BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

APRENDIZAJE DE LA DERIVADA EN ESTUDIANTES DE BACHILLERATO MEDIANTE TECNOLOGÍA ARDUINO, NETLOGO Y GEOGEBRA.

TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE

MAESTRA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

PRESENTA

ING. GUADALUPE ELIZABETH MAXIL CARDOSO

DIRECTOR DE TESIS

DRA. LIDIA AURORA HERNÁNDEZ REBOLLAR

CO-DIRECTOR DE TESIS

DR. COREY BRADY

PUEBLA, PUE. ENERO 2025

Dr. Severino Muñoz Aguirre
Secretario de Investigación y Estudios de Posgrado
P R E S E N T E

Por este medio le informo que la C:

ING. GUADALUPE ELIZABETH MAXIL CARDOSO

Estudiante de la Maestría en Educación Matemática, ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 04 de noviembre de 2024, con la tesis titulada:

"APRENDIZAJE DE LA DERIVADA EN ESTUDIANTES DE BACHILLERATO MEDIANTE TECNOLOGÍA ARDUINO, NETLOGO Y GEOGEBRA"

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

A t e n t a m e n t e
H. Puebla de Z., 31 de enero de 2025

Dra. Estela de Lourdes Juárez Ruiz
Coordinadora de la Maestría en Educación Matemática.

EDLJR / agm

Facultad
de Ciencias
Físico Matemáticas

Av. San Claudio y 18 Sur, edif. FM1
Ciudad Universitaria, Col. San
Manuel, Puebla, Pue. C.P. 72570
01 (222) 229 55 00 Ext. 7550 y 7552

Agradecimiento

Al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías (CONAHCYT), por la generosa beca otorgada, que simboliza su confianza en el desarrollo de esta investigación.

A la Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, por brindarme un espacio en el Posgrado en Educación Matemática (PEM), lugar en el que durante dos años descubrí más de lo que jamás hubiera imaginado.

Dedicatorias

A Dios, por ser la guía en mi vida y por darme la convicción y la perseverancia necesarias para llegar a este momento. Creo firmemente que no hay coincidencias, y que cada paso que he dado ha sido parte de un plan perfecto.

A mis amados Toño, Augus y Santi, por su paciencia, comprensión y amor incondicional a lo largo de este viaje. A pesar de los momentos en que he estado más concentrada en mis estudios, siempre me han brindado su apoyo inquebrantable y su constante aliento. Su presencia ha sido mi mayor fortaleza y su cariño mi motor para seguir adelante, incluso en los días más desafiantes.

A mi mamá, quien siempre ha creído en mí incluso más de lo que yo misma lo he hecho. Su confianza y fe en mis capacidades me han dado otro motivo para superar cada obstáculo.

A mis respetados directora y codirector de tesis: Dra. Lidia Aurora Hernández Rebollar y Dr. Corey Brady, por guiarme con sabiduría y paciencia en este recorrido académico. Su confianza en mi trabajo y su dedicación inagotable han sido fundamentales para la culminación de esta investigación.

A la Dra. Coco Valero, autora de las actividades empleadas en mi intervención didáctica, quien siempre estuvo dispuesta a brindarme su experiencia con generosidad. Su apoyo fue invaluable para el desarrollo de mi trabajo, y lamento profundamente que no esté aquí, al final de esta etapa. Su legado y compromiso con la enseñanza siguen presentes, y le estaré eternamente agradecida.

Al cuerpo docente del posgrado, cuyas palabras y enseñanzas han dejado una huella profunda en mi formación académica y personal. Su conocimiento, rigor y compromiso con la Educación Matemática han sido una fuente de inspiración constante durante este proceso.

A mis amigas entrañables Carmen, Lau y recientemente Angie, por su cercanía y cariño, por sus palabras de aliento y por recordarme que la amistad verdadera es un refugio en los momentos de duda y cansancio. A mis compañeras y compañeros de la maestría, por compartir este camino lleno de aprendizajes, retos y crecimiento personal. Encontré personas maravillosas con quienes coincidí sin buscar. Su compañía ha hecho que este trayecto sea mucho más enriquecedor.
A todas y todos ¡Gracias infinitas!

INDICE

INDICE DE TABLAS.

INDICE DE FIGURAS

Resumen

La revisión de literatura relacionada con el aprendizaje de la derivada señala serias dificultades en los estudiantes cuando la enseñanza se centra en procesos procedimentales y repetición de algoritmos carentes de significado para el estudiante. Vale la pena destacar que la derivada se considera uno de los conceptos más versátiles en el ámbito del cálculo, ya que su uso facilita el análisis de diversas situaciones que involucran fenómenos físicos y otros ámbitos del conocimiento (Amaro, 2020).

Este trabajo de tesis presenta una investigación que manifiesta su interés en analizar la comprensión de la derivada desde la perspectiva del razonamiento variacional y covariacional en estudiantes de un bachillerato tecnológico cuando desarrollan actividades que emplean tecnología, tal como Arduino, NetLogo y GeoGebra.

Es por ello que se implementó un conjunto de actividades didácticas diseñadas para enseñar el concepto de derivada, centradas en su comprensión conceptual. En este enfoque, se busca que los estudiantes se familiaricen con conceptos como la variación y covariación proporcional y no proporcional de cantidades de diferentes magnitudes en situaciones presentadas mediante el uso de la tecnología. Se utilizaron simulaciones en un software de geometría dinámica y experimentos en los que están involucrados el cambio y la variación.

La metodología empleada es de corte cualitativo y se trabajó con el método de investigación- acción.

Posterior a la intervención en el aula, se analizó bajo el marco teórico de la Variación y la Covariación, el cúmulo de datos obtenidos durante el semestre febrero-julio 2024. A partir de las características detectadas en las producciones de los estudiantes, se procedió a clasificarlas en el nivel de razonamiento pertinente según los niveles propuestos por Thompson y Carlson (2017). Nuestros resultados muestran que los niveles en los que se encontraban los alumnos al inicio del semestre eran los más bajos, posteriormente, con el desarrollo de las actividades de aprendizaje, la mayoría de los estudiantes fueron escalando de nivel, hasta lograr, en algunos casos, alcanzar los últimos niveles de razonamiento.

Abstract

The literature review related to the learning of the derivative points out serious difficulties in students when teaching focuses on procedural processes and repetition of algorithms that lack meaning for the student. It is worth highlighting that the derivative is considered one of the most versatile concepts in the field of calculus, since its use facilitates the analysis of various situations that involve physical phenomena and other areas of knowledge (Amaro, 2020).

This thesis presents research that expresses its interest in analyzing the understanding of the derivative from the perspective of variational and covariational reasoning in students of a technological high school when they develop activities that use technology, such as GeoGebra, NetLogo and Arduino.

For this reason, a set of didactic activities designed to teach the concept of derivative was implemented, focused on its conceptual understanding. In this approach, it is sought that students become familiar with concepts such as proportional and non-proportional variation and covariation of quantities of different magnitudes in various situations presented through the use of technology. Simulations in dynamic geometry software and experiments involving change and variation were used.

The methodology used is qualitative and the action-research method was used.

After the intervention in the classroom, the accumulation of data obtained during the February-July 2024 semester was analyzed under the theoretical framework of Variation and Covariation. Based on the characteristics detected in the students' productions, they were classified into the relevant level of reasoning according to the levels proposed by Thompson and Carlson (2017). Our results show that the levels in which the students were at the beginning of the semester were the lowest; later, with the development of the learning activities, most of the students were climbing the level, until they managed, in some cases, to reach the last levels of reasoning.

Introducción

Enseñar no es una tarea fácil, pero enseñar Matemáticas es todo un reto. En particular, en educación media superior, la enseñanza del Cálculo Diferencial requiere la plena conciencia que los conceptos como función, límite y derivada son objetos matemáticos que difícilmente adquieren una interpretación en algún fenómeno o suceso físico para los estudiantes. En este sentido, autores como Artigue et al. (1995), Salinas y Alanís (2009), Vrancken y Engler (2014) mencionan que la enseñanza del cálculo se sigue centrando en prácticas algorítmicas y estructuras formales de la matemática que no aportan un significado al aprendiz.

Cantoral (2013) agrega que, en general, se enfrenta a los alumnos a situaciones problemáticas ficticias y sin relación con otras ciencias ni con su vida misma, lo que produce un desinterés profundo por los temas escolares.

De manera específica, la enseñanza del concepto de derivada tradicionalmente se basa en que el estudiante domine los procesos para obtener derivadas de expresiones algebraicas por medio de fórmulas sin lograr la comprensión de este concepto (Dolores, 1998 citado en Amaro, 2020).

López (2008) describe que:

> Las evidencias mostradas en congresos especializados y la experiencia misma de los profesores de esta asignatura son coincidentes: al terminar sus cursos de CD [cálculo diferencial] cantidades significativas de estudiantes logran un dominio aceptable de los algoritmos algebraicos para calcular límites y derivadas, pero difícilmente comprenden el significado de esos procedimientos. (pp. 1168-1169)

Esta situación no debería ser considerada un problema menor, ya que podría producir efectos indeseables tales como fuertes complicaciones para los jóvenes en el nivel superior, cuando se enfrenten a situaciones apegadas a la realidad en las áreas de ingeniería y ciencias exactas, o bien puede ocasionar que la decepción sea tal que decidan estudiar cualquier carrera que no incluya alguna matemática de orden superior y en el peor escenario, que el alumno termine por abandonar la idea de continuar con estudios universitarios.

Ante este panorama recurrente en los bachilleratos y preparatorias, es recomendable que los docentes consideremos cambios en los procesos de enseñanza-aprendizaje. Buscar y adaptar actividades que contengan situaciones problema en las que el estudiante pueda experimentar y observar el resultado de sus experiencias, que realice conjeturas y que se atreva a predecir comportamientos basados en la modelación de fenómenos físicos.

Considerando estos antecedentes, el trabajo se realizó en un curso de Cálculo Diferencial de nivel medio superior. Se aplicaron actividades diseñadas para favorecer el aprendizaje de la Derivada mediante el uso de ciertas herramientas tecnológicas. Al finalizar el curso, se analizaron las respuestas escritas y orales del grupo de estudiantes con el propósito de clasificar la comprensión de la Derivada desde la perspectiva de la variación y covariación.

El desarrollo de la investigación se presenta en cinco capítulos y las conclusiones. En el primero, se exponen los resultados de una revisión de la literatura sobre el aprendizaje de la derivada, lo que permitió confirmar la existencia del problema identificado en el aula. El segundo capítulo se centra en la descripción del problema, la formulación de la pregunta de investigación y el establecimiento de los objetivos. El tercer capítulo aborda las definiciones en momentos históricos de la derivada y su concepción como razón de cambio, explora aspectos teóricos relacionados con la variación y la covariación e incluye párrafos sobre el uso de la tecnología en propuestas didácticas. En el cuarto capítulo se detalla la metodología empleada, describiendo las etapas del diseño de la investigación, el alcance del método utilizado, su aplicación, el pretest con los niveles que evalúa cada ítem, la información general sobre las tareas aplicadas, así como la fuente de las mismas. El quinto capítulo analiza la implementación de las actividades propuestas, las respuestas de los estudiantes y su evaluación desde la perspectiva teórica del razonamiento variacional y covariacional. Finalmente, se exponen las conclusiones derivadas del estudio.

Capítulo 1

1. Revisión de literatura

El proceso de revisión de la literatura se llevó a cabo en dos fases principales. La primera, de naturaleza heurística, se enfocó en la búsqueda y selección de fuentes documentales. La segunda, de carácter hermenéutico, se centró en la lectura y análisis de dichas fuentes.

Durante la fase heurística, se utilizó exclusivamente Google Académico, aplicando ecuaciones y operadores booleanos avanzados en español, como: "aprendizaje de la derivada" AND "enseñanza de la derivada", "razonamiento variacional y covariacional", "variación y covariación" AND "GeoGebra" AND "tecnología" AND "Arduino" AND "NetLogo". Este procedimiento arrojó un total de 477 documentos. Al realizar la búsqueda en inglés con los términos variation and covariation theory, se obtuvieron 95,700 resultados. Sin embargo, al restringir la búsqueda con los términos variation and covariation theory AND technology AND Arduino AND NetLogo AND GeoGebra, no se obtuvo ningún resultado.

Posteriormente, se revisaron los títulos y resúmenes de los documentos obtenidos inicialmente, seleccionando los más relevantes, que fueron un total de 10. Los criterios de inclusión utilizados fueron artículos de investigación y tesis de grado.

Para la recolección y análisis de la información, se utilizaron instrumentos diseñados en el software Excel. Estos incluyeron: una bitácora de búsqueda, en la que se registraron la fecha, la ecuación utilizada y los resultados más importantes; una matriz bibliográfica, que contenía el nombre de los autores, el año de publicación, el título del documento, el país y el idioma; y una matriz de síntesis, que permitió analizar el contenido de los documentos según un sistema de categorías deductivas de análisis, descrito en la Tabla 1.

Tabla 1. Sistema de categorías deductivas de análisis

Categoría	**Descripción**
Orientación	Trabajos sobre la enseñanza o el aprendizaje de la derivada.
Contexto	Los problemas planteados están situados en diferentes contextos. Se

	clasificaron en contextos matemáticos, contextos no matemáticos y una combinación de ambos. En el primer caso se incluye la resolución de ejercicios o la construcción de conceptos matemáticos. En el segundo, se trata de problemas relacionados con temas como la Física o la ingeniería. El último contexto es una mezcla de ambos.
Tecnología	Tipo de tecnología empleada por los estudiantes, la cual varía según las actividades. Algunas tareas se resuelven con lápiz y papel, mientras que otras se realizan con la ayuda de tecnologías digitales.

Fuente: Elaboración propia

La técnica empleada durante la fase hermenéutica fue el análisis de contenido, el cual se define como "un conjunto de procedimientos destinados a producir un meta-texto analítico que transforma y representa el corpus textual" (Díaz y Navarro, 2007, p. 181).

A continuación, se muestra la tabla con la clasificación de los artículos en categorías (tabla 2)

Tabla 2. Clasificación de los artículos en categorías

Autor(es)	**Orientación**	**Contexto**	**Tecnología**
Marín (2021)	Enseñanza	Matemático	Lápiz/papel
Rodríguez y Fiallo (2019)	Aprendizaje	Matemático	Digital
Martínez et al. (2019)	Enseñanza	Físico/matemático	Digital
Rojas et al. (2017)	Enseñanza	Matemático	Digital
Grueso y González (2016)	Enseñanza	Matemático	Digital
Córdoba et al. (2015)	Enseñanza	Matemático	Digital
Cantoral (2013)	Enseñanza	Matemático	Lápiz/papel
De los Ríos y Márquez (2013)	Enseñanza	Matemático	Digital
Posada y Villa (2006)	Enseñanza	Matemático	Lápiz/papel
Ortega del Rincón y Sierra Vázquez (1998)	Enseñanza	Matemático	Lápiz/papel

Fuente: Elaboración propia

En los documentos de la Tabla 1, se identificaron estudios sobre la enseñanza y el aprendizaje del concepto de función y derivada desde la variación y/o covariación. Las propuestas educativas incluyen tareas para construir estos conceptos a partir de situaciones variacionales, utilizando diferentes niveles de acciones mentales. Estas acciones influyen al intentar coordinar dos variables, creando imágenes de covariación. Según Thompson (1994b), la noción de imagen es "dinámica, se origina en acciones corporales y movimientos de la atención, y es como la fuente y el vehículo de operaciones mentales" (citado en Carlson et al., 2003, p. 124). Es interesante que el 60% de las 10 propuestas analizadas incorporaron tecnologías digitales en su diseño e implementación.

Marín (2021) se centra en la enseñanza de la covariación en contextos matemáticos y cotidianos para fortalecer el pensamiento variacional mediante un cuestionario de 7 preguntas sobre una situación de movimiento y tiempo. Rodríguez y Fiallo (2019) buscan caracterizar habilidades cognitivas relacionadas con la comprensión de la derivada en un punto, diseñando tareas con GeoGebra.

Martínez et al. (2019) discuten la necesidad de utilizar la derivada para describir comportamientos físicos y proponen estrategias didácticas no tradicionales que emplean tecnologías digitales como sensores y smartphones. Rojas et al. (2017) presentan una propuesta didáctica apoyada en Excel y GeoGebra, con actividades para resolver problemas de optimización en Cálculo Diferencial, promoviendo el aprendizaje práctico con tecnología.

Grueso y González (2016) investigan la identificación y caracterización de elementos del concepto de función a través de problemas de covariación, destacando la importancia de ver la función como covariación para entender sus aspectos fundamentales. Córdoba et al. (2015) mejoran la comprensión de la derivada en estudiantes de grado 11 mediante una metodología visual-geométrica con GeoGebra, facilitando la comprensión interactiva del concepto.

Cantoral (2013) revisa la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, destacando la visualización como elemento central para el pensamiento variacional. De los Ríos y Márquez (2013) proponen enseñar la derivada y sus aplicaciones usando GeoGebra, facilitando la construcción colaborativa del conocimiento mediante las tecnologías de la comunicación e información (TIC).

Posada y Villa (2006) analizan estándares curriculares para desarrollar cinco tipos de pensamiento matemático, enfocándose en el pensamiento variacional y su aplicación en el concepto de función lineal. Ortega del Rincón y Sierra Vázquez (1998) presentan aspectos del concepto de derivada, como su desarrollo histórico y propuestas didácticas, apoyando la labor docente.

En todos los trabajos que muestran resultados de intervenciones en el aula, se destaca el aumento del conocimiento sobre el uso didáctico de propuestas diseñadas para el aprendizaje de la derivada y de la función, muchas veces utilizando tecnologías de la información y comunicación. El uso de GeoGebra genera un ambiente dinámico en el aula, capta la atención de los estudiantes y mejora el proceso de enseñanza y aprendizaje, mostrando beneficios en el aprendizaje matemático a pesar de los diferentes tipos de aprendizaje que tienen las alumnas y los alumnos. Se concluye que estas metodologías contribuyen a un aprendizaje basado en la construcción y reflexión.

Capítulo 2

2. Planteamiento del problema de investigación

Tradicionalmente la enseñanza de Cálculo Diferencial está basada en clases expositivas con un alto grado de repetición de algoritmos, limitando su concepción al uso de fórmulas de derivación mediante extensos procesos algebraicos. En consecuencia, el objeto matemático no adquiere significación física para los estudiantes, lo que implica en muchos casos dificultad y desinterés en el aprendizaje de la Derivada. Esto ha llevado a que los alumnos tengan problemas para conectar los conceptos matemáticos abstractos con situaciones reales y aplicaciones prácticas (Artigue et al., 1995; Salinas y Alanís, 2009; Vrancken y Engler, 2014)

Por esta razón, se sugiere la implementación de un conjunto de actividades didácticas diseñadas para enseñar el concepto de derivada, centrándose más en la comprensión conceptual que en la ejecución puramente mecánica y algorítmica. En este enfoque, se busca que los estudiantes perciban y comprendan la variación y covariación proporcional y no proporcional de cantidades de diferentes magnitudes en situaciones dinámicas presentadas mediante el uso de la tecnología. Con el desarrollo de las actividades, progresivamente se forma el concepto de razón de cambio, expresada como la velocidad del objeto en cuestión. Esta acción ayuda a los alumnos a construir el concepto de derivada gráfica.

Los docentes motivados a renovar su práctica e interesar a sus estudiantes necesitan acercarse a las propuestas didácticas escritas y evidenciadas, analizarlas, comprender los aspectos teóricos y llevarlas al aula.

2.1 Justificación

La documentación de las experiencias de docentes de matemáticas, han ayudado a observar que en la mayoría de aulas de bachillerato, el cálculo diferencial se enseña tradicionalmente con un enfoque en la exposición por parte del profesor, para dar paso a la ejercitación del alumno mediante la solución de múltiples problemas en los que predomina el uso de las fórmulas de derivación, además se hace un extenso uso de procesos algebraicos, sin que se logre la comprensión de los conceptos inmersos (Cantoral, 2013; Dolores, 1998).

De modo que, conceptos como función, límite, derivada e integral suelen enseñarse de manera estática en el aula, a pesar de que frecuentemente se emplean para modelar y analizar el comportamiento de fenómenos dinámicos (Carlson et al., 2003), por lo tanto, se ha descuidado el pensamiento variacional y covariacional.

En adición, los artículos dan cuenta sobre la importancia de prestar atención a la forma en que los estudiantes construyen y socializan significados relativos a las nociones que forman parte del currículo de cálculo diferencial, involucrando intrínsecamente aspectos como las actitudes y las creencias relativas a la clase de matemáticas (Ignacio et al., 2006). Esta investigación trata específicamente a la derivada cuando el proceso enseñanza aprendizaje deja de lado el protagonismo del docente, el esquema tradicional en el que el profesor enseña y el alumno aprende, casi como un arte.

En términos del currículo de la Educación Media Superior de México (EMS), el propósito de la asignatura Cálculo Diferencial es que “el estudiante aprenda a identificar, utilizar y comprender los sistemas de representación del cambio continuo y su discretización numérica con fines predictivos” (SEP, 2018, p. 13).

Es por ello que en un grupo de 4º semestre de bachillerato se implementó una secuencia de actividades en las cuales, se analizan las relaciones entre dos magnitudes que cambian y cómo estas relaciones especiales pueden observarse en un software dinámico como GeoGebra. Actividades para experimentar con sensores de movimiento y tarjetas Arduino en las que se observó la gráfica del movimiento del objeto mediante el enlace con el software NetLogo. Se corroboraron o refutaron predicciones de lo que los estudiantes plantearon como probables resultados cuando se introducen escenarios diferentes. En esta propuesta se exploró el uso de tecnología para la construcción gráfica del concepto de derivada a través de experimentar con fenómenos variacionales.

La relevancia de esta investigación implica considerar que la importancia del cálculo diferencial en diversas disciplinas como ciencia, ingeniería y tecnología hace visible la necesidad de transformar la enseñanza de esta asignatura para producir una mejor comprensión en los estudiantes.

2.2 Formulación del Problema

2.2.1 Pregunta de investigación.

¿Cómo es la comprensión de la derivada desde la perspectiva del razonamiento variacional y covariacional en estudiantes del 4o. semestre de un bachillerato tecnológico al resolver un conjunto de actividades diseñadas para su aprendizaje mediante el uso de tecnología Arduino, NetLogo y GeoGebra?

2.2.2 Objetivo General de Investigación.

Analizar la comprensión de la derivada desde la perspectiva del razonamiento variacional y covariacional, en estudiantes del 4o. semestre de un bachillerato tecnológico al resolver un conjunto de actividades diseñadas para su aprendizaje mediante el uso de tecnología Arduino, NetLogo y GeoGebra.

2.2.3 Objetivos específicos

- Analizar las actividades diseñadas por la Dra. María del Socorro Valero Cázarez con base en el marco teórico de la variación y la covariación.
- Analizar cómo las actividades contribuyen al desarrollo del razonamiento variacional y covariacional.
- Analizar la influencia del uso de herramientas tecnológicas en la comprensión de la derivada.

Capítulo 3

3. Marco Teórico

En este capítulo se presenta el concepto de derivada, junto con las definiciones que han surgido a lo largo de su desarrollo histórico. Además, se examina la relación entre la derivada y la variación y covariación de magnitudes.

3.1 Concepciones de la derivada

3.1.1 Definición como una pendiente

En 1630, Fermat desarrolló un método para calcular la pendiente de la recta tangente a un punto específico de la función $f(x)$. Se obtiene mediante el cálculo del límite cuando e tiende a cero

$$\boldsymbol{m_{tan} = \lim_{e \to 0} \frac{f(x+e) - f(x)}{e}}$$

Esta aproximación fue similar a la que posteriormente utilizarían Newton y Leibniz (Lozano, 2011).

3.1.2 Definición como cociente incremental

Leibniz propone como método general para encontrar la recta tangente a una curva de una función, "el cociente incremental o cociente de las diferencias de una función" (Lozano, 2011). Este cociente se calcula según la siguiente expresión:

$$\boldsymbol{\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_i) - f(x)}{x_i - x}}$$

Para Leibniz Δx no se aproxima a cero, más bien es una cantidad infinitamente pequeña, es decir, una diferencial dx. Análogamente, Δy también es una diferencial dy con un valor infinitamente pequeño. El cociente resultante entre estas dos diferenciales infinitamente pequeñas "…es un número ordinario llamado derivada…" (Lozano, 2011). Por lo tanto, la derivada de $f(x)$ es $f'(x) = \frac{dy}{dx}$

3.1.3 Definición con el método de fluxiones de Newton

En 1736, Newton concibe las cantidades matemáticas como el movimiento continuo de un punto que describe una curva. A estas cantidades variables, como x, y ..., las llama "fluentes", y sus velocidades, representadas por $\dot{x}, \dot{y}$ las denomina "fluxiones". La parte infinitesimal en la que una fluente se incrementa por una unidad infinitesimal de tiempo o, es $o\dot{x},$ lo que se conoce como el momento de la fluente. El problema central es, dada una relación entre las fluentes, encontrar la relación entre sus fluxiones, y viceversa, dada una relación entre las fluxiones, determinar la relación correspondiente entre las fluentes (Lozano, 2011).

A diferencia de las definiciones anteriores, esta incorpora elementos dinámicos, ya que su origen proviene del estudio de fenómenos físicos.

En esta evolución, la derivada se entiende como una función que describe la relación dinámica entre dos tipos de cambio: uno que es independiente y otro que depende de este. Esta definición involucra la razón de cambio entre los valores de la función y una variación infinitesimal, particularmente cuando el cambio en x tiende a cero.

Ahora bien, cuando se analizan fenómenos que involucran situaciones de cambio, se activan el razonamiento variacional y el razonamiento covariacional, lo que hace necesario describir y comparar ambos tipos de razonamiento.

3.1.4 Razonamiento variacional

El razonamiento variacional se refiere a una serie de procesos cognitivos en los que una persona crea una imagen mental de una cantidad que varía. Este tipo de razonamiento implica diversas acciones mentales organizadas jerárquicamente en niveles, que ayudan a concebir cómo varía esa cantidad (Martínez-Sierra, 2021). Desarrollar el razonamiento variacional significa adquirir habilidades para representar, interpretar y analizar situaciones de cambio, creando imágenes mentales de dichas situaciones. Además, se requiere construir estructuras de pensamiento para identificar, modelar y transformar situaciones relacionadas con el cambio (Cabezas y Mendoza, 2016). Este razonamiento implica concebir la cuantificación y la variación de una cantidad de manera precisa o abstracta, ya sea de forma discreta o continua (Thompson y Carlson, 2017).

Para Vasco (2002):

> El pensamiento variacional puede describirse aproximadamente como una manera de pensar dinámica, que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas de tal manera que covaríen en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades de la misma o distintas magnitudes en los subprocesos recortados de la realidad. (p. 63)

Esto indica que hay diversos momentos, empezando con la identificación de magnitudes que cambian y otras que permanecen constantes, a su vez se identifican patrones que se repiten en ciertos fenómenos o experimentos. Continúa el momento de producción de modelos mentales en el cual coexisten variables internas, dando pie a la detección de la covariación. Lo siguiente será "ejecutar" estos modelos para ver qué resultados producen. Se procede a la comparación de estos resultados con los del proceso que se trata de modelar para finalizar con el momento de revisar y pulir el modelo, o en su defecto, desecharlo y volver al inicio (Vasco, 2002).

Entonces, razonar variacionalmente implica llevar a cabo acciones mentales en distintos niveles de desarrollo, relacionadas con la concepción de cómo varía una cantidad.

Por lo tanto, en el razonamiento variacional, se trata de comprender los cambios en los valores de una cantidad, como se refleja en las descripciones de cada nivel de su constructo. Estos niveles se muestran en la Tabla 3.

Tabla 3. Principales niveles de razonamiento variacional

Niveles de razonamiento	variacional
Variación continua suave	La persona piensa en la variación de una cantidad o variable (valor de la variable) aumentando o disminuyendo (cambiando) por intervalos, dentro del cual varía de forma suave y continua
Variación continua gruesa (a trozos)	La persona piensa que el valor de una variable cambia por intervalos de un tamaño fijo (pueden ser del mismo tamaño, pero no necesariamente). Por ejemplo, el valor de la variable varía de 0 a 1, de 1 a 2, de 2 a 3 (y así sucesivamente), como parte de un fragmento o como cm de una regla. No solo se trata de pensar en los intervalos con valores enteros.
Variación gruesa	La persona imagina que el valor de una variable aumenta o disminuye, pero la persona piensa poco o casi nada que pueda

	tener valores mientras cambia. Solo piensa en el cambio de un punto a otro, pero no visualiza los valores intermedios o lo que sucede durante el cambio
Variación discreta	La persona visualiza una variable tomando valores específicos. Puede ver el cambio del valor de a a b tomando valores $a_{1,} a_{2,} a_{3,\ldots,} a_{n,}$, pero no imagina que la variable pueda tomar ningún valor entre a_i y a_{i+1}
Sin variación	La persona imagina que una variable tiene un valor fijo. Podría tener otro valor fijo, pero eso sería simplemente imaginar otro escenario
Variable como símbolo	La persona comprende una variable como simplemente un símbolo que no tiene nada que ver con la variación, No percibe los cambios.

Fuente: *Thompson y Carlson (2017)*

3.1.5 Razonamiento covariacional

El razonamiento covariacional se manifiesta en situaciones de cambio que involucran varias cantidades. Una persona razona covariacionalmente cuando puede imaginar cómo cambian simultáneamente los valores de dos cantidades (Thompson, 1993). La manera en que una persona expresa o representa esta coordinación de cambios varía según el nivel de desarrollo de su razonamiento covariacional. Al igual que el razonamiento variacional, el razonamiento covariacional incluye diferentes acciones mentales organizadas jerárquicamente, que ayudan a concebir la variación conjunta de dos cantidades (Martínez-Sierra, 2021).

La capacidad de razonar covariacionalmente es esencial para representar y entender las relaciones funcionales en fenómenos de cambio, donde la coordinación entre los valores de dos cantidades es crucial (Carlson et al., 2003). Este razonamiento es fundamental para comprender conceptos de cálculo como límite, derivada e integral, cuando se estudian a partir de fenómenos de cambio.

Para el concepto de función, coordinar los cambios de una variable en relación con otra facilita la representación e interpretación de las características de las funciones que modelan fenómenos dinámicos (Oehrtman et al., 2008). En el caso del concepto de límite, coordinar los cambios entre las variables x y y (como una función de x) durante el proceso de aproximación ayuda a entender y desarrollar tareas sobre este concepto (Carlson et al., 2001). En el estudio de la derivada, la coordinación entre la razón de cambio de la función respecto a los cambios de la variable x es esencial para conceptualizar la derivada como un proceso dinámico (Villa-Ochoa et al., 2018).

El razonamiento covariacional atiende dos problemas:

1. Sabes qué tan rápido está cambiando una cantidad en cada momento; quieres saber cuánto hay en cada momento.

2. Sabes cuánto de una cantidad hay en cada momento; quieres saber qué tan rápido está cambiando en cada momento. (Thompson et al, 2013; Thompson y Dreyfus, en prensa)

Carlson et al. (2003) dicen que el razonamiento covariacional está formado por las actividades cognitivas involucradas en la coordinación de dos cantidades variables mientras se atiende a las formas en que cambian en relación entre sí.

De modo que razonar covariacionalmente implica realizar acciones mentales, en diferentes niveles de desarrollo, involucradas en la concepción acerca de la variación de dos cantidades que varían. Entonces, la atención se centra en coordinar los cambios en los valores de dos cantidades distintas, como también se observa en las descripciones de cada nivel mostrados en la tabla 4.

