESUMEN	1
ABSTRACT	2
INTRODUCCIÓN	3
CAPÍTULO 1	5
PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	5
1.1 Enseñanza y aprendizaje de las simetrías	6
1.2 Las matemáticas en el sistema educativo mexicano	7
1.3 Las matemáticas en el sistema educativo colombiano	8
1.4 Pregunta de investigación	9
1.5 Objetivo de investigación	9
1.6 Justificación	9
1.7 Supuesto de la investigación	10
CAPÍTULO 2	12
MARCO TEÓRICO	12
2.1 Modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas	12
2.2 Diferencia entre Didáctica y Pedagogía	14
2.3 Subdominios del modelo MTSK	15
2.2 Relaciones en el conocimiento especializado del profesor de matemáticas	20
CAPÍTULO 3	21
METODOLOGÍA	21

3.1 Diseño de la Investigación	22
3.2 Informantes	22
3.3 Proceso y recogida de datos de la Investigación	23
3.4 Análisis de datos	24
CAPÍTULO 4	25
RESULTADOS Y DISCUSIÓN	25
4.1 Relaciones en el conocimiento especializado del profesor mexicano	25
4.2 Relaciones en el conocimiento especializado de la profesora colombiana	34
4.3 Discusión de resultados	40
CONCLUSIONES	45
REFERENCIAS	47
ANEXOS	54

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1 Dominios, subdominios y categorías del modelo MTSK.....	18
Tabla 2 Caracterización del conocimiento de P1	27
Tabla 3 Caracterización de las categorías (iii) del KMT, (iii) del KFLM y (ii) del KoT	30
Tabla 4 <i>Caracterización de las categorías (i) y (iii) del KMLS y (iii) del KSM</i>	32
Tabla 5 <i>Caracterización de la categoría (i) del KMT y (iv) del KoT</i>	36
Tabla 6 <i>Caracterización de la categoría (iii) KFLM y (ii) y (iii) KMT</i>	39

INDICE DE FIGURAS

Figura 1 Modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas	14
Figura 2 a) Inicio de una sesión de clase b) Video “Simetría en las figuras”	25
Figura 3 Relación dirigida entre categorías del KMT y KFLM	28
Figura 4 Actividad propuesta trazar en las figuras los ejes de simetría	29
Figura 5 Relación dirigida entre categorías del KMT, KFLM y KoT.....	31
Figura 6 Descripción del grado para enseñar simetrías.....	31
Figura 7 Relación dirigida entre categorías del KMLS y KSM	34
Figura 8 Extracto de la planeación en el momento de inicio de la clase.....	35
Figura 9 Relación dirigida entre categorías del KMT y KoT.....	37
Figura 10 Extracto de la planeación en el momento de desarrollo de la clase	37
Figura 11 Relación dirigida entre categorías del KFLM y KMT	40

RESUMEN

Para la presente investigación se tuvo en cuenta la red compleja y dinámica de conocimientos que ponen en juego los docentes de matemáticas en diferentes contextos, escenarios y tareas propias de su profesión. Se planteó como objetivo caracterizar las relaciones del conocimiento especializado movilizado por un profesor mexicano y una profesora colombiana en la intención enseñar simetrías. Se tomaron los sustentos teóricos del modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK). Dicha investigación se desarrolló desde un enfoque cualitativo con un estudio de caso instrumental múltiple, con un profesor mexicano y una profesora colombiana. Los datos se recolectaron por medio del diseño de una planeación de clase y una entrevista semiestructurada. Como resultados se ejemplifican relaciones entre categorías de los distintos subdominios del modelo, predominando en cada una ellas categorías del subdominio Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas. Como principal conclusión se obtuvo el carácter direccional o dirigido de dichas relaciones y el potencial que tiene la planeación de clase como escenario para analizar el conocimiento del profesor de matemáticas.

Palabras clave: conocimiento especializado del profesor de matemáticas, relaciones, planeación de clase, simetría.

ABSTRACT

For the present investigation, the complex and dynamic network of knowledge that mathematics teachers put into play in different contexts, scenarios, and tasks typical of their profession was considered. The objective was to characterize the relationships of specialized knowledge mobilized by a Mexican teacher and a Colombian teacher in the intention of teaching symmetries. The theoretical foundations of the Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK) model were taken. The research was developed from a qualitative approach with a multiple instrumental case study, with a Mexican professor and a Colombian professor. The data was collected through the design of a class plan and a semi-structured interview. As results, relationships between categories of the different subdomains of the model are exemplified, predominating in each of them categories of the Knowledge of Mathematics Teaching subdomain. The main conclusion was the directional or directed nature of these relationships and the potential of class planning as a scenario to analyze the knowledge of the mathematics teacher.

Keywords: mathematics teacher's specialized knowledge, relationships, lesson planning, symmetry.

INTRODUCCIÓN

En los últimos años se ha visto la necesidad de estudiar el conocimiento especializado del profesor de matemáticas (Sámuel et al., 2016; Sánchez-García et al., 2021; Sosa et al., 2016) caracterizando las diferentes relaciones que se pueden establecer entre subdominios de conocimiento durante el desarrollo de una tarea en un escenario particular propio de su labor (Fuentes, 2020a; Fuentes, 2020b; Padilla-Escorcia y Acevedo-Rincón, 2021). Estas relaciones están sustentadas en la diversidad de conocimientos que moviliza un docente en su desarrollo profesional dentro o fuera del aula. Esta investigación se desarrolló en torno a esta problemática analizando el conocimiento de dos profesores de diferentes países del continente americano, convirtiéndola en un estudio de impacto para la comunidad de la Educación Matemática.

La presente tesis se reporta en cinco capítulos desarrollados de manera sistemática los cuales se describen a continuación.

En el Capítulo 1 se aborda la problemática alrededor del conocimiento disciplinar y didáctico del profesor de matemáticas. Se señalan las dificultades que hay documentadas en el aprendizaje de las simetrías y los conocimientos que algunos docentes movilizan para su enseñanza. Se hace la revisión de la literatura, se muestra cómo están registradas las matemáticas en sistema educativo mexicano y colombiano. Además, se formula la pregunta y objetivo de investigación. También se justifica la pertinencia y relevancia del estudio y se plantean los supuestos que se van a tener en cuenta.

En el Capítulo 2 se desarrollan los referentes teóricos que enmarcaron la investigación. El modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (*MTSK*) compuesto por dominios, subdominios y categorías fue la lente bajo la cual se analizaron los datos recolectados. Se describe la diferencia entre pedagogía y didáctica desde el modelo. Además, se plasmaron las ideas que se han desarrollado sobre las relaciones en el conocimiento del profesor.

En el Capítulo 3 se describe el enfoque y diseño del estudio. Asimismo, se mencionan los informantes y el tipo de muestreo y criterios que se tuvieron en cuenta para seleccionarlos. También

se clarifican y sustentan los instrumentos que fueron utilizados para la recolección de los datos y el procedimiento que se siguió para tal fin.

En el Capítulo 4 se describen los resultados correspondientes a cada uno de los profesores. Se caracterizaron las relaciones que fue posible establecer e identificar en el análisis a su conocimiento especializado. Además, se discutieron dichas relaciones teniendo en cuenta los referentes y antecedentes mencionados en el capítulo 1 y 2. Se profundizó en el carácter o naturaleza de las relaciones encontrándose, todas en un sentido direccional o dirigido.

En la sección de las Conclusiones se menciona la importancia de la planeación de clase como escenario potencialmente alto para la comprensión y análisis del conocimiento especializado del profesor de matemáticas. Asimismo, se sintetizan el carácter direccional de las relaciones caracterizadas en ambos profesores, dejándose como aporte teórico al modelo MTSK.

CAPÍTULO 1

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La labor de los profesores es uno de los factores clave que incide en la formación de los estudiantes y en la construcción de su conocimiento. Para la Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (UNESCO, 2019) los docentes representan una de las fuerzas más sólidas e influyente con miras a garantizar la equidad, el acceso y la calidad de la educación. En este sentido, desde la Educación Matemática, se procura contribuir a la formación de estudiantes críticos donde el conocimiento del docente juega un papel esencial. Rojas (2014) se refiere al profesor de matemáticas como un actor importante en la actividad que se genera en el aula donde pone en juego, con cierta lógica, una diversidad de conocimientos en el desarrollo de su tarea profesional. Por lo tanto, estudiar el conocimiento del profesor de matemáticas y cómo lo moviliza en la práctica no es tarea fácil de realizar ya que se deben tener en cuenta todos los recursos, ideas, lenguaje, conceptos, etc. que utiliza, tanto en el diseño de planeaciones de clases, como en la enseñanza de un contenido matemático.

En consecuencia, se han desarrollado varios modelos con la finalidad de estudiar y comprender el conocimiento del profesor, por ejemplo, las propuestas de Shulman (1986), Ball et al. (2008), Carrillo et al. (2013), entre otras. Los últimos autores desarrollaron el modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK) que se construyó con el objetivo de analizar y comprender el conocimiento movilizado por el docente dentro y fuera del aula de matemáticas. El modelo MTSK permite analizar el conocimiento que el profesor tiene y utiliza durante cualquier tarea relacionada con su labor docente, por ejemplo, la planeación de clase, su ejecución en aula, la reflexión posterior a la enseñanza o la discusión entre profesores (Advíncula et al., 2021). El análisis y comprensión del conocimiento del docente de matemáticas se hace bajo la lente de los dominios, subdominios y categorías que componen al modelo en mención.

El modelo MTSK está estructurado por tres dominios, los primeros dos, el Conocimiento Matemático (MK) y el Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK), se componen en tres subdominios y estos, a su vez, por categorías. El tercer dominio es el de las creencias, asumidas

como una característica fundamental del conocimiento especializado del profesor de matemáticas (Aguilar-González et al., 2022). Los subdominios que estructuran al MTSK emergen de las propias matemáticas, o de aquellos aspectos específicos de la enseñanza y aprendizaje de esta ciencia (Carrillo-Yañez et al., 2018). Por tal razón, es dentro y fuera del aula donde se relacionan los elementos que conforman el conocimiento del profesor.

En este sentido, se han desarrollado estudios centrados en la caracterización de las relaciones que se pueden establecer entre los diferentes subdominios del modelo (Fuentes, 2020a; Fuentes, 2020b; Padilla-Escorcia y Acevedo-Rincón, 2021; Zakaryan et al., 2018; Zakaryan y Ribeiro 2016) permitiendo profundizar en el conocimiento de los profesores de matemáticas, asumiéndolo como una red compleja de relaciones que no está compuesto por partes aisladas (Carrillo-Yañez et al., 2018; Zakaryan y Ribeiro, 2016).

Esta investigación sigue esa línea pretendiendo profundizar en la comprensión del conocimiento especializado de dos profesores de matemáticas, uno colombiano y otro mexicano al diseñar una planeación de clase, teniendo en cuenta el contenido matemático de simetrías. Además, estudiar la caracterización de las posibles relaciones que se puedan establecer entre los distintos subdominios del modelo MTSK.

1.1 Enseñanza y aprendizaje de las simetrías

La simetría es un concepto que tiene lugar en distintos contextos como la arquitectura, la física, la química, la naturaleza misma, etc. En varios países del mundo se ha introducido en los currículos de matemáticas el estudio de esta temática como un aprendizaje esencial en la educación básica (Barrantes, 2019). Este contenido matemático es base para el desarrollo de otros temas avanzados en secundaria como congruencia, semejanza, funciones y en nivel superior como la teoría de grupos. Sin embargo, se han presentado dificultades en el desarrollo de su enseñanza y aprendizaje. Por un lado, algunos profesores no manifiestan con claridad el conocimiento sobre el concepto de simetría como una transformación geométrica del espacio y sus relaciones implícitas (Sámuel et al., 2016). Tampoco conocen los espacios socioculturales del contexto próximo del estudiante permitiéndole generar conexiones entre los artefactos simétricos cotidianos y su implementación en el aprendizaje (Morales et al., 2018). Este desconocimiento lleva a

imposibilidad de diseñar actividades o secuencias didácticas como oportunidades para los estudiantes aprender las propiedades y características de que tienen las simetrías. Para Barrantes (2019) el desarrollo de este tema en el aula de clase requiere en el conocimiento del docente nuevas capacidades y obliga a que se implementen recursos didácticos para su comprensión.

