BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ANÁLISIS DE LA CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE INTEGRAL DEFINIDA EN ESTUDIANTES DE LICENCIATURA BASADO EN LA TEORÍA APOE

TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE

MAESTRA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

PRESENTA

LIC. DEYSI RÍOS DE LA CRUZ

DIRECTOR DE TESIS

DRA. HONORINA RUIZ ESTRADA

CO-DIRECTOR DE TESIS

DRA. LIDIA AURORA HERNÁNDEZ REBOLLAR

PUEBLA, PUE. JUNIO 2023

BUAP

DR. SEVERINO MUÑOZ AGUIRRE
SECRETARIO DE INVESTIGACIÓN Y
ESTUDIOS DE POSGRADO, FCFM-BUAP
P R E S E N T E:

Por este medio le informo que la C:

DEYSI RÍOS DE LA CRUZ

Estudiante de la Maestría en Educación Matemática, ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 05 de junio de 2023, con la tesis titulada:

“ANÁLISIS DE LA CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO INTEGRAL DEFINIDA EN ESTUDIANTES DE LICENCIATURA BASADO EN LA TEORÍA APOE”

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

A T E N T A M E N T E.
H. Puebla de Z. a 15 de junio de 2023

Lidia A. H. R.

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA · FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS · SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y ESTUDIOS DE POSGRADO · 1578

DRA. LIDIA AURORA HERNÁNDEZ REBOLLAR
COORDINADORA DE LA MAESTRÍA
EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA.

DRA´LAHR/l´agm*

Facultad
de Ciencias
Físico Matemáticas

Av. San Claudio y 18 Sur, edif. FM1
Ciudad Universitaria, Col. San
Manuel, Puebla, Pue. C.P. 72570
01 (222) 229 55 00 Ext. 7550 y 7552

Esta Investigación se realizó gracias al financiamiento del
Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT),
De Enero de 2021 a Diciembre de 2022
N° de CVU: 1028326

Agradecimientos

A mis profesores por el apoyo y tiempo brindado a lo largo de la maestría, por compartir sus conocimientos y experiencias, por mostrarme un panorama diferente para tener una visión más crítica de las cosas.

Quiero agradecer a mi asesora, la Dra Honorina Ruiz Estrada por darme la oportunidad de trabajar con ella, por la dedicación, paciencia y apoyo brindado en todo momento, así como sus muy acertadas sugerencias en la construcción y mejora de este trabajo. A la Dra Lidia Aurora Hernández Rebollar, mi codirectora, por su amable disposición para participar en esta investigación, por sus observaciones y, sobre todo, por darme tranquilidad en momentos de crisis.

Agradezco a mis sinodales la Dra. Estela Juárez Ruiz y al Dr. José Martin Estrada Analco por las aportaciones hechas a este trabajo.

A mis compañeritos de quienes aprendí mucho, sin ellos, esta experiencia no hubiera sido lo mismo, en especial a Ireri y Maya por acogerme y ser más amena mi estadía en Puebla. A Mariana, por escuchar mis inquietudes y apoyarme.

También, quiero agradecer a dios por darme la oportunidad de seguir cumpliendo mis metas.

A mis padres Martín e Irma por su amor, apoyo incondicional y por ser ejemplo de esfuerzo y dedicación. De la misma manera a mis hermanos Aracely, Luis Ángel y Mario Alonso por ser una parte importante en mi vida y estar siempre presentes a pesar de la distancia.

A ti, Elesban por todo el cariño y apoyo que me das, por estar siempre para mí, por convertirte en un revisor más de este trabajo, porque, aunque no tenías ideas del tema, escuchabas mis inquietudes.

Índice

Índice de tablas

Índice de figuras

Resumen

Se presentan los resultados de una investigación de corte cualitativo, cuyo objetivo fue analizar las estructuras y mecanismos mentales en 11 estudiantes de primer semestre de la licenciatura en Física de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, cuando resuelven cinco actividades relacionadas con el concepto de integral definida fundamentadas en una descomposición genética enmarcada en la teoría Acción, Proceso, Objeto y Esquema (APOE). Del análisis de los resultados se desprende que, cuatro estudiantes muestran la estructura Acción en el registro geométrico, mientras que siete lo hacen en el analítico. Además, sólo nueve de los 11 estudiantes dieron evidencia de la estructura Proceso a través del mecanismo mental Interiorización. Por otro lado, se observó un predominio del registro analítico sobre el geométrico al recurrir a la expresión algebraica de la función para resolver las actividades. También concluimos que los estudiantes muestran dificultades para reconocer que la integral definida no siempre es igual al área de la región bajo la curva.

Palabras clave: Integral definida, teoría APOE, estructuras, mecanismos mentales

Resume

The results of a qualitative research are presented, whose objective was to analyze the mental structures and mechanisms in 11 first-semester students of the Physics degree from the Benemérita Universidad Autónoma de Puebla when they solve five activities related to the concept of definite integral. These activities were based on a genetic decomposition framed in the Action, Process, Object and Scheme (APOE) theory. From the analysis of the results, it is inferred that four students exhibit the Action structure in the geometric register, while seven do so in the analytical one. Furthermore, only nine of the 11 students gave evidence of the Process structure through the Internalization mental mechanism. On the other hand, a predominance of the analytical register over the geometric was observed when students used the algebraic expression of the function to solve the activities. We also conclude that students show difficulties in recognizing that the definite integral is not always equal to the area of the region under the curve.

Keywords: Definite integral, APOE theory, structures, mental mechanisms

Introducción

La integral definida es uno de los conceptos fundamentales del Cálculo infinitesimal y una herramienta muy importante para otros campos como la Física, Economía, Estadística, Probabilidad, entre otros. Además, es un concepto importante para los estudiantes ya que aparece en el currículo de diversos programas de licenciatura.

En México el concepto de integral se introduce en el nivel medio superior y se aborda inicialmente para calcular el área de figuras limitadas por curvas. Consideramos que esto se debe a que la integral surgió por la necesidad de resolver el problema del cálculo de áreas en regiones limitadas por curvas, cuyas formas no resultaban conocidas, posteriormente, en la universidad se aplica para calcular volúmenes, longitud de curvas planas, áreas de superficie de revolución, momentos y centros de masa, trabajo, presión y fuerzas de fluidos.

Sin embargo, algunas investigaciones revelan la existencia de dificultades en el aprendizaje y la comprensión de este concepto matemático. Orton (1983) indica que a los estudiantes se les complica comprender a la integral como el límite de una suma y no son capaces de darle significado a los símbolos que utilizan. Llorens y Santoja (1997) manifiestan que algunas deficiencias en el aprendizaje se deben a que los estudiantes asocian a la integral con el cálculo de primitivas, el área bajo la curva y la aplicación de la regla de Barrow incluso cuando esta no puede, es decir, estas dificultades están relacionadas con un dominio de procedimientos algorítmicos frente a los aspectos conceptuales de la integral definida. Bezuidenhout y Oliver (2000) indican que uno de los obstáculos radica en concebir a la integral definida como un área, sin acabar de precisar que para ello se requiere que la función sea positiva. Por su parte, Jiménez- Villanueva (2017) las clasifica de la siguiente manera: identificar a la integral definida con la antiderivada (procesos puramente algebraicos relacionados con los métodos de integración); teorema fundamental del cálculo aun cuando las condiciones no se cumplen y como el área bajo la curva.

Lo anterior ha motivado que diversas investigaciones sobre la enseñanza del concepto de integral definida se centren en buscar alternativas didácticas que contribuyan a una mejor comprensión de esta. En particular desde la teoría APOE se ha estudiado la comprensión de este concepto matemático y se han propuesto modelos, llamados descomposición genética, que hipotetizan cómo los estudiantes podrían aprender un concepto matemático. Uno de estos modelos es la descomposición genética propuesta por Bernabé et al. (2013) quienes abordan la concepción dinámica del concepto de integral definida mediante la función de acumulación, en los registros geométrico y analítico.

En esta investigación se busca analizar las estructuras Acción, Proceso y el mecanismo mental de interiorización de once estudiantes de primer semestre de la licenciatura en Física de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP) cuando resuelven actividades relacionadas con el concepto de integral definida, fundamentadas en la descomposición genética de Bernabé et al. (2013). Además, con las actividades se busca que los estudiantes reconozcan que la integral definida no siempre es igual al área bajo la curva.

La presentación del trabajo se organiza en cuatro capítulos. En el capítulo 1 se presentan algunas investigaciones que resaltan las dificultades en el aprendizaje y comprensión del concepto de integral definida, así como algunas investigaciones que se han realizado en torno a este concepto utilizando la teoría APOE. También, se presenta el objetivo y la pregunta de investigación que direccionan este trabajo y la justificación, donde se exponen los motivos por los que esta se desarrolla.

En el capítulo 2 se definen los constructos de la teoría que sustenta nuestra investigación; así como la descomposición genética de la investigación y el método propuesto por la teoría APOE para llevar a cabo la investigación.

En el tercer capítulo se describe la población de estudio; se presentan las actividades que constituyen el instrumento de investigación y las cuales se diseñaron para identificar y analizar las estructuras y mecanismos mentales de los informantes; así mismo se da un bosquejo de cómo fue su aplicación.

En el Capítulo 4 se presenta el análisis de las respuestas proporcionadas por los once informantes.

Finalmente, se presentan las conclusiones

Capítulo 1 Planteamiento del problema

En este capítulo se presentan algunas investigaciones sobre las dificultades que tienen los estudiantes en la comprensión del concepto de integral definida, así como algunas investigaciones sobre el aprendizaje y comprensión de este concepto matemático. Posteriormente se plantea el problema de investigación con base en los aportes encontrados en la literatura.

1.1 Antecedentes teóricos

En los últimos años diferentes investigaciones han evidenciado las dificultades que tienen los estudiantes para el aprendizaje y comprensión del concepto de integral definida, algunas de estas son:

Orton (1983) reportó que los estudiantes tienen dificultades para comprender a la integral definida como el límite de una suma y esto se debe a una comprensión no adecuada del proceso límite. Él utilizó el método de entrevista clínica para investigar la comprensión de aspectos relacionados a la integración en 110 estudiantes británicos (55 hombres y 55 mujeres) de entre 16 y 22 años. De estos 110 estudiantes, sesenta alumnos fueron seleccionados del nivel académico conocido como *Sixth Form* (16-18 años) de cuatro escuelas diferentes, los otros cincuenta (18-22 años) eran estudiantes que se preparaban para ser profesores de matemáticas. El instrumento utilizado se integra de 38 ítems relacionados con límites, áreas de rectángulos, aproximación del área bajo una curva, cálculo de integrales y cálculo de volumen de sólidos de revolución. Entre las conclusiones de su investigación, podemos destacar:

- Para los estudiantes fueron difíciles las preguntas que se referían a la comprensión de la integración como límite de una suma.
- Muchos estudiantes mostraron dificultades en la comprensión de la relación entre la integral definida y el área bajo la curva, sobre todo cuando la función presentaba alguna discontinuidad o pasaba de positiva a negativa.
- Los estudiantes fueron capaces de realizar cálculos algebraicos donde intervienen las integrales, pero no lograron comprender el papel que juega el límite en la definición de este concepto y no fueron capaces de dotar de significado a los símbolos que utilizan.

Por su parte Llorens y Santoja (1997) manifestaron que en el aprendizaje del concepto de integral existen deficiencias fácilmente detectables. Estos autores se basaron en sus experiencias como maestros y lo reportado en otros estudios (Mundy, 1994; Turégano, 1994) para resumir esas deficiencias como sigue:

- Los estudiantes identifican la integral con la primitiva. La integral, para ellos, no involucra ningún proceso de convergencia ni tampoco aspectos geométricos. Es, por tanto, un proceso puramente algebraico, de modo que un estudiante puede conocer distintos métodos de integración e incluso, saber aplicarlos con cierta soltura y al mismo tiempo, no ser capaz de aplicarlos al cálculo de un área o ignorar por completo qué son las sumas de Riemann.
- Identificar la integral definida con el teorema fundamental del cálculo, incluso cuando esta no puede aplicarse. Es decir, el símbolo $\int_a^b f(x)dx$ representa un paso más en el cálculo de primitivas.
- No se relacionan el concepto de área con el concepto de integral definida. Ciertamente, los estudiantes han oído que existe una conexión entre ambas, pero no se logra identificarla, de modo que persiste una interpretación puramente algebraica de la integral.