Tabla 4. Principales niveles de razonamiento covariacional

Niveles de razonamiento	covariacional
Covariación continua suave	La persona imagina aumentos o disminuciones (en adelante, cambios) en el valor de una cantidad o variable (en adelante, variable) como sucediendo simultáneamente con cambios en el valor de otra variable, y la persona imagina que ambas variables varían de manera suave y continua
Covariación continua gruesa (a trozos)	La persona imagina cambios en el valor de una variable como ocurriendo simultáneamente con cambios en el valor de otra variable, y visualizan que ambas variables varían con una variación continua a bloques
Coordinación de valores	La persona coordina los valores de una variable (x) con los valores de otra variable (y) con la anticipación de crear una colección discreta de pares (x, y).
Coordinación gruesa de valores	La persona forma una imagen general de los valores de las cantidades que varían juntas, como "esta cantidad aumenta mientras esa cantidad disminuye". La persona no imagina que

	los valores individuales de las cantidades van juntos. En cambio, la persona visualiza una conexión suelta y no multiplicativa entre los cambios generales en los valores de dos cantidades
Precoordinación de valores	La persona imagina que los valores de dos variables varían, pero de manera asincrónica: una variable cambia, luego cambia la segunda variable, luego la primera, y así sucesivamente. La persona no anticipa la creación de pares de valores como objetos multiplicativos
Sin coordinación	La persona no tiene una imagen de variables que varían juntas. La persona se centra en la variación de una u otra variable sin coordinar los valores

Fuente: *Thompson y Carlson (2017)*

Estos recursos sirven como base para identificar y explicar los patrones de comportamiento asociados con las operaciones mentales que los estudiantes muestran al realizar actividades que desarrollan la variación, la covariación y el cambio.

En adición, la exploración de estos tipos de razonamiento brinda la oportunidad de abordar un problema evaluando las variables de manera variacional. Esto implica considerar la variación tanto de la variable independiente como de la dependiente, teniendo en cuenta la relación matemática entre ambas. Por otro lado, el análisis de la razón de cambio entre ellas facilita la identificación de la covariación presente en el sistema. Esta covariación puede descomponerse en intervalos para realizar un estudio más detallado del problema (García, 2022).

3.1.6 Los recursos tecnológicos

La sociedad contemporánea considera a la tecnología como un elemento esencial, y la educación debe integrar distintos aspectos tecnológicos en el proceso de enseñanza para lograr efectividad. Numerosas investigaciones han confirmado que la incorporación de la tecnología en el entorno educativo beneficia los resultados de aprendizaje de los estudiantes, así como sus habilidades para resolver problemas y desarrollar el pensamiento crítico (Mokotjo y Mokhele, 2021).

Se sugiere entonces comenzar a modificar el rol del docente, alejándose de la tradicional y cómoda exposición de temas. En su lugar, se propone que los estudiantes asuman un papel más activo en la creación de su propio conocimiento, cambiar el hecho de ser únicamente receptores de información. Diversas investigaciones presentan propuestas didácticas que utilizan herramientas tecnológicas y muestran resultados positivos.

Es relevante considerar la integración de la tecnología en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, ya que sus efectos transformadores abarcan tanto la forma como el contenido de la enseñanza de esta disciplina (Thurston, 1995). En opinión de Araya (2007) la incorporación de la tecnología ha transformado la manera en que los estudiantes adquieren conocimientos en matemáticas. La diversidad de herramientas tecnológicas disponibles ofrece oportunidades para que los alumnos reconozcan, analicen y expresen diferentes conceptos matemáticos.

En la investigación de Carvajal et al. (2019), concluyen que la mayoría de los estudiantes reaccionan de manera favorable ante las preguntas relacionadas con los beneficios de las TIC utilizadas en el aula.

Además, el docente también puede beneficiarse al integrar las TIC en su labor como mediador del aprendizaje (Feliciano y Cuevas, 2021). En palabras de Macías (2007), es común emplear el proyector junto con diversos softwares, algunos específicamente creados con fines educativos y otros no, pero todos útiles para la enseñanza de las matemáticas.

Por lo tanto, mediante el uso de la tecnología, se propone el desarrollo y fortalecimiento del pensamiento variacional con la covariación de magnitudes. Algunas de las actividades incluyen el uso de GeoGebra, el cual es un software matemático dinámico y de acceso libre. Al respecto, Carlson et al. (2003) indican que los sistemas de geometría dinámica permiten experimentar los cambios dinámicos entre los valores de dos cantidades, facilitando así el razonamiento covariacional al analizar e interpretar relaciones funcionales. Por su parte, Zengin (2018) destacó que el dinamismo en GeoGebra crea un entorno de aprendizaje interactivo, dinámico y visual, utilizando herramientas como el arrastre y los deslizadores. Por ello, Villa-Ochoa et al. (2018) coinciden en la importancia de diseñar entornos de aprendizaje que incluyan tecnologías digitales, las cuales permiten desarrollar una variedad de significados y comprender los objetos matemáticos relacionados con el Cálculo en diversos contextos.

En adición, en la propuesta didáctica Cálculo para Todos (Valero, 2020) se emplean otras herramientas digitales como tarjetas Arduino Mega 2560, así como los softwares NetLogo y Excel, con las que es posible observar, registrar, analizar y conjeturar en relación a los resultados obtenidos. Vasco (2002) se refiere a las tecnologías de la información y comunicación con la afirmación: “su potencial es inmenso, especialmente ahora con el advenimiento de poderosos paquetes de software de modelación, para graficación pseudotridimensional, para tutorías interactivas y para simulaciones” (p.69).

Capítulo 4

4. Marco Metodológico

En el contexto de esta investigación educativa, es relevante comprender la importancia de los fundamentos metodológicos que guiaron nuestro estudio. En este sentido, la elección del paradigma desempeña un papel central puesto que representa el sistema de creencias, es decir, engloba un conjunto de suposiciones fundamentales acerca de la esencia de las cosas, el cual influye en nuestra manera de pensar (Sánchez, 2013).

De modo que, se trata de la forma en que abordamos nuestras investigaciones, siguiendo el procedimiento adecuado para buscar y crear conocimiento (Flores, 2004). Esto, eventualmente, se convirtió en el entendimiento del proceso de enseñanza y aprendizaje.

Por consiguiente, la selección de un enfoque de investigación particular se vio influenciada por la naturaleza de la pregunta de investigación, así como por los fenómenos que se investigaron y el respectivo entorno.

Dado que el objetivo de investigación propuso "Analizar la comprensión de la derivada desde la perspectiva del razonamiento variacional y covariacional en estudiantes del 4o. semestre de un bachillerato tecnológico al resolver un conjunto de actividades diseñadas para su aprendizaje mediante el uso de tecnología Arduino, NetLogo y GeoGebra", el paradigma que se ajustó es el interpretativo o constructivista, ya que la intención fue explorar y explicar la realidad educativa mediante un minucioso examen de las opiniones y análisis de las personas involucradas en diversas situaciones investigadas. Nos centramos en la perspectiva de los participantes, ya que una comprensión detallada de casos específicos nos permite desentrañar el simbolismo que da forma a una realidad educativa particular (Sánchez, 2013). En este sentido, y para complementar la idea, Hernández-Sampieri y Mendoza (2020) mencionan que el mundo social es relativo y solo puede ser entendido desde el punto de vista de los actores involucrados.

El propósito fundamental de cualquier investigación que adopte este enfoque consiste en comprender y describir la realidad (en nuestro caso) educativa, empleando un análisis profundo de las perspectivas y las interpretaciones de las personas involucradas en diversas situaciones que son objeto de estudio (Sánchez, 2013).

Mediante el análisis de las producciones de los alumnos, en las que se encuentran sus significados, percepciones, intenciones y acciones, intentamos comprender y describir la construcción del conocimiento después del uso de actividades con tecnología y software dinámico, realizando explicaciones provenientes de un contexto y un tiempo determinado bajo la mirada de la variación y la covariación. Es decir, fue necesario que la interpretación realizada de las respuestas de los estudiantes, expresadas con representaciones gráficas, escritas y verbales, se analizaran bajo la perspectiva de la variación y la covariación. Al respecto, Jonker y Pennink (2010) explican que las teorías permiten analizar y dar sentido a lo que percibimos en el mundo real, proporcionando estructuras explicativas, ya sean válidas o no, para comprender los eventos que ocurren en esa realidad.

En cuanto a los datos, indispensables para realizar el análisis, la primera fuente fue la observación participante realizada por la docente-investigadora con el grupo en el aula de clases. Para la descripción detallada de las representaciones gráficas, escritas y verbales de los estudiantes, se recurrió a la técnica del análisis de contenido cualitativo, entendida como "una técnica de interpretación de textos, ya sean escritos, grabados, pintados, filmados..., u otra forma diferente donde puedan existir toda clase de registros de datos, trascripción de entrevistas, discursos, protocolos de observación, documentos, videos" (Andréu, 2002, p. 1).

4.1 Método

4.1.1 Enfoque y diseño de la investigación

Como se mencionó anteriormente, el paradigma interpretativo condujo el presente estudio e hizo conexión con la investigación cualitativa.

La investigación cualitativa surge como una reacción a las vivencias de individuos y comunidades que, aunque no pueden cuantificarse, enriquecen la comprensión de los aspectos humanos de los fenómenos sociales. En el contexto educativo resulta significativo el desarrollo de sus enfoques y metodologías (Balcázar et al., 2013).

Según Rodríguez et al. (1999) el propósito de la investigación cualitativa es comprender y dar sentido a la realidad tal como es percibida por los individuos que participan en los entornos bajo estudio. En complemento, Hernández-Sampieri y Mendoza, (2020) agregan que facilita la extracción de aspectos significativos que posibilitan la exploración, comprensión y descripción de cómo los participantes experimentan los fenómenos que los rodean. Lo que implica un análisis más profundo de sus perspectivas, interpretaciones y significados.

Estas afirmaciones apoyaron la decisión de realizar una investigación cualitativa con enfoque interpretativo, puesto que se deseaba explorar y comprender los fenómenos acontecidos en el aula, entendida como el contexto natural.

Nuestro interés específico radicó en contestar la pregunta ¿cómo es la comprensión de la derivada desde la perspectiva del razonamiento variacional y covariacional en estudiantes del 4o. semestre de un bachillerato tecnológico al resolver un conjunto de actividades diseñadas para su aprendizaje mediante el uso de tecnología Arduino, NetLogo y GeoGebra? Para ello asumimos que era necesario contar con información sobre las experiencias, vivencias y percepciones de los alumnos situados en el salón de clases. La perspectiva cualitativa ofrece diversas opciones al investigador para obtener una comprensión más completa de una situación específica, lo que le capacita para abordar y solucionar un problema, como se ilustra en el contexto de la investigación-acción.

En opinión de Fraenkel et al. (2020), "la investigación acción es realizada por uno o más individuos o grupos con el propósito de resolver un problema u obtener información para informar la práctica local".

La investigación-acción no se restringe a la evaluación de hipótesis específicas o al uso de datos para alcanzar conclusiones. Es un proceso en constante evolución que transforma tanto al investigador como las situaciones en las que este opera.

Cohen et al. (2000) identifican cinco grandes categorías que engloban los propósitos de la investigación-acción educativa:

- Se utiliza como un método para abordar problemas identificados en situaciones específicas o para mejorar de alguna manera una serie de circunstancias.
- Sirve como una vía para la formación continua y la preparación.
- Constituye una forma de introducir enfoques nuevos e innovadores en la enseñanza y el proceso de aprendizaje.

- Facilita la mejora de la comunicación y la relación entre los profesionales de la educación y los investigadores.
- Proporciona la capacidad de resolver problemas en el entorno escolar.

4.2 Etapas

Según Elliot (1991), la investigación acción se clasifica en cuatro etapas, que son: planificación, acción, observación y reflexión. A continuación, se especifican las cuatro etapas, así mismo se describe cada una en términos de las acciones realizadas en nuestro trabajo.

1) **Planificación**

   El investigador formula una idea general acerca del objeto de estudio y recopila información relevante para profundizar en el conocimiento del tema, abordando de esta manera el análisis del problema de investigación.

El interés por seleccionar y aplicar un conjunto de actividades diseñadas para la enseñanza de la derivada, para probar su efectividad en el aula desde la perspectiva del razonamiento variacional y covariacional, tuvo su origen en las dificultades, desagrado y alto índice de reprobación que se ha observado en la asignatura de Cálculo Diferencial. Básicamente se emplean clases expositivas con un alto grado de repetición de algoritmos, limitando la concepción de la Derivada al uso de fórmulas. En consecuencia, el objeto matemático no adquiere significación física para los estudiantes, lo que implica, como ya se mencionó, dificultad y desinterés en su aprendizaje. Esto ha llevado a que los alumnos tengan complicaciones para conectar los conceptos matemáticos abstractos con situaciones reales y aplicaciones prácticas.

Después de acotar el problema de investigación, se analizaron las actividades diseñadas por la Dra. Valero bajo la teoría de la Variación y la Covariación de Thompson y Carlson (2017). Esta acción se realizó en las sesiones de la asignatura de Seminario De Titulación I, con la finalidad de validar la probabilidad de que los estudiantes desarrollaran acciones mentales clasificables según los niveles de variación y covariación.

Estas actividades se encuentran disponibles en http://calculoparatodos.com/. Se seleccionaron aquellas que emplean diferente tipo de tecnología. Otro criterio fue el tipo de función abordada, tratando de cubrir los principales tipos (lineal, polinomial, periódica, logística).

En paralelo, se fue trabajando en la revisión de literatura para validar la existencia del problema de investigación, así como las propuestas planteadas, los resultados y las conclusiones de cada investigación.

2) **Acción**

Se lleva a cabo la implementación del plan diseñado, cuyo propósito es alcanzar los objetivos propuestos bajo una nueva perspectiva de estudio; simultáneamente, se recolectan datos sobre el proceso a través de diferentes instrumentos.

Para cumplir con los objetivos planteados, se llevó a cabo la implementación del conjunto de actividades durante el semestre febrero-julio 2024 en un grupo de alumnos de nivel medio superior. Se trabajó con 28 estudiantes (12 hombres y 16 mujeres) del centro de bachillerato tecnológico industrial y de servicios número 16 de la ciudad de Atlixco, Puebla, inscritos en cuarto semestre grupo H de la especialidad de Programación. Sus edades oscilan entre los 16 y 17 años. El grupo se eligió por conveniencia, ya que la investigadora es la titular de la materia.

4.3 Técnicas de recolección de datos

Se trata de la forma para recabar la información, que incluyen técnicas e instrumentos. En la investigación se usó la observación participante, los documentos y la entrevista semiestructurada. A continuación, se explica cada uno de ellos:

- **Observación participante**. Es adecuada para investigar fenómenos que requieren que el investigador se involucre y participe activamente para obtener una comprensión profunda del fenómeno, como en el caso de los docentes que realizan investigación. Esta técnica es una parte esencial de la investigación-acción y comparte similitudes con la enseñanza, ya que el profesional debe comprometerse con el estudio de su propia práctica profesional.

Atendiendo a las ideas anteriores, la docente asumió un rol activo dentro del entorno educativo, se integró en las dinámicas de aprendizaje mientras observaba y registraba los comportamientos, interacciones y respuestas de los estudiantes. Durante el desarrollo de las actividades, la docente guío y facilitó las sesiones, también tomó algunas notas detalladas para analizar las evidencias posteriormente. Esta estrategia le permitió captar de manera directa las experiencias y perspectivas de los estudiantes, comprender los procesos inmersos en su aprendizaje y ajustar las intervenciones pedagógicas en tiempo real, garantizando que los datos recolectados fueran significativos para la investigación.

- **Documentos**. Son todos aquellos registros escritos que realiza el estudiante en hojas de papel, también llamadas hojas de trabajo, para realizar cálculos, escribir datos, información, dar respuesta a los planteamientos solicitados, representaciones y procedimientos en el desarrollo de las actividades propuestas (Hernández et al. 2010, p. 415).

En este sentido, las hojas de trabajo realizadas por los estudiantes, constituyeron una fuente importante para analizar el desarrollo de su pensamiento variacional y covariacional. Estas producciones contenían las actividades que promovieron la exploración, modelación y análisis de conceptos relacionados con la derivada, integrando el uso de herramientas tecnológicas. Su diseño incluyó situaciones con magnitudes variables, visibles con experimentos o con simulaciones en GeoGebra. Contenían preguntas abiertas y de opción múltiple. Además de algunas partes destinadas a registrar observaciones y conclusiones. Las respuestas de los estudiantes permitieron identificar patrones en su razonamiento, evidenciar su grado de comprensión para clasificarlo adecuadamente según los niveles de variación y covariación propuestos por Thompson y Carlson en 2017. documentar la evolución de sus habilidades. Además, los datos obtenidos se complementaron con los registros de la observación participante y las respuestas de la entrevista semiestructurada, con el objetivo de triangular la información y garantizar una visión más completa del proceso de aprendizaje.

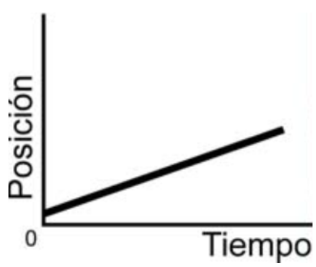
- **Entrevista semiestructurada**

  La entrevista semiestructurada resulta de gran utilidad en los estudios cualitativos. Algunas características destacables son su versatilidad, su dinámica sencilla y la posibilidad de generar espacios de diálogo para comprender la perspectiva de los sujetos con gran profundidad (Valles, 2000). En nuestro contexto, la entrevista semiestructurada tuvo como propósito explorar con detalle las respuestas a los ítems 9 y 10 del post test. Para ello, se aplicó a los estudiantes con mejor desempeño mediante dos preguntas abiertas y flexibles.

4.4 Instrumentos de recolección de datos.

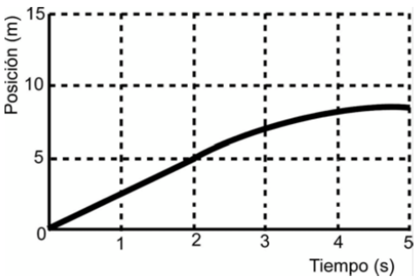
Los instrumentos de recolección de datos del trabajo de los estudiantes, incluyeron las hojas de trabajo, formadas por el conjunto de las actividades integradas en un cuadernillo y contestadas a lápiz, archivos en formatos Excel, PDF, Word y Ggb, así como videos de las entrevistas semistructuradas. Se describen algunos de ellos, considerados los más relevantes.

Se inició y terminó el curso con la aplicación del cuestionario Pre test y Post test respectivamente. El instrumento está conformado por 10 ítems. De ellos, 7 son de opción múltiple y el resto son preguntas abiertas. A continuación, se muestran los ítems, así como el nivel de razonamiento variacional y covariacional que evalúan.

ÍTEM	**NIVEL DE RAZONAMIENTO**
1. La figura adjunta muestra la gráfica de movimiento de un objeto. Describe cómo se mueve el  objeto.	La persona imagina que el valor de una variable aumenta o disminuye, pero piensa poco o casi nada que pueda tener valores mientras cambia. Solo piensa en el cambio de un punto a otro, pero no visualiza los valores intermedios o lo que sucede durante el cambio (**Variación gruesa)** La persona forma una imagen general de los valores de las cantidades que varían juntas (**Coordinación gruesa de valores)** Para realizar una descripción el alumno debe reconocer a las variables tiempo y posición, percatándose de que cada variable aumenta. Además, debe relacionar el cambio que se observa en el tiempo con el cambio observado en la posición, interpretando esta relación como un cambio

proporcional para concluir que el objeto se mueve a velocidad constante.

2. La velocidad en el instante t = 2 es:



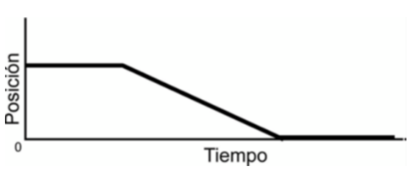
a) 0,4 m/s.
b) 2,0 m/s.
c) 2,5 m/s.
d) 5,0 m/s.
e) 10,0 m/s.

La persona imagina que una variable toma valores específicos. La persona ve el cambio del valor de la variable de 'a' a 'b' tomando valores 'a1', 'a2', ..., 'a'n, pero no imagina que la variable pueda tomar ningún valor entre 'ai' y 'a'i+1 (**Variación discreta)**

La persona forma una imagen general de los valores de las cantidades que varían juntas. La persona coordina los valores de una variable (x) con los valores de otra variable (y) con la anticipación de crear una colección discreta de pares (x, y) (**Coordinación de valores)**

Para obtener el resultado correcto, el alumno debe identificar los valores que toman las variables. Además, al interpretar la relación entre t=3 y s(t)=5, puede encontrar el cociente incremental $\frac{\Delta s(t)}{\Delta t}$. En ese sentido, se puede esperar que conciba una colección discreta de pares (x,y).

3. La gráfica adjunta muestra la gráfica del movimiento de un objeto.



¿Cuál de las siguientes afirmaciones es la correcta?

a) El objeto rueda sobre una superficie horizontal, después cae

La persona piensa en la variación del valor de una variable como cambiando por intervalos de un tamaño fijo. Los intervalos pueden ser del mismo tamaño, pero no necesariamente (**Variación continua gruesa)**

La persona imagina cambios en el valor de una variable como ocurriendo simultáneamente con cambios en el valor de otra variable, y visualizan que ambas variables varían con una variación continua a bloques (**Covariación continua gruesa)** rodando por una pendiente y finalmente se para.

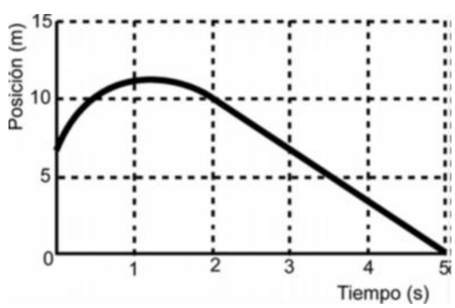
b) El objeto no se mueve al principio, después cae rodando por una pendiente y finalmente se para.

c) El objeto se mueve a velocidad constante, después frena hasta que se para.

d) <u>El objeto no se mueve al principio, después se mueve hacia atrás y finalmente se para</u>.

El item requiere que el estudiante piense en la variación del valor de las variables tiempo y posición, observe esta variación y relacione los cambios de tiempo y posición pensando que ocurren de manera simultánea para que se obtenga la expresión en lenguaje cotidiano de lo que se observa en el gráfico.

4. La velocidad en el instante *t* = 3 vale aproximadamente:



a) -3.3 m/s.

b) <u>-2.0 m/s.</u>

c) -0.67 m/s.

d) 5.0 m/s.

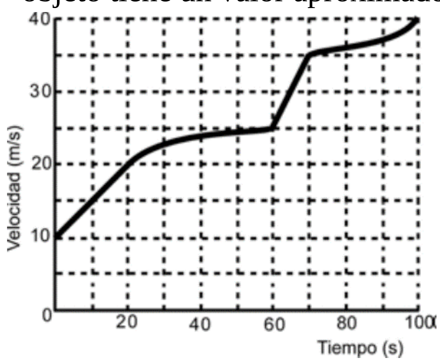
e) 7.0 m/s.

La persona imagina que una variable toma valores específicos. La persona ve el cambio del valor de la variable de 'a' a 'b' tomando valores 'a1', 'a2', ..., 'a'n, pero no imagina que la variable pueda tomar ningún valor entre 'ai' y 'a'i+1 (**Variación discreta)**

La persona forma una imagen general de los valores de las cantidades que varían juntas La persona coordina los valores de una variable (x) con los valores de otra variable (y) con la anticipación de crear una colección discreta de pares (x, y). (**Coordinación de valores)**

Para obtener el resultado correcto, el alumno debe identificar los valores específicos de las variables e interpretar la relación entre t=3 y s(t)=6, al encontrar el cociente incremental $\frac{\Delta s(t)}{\Delta t}$, con esta acción está coordinando los valores entre tiempo y posición.

5. La gráfica adjunta se refiere al movimiento de un objeto que se mueve en línea recta. En el instante t=65 s, la aceleración instantánea del objeto tiene un valor aproximado.



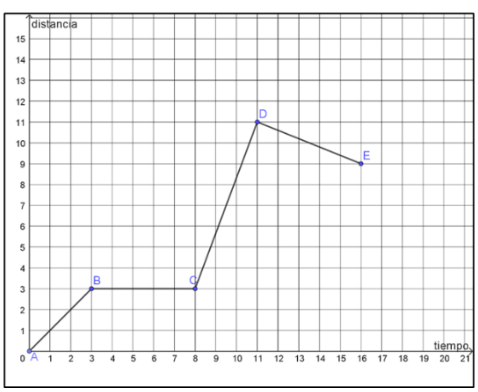
a) 1/2 m/s^2.
b) 1 m/s^2.
c) 2 m/s^2.
d) 9.8 m/s^2.
e) 30 m/s^2.

La persona piensa en la variación del valor de una variable como cambiando por intervalos de un tamaño fijo. Los intervalos pueden ser del mismo tamaño, pero no necesariamente (**Variación continua gruesa)**

La persona imagina cambios en el valor de una variable como ocurriendo simultáneamente con cambios en el valor de otra variable, y visualizan que ambas variables varían con una variación continua a bloques (**Covariación continua gruesa)**

Este ítem necesita un nivel más de razonamiento covariacional que el anterior porque para determinar la aceleración, el alumno debe localizar los valores de las dos variables, y estos no están indicados sobre la numeración de los ejes, de modo que debe "dividir" el intervalo que requiere para hallar la respuesta.

6. Una persona se mueve frente a un sensor de movimiento y se obtiene la siguiente gráfica ¿En qué tramo la persona se mueve más rápido? Escribe las letras del segmento que consideres correcto.



La persona piensa en la variación del valor de una cantidad o variable (en adelante, variable) como aumentando o disminuyendo (en adelante, cambiando) por intervalos mientras anticipa que dentro de cada intervalo el valor de la variable varía suave y continuamente. La persona puede pensar en intervalos de variación del mismo tamaño, pero no necesariamente (**Variación continua suave)**

La persona imagina aumentos o disminuciones (en adelante, cambios) en el valor de una cantidad o variable (en adelante, variable) como sucediendo simultáneamente con cambios en el valor de otra variable, y la persona imagina que ambas variables

a) AB
b) BC
c) CD
d) DE

varían de manera suave y continua (**Covariación continua suave)**

Para que los estudiantes logren identificar en qué parte de la gráfica el objeto se mueve más rápido, deben pensar covaracional y variacionalmente en el nivel continuo suave, puesto que se deben percatar que la posición aumenta rápido, es decir, gana más posición en poco tiempo, esto implica imaginar que los cambios en la variable tiempo suceden simultáneamente junto con los cambios en la distancia, y esto ocurre de manera suave y continua.

7. ¿En qué punto de la gráfica anterior, la persona cambia el sentido de su movimiento?

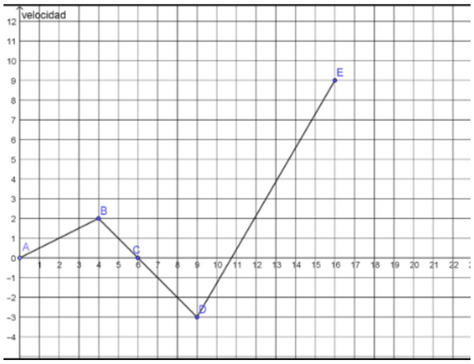
a) A
b) B
c) C
d) D
e) E

La persona piensa en la variación del valor de una variable como cambiando por intervalos de un tamaño fijo. Los intervalos pueden ser del mismo tamaño, pero no necesariamente (**Variación continua gruesa)**.

La persona imagina cambios en el valor de una variable como ocurriendo simultáneamente con cambios en el valor de otra variable, y visualizan que ambas variables varían con una variación continua a bloques (**Covariación continua gruesa).**

Para identificar el cambio de sentido en el movimiento, el alumno debe pensar que las variables están cambiando por intervalos de tamaño fijo, además de imaginar y relacionar que ambas variables cambian de manera simultánea, mientras una aumenta la otra disminuye, esto ocurre en cierto bloque o intervalo.

8. ¿En qué punto la persona cambia el sentido de su movimiento?



a) A
b) B
c) <u>C</u>
d) D
e) E

La persona piensa en la variación del valor de una variable como cambiando por intervalos de un tamaño fijo. Los intervalos pueden ser del mismo tamaño, pero no necesariamente (**Variación continua gruesa)**

La persona imagina cambios en el valor de una variable como ocurriendo simultáneamente con cambios en el valor de otra variable, y visualizan que ambas variables varían con una variación continua a bloques (**Covariación continua gruesa)**

El ítem requiere que el alumno observe que en el eje vertical se muestra la velocidad, por lo tanto el cambio de dirección lo detecta en un valor de tiempo t=6, ya que en ese instante de tiempo la velocidad v=0. Esta acción requiere pensar covariacional y variacionalmente, relacionando los valores de tiempo y velocidad e imaginar el movimiento de la persona, para leer en qué valor de la gráfica se presenta el cambio de dirección.

9. Lee atentamente el siguiente enunciado y construye la gráfica distancia vs. tiempo correspondiente:

"Un robot inicia la toma de datos tocando el sensor (a una distancia de 0). Empieza a moverse rápidamente, alejándose del sensor, durante un intervalo de 1 segundo. Durante el siguiente intervalo de 2 segundos, disminuye su velocidad hasta que deja de moverse. Mantiene la pausa

La persona piensa en la variación del valor de una cantidad o variable (en adelante, variable) como aumentando o disminuyendo (en adelante, cambiando) por intervalos mientras anticipa que dentro de cada intervalo el valor de la variable varía suave y continuamente. La persona puede pensar en intervalos de variación del mismo tamaño, pero no necesariamente (**Variación continua suave)**

La persona imagina aumentos o disminuciones (en adelante, cambios) en el valor de una cantidad o variable (en adelante, variable) como sucediendo durante el siguiente segundo. Entonces, se empieza a mover hacia el sensor, durante el siguiente intervalo de 2 segundos, pero no llega al sensor.”

simultáneamente con cambios en el valor de otra variable, y la persona imagina que ambas variables varían de manera suave y continua (**Covariación continua suave)**

Para que los estudiantes logren construir la gráfica que relaciona la distancia y el tiempo para mostrar las diferentes etapas del enunciado, deben pensar covaracional y variacionalmente en el nivel continuo suave, puesto que se deben imaginar que la distancia aumenta o disminuye, y que el tiempo transcurre de manera natural (aumentando). Con esta acción pueden imaginar la relación simultánea producida al aumentar o disminuir la distancia en los diferentes intervalos de tiempo. Si esto ocurre, los estudiantes imaginan que ambas variables varían de manera suave y continua.

10. Ahora, construye la gráfica velocidad vs. tiempo para el mismo enunciado

La persona piensa en la variación del valor de una cantidad o variable (en adelante, variable) como aumentando o disminuyendo (en adelante, cambiando) por intervalos mientras anticipa que dentro de cada intervalo el valor de la variable varía suave y continuamente. La persona puede pensar en intervalos de variación del mismo tamaño, pero no necesariamente (**Variación continua suave)**

La persona imagina aumentos o disminuciones (en adelante, cambios) en el valor de una cantidad o variable (en adelante, variable) como sucediendo simultáneamente con cambios en el valor de otra variable, y la persona imagina que ambas variables varían de manera suave y continua (**Covariación continua suave)**

Para que los estudiantes logren construir la gráfica que relaciona la velocidad y el tiempo para mostrar las diferentes etapas del enunciado, deben pensar covaracional y variacionalmente en el nivel continuo suave, puesto que se deben imaginar que la velocidad no cambia mientras que el tiempo transcurre. Con esta acción pueden imaginar la relación simultánea producida al mantener la misma velocidad en los diferentes intervalos de tiempo. Si esto ocurre, los estudiantes imaginan que ambas variables varían de manera suave y continua.