Por otro lado, se han documentado varias dificultades en el aprendizaje de las simetrías en diferentes niveles educativos, por ejemplo, Berciano et al. (2021) manifiestan cómo estudiantes de cinco años no son capaces de identificar en un objeto no solo uno sino todos sus ejes de simetría. Otros alumnos con edades entre doce y trece años presentan confusiones entre la simetría y la traslación al construir la imagen simétrica de una figura (García-Cuellar, 2021). Para Dello y Ferrara (2022) estudiantes con el mismo rango de edad tienen la capacidad de reconocer si una imagen es simétrica o no, pero tienen dificultad para identificar el tipo de simetría. Estas evidencias dan lugar a la preocupación y pronta intervención en el aula con distintas actividades, estrategias y/o técnicas para lograr un avance en la comprensión de este tema. El docente deberá diseñar una secuencia o situación didáctica en la que introducirá los términos como simetría axial, eje de simetría, equidistancia, rotación, ángulos entre otros, y relacionarlos con el contexto de los estudiantes (Acosta et al., 2010).

1.2 Las matemáticas en el sistema educativo mexicano

En el Modelo Educativo de México la educación básica y la educación media superior conforman la educación obligatoria (Secretaría de Educación Pública [SEP], 2017). La formación escolar, desde los niños de tres años hasta los jóvenes de quince años, es abarcada en la educación básica. Son doce grados distribuidos en tres niveles: tres grados para preescolar, seis grados para primaria y tres grados para secundaria (SEP, 2017). Este estudio se llevó a cabo con un profesor de matemáticas de sexto grado de primaria donde la edad de los estudiantes oscila entre 11 y 12 años.

Según la SEP (2011), la disciplina de las matemáticas está incluida en el campo de formación del pensamiento matemático. En este sentido, se tiene como objetivo asumir diversas “miradas” para comprender entornos sociales, resolver problemas y fomentar el interés por las matemáticas a lo largo de la vida. El pensamiento matemático es la forma de razonar que utilizan los matemáticos

profesionales para resolver problemas provenientes de diversos contextos, ya sea que surjan en la vida diaria, en las ciencias o en las propias matemáticas. De esta manera, en el contexto escolar se busca que los estudiantes desarrollen conscientemente esta forma de razonar lógicamente sin dejar de lado los saberes y conocimientos de su contexto, valorando dicho pensamiento y mejorando su actitud hacia las matemáticas.

En consecuencia, la asignatura para su estudio se organiza en tres ejes temáticos: Número, Algebra y Variación, Forma, Espacio y Medida y Análisis de Datos cada uno con siete, tres y dos temas respectivamente (SEP, 2017). Para la presente investigación se focalizará en el eje Forma, Espacio y medida compuesto por los temas ubicación espacial, figuras y cuerpos geométricos y magnitudes y medidas. Asimismo, para lograr el desarrollo del pensamiento matemático, los docentes deben tener conocimiento sobre los *aprendizajes esperados* planteados por la SEP (2017), quienes definen lo que deben lograr los estudiantes al finalizar el grado escolar y constituyen el referente fundamental para la planeación y la evaluación en el aula. En este estudio se tendrá en cuenta el aprendizaje esperado: *Construye y analiza figuras geométricas, en particular triángulos y cuadriláteros, a partir de comparar lados, ángulos, paralelismo, perpendicularidad y simetría perteneciente al tema figura y cuerpos geométricos.*

1.3 Las matemáticas en el sistema educativo colombiano

De acuerdo con la Ley General de Educación de 1994, en el sistema educativo colombiano la educación formal se organiza en tres niveles: preescolar, el cual comprende un grado mínimo obligatorio, la educación básica conformada por cinco grados en primaria y cuatro grados en secundaria, y la educación media con dos grados. Este estudio se desarrolló con una profesora de matemáticas de séptimo grado de secundaria, donde la edad de los estudiantes oscila entre 11 y 13 años.

En los distintos grados mencionados anteriormente se deben desarrollar capacidades que le permiten al estudiante ser matemáticamente competente, las cuales están contempladas en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas planteados por el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2006). Ser *matemáticamente competente* implica formular, plantear, transformar y resolver problemas a partir de situaciones de la vida cotidiana, utilizar modelos mentales, diversos

registros de representación, argumentar y refutar permitiendo desarrollar el pensamiento matemático. Este último está compuesto por el *Pensamiento Numérico*, *Pensamiento Variacional*, *Pensamiento Espacial*, *Pensamiento Aleatorio* y *Pensamiento Métrico*, los cuales están relacionados con los sistemas numéricos, algebraicos, geométricos, de datos y de medidas, respectivamente (MEN, 2006).

Asimismo, el MEN (2017) expidió los Derechos Básicos de Aprendizajes (DBA) garantizando lo que deben aprender los estudiantes en cada grado. Los DBA guardan coherencia con los estándares, siendo estructurantes porque expresan las unidades básicas y fundamentales necesarias para edificar el desarrollo del pensamiento matemático del individuo, haciéndose obligatoria su presencia en las planeaciones, actividades y evaluaciones de aula. Este estudio se desarrollará teniendo en cuenta el Pensamiento Espacial y los sistemas geométricos, el cual contempla el estándar *Predigo y comparo los resultados de aplicar transformaciones rígidas (traslaciones, rotaciones, reflexiones) y homotecias (ampliaciones y reducciones) sobre figuras bidimensionales en situaciones matemáticas y en el arte.*

1.4 Pregunta de investigación

Teniendo en cuenta lo mencionado surge el siguiente interrogante: ¿Qué relaciones existen en el conocimiento especializado movilizado por un profesor mexicano y una profesora colombiana en la intención de enseñar simetrías?

1.5 Objetivo de investigación

Se trazó como objetivo: Caracterizar las relaciones del conocimiento especializado movilizado por un profesor mexicano y una profesora colombiana en la intención enseñar simetrías.

1.6 Justificación

El estudio de la simetría se hace necesario tanto en el aprendizaje de los estudiantes como en los conocimientos que manifiestan o deben tener los docentes para su enseñanza. Para Barrantes (2019) se hace necesario incursionar en temas como las simetrías y algunas herramientas para su comprensión que permitan un desarrollo de la geometría más útil conceptualmente y formar

estudiantes con competencias matemáticas. En este sentido, García-Cuellar (2021) afirma que la simetría brinda oportunidades en los estudiantes para la visualización de la geometría, por ejemplo, en el arte y permite la exploración de regularidades o patrones que representan la esencia del conocimiento matemático.

Esta investigación es pertinente porque contribuye a la base teórica del modelo MTSK teniendo en cuenta lo amplio y complejo que es el conocimiento del profesor de matemáticas. Para Carrillo et al. (2013) es interesante profundizar en el conocimiento especializado del profesorado para la enseñanza de las matemáticas. De este modo, caracterizar a ambos docentes permitirá obtener indicadores de conocimiento sobre la simetría y su enseñanza. Esta caracterización hará posible ahondar en la comprensión de cómo los profesores utilizan su conocimiento en la enseñanza y qué conocimientos se activan al enseñar un contenido (Rojas, 2014).

Asimismo, este estudio es relevante porque aporta a la investigación sobre las relaciones identificadas entre los distintos subdominios del modelo MTSK al comprender el conocimiento especializado de ambos profesores. Para Zakaryan y Ribeiro (2016), son necesarios más estudios que permitan enriquecer y ampliar el conocimiento de dichas relaciones. Además, este estudio permitirá hacer un análisis de los conocimientos movilizados por ambos docentes en la enseñanza de la simetría.

1.7 Supuesto de la investigación

El modelo MTSK permite evidenciar y caracterizar las posibles relaciones que existen entre los distintos subdominios del modelo (Fuentes, 2020a; Padilla y Acevedo, 2021; Zakaryan et al., 2018; Zakaryan y Ribeiro, 2016). El supuesto de investigación es que en la enseñanza de las simetrías, por ejemplo, es posible relacionar cómo algunos recursos materiales (recursos materiales y virtuales - KMT) contribuyen en los procedimientos realizados por los estudiantes (procedimientos - KoT) cumpliendo con sus expectativas e intereses (aspectos emocionales del aprendizaje de las matemáticas - KFLM), el conocimiento potencial de las simetrías para temas en cursos posteriores (nivel esperado de desarrollo conceptual y procedimental - KMLS), el conocimiento de términos comúnmente utilizados por los estudiantes al referirse a las simetrías (maneras en que los alumnos interactúan con el contenido matemático - KFLM) para disminuir las

dificultades que se puedan presentar en el aprendizaje del tema (fortalezas y debilidades en el aprendizaje de las matemáticas - KFLM) como también implementando diferentes ejemplos (estrategias, técnicas, tareas y ejemplos - KMT) o tener en cuenta los temas previos (secuenciación de temas - KMLS) para el aprendizaje de las propiedades de las simetrías (definiciones, propiedades y fundamentos - KoT) y sus aplicaciones en diferentes contextos (fenomenología y aplicaciones - KoT).

CAPÍTULO 2

MARCO TEÓRICO

Para la presente investigación se tendrán en cuenta los aportes teóricos en el marco del modelo MTSK, sus antecedentes, dominios, subdominios y categorías.

2.1 Modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas

Desde hace tiempo se ha intentado construir o diseñar modelos, estudios o mapas que ayuden a caracterizar el conocimiento profesional del profesor. Shulman (1986) desarrolló un estudio con tres dominios: Conocimiento de la Materia (SMK), Conocimiento Pedagógico del Contenido (PCK) y Conocimiento Curricular (CK). En esta propuesta se destacó el PCK entendido como el conocimiento necesario para enseñar en relación con el contenido específico de la materia que se está enseñando, resaltando también la importancia del SMK. En este sentido, se propuso un modelo para organizar el conocimiento del profesor de matemáticas observando su actuación en el aula de clases denominado Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT) (Ball et al., 2008).

Este modelo asume dos de los dominios de Shulman (1986) pero en relación con las matemáticas: Conocimiento de las Matemáticas (MK) y el Conocimiento Didáctico del Contenido Matemático. Para Ball y sus colegas, el MK se compone por tres subdominios, el Conocimiento Común del Contenido relacionado con aquel conocimiento que posee cualquier adulto bien educado, el Conocimiento Especializado del Contenido refiriéndose a aquel conocimiento matemático de los profesores de la disciplina que no requieren otros profesionales, es decir, la naturaleza especializada del docente de matemáticas. Por último, se tiene el Conocimiento en el Horizonte Matemático el cual permite relacionar los temas o tópicos a largo plazo y generar valores matemáticos.

Asimismo, el PCK también se compone por tres subdominios: el Conocimiento del Contenido y los Estudiantes incluye la capacidad del docente de prever el aprendizaje del estudiante, el Conocimiento del Contenido y la Enseñanza relacionado con las estrategias, técnicas y recursos que guían al docente en el desarrollo de su labor en el aula y el Conocimiento Curricular

de las Matemáticas Escolares empleado para determinar la dirección del curso en cuanto a los temas que deben aprender los estudiantes (Muñoz-Catalán et al., 2015). Teniendo en cuenta los subdominios descritos se observa la importancia de la especificidad del conocimiento del profesor de matemáticas y la comprensión de la transversalidad del currículo de las matemáticas. No obstante, en varias investigaciones se evidenciaron algunos inconvenientes al utilizar el modelo MKT con respecto al conocimiento especializado del profesor de matemáticas y el traslapamiento entre los subdominios al analizar este último (Carrillo et al., 2018).