Bezuidenhout y Oliver (2000) realizaron una investigación sobre la comprensión de algunos aspectos procedimentales y conceptuales del concepto integral. Ellos estudiaron las imágenes[1] conceptuales de los estudiantes a lo largo de tres fases. La primera consistió en la aplicación de un examen preliminar a 107 estudiantes de ingeniería. A partir del análisis de los resultados, en la fase dos se diseñó y aplicó un examen a 523 estudiantes de tres universidades de Sudáfrica. Este grupo incluía estudiantes de ingeniería, ciencias físicas y estudiantes matriculados en cursos de cálculo. Para el análisis de los resultados se eligieron de forma aleatoria 100 respuestas, de las cuales 35 corresponden a los alumnos de ingeniería, 35 de Ciencias Físicas y 30 del curso de Cálculo. En la tercera fase se entrevistó a 15 de los participantes que realizaron el examen de la fase dos. Entre sus conclusiones los autores indican que algunos errores típicos y concepciones[2] inapropiadas forman parte del concepto imagen del concepto de integral, al considerar que el concepto imagen puede incluir una concepción de área sin acabar de precisar, que para ello se requiere que la función sea positiva.

[1] El término “concepto imagen” se refiere a la estructura total cognitiva (en la mente de un individuo) que está asociada con un concepto matemático específico (Tall y Vinner,1981).

[2] En McDonald et al. (2000) hacen una distinción entre concepción y concepto, el primero es intrapersonal (las ideas o la comprensión del individuo) y la segunda es comunal (acordado por los matemáticos). En la teoría APOE, una concepción se desarrolla como un resultado de la actividad reflexiva y el concepto se refiere a la comprensión colectiva de ese contenido por la comunidad de matemáticas (Arnon, et al., 2014, p. 18).

Un marco teórico donde se puede lograr la comprensión de conceptos matemáticos avanzados y en particular el concepto de integral definida es la teoría APOE, la cual plantea que un individuo puede aprender cualquier concepto matemático mediante la construcción de ciertas estructuras mentales; las cuales son consideradas como etapas en el aprendizaje de conceptos matemáticos. Estas estructuras surgen a través de instancias de abstracción reflexiva, que, en la teoría APOE, consisten en mecanismos mentales como la interiorización, encapsulación, coordinación, reversión, desencapsulación y tematización.

Para lograr la construcción de un concepto matemático específico, se requiere de un modelo hipotético sobre el objeto matemático en cuestión. Este modelo se conoce como Descomposición Genética (DG). Enseguida se describen algunas investigaciones que se han realizado desde la teoría APOE para el aprendizaje y comprensión del concepto de integral definida.

Czarnocha et al. (2001) aplicaron 10 actividades a 32 estudiantes de ciencias matemáticas e ingeniería. Estas actividades están diseñadas acorde con una descomposición genética propia. Posteriormente realizaron entrevistas individuales a los estudiantes para tener más información sobre la resolución de las actividades. Los autores consideran que el análisis de los datos de la entrevista puso de manifiesto que el límite de sumas de Riemann era visto como suma infinita de rectángulos de pequeña anchura, o bien como suma de "líneas", es decir, como suma de infinitos rectángulos de anchura cero y no como el límite de la suma de las áreas de los rectángulos. Esta dificultad influyó en la comprensión del Esquema de integral definida, por lo que los autores consideran que resulta fundamental la comprensión del concepto de límite de una sucesión para que los estudiantes comprendan el concepto de integral definida como el límite de sumas parciales. Los autores concluyen que el desarrollo del esquema de Integral Definida involucra la coordinación de dos esquemas: el esquema visual de sumas de Riemann y el esquema del límite de sucesión numérica. Es decir, la integral definida comprende construcciones de tipo geométrico y construcciones de tipo numérico (sucesiones infinitas y límites).

Por su parte Boigues et al. (2010) realizaron una investigación para caracterizar el desarrollo del Esquema de la integral definida en estudiantes de Ingeniería de Ciencias de la Tierra usando la teoría APOE y la métrica Fuzzy para determinar el grado de desarrollo en los niveles intra, inter y trans (Piaget y García, 1984). Ellos propusieron una descomposición genética en torno a las nociones de sucesión, límite y sumas de Riemann. Los datos de la investigación proceden de las respuestas de un cuestionario y las entrevistas de 40 estudiantes. Para el análisis utilizaron en primer lugar, la teoría APOE al tener en cuenta las características de los tres niveles de desarrollo de un Esquema y la descomposición genética preliminar y, en segundo lugar, la métrica Fuzzy al asignar un determinado nivel (inter, intra, trans) de desarrollo de la comprensión de la integral definida en cada alumno. Los resultados obtenidos muestran la dificultad de los estudiantes para relacionar el valor *n* de la partición con la sucesión de sumas de Riemann.

Aldana (2011) realizó una investigación acerca de la construcción del concepto de integral definida en estudiantes universitarios. El objetivo de su investigación fue entender cómo los estudiantes universitarios desarrollan el Esquema del concepto de integral definida. El autor propuso una descomposición genética a partir de artículos de investigación relacionados a la teoría APOE y los elementos matemáticos que configuran el concepto de integral definida, los cuales son: el área como aproximación, el área como límite de una suma, la integral definida, las propiedades de la integral definida, el teorema fundamental del cálculo y del valor medio. Estos elementos matemáticos fueron identificados a partir de un análisis estructural del contenido de libros de texto de bachillerato y universidad. Los participantes fueron 11 estudiantes (2 mujeres y 9 hombres) con edades entre 20 y 32 años, de tercer año del programa de Licenciatura de Matemáticas de la Universidad del Quindío, Armenia en Colombia. Los instrumentos de recolección de datos fueron: un cuestionario con 8 Actividades diseñadas acorde a la DG propuesta por el autor, una entrevista semiestructurada individual sobre la forma en cómo habían resuelto las actividades cada uno de los estudiantes y un mapa conceptual. Este último pretendía que los estudiantes reflejaran la imagen del concepto de integral definida que tenían en ese momento. El autor concluye que: hay una tendencia a utilizar más los elementos matemáticos en modo algebraico y que el desarrollo del Esquema del concepto de integral definida está ligado a conceptos como: función, límite, continuidad y derivabilidad por lo que, para lograr la comprensión del concepto de integral definida es necesario que los estudiantes tengan las Estructuras previas de función, límite, continuidad y derivada.

Bernabé et al. (2013) proponen una DG del concepto de integral definida de acuerdo con los elementos matemáticos que lo configuran, los cuales fueron identificados al revisar los contenidos de los programas de estudio de la unidad de aprendizaje de cálculo de las ingenierías del Instituto Politécnico Nacional y, revisar los libros de texto propuestos en la Escuela Superior de Cómputo, en la unidad de aprendizaje de cálculo. Estos autores también diseñaron actividades de aprendizaje acordes a la descomposición genética que proponen. La aplicación de estas actividades se realizó en cuatro semanas, utilizando el ciclo de enseñanza AED (Actividades en computadora, Ejercicios extraclase y Discusión en un foro y en el laboratorio de computación). Antes de iniciar el ciclo de enseñanza los autores realizaron un taller del uso del software Mathematica con el objetivo de que los estudiantes instrumentalizaran esta herramienta y la usaran en el desarrollo de las actividades diseñadas para el estudio del concepto de integral definida.

Jiménez-Villanueva (2017) realizó un estudio sobre el desarrollo cognitivo del concepto de integral definida. La autora propone una descomposición genética mediante la función de acumulación. Los participantes fueron 10 estudiantes de primer semestre de ingeniería en Sistemas Computacionales que cursaban la asignatura de Cálculo y los cuales trabajaron en parejas. La aplicación de la enseñanza incluyó el uso de software Mathematica, por lo que antes de iniciar la aplicación se realizó un entrenamiento con el propósito de que los estudiantes se familiarizaran con el software. Los instrumentos de recolección de datos fueron: (1) un cuestionario diagnóstico para identificar las estructuras mentales prerrequisitos de los informantes (función, sucesión, límite, continuidad, razón de cambio e integral definida); (2) un cuestionario de conocimiento, el cual incluía algunos problemas del cuestionario diagnóstico y las Actividades diseñadas acordes a la DG y por último (3) una entrevista semiestructurada para profundizar en el desarrollo de las estructuras mentales. De la investigación, la autora concluye que, el diseño de la enseñanza usando una combinación de programas interactivos y la creación de programas cortos usando comandos específicos del software Mathematica, puede contribuir significativamente en el desarrollo de las construcciones mentales pedidas por la descomposición genética preliminar propuesta y en consecuencia en una mejor comprensión del concepto de integral definida de una función de variable real.

Con lo expuesto anteriormente y sabiendo que la teoría APOE propone que un estudiante puede lograr la comprensión de un concepto matemático mediante la construcción de ciertas estructuras y mecanismos mentales, nos hemos planteado el siguiente objetivo y pregunta de investigación.

1.2 Objetivo de la investigación

Analizar las estructuras y mecanismos mentales que utiliza un grupo de estudiantes de primer semestre de la Licenciatura en Física de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP) relacionadas con la integral definida en el marco de la teoría APOE.

1.3 Pregunta de investigación

¿Qué estructuras y mecanismos mentales evidencian estudiantes de la licenciatura en Física de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP) cuando resuelven actividades relacionadas con el concepto de integral definida en el marco de la teoría APOE?

1.4 Justificación

Diversas investigaciones han reportado las dificultades que tienen los estudiantes para aprender y comprender el concepto de integral definida (Bezuidenhout y Oliver, 2000; Jiménez-Villanueva, 2017; Llorens y Santoja, 1997; Orton, 1983). Esto puede generarles situaciones adversas en su trayectoria académica, debido a que se les puede dificultar resolver problemas en los que se encuentren inmersos dicho concepto. Del programa de estudios vigente la Licenciatura en Física de la BUAP del año 2016 se puede observar que la integral definida es uno de los conceptos medulares para los subsecuentes cursos, al estar inmerso en otras áreas de conocimiento como son: Matemáticas superiores, Cálculo integral, Cálculo integral en varias variables, Variable Compleja, Funciones especiales. Por esta razón, consideramos importante identificar las estructuras y mecanismos mentales que muestran estudiantes de esta licenciatura respecto al concepto de integral definida. Para lograr esto, se aplicarán cinco actividades fundamentadas en una descomposición genética, enmarcada en la teoría APOE.

Capítulo 2 Marco Teórico

En este capítulo se describe el marco teórico que sustenta esta investigación, el cual consiste en la teoría APOE. En la primera sección se definen las estructuras y mecanismos mentales, posteriormente se presenta la DG que se está utilizando, después el ciclo de investigación propuesto por la misma teoría y para finalizar se describen las componentes del ciclo de investigación ACE.

2.1 Teoría APOE

La teoría APOE es una teoría cognitiva con enfoque constructivista, desarrollada por Dubinsky (1991) y el grupo de investigadores Research in Undergraduate Mathematics Education Community (RUMEC), la cual se basa en la idea de abstracción reflexiva de Jean Piaget y ha sido reconstruida para el desarrollo del conocimiento matemático avanzado. Esta teoría permite describir cómo los conceptos matemáticos pueden ser aprendidos.

Desde esta perspectiva teórica Dubinsky (1991) y Asiala et al. (1996) consideran que los sujetos realizan ciertas construcciones mentales para comprender los conceptos matemáticos. Estas construcciones mentales son: Acción, Proceso, Objeto y Esquema. Las cuales se describen a continuación:

Acción: Es una transformación de un objeto que el aprendiente percibe como algo externo (una fórmula, un algoritmo, un conjunto de reglas) que necesita de instrucciones específicas, completas y entendibles para realizar cada paso de la transformación.

Por ejemplo, un sujeto con una concepción Acción de la integral definida de una función $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ puede dar una estimación de esta como el área bajo la curva, por lo que necesita: dividir el intervalo en un número específico de subintervalos de un tamaño dado, para cada subintervalo construir rectángulos debajo de la curva, calcular el área de cada rectángulo y por último sumar las áreas de los rectángulos (Arnon et al., 2014, p.20).