En seguida, se muestran algunas actividades empleadas en el desarrollo del curso.

Al comienzo del semestre, se empleó la actividad 1, obtenida de la plataforma

http://matematicas.cosdac.sems.gob.mx/matematicas/pensamiento-y-lenguaje-variacional-cambio-y-prediccion

Esta actividad se diseñó para favorecer el pensamiento variacional y covariacional en situaciones cotidianas. Se muestran algunas secciones:

Figura 1. Calles de alguna parte de México.

Figura 2. Recorrido

Instrucción: Representa gráficamente el recorrido mostrado en la figura 1.

Se espera que los estudiantes razonen en los niveles variación discreta y coordinación gruesa de valores, al identificar que para realizar el recorrido se involucran las variables tiempo y posición, que pueden tomar valores específicos las cuales, al coordinarse, forman trayectorias lineales y la única variante es la pendiente de la gráfica, esto es importante ya que ayuda a generar argumentaciones apoyadas en aspectos visuales sobre cómo se producen los cambios.

Se continúa con otra situación para provocar frases como ir más rápido o ir más lento, que son característicos del lenguaje variacional.

En esta sección se propone asociar la pendiente de la colina con la rapidez al caminar, así, caminar en lo plano equivale a pensar en una velocidad constante mientras que caminar sobre lo inclinado se relaciona con una velocidad constante pero menor que si se fuera sobre lo plano (Figura 2).

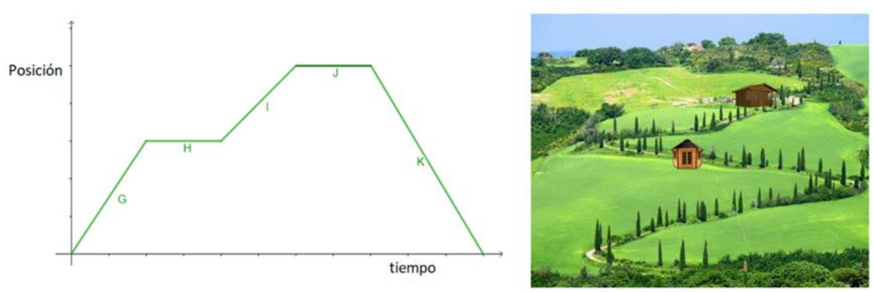


Figura 3 Destinos distintos con recorridos similares.

En la tercera parte (Figura 3), se propuso una imagen con dos destinos distintos, pero con recorridos similares.

Ahora, al presentar la gráfica se propone que los estudiantes analicen, reconozcan y describan los cambios que perciben en la situación. Para ello se pregunta qué parte del recorrido representa cada segmento.

Se concluye preguntando ¿qué pasará después? Con la intención de ocupar el carácter predictivo de la función, aunque no en un sentido amplio, pues no es posible saber, dado el recorrido de Luis y su representación gráfica, cómo continuaría la gráfica (si es que lo hace) y por ello la pregunta final está orientada a esa discusión.

Posteriormente, se ocuparon el conjunto de actividades en orden de contenido curricular. En la unidad I se destacan las actividades: el carrito, los elevadores, funciones polinomiales con Arduino y el juego de cartas. Se muestran algunas partes en la Figura 4:

2. Ahora puedes identificar qué controlan cada uno de los tres deslizadores en pantalla: ***t*** = ***tiempo***, s_0 = **posición inicial** y ***v*** = ***velocidad de movimiento*** del auto. Si pulsas el botón **INICIO**, ¿qué cambios observas en pantalla? ______
3. ¿Qué cambia en la pantalla cuando cambias el valor de s_0? ______
4. ¿Qué cambia cuando cambias el valor de ***v***? ______
5. ¿Cómo consideras que es el valor de la velocidad del carrito, durante un trayecto completo de él?
   A) Constante B) Variable
6. De acuerdo a la gráfica, ¿qué tipo de **función** es $s(t)$ *vs.* t?
   a) Cuadrática b) Lineal c) Cúbica
7. Por tanto, la estructura de la función $s(t)$ *vs.* t es:
   a) $s(t) = vt^2$ b) $s(t) = vt^3 + t^2$ c) $s(t) = s_0 + vt$
8. Y, como todos recordamos la velocidad se calcula con la fórmula ______
9. ¿Encuentras alguna relación entre la expresión de la velocidad y la fórmula que usabas en **Geometría Analítica** para calcular la pendiente ***m*** de una recta? ¿la recuerdas? ______
10. ¿Encuentras algún parecido entre la expresión $y = y_0 + mx$ y $s(t) = s_0 + vt$? ______
11. Coloca cada uno de los deslizadores en pantalla en los valores que se indican a continuación en la tabla y llena cada uno de los espacios correspondientes

s_0	v	Expresión $s(t)$	Expresión de la velocidad $v(t)$	Comportamiento gráfico de la función (creciente o decreciente)

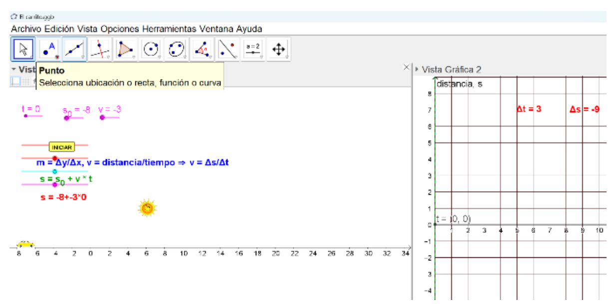
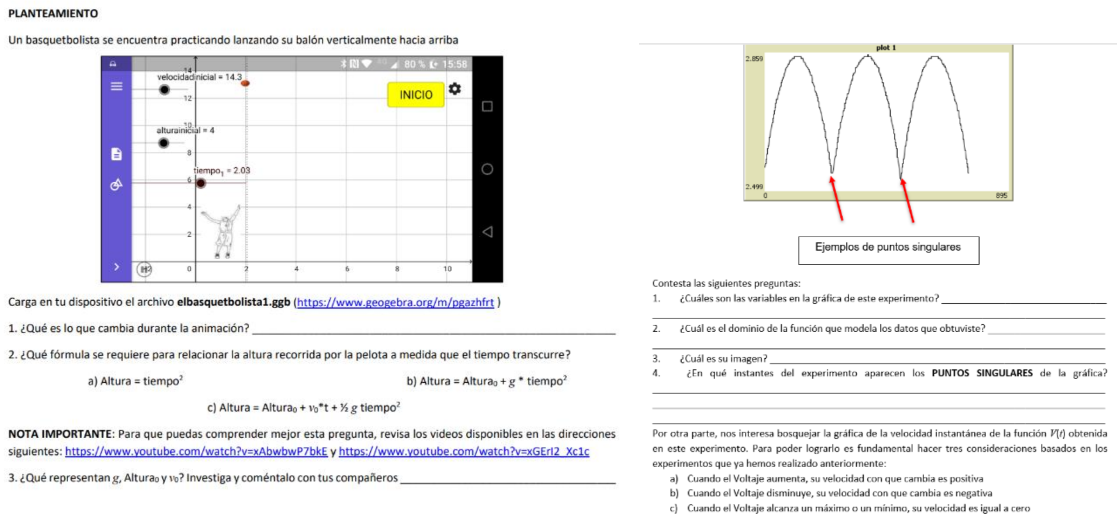


Figura 4. El carrito

En cuanto a la unidad II, se encuentran el basquetbolista y la Rueda de la Fortuna, se tratan de applets diseñados en el software dinámico GeoGebra. Para concluir la unidad se vuelve a hacer uso de la tecnología Arduino, en esta ocasión empleando un panel solar, además del entorno de programación NetLogo (Figura 5)



PLANTEAMIENTO

Un basquetbolista se encuentra practicando lanzando su balón verticalmente hacia arriba

Carga en tu dispositivo el archivo **elbasquetbolista1.ggb** (https://www.geogebra.org/m/pgazhfrt)

1. ¿Qué es lo que cambia durante la animación? ____________________

2. ¿Qué fórmula se requiere para relacionar la altura recorrida por la pelota a medida que el tiempo transcurre?

a) Altura = tiempo^2 b) Altura = Altura$_0$ + g * tiempo^2

c) Altura = Altura$_0$ + v_0*t + ½ g tiempo^2

NOTA IMPORTANTE: Para que puedas comprender mejor esta pregunta, revisa los videos disponibles en las direcciones siguientes: https://www.youtube.com/watch?v=xAbwbwP7bkE y https://www.youtube.com/watch?v=xGErI2_Xc1c

3. ¿Qué representan g, Altura$_0$ y v_0? Investiga y coméntalo con tus compañeros ____________________

Contesta las siguientes preguntas:

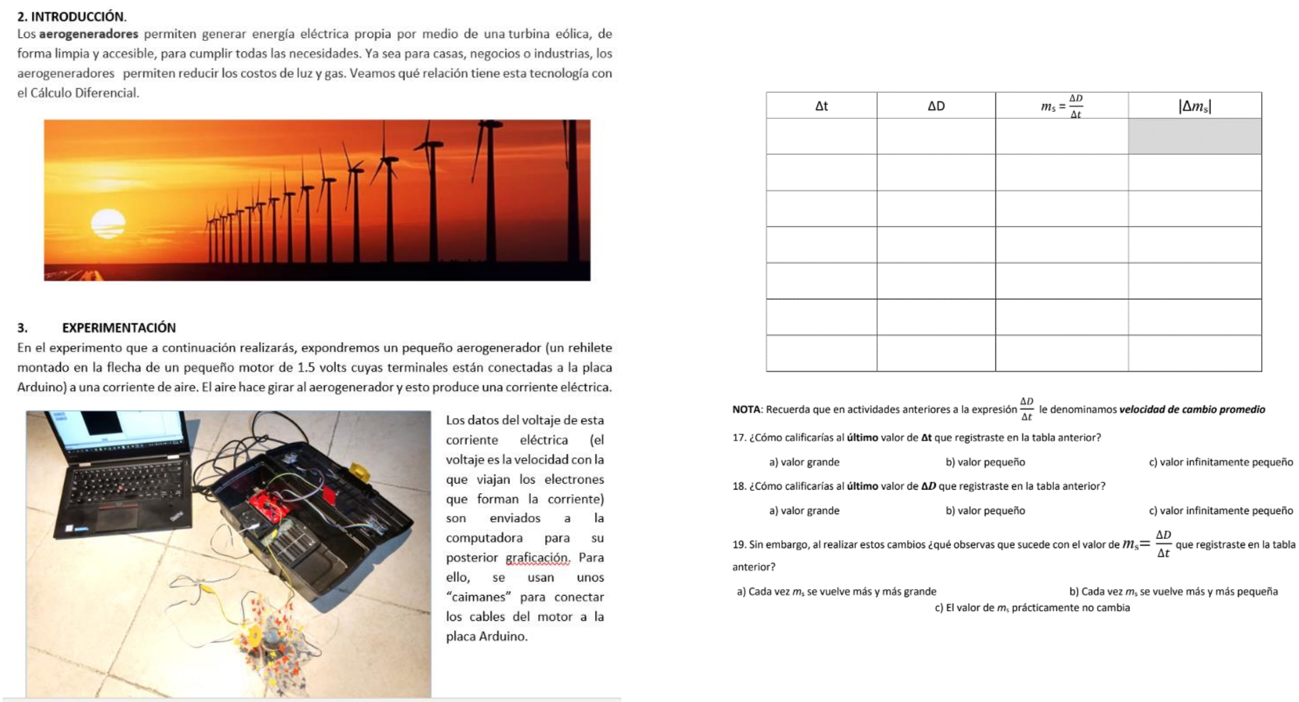
1. ¿Cuáles son las variables en la gráfica de este experimento? ____________________
2. ¿Cuál es el dominio de la función que modela los datos que obtuviste? ____________________
3. ¿Cuál es su imagen? ____________________
4. ¿En qué instantes del experimento aparecen los **PUNTOS SINGULARES** de la gráfica? ____________________

Por otra parte, nos interesa bosquejar la gráfica de la velocidad instantánea de la función $V(t)$ obtenida en este experimento. Para poder lograrlo es fundamental hacer tres consideraciones basados en los experimentos que ya hemos realizado anteriormente:

a) Cuando el Voltaje aumenta, su velocidad con que cambia es positiva
b) Cuando el Voltaje disminuye, su velocidad con que cambia es negativa
c) Cuando el Voltaje alcanza un máximo o un mínimo, su velocidad es igual a cero

Figura 5. El basquetbolista y el panel solar.

Finalmente, en la unidad III se experimenta con un aerogenerador, la tarjeta Arduino, NetLogo y Excel para el estudio de las funciones exponenciales y analizar su velocidad instantánea, además de la actividad "embarazo adolescente" en la cual se usa un applet llamado "partograma"



2. INTRODUCCIÓN.

Los **aerogeneradores** permiten generar energía eléctrica propia por medio de una turbina eólica, de forma limpia y accesible, para cumplir todas las necesidades. Ya sea para casas, negocios o industrias, los aerogeneradores permiten reducir los costos de luz y gas. Veamos qué relación tiene esta tecnología con el Cálculo Diferencial.

3. EXPERIMENTACIÓN

En el experimento que a continuación realizarás, expondremos un pequeño aerogenerador (un rehilete montado en la flecha de un pequeño motor de 1.5 volts cuyas terminales están conectadas a la placa Arduino) a una corriente de aire. El aire hace girar al aerogenerador y esto produce una corriente eléctrica.

Los datos del voltaje de esta corriente eléctrica (el voltaje es la velocidad con la que viajan los electrones que forman la corriente) son enviados a la computadora para su posterior graficación. Para ello, se usan unos "caimanes" para conectar los cables del motor a la placa Arduino.

Δt	ΔD	$m_s = \frac{\Delta D}{\Delta t}$	$\|\Delta m_s\|$

NOTA: Recuerda que en actividades anteriores a la expresión $\frac{\Delta D}{\Delta t}$ le denominamos ***velocidad de cambio promedio***

17. ¿Cómo calificarías al **último** valor de **Δt** que registraste en la tabla anterior?

a) valor grande b) valor pequeño c) valor infinitamente pequeño

18. ¿Cómo calificarías al **último** valor de **Δ*D*** que registraste en la tabla anterior?

a) valor grande b) valor pequeño c) valor infinitamente pequeño

19. Sin embargo, al realizar estos cambios ¿qué observas que sucede con el valor de $m_s = \frac{\Delta D}{\Delta t}$ que registraste en la tabla anterior?

a) Cada vez m_s se vuelve más y más grande b) Cada vez m_s se vuelve más y más pequeña
c) El valor de m_s prácticamente no cambia

Figura 6. Aerogenerador y partograma.

La Dra. María del Socorro Valero Cázares diseñó estas actividades y amablemente permitió su uso en el CBTis 16. Se pueden consultar en http://calculoparatodos.com/. Las mismas permiten abordar el cálculo desde un punto de vista variacional.

En la siguiente tabla, se muestran las actividades disponibles en "Cálculo para Todos". Las sombreadas con color azul se emplearon en el análisis del capítulo de resultados. La selección se basó en dos posturas. La primera consistió en usar actividades con diferentes tecnologías. El segundo criterio de selección fue el tipo de función abordada, tratando de abarcar los principales tipos (lineal, polinomial, periódica y logística).

Tabla 5**.** Actividades CpT, tecnología que usan, y la familia de funciones que expresan

	Nombre de la Actividad	**Tecnología**	**Función Matemática**
1	Funciones polinomiales con Arduino	Arduino	Polinomial
2	El carrito	GeoGebra	Lineal
3	Los Elevadores	GeoGebra	Lineal
4	El Basquetbolista	GeoGebra	Cuadrática
5	La Caja	GeoGebra	Cúbica
6	El Juego de Cartas	Cartas de Papel	Polinomial
7	La Rueda de la Fortuna	GeoGebra	Periódica
8	El Panel Solar	Arduino	Periódica
9	Aerogenerador	Arduino	Exponencial
10	Aritmética de Funciones	Arduino	Exponencial
11	Embarazo Adolescente 1	GeoGebra	Logística (Sigmoidal)
12	Embarazo Adolescente 2	NetLogo	Logística (Sigmoidal)
13	La Lata	GeoGebra	Cuadrática
14	Carga/Descarga de un Capacitor	Arduino	Exponencial
15	Crecimiento de un Árbol	GeoGebra	Logística (Sigmoidal)
16	La Importancia Biológica del Agua	Arduino	Exponencial
17	Suma de Funciones	Arduino	Periódica + Exponencial

.

3) Observación

Después de la etapa de acción, es decir a la ejecución del plan, sigue la etapa de observación, la cual implica la organización y gestión de la información obtenida, facilitando un monitoreo constante que contribuye al control, validación y evaluación de las intervenciones, y que se estructura de forma que permita un proceso formativo.

A partir de la información obtenida en todas las fuentes de recolección de datos, que incluyeron las respuestas escritas en las hojas de trabajo de los estudiantes, sus producciones digitales, las respuestas orales generadas en las discusiones grupales, las explicaciones de ciertos estudiantes grabadas en video (entrevistas semiestructuradas), y algunas anotaciones de la docente, se realizó el análisis de los resultados empleando los 6 niveles de razonamiento variacional y covariacional de Thompson y Carlson (2017).

Se pudo observar que al iniciar el semestre la mayor parte de los estudiantes se encontraban en los niveles más bajos de ambos razonamientos (variable como símbolo y sin coordinación, razonamiento variacional y covariacional respectivamente), esto con base en los resultados obtenidos en el pretest. Al ir implementando las actividades, se observó que fueron escalando de nivel. Es necesario mencionar que las actividades se desarrollaron en equipo, y que esta forma colaborativa de trabajo, probablemente incidió en los resultados positivos. Así mismo, se observó que además de las respuestas escritas, fue necesario realizar preguntas abiertas para poder determinar el nivel en el que se encontraban los estudiantes en la actividad en cuestión.

4) **Reflexión**

El momento de reflexión consiste en el análisis y evaluación de los datos recolectados, a partir de los cuales se extraen conclusiones y se toman decisiones orientadas a perfeccionar y ajustar el proceso investigativo.

En esta etapa, a partir del análisis de los datos obtenidos y plasmados en los instrumentos de recolección de datos, se obtienen conclusiones que podrían guiar, si así se considera conveniente, la continuación de este estudio.

Capítulo 5

5. Resultados y análisis

En este capítulo se presentan los resultados y el análisis de la implementación de las actividades durante el semestre febrero-junio 2024.

Las evidencias fueron recolectadas mediante documentos escritos, documentos digitales, las respuestas orales que los alumnos emitieron durante las sesiones, además se realizaron 5 grabaciones de video de las entrevistas realizadas al término del post test. Para presentar la información se transcriben las respuestas escritas por los estudiantes en el pre test y post test, así como imágenes que dan cuenta de las gráficas realizadas. Posteriormente, se muestran extractos representativos de las respuestas de los estudiantes a 7 de las actividades implementadas en el semestre febrero julio 2024, de igual forma se incluye el respectivo análisis desde los niveles de variación y covariación de Thompson y Carlson (2017). Las producciones de los estudiantes se nombraron con la letra H, seguida por el número de lista de cada joven. En el análisis se muestran en diversas imágenes las producciones del estudiante H18, quien mostró un genuino interés en el desarrollo de la clase, sin restar importancia a los estudiantes cuyo desempeño fue mejorando a lo largo del curso, respuestas que también se presentan.

5.1 Resultados del Pre test

Respuestas ítem **1** describiendo el movimiento del objeto mostrado gráficamente:

"El objeto va subiendo" 14 alumnos (56%)

Los alumnos concibieron la línea recta ascendente como un lugar con inclinación, imaginando que el objeto va subiendo. Las acciones mentales realizadas carecen de algún nivel de la variación y de la covariación.

Otras respuestas

- "El objeto se mueve en línea recta y con empinación" 1 alumno (3%)

El alumno concibe la gráfica como un camino recto, siguiendo la trayectoria considerando que además tiene inclinación (como una rampa). En esta respuesta no se muestra que perciba a alguna de las variables. Tampoco que se da cuenta de la relación entre las dos magnitudes.

- “En la posición se mueve recto y en el tiempo sube con un movimiento rápido” 1 alumno (3%)

El alumno menciona las dos variables, percibe que hay movimiento, se da cuenta que existen cambios. Menciona que “el tiempo sube con movimiento rápido”, confundiendo que la inclinación se debe a la distancia recorrida al pasar el tiempo. Situándose en el segundo nivel de razonamiento variacional y covariacional, que son sin variación y precoordinación de valores respectivamente. Lo anterior debido a que a pesar de que piensa en que hay cambios, no se nota que piense en algún valor de las variables, tampoco que perciba la relación existente entre ambas.

- “Dicho objeto se está moviendo a una velocidad lenta, aunque al mismo tiempo va subiendo” 1 alumno (3%)

El alumno asocia el movimiento directamente con la velocidad, indicando que es lenta. Esto se puede interpretar como que la relación entre distancia y tiempo produce una recta ascendente con poca pendiente. Sin embargo, cuando menciona que el objeto va subiendo, parece que considera que la pendiente representa una rampa. Entonces se encuentra en el nivel de razonamiento variacional discreto puesto que sabe que hay una variable que aumenta. El razonamiento covariacional es la coordinación gruesa de valores ya que el alumno forma una imagen general de los valores de las cantidades que varían juntas, al mencionar “al mismo tiempo”, se interpreta que relaciona a la velocidad con el tiempo.

- “Se mueve de forma lineal, es decir, mantiene una proporción constante” 1 alumno (3%)

El alumno identifica el cambio, se percata de que hay un elemento constante y lo asocia con la proporcionalidad, explicando la linealidad de la gráfica. Los niveles son variación gruesa ya que el alumno piensa en que la variable aumenta o disminuye (cambia), además, se podría pensar en el nivel de coordinación gruesa ya que se forma una imagen general de las cantidades que varían juntas, al explicar el comportamiento de la gráfica, pero no hay evidencia suficiente de ese pensamiento.

- “El objeto se mueve a una velocidad constante, así como transcurre el tiempo, cambia de posición” H18

El alumno escribe una respuesta en la que relaciona las tres variables de la situación: velocidad, tiempo y distancia. Percibe que al cambiar una, cambia la otra. Concibe la relación entre el valor de la posición y la tasa de cambio del valor de la posición. No menciona valores, por lo tanto, sus acciones mentales se encuentran en los niveles de la variación gruesa y coordinación gruesa de valores de valores.

Respuestas ítem **2**

a) 0,4 m/s. 0 alumnos (0%)
b) 2,0 m/s. 6 alumnos (24%)
c) **2,5 m/s.** 7 alumnos (28%)
d) 5,0 m/s. 11 alumnos (44%)
e) 10,0 m/s. 1 alumno (4%)

Los alumnos que respondieron el inciso C muestran niveles variación discreta y coordinación de valores, ya que interpretan la relación entre $t = 3\, y\, s(t) = 5$, para encontrar el cociente incremental $\frac{\Delta s(t)}{\Delta t}$. Entonces, la persona imagina que una variable toma valores específicos, además coordina los valores de una variable (x) con los valores de otra variable (y).

Respuestas ítem **3**

a) 11 alumno (44%)
b) 6 alumnos (24%)
c) 7 alumnos (28%)
d) **El objeto no se mueve al principio, después se mueve hacia atrás y finalmente se para.** 1 alumno (4%)

El estudiante, al responder el ítem con el inciso d requiere haber observado la variación de ambas magnitudes y relacione los cambios de tiempo y posición pensando que ocurren de manera simultánea para que se obtenga la expresión en lenguaje cotidiano de lo que se observa en el gráfico. De modo que sus niveles de razonamiento están en el nivel continuo grueso.

Respuestas ítem **4**

a) -3.3 m/s. 2 alumnos (8%)
b) **-2.0 m/s.** 5 alumnos (20%)
c) -0.67 m/s. 3 alumnos (12%)
d) 5.0 m/s. 2 alumnos (8%)
e) 7.0 m/s. 13 alumnos (52%)

Para obtener el resultado correcto, el alumno debía identificar los valores de las variables e interpretar la relación entre $t = 3\ y\ s(t) = 6$, para encontrar el cociente incremental $\frac{\Delta s(t)}{\Delta t}$ con signo negativo, debido al comportamiento decreciente, con esta acción está coordinando los valores entre tiempo y posición. Los niveles son variación discreta y coordinación de valores.

Respuestas ítem **5**

a) 1/2 m/s^2. 5 alumnos (20%)
b) <u>1 m/s^2</u>. 5 alumnos (20%)
c) 2 m/s^2. 4 alumnos (16%)
d) 9.8 m/s^2. 5 alumnos (20%)
e) 30 m/s^2. 6 alumnos (24%)

Este ítem necesita el nivel de razonamiento covariacional y variacional continuo suave ya que se requiere determinar la aceleración, para ello el alumno debe localizar los valores de las dos variables, y estos no están indicados sobre la numeración de los ejes, de modo que debe “dividir” el intervalo que requiere para hallar la respuesta.

Respuestas ítem **6**

a) AB 1 alumno (4%)
b) BC 6 alumnos (24%)
c) **<u>CD</u>** 12 alumnos (48%)
d) DE 1 alumno (4%)
e) No contestó 5 alumnos (20

Los estudiantes que respondieron con el segmento CD, lograron identificar en qué parte de la gráfica el objeto se mueve más rápido, para ello pensaron covaracional y variacionalmente en el nivel continuo suave, puesto que se debieron percatar que la posición aumenta rápido, es decir, gana más posición en menor cantidad de tiempo, lo que se traduce en un cociente incremental (tasa de cambio) mayor que los otros segmentos, esto implica imaginar que los cambios en la variable tiempo suceden simultáneamente junto con los cambios en la distancia, y esto ocurre de manera suave y continua.

Respuestas ítem **7**

a) A 0 alumnos (0%)
b) B 7 alumnos (28%)
c) C 3 alumnos (12%)
d) **D** 14 alumnos (56%)
e) E 0 alumnos (0%)
f) No contestó 1 alumno (4%)

Los estudiantes que respondieron con el punto D necesitaron identificar el cambio de sentido en el movimiento, para lograrlo el alumno debe pensar que las variables están cambiando por intervalos de tamaño fijo, además de imaginar y relacionar que ambas variables cambian de manera simultánea, mientras una aumenta la otra disminuye, esto ocurre en cierto bloque o intervalo. Por lo tanto, sus niveles de razonamiento variacional y covariacional se encuentran en el nivel continuo grueso.

Respuestas ítem **8**

a) A 0 alumnos (0%)
b) B 18 alumnos (72%)
c) **C** 4 alumnos (16%)
d) D 3 alumnos (12%9
e) E 0 alumnos (0%)
f) No contestó 1 alumno (4%)

La respuesta C al ítem 8, requirió que el alumno observara que en el eje vertical se muestra la velocidad, por lo tanto, el cambio de dirección lo detecta en un valor de tiempo $t = 6$, ya que en ese instante de tiempo la velocidad $v = 0$. Esta acción requiere pensar covariacional y variacionalmente en los niveles continuo grueso, relacionando los valores de tiempo y velocidad e imaginar el movimiento de la persona, para leer en qué valor de la gráfica se presenta el cambio de dirección.

Respuestas ítems **9 y 10**

Se muestran ejemplos de producciones de los estudiantes de estas últimas preguntas. Se clasificaron en 4 categorías por contener rasgos similares

1) Ejes sin escala, trazos de líneas curvas: 10 alumnos (40%). Figura 7.

Interpretación: Los estudiantes se encuentran en el nivel más bajo del razonamiento covariacional, correspondiente a sin coordinación, ya que los trazos no muestran ningún rasgo de coordinación entre los cambios de posición del robot en los diferentes intervalos de tiempo.

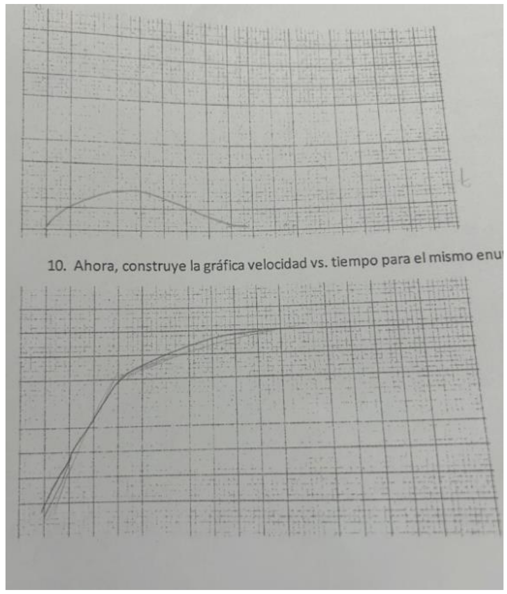


Figura 7. Gráficas $s(t)$ y $v(t)$ de H13

2) Ejes con/sin escala, trazos con segmentos rectos, la última parte se muestra creciente: 9 alumnos (36%)

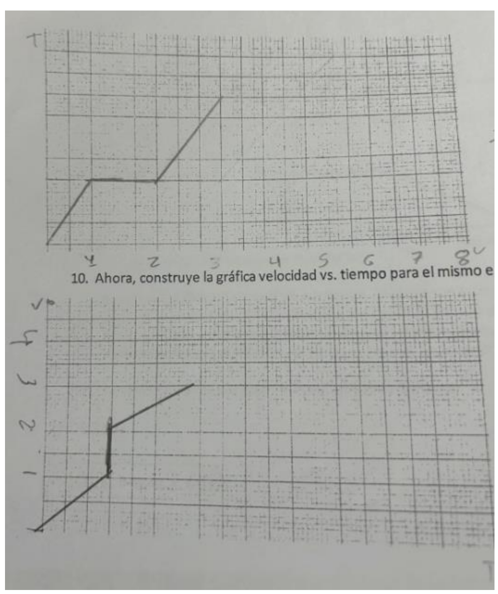


Figura 8. Gráficas $s(t)$ y $v(t)$ de H3

Interpretación: Los estudiantes identifican que el movimiento del robot al alejarse del sensor se representa con una recta creciente, muestran ausencia de movimiento en determinada cantidad de tiempo, sin embargo, piensan que la acción acercarse se representa con una recta creciente. Se puede interpretar como el nivel de precoordinación, al mostrar que la acción alejarse en cierta cantidad de tiempo significa comportamiento ascendente, lo cual no es correcto.