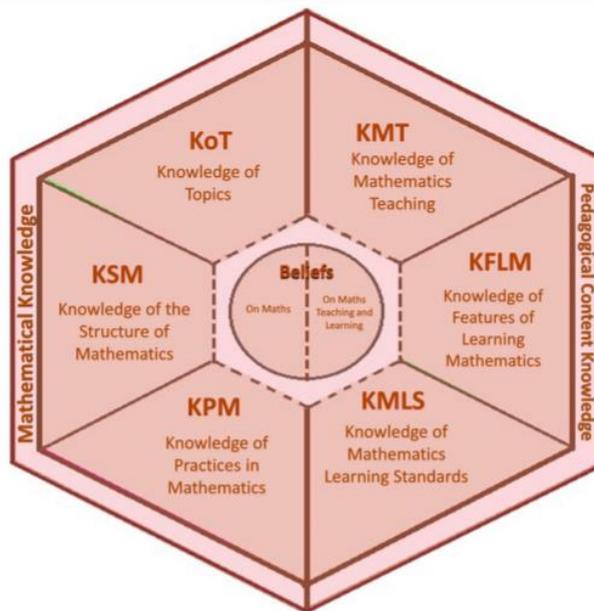
Por tal motivo, Carrillo et al. (2013) desarrollaron un modelo que analiza y comprende a profundidad el conocimiento del profesor de matemáticas tratando de disipar los inconvenientes observados en el modelo MKT. Este modelo se denomina Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK) por sus siglas en inglés. El modelo MTSK considera exclusivamente aquellos conocimientos que tienen relación directa con el contenido matemático (Zakaryan y Ribeiro, 2016). Por consiguiente, no se asume como conocimiento especializado del profesor de matemáticas aquellas técnicas de manejo de grupo o heurísticas generales sin relación con las matemáticas. El conocimiento especializado del docente de esta disciplina se caracteriza como aquel que el profesor necesita y usa para enseñar matemáticas, dejando de lado acciones pedagógicas generales no relacionadas a ella (Fuentes, 2020).

El modelo MTSK está compuesto por dominios y subdominios, con sus respectivas categorías, que están íntimamente relacionados con el contenido matemático. En consecuencia, se tiene el dominio Conocimiento Matemático (MK) que se compone de los subdominios el Conocimiento de los Temas (KoT), Conocimiento de la Estructura de las Matemáticas (KSM) y el Conocimiento de las Prácticas en Matemáticas (KPM). El dominio Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK) está compuesto por el Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT), Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM) y el Conocimiento de los Estándares de Aprendizajes de las Matemáticas (KMLS). Tanto MK y PCK como los subdominios se encuentran influenciados por el dominio de las creencias y concepciones que tienen los profesores sobre la matemática y su enseñanza y aprendizaje (Carrillo et al., 2018). Para Aguilar-González et al (2022) estas tienen su naturaleza muy parecida a la del conocimiento, pero no son los mismo por eso se hace necesario diferenciarlo en la caracterización y su ubicación

central en la representación del modelo representa la interrelación con los demás dominios (Figura 1).

Figura 1

Modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas



Fuente: Carrillo et al. (2018), p. 241

2.2 Diferencia entre Didáctica y Pedagogía

Para este estudio se tuvo en cuenta la diferencia que hay entre didáctica y pedagogía y cómo el MTSK asume estos constructos. Para Lucio (1989) la educación es el proceso amplio e integral de crecimiento del hombre en sociedad y la pedagogía orienta a los educadores al preguntarse cómo educar. Por ende, un educador debe tener claro y reflexionar sobre qué tipo de hombre quiere formar, por qué es importante saber educar y hacia dónde dirigir esfuerzos en este proceso. Mientras que la didáctica, como ciencia, orienta al docente en cómo enseñar colocando como tema central los métodos, las estrategias y su eficiencia dentro del proceso de enseñanza asumiéndolo como momento específico del proceso educativo.

Este mismo autor plantea que la didáctica tiende a particularizarse y por ello se especializa en torno a áreas de conocimiento específicas surgiendo la didáctica de las ciencias sociales, la didáctica de las ciencias del lenguaje, la didáctica de las matemáticas, etc. Asimismo, la pedagogía se apoya en la psicología y la sociología mientras que, la didáctica se apoya en la psicología del aprendizaje, para saber cómo se enseña hay que saber cómo se aprende. De esta manera, sintetiza afirmando que la didáctica se expresa en un currículo, en cambio la pedagogía lo hace en un programa o proyecto educativo.

En este sentido, en el modelo MTSK se asume el conocimiento didáctico del contenido desde un punto de vista específico relacionado con las matemáticas mismas. Es más que la intersección entre el conocimiento matemático y el pedagógico general, es un tipo específico de conocimiento de la pedagogía que proviene principalmente de las matemáticas (Carrillo-Yañez et al., 2018). En consecuencia, se dejan de lado las heurísticas generales o estrategias de manejo de grupos en el aula y solo se incluyen aquellas que intrínsecamente están relacionadas con el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Excluir conocimiento pedagógico general da sentido al carácter especializado del conocimiento profesor de matemáticas (Montes y Carrillo, 2017).

Para evitar confusiones con respecto al término PCK en el modelo se hace la siguiente aclaración: se ha mantenido en su traducción al inglés como reconocimiento a los antecedentes teóricos de donde surgió, la diferencia entre un conocimiento disciplinar y un conocimiento didáctico de la disciplina. Sin embargo, en la traducción al español se ha decidido hablar de Conocimiento *Didáctico* del Contenido aludiendo a ese conocimiento profesional de las matemáticas para intervenir con fundamentos didácticos en su enseñanza (Escudero-Ávila y Carrillo, 2020).

2.3 Subdominios del modelo MTSK

Teniendo claro los dominios que componen el modelo se procede a explicar cada uno de sus subdominios y ejemplificar sus categorías. Para la presente investigación se tendrán en cuenta los supuestos teóricos con respecto al KoT, KSM, KMT, KFLM y KMLS. El KPM no se tuvo en cuenta para el análisis de los datos, sus categorías aún están siendo objeto de investigación, aunque hay algunas propuestas, entre ellas, la desarrollada por Delgado y Zakaryan (2020).

El KoT hace referencia al conocimiento que tiene el profesor de matemáticas sobre el tema que se enseña, es decir, qué y de qué manera el profesor sabe el tema objeto de enseñanza (Carrillo et al., 2018). Estos temas son los elementos del contenido de los programas de estudios de matemáticas. Para Muñoz-Catalán (2015) este subdominio considera más que el conocimiento de la matemática como disciplina incluyendo la matemática escolar, así como lo relativo a sus fundamentos matemáticos, los procedimientos, estándares y alternativos, o las distintas formas de representación de los temas. En este sentido, el conocimiento sobre un tema va más allá del proceso de enseñanza-aprendizaje, se asume como un conocimiento profundo sobre este sin limitarse a un momento temporal ya que el profesor puede y debe conocer el contenido más allá del aprendizaje de sus estudiantes.

Asimismo, se deben tener en cuenta aquellos aspectos de los conceptos que permiten relacionarlos con contextos reales o con el propio contenido matemático en forma de ejemplos, permitiendo al profesor comprender diversos significados que existen sobre el mismo tema (Zakaryan y Ribeiro, 2016). Teniendo en cuenta lo anterior se han establecido las siguientes categorías para este subdominio: i) *Procedimientos*, por ejemplo, conocer cómo se rota una figura o cuándo una figura es simétrica con respecto a otra o cómo se utiliza la perpendicularidad en la simetría; ii) *Definiciones, propiedades y fundamentos*, conocer que la simetría axial está definida teniendo en cuenta ejes, perpendicularidad, segmentos y distancia mientras que la simetría central se sustenta en giro, centro de giro, ángulo de rotación, amplitudes (Godino y Ruiz, 2002); iii) *Registros de Representación*, en particular, conocer que para simetrías se utiliza el registro gráfico, verbal, natural, algebraico (Alsina, 2005); iv) *Fenomenología y aplicaciones*, por ejemplo, el conocimiento de la aplicación y emergencia de formas u objetos simétricos en el entorno, en el diseño artesanías en papel maché (Paternina et al., 2020).

Por otra parte, en el KMT encontramos el conocimiento que tiene el profesor de las vías, recursos y formas de enseñar matemáticas (Muñoz-Catalán et al., 2015). En este sentido, se refiere al conocimiento sobre la enseñanza intrínsecamente ligado con el contenido matemático. Para Carrillo et al. (2018) en este subdominio se tiene en cuenta las teorías institucionalizadas en Educación Matemática o personales con respecto a la enseñanza de las matemáticas. En cuanto a los recursos materiales o virtuales, el conocimiento del profesor va más allá del funcionamiento de

estos. La importancia radica en cómo mejora el proceso de enseñanza de un contenido matemático en el aula y las limitaciones que puede presentar dicho recurso (Zakaryan y Ribeiro, 2016). En el KMT se consideran tres categorías que se relacionan con las; i) *Teorías de enseñanza de las matemáticas*, por ejemplo, el conocimiento del profesor de la Teoría de Situaciones Didácticas para considerar las distintas fases de esta en la enseñanza de simetrías; ii) *Recursos materiales y virtuales*, por ejemplo, el conocimiento de los materiales de artesanías elaboradas con palmas de iraca para la enseñanza y aprendizaje de las simetrías (Morales et al., 2018) y iii) *Estrategias, técnicas y tareas asociadas a cada uno de los contenidos matemáticos*, particularmente, desarrollar actividades y secuencias didácticas para optimizar el proceso de enseñanza de las simetrías (Morales et al., 2018).

Posteriormente, se tiene el KFLM abarcando el conocimiento asociado con características inherentes al aprendizaje de las matemáticas, colocando la atención en el contenido matemático, como objeto de aprendizaje, más que en el estudiante (Carrillo et al., 2018). De esta manera, se tiene en cuenta cómo el estudiante interactúa con el objeto de estudio, las dificultades, errores, obstáculos y fortalezas que pueden surgir al relacionarse con las características del tema o contenido matemático generando algún tipo de emoción o interés en el estudiante. Es posible encontrar aquí el conocimiento de diferentes teorías, personales o institucionales, de aprendizaje de las matemáticas (Muñoz-Catalán et al., 2015). También es probable analizar el conocimiento del profesor de las habituales ideas intuitivas desarrolladas por los estudiantes al tratar con ciertos conceptos, así como el conocimiento de aspectos propios relacionados a las actitudes hacia la matemática. Son categorías de este subdominio: i) *Teorías del Aprendizaje*, por ejemplo, el profesor podría conocer los distintos modos de pensamiento (Sierpinska, 1994) que explican los procesos mentales de estudiantes en el aprendizaje de simetrías; ii) *Fortalezas y debilidades en el aprendizaje de las matemáticas*, por ejemplo, la visualización e identificación del eje de simetría o en el sentido del giro en la rotación son algunas de las dificultades y obstáculos identificados en el aprendizaje de las simetrías (Iaderosa y Malara, 2000); iii) *Interacciones con el contenido matemático*, por ejemplo, observar los puntos que son iguales iv) *Aspectos emocionales del aprendizaje de las matemáticas*, con respecto a las simetrías, existen expectativas de tipo afectivo donde se busca generar confianza, interés y motivación (Hernández et al., 2018).

Finalmente, en el KMLS su contenido abarca, por supuesto, los distintos grados de profundidad en que un profesor pudiera conocer el currículo oficial, respecto de las matemáticas (Muñoz-Catalán et al., 2015). En este aspecto hay que tener presente los estándares diseñados por cada sistema educativo e implementados en las instituciones. Estándar de aprendizaje es cualquier instrumento diseñado para medir el nivel de habilidad de los estudiantes en la comprensión, construcción y aplicación de las matemáticas (Carrillo et al., 2018). Por lo tanto, es de suma importancia el conocimiento del profesor sobre la secuenciación de los temas para alcanzar los estándares básicos de aprendizajes, teniendo en cuenta los conocimientos previos de los estudiantes para el desarrollo de la temática actual que será la base de los temas por venir. Según el mismo autor, este subdominio consta de estas categorías: i) *Expectativas de aprendizaje de un contenido matemático en un nivel específico*, incluye el conocimiento del profesor sobre lo que se espera que el estudiante aprenda en un determinado nivel escolar, por ejemplo, el conocimiento del profesor de la reforma educativa en el 2012 donde la SEP de México estableció los aprendizajes esperados con respecto a este tema en el último grado de primaria; ii) *Nivel esperado de desarrollo conceptual o procedimental*, los aprendizajes clave expedidos por la SEP (2017) señalan el grado de profundidad con que deben enseñar los docentes el tema de simetrías y iii) *Secuencia de temas*, asumiendo la perpendicularidad, figuras geométricas, etc. como temas previos y la semejanza y congruencia como temas posteriores con respecto a la simetría (SEP, 2017).