Proceso: Es una construcción interna que ocurre como resultado de una reflexión propiciada por la repetición consciente de acciones que conduce al individuo a pensar en cómo llevar a cabo el mismo tipo de acción, sin la necesidad de estímulos externos, ni ejecutar de manera explícita cada uno de los pasos, pudiendo saltarlos e incluso revertirlos.

Un ejemplo de esta estructura mental es la siguiente: la Acción de determinar la suma de Riemann para una partición particular es interiorizada en un Proceso cuando un individuo puede describir cómo se determina la suma de Riemann para cualquier partición sin realizarla e imagina que este Proceso continua cuando la longitud de la partición decrece (Arnon et al., 2014, p. 21).

Un Proceso puede ser resultado de la Interiorización de una Acción, pero también puede generarse por la Coordinación de dos o más Procesos.

Objeto: Ocurre cuando un sujeto puede aplicar acciones sobre un Proceso particular, ya sea de manera explícita o en su imaginación.

Un ejemplo de esta estructura mental es el siguiente: el área bajo la curva para una función en un intervalo cerrado es el límite de sumas de Riemann, para que el estudiante determine la existencia de ese límite y/o lo calcule necesita tener construida la estructura Objeto de suma de Riemann para poder realizar acciones (aplicar el límite) sobre la estructura Proceso suma de Riemann (Arnon et al., 2014, p. 21).

Esquema: Es un conjunto coherente de Acciones, Procesos, Objetos y otros Esquemas previamente construidos, al que se recurre para tratar con una situación matemática.

Un ejemplo de esquema para el concepto de integral definida es cuando se resuelven integrales impropias y el estudiante tiene que aplicar la acción de límite.

La coherencia de un Esquema está dada por la capacidad del individuo para determinar si se puede utilizar para tratar con una situación matemática particular.

Las construcciones mentales mencionadas anteriormente se logran mediante ciertos mecanismos mentales como: Interiorización, Coordinación, Reversión, Encapsulación y Desencapsulación, los cuales son caracterizados de la siguiente manera:

Interiorización: Se caracteriza por la capacidad de imaginar y reconstruir una actividad específica del mundo extramatemático en una actividad interna donde se deja de depender de elementos externos.

Coordinación: Es la acción mental de tomar dos o más Procesos y usarlos para construir un nuevo Proceso.

Reversión: Cuando el proceso existe internamente, el sujeto tiene la posibilidad de revertirlo, en el sentido de regresar, para construir un nuevo Proceso.

Encapsulación: Consiste en la conversión de una estructura dinámica (un Proceso) en una estructura estática (un Objeto), la cual se genera cuando el individuo tiene la necesidad de transformar un Objeto para resolver una situación

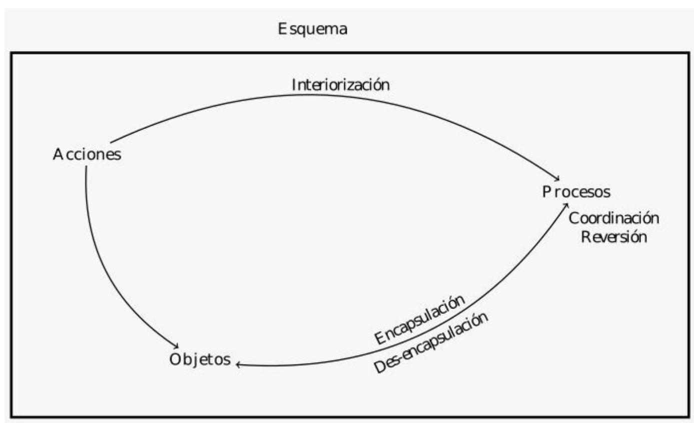
Desencapsulación: Es el proceso mental de regresar desde el Objeto al Proceso que lo originó.

Generalización: Ocurre cuando el sujeto llega a ser consciente de una aplicación más amplia de un Esquema determinado.

La relación entre estructuras y mecanismos mentales es concebida por Dubinsky (1991) como un sistema circular de retroalimentación (Ver Figura 1), sin embargo, la construcción del conocimiento no necesariamente es lineal.

Figura 1.

Estructuras y mecanismos mentales (Arnon et al., 2014)



La teoría APOE plantea que un individuo puede aprender un concepto matemático mediante la construcción de las estructuras y mecanismos mentales antes descritos. Para lograr el desarrollo de estas estructuras se requiere de un modelo hipotético que permita transitar de una estructura mental a otra. Dentro de la teoría APOE este modelo hipotético es conocido como Descomposición Genética y describe las estructuras y mecanismos mentales que un estudiante podría necesitar construir para aprender un concepto matemático específico (Arnon et al., 2014).

Para el diseño de una descomposición genética se consideran: las experiencias de los investigadores en el aprendizaje y la enseñanza del concepto, su conocimiento de la teoría APOE, su conocimiento matemático, investigaciones sobre el concepto de interés y el desarrollo histórico del mismo. Una descomposición genética de un concepto matemático no es única; en su diseño influye el enfoque con el que se aborda el concepto. Por otro lado, hasta que no se prueba experimentalmente, una descomposición genética es una hipótesis y se conoce como descomposición genética preliminar y esta puede guiar el desarrollo de la instrucción y usarse como base teórica para diseñar materiales que se pueden utilizar en la enseñanza y aprendizaje del concepto matemático de interés, por lo que podría incluir las descripciones de estructuras prerrequisitos que el sujeto previamente debe tener construido y lo cual le permitirá construir las estructuras mentales del concepto matemático que se quiere aprender.

2.2 Descomposición genética de la investigación

Para esta investigación estamos utilizando la DG de Bernabé et al. (2013) quienes abordan la concepción dinámica del concepto de integral definida mediante la función de acumulación de Riemann planteada por Thompson y Silverman (2007) quienes señalan que para lograr una comprensión de este concepto matemático que vaya más allá de identificarlo como el área bajo una curva y la admitan como algo que representa una cantidad que no sea área (distancia, trabajo, volumen, cargas eléctricas, etc.) es imperativo que los estudiantes conciban las cantidades que se acumulan creadas por pequeños incrementos que se forman multiplicativamente.

En su DG los autores consideran los registros analítico y geométrico que deben ser recorridos y coordinados. Las estructuras prerrequisito que deben tener los estudiantes son:

- Estructura Objeto del concepto intervalo
- Estructura Objeto de función
- Estructura Objeto de sucesión
- Estructura Objeto de continuidad de una función.

Tabla 1.

DG del concepto de integral definida (Bernabé et al., 2013)

Geométrico	Analítico
1AG. La acción de hacer particiones de un intervalo (dominio restringido de una función) para construir subintervalos. 1BG. La acción de identificar puntos sobre la gráfica de una función, cuya variable independiente corresponda a los elementos de la partición. 1CG. La acción de construir la gráfica de una función escalonada usando los puntos identificados en 1BG. 1DG. La acción de construir rectángulos usando la función escalonada hecha en 1CG	1AA. La acción de calcular los valores de los elementos de la partición (los valores de los extremos de los subintervalos). 1BA. La acción de calcular los valores de la función correspondiente a los elementos de la partición. 1CA. La acción de calcular el ancho de cada subintervalo. 1DA. La acción de calcular el producto de los valores obtenidos en 1BA y 1CA. 1EA. La acción de acumular los valores obtenidos en 1DA
2AG. Interiorización de las acciones en el punto 1AG a un sólo proceso cuando el número de subintervalos varía. 2BG. Interiorización de las acciones en el punto 1BG a un sólo proceso cuando se identifican todos los puntos sobre la gráfica correspondientes a los elementos de la partición al variar el número de subintervalos. 2CG. Interiorización de las acciones en el punto 1CG a un sólo proceso cuando el número de escalones varía. 2DG. Interiorización de las acciones en el punto 1DG a un sólo proceso cuando se construyen *n* rectángulos usando *n* escalones.	2AA. La interiorización de las acciones en el punto 1AA a un sólo proceso cuando el número de elementos de la partición varía. 2BA. La interiorización de las acciones en el punto 1BA a un sólo proceso cuando se determina la imagen de todos los elementos de la partición al variar el número de elementos de la partición. 2CA. La interiorización de las acciones en el punto 1CA a un sólo proceso cuando el ancho de los subintervalos varía. 2DA. La interiorización de las acciones en el punto 1DA a un sólo proceso cuando el ancho de los subintervalos varía. 2EA. La interiorización de las acciones en el punto 1EA a un sólo proceso

	expresándolo como una sumatoria de *n* elementos.
3G. La interiorización de las acciones a un sólo proceso cuando coordina todas las acciones interiorizadas en el paso 2 (gráfico) e identifica el *k-ésimo* rectángulo construido cuando el número de elementos de la partición es *n*.	3A. La interiorización de las acciones a un sólo proceso cuando coordina todas las acciones interiorizadas en el paso 2 (analítico) y calcula las dimensiones del *k-ésimo* rectángulo construido cuando el número de elementos de la partición es *n*.
	4A. La encapsulación de los procesos 3G y 3A cuando concibe las cantidades que se acumulan creadas por pedacitos incrementales que se forman multiplicativamente para producir una aproximación al valor total acumulado.
	5A. La interiorización de la acción del paso 4A cuando produce mejores aproximaciones al valor total acumulado cuando *n* crece.
	6A. La coordinación de los procesos en los pasos 4A y 5A para determinar la aproximación al valor total acumulado en diferentes situaciones.
	7A. La interiorización de la acción de producir una aproximación al valor total acumulado en el intervalo $[a, x]$ en el proceso de una función $f(x)$, la cual toma como entrada el extremo derecho del subintervalo y produce como salida el valor aproximado de la cantidad total acumulada $f(x)$ en el intervalo $[a, x]$.

	8A. La encapsulación de los procesos en el paso 6A para producir una aproximación a la función de acumulación como un Objeto.

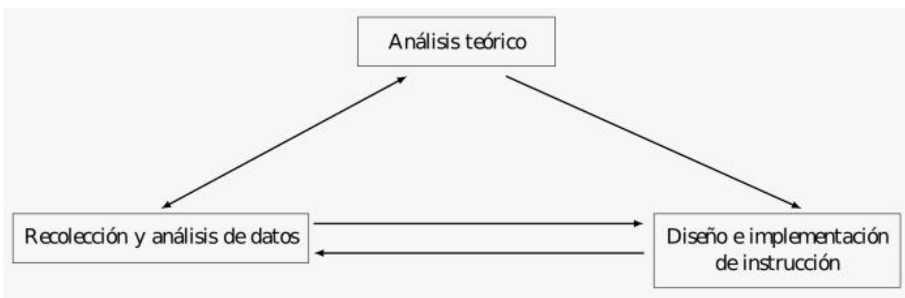
Fuente: Elaboración propia con datos de Bernabé et al. (2013).

2.3 Ciclo de investigación de la teoría APOE

De acuerdo con Arnon et al. (2014) un proyecto de investigación basado en la teoría APOE involucra tres compontes: análisis teórico, diseño e implementación de la instrucción y recolección y análisis de datos. La Figura 2 muestra cómo se relacionan estos componentes.

Figura 2.

Ciclo de investigación de la teoría APOE (Arnon et al., 2014)



De acuerdo con este paradigma, la investigación comienza con un análisis teórico del concepto matemático a estudiar, el cual tiene como propósito proponer modelos que pueden desarrollarse en la mente de un individuo cuando está tratando de aprender un concepto matemático. Un primer acercamiento al análisis teórico da lugar a la *descomposición genética preliminar* del concepto.

En la segunda componente: diseño e implementación de la instrucción se busca mediante actividades y ejercicios fomentar las estructuras y mecanismos mentales sugeridos por la descomposición genética.

En la componente recolección y análisis de datos, como en su nombre lo indica se recolectan los datos que se obtienen de la implementación de la instrucción y se analizan en términos de los constructos de la teoría APOE, estos datos son utilizados para reiniciar el ciclo antes descrito con el propósito de refinar la descomposición genética de tal manera que permita a los estudiantes lograr la comprensión del concepto de interés. El análisis de datos se centra en responder las siguientes dos preguntas:

¿Construyeron los estudiantes las estructuras mentales pedidas por la descomposición genética?

¿Qué tan bien aprendieron los estudiantes el contenido matemático?