3) Ejes sin escala, trazos aproximados a la descripción solicitada: 3 alumnos (12%)

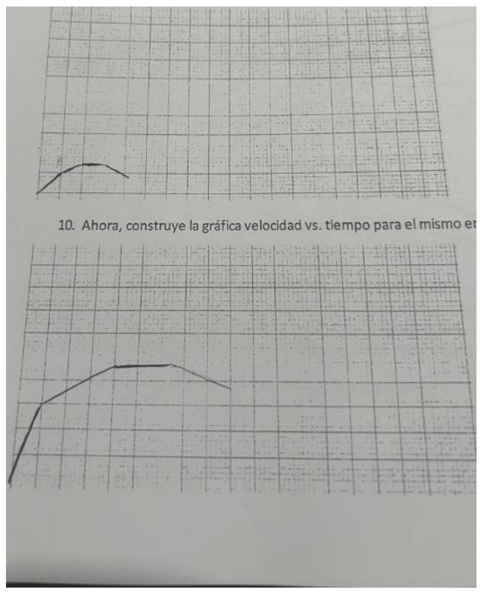


Figura 9. Gráficas $s(t)$ y $v(t)$ de H17

Estas respuestas muestran que la distancia aumenta a medida que el tiempo aumenta, y que la distancia disminuye a medida que el tiempo sigue aumentando. Lo cual representa la característica del nivel coordinación gruesa de valores.

4) Ejes con escala, segmentos representando acertadamente el valor de los intervalos mencionados en correspondencia con la mayor a menor distancia recorrida: 3 alumnos (12%)

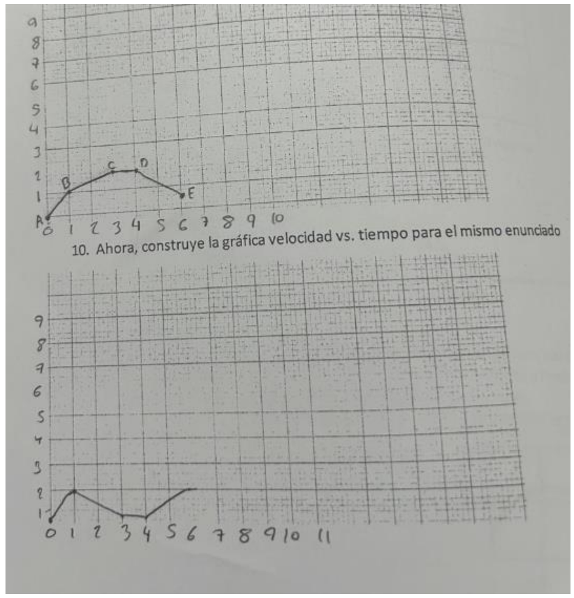


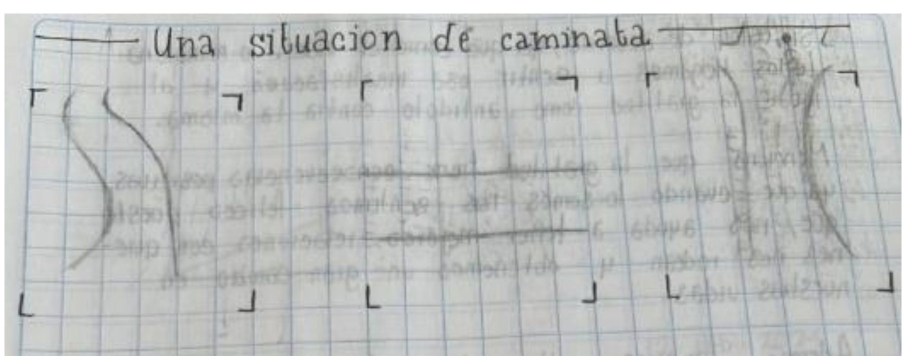
Figura 10. Gráficas $s(t)$ y $v(t)$ de H13 de H14

Los estudiantes lograron construir la gráfica que relaciona la velocidad y el tiempo para mostrar las diferentes etapas del enunciado, deben pensar covaracional y variacionalmente en el nivel continuo suave, puesto que se deben imaginar que tanto la distancia como el tiempo varían suavemente a través de intervalos de manera simultánea, anticipando que dentro de cada intervalo la cantidad de metros recorridos y la cantidad de tiempo varían suave y continuamente.

Ningún alumno respondió correctamente la pregunta **10.**

5.2 Resultados de la actividad 1 “Una situación de caminatas”

Parte 1. La instrucción indica que se realice un dibujo del “recorrido” por cada camino. En este sentido los estudiantes dibujaron la forma en la que ellos observaron la calle (forma del recorrido), como se muestra a continuación.



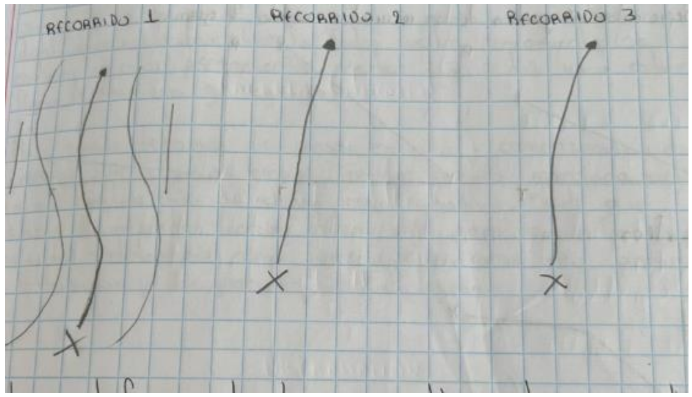


Figura 11. Recorridos dibujados por H18

Ante este hecho, fue necesario dirigir su razonamiento a la idea de la representación gráfica en un sistema de referencia, haciendo alusión a las magnitudes presentes implicadas en la situación, orientando a reconocer los elementos que cambian y que se podrían colocar en los ejes.

Al solicitar analizar la situación y preguntar ¿cuáles son las magnitudes que cambian? Los estudiantes se percataron que se trataba de “tiempo y distancia”, sin embargo, se solicitó emplear tiempo y posición, la última para promover la discusión de la recta con pendiente negativa, en lugar de distancia, que implicaría que la recta siguiera creciendo al transcurrir el tiempo.

Posteriormente, sus gráficas mostraron rectas con diferentes pendientes dependiendo del tipo de camino, como se muestra a continuación.

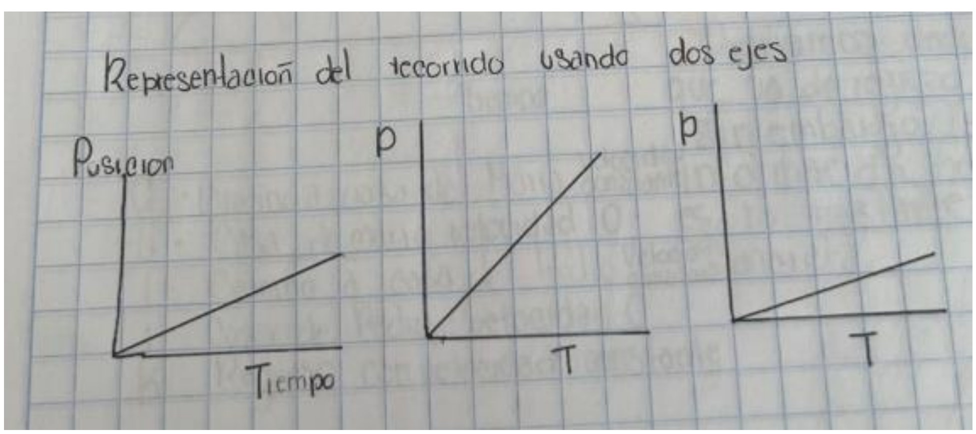
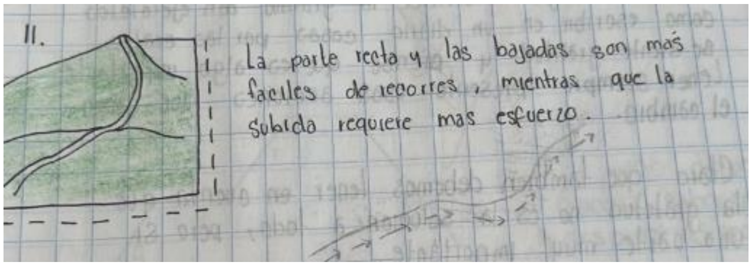


Figura 12. Gráficas $s(t)$ y $v(t)$ de H18



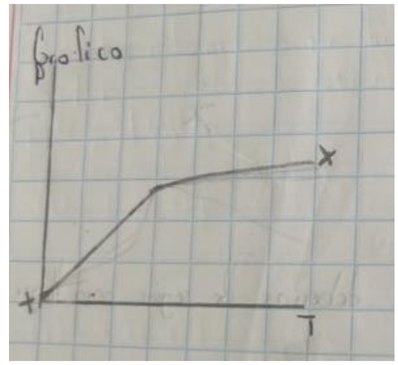


Figura 13. Gráficas $s(t)$ y $v(t)$ de H18

Parte 2. Con orientación sobre las secciones en las que se camina más rápido y en las cuales se camina más lento, realizaron diferentes gráficas.

En esta parte las explicaciones a las mismas incluyeron frases como

"si la colina está poco inclinada, se avanza más en menos tiempo, si está más inclinada se avanza menos en más tiempo"

Parte 3. Al solicitar la interpretación de cada segmento correspondiente a la gráfica y su asociación con la parte del camino, pude observar que una tercera parte de los estudiantes realizaron una interpretación adecuada a la situación.

Las frases con las cuales se describieron fueron:

"El segmento G corresponde al recorrido a la casa de María, ya que camina más rápido porque no hay tanta inclinación en la montaña, en el H llega a la casa de María y se queda allí determinado tiempo, luego en el I vuelve a caminar menos rápido porque la montaña tiene más inclinación lo que dificulta avanzar mucho, en el J llega a casa de Pedro y también se queda cierto tiempo, después en el K regresa de las visitas, se observa en la recta que decrece cuando pierde posición (regresa sobre el camino) hasta llegar al punto de partida"

Para finalizar la actividad se pregunta ¿qué pasará después?

En esta etapa los alumnos pudieron concluir que a pesar de que había dos caminos muy similares y que no resultaba necesario analizarlos con detenimiento para saber cómo eran las partes del recorrido, no había información suficiente para saber hacia dónde se dirigía Luis.

Tabla 6. Interpretación actividad "Una situación de caminatas"

Variable	Nivel de razonamiento variacional	Explicación
Tiempo	Variación continua a trozos	Los estudiantes, además de realizar gráficas en las que se observa correctamente la designación del tiempo en el eje correspondiente, expresaron que **el tiempo transcurre** empezando en cero y continúa **sin interrupción tomando diversos valores**. Cuando pregunté ¿cuáles son esos valores? Respondieron que 1,2,3, etc. Lo cual corresponde a este nivel de razonamiento que considera la variación de la variable pero solo de un valor a otro, sin considerar los valores intermedios.
Posición	Variación continua a trozos	Los estudiantes, además de realizar gráficas en las que se observa correctamente la designación de la posición en el eje correspondiente, expresaron que **la posición varía** empezando en cero y continúa **sin interrupción tomando diversos valores**. Cuando pregunté ¿cuáles son esos valores? Respondieron que 1,2,3, etc. Lo cual corresponde a este nivel de razonamiento que considera la variación de la variable, pero solo de un valor a otro, sin considerar los valores intermedios

Nivel de razonamiento covariacional	Explicación
Covariación continua gruesa	Los estudiantes, al realizar gráficas en las que se observan **comportamientos crecientes y decrecientes**, sin huecos, parece que ponen en juego su pensamiento covariacional continuo grueso y tomando como argumento la respuesta anterior, se sabe que piensan en valores discretos.

	Se dan cuenta que, a mayor rapidez al caminar, la recta tiene mayor inclinación, y a menor rapidez de caminata, la recta tiene menor inclinación, con frases como: “paso rápido, a menor tiempo mayor distancia recorrida” “paso lento, a mayor tiempo menor distancia recorrida”

5.3 Resultados de la actividad 2 “El carrito”

La siguiente actividad realizada en este semestre fue “El carrito”. Con la experiencia previa, la docente fue más consciente de la importancia de ayudar a los estudiantes para que a partir de estos razonamientos se establezca con claridad ¿qué varía? y ¿cómo varía?

Se emplea un applet de GeoGebra con tres vistas: Algebraica, gráfica y la que contiene la simulación del carrito avanzando o retrocediendo. Los alumnos, con base en la observación, la manipulación de los deslizadores, los razonamientos emanados al proponer respuestas a cada tarea solicitada aunado a la discusión grupal, llegaron a respuestas uniformes. A continuación, se presenta la interpretación de los resultados obtenidos.

Tabla 7. Interpretación actividad “El carrito”

Variable	**Nivel de razonamiento variacional**	**Explicación**
Tiempo	Variación gruesa	Los estudiantes, **reconocieron** a la magnitud **tiempo** como un elemento **variable** en esta situación, al observar la animación en el applet de GeoGebra en repetidas ocasiones y notar que el deslizador de **t varía continuamente**. Posteriormente realizaron las gráficas en las que se observa correctamente la designación del tiempo en el eje correspondiente. Las preguntas que se contestan como parte de la actividad son de opción múltiple, por lo que no se profundiza sobre los valores que toma t en un recorrido completo.

		La acción mental “reconocer a t como variable”, es clara cuando expresan que el **valor de una variable aumenta o disminuye**, pero **piensan poco o casi nada que pueda tener valores mientras cambia**, ya que no hay evidencia para afirmar esta situación.
Distancia	Variación gruesa	Los estudiantes, **identificaron** a la **distancia** como una magnitud **variable** en la situación. Notaron que puede **aumentar o disminuir** al moverse el carrito y observar que este movimiento se puede graficar. Al elaborar sus gráficas con los parámetros solicitados, colocaron correctamente en el eje vertical a $h(t)$. Muy pocos indican escala en el eje, lo que permite asumir que los estudiantes **apenas piensan o no en los valores que toma la variable**, tal como lo hacen con el tiempo.

Nivel de razonamiento covariacional	**Explicación**
Coordinación gruesa de valores	Los estudiantes, al realizar gráficas en las que se observan correctamente **comportamientos crecientes y decrecientes**, parece que ponen en juego **la coordinación gruesa de valores**, ya que al parecer forman una imagen general de los valores de las cantidades que varían juntas, tal como "esta cantidad aumenta mientras esa cantidad disminuye". **Aún no imaginan que los valores individuales de las cantidades van juntos,** puesto que no hay expresiones que lo demuestren. Como la respuesta solo se interpreta a partir de la gráfica, no es posible asegurar que hayan alcanzado un nivel de razonamiento covariacional más alto. Esto debido a que al trazar las líneas rectas que describen las situaciones solicitadas, particularmente para cada valor S_0 y V, una

	cantidad importe de estudiantes requirieron la ayuda del applet para poder realizar la acción solicitada.

5.4 Resultados de la actividad 3 “Los elevadores”

El curso continúa con la aplicación de la actividad “los elevadores” en la cual se realizan cuestionamientos similares a los empleados en “el carrito”. La tecnología empleada es GeoGebra y los alumnos trabajan con un applet que les muestra la animación de dos elevadores que suben y bajan, las gráficas que se producen con el movimiento de los elevadores y la vista algebraica. La mecánica de trabajo es la misma, en equipos de 4-5 estudiantes plantean respuestas. En esta actividad los alumnos mostraron mayor agilidad para responder. Se obtuvieron los siguientes resultados:

Tabla 8. Interpretación actividad “Los elevadores”

Variable	Nivel de razonamiento variacional	Explicación
Tiempo	Variación gruesa	Los estudiantes, **reconocieron a la magnitud tiempo** como un **elemento variable** en esta situación, al observar la animación en el applet de GeoGebra en repetidas ocasiones y notar que el deslizador de t varía continuamente, posteriormente **realizaron las gráficas** en las que se observa correctamente la **designación del tiempo** en el eje correspondiente. Las preguntas que se contestan como parte de la actividad son de opción múltiple, lo que permite inducir a la respuesta correcta. Creo que los alumnos **reconocen a t como variable,** pero **aún no se percatan de los diferentes valores que puede tomar**, debido a que no se han planteado preguntas que permitan analizar de forma detallada los valores de t. Por el momento, solo hay evidencia de que los alumnos imaginan que el valor de **una variable aumenta o disminuye**

Altura	Variación gruesa	Los estudiantes, **identificaron a la distancia como una magnitud variable** en la situación. Notaron que puede **aumentar o disminuir** al moverse cualquiera de los elevadores y observar la gráfica del movimiento de los mismos. Al elaborar sus **gráficas**, colocaron correctamente en el eje vertical a $\boldsymbol{h(t)}$**.** Los alumnos son conscientes que la **altura aumenta o disminuye**, lo cual les resulta muy familiar al asociarlo con su experiencia personal.

Nivel de razonamiento covariacional	**Explicación**
Coordinación de valores	Los estudiantes, al realizar gráficas en las que se observan correctamente comportamientos crecientes y decrecientes, deberían de poner en juego la coordinación de valores, ya que coordina los valores de la variable t con los valores de la otra variable $h(t)$ con la anticipación de crear una colección discreta de pares $(t, h(t))$. Esto debido a que al trazar las líneas rectas que describen las situaciones solicitadas particularmente para cada valor $S_0\ y\ V$, una cantidad importe de estudiantes requirieron la ayuda del applet para poder realizar la acción solicitada.

5.5 Resultados de la actividad 4. “Funciones polinomiales con Arduino”

La siguiente actividad aplicada al grupo de estudio es una práctica llamada funciones polinomiales con Arduino, para ello los alumnos realizaron las acciones que a continuación se enlistan:

1. Descargaron los softwares Arduino y NetLogo, al igual que códigos de ejecución de los programas en ambos lenguajes

2. Conectaron el sensor ultrasónico a la placa Arduino Mega.

3. Conectaron la placa Arduino a la computadora

4. Realizaron los experimentos señalados en la práctica para obtener datos

5. Obtuvieron el gráfico cartesiano correspondiente usando NetLogo.

6. Exportaron datos a la hoja de cálculo y, según el comportamiento de estos, obtuvieron el modelo matemático con la misma hoja de cálculo

7. Contestaron las preguntas de su experimento. Todo lo desarrollaron en equipos de tres o cuatro integrantes.

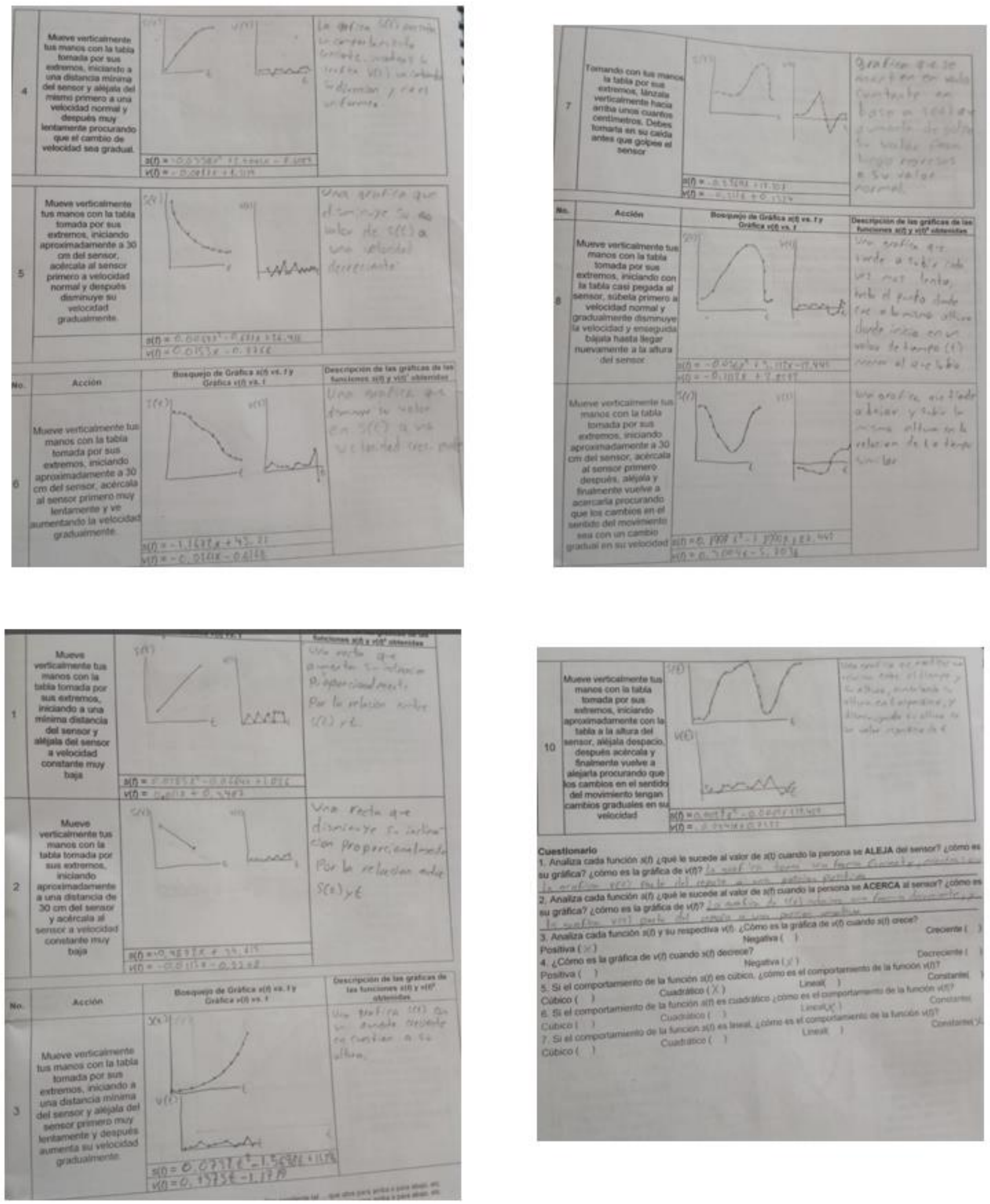


Figura 14. Respuestas de H14

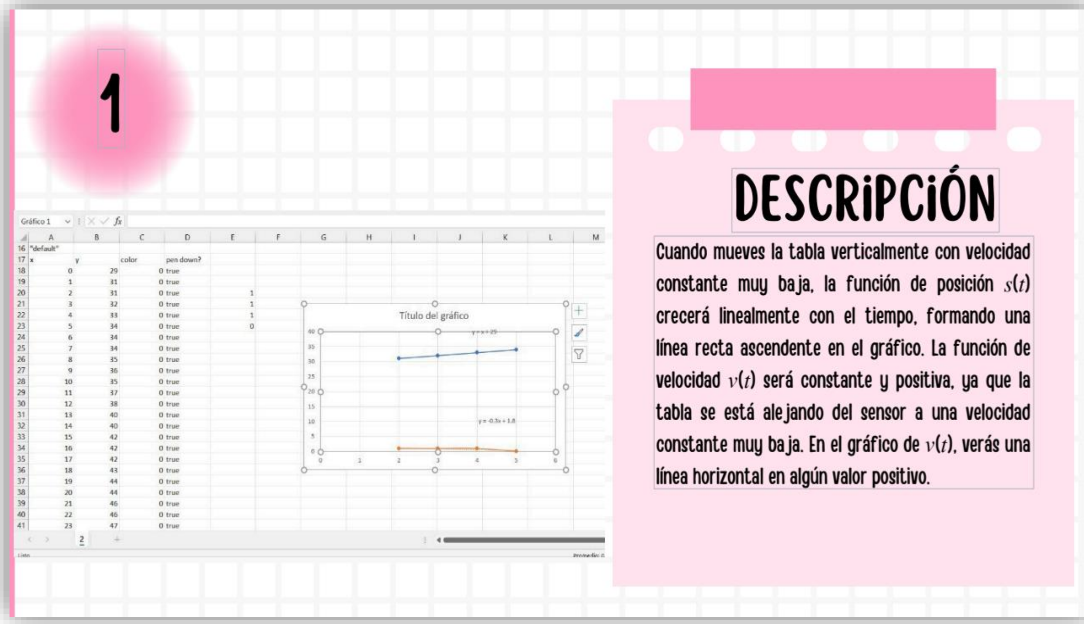


Figura 15. Descripción e interpretación del movimiento 1

Figura 16. Equipo C integrado por 5 estudiantes realizando el experimento

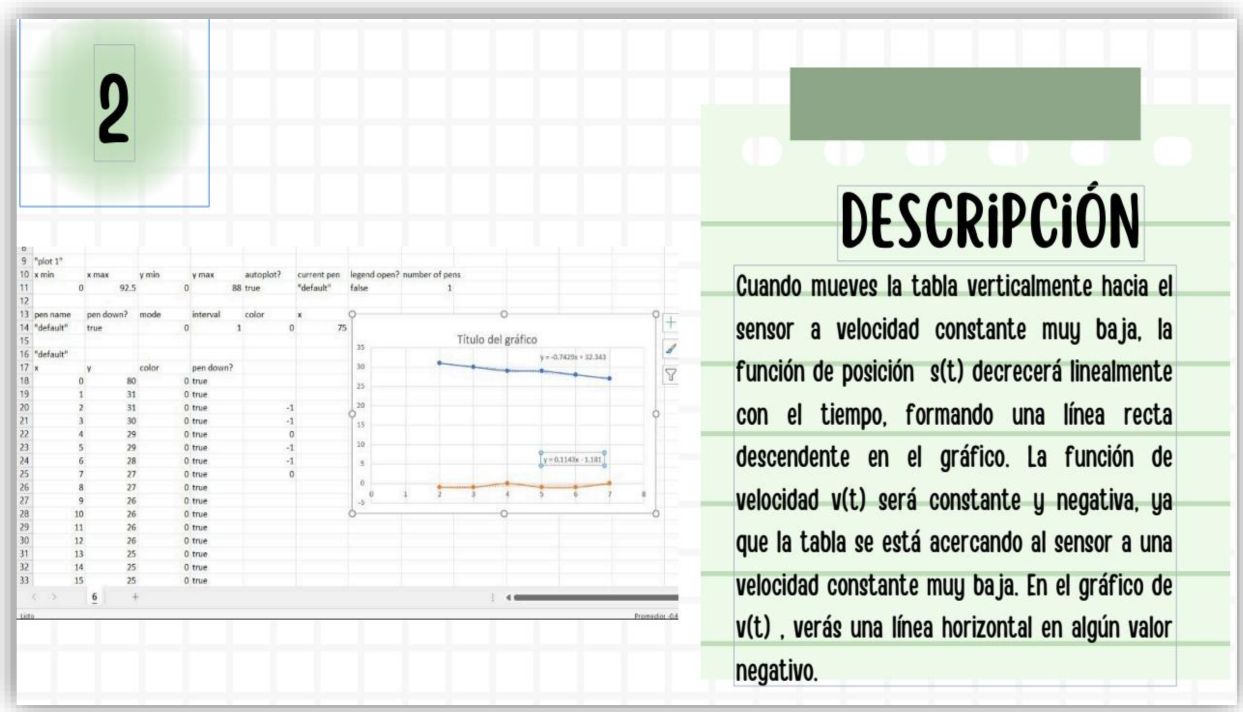


Figura 17. Descripción e interpretación del movimiento 2

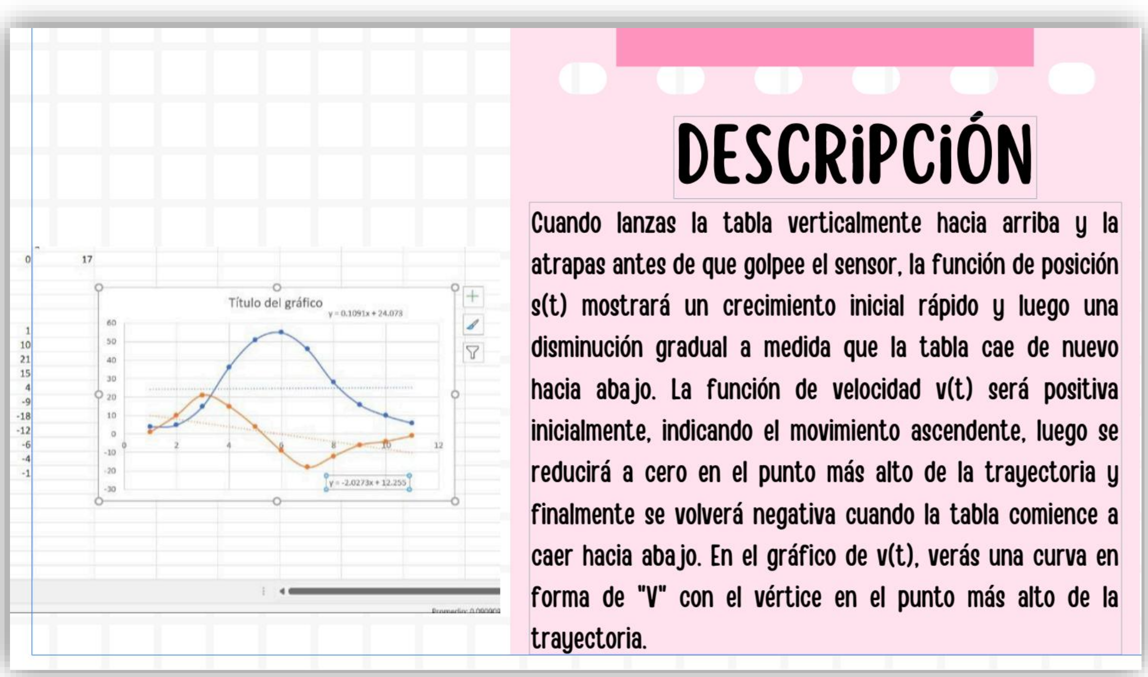


Figura 18. Descripción e interpretación del movimiento 7

Tabla 9 Interpretación actividad “Funciones polinomiales con Arduino”

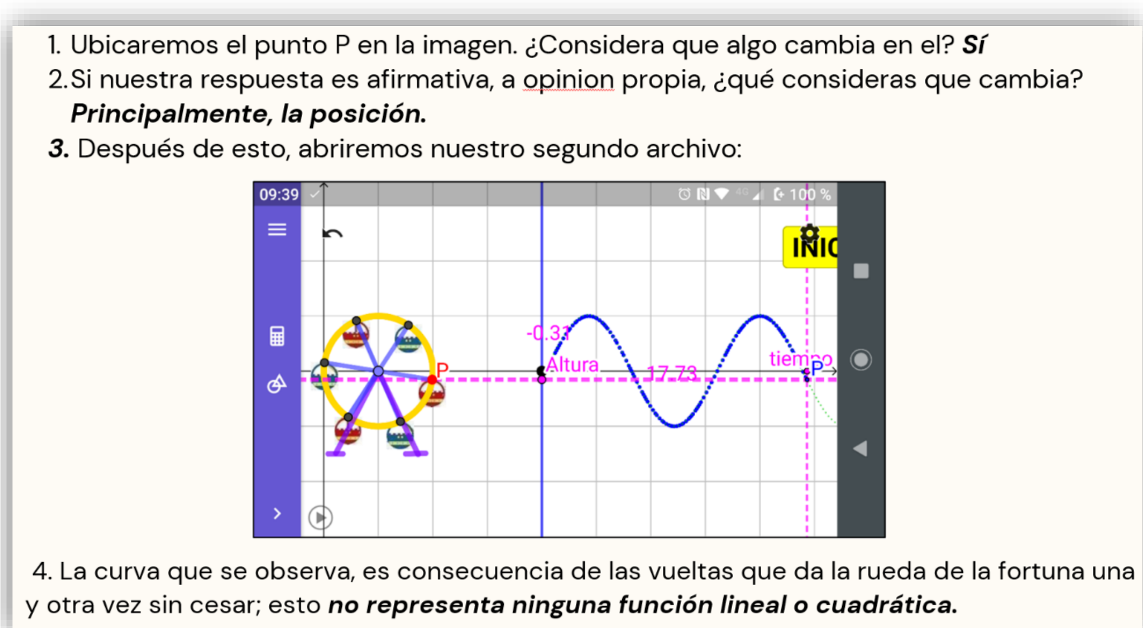
Variable	**Nivel de razonamiento variacional**	**Explicación**
Tiempo	Variación continua a trozos	Los estudiantes, lograron identificar a la variable tiempo como **una magnitud que cambia y toma diversos valores**, expresaron que el tiempo transcurre empezando en cero y continúa sin interrupción tomando diversos valores. A la pregunta: ¿cuáles son esos valores? respondieron que “cualquier valor de tiempo, por ejemplo 1, 2” Lo cual corresponde a este nivel de razonamiento que considera la variación de la variable, pero solo de un valor a otro, sin considerar los valores intermedios.
Posición	Variación continua a trozos	Los estudiantes, con base en su experiencia, expresaron que la **posición varía empezando en cualquier cantidad positiva y aumenta o disminuye sin interrupción** tomando diversos valores. A la pregunta ¿cuáles son esos valores? respondieron que valores positivos de distancia que aumentan o disminuyen y puede o no empezar en cero. Al solicitarles un ejemplo respondieron 1, 4, 5,3, 0… Lo cual corresponde a este nivel de razonamiento que considera la variación de la variable, pero solo de un valor a otro, sin considerar los valores intermedios

Nivel de razonamiento covariacional	**Explicación**
Covariación continua a trozos	Los estudiantes, al realizar la interpretación de las gráficas en las que se observan comportamientos crecientes y decrecientes, sin huecos, parece que ponen en juego su pensamiento covariacional continuo a trozos, puesto que expresan valores discretos.