A continuación, en la Tabla 1, se presentan en forma resumida todos los subdominios con sus respectivas categorías

Tabla 1

Dominios, subdominios y categorías del modelo MTSK

Dominios	Subdominios	Categorías
	KoT	Procedimientos
		Definiciones y Propiedades
		Registros de Representación
		Fenomenología y Aplicación

MK	KSM	Conexiones de Simplificación	Creencias sobre las matemáticas y su enseñanza y aprendizaje.
		Conexiones de Complejidad	
		Conexiones Auxiliares	
		Conexiones Transversales	
KPM	Definir		
	Demostrar		
	Resolver problemas		
	Papel del lenguaje matemático		
PCK	KMT	Teorías de la Enseñanza	
		Recursos materiales y Tecnológicos	
		Estrategias, Técnicas, tareas y ejemplos	
KFLM	Teorías de Aprendizaje		
	Fortalezas y Debilidades		
	Interacción de los estudiantes con el contenido matemático		
	Aspectos Emocionales		
KMLS	Expectativas del Aprendizaje		
	Nivel esperado de desarrollo conceptual o procedimental		
	Secuencia de temas		

2.2 Relaciones en el conocimiento especializado del profesor de matemáticas

El modelo MTSK permite caracterizar el conocimiento del profesor de matemáticas teniendo en cuenta las categorías de los distintos subdominios. Para Zakaryan y Ribeiro (2016) existen conocimientos de distinta índole, interrelacionados y suficientes para generar una práctica docente integrada y generadora de diferentes y ricas oportunidades de aprendizaje para los estudiantes. En este sentido, se pueden analizar e identificar las distintas relaciones que existen entre los diferentes subdominios del modelo.

Para Fuentes (2020a), puede estar movilizado conocimiento de diferentes subdominios, es decir, no existe una relación unívoca entre una acción y un subdominio, mostrando así la simultaneidad y complejidad del modelo. Esto último se debe a la diversidad de conocimientos puestos en juego por el profesor en la intencionalidad de enseñar un contenido matemático. Para Delgado-Rebolledo y Zakaryan (2020) un subdominio es condición o base para que emerjan otros. Indagar en las relaciones entre los subdominios del MTSK contribuye a visualizar tal complejidad (Zakaryan et al., 2018). Para tal indagación, Flores et al. (2013) señalan algunos escenarios posibles donde se pueden obtener evidencias del MTSK tales como la práctica en el aula de clases, la planificación de una clase con respecto a un contenido matemático y en la formación continua. Sin embargo, estos escenarios tienen sus propias especificaciones teniendo en cuenta el contexto de cada país y su sistema educativo.

CAPÍTULO 3

METODOLOGÍA

El desarrollo del presente trabajo de investigación está enmarcado en el paradigma interpretativo, donde “los investigadores deben intentar comprender la realidad a través del estudio de los significados que la gente asigna a esta realidad” (Roca, 2020). En este sentido, se debe tener en cuenta el contexto donde están inmersos los sujetos y sus acciones sociales las cuales les permiten construir múltiples realidades cada una con sus particularidades. La realidad se concibe como compleja, dinámica, holística, divergente, partiendo desde lo particular, donde emergen los datos, con el fin de buscar el significado que los actores sociales dan a su propia práctica en su contexto cultural y temporal persiguiendo profundizar en la comprensión de los fenómenos, adoptando la perspectiva de aquellos que los generan (Finol y Vera, 2020; Roca, 2020). Por lo tanto, se pretenderá analizar en profundidad y comprender el conocimiento del profesor de matemáticas que es propio de cada educador matemático (Climent, 2005) compuesto por una red de saberes que coloca en acción durante su práctica docente (criterio ontológico) teniendo en cuenta sus creencias, concepciones, contexto educativo, contenido matemático y periodo escolar (criterio epistémico) implementando técnicas e instrumentos asociados a este tipo de estudios que no buscan realizar mediciones o inferencias estadísticas sino interpretaciones y descripciones cualitativas a través de observaciones y entrevistas (criterio metodológico).

Acorde con el paradigma interpretativo, la presente investigación se desarrolló desde un enfoque cualitativo. Este marco se centra en explorar y describir los fenómenos desde la perspectiva de los participantes teniendo en cuenta las percepciones y significados producidos por sus experiencias, como también comprenderlos e interpretarlos en su ambiente natural y en relación con el contexto (Hernández y Mendoza, 2018). En este sentido, se procuró analizar, comprender e interpretar el conocimiento movilizado por diferentes profesores de matemáticas en torno a la enseñanza de las simetrías.

3.1 Diseño de la Investigación

De acuerdo con lo anterior, se implementó como diseño metodológico el estudio de caso. Este método permite la investigación de un fenómeno contemporáneo prácticamente nuevo, inmerso en su contexto donde los límites entre estos dos no son evidentes (Yin, 1994). Asimismo, Muñoz-Catalán, (2021) y Stake (2007) mencionan el *estudio de caso intrínseco* donde el interés particular es el caso en sí mismo, el *estudio de caso instrumental* el cual busca comprender a profundidad la complejidad que tiene un aspecto particular por medio del caso y el *estudio de casos múltiple o colectivo* cuando se estudian varios casos, cada uno identificado como un sistema inmerso en algún entorno específico, con una buena coordinación para comprender regularidades. Para la presente investigación, se optó por un estudio de caso instrumental de carácter múltiple con la finalidad de analizar y comprender el conocimiento disciplinar y didáctico de dos profesores de matemáticas en diferentes contextos educativos y países.

3.2 Informantes

Para esta investigación se seleccionó a los informantes con la estrategia de muestreo por conveniencia (Cohen et al., 2007; Hernández y Mendoza, 2018) considerando la disponibilidad de los profesores, el acceso a ellos, el diseño de la planeación de clase como también cuenten con posgrado en Educación Matemática. Se contó con dos profesores de matemáticas de secundaria (informantes), uno de nacionalidad colombiana y otro mexicano. El docente mexicano (P1) cuenta con más de 20 años de experiencia en una institución de educación pública en su país. Diseñó la planeación para desarrollarla en tres sesiones de clase de cincuenta minutos cada una, en sexto grado de primaria como contenido relevante entre este nivel y secundaria. Además, planteó como aprendizaje esperado *construye y analiza figuras geométricas, en particular triángulos y cuadriláteros, a partir de comparar lados, ángulos, paralelismo, perpendicularidad y simetría* y algunas competencias como *desarrollo de la conciencia espacial con lugares geométricos, línea recta y desarrollo del análisis y la organización operativa*.

Con respecto al docente colombiano se tuvo algunos inconvenientes por la disponibilidad y un cese de actividades del magisterio debido a protestas en contra de políticas no favorables para profesores oficiales por parte del gobierno en turno. Por tal motivo, se contó con

la disposición y acceso a una profesora (P2) con 3 años de experiencia en una institución educativa privada en Colombia. Su diseño de planeación se conformó por cuatro sesiones de clase de cincuenta minutos cada una, para desarrollarla en séptimo grado de secundaria. Propuso como estándar de aprendizaje *predigo y comparo los resultados de aplicar transformaciones rígidas (traslaciones, rotaciones, reflexiones) sobre figuras bidimensionales en situaciones matemáticas y en el arte*. Asimismo, planteó competencias como *realizar rotaciones, traslaciones y reflexiones de figuras geométricas planas, a partir de las propiedades de las figuras que permanecen invariantes y apreciar la simetría en la naturaleza, en el arte y en las construcciones humanas*. Cabe resaltar que ambos docentes han tenido la experiencia con la enseñanza de las simetrías.

3.3 Proceso y recogida de datos de la Investigación

En la presente investigación se le solicitó a cada profesor de matemáticas informante diseñar una planeación de clase con respecto al contenido matemático simetrías en geometría. Se le proporcionó un formato con algunas especificaciones como grado, estándar o aprendizaje esperado, competencias y momentos de la clase: inicio, desarrollo y cierre. Sin embargo, podían reestructurarlo según sus criterios o lineamientos institucionales. En este diseño los profesores tuvieron la libertad de decidir en cuantas sesiones desarrollarían esta temática, el grado, las competencias a trabajar con sus estudiantes y el tipo de actividades que desearía implementar en el aula. A cada docente se le dio una semana aproximadamente para realizar su diseño.

Después de recibir la planeación se revisó y analizó teniendo en cuenta los subdominios y categorías del modelo MTSK. Posteriormente, se realizó una entrevista semiestructurada con cada profesor en distintos momentos de tiempo, para profundizar más sobre las distintas evidencias, indicios y oportunidades definidas por Flores et al. (2013) y Escudero et al. (2016) como:

Evidencias son elementos que permiten confirmar si un docente tiene o no cierto conocimiento.

Indicios son las sospechas de la existencia o no de un determinado conocimiento.

Oportunidades son situaciones o momentos generadas por la dinámica de la clase o el profesor permitiendo explorar y estudiar su conocimiento.

Se organizaron todos los datos obtenidos y se procedió a realizar su análisis.

3.4 Análisis de datos

Para analizar los datos se construyeron descriptores de conocimiento por cada categoría de los subdominios validados por el grupo investigador (ver Anexo A). Los registros de videograbaciones de las entrevistas fueron transcritos y se triangularon junto con los datos recopilados con la planeación de clase. Organizada esta información se encontraron varios indicios que se transformaron en evidencias, así como oportunidades de estudio de las relaciones del conocimiento de ambos profesores de matemáticas.

Primero, se seleccionaron episodios donde se caracterizó el conocimiento movilizado de cada profesor. Se diseñaron tablas donde se describió el dominio, subdominio, categoría y descriptor correspondiente a la evidencia de conocimiento. Segundo, seleccionó como evidencia de relaciones las unidades de análisis donde se identifica un subdominio y este es condición o soporte para que emerjan otros, tal como lo plantea Delgado-Rebolledo y Zakaryan (2020). Tercero, se realizaron diagramas por cada episodio o unidad de análisis donde se ejemplifique la direccionalidad de la relación.

CAPÍTULO 4

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

A partir de los datos recolectados con la planeación de clase se tuvieron en cuenta las evidencias, indicios y oportunidades para profundizar más en el conocimiento de ambos profesores. En la entrevista semiestructurada se logró obtener más información para la caracterización de las posibles relaciones entre los subdominios y categorías del modelo MTSK teniendo en cuenta los descriptores de conocimientos construidos. A continuación, se presentan los resultados obtenidos.

4.1 Relaciones en el conocimiento especializado del profesor mexicano

Desde las oportunidades que brindó la planeación de clase para profundizar en los indicios de conocimiento de P1, se pudo observar en el inicio de cada de sesión para la enseñanza de las simetrías (Figura 2a), la implementación de un video colgado en el canal *Aprende en Casa SEP* (2020) de la plataforma YouTube, Figura 2b, como actividades previas a la clase.

Figura 2

a) Inicio de una sesión de clase b) Video “Simetría en las figuras”

MOMENTOS DE LA CLASE	ACTIVIDADES
INICIO:	a) Trabajo previo a la clase, observa el video: https://www.youtube.com/watch?v=xobC28uE1a4 b) Por lluvia de ideas, recuperar conocimientos previos. c) Problemas y preguntas generadoras que se plantean en diferentes momentos: d) Imagen 1: Ayuda al colibrí e) ¿Hay alguna figura cuyos ejes de simetría sean infinitos? ¿cuáles? f)

a)



b)

Fuente: a) Planeación diseñada por P1, b) Aprende en casa SEP (2020)

Al respecto, en la entrevista se interrogó al profesor sobre el origen de los videos:

I: ¿Por qué al inicio de cada sesión hay un video como actividad y quién los elaboró?

P1: En mi planeación generalmente los incorporo, en este caso, casi todos los dejé en extra-clase. La Secretaría de Educación Pública (SEP) diseñó la modalidad de telesecundaria y desde sus orígenes se tiene que incorporar la televisión a la enseñanza. Ellos diseñaron una serie de programas en donde se proyectaba el aprendizaje, así como tú lo pudiste percibir en los ejemplos que mandé, son elaborados por la SEP.

I: ¿Cuál es la intención de proponer los videos como actividades extra-clase?