Si la respuesta a la primera pregunta es negativa, entonces la instrucción es reconsiderada y revisada; en cambio si la respuesta a la primera pregunta es positiva y la respuesta de la segunda es negativa, el análisis teórico es reconsiderado y revisado.

En cualquier caso, el ciclo de investigación se repite hasta que ambas preguntas sean contestadas positivamente y el instructor o investigador este satisfecho del aprendizaje del concepto matemático por parte de los estudiantes.

Las flechas de la Figura 2 indican que las tres componentes del ciclo de investigación influyen unas en otras, es decir, el análisis teórico conduce al diseño e implementación de la instrucción y este provee una oportunidad para recolectar y analizar datos, los cuales permiten reiniciar el ciclo con el fin de contestar positivamente las dos preguntas descritas anteriormente. Sin embargo, en diferentes investigaciones sólo se realiza una iteración del ciclo y esto se debe al tiempo que lleva realizar cada una de las componentes.

2.4 Ciclo de enseñanza ACE

El ciclo de enseñanza ACE (por sus siglas en inglés) es una estrategia didáctica que consiste en tres componentes: (A) Actividades, (C) Discusión en Clase y (E) Ejercicios.

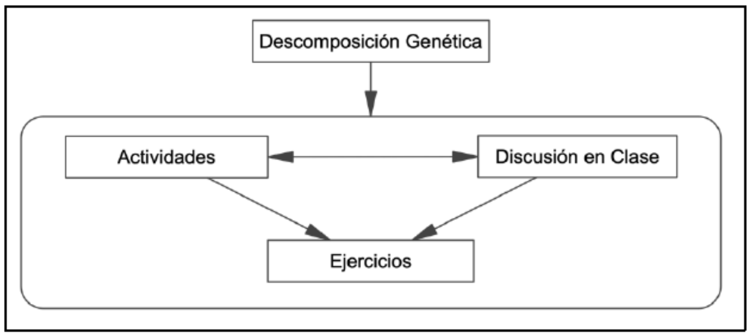
Las Actividades que constituyen el primer paso del ciclo de enseñanza, los estudiantes trabajan colaborativamente en equipos tareas diseñadas para estimular el desarrollo de las construcciones mentales sugeridas por la descomposición genética. El enfoque de estas tareas es promover la abstracción reflexiva más que obtener respuestas correctas.

La Discusión en clase, que corresponde a la segunda componente, es guiada por el investigador mientras los estudiantes realizan tareas. Esta discusión permite a los estudiantes intercambiar ideas y reflexionar sobre sobre su trabajo.

La última componente del ciclo de enseñanza la constituyen los Ejercicios de tarea que consisten en problemas diseñados para reforzar las Actividades y Discusiones que se llevaran a cabo en el aula. Estos tienen como finalidad promover el continuo desarrollo de las construcciones mentales sugeridas por la descomposición genética, además de guiar a los estudiantes a aplicar lo aprendido. En la Figura 3 se ilustra la relación entre el ciclo de enseñanza ACE y la descomposición genética.

Figura 3.

Ciclo de enseñanza ACE (Arnon et al., 2014)



Capítulo 3 Método

Esta investigación se desarrolla en el marco del paradigma cualitativo. Se ubica en el ciclo de investigación de la teoría APOE de la siguiente manera: se aplicaron cinco actividades fundamentadas en la DG de Bernabé et al. (2013) para recabar datos que ofrecieran evidencias de las estructuras y mecanismos mentales de los informantes.

En este capítulo se describe al grupo de estudio y se presentan las cinco actividades que constituyen el instrumento de investigación.

3.1 Grupo de estudio

Los participantes son 11 estudiantes de primer semestre de la licenciatura en Física de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP) que cursaban la materia de Matemáticas Superiores y en donde estudiaron, por primera vez, el concepto de Integral definida. Estos informantes son identificados con la letra E seguido del número 1 al 11.

3.2 Actividades

En esta sección presentamos las actividades que se aplicaron, las primeras tres fueron de elaboración propia y las otras dos fueron seleccionadas y adaptadas de Jiménez-Villanueva (2017)

Actividad 1

En la Figura 1 se muestra la región sombreada R delimitada por la gráfica función f, el eje x y las rectas $x = -2\ y\ x = 2$. Realiza lo que se pide en los siguientes incisos:

a) Estima el área de la región R utilizando primero cuatro subintervalos y después ocho.

b) ¿Con qué cantidad de subintervalos cuatro u ocho, tienes una mejor estimación del área de la región *R*? Justifica tu respuesta escribiendo todos tus cálculos.

c) Si buscas una estimación más cercana del área de la región sombreada ¿qué harías?

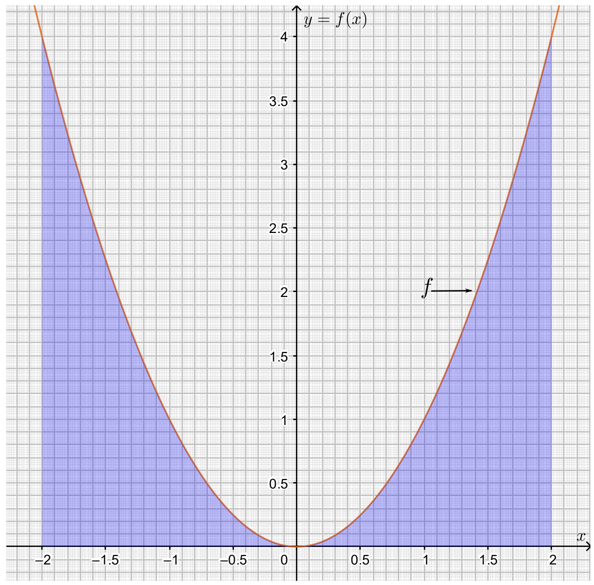


Figura 1. Región R

La actividad se encuentra en el registro geométrico, con ella se busca observar evidencia de la estructura Acción en el mismo registro. Para esta actividad, lo que se pretende observar es lo siguiente:

En el inciso *a):*

i La acción de dividir un intervalo en un número específico de subintervalos.

ii La acción de identificar puntos sobre la gráfica de la función, los cuales correspondan a los elementos de la partición.

iii La acción de construir rectángulos utilizando los puntos identificados sobre la gráfica de la función y el ancho de los subintervalos

iv La acción de calcular el área de los rectángulos y utilizarla para estimar el área de la región *R*.

En el inciso *b)* que los estudiantes reconozcan que conforme aumenta el número de subintervalos, obtienen una mejor estimación del área solicitada. Para finalizar, en el inciso *c)* que estime el área de la región sombreada utilizando más subintervalos, es decir, se espera observar evidencia de la interiorización de las acciones del inciso *a)*

A pesar de que la descomposición genética de Bernabé et al. (2013) no menciona de manera explícita el cálculo de área, consideramos que este se encuentra inmerso en el paso número uno, tanto del registro geométrico (1AG-1DG) como analítico (1AA-1EA). Además, se consideró esta actividad porque en los cursos de Cálculo el concepto de integral definida se introduce mediante el cálculo de áreas.

Actividad 2

La Figura 2 muestra la gráfica de la función $f(x) = -x^2 + 2x + \frac{1}{2}$. Sea R la región limitada por la gráfica de la función f, el eje x y las rectas $x = 0$ y $x = 3$. Realiza lo que se pide en los siguientes incisos:

a) Divide el intervalo en seis subintervalos del mismo tamaño. Expresa la respuesta como una lista formada por los extremos de los subintervalos en orden creciente.

b) Evalúa la función en los extremos de los subintervalos.

c) Calcula el ancho de cada subintervalo, denótalo con Δx.

d) Para cada subintervalo, multiplica su ancho por el valor de la función en el extremo derecho.

e) Suma los productos realizados en el inciso *d)*. A esta suma la llamaremos suma acumulada.

f) Estima el área de la Región *R*. Justifica tu respuesta escribiendo todos tus cálculos.

g) ¿Qué ocurre con el área estimada de la región R y la suma acumulada cuando aumentas el número de subintervalos? Justifica tu respuesta.

h) ¿Encuentras alguna relación entre el área estimada de la región R y la suma acumulada obtenida en el inciso *e)*? Justifica tu respuesta.

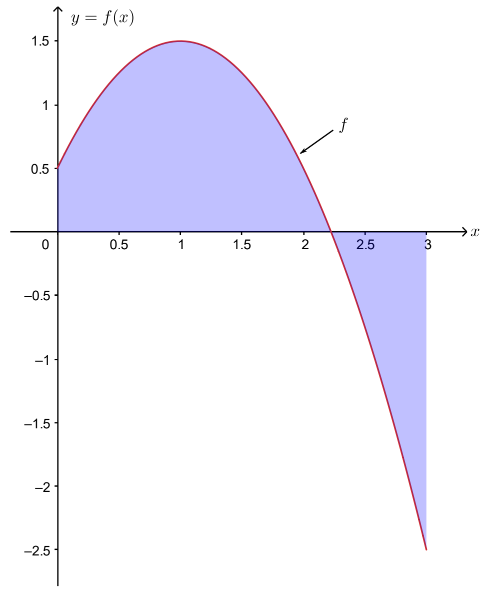


Figura 2. Gráfica de la función $f(x) = -x^2 + 2x + \frac{1}{2}$

La actividad se encuentra tanto en el registro analítico como en el geométrico. Se presenta información en este último para que el informante pueda realizar el inciso *f)*. Con esta actividad se espera observar:

En los incisos del *a)* al *e)* acciones en el registro analítico (paso 1AA-1EA), es decir, a partir de un intervalo y la expresión algebraica de la función, el estudiante calcule los elementos de la partición y el valor de la función en estos; los cuales le permitirán calcular el término que llamamos suma acumulada.

En el inciso *f)*, se espera observar acciones tanto en el registro analítico como geométrico (paso 1AA-1AE y 1AG-1EA respectivamente), al utilizar la gráfica de la función para construir rectángulos y determinar las dimensiones de estos a partir de los elementos de la partición y la expresión algebraica de la función. Esto con el fin de calcular sus áreas y utilizarlas para estimar el área total de la región sombreada.

En el inciso *g)* se espera que los estudiantes reconozcan que la suma acumulada y el área estimada no necesariamente representan lo mismo y esto se debe a que la función toma tanto valores negativos como positivos en el intervalo de interés.

Por último, con el inciso *h)* se espera que el estudiante reconozca que al aumentar el número de subintervalos el área estimada se aproxima cada vez más al área de la región sombreada mientras que la suma acumulada se aproxima a la integral definida y que en este problema dado que la función toma valores negativos el área bajo la curva y la integral definida no coinciden.

Actividad 3

Considera la función $g(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 2 \\ x+1, & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$ en el intervalo [0,3]. Realiza lo que se pide en los siguientes incisos.

a) Dibuja la gráfica de la función g.

b) Calcula la suma acumulada en el intervalo [0,3] utilizando seis subintervalos. Justifica tu respuesta escribiendo todos tus cálculos.

c) ¿Qué pasaría con la suma acumulada si aumentaras el número de subintervalos? Justifica tu respuesta.

d) Identifica con a y b los extremos del intervalo $[0,3]$. Sea n el número de subintervalos y Δx el ancho de cada subintervalo. Expresa la suma acumulada en notación matemática usando el símbolo de sumatoria, $\sum$, y las variables antes descritas.

e) La suma acumulada del inciso *d)* ¿es el valor del área de la región limitada por la gráfica de función g, el eje x y las rectas $\mathrm{x} = 0$ y $\mathrm{x} = 3$? Justifica tu respuesta.