	Se dan cuenta que las acciones de movimiento realizadas al acercar o alejar el objeto del sensor al transcurrir el tiempo, forman **una relación que se representa mediante gráficas que varían dependiendo de la intensidad de sus movimientos**, es decir, se forma un objeto multiplicativo. Aún no expresan con claridad que ambas variables cambian continuamente de valor considerando no solo valores enteros. Sin embargo, al preguntar cuál es el valor de la posición a un tiempo igual a 3.1, hacen alusión al valor que observan en la gráfica.

5.6 Resultados de la actividad 5. "La rueda de la fortuna".

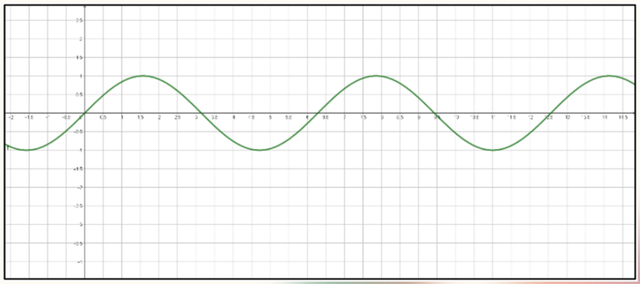
Esta actividad forma parte de la unidad 2 y aborda el estudio de las funciones periódicas. Se emplean 4 applets de GeoGebra, los cuales se cargan en al menos un dispositivo móvil con el que cada equipo cuenta con servicio de internet. Los alumnos trabajan de manera colaborativa en la solución de las preguntas después de observar lo que ocurre en las animaciones. Se muestran algunas partes de la actividad digitalizada por un equipo.


1. Ubicaremos el punto P en la imagen. ¿Considera que algo cambia en el? ***Sí***
2. Si nuestra respuesta es afirmativa, a opinion propia, ¿qué consideras que cambia? ***Principalmente, la posición.***
3. Después de esto, abriremos nuestro segundo archivo:

4. La curva que se observa, es consecuencia de las vueltas que da la rueda de la fortuna una y otra vez sin cesar; esto ***no representa ninguna función lineal o cuadrática.***

5. La relación de las variables de esta gráfica son: ***Altura (posición) y Tiempo.***
6. La variable dependiente es: ***La altura.***
7. La variable independiente es: ***El tiempo.***
8. El dominio de esta función: ***[0, 25]***
9. Su imagen es: ***[-4, 4]***
10. Una vez identificado esto, ¿cómo se representaría? ***Como ALTURA(TIEMPO)***

*Aquellas funciones que su comportamiento es repetitivo, se les denomina como **periódicas** y existe una infinidad de funciones de este tipo; una de las mas conocidas es la función sinusoidal o función seno (seno(x)). Su grafica es la siguiente:*



Si comparamos esta gráfica con la obtenida de la rueda de la fortuna, nos daremos cuenta que tienen una gran similitud pero el dominio de ambas es diferente.

La función que usaremos, es la siguiente: ***f(x) = radio * sen (x). x ≥ 0***

11. Reescribe la expresión anterior para expresarla en términos de variables:
h (t) = r sen, t ≥0
La altura del punto es positiva, esto nos da la posibilidad de emplear las siguientes preguntas:
12. ¿En que intervalos de tiempo la función **Altura(tiempo)** es positiva y creciente?
[0, 1.5]
13. ¿En que intervalos de tiempo la función **Altura(tiempo)** es positiva y decreciente?
[1.5, 3]
14. ¿En que intervalos de tiempo la función **Altura(tiempo)** es negativa y creciente?
[4.8, 5.2]
15. ¿En que intervalos de tiempo la función **Altura(tiempo)** es negativa y decreciente?
[3, 4.8]
16. ¿Cuanto tiempo tarda la rueda de la fortuna en dar una vuelta completa?
6.2 seg

ΔTiempo	ΔAltura	**Ms** = ΔAltura / Δtiempo	Ms
0.36	0.98	Ms = 0.98 / 0.36	2.72
0.08	0.18	Ms = 0.18 / 0.08	2.3
0.0000013457	0.0000029227	Ms = 0.0000029227 / 0.0000013457	2.17
0.0089	0.0194	Ms = 0.0194 / 0.0089	2.17
0.0038	0.0083	Ms = 0.0083 / 0.0038	2.18
0.00036	0.00079	Ms = 0.00079 / 0.00036	2.19
0.000010904	0.0000236828	Ms = 0.0000236828 / 0.000010904	2.17
0.0000001202626	0.0000002612008	Ms = 0.0000002612008 / 0.0000001202626	2.17

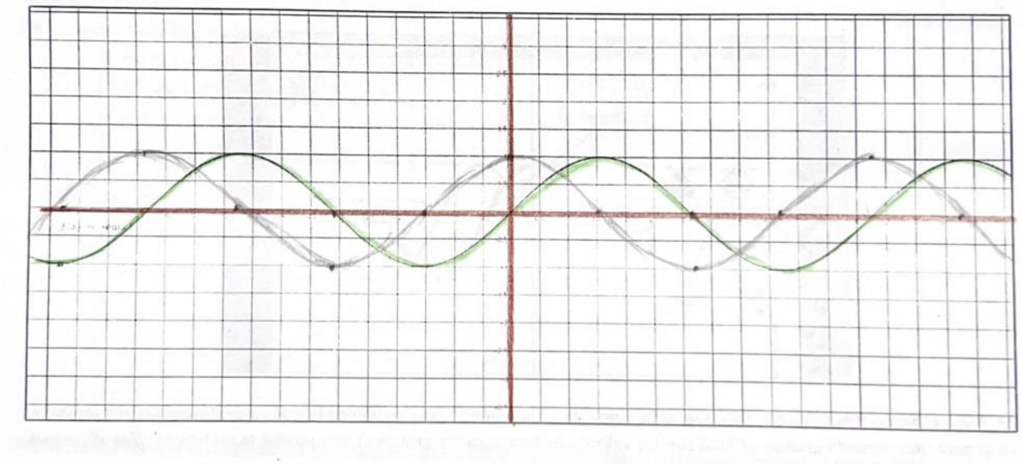
17. El último valor de *Tiempo* se califica como: ***Valor infinitamente pequeño***
18. El último valor de *Altura se califica como:* ***Valor infinitamente pequeño***
19. ¿Cuáles son los últimos dos valores obtenidos para Ms? ***Prácticamente iguales***
20. ¿Cómo se calificaría al ultimo valor de Ms en la tabla anterior? ***Valor pequeño***

22. ¿Cómo son los valores de esta segunda gráfica al tiempo que la gráfica de Altura(tiempo) decrece? ***Son negativos***
23. ¿Cómo son los valores de esta segunda gráfica al tiempo que la gráfica de Altura(tiempo) alcanza un maximo o minimo? ***Cero***
24. En la imagen tenemos una recta tangente de Altura(t). ¿cómo son sus valores al tiempo que la gráfica crece? ***Son positivos***
25. ¿Como son los valores de la pendiente de la tangente *Mt al tiempo que la grafica decrece?* ***Son negativos***
26. ¿Como son los valores de *Mt* al tiempo de que la grafica alcanza un máximo o mínimo? ***Cero***
27. ¿Cuales son las variables que dan origen a esta segunda grafica? ***La velocidad y el tiempo***
28. ¿Se considera que esta segunda grafica corresponda a una funcion? ***Sí***

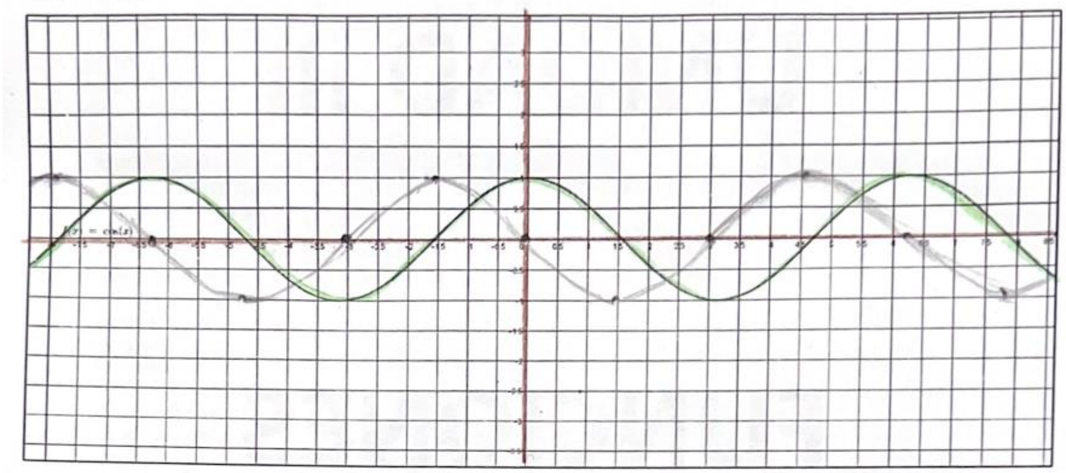
Figura 19. Actividad digitalizada del equipo A

Posteriormente, se solicita que imaginen y realicen el bosquejo de las gráficas de la velocidad instantánea de 3 funciones periódicas. Lo que se muestra a continuación en la figura

a) $f(x)$ = seno(x)



b) $f(x)$ = cos(x)



c) $f(x)$ = tan(x)

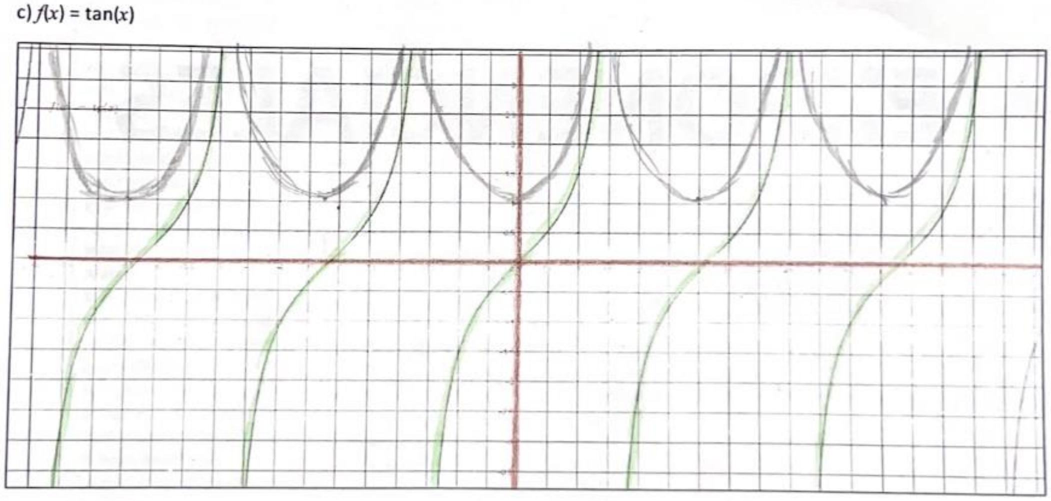


Figura 20. Producciones de H18

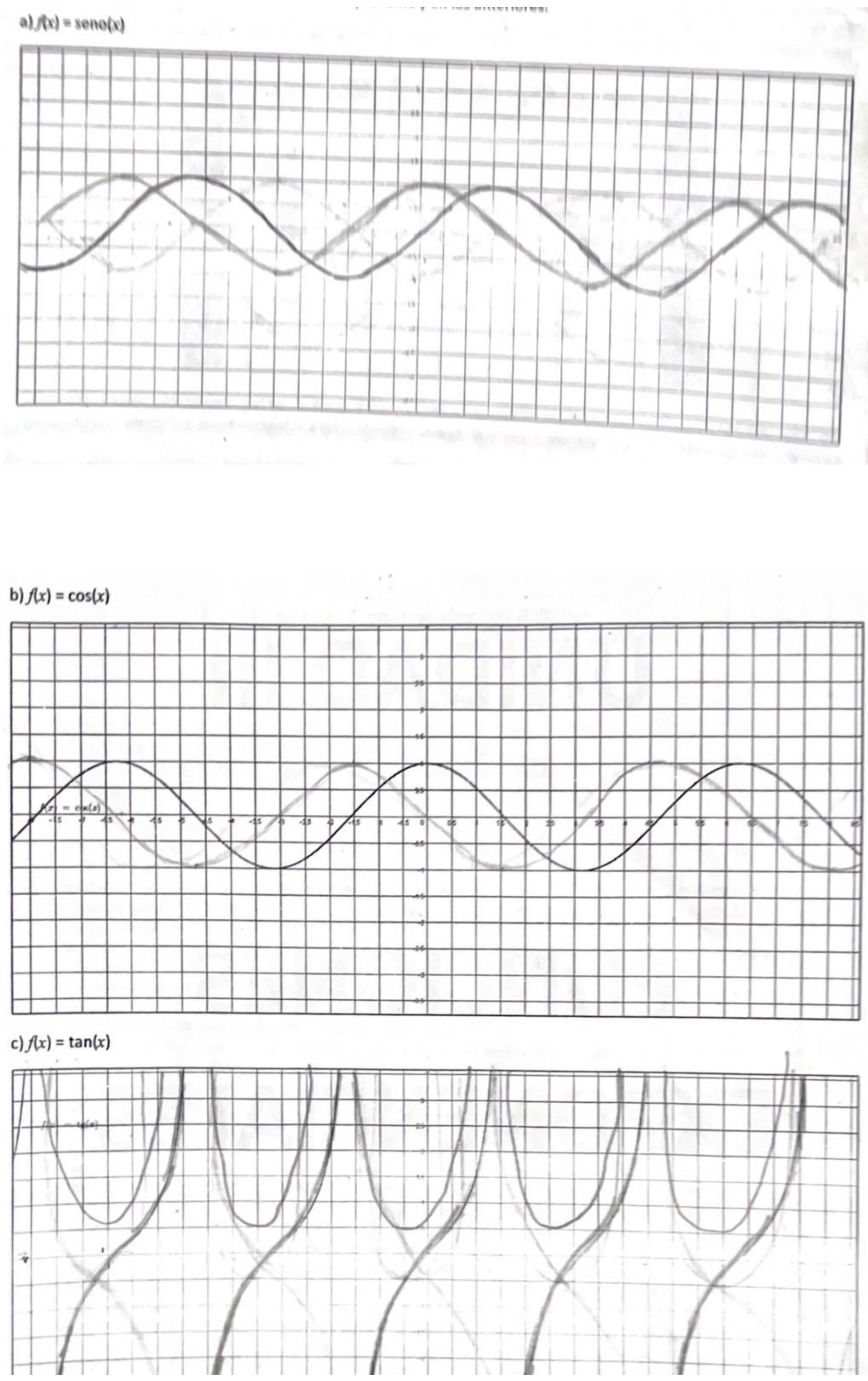


Figura 21. Producciones de H8

Tabla 10. Interpretación actividad "La rueda de la fortuna"

Variable	Nivel de razonamiento variacional	Explicación
Variable	**Nivel de razonamiento variacional**	**Explicación**
Tiempo	Variación continua suave	Los estudiantes, lograron identificar a la variable tiempo como **una magnitud que cambia y toma diversos valores**. Expresaron que el tiempo transcurre empezando en cero y continúa sin interrupción tomando diversos valores hasta llegar al último valor del intervalo determinado en el deslizador. Esto se pudo observar en la respuesta de la pregunta 8 (Figura 19), así como en las expresiones orales, al referirse al tiempo como la variable independiente cuyos valores se pueden establecer libremente especificando el intervalo de interés. Al preguntarles ¿cuáles son esos valores? respondieron que "todos los valores que se encuentran entre 0 y 25, incluyendo al 0 y al 25" Al solicitar explicar de una forma más específica, el alumno H18 mencionó que "las cantidades en cuestión son los números enteros y los decimales que no vemos pero que de manera continua se encuentran entre los límites del intervalo". Lo cual corresponde a este nivel de razonamiento que considera la variación de la variable de manera suave y continua.
Velocidad	Variación continua suave	Los estudiantes, con base en su experiencia al manipular el applet, expresaron que hay dos variables dependientes. La primera es la posición o altura de la canasta en la rueda de la fortuna, cuyo movimiento en relación al tiempo produce las primeras gráficas, y la segunda gráfica surge cuando se consideran las pendientes de las rectas tangentes a los puntos de la gráfica h(t), observándose la **velocidad, la cual varía**

		aumentando o disminuyendo sin interrupción al tiempo que la rueda de la fortuna gira, y en este recorrido la velocidad va tomando diversos valores. Al preguntar ¿cuáles son esos valores? respondieron que valores positivos y negativos, los cuales dependen del radio de la rueda de la fortuna. Al preguntar ¿cómo es eso? Explicaron, la altura de las ondas llega a un valor máximo igual a la altura de la canastilla y lo mismo pasa en el valor mínimo, es decir, cuando la canastilla llega a su posición más baja. Al solicitar un ejemplo, explicaron: Desde 4 hasta -4 considerando todos los valores intermedios, apoyando esta descripción con el movimiento continuo del dedo, trazando una curva periódica imaginaria en el aire. En adición, fueron capaces de trazar las gráficas de la velocidad de las funciones $sen(x), \cos(x)\ y \tan(x)$ de manera continua.

5.7 Resultados de la actividad 6. “Panel Solar”.

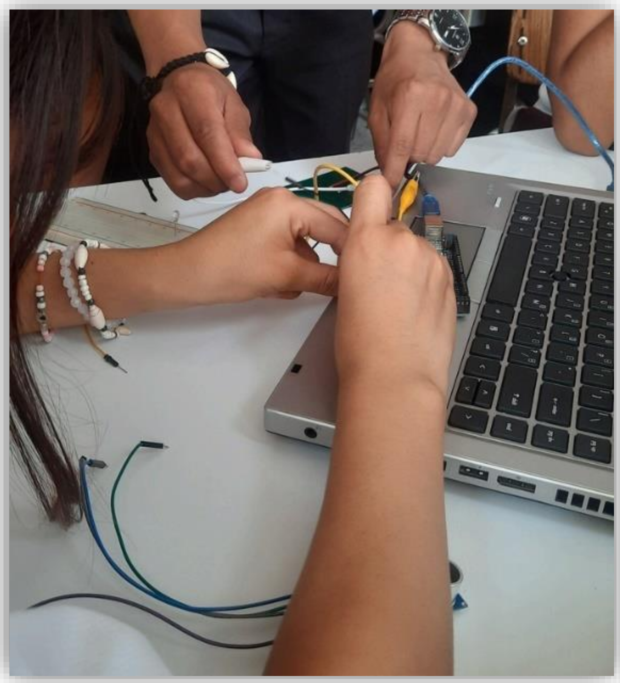
Los objetivos planteados son**:**

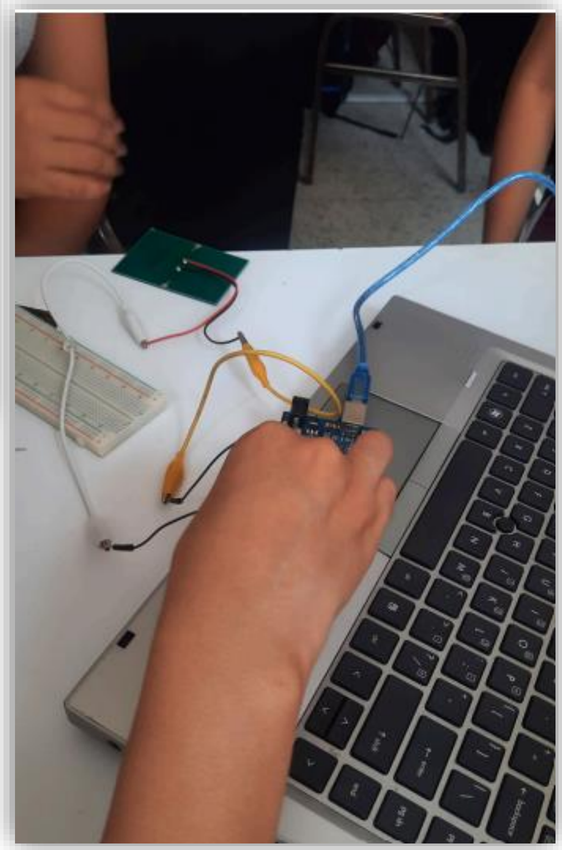
1. Fortalecer la aplicación de las funciones periódicas a fenómenos físicos relacionados con el tiempo.

2. Destacar el carácter periódico de las funciones trigonométricas y de su velocidad instantánea de cambio.

Así como generar interés en el uso de fuentes limpias para la producción de energía eléctrica.

A continuación, se muestran imágenes de los estudiantes realizando el experimento y las descripciones de las actividades realizada por el equipo B integrado por H4, H8, H10, H21 y H28.





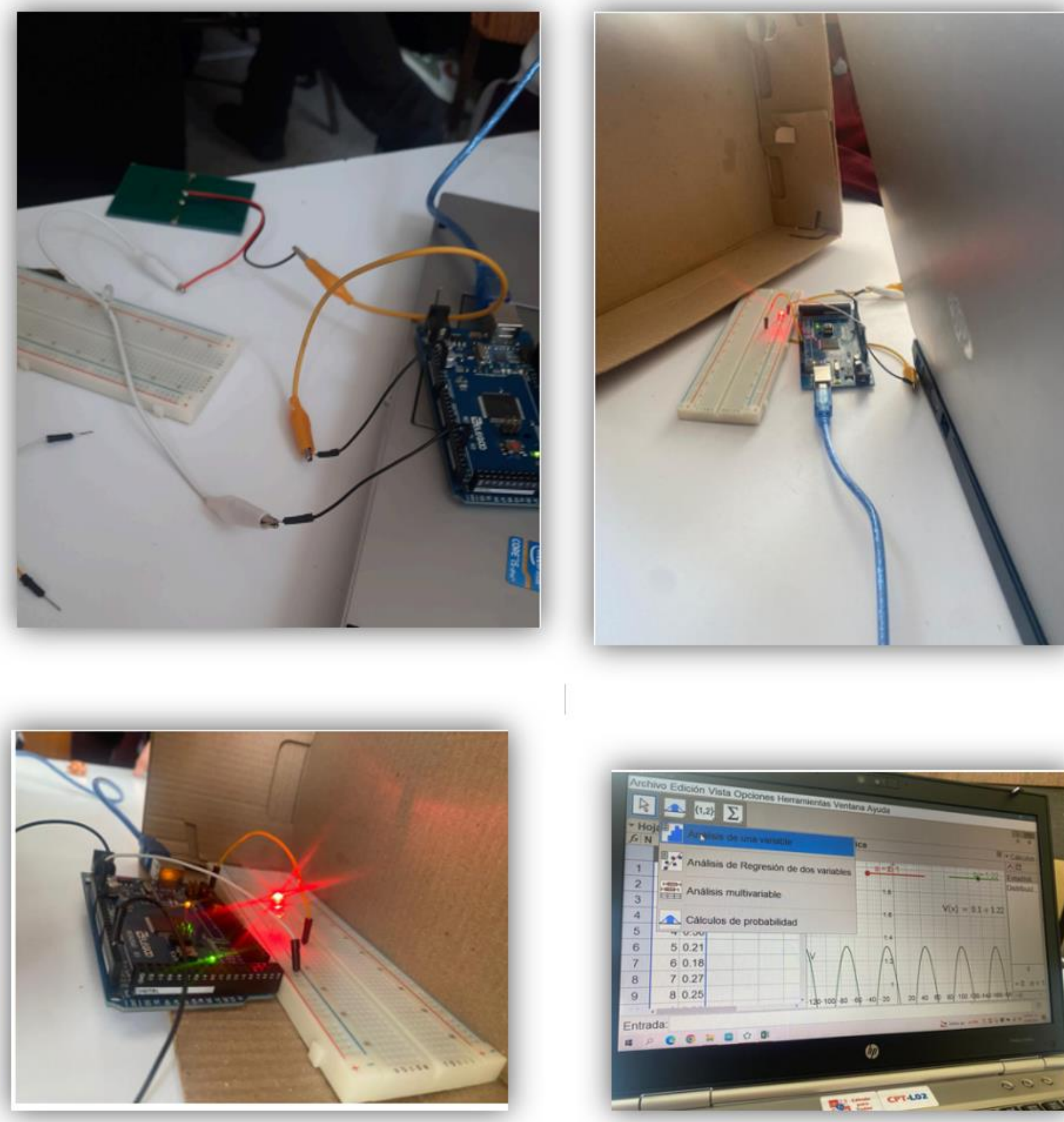


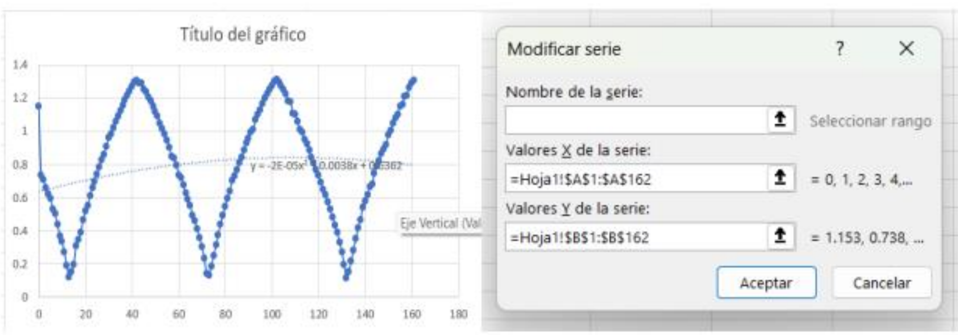
Figura 22. Diferentes momentos del experimento realizado por el equipo B

DATOS EN EXCEL

1.-DATOS DEL PANEL SOLAR

6	0.533
7	0.503
8	0.44
9	0.371
10	0.337
11	0.269
12	0.191
13	0.122
14	0.152
15	0.196

2. Agregamos los datos de la columna A en valores en X y los datos de la columna B en valores en Y. Para genera el primer grafico de voltaje contra tiempo



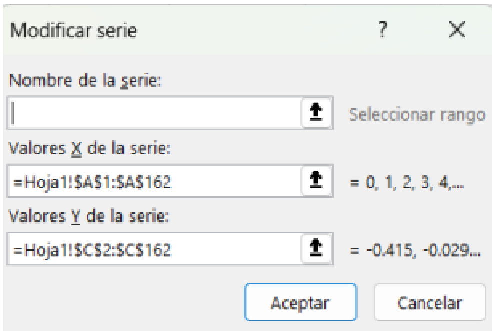
3. Vamos sacando la pendiente con la siguiente fórmula para posteriormente arrastrarla la formula a todos sus lugares y generar una nueva fila de valores que corresponden a la pendiente.

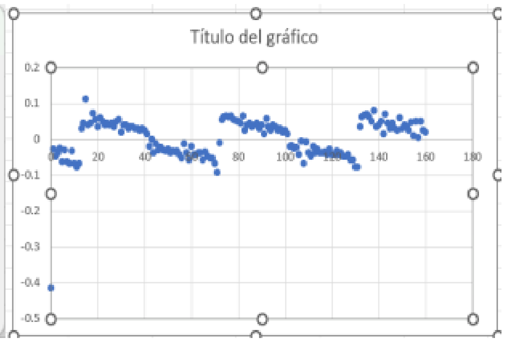
SUMA =(B2-B1)/(A2-A1

	A	B	C
1	0	1.153	
2	1	0.738	A1)

.

4. Una vez tengamos los valores de la pendiente insertamos un nuevo gráfico, en los valores de X arrastramos los datos de la columna A y en los valores en Y, arrastramos los valores de la columna C que pertenecen a los valores de la pendiente. De esta manera estamos obteniendo el grafico de velocidad contra tiempo.





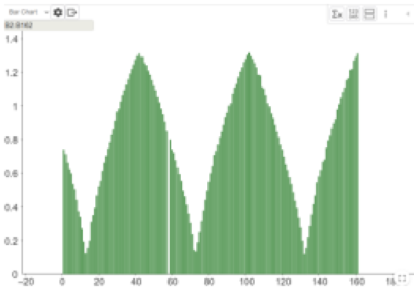
DATOS CON GEOGEBRA

1.Pegamos nuestros datos recolectamos por nuestro panel solar, en la hoja de calculo que nos proporciona GeoGebra.

	A	B	C	D
1	0	1.15		
2	1	0.74		
3	2	0.71		
4	3	0.66		
5	4	0.62		
6	5	0.6		
7	6	0.53		

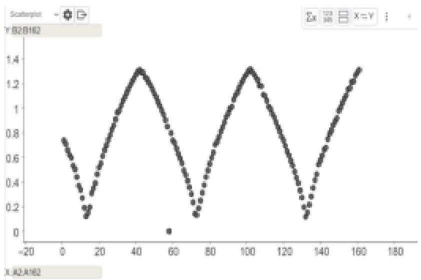
2.Seleccionamos todos los datos recolectamos con nuestro panel solar, para con estos seleccionar la opción: análisis de una variable, estos nos va a generar una gráfica.

	A	B
154	153	1.08
155	154	1.11
156	155	1.15
157	156	1.16
158	157	1.21
159	158	1.22



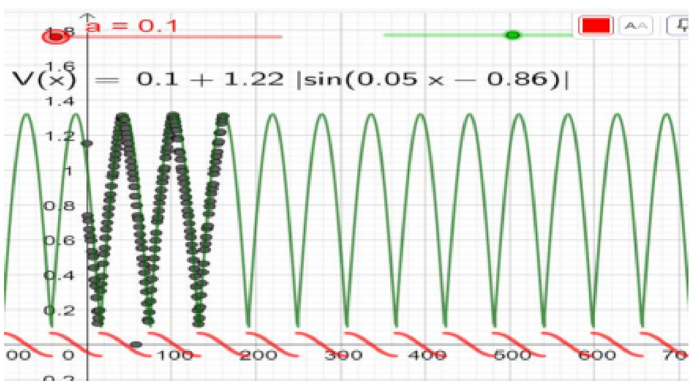
3. Volvemos a seleccionar todos los datos recolectados con nuestro panel solar pero esta vez seleccionamos la opción análisis de regresión de dos variables.