P1: Si puedes observar ahí, dejo actividades previas a la clase, les dije vean tal video, esto les va a ayudar. El propósito es que el alumno llegue con cierta información, que por lo menos de oída ya sepa de qué se va a hablar, que existe la palabra simetría, que existe la palabra paralelismo ¿qué es eso? ah entonces en la clase voy a ver qué cosa es... ya desde el inicio de la planeación está el hecho de plantear temas o problemas interesantes al alumno, de tal forma que él lo asuma como un reto, como algo que hay que resolver. Le coloqué el reto al alumno del vuelo del colibrí, entonces el colibrí está en un plano cartesiano en un cuadrante, y se le pide al niño que lo pase ya sea por rotación o por traslación a los otros cuadrantes (P1, Comunicación personal, 5 de abril 2021).

En el extracto de entrevista se logra evidenciar el conocimiento del profesor sobre el modelo institucional de enseñanza de las matemáticas adoptándolo como una teoría. Con la implementación de la plataforma YouTube para el estudio de la simetría crea oportunidades de aprendizaje para el estudiante. Asimismo, moviliza su conocimiento sobre los intereses y expectativas de sus alumnos generando interés con las actividades propuestas e implementa la actividad el vuelo del colibrí como una estrategia para propiciar lo que deben aprender. De esta manera, se caracteriza el conocimiento de P1 como se muestra en la Tabla 2

Tabla 2*Caracterización del conocimiento de P1*

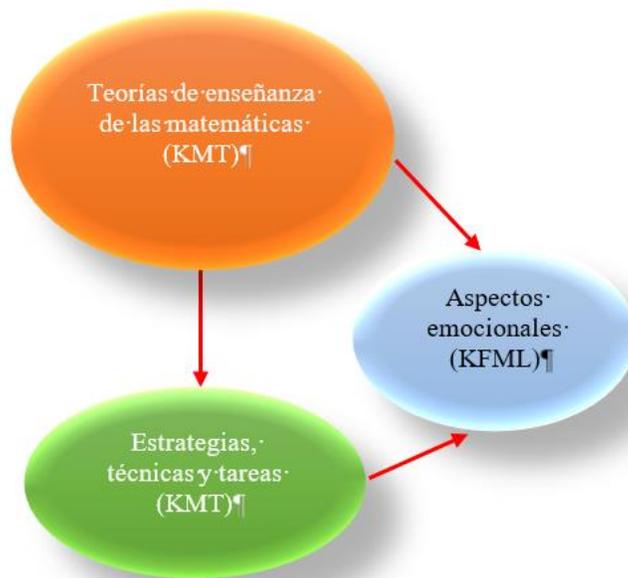
Subdominio		KMT		KFLM
Categoría	(i) Teorías de la enseñanza de las matemáticas	(iii) Estrategias, técnicas y tareas		(iv) Aspectos emocionales
Descriptor	Conoce el modelo educativo de la enseñanza de las matemáticas de su institución y cómo se puede aplicar en el diseño de oportunidades de aprendizaje de las simetrías	Conoce tipos de tareas, en la enseñanza de las simetrías, para propiciar el aprendizaje de los estudiantes		Conoce aspectos de los emocionales en el aprendizaje de las simetrías

Teniendo en cuenta lo anterior, se pudo caracterizar la evidencia de la relación en el conocimiento de P1 donde su experticia sobre el modelo educativo de su institución para la enseñanza de las matemáticas, específicamente para las simetrías permite aplicarlo en el diseño de sus actividades. Esta evidencia de conocimiento de la categoría *teorías(institucionales) de enseñanza de las matemáticas* (KMT), genera o condiciona en el mismo episodio, que el profesor manifieste que este tipo de propuestas crean expectativa en los estudiantes sobre el tema que desarrollarán en la clase, procurando despertar su interés por las simetrías al mencionar que espera que el estudiante se motive diciendo "...ah entonces en la clase voy a ver qué cosa es". Estas ideas evidencian la relación dirigida con el conocimiento sobre los *aspectos emocionales del aprendizaje de las matemáticas* (KFLM). Seguidamente conecta las anteriores evidencias con pretender retar a

los estudiantes con la actividad “Ayuda al Colibrí”, de acuerdo con lo observado en el video, para propiciar el aprendizaje de las simetrías, evidenciando la relación dirigida con el conocimiento sobre *estrategias, técnicas y tareas asociadas al contenido matemático* (KMT). En la Figura 3, se presenta la relación caracterizada entre categorías del KMT y KFLM.

Figura3

Relación dirigida entre categorías del KMT y KFLM



Otra oportunidad de indagación que nos brindó la planeación de clase (Figura 4) fue la actividad propuesta por P1 para trazar los ejes de simetría de varias figuras. Por ello, se le preguntó en la entrevista:

Figura 4

Actividad propuesta trazar en las figuras los ejes de simetría

DESARROLLO:	<p>PRIMERA SESIÓN</p> <ol style="list-style-type: none">1. Trabajo individual: Observa las siguientes imágenes y traza su eje de simetría. (3)2. Recorta las figuras que aparecen en el libro de texto y las doblas por su eje de simetría. (7)3. Contesta ¿Es lo mismo la mitad de una figura que la simetría de una figura? ¿por qué? (oral). (3)4. Por equipos de tres...salgan del salón y consigan la imagen de un objeto de la naturaleza que consideren tiene simetría, dibújenla con su eje, por último, con sus palabras definan lo que es el eje de simetría, anótenlo. (10)5. Grupal: recorten un triángulo equilátero, un cuadrado, un rectángulo y un polígono regular. Trázale, dóblalo e intuye ¿Cuántos ejes de simetría tienen? (escribe el resultado). (10) Contesta: En el caso del rectángulo ¿sus diagonales pueden ser ejes de simetría? ¿por qué? (oral) (2)
--------------------	---

Fuente: planeación diseñada por P1

I: ¿Cuál es el propósito de esta actividad?

P1: Debemos buscar diferentes formas de obtener que los estudiantes aprendan qué es el eje de simetría, no solo que lo identifiquen como un elemento visual, por eso se les pregunta ¿es lo mismo la mitad de un objeto que la simetría de un objeto?... (P1, Comunicación personal, 5 de abril 2021)

De esta manera P1 movilizó su conocimiento sobre preguntas orientadoras como una estrategia de enseñanza. Seguidamente, mencionó posibles nombres dados por los estudiantes para denominar al eje de simetría:

P1: ...porque a veces el alumno cuando le decimos ¿qué es el eje de simetría? podría decir es la mitad del objeto o es la línea que divide a la mitad al objeto, porque así lo he escuchado con ellos. Luego empezamos a dividir objetos por la mitad, pero no por su eje... (P1, comunicación personal, 5 de abril 2021)

El fragmento anterior evidencia el conocimiento del profesor sobre las distintas formas en que los estudiantes interactúan con el concepto *eje de simetría*, dándole nombres como “mitad” o “línea que divide a la mitad”. Continuando con su relato, manifestó las características o propiedades que debe tener dicho eje:

P1: ... ¿cuál sería la característica? Es que los puntos de un lado, las líneas de un lado, el área de un lado coincide con la del otro lado. Solamente en esas circunstancias ya (sic) se da un eje, ya podemos establecer un eje, incluso les digo allí, encontramos objetos que tienen uno, dos, tres ejes (P1, Comunicación personal, 5 de abril 2021).

En este apartado se caracterizó el conocimiento del profesor, Tabla 3, sobre preguntas como estrategias para enseñar simetrías. Asimismo, movilizó conocimientos sobre el lenguaje común utilizado por sus estudiantes y las propiedades o características que debe tener un eje de simetría.

Tabla 3

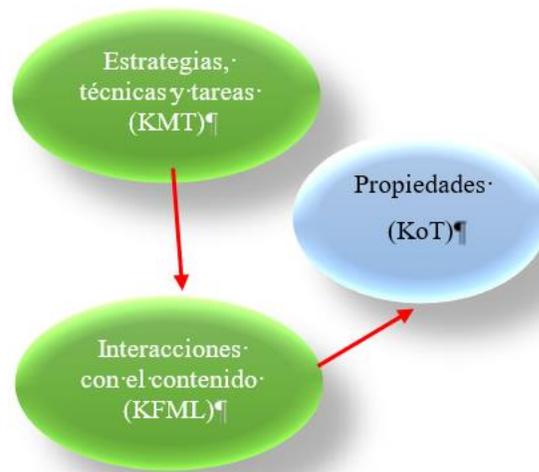
Caracterización de las categorías (iii) del KMT, (iii) del KFLM y (ii) del KoT

Subdominio	KMT	KFLM	KoT
Categoría	(iii) Estrategias, técnicas y tareas	(iii) Interacciones con el contenido matemático	(ii) Definiciones, propiedades y conocimientos
Descriptor	Conoce estrategias de enseñanza como preguntas orientadoras y de cuestionamiento para representar las simetrías	Conoce el lenguaje y vocabulario común que utilizan los estudiantes para designar las simetrías	Conoce las definiciones, significados y propiedades adecuadas que permiten caracterizar las simetrías

Luego de ahondar en la oportunidad de conocimiento, se pudo evidenciar la relación dirigida entre *estrategias, técnicas y tareas* asociadas a cada uno de los contenidos matemáticos (KMT), *interacciones con el contenido matemático* (KFLM) y *definiciones, propiedades y fundamentos* (KoT) como se observa en la Figura 5

Figura 5

Relación dirigida entre categorías del KMT, KFLM y KoT



En otro apartado del diseño de la planeación de clase (Figura 6), P1 estableció el grado en el cual desarrollaría el contenido matemático. En la entrevista se profundizó sobre este aspecto:

Figura 6

Descripción del grado para enseñar simetrías

PLAN DE CLASE		
PROFESOR (A):	CAMPO DE FORMACIÓN ACADÉMICA: Pensamiento matemático	
ASIGNATURA Y GRADO: Matemáticas - Sexto	FECHA: 31 / 03 / 2021	TIEMPO ESTIMADO 3 sesiones de 50 minutos cada uno
EJE TEMÁTICO: Forma, espacio y medida.		
TEMA:	Figuras y cuerpos geométricos: Paralelismo. Perpendicularidad y Simetría	

Fuente: planeación diseñada por P1

I: ¿Para qué grado diseñó la planeación de este tema?

P1: Este tema ya no se aborda en secundaria, o sea, ya ahorita con la reforma actual, ya no está contenido en secundaria, se dejó exclusivamente para cuarto, quinto y sexto de

primaria. Todavía en los planes anteriores sí estaba considerado. Para secundaria directamente entra congruencia y semejanza de figuras, entonces la parte de simetría se dejó en grados anteriores... (P1, Comunicación personal, 5 de abril 2021).

De esta manera, el profesor movilizó su conocimiento sobre las reformas curriculares en la enseñanza de las matemáticas y el contenido matemático que se debe desarrollar en un nivel en particular en el sistema educativo mexicano respecto al tema de las simetrías, mencionando cómo se ha trabajado en años anteriores y actualmente. De esta manera, el profesor evidencia conocimiento de la categoría *expectativas de aprendizaje de un contenido matemático* (KMLS). Lo anterior le permitió al profesor manifestar la importancia de este tema como antecedente para otros posteriores:

P1: ...Tú viste el tema de simetría, esto tiene que ver con temas como encontrar el punto medio, encontrar, por ejemplo, la bisectriz, la mediatriz, etc., etc., entonces, como que se rompen, como que se ven como conocimientos aislados y no lo son. Pero yo lo catalogo como un buen tema para ver en esos grados, sobre todo en sexto, como preliminar para ver los temas de congruencia y semejanza (P1, Comunicación personal, 5 de abril 2021).

En este extracto de entrevista el profesor moviliza su conocimiento sobre las reformas educativas en el sistema educativo mexicano con respecto a las matemáticas y la enseñanza de las simetrías. También manifiesta conocer la secuencia de los temas como simetría, congruencia, semejanza, bisectriz, mediatriz etc. y la conexión que hay entre ellos. En la Tabla 4 se observa tal caracterización.