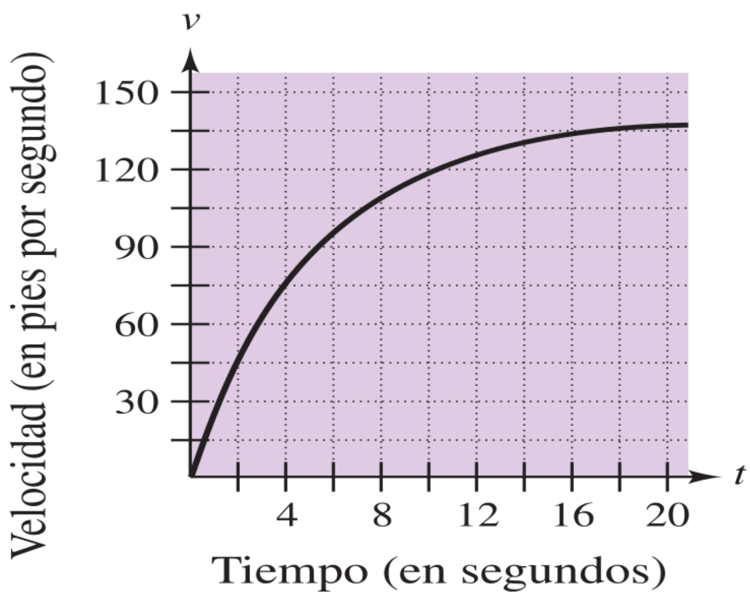
La actividad 3 se encuentra en el registro analítico y con esta se espera observar lo siguiente:

El inciso *b)* evidencia la estructura Acción en el registro analítico. En los incisos *c)* y *e)* se pretende que los estudiantes reconozcan que, dado que la función toma únicamente valores positivos en el intervalo de interés, la suma acumulada es una aproximación al área bajo la curva y a su vez es la integral definida.

El inciso *d)* evidencia la estructura Proceso al interiorizar las acciones realizadas en el inciso *a)* al trabajar con n subintervalos.

Actividad 4

La gráfica muestra la velocidad, en pies por segundo, de un automóvil que acelera desde el estado de reposo. Emplea la gráfica para estimar la distancia que el automóvil recorre en los primeros ocho segundos. ¿Existe alguna relación entre el área bajo la gráfica de la función en el intervalo $[0,8]$ y la distancia recorrida por el automóvil? Justifica tu respuesta mostrando todos tus cálculos.



Para esta actividad lo que se busca observar es evidencia de la estructura Acción en el registro geométrico, al realizar acciones para determinar el área bajo la curva y reconocer que, dado que la función toma únicamente valores positivos, el área bajo la curva coincide con la distancia recorrida por el automóvil.

Actividad 5

Se pone un jarrón con agua a calentar durante siete minutos. La rapidez con la que aumenta la temperatura del agua en grados Celsius (°C) por minuto lo expresa la función $F(t) = ut^2 - vt$, donde $u = 1.25\frac{°C}{min^3}, v = 2.5\frac{°C}{min^2}$ ¿Cuánto aumentó la temperatura durante los siete minutos? Justifica tu respuesta escribiendo todos tus cálculos y consideraciones.

La actividad se encuentra en el registro analítico. Con ella se busca observar evidencia del paso 6A de la DG, al dar una aproximación al valor total acumulado para una situación de cambio de temperatura.

3.3 Procedimiento

La aplicación de las actividades se realizó después de finalizar el tema de integral definida en el curso de matemáticas superiores y cuya enseñanza fue tradicional. Se requirieron dos sesiones, la primera sesión de dos horas y la segunda de tres horas. En la sesión 1 se aplicaron las actividades 1 y 2 con un tiempo máximo de una hora por actividad. En la sesión 2 se aplicaron las actividades 3, 4 y 5 con un tiempo máximo de una hora por actividad. Después de finalizar la sesión 2 se dio una hora extra para que los estudiantes subieran, a la plataforma Microsoft Teams, las soluciones de estas actividades.

Las cinco actividades conformaron la evaluación del tema integral, por lo que podemos decir que los estudiantes tenían un incentivo para colaborar y resolver las actividades.

Capítulo 4 Resultados

En este capítulo mostramos las respuestas que los informantes proporcionaron a las actividades de esta investigación.

Los resultados se presentarán de la siguiente manera: actividad, pasos de la DG observados en las respuestas de los participantes y algunas respuestas de estos.

4.1 Actividad 1

a) Estima el área de la región R utilizando ocho subintervalos.

De las soluciones estudiantiles identificamos que sólo en este inciso se observó evidencia de algunos pasos de la DG. A partir de estas respuestas se desglosan las siguientes dos categorías para resolver la actividad:

Categoría 1. El estudiante traduce la función involucrada del registro geométrico al analítico.

Categoría 2. El estudiante resuelve la actividad en el registro geométrico**.**

En la Tabla 2 se exhiben los pasos de la DG observados en las respuestas de los once informantes. La categoría en la que se ubica la solución de cada estudiante se indica con diferentes colores: amarillo para la Categoría 1 y azul para la Categoría 2.

Tabla 2.

Pasos de la DG que se observan en las respuestas al inciso a)

<table>
<tr><th rowspan="4">Alumno</th><th colspan="9">Pasos de la DG</th><th rowspan="4">Total</th></tr>
<tr><th colspan="9">a)</th></tr>
<tr><th colspan="4">Registro geométrico</th><th colspan="5">Registro analítico</th></tr>
<tr><th>1AG</th><th>1BG</th><th>1CG</th><th>1DG</th><th>1AA</th><th>1BA</th><th>1CA</th><th>1DA</th><th>1EA</th></tr>
<tr><td>E1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>4</td></tr>
<tr><td>E2</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>4</td></tr>
<tr><td>E3</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>5</td></tr>
<tr><td>E4</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>5</td></tr>
<tr><td>E5</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>E6</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>7</td></tr>
<tr><td>E7</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>5</td></tr>
<tr><td>E8</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>4</td></tr>
<tr><td>E9</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>5</td></tr>
<tr><td>E10</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>4</td></tr>
<tr><td>E11</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>5</td></tr>
<tr><td>Total</td><td>6</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td><td>7</td><td>5</td><td>7</td><td>7</td><td></td></tr>
</table>

Nota: 1 indica que el estudiante muestra evidencia del paso de la DG, mientras que 0 que no muestra evidencia.

De la Tabla 2 se observa que, los informantes E2, E5, E8 y E10 se encuentran en la categoría 2 al resolver la actividad en el registro geométrico. De estos estudiantes sólo E2, E8 y E10 mostraron evidencia de los 1AG al 1DG de la DG, al realizar las siguientes acciones:

- Dividir un intervalo en un número específico de subintervalos.
- Identificar puntos sobre la gráfica de la función, los cuales corresponden a los elementos de la partición.
- Construir rectángulos utilizando los puntos identificados sobre la gráfica de la función y el ancho de los subintervalos.
- Estimar el área de la región R mediante el área de los rectángulos construidos previamente.

De las acciones realizadas se puede concluir que los informantes exhibieron evidencia de la estructura Acción en el registro geométrico.

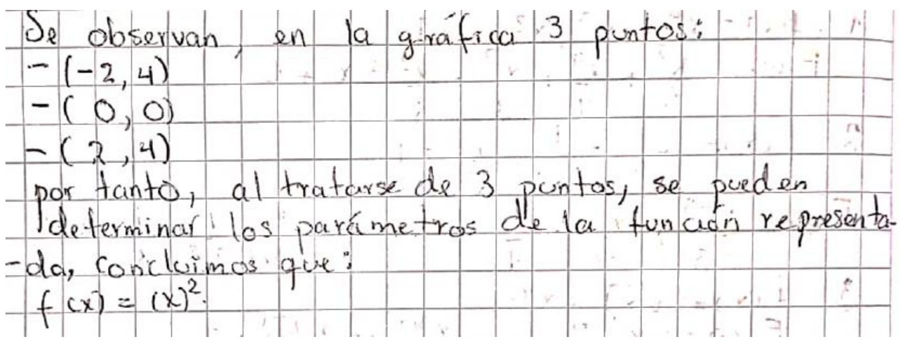
El estudiante E5 no mostró evidencia de ningún paso de la DG porque para estimar el área de la región R utilizó el método gráfico, es decir, el área de figuras como cuadrados; triángulos; rectángulos y en su proceso de resolución no se identificó ningún paso de la DG.

Por su parte los informantes E1, E3, E4, E6, E7, E9 y E11 se encuentran en la categoría 1, al cambiar del registro geométrico al analítico. El cambio del registro geométrico al analítico ocurre en los siguientes pasos de la DG: 1AA-calcular los elementos de la partición o 1BA-calcular los valores de la función correspondiente a los elementos de la partición.

Los estudiantes que realizaron el cambio del registro geométrico al analítico al calcular los elementos de la partición son: E4, E7, E9 y E11. Estos informantes recurrieron a la expresión algebraica de la función correspondiente a la gráfica que se les proporcionó. De estos estudiantes, sólo E11 explicó la forma de deducir la expresión algebraica de la función, pero no hizo los cálculos. Ver Figura 4.

Figura 4.

Procedimiento para encontrar la expresión algebraica de la de la función.


Se observan, en la gráfica 3 puntos:
- (-2, 4)
- (0, 0)
- (2, 4)
por tanto, al tratarse de 3 puntos, se pueden determinar los parámetros de la función representa-da, concluimos que:
$f(x) = (x)^2$.

Por su parte, los estudiantes E1, E3, y E6 realizaron el cambio del registro geométrico al analítico al requerir los valores de la función correspondiente a los elementos de la partición, es decir, empezaron a realizar la actividad en el registro geométrico, pero al requerir los puntos sobre la gráfica de la función correspondiente a los elementos de la partición, recurrieron a la expresión algebraica de la función sin precisar cómo llegaron a esta. Con esto los estudiantes muestran evidencia de la acción de hacer particiones de un intervalo para construir subintervalos (paso 1AG de la DG) e inmediatamente exhiben la acción de calcular los valores de la función correspondiente a los elementos de la partición (paso 1BA).

De los informantes que se encuentran en la categoría 1 sólo E4, E7, E9 y E11 mostraron evidencia de la estructura Acción en el registro analítico al realizar cada una de las siguientes acciones:

- Calcular los elementos de la partición
- Evaluar la función en los elementos de la partición.

- Calcular el ancho de cada subintervalo.
- Multiplicar el ancho de los subintervalos por el valor de la función en los elementos de la partición.
- Sumar los valores obtenidos de los productos enunciados anteriormente.

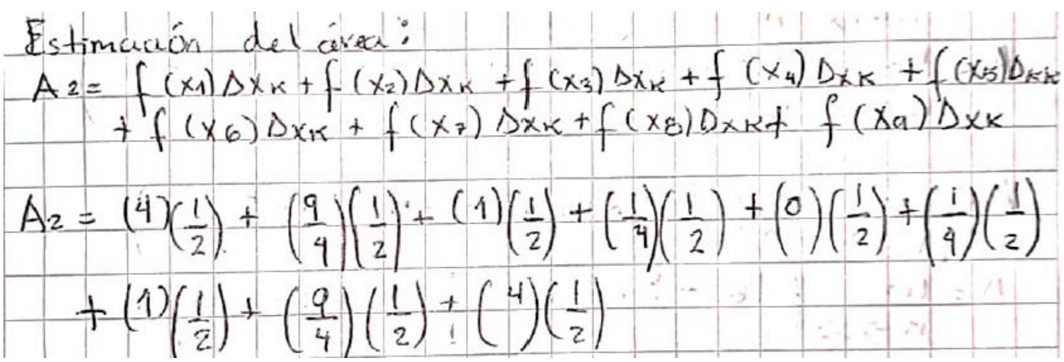
De la Tabla 2 se puede observar que al estudiante E3 le faltó mostrar evidencia del paso 1AA de la DG, el cual corresponde a la acción de calcular los elementos de la partición, en su lugar mostró la acción de hacer particiones del intervalo utilizando la gráfica de la función. Por esto último, el estudiante no muestra evidencia de la estructura Acción en el registro analítico.

A continuación, se presentan y describen soluciones representativas a las categorías mencionadas previamente.

En la Figura 5 vemos la respuesta de E11, la cual es representativa de la forma cómo respondieron los informantes E4, E7 y E9 quienes se encuentran en la categoría 1 y el cambio de registro ocurre al calcular los elementos de la partición (paso 1AA).

Figura 5.

Respuesta de E11 para estimar el área de la región.