Esto nos va a generar esta grafica



4. copiamos esta gráfica y la pegamos a nuestro grafico principal proporcionado por la profesora.

Y con los deslizadores trataremos que estos puntos estén exactamente encima de donde pasa la grafica



5. Finalmente seleccionamos la opción: vista algebraica para observar los modelos matemáticos de las dos graficas

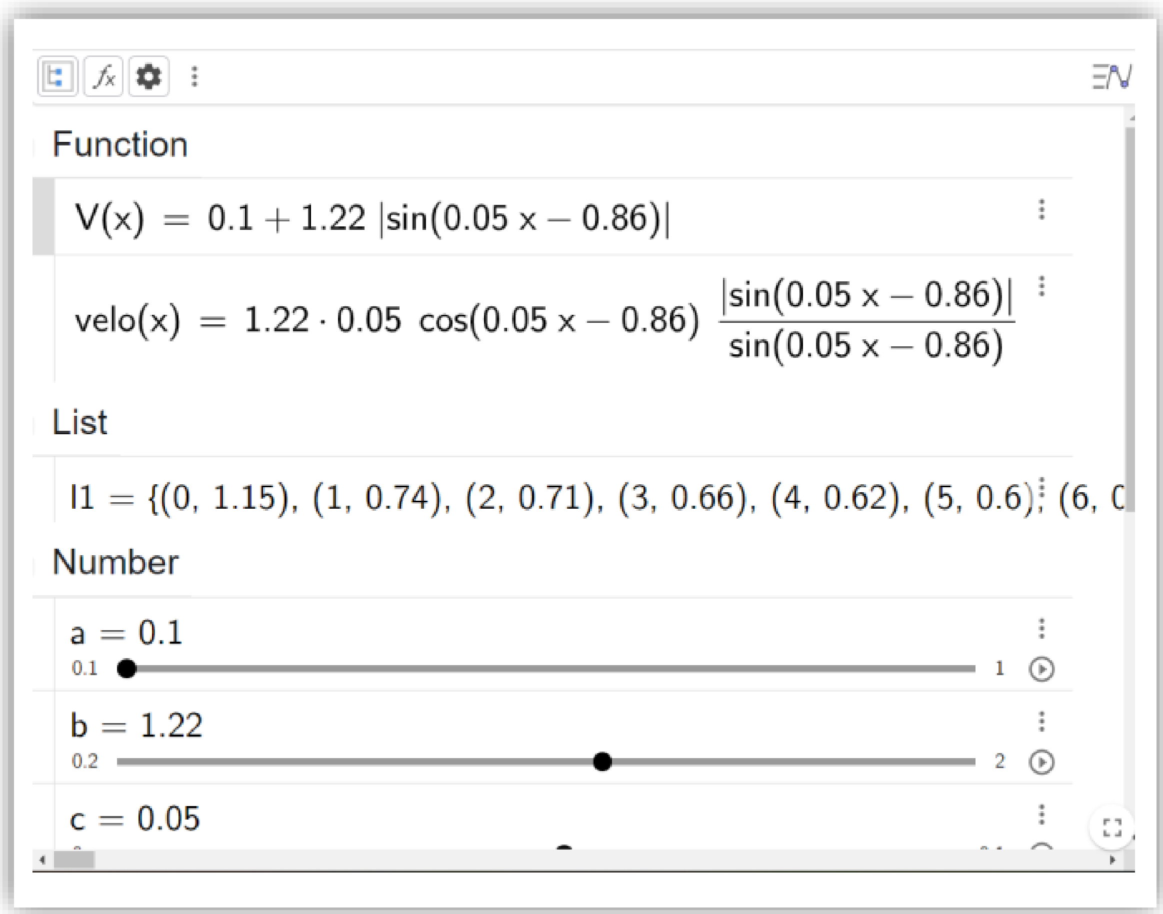
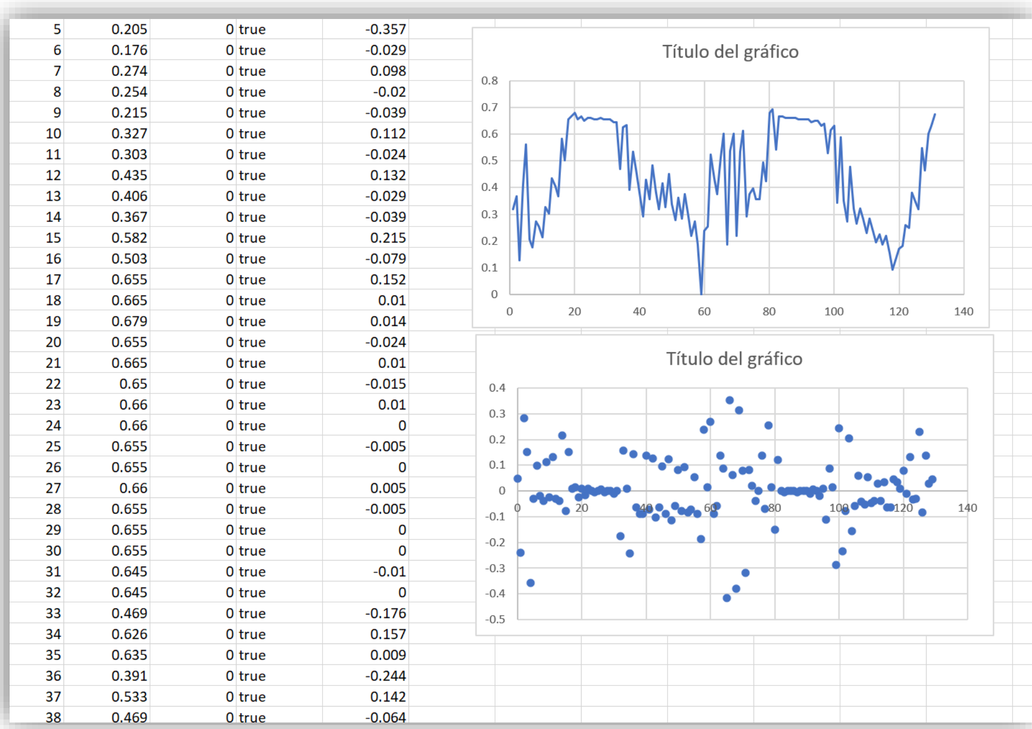
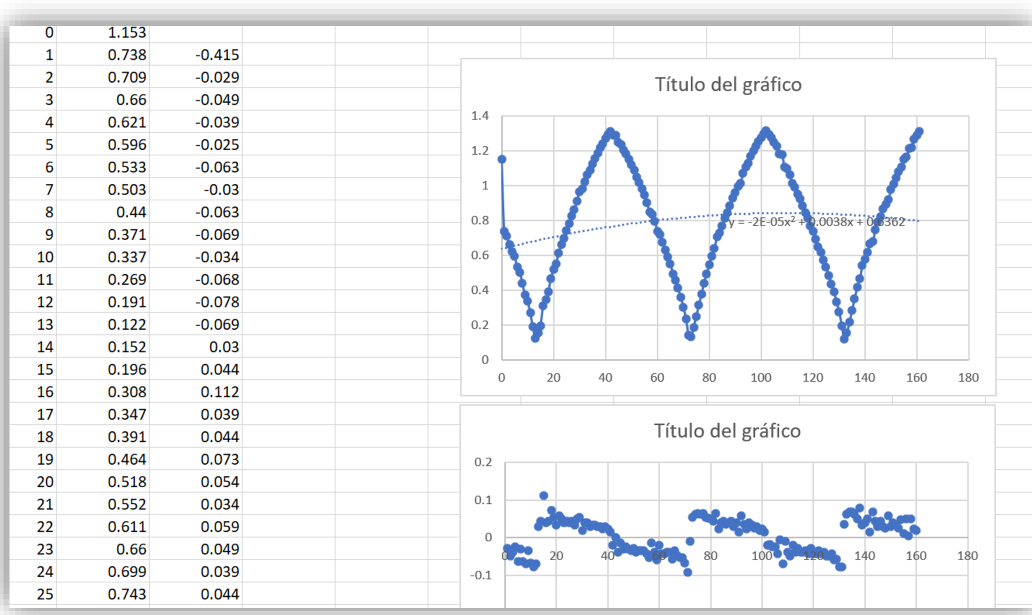


Figura 23. Producciones digitales del equipo B mostrando el desarrollo de la modelación de las funciones Voltaje y Velocidad en Excel y GeoGebra.

Es importante mencionar que solo el equipo B logró obtener los datos de manera precisa, el resto de los equipos por cuestiones técnicas, como falta de condiciones de oscuridad en los experimentos, obtuvieron datos que producían gráficas un poco distorsionadas, se muestran ambos casos en la figura 24. Por lo cual se decidió compartir los datos del equipo para la modelación en GeoGebra.



5	0.205	0	true	-0.357
6	0.176	0	true	-0.029
7	0.274	0	true	0.098
8	0.254	0	true	-0.02
9	0.215	0	true	-0.039
10	0.327	0	true	0.112
11	0.303	0	true	-0.024
12	0.435	0	true	0.132
13	0.406	0	true	-0.029
14	0.367	0	true	-0.039
15	0.582	0	true	0.215
16	0.503	0	true	-0.079
17	0.655	0	true	0.152
18	0.665	0	true	0.01
19	0.679	0	true	0.014
20	0.655	0	true	-0.024
21	0.665	0	true	0.01
22	0.65	0	true	-0.015
23	0.66	0	true	0.01
24	0.66	0	true	0
25	0.655	0	true	-0.005
26	0.655	0	true	0
27	0.66	0	true	0.005
28	0.655	0	true	-0.005
29	0.655	0	true	0
30	0.655	0	true	0
31	0.645	0	true	-0.01
32	0.645	0	true	0
33	0.469	0	true	-0.176
34	0.626	0	true	0.157
35	0.635	0	true	0.009
36	0.391	0	true	-0.244
37	0.533	0	true	0.142
38	0.469	0	true	-0.064



0	1.153	
1	0.738	-0.415
2	0.709	-0.029
3	0.66	-0.049
4	0.621	-0.039
5	0.596	-0.025
6	0.533	-0.063
7	0.503	-0.03
8	0.44	-0.063
9	0.371	-0.069
10	0.337	-0.034
11	0.269	-0.068
12	0.191	-0.078
13	0.122	-0.069
14	0.152	0.03
15	0.196	0.044
16	0.308	0.112
17	0.347	0.039
18	0.391	0.044
19	0.464	0.073
20	0.518	0.054
21	0.552	0.034
22	0.611	0.059
23	0.66	0.049
24	0.699	0.039
25	0.743	0.044

Figura 24. Datos de voltaje obtenidos por los equipos D y B respectivamente

Además, se incluyen algunas respuestas plasmadas en los cuadernillos de trabajo, que proporcionan información sobre el dominio y el rango de la función, así como las gráficas de velocidad que modelaron después de la experimentación.

Contesta las siguientes preguntas:

1. ¿Cuáles son las variables en la gráfica de este experimento? Voltaje y tiempo

2. ¿Cuál es el dominio de la función que modela los datos que obtuviste? t [0, 164]

3. ¿Cuál es su imagen? v(t) [0.12, 1.31]

4. ¿En qué instantes del experimento aparecen los **PUNTOS SINGULARES** de la gráfica? Cuando el voltaje es 0

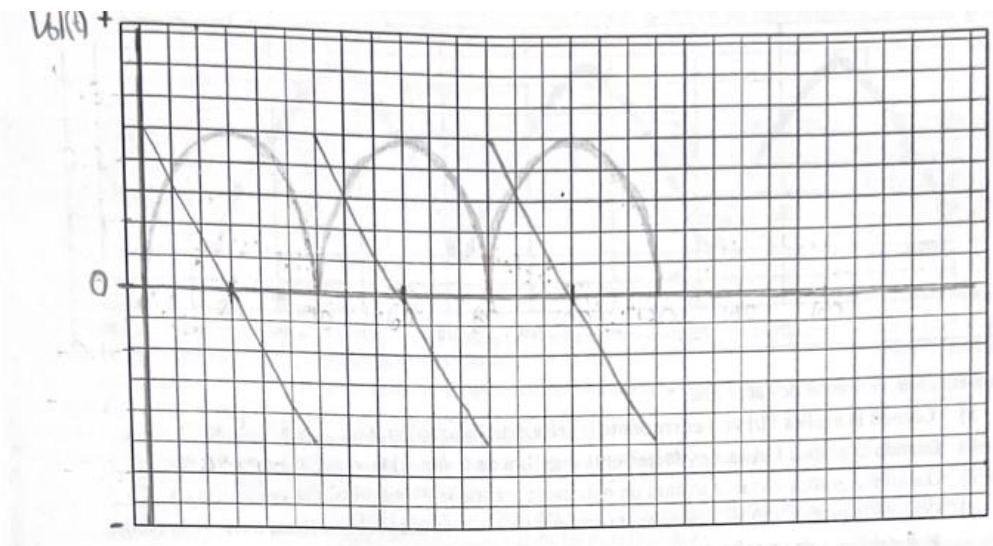
Contesta las siguientes preguntas:

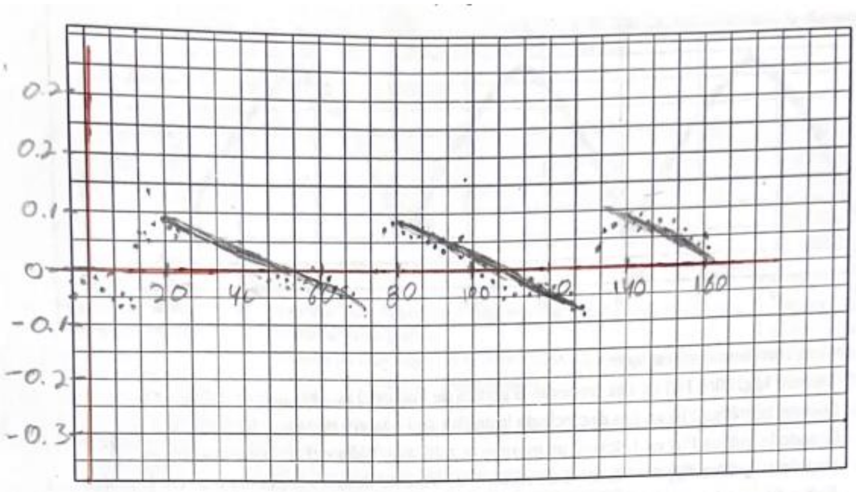
1. ¿Cuáles son las variables en la gráfica de este experimento? Voltajo y tiempo

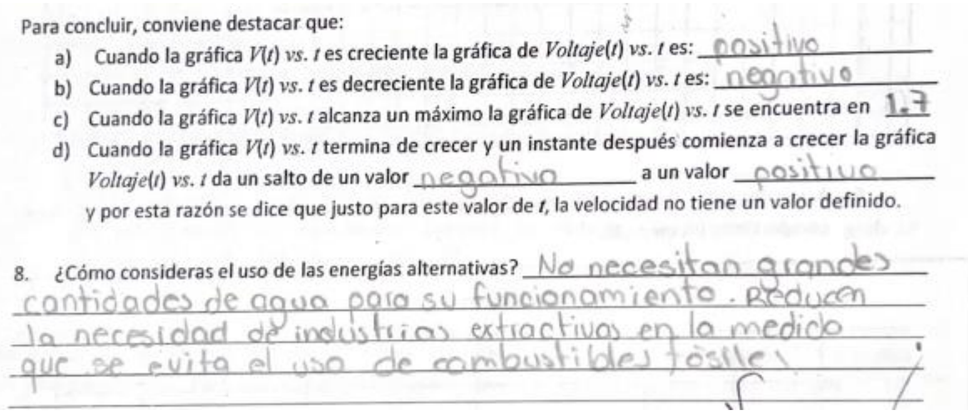
2. ¿Cuál es el dominio de la función que modela los datos que obtuviste? t [0, 16]

3. ¿Cuál es su imagen? v ∈ [0.12, 1.31]

4. ¿En qué instantes del experimento aparecen los **PUNTOS SINGULARES** de la gráfica? Cuando el voltaje es 0







Para concluir, conviene destacar que:

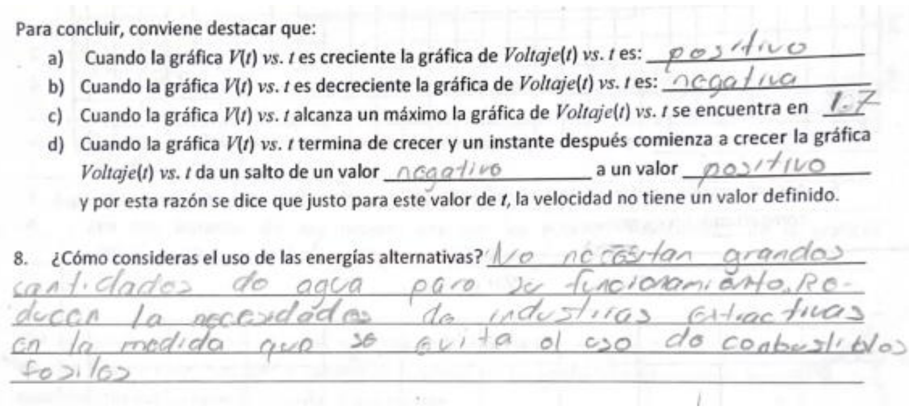
a) Cuando la gráfica $V(t)$ *vs. t* es creciente la gráfica de *Voltaje*(t) *vs. t* es: positivo

b) Cuando la gráfica $V(t)$ *vs. t* es decreciente la gráfica de *Voltaje*(t) *vs. t* es: negativo

c) Cuando la gráfica $V(t)$ *vs. t* alcanza un máximo la gráfica de *Voltaje*(t) *vs. t* se encuentra en 1.7

d) Cuando la gráfica $V(t)$ *vs. t* termina de crecer y un instante después comienza a crecer la gráfica *Voltaje*(t) *vs. t* da un salto de un valor negativo a un valor positivo y por esta razón se dice que justo para este valor de *t*, la velocidad no tiene un valor definido.

8. ¿Cómo consideras el uso de las energías alternativas? No necesitan grandes contidades de agua para su funcionamiento. Reducen la necesidad de industrias extractivas en la medida que se evita el uso de combustibles fósiles



Para concluir, conviene destacar que:

a) Cuando la gráfica $V(t)$ *vs. t* es creciente la gráfica de *Voltaje*(t) *vs. t* es: positivo

b) Cuando la gráfica $V(t)$ *vs. t* es decreciente la gráfica de *Voltaje*(t) *vs. t* es: negativa

c) Cuando la gráfica $V(t)$ *vs. t* alcanza un máximo la gráfica de *Voltaje*(t) *vs. t* se encuentra en 1.7

d) Cuando la gráfica $V(t)$ *vs. t* termina de crecer y un instante después comienza a crecer la gráfica *Voltaje*(t) *vs. t* da un salto de un valor negativo a un valor positivo y por esta razón se dice que justo para este valor de *t*, la velocidad no tiene un valor definido.

8. ¿Cómo consideras el uso de las energías alternativas? No necesitan grandes cantidades de agua para su funcionamiento. Reducen la necesidades de industrias extractivas en la medida que se evita el uso de combustibles fosiles

Figura 25. Producciones de H18 y H26

Tabla 11. Interpretación actividad "Panel solar"

Variable	Nivel de razonamiento variacional	Explicación
Tiempo	Variación continua suave	Los estudiantes, lograron identificar a la variable tiempo como **una magnitud que cambia y toma diversos valores**. Expresaron que el tiempo transcurre empezando en cero y continúa sin interrupción tomando diversos valores, percatándose de que el tiempo transcurre libremente hasta cualquier cantidad positiva cada vez mayor. Los estudiantes son conscientes de que tienen el control del tiempo al detener el trazo de la gráfica en NetLogo cuando consideran que los datos obtenidos son suficientes. Esto se pudo observar en la realización del experimento con expresiones como "tenemos que reiniciar en cero porque ya son muchísimos valores" (refiriéndose a la cantidad de segundos transcurridos para la toma de datos), o la expresión "solo vamos a considerar valores desde cero hasta 150". Expresan correctamente el intervalo del tiempo en sus producciones escritas en sus cuadernos de trabajo, por ejemplo [0,161] es la respuesta a ¿cuál es el dominio de la función que modela los datos que obtuviste? En mi percepción, es claro que saben que el tiempo transcurre desde un valor inicial menor hasta un valor final mayor, pensando que esta variación se produce de manera continua.
Velocidad	Variación continua suave	Los estudiantes, con base en su experiencia al realizar el experimento, expresaron que hay dos variables dependientes. La primera es la cantidad de voltaje producido gracias al panel

		solar y la segunda gráfica surge cuando se consideran las pendientes de las rectas tangentes a los puntos de la gráfica v(t), observándose la **velocidad, la cual varía aumentando o disminuyendo sin interrupción** al tiempo que el led enciende y apaga de manera gradual, por lo tanto, la velocidad va tomando diversos valores. Al preguntar ¿cuáles son esos valores? respondieron que valores positivos y negativos, los cuales dependen de la intensidad del led y el momento en el cual se produce. Si el led está aumentado su intensidad, la velocidad es positiva, cuando llega a la máxima intensidad se observa un valor de velocidad cero y cuando empieza a disminuir la cantidad de luz producida la velocidad se vuelve negativa. Se solicitó mencionar ejemplos. La respuesta: Desde el valor de voltaje más alto que es aproximadamente 1.3, se tiene una velocidad positiva de 0.1 hasta el voltaje igual a 0.2 y es cuando se tiene una velocidad de -0.1, debemos considerar todos los valores intermedios, apoyaron esta descripción con el movimiento continua del dedo, trazando la gráfica sobre la pantalla y expresan correctamente este intervalo en sus cuadernos de trabajo (Figura 25) Con estas afirmaciones se observa la variación continua suave.

Nivel de razonamiento covariacional	Explicación
Covariación continua suave	Los estudiantes, al realizar la interpretación de las gráficas en las que se observan comportamientos crecientes y decrecientes, sin huecos, ponen en juego su pensamiento covariacional continuo suave, puesto que expresan con claridad la relación que se forma entre el tiempo y el voltaje, así como la relación entre el tiempo y la velocidad de producción de voltaje, percatándose de que esta relación se produce de manera simultánea y sin interrupciones (solo al detener el experimento) Se dan cuenta que la intensidad de luz producida por el led se relaciona en todo momento con el tiempo, formado **una relación que produce gráficas que varían dependiendo de la intensidad de luz,** comprendiendo que ambas variables cambian continuamente de valor considerando no solo valores enteros, sino todos los valores que encuentran entre el valor menor y el mayor del intervalo de tiempo.

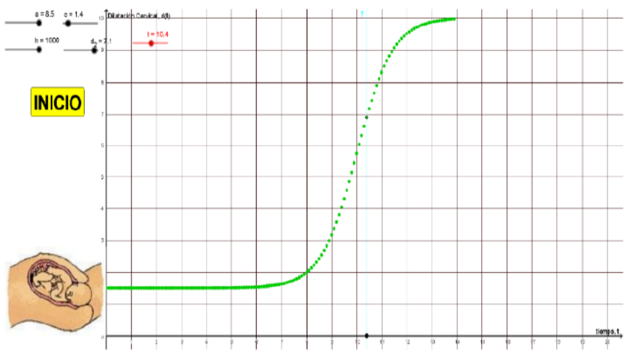
5.8 Resultados de la actividad 7. “Embarazo Adolescente”.

La dinámica de la actividad pretende reflexionar sobre la delicada problemática social y de salud que se genera en el nivel medio superior en relación al embarazo adolescente. Matemáticamente, se enfoca en funciones logísticas (o sigmoideas) y sus derivadas. Estas funciones se representan en el partograma, una herramienta indispensable para los obstetras. La actividad promueve la reflexión sobre la velocidad instantánea como un concepto matemático esencial, al tiempo que contribuye al desarrollo de habilidades socioemocionales y fomenta comportamientos responsables en temas de sexualidad y género.

El applet de GeoGebra presenta un partograma dinámico que ilustra gráficamente la dilatación cervical a lo largo del tiempo (Figura 10). Al hacer clic en el botón de Inicio, se activa una simulación que permite a los estudiantes explorar el gráfico y debatir sobre las variables involucradas al responder los cuestionamientos de las hojas de trabajo.

Se detallan cuatro etapas del trabajo de parto: la fase latente (antes de un incremento notable en la dilatación), la fase de aceleración (hasta alcanzar el punto de inflexión), la fase de máxima pendiente y la fase de desaceleración (posterior al punto de inflexión).

Los alumnos realizan investigaciones para conocer términos empleados en la actividad e interpretan la información presentada en el partograma de Freeman. Se muestran algunos ejemplos a continuación:



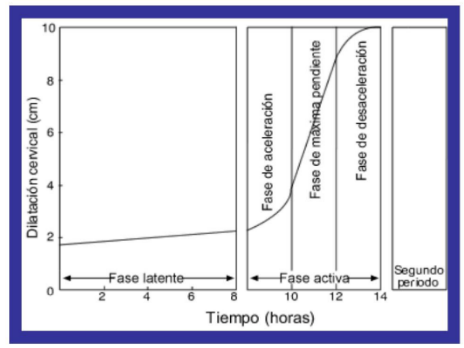


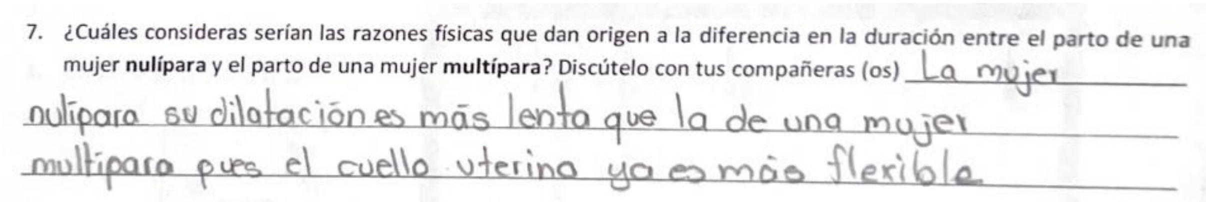
Figura 26. Partograma que describe la dilatación cervical al transcurrir el tiempo (GeoGebra) y partograma de Freeman

2. ¿Cuáles son las variables presentes en la gráfica de tu dispositivo? tiempo y dilatación del útero

4. Otro aspecto fundamental en este tema es que los médicos especialistas identifican, en el trabajo de parto, varias etapas. Examina la figura siguiente y anota los nombres de cada una de las fases.
fase latente, aceleración, de máxima pendiente y de desaceleración.

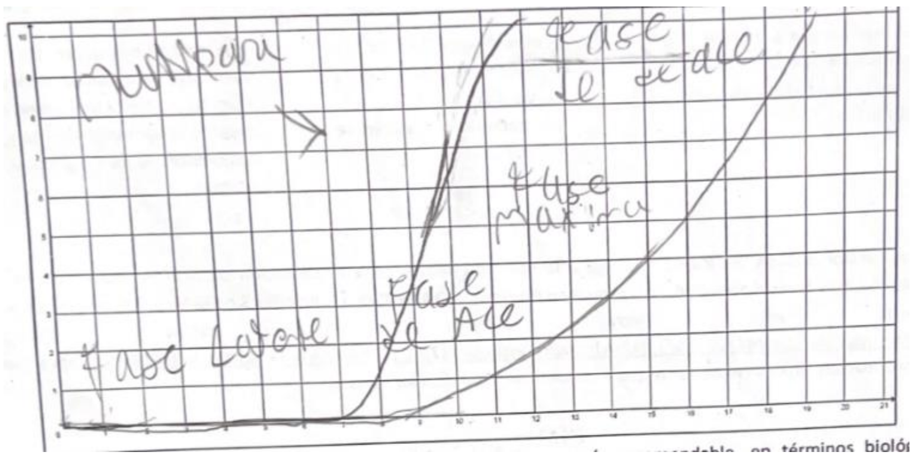
5. De acuerdo con el gráfico anterior, ¿cuál es la duración de cada una de las fases? Anota tu respuesta en la tabla siguiente (Recomendación: cuadricula el gráfico anterior):

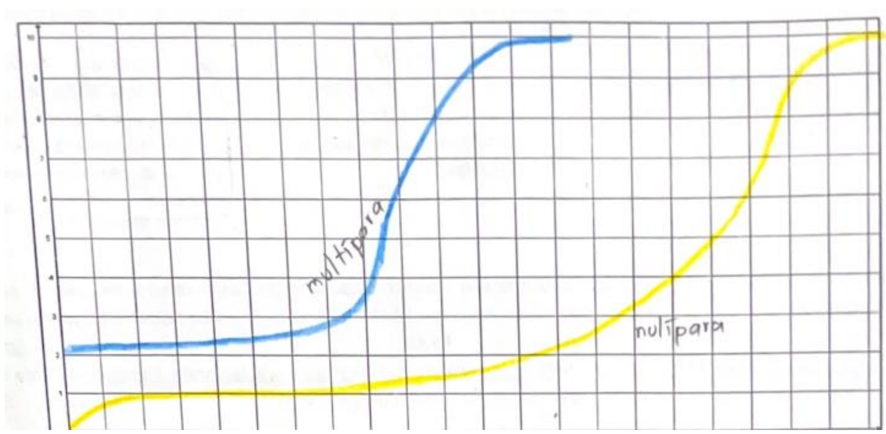
FASE	DURACIÓN (en horas)	Dilatación aproximada del cuello del útero
Latente	8 hrs	2.2 cm
Aceleración	2 hrs	2.1 - 3.9 cm = 1.8
Pendiente máxima	2 hrs	3.9 - 9 cm = 5.1
Desaceleración	2 hrs	9 - 10 cm = 1



7. ¿Cuáles consideras serían las razones físicas que dan origen a la diferencia en la duración entre el parto de una mujer **nulípara** y el parto de una mujer **multípara**? Discútelo con tus compañeras (os) La mujer nulipara su dilatación es más lenta que la de una mujer multipara pues el cuello uterino ya es más flexible

Figura 27. Respuestas de H18





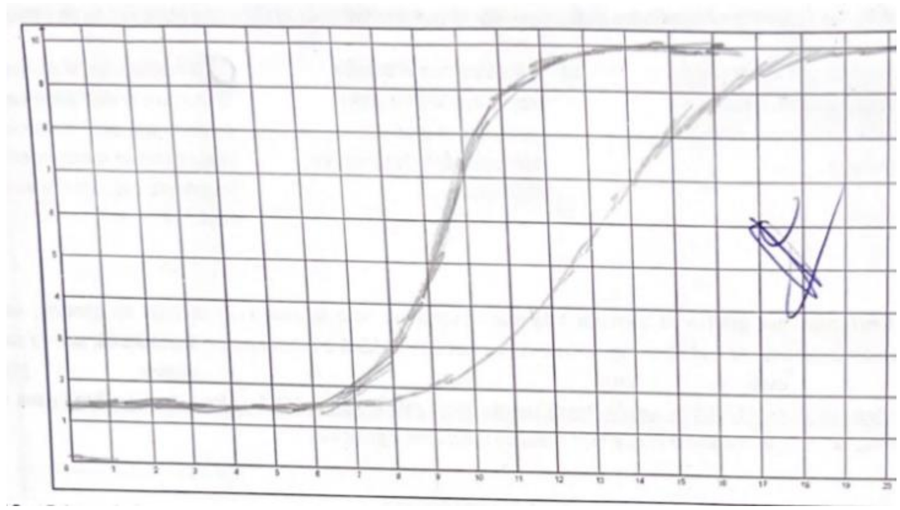
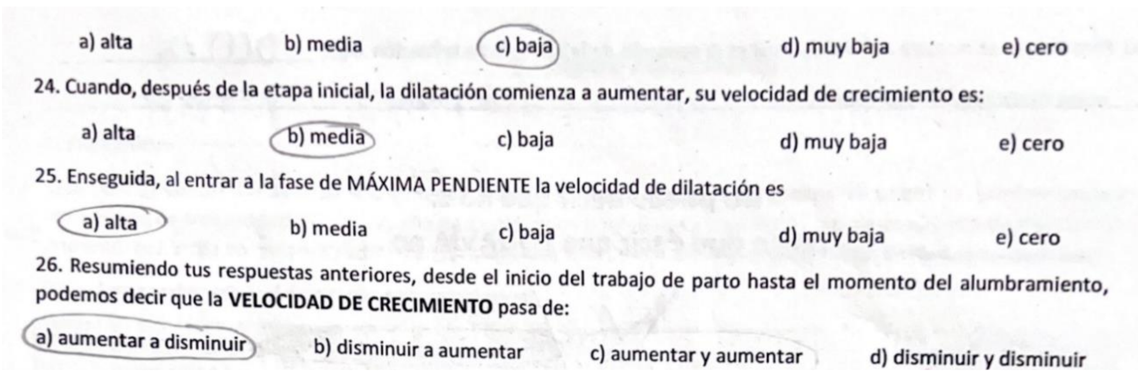