Tabla 4

Caracterización de las categorías (i) y (iii) del KMLS y (iii) del KSM

Subdominio	KMLS	KSM	
Categoría	(i) Expectativas de aprendizaje de un contenido matemático	(iii) Secuenciación de temas	(iii) Conexiones auxiliares

Descriptor	Conoce los aprendizajes esperados desarrollar por los estudiantes para las simetrías y si es un contenido matemático para secundaria según lo establecido en los lineamientos curriculares o criterios públicos de calidad y las reformas educativas.	Conoce la secuencia de temas a enseñar con respecto a los temas previos y consecuentes en cuanto a los conocimientos y habilidades requeridos para una determinada tarea.	Conoce los elementos matemáticos de temas anteriores como conexiones auxiliares para el estudio de las simetrías
-------------------	---	---	--

Con esta información se logró evidenciar la relación dirigida con el conocimiento de la categoría *expectativas de aprendizaje de un contenido matemático* (KMLS) como base para movilizar, por un lado, el conocimiento de P1 sobre la *secuencia de temas* (KMLS), es decir, partir de los conocimientos previos como punto medio para enseñar simetrías y después congruencia y semejanza; y por otro, el conocimiento de *conexiones auxiliares* (KSM) al relacionar la bisectriz, mediatriz y el punto medio como elementos auxiliares en el tema a enseñar. Esta manera se caracterizó la relación entre categorías del KMLS y KSM como se observa en la Figura 7.

Figura 7

Relación dirigida entre categorías del KMLS y KSM



Los anteriores datos permitieron caracterizar las relaciones en el conocimiento especializado de P1. A continuación se presentan los datos recolectados para caracterizar las relaciones en conocimiento de P2.

4.2 Relaciones en el conocimiento especializado de la profesora colombiana

A partir de la oportunidad de estudio brindada por la planeación, se entrevistó a P2 para profundizar en su conocimiento movilizado sobre Historia de las Matemáticas (Figura 8) como teoría de enseñanza de las simetrías.

Figura 8

Extracto de la planeación en el momento de inicio de la clase

<p>INICIO:</p> <p>I. En primer lugar se quiere mostrar al estudiante que el estudio de la simetría no fue algo que apareció de un momento a otro, sino que ha sido algo que siempre ha existido y se remonta desde la antigua Grecia. Esto se muestra con ayuda de este esquema.</p>	<p>Antigua Grecia</p>  	<ul style="list-style-type: none"> Los libros de los elementos de Euclides (325 a.C. – 265 a.C.), constan de 13 libros. Destacamos el Libro I: Los Fundamentos de la Geometría. Teoría de los triángulos, paralelas y el área. Se definen los criterios de congruencia e igualdad de triángulos a partir de la Geometría Estática, al revés, de cómo se explican en estos momentos a partir de una Geometría Dinámica.
	<p>Mundo Árabe</p>  	<ul style="list-style-type: none"> La geometría es muy importante en el Islam. La forma perfecta es el círculo, que representa a Dios y se utiliza como patrón para realizar otros motivos. Los patrones geométricos más destacados que son utilizados en el arte y decoración islámica, son: <ul style="list-style-type: none"> El uso de polígonos estrellados La superposición de teselaciones en planos paralelos.
	<p>Alhambra</p> 	<ul style="list-style-type: none"> Ciudad, fortaleza y palacio de los reyes de la dinastía Nazarí, sus salas y jardines son la máxima expresión del arte musulmán en Europa. En la decoración de la Alhambra podemos encontrar los 17 grupos de simetría del plano.
	<p>Edad Media</p> 	<p>Filippo Brunelleschi (1377 – 1416): Fue el primer artista que estudió y utilizó intensivamente las matemáticas. Su pasión por ellas le llevo al descubrimiento de la perspectiva cónica.</p>
	 	<p>Leonardo de Vinci (1452 – 1519): En su Studio, se realiza un estudio anatómico buscando la proporcionalidad del cuerpo humano, el canon clásico o ideal de belleza, usando el ángulo de 90° y la simetría.</p> <p>Alberto Durero (1471 – 1528): Hizo hincapié en todas sus obras en la geometría y en la medida. Escribió un libro sobre geometría: "Instrucción en la medida con regla y compás" (1525)</p>
	<p>Edad Moderna</p>  	<p>Gerard Desargues (1591 – 1661): Fue el precursor de la idea de transformación geométrica y el de figura invariante con sus propiedades. Escribe el Primer borrador sobre los resultados de intersecar un cono con un plano que sientan las bases de la geometría proyectiva y da lugar al teorema que lleva su nombre: TEOREMA DE DESARGUES.</p>
		<ul style="list-style-type: none"> La geometría analítica fue introducida en el siglo XVII por Pierre Fermat (1601-1665) y por Descartes, para el estudio de curvas y superficies.

Fuente: Diseño de planeación de clase de P2

I: En el momento del inicio de la clase usted incluyó una cronología de una parte histórica de la simetría y me llamó la atención ¿Cuál es la intención de la historia en el inicio de la clase?

P2: La razón por la que yo puse esto de la historia es porque yo trabajo con la línea de la Historia de las matemáticas. Para mí es importante que a los estudiantes se les mencione esta parte de la historia cuando uno va a iniciar una clase o un tema. En este caso, para desarrollar el tema de las simetrías, porque es importante que ellos identifiquen que esto no es algo que surgió de la nada, no es un concepto que se desarrolló de la nada, sino que fue algo que diferentes matemáticos empezaron a analizar, a observar y que hay un recorrido (P2, Comunicación personal, 23 de noviembre 2021)

Con esta intervención se pudo evidenciar el conocimiento de la profesora sobre la Historia de la Matemática como línea de investigación en la Educación Matemática donde ha desarrollado algunos estudios y ha implementado en su diseño de planeación como una teoría personal en la enseñanza de las simetrías. Seguidamente, este conocimiento le permitió movilizar ideas sobre las aplicaciones de la simetría desde la antigüedad:

P2: ...También hay construcciones que realizaron los antiguos y tuvieron en cuenta la simetría. Todo eso ha ayudado a que podemos ver en la actualidad, en nuestro entorno esta geometría, esta simetría tan simple como en una casa. Ver una casa por fuera ahí vamos a encontrarlo, de hecho, en una baldosa. También se puede ver en la mesa que estén trabajando los estudiantes. (P2, Comunicación personal, 23 de noviembre 2021).

Lo anterior permitió evidenciar el conocimiento de la profesora sobre las teorías (personales) de enseñanza de las matemáticas y las aplicaciones de las simetrías en contextos próximo al estudiante como se observa en la Tabla 5.

Tabla 5

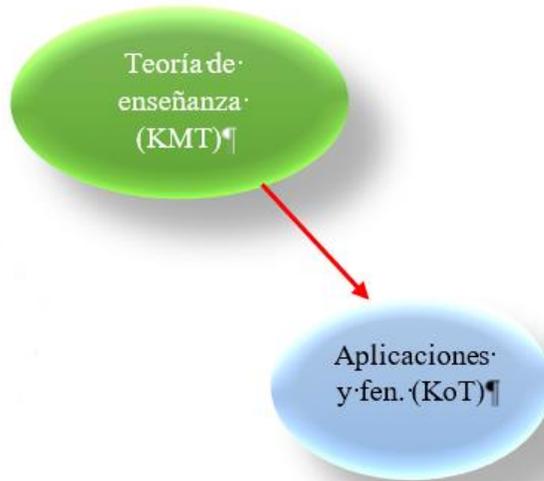
Caracterización de la categoría (i) del KMT y (iv) del KoT

Subdominio	KMT	KoT
Categoría	(i) Teorías de la enseñanza de las matemáticas	(iv) Fenomenología y aplicaciones
Descriptor	Conoce teorías formales o personales de enseñanza en EM o de las simetrías que se pueden aplicar en el diseño de oportunidades de aprendizaje.	Conoce modelos atribuibles a las simetrías como fenómenos que pueden servir para generar conocimiento matemático, en particular para la creación de este concepto.

Se pudo profundizar, evidenciar y caracterizar la relación dirigida en el conocimiento de la profesora sobre *teorías de enseñanza de las matemáticas* (KMT) generando la movilización del conocimiento sobre *fenomenología y aplicaciones* (KoT) como se observa en la Tabla 5.

Figura 9

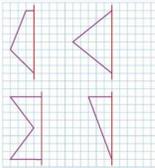
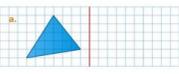
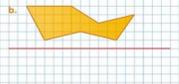
Relación dirigida entre categorías del KMT y KoT



Otra oportunidad de análisis fue generada por la actividad propuesta en el momento de desarrollo de la planeación, Figura 4. Al respecto se le preguntó:

Figura 10

Extracto de la planeación en el momento de desarrollo de la clase

	 <p>2) Comenta con tus compañeros lo que observas en estas figuras después de terminar de dibujarlas. 3) ¿Qué nombre le pondrías a esta característica que tienen las figuras del inciso 1? 4) Dibuja la figura correspondiente con respecto al eje rojo.</p>  <p>a.</p>  <p>b.</p> <p>5) ¿Qué nombre le pondrías a esta característica que tienen las figuras del inciso 4? 6) Intenta realizar el movimiento cada una de las siguientes figuras de acuerdo con las indicaciones dadas:</p>
--	--

Fuente: diseño de planeación de P2

I: En el momento de desarrollo están las actividades para completar las figuras con su otra mitad o construir las figuras completas del lado contrario al eje. Seguido, están los ítems 2 y 3 que dicen comenta con tus compañeros y qué nombres le pondrías a esas características ¿Qué características deberían tener en cuenta los estudiantes para completar las figuras?

P2: Lo ideal sería que tuviera en cuenta el dibujo del primer inciso, que tuviera en cuenta que en la actividad anterior observé cuando tenía trazada esta línea (vertical) ocurría que el lado opuesto estaba similar, era el mismo, pero al otro lado. Estoy hablando, colocándome en el lugar del estudiante, ocurría como que eso, entonces empezaba a contar los cuadritos. Por eso hablaba de utilizar la regla, desplazar, dónde debo ubicar los puntos para que me quede lo de este lado igual a lo del otro lado para formar la figura, para que haya esa correspondencia con esa línea (vertical) que está trazada ahí.

Luego que el estudiante dibujó la figura se le pregunta ¿este dibujo que acabas de hacer, de completar, qué nombre le pondrías? Se le dice, así como él ha interactuado con la actividad anterior. Se me ocurre que podría pensar es como un espejo. Estoy dando un ejemplo de una posible respuesta, un espejo de este lado se ve esto. Es que los niños tienen mucha imaginación, otros podrían decir reflejar (P2, Comunicación personal, 23 de noviembre 2021).

En este extracto de entrevista la profesora movilizó su conocimiento sobre el lenguaje utilizado por los estudiantes para referirse a las simetrías. También manifestó la implementación de recursos como la regla para mejorar la enseñanza de esta temática. Además, se evidenció su conocimiento sobre preguntas orientadoras como estrategias de para generar conocimiento en los estudiantes. En la Tabla 6 se observa la caracterización de estos conocimientos de P2.

Tabla 6

Caracterización de la categoría (iii) KFLM y (ii) y (iii) KMT

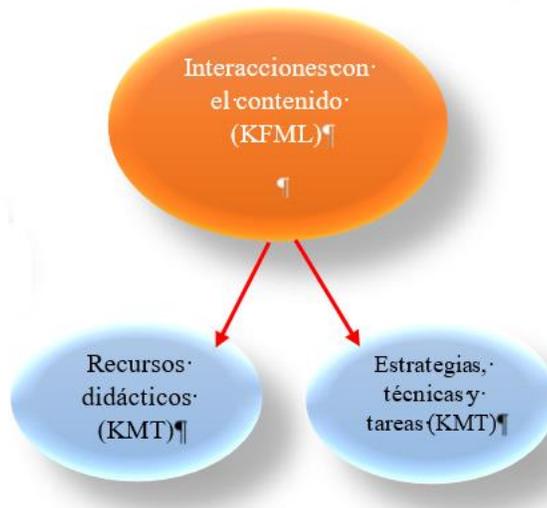
Subdominio	KFLM		KMT
	(iii)		
Categoría	Interacciones del estudiante con el contenido matemático	(ii) Recursos Didácticos (Físicos)	(iii) Estrategias, Técnicas, Tareas y Ejemplos
Descriptor	Conoce el lenguaje y vocabulario común que utilizan los estudiantes para designar las simetrías. Conoce los procedimientos no convencionales que los estudiantes utilizan para hacer simetrías.	Conoce la incidencia de los recursos físicos en la mejora de la enseñanza de las simetrías y las limitaciones que podría tener	Conoce estrategias de enseñanza a través de preguntas orientadoras y de cuestionamiento para representar las simetrías

Se puede evidenciar una relación dirigida en el conocimiento que tiene P2. La profesora menciona los posibles términos que utilizan los estudiantes al referirse a la simetría y los procedimientos no convencionales que pueden realizar como *Interacciones con el contenido matemático* (KFLM). Enseguida moviliza su conocimiento sobre los *recursos didácticos físicos* (KMT) que implementa para mejorar la enseñanza. Lo anterior genera la estrategia de enseñanza con preguntas orientadoras que permiten guiar el proceso de construcción del concepto, *estrategias*,

técnicas y tareas asociadas a cada uno de los contenidos matemáticos (KMT), como se observa en la Figura 11.