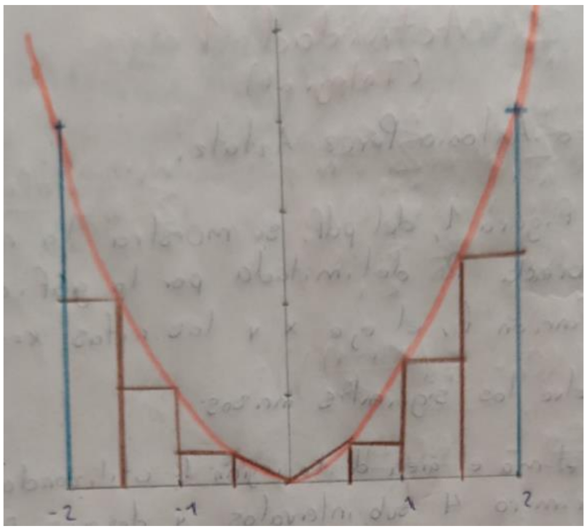
De la Figura 5 se puede observar que el área de la región *R* es estimada mediante la suma de productos. Estos productos corresponden al ancho de los subintervalos por el valor de la función en los elementos de la partición. Para conocer el valor del área estimada se realizaron acciones tales como: Calcular los elementos de la partición (paso 1AA) mediante la fórmula $x_k = \mathrm{a} + \mathrm{k}\Delta x$, donde Δx corresponde al ancho de los subintervalos y se obtuvo mediante la fórmula $\Delta x = \frac{b-a}{n}$; con a, b extremos del intervalo $[-2,2]$ y n el número de subintervalos (paso 1CA). Calcular los valores de la función correspondiente a los elementos de la partición (paso 1BA). Calcular los productos correspondientes al ancho de los subintervalos por el valor de la función en los elementos de la partición para finalmente sumarlos (paso 1DA y 1EA, respectivamente).

A partir de las respuestas proporcionada por E11, se puede concluir que los estudiantes E4, E7 y E9 muestran evidencia de los pasos 1AA-1EA de la DG, por lo que podemos concluir que usan la estructura Acción en el registro analítico.

El otro ejemplo de respuesta corresponde a los estudiantes E1, E3 y E6 quienes se encuentran en la *categoría 1* y el cambio del registro geométrico al analítico ocurre al requerir los valores numéricos de la gráfica de la función correspondientes a los elementos de la partición. En la Figura 6, se presenta la solución de E6.

Figura 6.

Rectángulos y triángulos construidos por E6.



De la Figura 6 se observa que para estimar el área de la región solicitada el estudiante E6 utiliza el área de rectángulos. Para la construcción de estos, el estudiante realizó las siguientes acciones:

- Dividir el intervalo $[-2,2]$ en ocho subintervalos utilizando la gráfica y el plano cuadriculado.
- Identificar puntos sobre la gráfica de la función correspondientes a los extremos de los subintervalos.

Para identificar los puntos sobre la gráfica de la función, E6 considera las porciones del semieje X negativo y positivo involucrados en el intervalo $[-2,2]$. En el semieje negativo considera el extremo derecho de los subintervalos mientras que en el semieje positivo considera el extremo izquierdo.

- Trazar rectángulos de base igual al ancho de los subintervalos y altura igual a la distancia del eje X al punto sobre la gráfica de la función correspondiente a un extremo del subintervalo.

Consideramos que en la acción de trazar los rectángulos está implícita la construcción de una gráfica escalonada que se forma al unir los puntos sobre la gráfica de la función correspondientes a los extremos de los subintervalos.

De acuerdo con la construcción de los rectángulos, en la región cercana al origen de la gráfica de la función (ver Figura 6) se tendría dos rectángulos de altura igual a cero, cuyas áreas serían cero, por lo que el estudiante decide reemplazarlos por dos triángulos, esto con el objetivo de tener una mejor estimación al área de la región solicitada.

De las acciones realizadas para construir los rectángulos el estudiante E6 muestra evidencia de los pasos 1AG al 1DG en el registro geométrico. De esto podemos concluir, que exhibe evidencia de la estructura Acción en el registro geométrico.

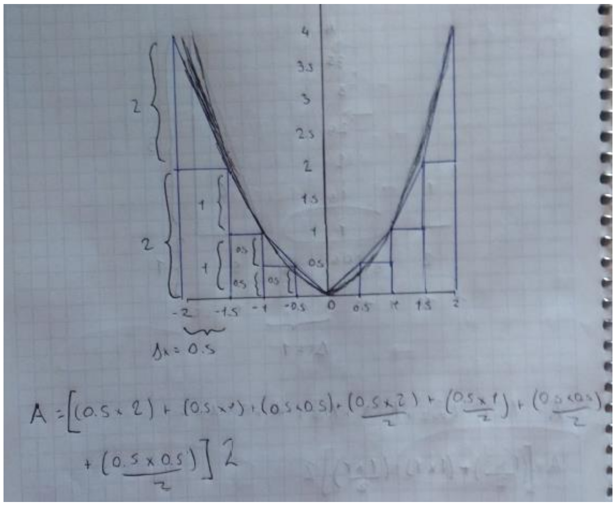
Para hallar las dimensiones de los rectángulos y calcular el área de estos, E6 recurrió al registro analítico al utilizar la expresión algebraica de la función para evaluar los elementos de la partición y así encontrar la altura. En estas acciones el estudiante exhibió evidencia de los pasos 1BA, 1DA y 1EA de la DG en el registro analítico.

Los informantes E1 y E3 al igual que E6 iniciaron resolviendo la actividad en el registro geométrico al utilizar la gráfica de la función para dividir el intervalo $[-2,2]$ en un número específico de subintervalos, pero a diferencia de E6, después de esta acción, ellos inmediatamente se cambiaron al registro analítico al utilizar la expresión algebraica de la función para conocer los puntos sobre la gráfica de la función correspondientes a los elementos de la partición, es decir, no trazaron ningún rectángulo.

Por último, presentamos la respuesta del estudiante E2, la cual es representativa de la forma en como respondieron los informantes E8 y E10, que se encuentran en la *categoría 2*.

Figura 7.

Uso de triángulos y rectángulos para estimar el área de la región R



De la Figura 7 podemos observar que E2 utiliza el área de triángulos y rectángulos para estimar el área de la región *R*. En la construcción de los rectángulos están inmersas las siguientes acciones:

- Dividir el intervalo $[-2,2]$ en ocho subintervalos utilizando la gráfica de la función (paso 1AG). A partir de la gráfica de la función y el plano cuadriculado determina el ancho de los subintervalos.
- Identificar puntos sobre la gráfica de la función correspondiente a los extremos de los subintervalos (paso 1BG).
- Identificar las dimensiones de los rectángulos de la siguiente manera: base igual al ancho de los subintervalos y altura igual a la distancia del eje X al punto sobre la gráfica de la función correspondiente al extremo del subintervalo. Para aproximar las dimensiones de los rectángulos E2 utiliza como referencia el plano cartesiano cuadriculado (paso 1CG).

En el trazo de los rectángulos concluimos que está implícita la construcción de una gráfica escalonada que se forma al unir los puntos sobre la gráfica de la función correspondientes a los extremos de los subintervalos.

Finalmente, para estimar el área de la región solicitada el estudiante utiliza el área de los rectángulos construidos previamente. La diferencia de la respuesta de E2 con la de E3 es que este únicamente requiere de la gráfica de la función y el plano cuadriculado para estimar el área de los rectángulos, es decir, no necesita de la expresión algebraica de la función. A partir de este tipo de respuesta, se puede concluir que los informantes E2, E8 y E10 muestran evidencia de la estructura Acción en el registro geométrico.

b) ¿Con qué cantidad de subintervalos cuatro u ocho obtienes una mejor estimación del área de la región R? Justifica tu respuesta escribiendo todos tus cálculos.

En este inciso, todos los informantes respondieron que con ocho subintervalos se obtiene una mejor estimación del área solicitada, pero no dieron una justificación, por lo que no muestran la estructura Proceso y esto se debe, a que exhiben evidencia de los pasos 2AA al 22EA de la DG en el registro analítico.

c) Si buscas una estimación más cercana del área de la región sombreada ¿qué harías?

Los estudiantes E1, E2, E6, E8, E9 y E10 indicaron que, para obtener una mejor estimación del área solicitada considerarían n subintervalos o subintervalos cada vez más pequeños. Por su parte, E3 manifestó que, haría tener a infinito el número de subintervalos para obtener una mejor estimación. De esto concluimos que, los estudiantes E1, E2, E3, E6, E8, E9 y E10 han interiorizado la acciones, porque pueden pensar en dividir el intervalo de interés en n subintervalos y la división la están imaginando.

Los informantes E5, E7 exhiben evidencia de la concepción Acción del concepto de integral definida desde un acercamiento al teorema fundamental del cálculo al determinar su valor, identificando la antiderivada y evaluando en los extremos del intervalo (Jiménez-Villanueva, 2017, p.47). Por último, E11 utilizó el límite de sumas de Riemann, pero no desarrollo el límite y se equivocó al determinar la forma que toman los elementos de la partición.

4.2 Actividad 2

La Figura 2 muestra la gráfica de la función $f(x) = -x^2 + 2x + \frac{1}{2}$. Sea R la región limitada por la gráfica de la función f, el eje x y las rectas $x = 0$ y $x = 3$. Realiza lo que se pide en los siguientes incisos:

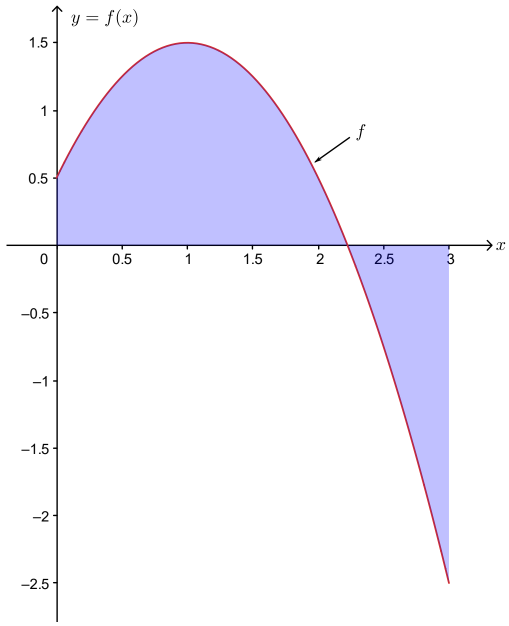
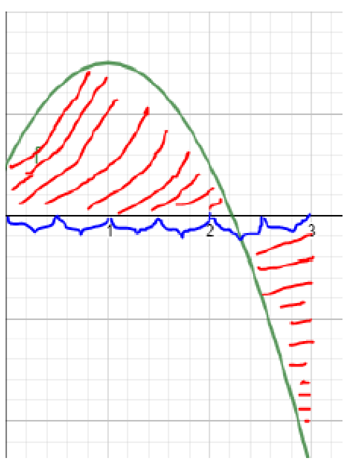


Figura 2. Gráfica de la función $f(x) = -x^2 + 2x + \frac{1}{2}$

a) Divide el intervalo en seis subintervalos del mismo tamaño. Expresa la respuesta como una lista formada por los extremos de los subintervalos en orden creciente.

Figura 8.

División gráfica del intervalo $[0,3]$ *en seis subintervalos.*

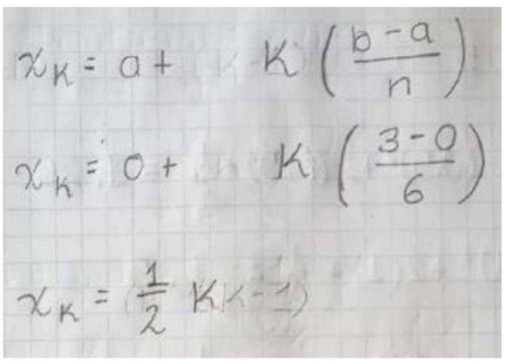


En la Figura 8 vemos un ejemplo de cómo respondieron ocho (E1, E2, E3, E5, E6, E8, E19 y E11) de los once informantes. A partir de la gráfica de la función y el plano cuadriculado, los ocho estudiantes dividieron el intervalo $[0,3]$ en seis subintervalos del mismo tamaño. Con esto, los informantes mostraron evidencia de la acción de dividir el intervalo de interés en un número específico de subintervalos.

En la Figura 9 vemos otro ejemplo de cómo respondieron tres (E4, E9 y E11) de los 11 informantes. Se puede observar que, para calcular los elementos de la partición utilizaron la fórmula $\Delta x = a + k\left(\frac{b-a}{n}\right)$, donde a, b, n corresponden a los extremos del subintervalo y al número de subintervalos, respectivamente. Con esta acción los estudiantes exhiben evidencia del paso 1AA de la DG en el registro analítico.