Figura 28. Partogramas de H3, H5 y H6.



a) alta b) media c) baja d) muy baja e) cero

24. Cuando, después de la etapa inicial, la dilatación comienza a aumentar, su velocidad de crecimiento es:

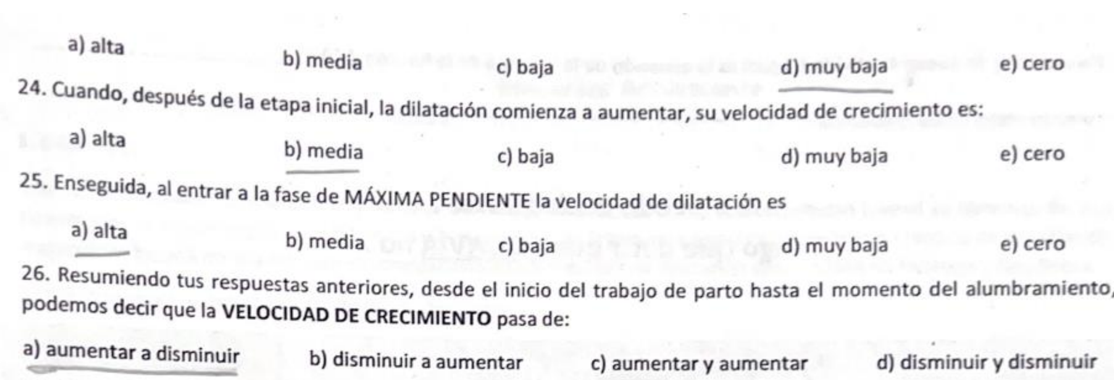
a) alta b) media c) baja d) muy baja e) cero

25. Enseguida, al entrar a la fase de MÁXIMA PENDIENTE la velocidad de dilatación es

a) alta b) media c) baja d) muy baja e) cero

26. Resumiendo tus respuestas anteriores, desde el inicio del trabajo de parto hasta el momento del alumbramiento, podemos decir que la **VELOCIDAD DE CRECIMIENTO** pasa de:

a) aumentar a disminuir b) disminuir a aumentar c) aumentar y aumentar d) disminuir y disminuir



a) alta b) media c) baja d) muy baja e) cero

24. Cuando, después de la etapa inicial, la dilatación comienza a aumentar, su velocidad de crecimiento es:

a) alta b) media c) baja d) muy baja e) cero

25. Enseguida, al entrar a la fase de MÁXIMA PENDIENTE la velocidad de dilatación es

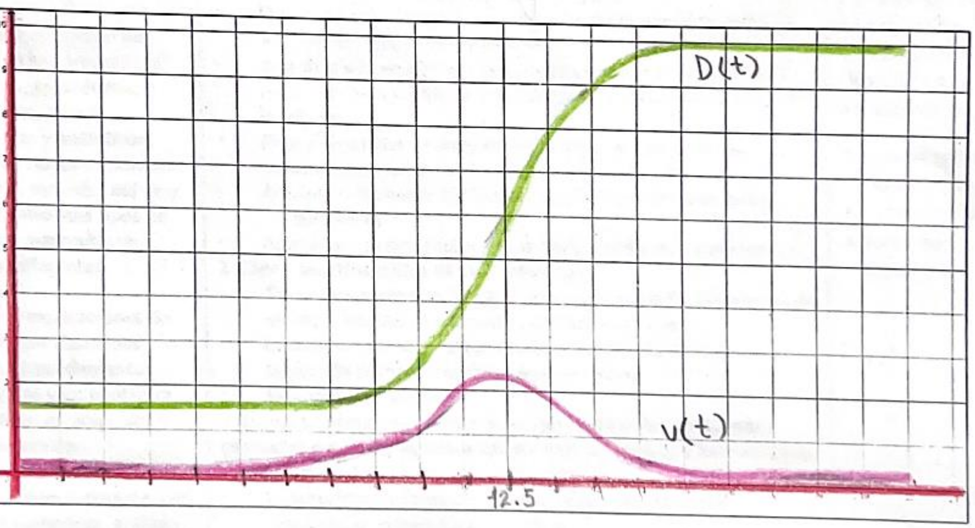
a) alta b) media c) baja d) muy baja e) cero

26. Resumiendo tus respuestas anteriores, desde el inicio del trabajo de parto hasta el momento del alumbramiento, podemos decir que la **VELOCIDAD DE CRECIMIENTO** pasa de:

a) aumentar a disminuir b) disminuir a aumentar c) aumentar y aumentar d) disminuir y disminuir

Figura 29. Respuestas de H5 y H20

27. Bosqueja una gráfica donde expreses cómo se comporta la velocidad de dilatación del cuello del útero a medida que se acerca el momento del alumbramiento, que coincida con la opción que seleccionaste en la pregunta anterior:



27. Bosqueja una gráfica donde expreses cómo se comporta la velocidad de dilatación del cuello del útero a medida que se acerca el momento del alumbramiento, que coincida con la opción que seleccionaste en la pregunta anterior:

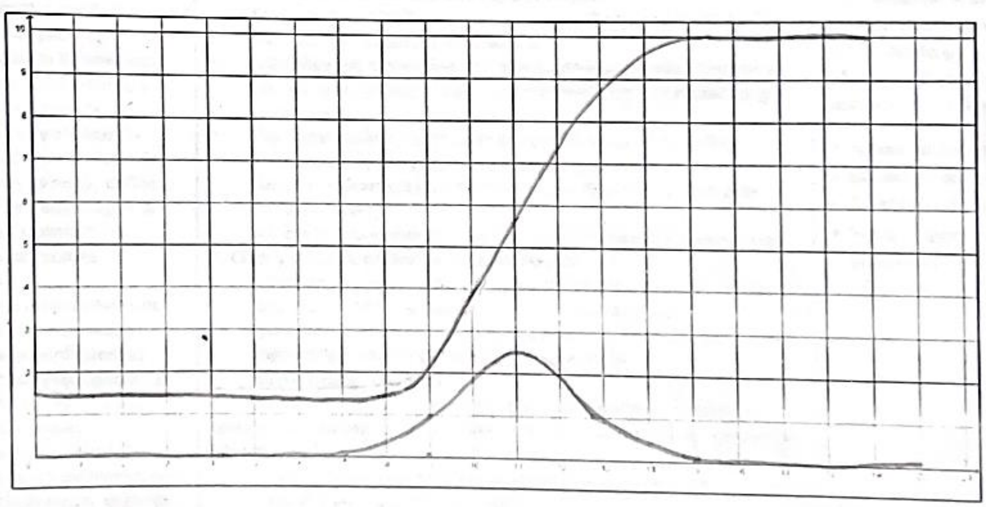
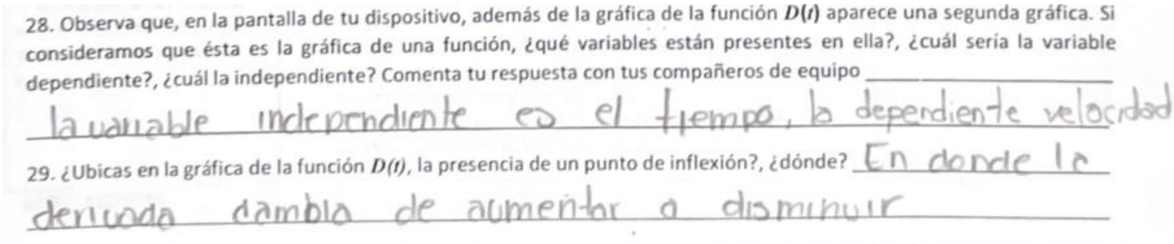


Figura 30. Gráfica de la velocidad de dilatación de H5 y H20

28. Observa que, en la pantalla de tu dispositivo, además de la gráfica de la función $D(t)$ aparece una segunda gráfica. Si consideramos que ésta es la gráfica de una función, ¿qué variables están presentes en ella?, ¿cuál sería la variable dependiente?, ¿cuál la independiente? Comenta tu respuesta con tus compañeros de equipo tiempo la variable independiente y dilatación la dependiente.

29. ¿Ubicas en la gráfica de la función $D(t)$, la presencia de un punto de inflexión?, ¿dónde? Sí, $t = 12.5$


28. Observa que, en la pantalla de tu dispositivo, además de la gráfica de la función $D(t)$ aparece una segunda gráfica. Si consideramos que ésta es la gráfica de una función, ¿qué variables están presentes en ella?, ¿cuál sería la variable dependiente?, ¿cuál la independiente? Comenta tu respuesta con tus compañeros de equipo la variable independiente es el tiempo, la dependiente velocidad

29. ¿Ubicas en la gráfica de la función $D(t)$, la presencia de un punto de inflexión?, ¿dónde? En donde la derivada cambia de aumentar a disminuir

Figura 31. Respuestas de H5 y H20

Tabla 12. Interpretación actividad "Embarazo adolescente"

Variable	**Nivel de razonamiento variacional**	**Explicación**
Tiempo	Variación continua suave	Los estudiantes lograron identificar a la variable tiempo como **una magnitud que cambia continuamente**. Esto se observó cuando responden la pregunta 2 y 28 de las hojas de trabajo, puesto que expresaron en la discusión de la clase que el tiempo transcurre empezando en cero y continúa creciendo sin interrupción hasta cualquier cantidad positiva cada vez mayor. Los estudiantes son conscientes que el deslizador del tiempo termina en un valor específico y se reinicia, por motivos de diseño de la aplicación, pero cuando mencionan que esta magnitud crece sin interrupción, en mi percepción manifiestan su pensamiento variacional continuo suave.
Dilatación Velocidad	Variación continua suave	Los estudiantes, expresaron que hay dos variables dependientes. Esto se observa en las respuestas 2 y 28. La primera es la **dilatación** del útero y la segunda es la **velocidad,** la cual pasa **de aumentar a disminuir sin interrupción** como se puede leer en la respuesta 29 de H20. Por su parte H5 identifica

		con claridad el valor de t en el cual se presenta el cambio de aumentar a disminuir (punto de inflexión). Al producirse la revisión grupal de la actividad los estudiantes identificaron que la velocidad inicial es cero, cuando empieza la dilatación en la fase latente la velocidad es baja, pasando a una velocidad media en la fase de aceleración, de manera continua pasa a la fase de máxima pendiente donde la velocidad es alta alcanzando un valor máximo, para comenzar a disminuir lentamente en la fase de desaceleración, hasta que se estabiliza, según lo expresado en clase y evidenciado desde la respuesta 23 a la 29. En mi opinión, los estudiantes muestran el nivel variación continua suave.

Nivel de razonamiento covariacional	**Explicación**
Covariación continua suave	Los estudiantes realizan las gráficas solicitadas. Se puede observar comportamientos crecientes y decrecientes, sin huecos en sus producciones (figuras 28 y 30). Posteriormente expresan con claridad la relación que se forma entre el tiempo y la dilatación, así como la relación entre el tiempo y la velocidad de dilatación, percatándose de que esta relación se produce de manera simultánea y sin interrupciones (solo al concluir el tiempo establecido en el deslizador). Se dan cuenta que la velocidad de la dilatación cervicouterina se relaciona en todo momento con el tiempo, formado **una relación que produce gráficas que pasan de aumentar a disminuir dependiendo del aumento del tiempo** (ver figura 19), comprendiendo que ambas variables cambian continuamente de valor considerando todos los valores que se encuentran entre cero y 20 (intervalo de tiempo del applet).

	Me parece que la descripción anterior, obtenida durante el desarrollo de la clase, es evidencia de que los estudiantes se encuentran en un nivel de covariación continuo suave.

Es relevante mencionar que, durante el desarrollo de la actividad, el grupo se mantuvo interesado, realizando intervenciones pertinentes y respetuosas. Me parece que el impacto del aprendizaje del proceso de la labor de parto, a pesar de que la mayor parte se abordó en términos de análisis matemático, es favorable para una decisión asertiva en lo que respecta al embarazo adolescente, ya que les permitió realizar una reflexión del significado e implicaciones de una situación de esta naturaleza, subrayando la importancia de postergar esta etapa de la vida hasta alcanzar una mayor madurez emocional, social y económica. A través de dinámicas participativas y el análisis grupal, los estudiantes fueron guiados a tomar conciencia de las responsabilidades y desafíos que conlleva ser padres a una edad temprana, promoviendo así una actitud responsable y un enfoque preventivo hacia el tema.

5.9 Resultados del Post test

Se muestran algunas de las respuestas a las preguntas 1, 9 y 10, así como su interpretación. También se presenta el comparativo del porcentaje de alumnos que contestaron correctamente a cada ítem en el pretest (primera columna) y en el post test (segunda columna).

El ítem **1** solicita describir cómo se mueve un objeto para obtener la gráfica mostrada. A diferencia del pretest, todos los estudiantes escribieron alguna descripción. Ante la diversidad de respuestas, se optó por clasificarlas según los niveles de razonamiento covariacional:

- Sin coordinación (7%)
  H6 y H11 tuvieron dificultades para formar una imagen de las variables que varían juntas. En sus respuestas no se puede observar que hayan logrado identificar correctamente a las variables inmersas en la situación, al igual que la relación que se forma entre ellas.

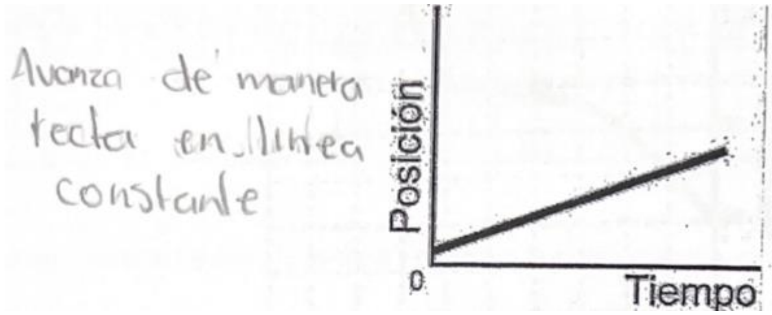


Figura 32. Respuesta de H6

- Precoordinación de valores (3%)

  En cuanto a H3, menciona el cambio en la posición, pero lo divide en dos momentos, primero medio lento y después más rápido, al parecer considera el tiempo cuando escribe “transcurriendo”. Se encuentra en este nivel porque observa la variación de ambas variables, pero expresa de manera incorrecta la forma en la que cambian ya que no logra sincronizar los cambios entre las variables.

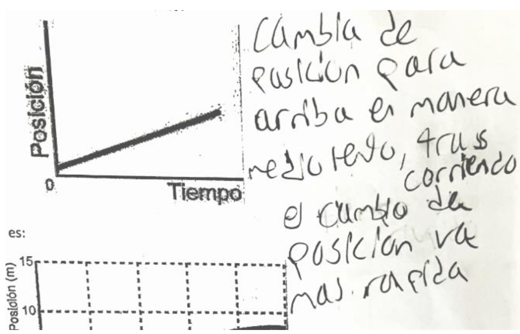


Figura 33. Respuesta de H3

- Coordinación gruesa de valores (18%)

  H15 considera inicialmente que la velocidad es constante, lo cual es correcto, sin embargo, en la siguiente parte del enunciado menciona que esa misma velocidad va aumentando conforme va subiendo, confundiendo el comportamiento de la variable velocidad con el de posición, por lo tanto, se encuentra en este nivel de razonamiento porque no coordina correctamente las variables involucradas, incluso no las menciona.

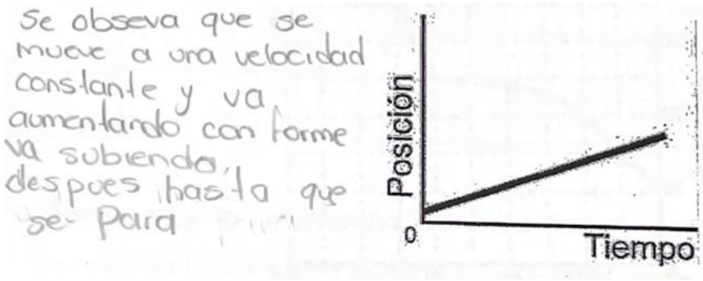


Figura 34. Respuesta de H15

H28 percibe la variación de ambas variables de manera simultánea al expresar “va ganando posición y tiempo”. En la siguiente parte de la expresión menciona que la velocidad “va incrementando” pero lo que aumenta es la posición, como lo refirió al inicio. Por lo tanto, consideramos que se encuentra en el nivel de coordinación gruesa.

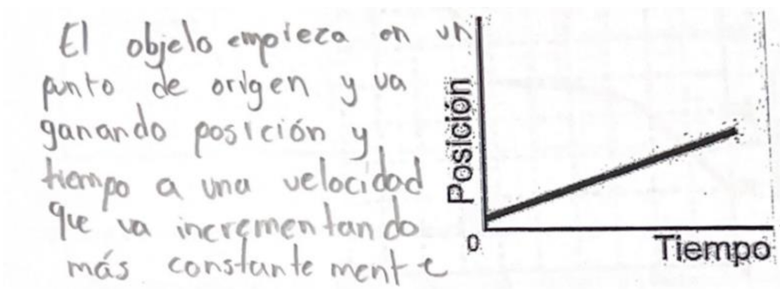


Figura 35. Respuesta de H28

Las respuestas de H9, H13 y H19 contienen rasgos similares, en las tres se lee que pueden identificar la variación, sin embargo, no lo hacen de manera coordinada. Aún confunden el comportamiento creciente de la variable posición con una velocidad creciente, evidenciando que no lograron separar la construcción de dichas variables.

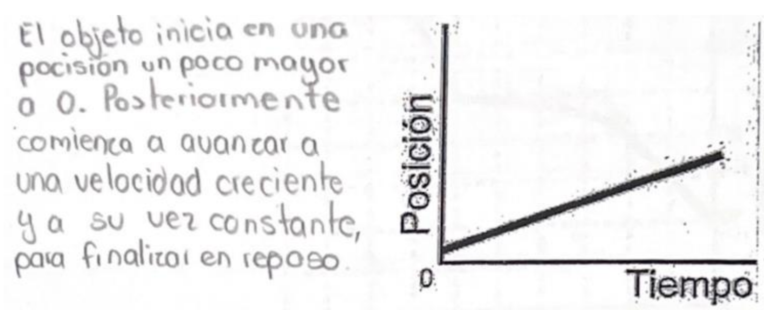


Figura 36. Respuesta de H9

- Coordinación de valores (29%)

  Este conjunto de alumnos expresa que el objeto se mueve a una velocidad constante, algunos incluyen que esta velocidad es positiva. Lo cual es correcto y es una muestra clara de que están coordinando el cambio en ambas variables. Cabe mencionar que las instrucciones del test solo solicitaban esta descripción, es probable que los estudiantes con esta respuesta se limitaron a describir el movimiento en términos del tipo de velocidad. Estos jóvenes son H1, H2, H10, H12, H16, H20, H24 y H26.

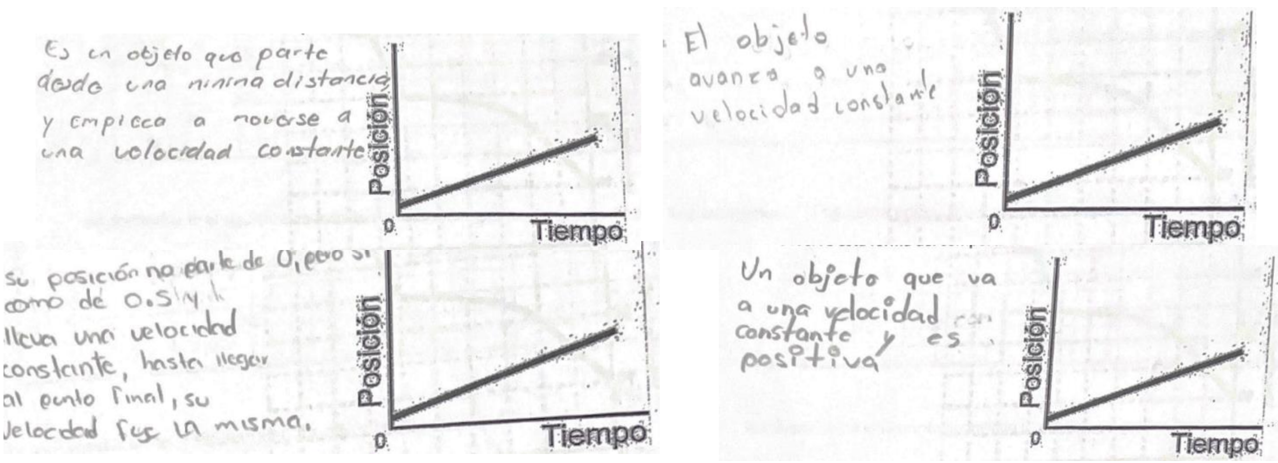
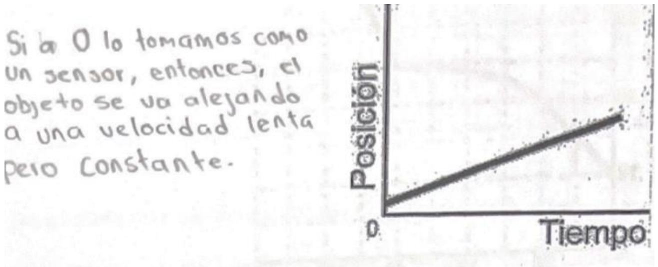
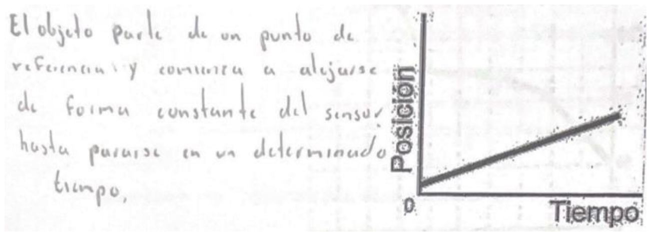


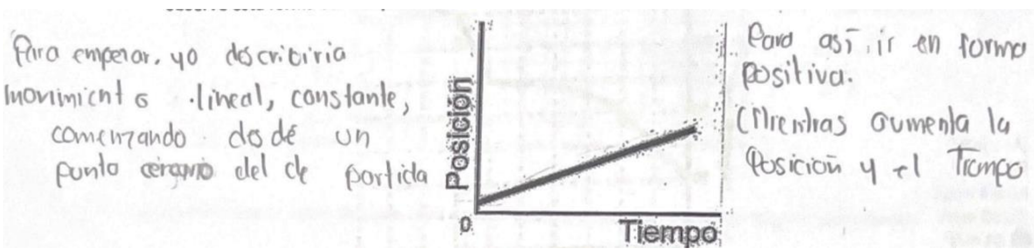
Figura 37. Respuesta de H1, H2, H10 y H12

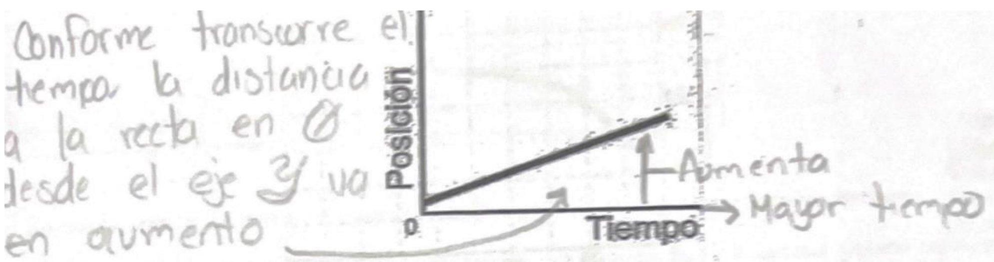
- Covariación continua suave (43%)

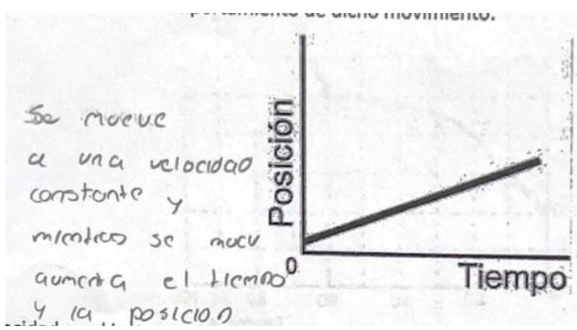
  H5, H7, H14, H17, H21, H23 y H27 presentan respuestas en las que además de reconocer que el objeto se mueve a velocidad constante, incluyen que esta es lenta y mencionan alguna de las variables presentes en la gráfica. Por su parte H4, H8, H18, H22 y H25 logran expresar que ambas magnitudes aumentan al mismo tiempo, es decir, varían continua y suavemente. Las respuestas son correctas.

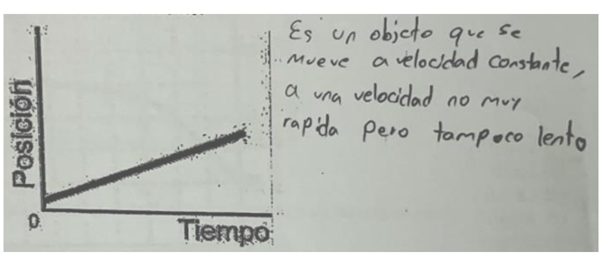

Si a O lo tomamos como un sensor, entonces, el objeto se va alejando a una velocidad lenta pero constante.
Posición
0
Tiempo


El objeto parte de un punto de referencia y comienza a alejarse de forma constante del sensor hasta pararse en un determinado tiempo.
Posición
0
Tiempo


Para empezar, yo describiria movimiento lineal, constante, comenzando dodé un punto ~~cercano~~ del de partida
Posición
0
Tiempo
Para así ir en forma positiva.
(Mientras aumenta la Posición y el Tiempo


Conforme transcurre el tiempo la distancia a la recta en 0 desde el eje y va en aumento
Posición
0
Tiempo
Aumenta
Mayor tiempo


Se mueve a una velocidad constante y mientras se mueve aumenta el tiempo y la posicion
Posición
0
Tiempo


Posición
0
Tiempo
Es un objeto que se mueve a velocidad constante, a una velocidad no muy rapida pero tampoco lento

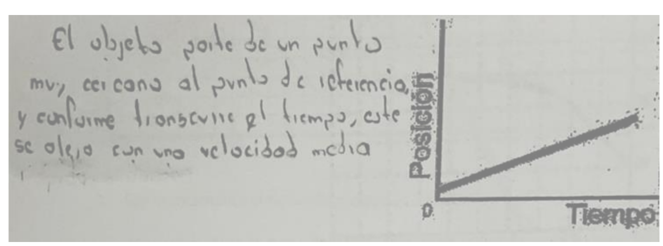

El objeto parte de un punto muy cercano al punto de referencia, y conforme transcurre el tiempo, este se aleja con una velocidad media
Posición
0
Tiempo

Figura 38. Algunas respuestas correctas

Las expresiones escritas evidencian que los alumnos saben que la gráfica representa un objeto que se mueva a una velocidad constante, además positiva. Tuve oportunidad de preguntar al término del examen a algunos estudiantes ¿cómo es la relación entre las variables?, ya que la pregunta no solicitaba esta explicación. H5, quien no fue un alumno sobresaliente, mencionó que "para que se pueda ver el comportamiento creciente, el tiempo y la posición deben cambiar al mismo tiempo" (respuesta 1), otro estudiante, H4 (respuesta 2), quien no incluyó a la variable posición en su respuesta contestó que "ambas variables están relacionadas en todo momento y esta relación aumenta", lo que corrobora la adquisición del nivel de razonamiento continuo suave. Este conjunto de alumnos piensa en la variación del valor de las cantidades aumentando y observan esta variación suave y continuamente.

Respuestas ítem **2**

a) 0,4 m/s. 0 alumnos (0%)	a) 2 alumnos (7%)
b) 2,0 m/s. 6 alumnos (24%)	b) 0 alumnos ((0%)
c) **2,5 m/s. 7 alumnos (28%)**	**c) 17 alumnos (60%)**
d) 5,0 m/s. 11 alumnos (44%)	d) 7 alumnos (25%)
e) 10,0 m/s. 1 alumno (4%)	e) 2 alumnos (7%)

Los alumnos que respondieron el inciso C muestran niveles de variación discreta y coordinación de valores.

Respuestas ítem **3**

a) 11 alumno (44%)	a) 3 alumnos (11%)
b) 6 alumnos (24%)	b) 9 alumnos (32%)
c) 7 alumnos (28%)	c) 4 alumnos (14%)
d) El objeto no se mueve al principio, después se mueve hacia atrás y finalmente se para. 1 alumno (4%)	**d) 12 alumnos (43%)**

Los estudiantes, al responder el ítem con el inciso d se encuentran en el nivel de razonamiento continuo grueso.

Respuestas ítem **4**

a) -3.3 m/s. 2 alumnos (8%) — a) 6 alumnos (28%)

b) -2.0 m/s. 5 alumnos (20%) — **b) 9 alumnos (32%)**

c) -0.67 m/s. 3 alumnos (12%) — c) 1 alumnos (4%)

d) 5.0 m/s. 2 alumnos (8%) — d) 1 alumnos (4%)

e) 7.0 m/s. 13 alumnos (52%) — e) 9 alumnos (32%)

Para obtener el resultado correcto. Los niveles son variación discreta y coordinación de valores.

Respuestas ítem **5**

a) 1/2 m/s^2. 5 alumnos (20%) — a) 4 alumnos (14%)

b) 1 m/s^2. 5 alumnos (20%) — **b) 12 alumnos (43%)**

c) 2 m/s^2. 4 alumnos (16%) — c) 4 alumnos (4%)

d) 9.8 m/s^2. 5 alumnos (20%) — d) 6 alumnos (28%)

e) 30 m/s^2. 6 alumnos (24%) — e) 2 alumnos (7%)

Este ítem necesita el nivel de razonamiento covariacional y variacional continuo suave.

Respuestas ítem **6**

a) AB 1 alumno (4%) — a) 2 (7%)

b) BC 6 alumnos (24%) — b) 0 (0%)

c) **CD 12 alumnos (48%)** — **c) 23 (82%)**

d) DE 1 alumno (4%) — d) 1 (4%)

e) No contestó 5 alumnos (20%) — e) 2 (7%)

Los estudiantes que respondieron con el segmento CD, lograron pensar de manera suave y continua.