Figura 11

Relación dirigida entre categorías del KFLM y KMT



Los anteriores resultados son evidencias de las relaciones caracterizadas en el conocimiento de P2. A continuación se procede a realizar el análisis o discusión de las relaciones tanto de P1 como de P2

4.3 Discusión de resultados

Los resultados descritos anteriormente permitieron mostrar evidencias de relaciones dirigidas en el conocimiento de P1 y P2 siendo caracterizadas de acuerdo con el discurso o la información que brindaron cada uno de los profesores en sus respectivas entrevistas, analizadas por episodios o extractos, permitiendo afirmar cuándo una categoría o subdominio de conocimiento movilizó o fue condición para otro.

Como se pudo observar en los resultados, P1 presentó un número mayor de relaciones caracterizadas en su conocimiento especializado al diseñar la planeación de clase en comparación con P2. Probablemente este hecho es por los más de 20 años que tiene P1 en el aula de clases como

profesor de matemáticas, pues P2 solo tiene 3 años de experiencia docente. Aunque ambos profesores tienen estudios de posgrado, P1 ha desarrollado, quizás, más conocimiento especializado basado en su experiencia, por lo que pudo anticiparse a preguntas que pudieran hacerle sus estudiantes, tener presente términos que usualmente utilicen para referirse a las simetrías o conocer aquellas actividades que despierten sus emociones. Para Scheiner et al. (2019), estas dimensiones o conocimientos están en constante diálogo, lo que permite la aparición de nuevas estructuras de conocimiento. Por tal razón, el conocimiento del docente de matemáticas tiene la capacidad de transformarse en el momento inmediato del complejo proceso enseñanza-aprendizaje, aspectos que sustentan su carácter especializado.

Sin embargo, al analizar los datos aportados por P2, bajo la lente del MTSK, movilizó más conocimientos correspondientes al PCK que se pueden caracterizar y no están conectados o relacionados con algún otro subdominio – estos datos no se especifican en esta investigación porque el objetivo fue la caracterización de relaciones –. Una posible respuesta a este caso en particular puede ser por el nivel de investigación que tiene la profesora, pues posee conocimientos en la didáctica de la matemática, pero no ha podido conectarlos en la práctica por su corta experiencia. Cuando los docentes participan en grupos de investigación pueden desarrollar puentes entre la teoría y la práctica (Godino, 2010).

En cuanto a las relaciones caracterizadas se observó cómo el conocimiento de P1 sobre el modelo de enseñanza de las matemáticas de Telesecundaria, adoptado como teoría institucional, influye en el diseño de sus actividades y la planeación de la clase con respecto a las simetrías. Como consecuencia propone la actividad “ayuda al colibrí” para, según su experiencia, generar expectativas e interés en el aprendizaje de las simetrías en los estudiantes, haciéndose evidente la relación entre categorías del KMT y KFLM. De esta manera, se evidenció tanto en la planeación de clase cómo en las descripciones orales de P1 en la entrevista, cómo el conocimiento de *teorías de enseñanza de las matemáticas* (KMT) permitió emerger el conocimiento sobre *estrategias, técnicas y tareas asociadas al contenido matemático* (KMT) y *aspectos emocionales del aprendizaje de las matemáticas* (KFLM). Asimismo, el conocimiento *estrategias, técnicas y tareas asociadas al contenido matemático* (KMT) favoreció la movilización del conocimiento de los *aspectos emocionales del aprendizaje de las matemáticas* (KFLM).

Por su parte, como se observa en la Tabla 4, P2 movilizó su conocimiento sobre la Historia de las matemáticas como teoría para iniciar la enseñanza de las simetrías. Para Zakaryan et al. (2018) la formación de posgrado en Educación Matemática permite conocer los distintos marcos y enfoques teóricos, que en su mayoría se pueden considerar como teorías de enseñanza de las matemáticas. Con base en este elemento, la profesora en la entrevista exteriorizó varios fenómenos donde tiene lugar este contenido matemático. Por consiguiente, la *Teoría de enseñanza de las matemáticas* (KMT) dio lugar a la *Fenomenología y aplicaciones* (KoT).

Otra evidencia de relación se muestra cuando P1 quiere propiciar el aprendizaje en los estudiantes sobre el significado del eje de simetría y plantea *preguntas orientadoras o de cuestionamiento como estrategia de enseñanza* (KMT) para promover su razonamiento y luego disipar dudas al respecto. En este sentido, tiene en cuenta los posibles términos que han utilizado sus estudiantes para denominar el eje de simetría tal como “mitad” o “línea que divide a la mitad”. Este conocimiento sobre la forma en que *interactúan los alumnos con el contenido matemático* (KFLM) lo ha desarrollado gracias a sus años de experiencia como docente de matemáticas y le permite conocer el lenguaje común manejado por los estudiantes, así como prever posibles dificultades u obstáculos en el aprendizaje de las simetrías. Después de tener claras todas las posibilidades anteriormente sustentadas plantea las características con las que debe cumplir el eje de simetría de una figura que pertenece a la categoría *definiciones, propiedades y conocimiento del tema* (KoT). De este modo, se logra caracterizar la relación entre tales categorías de los subdominios KMT-KFLM-KoT evidenciándose una interconexión dirigida entre ellos. Carreño y Climent (2019) mencionan la relación KFLM-KoT donde el conocimiento sobre la forma de interactuar los estudiantes con el objeto matemático es sustento para el conocimiento de las propiedades del tema. Además, Fuentes (2020b) manifiesta la existencia de una predominante relación entre categorías de estos tres subdominios.

Asimismo, P2 movilizó su conocimiento sobre los posibles términos que utilizan los estudiantes al referirse a la simetría “similar”, “lo mismo”, “reflejo” y los procedimientos no convencionales que pueden realizar como el conteo de cuadritos de la hoja de trabajo dando lugar al conocimiento sobre el uso de la regla para mejorar el proceso de enseñanza. Además, se logró evidenciar cómo utiliza preguntas orientadoras para lograr tal denominación por parte de los

estudiantes. En consecuencia, se identifica la relación dirigida entre *Interacciones con el contenido matemático* (KFLM), *Recursos Didácticos Físicos* (KMT) y *Estrategias, técnicas y tareas asociadas a cada uno de los contenidos matemáticos* (KMT). Padilla-Escorcía y Acevedo-Rincón (2021) subrayan el conocimiento de las ventajas que se tienen al utilizar preguntas orientadoras como estrategia de enseñanza para analizar contenidos matemáticos. El conocimiento del profesor sobre el diseño de diferentes estrategias, actividades, situaciones o tareas, facilitan el aprendizaje del contenido matemático en el aula clases.

Las anteriores relaciones caracterizadas fueron direccionales o dirigidas, es decir, una categoría fue condición o sustento para que emergiera o se movilizara otra del mismo o diferente subdominio. Por lo tanto, se está de acuerdo con Delgado-Rebolledo y Zakaryan (2020) con la salvedad de que sí puede una categoría ser condición para que se movilice una o varias categorías, caso contrario a lo que afirma Fuentes (2020a). Este aporte al MTSK y su desarrollo en cuanto a la caracterización de relaciones se hace teniendo en cuenta el objeto matemático abordado, en este caso las simetrías. Para Aguilar et al. (2013) las evidencias de conocimiento son complejas y situadas, donde su contexto es en un momento educativo particular, sea en el aula de clases o en una entrevista, movilizándose las características de varios subdominios que emergen y se relacionan.

Otro aporte importante en cuanto a las relaciones dirigidas caracterizadas es la presencia de todas las categorías del KMT como sustento o condición para la movilización de otro subdominio o categoría. Asimismo, son condicionadas las categorías del KoT y KSM por subdominios del PCK en las relaciones donde emergen. Este hecho está en concordancia con lo planteado por Zakaryan y Ribeiro (2016) quienes manifiestan cómo el KMT es sustento y puede estar en relación con las demás categorías y/o subdominios del modelo, evidenciándose la estrecha relación entre el MK y PCK.

Todos estos aspectos mencionados convierten a la planeación de clase en un potencial escenario para el análisis y caracterización del conocimiento del profesor de matemáticas. Asimismo, es destacable las posibles relaciones que puedan emerger entre las diferentes categorías

o subdominios de conocimiento del MTSK al trabajar en este escenario. Por último, se subraya la mayor presencia del PCK en el diseño de la planeación sin desplazar al MK.

CONCLUSIONES

Con esta investigación se logró focalizar la planeación de clases como un escenario con potenciales oportunidades para indagar sobre el conocimiento matemático y didáctico del profesor bajo la lente del modelo MTSK. Por consiguiente, se analizaron las distintas actividades propuestas, preguntas construidas, teorías de enseñanza y conceptos relacionados con el estudio de las simetrías en cada una de las sesiones de clases diseñadas por los docentes participantes. Asimismo, estos conocimientos movilizados permitieron establecer y caracterizar las posibles relaciones que tienen lugar en el conocimiento especializado de cada profesor.

Con respecto a las relaciones caracterizadas se pudo constatar su carácter dirigido o direccional, es decir, la movilización de una categoría o subdominio de conocimiento da lugar o es sustento o condición para que se movilice otro u otros conocimientos caracterizados en una o varias categorías o subdominios del modelo MTSK. No se deja lado o se desecha la posibilidad de la existencia de relaciones o interconexiones de otro tipo, por ejemplo, bidireccionales. Esto dependerá del contexto del momento educativo y del escenario de investigación que se escoja para profundizar en el conocimiento del profesor de matemáticas.

Otro aporte de este estudio es la prevalencia que tiene el PCK en ambos profesores como conocimiento base o condicionador para que emerjan otras categorías de distintos subdominios ya sean de conocimiento didáctico o disciplinar. Conviene subrayar cómo el diseño de una planeación de clase permite evidenciar la estrecha interconexión que tiene lugar entre el MK y PCK. Así pues, se muestra el contante diálogo que existe entre los diferentes elementos que componen estos dominios. Por tal razón, se desarrollan constantemente nuevas estructuras de conocimiento en el profesor de matemáticas potencializando su carácter especializado.

Este estudio enriquece la literatura sobre las relaciones que se pueden establecer y caracterizar entre los distintos subdominios del MTSK. Cabe resaltar que se debe tener en cuenta la particularidad de cada caso y su conocimiento sobre el contenido matemático seleccionado. Además, la variedad de instrumentos de recolección de datos también juega un papel importante en esta clase de estudio, pues, permiten una buena triangulación de la información, para tener

resultados confiables que ayuden a la caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas.