Figura 9.

Respuesta de E9 para determinar los elementos de la partición.



b) Evalúa la función en los extremos de los subintervalos.

En este inciso, todos los informantes utilizaron la expresión algebraica de la función para evaluar los elementos de la partición. De los 11 estudiantes sólo E6 omitió evaluar la función en el punto *x=2.5*, el cual corresponde al extremo derecho del subintervalo de la partición donde la función cambia de signo. A pesar de esto, se considera que el estudiante al igual que el resto de los informantes muestra evidencia de la acción de calcular los valores de la función correspondientes a los elementos de la partición y esto se debe a que evalúa de manera correcta los demás puntos.

c) Calcula el ancho de cada subintervalo, denótalo con Δx

Para calcular el ancho de los subintervalos, los informantes E3, E4, E6, E7, E9, E11 utilizaron la fórmula $\frac{b-a}{n}$, donde a, b son los extremos del intervalo de interés y n el número de subintervalos. Por su parte, los estudiantes E1, E5 y E10 utilizaron la fórmula $x_{i+1} - x_i$, los cuales corresponden a los extremos de los subintervalos.

De estas respuestas, los estudiantes exhiben evidencia de la acción de calcular el ancho de los subintervalos (paso 1CA en el registro analítico).

Por otro lado, los informantes E2 y E8 no mostraron evidencia de este paso de la DG y esto se debe a que únicamente presentaron la respuesta y no justificaron cómo lo obtuvieron.

d) Para cada subintervalo, multiplica su ancho por el valor de la función en el extremo derecho.

Figura 10.

Multiplicación entre el valor de la función y el ancho de los subintervalos.

d) Para cada subintervalo, multiplica su ancho por el valor de la función en el extremo derecho.

1. 1.25 * 0.5 = 0.6125

2: 1.5* 0.5 = 0.725

3. 1.25* 0.5 = 0.6125

4: 1/2* 0.5 = 0.25

5: -0.75* 0.5 = - 0.375

6: -2.5* 0.5 = -1.25

En la Figura 10 vemos un ejemplo de cómo respondieron los estudiantes E1, E3, E5, E7, E9, E10 y E11. Para realizar los productos utilizaron el ancho de los subintervalos y el valor de la función correspondiente al extremo derecho. Los informantes E2 y E4 no consideraron el extremo derecho de los subintervalos. E2 consideró todos los elementos de la partición, lo cual trae como consecuencia que agregue un subintervalo, por lo que en lugar de trabajar con seis como lo pide la actividad lo hizo con siete. Por su parte E4 consideró el extremo izquierdo de los subintervalos.

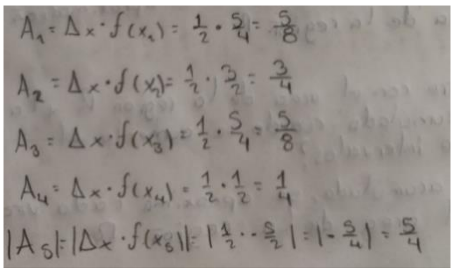
A pesar de esto, consideramos que los estudiantes E1, E3, E5, E7, E9, E10, E11, E2 y E4 manifiestan evidencia de la acción de calcular los productos correspondientes al ancho de los subintervalos por el valor de la función en los elementos de la partición.

En la Figura 11 se muestra un ejemplo de cómo respondieron los estudiantes E6 y E8. Se puede observar que aplicaron el valor absoluto a las cantidades negativas. Consideramos que esto se debe a que los estudiantes asociaron los productos con el área de rectángulos cuyas dimensiones son: base igual al ancho de los subintervalos y altura igual a la distancia del eje X al punto sobre la gráfica de la función correspondiente al extremo del subintervalo.

Por cambiar el signo a las cantidades negativas consideramos que los estudiantes no muestran evidencia de la acción de calcular los productos correspondientes al ancho de los subintervalos por el valor de la función en los elementos de la partición (paso 1DA de la DG).

Figura 11.

Multiplicación entre el valor de la función y el ancho de los subintervalos



e) Suma los productos realizados en el inciso *d)*. A esta suma la llamaremos suma acumulada.

Figura 12.

Respuesta de E5

e) Suma los productos realizados en el inciso d). A esta suma la llamaremos suma acumulada.

$\sum I = 0.05 + 0.6125 + 0.725 + 0.6125 + 0.25 - 0.375 - 1.25 = 0.625$

En la Figura 12 se muestra la respuesta de E5, la cual es representativa de la forma cómo respondieron los estudiantes E2, E3, E5, E6, E7, E8, E9, E10 y E11 al inciso *e)*. Para obtener el resultado de la suma acumulada solo sumaron los valores de los productos obtenidos en el inciso *d)*. Con esto, los estudiantes mostraron evidencia de la acción de acumular valores, es decir, evidencia del paso 1EA de la DG. Por su parte, los estudiantes E1 y E4 no mostraron evidencia de este paso de la DG y esto se debe a que el valor obtenido no corresponde a la suma de los valores del inciso *d)*. En el caso de E1 se debe a que les cambió el signo a las cantidades negativas y en E4 es difícil decir con exactitud lo que el estudiante realiza.

De las respuestas a los incisos *d)* y *e)* identificamos las siguientes categorías:

Categoría 1. Los estudiantes asocian la suma acumulada con el área limitada entre la gráfica de la función y el eje X, por lo que les cambian el signo a las cantidades negativas.

Categoría 2. Estudiantes que no asocian la suma acumulada con el área limitada entre la gráfica de la función y el eje X.

Los estudiantes que se encuentran en la categoría 1 son: E1, E6 y E8; mientras los que se encuentra en la categoría 2 son: E2, E3, E4, E5, E7, E9, E10 y E11.

Consideramos que los estudiantes que se encuentran en la categoría 1 pudieron verse influenciados por el inciso *f)* en donde se les pide estimar el área de una región. Es decir, asociaron el procedimiento de suma acumulada con el área de rectángulos.

4.2.1 Pasos de la DG observados en las respuestas a los incisos del *a)* al *e)*.

En la Tabla 3 se muestran los pasos de la DG que se observaron en las respuestas de los informantes correspondientes a los incisos del *a)* al *e)*. El número 1 indica que se observó evidencia del paso de la DG mientras que el número 0 que no se observó.

Tabla 3.

Pasos de la DG observados en las respuestas a los incisos del a) al e)

Informantes	Incisos						***Total, de pasos de la DG***
	a)		***b)***	***c)***	***d)***	***e)***	
	Pasos de la DG						
	Registro geométrico	Registro analítico					
	1AG	**1AA**	**1BA**	**1CA**	**1DA**	**1EA**	
E1	1	0	1	1	1	0	4
E2	1	0	1	0	1*	1	4
E3	1	0	1	1	1	1	5
E4	0	1	1	1	1*	0	4
E5	1	0	1	1	1	1	5
E6	1	0	-1	1	0	1	4
E7	1	0	1	1	1	1	5
E8	1	0	1	0	0	1	3
E9	0	1	1	1	1	1	5
E10	1	0	1	1	1	1	5
E11	0	1	1	1	1	1	5
Total	8	3	11	9	9	9	

Nota: El número -1 indica que el estudiante omitió evaluar la función en un punto, mientras que 1* significa que no se consideró el extremo derecho de los subintervalos.

De la tabla 3 se observa que los estudiantes E9 y E11en sus respuestas exhibieron evidencia de los pasos 1AA al 1DA de la DG en el registro analítico, esto nos dice que los estudiantes muestran la estructura Acción en el registro analítico. Por su parte a los informantes E3, E5, E7 y E10 les faltó mostrar evidencia de la acción de calcular los elementos de la partición (paso 1AA) para mostrar la estructura Acción, en su lugar exhibieron evidencia de la acción de hacer particiones de un intervalo para construir subintervalos utilizando la gráfica de la función y el plano cuadriculado. A pesar de esto, el procedimiento y respuesta de los estudiantes es correcto, de esto podemos concluir que los informantes comprendieron el proceso para calcular la suma acumulada.

Los estudiantes E2 y E8 no exhiben evidencia de la acción de calcular el ancho de los subintervalos, porque únicamente presentan el resultado y no justifican cómo lo obtuvieron.

f) Estima el área de la Región *R*. Justifica tu respuesta escribiendo todos tus cálculos.

En la Tabla 4 se presentan los métodos empleados por los informantes para estimar el área de la región sombreada.

Tabla 4.

Métodos empleados para calcular el área de la región sombreada

Informantes	**Método**
E4, E9, E10, E11	Sumas de Riemann
E1, E5, E7, E8	Teorema fundamental del Cálculo
E2	Método gráfico
E6	Suma acumulada con valor absoluto
E3	Suma acumulada

De la Tabla 4 se puede observar que los informantes E4, E9, E10, E11, E1, E8, E5 y E7 no reconocieron que dado que la función cambia de signo en el intervalo de interés no es posible estimar el área de la región mediante la aplicación directa de estos métodos. Por ejemplo, los estudiantes E1, E5, E7 y E8 debieron primero dividir el intervalo en dos subintervalos y posteriormente aplicar el teorema fundamental del cálculo para obtener el área.

El estudiante E3 aplicó el procedimiento descrito en los incisos del *a)* al *e)*. No reconoció que este proceso incluye el producto de cantidades negativas por lo que el resultado no proporciona una estimación al área solicitada. Por el contrario, E6 aplica el mismo proceso descrito en los incisos del *a)* al *e)* pero con la diferencia de que aplica valor absoluto a las cantidades negativas.

A pesar de esto, en el procedimiento seguido por los estudiantes E4, E9, E10 E11, E3 y E6 se observaron las siguientes acciones: calcular los elementos de la partición, calcular el valor de la función en los elementos de la partición, calcular el ancho de los subintervalos, multiplicar el ancho de los subintervalos por el valor de la función, sumar los productos para estimar el área total. Es decir, evidencia de la estructura Acción en el registro analítico. Por su parte, los estudiantes E1, E5, E7 y E8 mostraron evidencia de la estructura Acción del concepto de integral definida desde un acercamiento al teorema fundamental del cálculo al calcular la antiderivada de una función específica y evaluar en los límites de integración. E4 no exhibe ningún paso de la DG.

g) ¿Encuentras alguna relación entre el área estimada de la región *R* y la suma acumulada obtenida en el inciso *e)*? Justifica tu respuesta.

Tabla 5.

Respuesta de los informantes a la pregunta del inciso g)

Informantes	Relación entre la suma acumulada y el área estimada
E1, E2, E4, E5, E6, E7, E8, E9, E10	Ambos proporcionan una estimación del área de la región sombreada
E3	Relación de proporcionalidad inversa
E11	No contestó

En la Tabla 5 se presenta las respuestas de los informantes. En esta se puede observar que la mayoría de estos indicó que la suma acumulada es una aproximación al área de la región sombreada. Sin embargo, esto es erróneo porque la función toma valores negativos.

h) ¿Qué ocurre con el área de la región *R* y la suma acumulada cuando aumentas el número de subintervalos? Justifica tu respuesta.

Los informantes E2, E6, E7, E8, E10 indicaron que conforme se aumenta el número de subintervalos la suma acumulada se aproxima cada vez más al área de la región *R.*

E3 mencionó que conforme se consideran más subintervalos la suma acumulada aumenta y el área estimada disminuye.

Los estudiantes E1, E9 indicaron que al aumentar el número de subintervalos se obtiene una mejor estimación del área de la región *R*, esta respuesta es correcta, sin embargo, no mencionan nada respecto a la suma acumulada. Por su parte E5 indicó que tanto el área estimada como suma acumulada se aproximan cada vez más al área bajo la curva.

De las respuestas se puede observar que los estudiantes no lograron reconocer que la suma acumulada y el área estimada no coinciden y esto se debe a que la función toma valores negativos.