Respuestas ítem **7**

a) A 0 alumnos (0%) — a) 0 (0%)

b) B 7 alumnos (28%) — b) 2 (7%)

c) C 3 alumnos (12%) — c) 1 (4%)

d) D 14 alumnos (56%) — **d) 25 (89%)**

e) E 0 alumnos (0%) — e) 0 (0%)

f) No contestó 1 alumno (4%) f) 0 (0%)

Los estudiantes que respondieron con el punto D necesitaron razonar variacional y covariacional en el nivel continuo grueso.

Respuestas ítem **8**

a) A 0 alumnos (0%)	a) 0 alumnos (0%)
b) B 18 alumnos (72%)	b) 16 alumnos (57%)
c) **C 4 alumnos (16%)**	c) 11 alumnos (39%)
d) D 3 alumnos (12%)	d) 0 alumnos (0%)
e) E 0 alumnos (0%)	e) 1 alumno (4%)
f) No contestó 1 alumno (4%)	f) 0 alumnos (0%)

La respuesta C al ítem 8 requiere pensar covariacional y variacionalmente en los niveles continuo grueso.

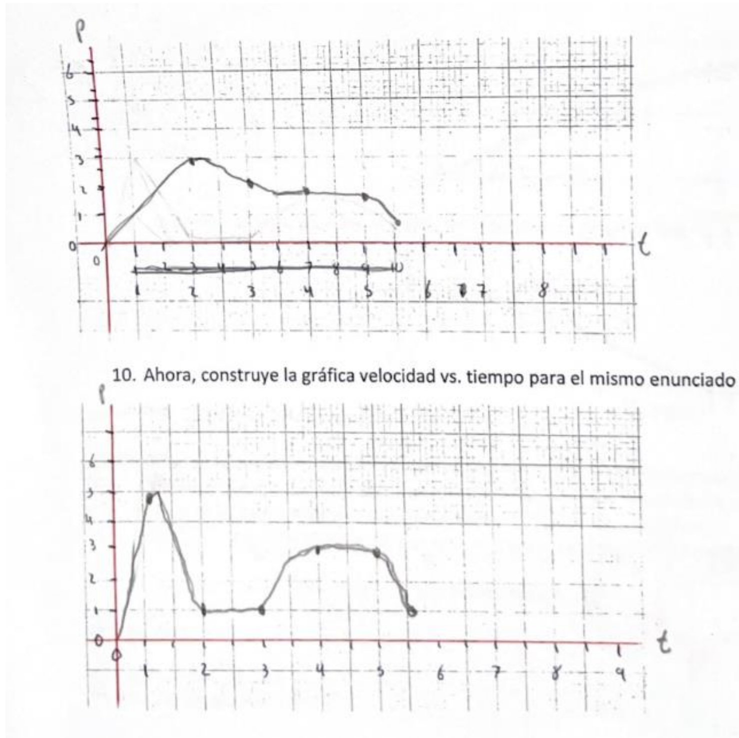
Respuestas ítem 9 y 10

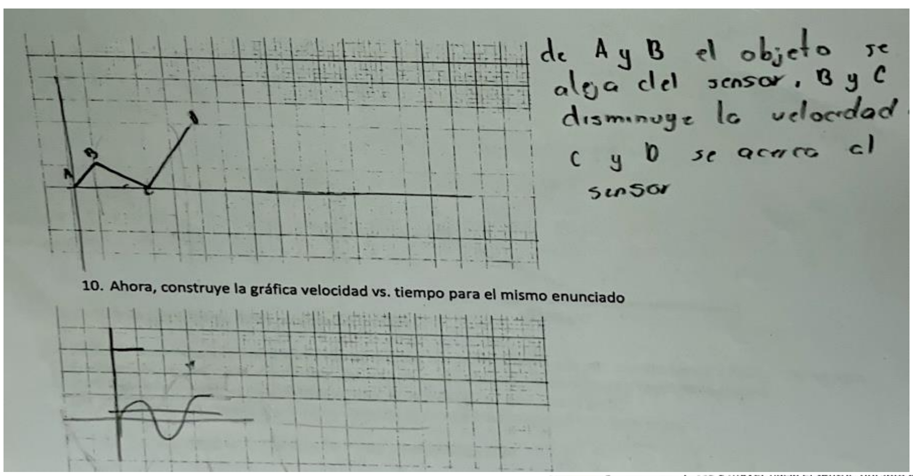
Se muestran algunas producciones de los estudiantes en estas últimas preguntas. Se clasificaron en las 2 categorías, según los niveles de razonamiento covariacional:

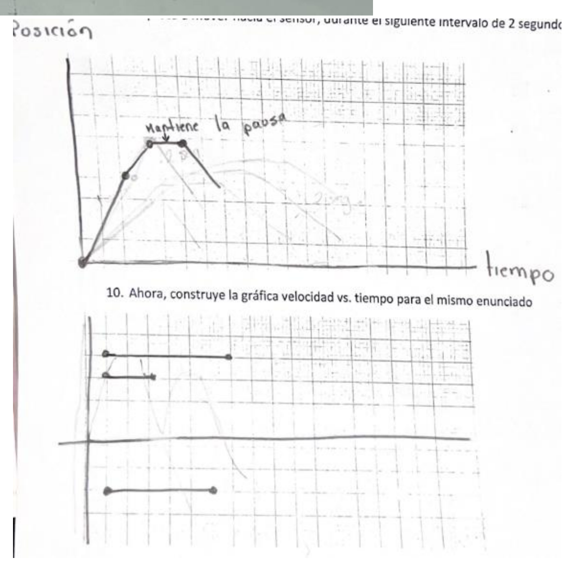
1) Coordinación gruesa de valores

Ítem 9: 12 alumnos (43%) ítem 10: 14 alumnos (50%)

Este conjunto de alumnos se caracterizó porque ambas respuestas son incorrectas o parcialmente correctas, es el caso de H25 (última gráfica de la figura 39). En general, se puede observar que las gráficas que proponen no corresponden con la descripción solicitada. Por ejemplo, unen segmentos rectos o curvilíneos para mostrar la posición del robot. Tres estudiantes indican la última parte de la gráfica con comportamiento creciente, y deberían indicar que es lo contrario. Esto puede ser muestra de la falta de coordinación entre las variables ya que no pueden representar que van juntas.


p
t
10. Ahora, construye la gráfica velocidad vs. tiempo para el mismo enunciado
p
t


de A y B el objeto se aleja del sensor, B y C disminuye la velocidad C y D se acerca el sensor
10. Ahora, construye la gráfica velocidad vs. tiempo para el mismo enunciado


Posición
Mantiene la pausa
tiempo
10. Ahora, construye la gráfica velocidad vs. tiempo para el mismo enunciado

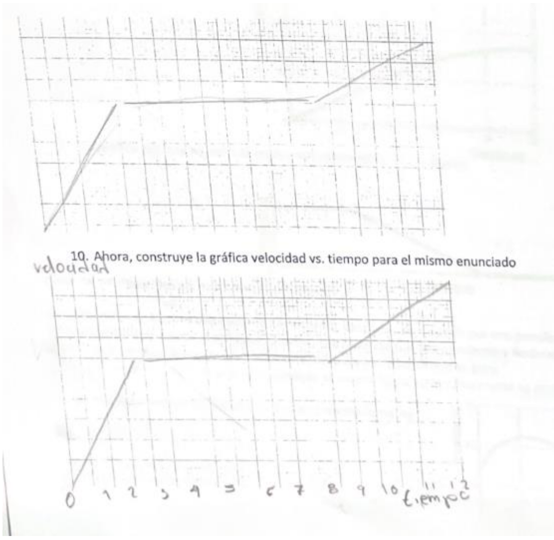


Figura 39. Gráficas de H19, H17, H9 y H25, respectivamente

2) Covariación continua suave

Ítem 9: 16 alumnos (57%) Ítem 10: 14 alumnos (50%)

El conjunto de estudiantes que trazan las gráficas de posición y de velocidad sin error, deberían pensar que la variación de las variables se efectúa de manera continua, simultánea y suave. Al término del post test se realizaron las entrevistas estructuradas, solicitando una explicación a la construcción de las gráficas (ítem 9 y 10). Está acción fue grabada en video. El criterio de selección consistió en el desempeño más notable al finalizar el curso. Se presenta la transcripción de las respuestas de H4 (primera gráfica figura 40) y de H26 (última gráfica figura 40).

Entrevista 1

Investigadora: ¿Me explicas cómo construiste las gráficas, por favor?

H4: "Acá nos está diciendo que construyamos la gráfica de distancia contra tiempo, entonces, acá representamos que se mueve rápidamente (señalando y haciendo el trazo imaginario con su lápiz del primer segmento de su gráfica), o sea, que toma una distancia mucho mayor en el primer segundo, por acá dice que se aleja rápidamente. Luego, durante el siguiente intervalo de dos segundos disminuye su velocidad y acá la representamos porque el incremento en la distancia se vuelve menor (continua señalando su gráfica), mantiene la pausa durante el siguiente segundo y la posición no cambia y aquí lo representamos igual (mostrando la línea recta horizontal), después se comienza a mover hacia el sensor, o sea que la distancia otra vez disminuye durante el intervalo de dos segundos, pero nunca llega al sensor y acá lo representamos que nunca llega a cero". Durante toda su explicación el alumno recorre la gráfica con su lápiz, señalando las partes a las que hace referencia.

Entrevista 2

Investigadora: ¿Puedes explicarme, por favor, ¿cómo construiste estas gráficas?

H26: “Si profa, el problema nos plantea que hay un sensor que detecta el movimiento de un objeto al acercarse y alejarse. Mmm, en el primer segundo, se mueve rápidamente del sensor, o sea que se aleja rápidamente en el primer segundo a una velocidad rápida, luego, en los dos segundos después de ese disminuye su velocidad, pero se sigue alejando. Después, a partir del tercero al cuarto segundo, hay un segundo ahí en el cual se queda quieto, no se mueve. Entonces esta es la representación de que se queda ahí (señala con su dedo el segmento horizontal). Entonces, después de esos dos segundos, o sea, dos segundos que se quedó quieto, se acerca nuevamente al sensor, no decía rápido, no decía lento…se acercaba al sensor, pero no se pegaba, no llegaba al inicio. Entonces es que se representa así, que no llega la inicio (muestra con su dedo el segmento final de la gráfica $s(t)$). Entonces, luego de esto nos pedía graficar su $v(t)$, su velocidad…su relación de velocidad con el tiempo. Entonces, si se empezaba a mover rápidamente durante el primer segundo, quiere decir que ya llevaba una velocidad inicial bastante alta, bastante alta representada por este (señala en la gráfica el segmento horizontal en la posición de velocidad mayor). Dos segundos después, su velocidad sigue siendo positiva, pero se disminuye, o sea, ya no es tan rápido, pero aquí los cambios son instantáneos, no hay variaciones, o sea que es instantáneo el cambio. Pero ya cuando dio el cambio de acercarse otra vez al sensor, ahí (señala la gráfica), su velocidad ahora es negativa, porque ahora está perdiendo distancia (mueve su mano hacia abajo, mostrando disminución), entonces su velocidad ahora es negativa. Entonces, aquí podemos ver que esta es su distancia con el tiempo y esta su velocidad con el tiempo, tienen una relación de esta forma (mostrando ambas gráficas)”

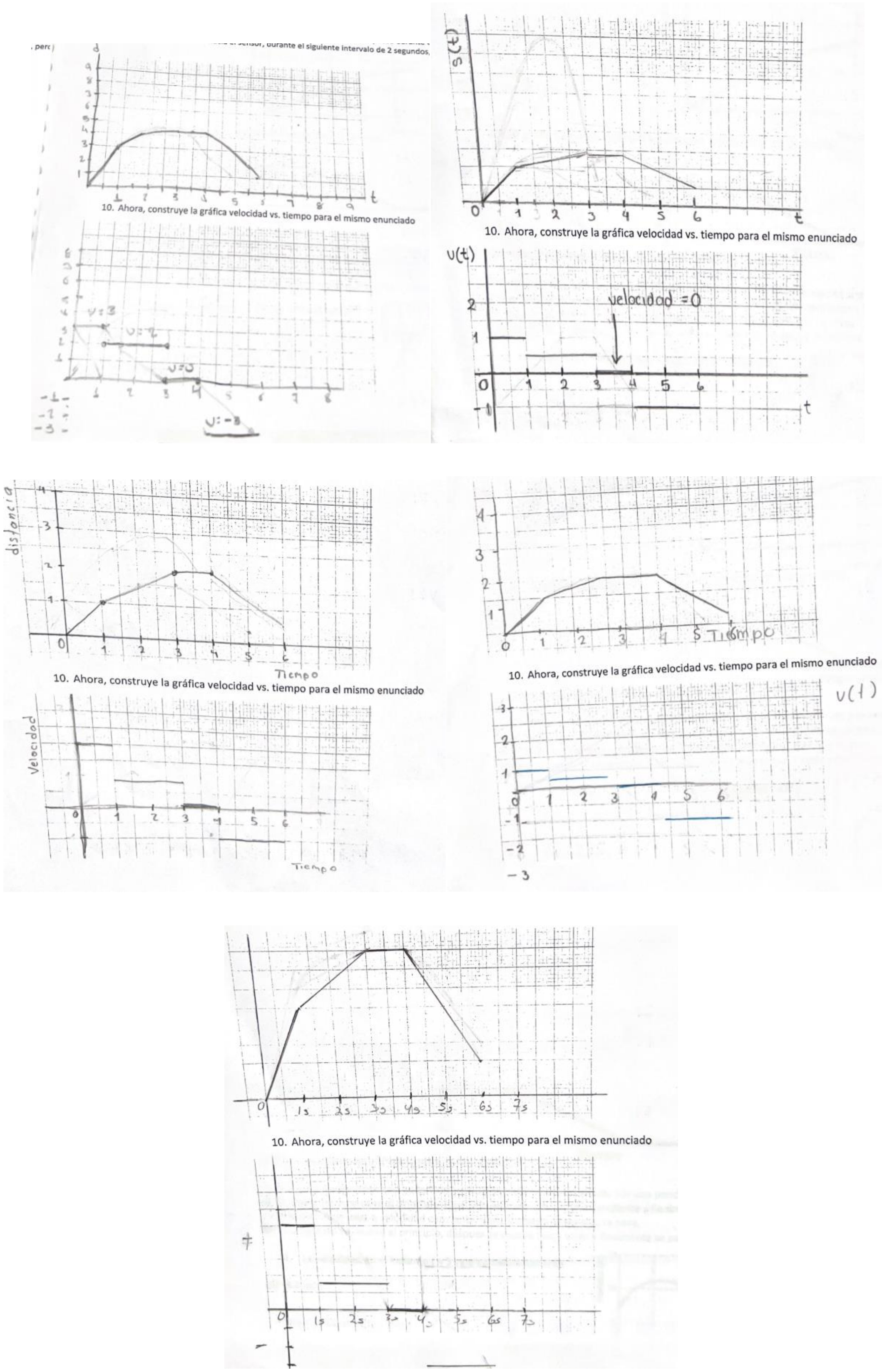


Figura 40. Gráficas de H4, H18, H21, H20 y H26, respectivamente

Conclusiones

Este estudio tuvo como objetivo principal analizar la comprensión de la derivada desde la perspectiva del razonamiento variacional y covariacional en estudiantes de un bachillerato tecnológico, utilizando herramientas tecnológicas como Arduino, NetLogo y GeoGebra. A continuación, se presentan las conclusiones más relevantes, producto del análisis de los resultados obtenidos.

- La investigación permitió observar que los estudiantes desarrollaron una comprensión gráfica de la derivada en diferentes niveles de desarrollo, atendiendo a la teoría de la variación y covariación. Los resultados del pretest mostraron que la mayoría de los estudiantes no lograban comprender ni expresar gráficamente relaciones de cambio al iniciar el curso. Lo que posicionaba su razonamiento variacional y covariacional en los niveles elementales (Variable como símbolo y sin coordinación, respectivamente). Posterior a esto, a través de las actividades diseñadas por la Dra. Valero, lograron identificar con las relaciones de cambio entre diferentes magnitudes y aplicaron estos conceptos de manera más efectiva en situaciones problemáticas. Al finalizar el semestre, después de la aplicación del post test, la mayoría logró un avance significativo en los niveles de razonamiento. Los resultados más destacados se pudieron clasificar en los niveles de variación y covariación continua suave. Hecho que mostró la eficacia de este enfoque didáctico en la enseñanza de la derivada.

- El uso de actividades diseñadas con Arduino, NetLogo y GeoGebra demostró tener un impacto positivo en el aprendizaje de la derivada. Estas tecnologías facilitaron la visualización de procesos de cambio, permitiendo a los estudiantes desarrollar una comprensión clara del concepto. La tecnología ayudó a modelar situaciones de variación, también fomentó la experimentación y la resolución de problemas de manera interactiva, lo que potenció el aprendizaje.

- Emplear herramientas digitales genera, en muchos casos, un ambiente de trabajo colaborativo y facilita significativamente el aprendizaje de conceptos matemáticos. Lo anterior concuerda con investigaciones sobre propuestas didácticas que emplean herramientas tecnológicas, en particular GeoGebra. En este sentido, Zulnaidi et al., (2019) han evidenciado en su investigación los beneficios del uso de GeoGebra en el desempeño académico de los estudiantes en matemáticas, resaltando que esta herramienta puede fomentar una mayor participación estudiantil y promover interacciones en las clases de matemáticas,

- Se observó que actitudes como el interés y la motivación de los estudiantes tuvieron un cambio positivo, hallazgo que se encuentra en concordancia con estudios sobre el dominio afectivo en la clase de matemáticas. En opinión de Nava et al., (2021) el afecto tiene una gran influencia en el aprendizaje matemático escolar.
- Las actividades fomentaron el razonamiento variacional y covariacional, sin embargo, evidenciar el nivel de desarrollo en el que se encuentran los estudiantes requiere profundizar en sus respuestas. Es por ello que al finalizar el post test, se efectuaron entrevistas que fueron grabadas. Se realizaron preguntas para contar con más elementos para categorizar el razonamiento de los jóvenes en los niveles correspondientes.
- Los resultados sugieren que este enfoque puede ser útil para la enseñanza de otros conceptos matemáticos relacionados con el cambio, como la integral. La investigación muestra la posibilidad de aplicar este marco teórico en diferentes áreas de las matemáticas, con el apoyo de la tecnología como un recurso que favorece significativamente el aprendizaje de constructos en los que se ponga de manifiesto la variación y la covariación.
- Una de las principales aportaciones de este trabajo radica en que responde a una necesidad identificada en el campo de la Educación Matemática: la escasez de investigaciones que exploren el uso integrado de tecnologías como Arduino y NetLogo en la enseñanza y aprendizaje de conceptos matemáticos. Al aplicar y analizar actividades que promueven el razonamiento variacional y covariacional a través de estas herramientas, nuestra investigación contribuye a ampliar las perspectivas teóricas y prácticas en este ámbito, ofreciendo un enfoque innovador y relevante para la educación en el nivel medio superior. Se sugiere el planteamiento de investigaciones que se enfoquen específicamente en la interacción de estas tecnologías.

Referencias

Amaro, G. (2020). *Análisis de la construcción de derivada en profesores de matemáticas de nivel medio superior basado en la teoría APOE* [Tesis de Maestría, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla]. https://repositorioinstitucional.buap.mx/handle/20.500.12371/11585

Andréu, J. (2002). Las técnicas de análisis de contenido: una revisión actualizada. Fundación Centro de Estudios Andaluces.

Araya, R. (2007). Uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*. https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/6890

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., y Gómez, P. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. *Ingeniería didáctica en educación matemática*, *1*, 97-140. https://repositorio.uniandes.edu.co/server/api/core/bitstreams/b2de6fb2-cfde-47b8-8d54-c56e044cc33e/content#page=105

Balcázar, P., González-Arratia, N., Gurrola, G., y Moysén, A. (2013). *Investigación cualitativa* (pp. 21-34). https://repositorio.minedu.gob.pe/handle/20.500.12799/4641

Cabezas, C., y Mendoza, M. (2016). Manifestaciones Emergentes del Pensamiento Variacional en Estudiantes de Cálculo Inicial. *Formación Universitaria*, *9*(6), 13- 26. https://dx.doi.org/10.4067/S0718-50062016000600003

Cantoral, R. (2013). Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional. *DF, México: Subsecretaría de Educación Media Superior, Secretaría de Educación Pública*.

Carlson, M. Larsen, S. and Jacobs, S. (2001). An investigation of covariational reasoning and its role in learning the concepts of limit and accumulation. En: R. Speiser, C. Maher & Ch. Walter: *Proceeding of the Twenty-third Annual Meeting. North American Chapter of the international group for the Psychology of mathematics education*. Vol 1. PME-NA XXIII. October 18-21, 2001. Snowbird, Utah. USA: Eric.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., y Hsu, E. (2003). Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: un marco conceptual y un estudio. http://funes.uniandes.edu.co/1520/

Carvajal, L., Covarrubias, J., González, J. y Uriza J. (2019). Uso de tecnología en el aprendizaje de matemáticas universitarias. *Revista de Investigación en Tecnologías de la Información: RITI*, *7*(13), 77-82. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=7107348

Cohen, L., Manion, L., and Morrison, K. (2000). Research Methods in Education (5th ed.). Routledge.
https://doi.org/10.4324/9780203224342

Córdoba, Y., Ruiz, K., y Rendón C. (2015). La comprensión del concepto de derivada mediante el uso de GeoGebra como propuesta didáctica. *RECME*, *1*(1), 125-130. https://funesfrpre.uniandes.edu.co/wp-content/uploads/tainacan-items/32454/1240871/Cordoba2015Comprension.pdf

De los Ríos, C. y Márquez, V. (2013). Una propuesta para la enseñanza de la derivada con GeoGebra. *Actas del VII CIBEM ISSN, 2301*(0797), 7211. https://core.ac.uk/download/pdf/328836015.pdf

Díaz, C. y Navarro, P. (2007). Análisis de contenido. En J. M. Delgado y J. Gutiérrez. (Eds.) *Métodos y técnicas cualitativas de investigación en ciencias sociales*. (pp. 177-224). Síntesis

Dolores, C. (1998). Algunas ideas que acerca de la derivada se forman los estudiantes de bachillerato en sus cursos de Cálculo Diferencial. En F. Hill (Ed.), *Investigaciones en Matemáticas Educativas II,* (pp. 257-272). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Elliot, J. (1991). La Investigación-Acción en Educación. Morata.

Feliciano, A., y Cuevas, R. (2021). Uso de las TIC en el aprendizaje de las matemáticas en el nivel superior. *RIDE. Revista Iberoamericana para la Investigación y el Desarrollo Educativo, 12*(23). https://www.scielo.org.mx/scielo.php?pid=S2007-74672021000200120&script=sci_arttext

Flores, M. (2004) *Implicaciones de los paradigmas de investigación en la práctica educativa* [en línea]. Revista Digital Universitaria.

http://www.revista.unam.mx/vol.5/num1/art1/portada.htm

Fraenkel, J., Hyun, H. y Wallen, N. (2020). *How to Design and Evaluate Research in Education* (8th ed.). McGraw-Hill.

García Teutli, U. (2022). *Diseño y valoración de actividades en GeoGebra para el aprendizaje de la función real desde la teoría de variación y covariación* [Tesis de Licenciatura, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla]. https://repositorioinstitucional.buap.mx/items/5a33891b-e721-4b39-8770-3dbdbb60290

Grueso, R. y González, G. (2016). *El concepto de función como covariación en la escuela.* [Tesis de Maestría. Santiago de Calí: Universidad del Valle]. https://core.ac.uk/download/pdf/294765722.pdf

Hernández, R., Fernández, C., y Baptista P. (2010). *Metodología de la investigación*. Mc Graw Hill. https://www.uca.ac.cr/wp-content/uploads/2017/10/Investigacion.pdf

Hernández-Sampieri, R., y Mendoza, C. (2020). *Metodología de la investigación: las rutas cuantitativa, cualitativa y mixta*. McGraw Hill

Ignacio, N., Barona, E., y Nieto, L. (2006). El dominio afectivo en el aprendizaje de las Matemáticas. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, *4*(1), 47-72. http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=293123488003

Jonker, J., and Pennink, B. (2010). The essence of research methodology: A concise guide for master and PhD students in management science. *Springer Science and Business Media.* https://books.google.es/books?id=1ogIADAkWtoC&lpg=PA1&ots=Qu_n-

López, A. (2008). Propuesta para la enseñanza del concepto de derivada, un acercamiento visual con GeoGebra. En Lestón, Patricia (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 1166-1175). http://funes.uniandes.edu.co/5095/

Lozano, Y. (2011). *Desarrollo del Concepto de Derivada sin la Noción de Límite*. Fundación Universitaria Konrad Lorenz. Bogotá.

Macías, D. (2007). Las nuevas tecnologías y el aprendizaje de las matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación*, *42*(4), 1-17. https://doi.org/10.35362/rie4242406

Marín, W. (2021). *Estrategia didáctica que contribuye a fortalecer el pensamiento variacional a partir de la covariación de magnitudes en estudiantes de grado de grado noveno* [Doctoral dissertation, Universidad Nacional de Colombia]. https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/80128

Martínez, A., Pluvinage, F., y Montaño, L. (2019). El concepto de la derivada en el contexto de la enseñanza de la física, recursos para el uso de diferenciales y las tecnologías de información y comunicación. *El cálculo y su enseñanza, 8*, 1-18. https://doi.org/10.61174/recacym.v8i1.1

Martínez-Sierra, G. (2021). [El investigador en Matemática Educativa] (2022, 8 de agosto). Razonamiento variacional y covariacional [Video]. Youtube. https://youtu.be/c5jtGhYwRr0

Mokotjo L. and Mokhele, M.L. (2021). Challenges of Integrating GeoGebra in Mathematics in South African High Schools. *Universal Journal of Educational Research*, 9(5): 963-973.

Nava, C., García, M.S. y Sánchez, M. (2021). El afecto y el razonamiento covariacional: una reflexión sobre la importancia de su estudio. *Revista Educación, 45*(2), 1-12. https://doi.org/10.15517/revedu.v45i1.40993

Oehrtman, M. C., Carlson, M. P., and Thompson, P. W. (2008). Foundational reasoning abilities that promote coherence in students' understandings of function. In M. P. Carlson & C. Rasmussen (eds.), *Making the connection: Research and practice in undergraduate mathematics*, *MAA Notes* (Vol. 73, pp. 27-42). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Ortega del Rincón, T., y Sierra, M. (1998). El concepto de derivada: algunas indicaciones para su enseñanza. *Revista interuniversitaria de formación del profesorado, V. 12(2),* N. 32, 1998 http://hdl.handle.net/10201/131890

Posada, F., y Villa, J. (2006). *Propuesta didáctica de aproximación al concepto de función lineal desde una perspectiva variacional*. [Tesis de Maestría, Universidad de Antioquia].

Rodríguez, C. y Fiallo, J. (2019). Razonamiento covariacional y habilidades cognitivas en el diseño de tareas para la comprensión de la derivada. *XV Conferencia Interamericana de Educación Matemática*.

https://www.researchgate.net/publication/333172941_Razonamiento_covariacional_y_habilidades_cognitivas_en_el_diseno_de_tareas_para_la_comprension_de_la_derivada

Rodríguez, G., Gil, J., y García, E. (1999). *Metodología de la investigación cualitativa*. Málaga: Aljibe, 11. http://148.202.18.157/sitios/catedrasnacionales/material/2010b/ortiz/infmic.pd

Rojas-Escribano, L. Báez-Rojas, J., y Corona-Galindo, M. (2017). Propuesta didáctica para la enseñanza del tema de optimización, apoyado con Excel y GeoGebra, para estudiantes de bachillerato. *El cálculo y su enseñanza*, *9*, 52-63. https://doi.org/10.61174/recacym.v9i1.18

Salinas, P., y Alanís, J. (2009). Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del cálculo dentro de una institución educativa. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *12(3)*, 355-382. http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362009000300004&lng=es&tlng=es.

Sánchez, J. (2013). Paradigmas de Investigación Educativa: De las leyes subyacentes a la modernidad reflexiva. *Entelequia. Revista Interdisciplinar*, *16*, 91–102. https://www.researchgate.net/publication/257842598_Paradigmas_de_Investigacion_Educativa_de_las_leyes_subyacentes_a_la_modernidad_reflexiva

Secretaría de Educación Pública. *Programa de estudios del componente básico del marco curricular común de la educación media superior.* https://educacionmediasuperior.sep.gob.mx/work/models/sems/Resource/12615/5/images/BT_Calculo_Diferencial.pdf

Thompson, P. W., y Carlson, M. P. (2017). *Variación, covariación y funciones: formas fundamentales de pensar matemáticamente*. En J. Cai (Ed.), Compendio para la investigación en educación matemática (pp. 421-456). Reston, Virginia: Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas. https://www.researchgate.net/publication/302581485_Variation_covariation_and_functions_Foundational_ways_of_thinking_mathematically

Thompson, P. W. (1993). Quantitative reasoning, complexity, and additive structures. *Educational Studies in Mathematics*, *25*, 165-208.

Thompson, P. W. (1994b). Images of rate and operational understanding of the fundamental theorem of calculus. *Educational Studies in Mathematics, 26*, 229–274.

Thompson, P. W., Byerley, C., & Hatfield, N. (2013). *A conceptual approach to calculus made possible by technology*. *Computers in the Schools*, 30, 124–147. https://www.researchgate.net/publication/263247386_A_Conceptual_Approach_to_Calculus_Made_Possible_by_Technology

Thompson, P. W., & Dreyfus, T. (in press). A coherent approach to the fundamental theorem of calculus using differentials. In R. Biehler & R. Hochsmuth (Eds.), *Proceedings of the Conference on Didactics of Mathematics in Higher Education as a Scientific Discipline*. Hannover, Germany: KHDM.

Thurston, W. P. (1995). On Proof and Progress in Mathematics. *For the Learning of Mathematics, 15*(1), 29–37. http://www.jstor.org/stable/40248168

Valles, M. (2000). Técnicas Cualitativas de Investigación Social. *Reflexión Metodológica y práctica profesional*. Madrid: Síntesis

Vasco, C. E. (2002). El pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías. *Congreso Internacional: Tecnologías Computacionales en el currículo de Matemáticas.* Bogotá, Colombia http://funes.uniandes.edu.co/10178/1/Vasco2002El.pdf

Villa-Ochoa, J., González-Gómez, D., y Carmona-Mesa, J. A. (2018). Modelación y Tecnología en el Estudio de la Tasa de Variación Instantánea de Matemáticas. *Formación Universitaria*, *11*(2), 25-34. https://doi.org/10.4067/S0718- 50062018000200025

Vrancken, S., y Engler, A. (2014). Una Introducción a la Derivada desde la Variación y el Cambio: resultados de una investigación con estudiantes de primer año de la universidad. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *28*, 449-468. https://doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a22

Zengin, Y. (2018). Incorporating the dynamic mathematics software GeoGebra into a history of mathematics course. *International Journal of Mathematical Education 49(7), Technology, and Science in 1083-1098*. https://doi.org/10.1080/0020739X.2018.1431850

Zulnaidi, H., Oktavika, E., and Hidayat, R. (2019). Effect of use of GeoGebra on achievement of high school mathematics students. *Education and Information Technologies*. *25*(1), 51-72. https://doi.org/10.1007/s10639-019-09899-y