Por último, se hacen necesarias más investigaciones que coadyuven al desarrollo del modelo MTSK, particularmente, al estudio de las relaciones entre el conocimiento matemático y didáctico del docente. Asimismo, estos resultados permiten su implementación en programas de formación de profesores, teniendo en cuenta los descriptores de conocimiento para el desarrollo de planes de estudio, reflexiones entre docentes en ejercicios y aporta a la Didáctica de las Matemáticas

REFERENCIAS

- Acosta, E., Monroy, L. y Rueda, K. (2010). Situaciones a-didácticas para la enseñanza de la simetría axial utilizando Cabri como medio. *Revista Integración*, 28(2), 173-189.
- Advíncula, E., Beteta, M., León, J., Torres, I. y Montes, M. (2021). El conocimiento matemático del profesor acerca de la parábola: diseño de un instrumento para investigación. *Uniciencia*, 35(1), 190-209.
- Aguilar, A., Carreño, E., Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L., Escudero, D., Flores, E., Flores, P., Montes, M. y Rojas, N. (2013). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas: MTSK [conferencia]. *VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*, Montevideo, Uruguay.
- Aguilar-González, A., Rodríguez-Muñiz, L.J. y Muñiz-Rodríguez, L. (2022). Las creencias y su papel en la determinación de relaciones entre elementos del conocimiento especializado del profesor de matemáticas. En J. Carrillo, M. Montes y N. Climent (Eds.). *Investigación sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): 10 años de camino* (pp. 109-117). Dykinson S.L.
- Alsina, C. (2005). *Los secretos geométricos en diseño y arquitectura* [Material de aula]. Curso Interuniversitario “Sociedad, Ciencia, Tecnología y Matemáticas”. Universidad Politécnica de Catalunya, España. <https://imarrero.webs.ull.es/sctm05/modulo3lp/3/calsina.pdf>
- Ball, D., Thames, H. y Phelps, G. (2008). Conocimiento del contenido para la enseñanza: ¿Qué lo hace especial? *Revista de formación docente*, 59(5), 389-407.
- Barrantes, H. (2019). Simetría y transformaciones geométricas en el plano, algunas ideas para su enseñanza. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 14(18), 235-246.

- Berciano, A., Jiménez-Gestal, C. y Salgado, M. (2021). Detección de dificultades en el proceso de aprendizaje del concepto de simetría en educación infantil. *Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática*, 2, 24-46
- Bohorquez, H., Franchi, L., Ismenia, A., Salcedo, S. y Morán, R. (2009). La concepción de la simetría en estudiantes como un obstáculo epistemológico para el aprendizaje de la geometría. *Educere*, 13(45), 477-489.
- Carreño, E. y Climent, N. (2019). Conocimiento especializado de futuros profesores de matemáticas de secundaria. Un estudio en torno a definiciones de cuadriláteros. *PNA* 14(1), 23-53. <https://doi.org/10.30827/pna.v14i1.9265>
- Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M (2018). The mathematics teacher's specialized knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 20(3), 236-253. <https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981>
- Carrillo, J., Contreras, L.C. y Flores, P. (2013). Un modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Libro homenaje a Encarnación Castro* (pp. 193-200). Comares.
- Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2007). *Research methods in education*. Routledge.
- Delgado, R. y Zakaryan, D. (2020). *Una propuesta de categorización del conocimiento de la práctica matemática de profesores universitarios*. [Tesis de Doctorado, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso]. Bibliotecas PUCV. <https://catalogo.pucv.cl/cgi-bin/koha/opac-detail.pl?biblionumber=431941>
- Delgado-Rebolledo, R. y Zakaryan, D. (2020). Relationships between the knowledge of practices in mathematics and the pedagogical content knowledge of a mathematics lecturer. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 18(3), 567-587. doi:10.1007/s10763-019-09977-0

- Dello, U. & Ferrara, E. (2022). Mathematical walks in search of symmetries: from visualization to conceptualization. *International journal of mathematical education in science and technology*, 53(7), 1876-1893. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1850897>
- Durán, M. M. (2012). El estudio de caso en la investigación cualitativa. *Revista nacional de administración*, 3(1), 121-134
- Durand, J., Cruz, L., Romero, R., García, Ó. y Cruz, S. (2010). Y la simetría, ¿qué es? *Revista de Divulgación Científica y Tecnológica de la Universidad de Veracruzana*, 23(3), 51-57
- Escudero-Ávila, D. y Carrillo, J. (2020). El Conocimiento Didáctico del Contenido: Bases teóricas y metodológicas para su caracterización como parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas. *Revista Educación Matemática*, 32(2), 8-38
- Escudero-Ávila, D., Gomes Moriel, J., Muñoz-Catalán, M.C., Flores-Medrano, E., Flores, P., Rojas, N. y Aguilar, A. (2016). Aportaciones metodológicas de investigaciones con MTSK. En J. Carrillo, L.C. Contreras y M. Montes (Eds.), *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 60-68). SGSE: Huelva.
- Finol, M. y Vera, J. (2020). Paradigmas, enfoques y métodos de investigación: análisis teórico. *Mundo Recursivo*, 3(1), 1-24.
- Flores, E., Escudero, D. I. y Aguilar, A. (2013). Oportunidades que brindan algunos escenarios para mostrar evidencias del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 275-282). Bilbao: SEIEM.
- Fuentes, C. (2020a). Uso del Modelo MTSK para la caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas en secundaria: El caso de la Proporcionalidad. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 16(59), 33-63.

- Fuentes, C. (2020b). Conocimiento especializado de un profesor de matemáticas asociado al concepto de proporcionalidad: un estudio de caso a través del modelo MTSK. *Épsilon - Revista de Educación Matemática*, 104, 25-43. <https://thales.cica.es/epsilon/?q=node/4831>
- García-Cuellar, D. (2021). Una orquestación Instrumental de la Simetría Axial. *Revista Venezolana de Investigación en Educación Matemática*, 1(2), 1-22. <https://doi.org/10.54541/reviem.v1i2.11>
- Godino, J. D. (2010). *Perspectiva de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica*. Universidad de Granada. <http://www.ugr.es/local/jgodino>
- Godino, J. y Ruiz, F. (2002). *Geometría y su didáctica para maestros*. Los Autores. <http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/>
- Guerrero, A. (2006). *Geometría: Desarrollo Axiomático*. Primera.
- Gutiérrez, A. y Jaime, A. (1986). *Traslaciones, Giro y Simetría en el Plano*. Artesa Gráficas Soler, S.A.
- Hernández, M., Meneses, N., Sánchez, Y., Montealegre, G. y Parra, S. (2018). *Simetría axial en figuras planas* [Tesis de maestría, Universidad de los Andes] <http://funes.uniandes.edu.co/11767/>
- Hernández, R. y Mendoza, C. (2018). *Metodología de la investigación*. McGraw-Hill Interamericana Editores
- Iadepa, R. y Malara, N. (2000). Acerca de las dificultades encontradas en alumnos de 12-13 años en el aprendizaje de la isometría plana. *Educación Matemática*, 12(2), 63-80.
- Julio, L. (2014). *Las Transformaciones en el Plano y la Noción de Semejanza*. [Tesis de Maestría, Universidad Nacional de Colombia]. Repositorio institucional. <https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/74974>
- Lucio A. (1989). Educación y Pedagogía, Enseñanza y Didáctica: diferencias y relaciones. *Revista de la Universidad de La Salle*, (17), 35-46.

- Ministerio de Educación Nacional. (2017). *Derechos Básicos de Aprendizajes en Matemáticas*.
Ministerio de Educación Nacional
- Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas*. Ministerio de Educación Nacional.
- Montes, M. y Carrillo, J. (2017). Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas acerca del Infinito. *Bolema*, 31(57), 114-134. <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a06>
- Morales, M., Aroca-Araujo, A. y Álvarez, L. (2018). Etnomatemáticas y Educación matemática: análisis a las artesanías de Usiacurí y educación geométrica escolar. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 11(2), 120-141.
- Muñoz-Catalán, M. C. (2021). Reflexiones para una fundamentación del estudio de caso como diseño metodológico en Educación Matemática. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 65 – 80). Valencia: SEIEM. <https://seiem.es/docs/actas/24/ActasXXIVSEIEM.pdf>
- Muñoz-Catalán, M., Contreras, L., Carrillo, J., Rojas, N., Montes, M. y Climent., N. (2015). Conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): un modelo analítico para el estudio del conocimiento del profesor de matemáticas. *La Gaceta de la RSME*, 18(3), 1801-1817.
- Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura [UNESCO]. (2019). *Docentes*. <https://es.unesco.org/themes/docentes>
- Padilla-Escorcía, I. y Acevedo-Rincón, J. (2021). Conocimiento especializado del profesor que enseña la reflexión de la función trigonométrica seno: Mediaciones con TIC. *Eco Matemático*, 12(1), 93-106. <https://doi.org/10.22463/17948231.3072>
- Paternina, O., Muñoz, N., Pacheco, E., y Aroca, A. (2020). Simetrías inmersas en el proceso de elaboración de la máscara del torito de Galapa. *Revista de Investigación, Desarrollo e Innovación*, 11(1), 141-157. <https://doi.org/10.19053/20278306.v11.n1.2020.11689>

- Roca-Cuberes, C. (2020). Teoría y elección metodológica en la investigación. En: C. Lopezosa, J. Díaz-Noci y L. Codina (eds.). *Anuario de Métodos de Investigación en Comunicación Social* (pp.01-03). DigiDoc-Universitat Pompeu Fabra
- Rojas, N. (2014). *Caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas: un estudio de caso* [Tesis de doctorado, Universidad de Granada] Digibug. <https://digibug.ugr.es/handle/10481/35199>
- Sámuel, M., Vanegas, Y. y Giménez, J. (2016). Visualización y simetría en la formación de maestros de Educación Infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 5(1), 21-32.
- Sánchez-García, J., Flores-Medrano, E., Hernández, L. y Juárez-Ruiz, E. (2021). ¿Cómo impacta el conocimiento que tiene un profesor acerca de la teoría APOE sobre su conocimiento especializado? *Revista Multidisciplinar*, 3(1), 55-67. <https://doi.org/10.23882/DI2159>
- Scheiner, T., Montes, M. A., Godino, J. D., Carrillo, J., & Pino-Fan, L. R. (2019). What makes mathematics teacher knowledge specialized? Offering alternative views. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 17(1), 153–172. <https://doi.org/10.1007/s10763-017-9859-6>
- Secretaría de Educación Pública. (2017). *Aprendizajes clave para la educación integral*. SEP.
- Secretaría de Educación Pública. (2011). *Programas de estudio 2011. Guía para el Maestro. Educación Básica. Secundaria. Matemáticas*. SEP.
- Sierpinska, A. (1994). *Understanding in Mathematics*. The Falmer Press.
- Shulman, L. (1986). Aquellos que entienden. El crecimiento del conocimiento en la enseñanza. *Investigador Educativo*, 15(2), 4-14.
- Sosa, L., Flores-Medrano, E. y Carrillo, J. (2016). Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas del profesor cuando ejemplifica y ayuda en clase de álgebra lineal. *Revista Educación Matemática*, 28(2), 151-174.

Stake, R. E. (2007). *Investigación con estudio de casos*. Morata.

Yin R. K. (1994). *Case study research Design and Methods*. Sage.

Zakaryan, D., Estrella, S., Espinoza-Vásquez, G., Olfos, R., Flores-Medrano, E. y Carrillo, J. (2018). Relaciones entre el conocimiento de la enseñanza y el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas: caso de una profesora de secundaria. *Enseñanza de las ciencias*, 36(2), 105-123 <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2260>

Zakaryan, D. y Ribeiro, M. (2016). Conocimiento de la enseñanza de los números racionales: una ejemplificación de relaciones. *Zetetiké*, 24(3), 301-321. <http://dx.doi.org/10.20396/zet.v24i3.8648095>.

ANEXOS

Anexo A. Cuestionario de indicadores y preguntas por categorías

https://docs.google.com/document/d/1C8dma1JvSNoUOdGp_pR1CrzL4J2p1udF/edit?usp=share_link&oid=104941127110127308622&rtpof=true&sd=true

Anexo B. Planeación de clase de la profesora colombiana

https://docs.google.com/document/d/1F53Dmhd2u384scj2kU6egyNSJ8jW3tst/edit?usp=share_link&oid=104941127110127308622&rtpof=true&sd=true

Anexo C. Planeación de clase profesor mexicano

https://docs.google.com/document/d/1w96LevIgkSldYKsYQhzo5bi_GJW2L2em/edit?usp=share_link&oid=104941127110127308622&rtpof=true&sd=true

Anexo D. Transcripción entrevista profesora colombiana

https://docs.google.com/document/d/1k8yfaq0fiDFoHJjGB3WCTq7bFNGbQPP3/edit?usp=share_link&oid=104941127110127308622&rtpof=true&sd=true

Anexo E. Transcripción entrevista profesor mexicano

https://docs.google.com/document/d/1DrYDW-a3IxM7X627CzyvquVmlSQt20Ut/edit?usp=share_link&oid=104941127110127308622&rtpof=true&sd=true