4.3 Actividad 3

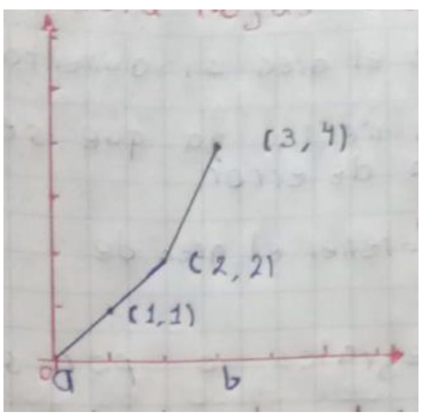
Considera la función $g(x)=\begin{cases} x, & 0\le x<2 \\ x+1, & 2\le x\le 3\end{cases}$ en el intervalo [0,3]. Realiza lo que se pide en los siguientes incisos:

a) Dibuja la gráfica de la función g.

De las respuestas proporcionadas concluimos que nueve (E2, E3, E4, E5, E7, E8, E9, E10 y E11) de los 11 informantes graficaron de manera correcta la función a trozos. Mientras que E1 y E6 no reconocieron que en el punto $x=2$, la función hace un salto y la dibujaron continua. Ver Figura 13.

Figura 13.

Solución de E1 y E6 al inciso *a)*

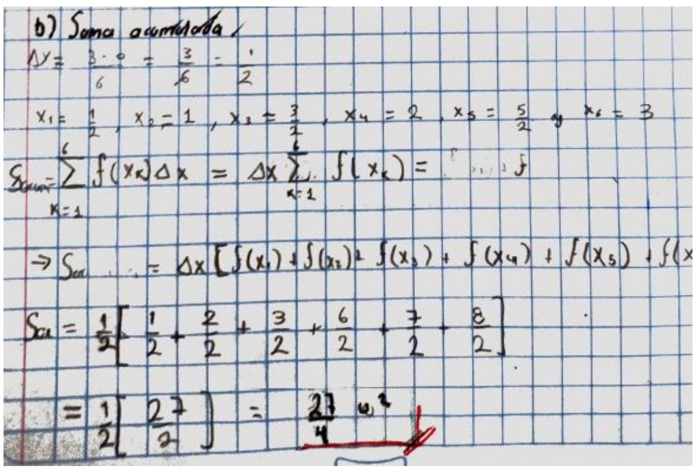


b) Calcula la suma acumulada en el intervalo [0,3] utilizando seis subintervalos. Justifica tu respuesta escribiendo todos tus cálculos.

En la Figura 14 vemos un ejemplo de cómo respondió el informante E3, la cual es similar a las respuestas de los estudiantes E6, E7, E10 y E11. Para determinar la suma acumulada realizaron acciones tales como: utilizar la gráfica construida en el inciso *a)* para identificar los extremos de los subintervalos (paso 1AG); calcular el ancho de los subintervalos (paso 1CA); evaluar la función en los extremos de los subintervalos (paso 1BA); calcular los productos del ancho del subintervalo por el valor de la función en el extremo derecho de los subintervalos (paso 1DA) y por último, la acción de sumar los productos realizados anteriormente (paso 1EA). Con esta respuesta, podemos decir que los informantes mostraron evidencia de los pasos 1AG, 1BA, 1CA, 1DA y 1EA de la DG. Los estudiantes E1, E2, E5 y E8 procedieron de manera similar, solo que ellos no exhiben evidencia del paso 1CA, porque no justificaron cómo obtuvieron el ancho de los subintervalos.

Figura 14.

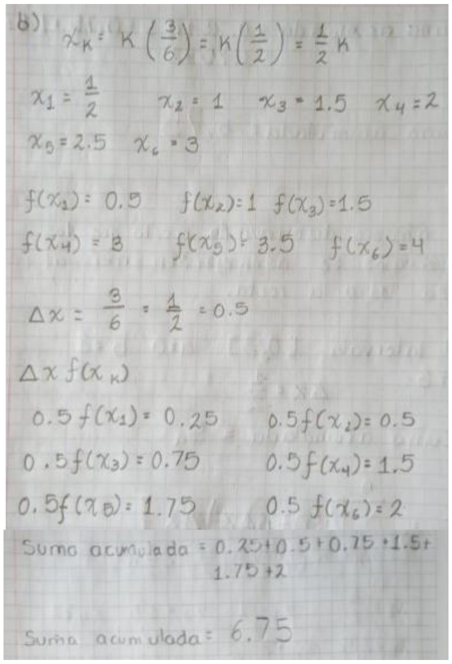
Respuesta de E3



En la Figura 15 se presenta la respuesta del estudiante E9, el cual utilizó la fórmula $x_k = a + k\left(\frac{b-a}{n}\right)$ con a, b los extremos del intervalo $[0,3]$ y n es el número de subintervalos, para calcular los elementos de la partición. Para calcular la suma acumulada realizó las siguientes acciones: evaluar la función en los elementos de la partición (paso 1BA), calcular el ancho de los subintervalos mediante la fórmula $\Delta x = \frac{b-a}{n}$; multiplicar el ancho de los subintervalos por el valor de la función en los elementos de partición y, por último, sumar los valores. El estudiante E4 procedió de manera similar, sin embargo, no mostró evidencia de las siguientes acciones: calcular los productos correspondientes al ancho de los subintervalos por el valor de la función en los elementos de partición y la acción de acumular los valores de los productos y esto se debe, a que los resultados obtenidos no corresponden a las operaciones realizadas.

Figura 15.

Respuesta de E9 para calcular la suma acumulada



En la Tabla 6 se muestran los pasos de la DG que se observaron en las respuestas del inciso *b).* El número 1 indica que se observó evidencia del paso de la DG mientras que el número 0 que no se observó.

Tabla 6.

Pasos de la DG observados en el inciso b)

Informantes	Registro geométrico	Registro analítico					Total de pasos
	1AG	1AA	1BA	1CA	1DA	1EA	
E1	1	0	1**	0	1	1	4
E2	1	0	1	0	1	1	4
E3	1	0	1	1	1	1	5
E4	0	1	1**	1	0	0	3
E5	1	0	1	0	1	1	4
E6	1	0	1**	1	1	1	5
E7	1	0	1	1	1	1	5
E8	1	0	1**	0	1	1	4
E9	0	1	1	1	1	1	5
E10	1	0	1	1	1	1	5
E11	1	0	-1	1	1	1	5
Total	9	2	11	7	10	10	

Nota: La etiqueta 1** significa que el estudiante no evaluó correctamente en el punto $x = 2$; -1 significa que el estudiante omitió evaluar la función en un elemento de la partición. El total de pasos se obtiene al contar cada una de las etiquetas, no sumando estas.

De la Tabla 6 se puede observar que los estudiantes E1, E4, E6 y E8 tienen la etiqueta 1** en la columna correspondiente al paso 1BA, esto se debe a que tuvieron dificultades al momento de evaluar la función en el punto $x = 2$. Este punto es el elemento de la partición donde la función hace el salto.

c) ¿Qué pasaría con la suma acumulada si aumentaras el número de subintervalos? Justifica tu respuesta.

Respecto a este inciso, los informantes E1, E2, E4, E6, E7, E8, E9, E10 y E11 reconocieron que al aumentar el número de subintervalos la suma acumulada se aproxima mejor al área de la región limitada entre la gráfica de la función y el eje X. Manifiestan que esto se debe a que el área excedente de los rectángulos inscritos o circunscritos disminuye. Sin embargo, esto es incorrecto, debido a que la función toma tanto valores positivos como negativos en el intervalo de interés.

Por su parte, E3 calculó la suma acumulada para *n=3* y *n=6* siguiendo el proceso descrito en la actividad 2. Al final de sus cálculos, concluye que conforme se aumenta el número de subintervalos, el valor de la suma acumulada aumenta, pero no indica a qué valor se aproxima. En su justificación se puede observar evidencia de la estructura Acción en el registro analítico.

En su respuesta el estudiante E5 manifestó que, al aumentar el número de subintervalos aumenta la cantidad de elementos ($\Delta x \cdot g(x)$) en la suma acumulada, sin embargo, no se aprecia una diferencia significativa en el valor de esta porque el ancho de los subintervalos se va haciendo cada vez más pequeño. Es decir, el estudiante visualiza la suma de rectángulos de amplitud cero.

d) Identifica con a y b los extremos del intervalo [0,3]. Sea n el número de subintervalos y Δx el ancho de cada subintervalo. Expresa la suma acumulada en notación matemática usando el símbolo de sumatoria, $\sum$, y las variables antes descritas.

En las respuestas a este inciso se observaron dos categorías:

Categoría 1. Los estudiantes que escribieron la suma acumulada utilizando un número específico de subintervalos

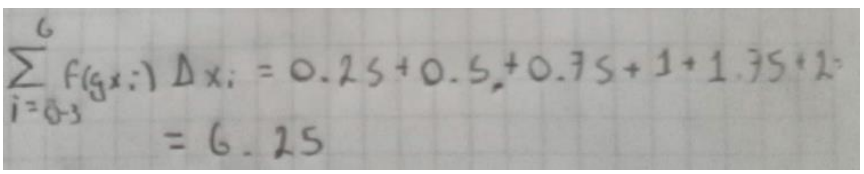
Categoría 2. Los estudiantes que escribieron la suma acumulada utilizando n subintervalos.

Los estudiantes que se encuentran en la categoría 1 son E1, E4, E7 y E8, mientras que los que están en la categoría 2 son E2, E3, E5, E6, E9, E10 y E11.

En la Figura 16 se muestra la respuesta del estudiante E1, la cual corresponde a la categoría 1. En esta se observa que el informante trabaja con seis subintervalos en lugar de n como se le sugiere. Además, no indica de manera explícita la forma que tienen los elementos de la partición. Sin embargo, del desarrollo de la suma es posible identificar que estos tienen la forma $x_i = \frac{i}{2}$, donde $i = 1,2,3,\cdots,6$ y $\Delta x = \frac{1}{2}$. En el punto $x_4 = 2$ tiene dificultades para reconocer el valor que toma la función. Esto coincide con la respuesta proporcionada en el inciso *a)* donde no pudo dibujar de manera correcta la gráfica de la función

Figura 16.

Respuesta de E1 al inciso d)

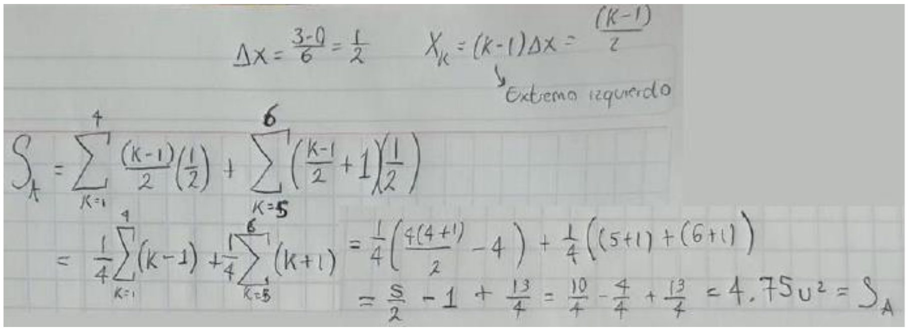


Las acciones que se identificaron en esta respuesta son las siguientes: Calcular los elementos de la partición; calcular el ancho de los subintervalos; calcular los productos del ancho del subintervalo por las imágenes de la función en los elementos de la partición y acumular estas cantidades. Se considera que E1 exhibe evidencia de la acción de evaluar la función en los elementos de la partición a pesar de que no evalúa de manera correcta en todos los. Esta dificultad se le atribuye al tipo de función.

En la Figura 17 se muestra la respuesta de E7, esta se encuentra en la categoría 1. La diferencia con la respuesta de E1 es que, el estudiante divide la suma en dos partes tomando en cuenta que el índice k va desde uno hasta el número de subintervalos. Para los elementos de la partición considera el extremo izquierdo; al igual que E1 no evalúa de manera correcta la función en el punto donde esta hace el salto y concluimos que esto se debe al tipo de función, porque en las actividades previas lo hizo de manera correcta.

Figura 17.

Respuesta de E7 para escribir la suma acumulada



$\Delta x = \frac{3-0}{6} = \frac{1}{2}$ $\quad X_k = (k-1)\Delta x = \frac{(k-1)}{2}$

Extremo izquierdo

$S_A = \sum_{k=1}^{4} \frac{(k-1)}{2}\left(\frac{1}{2}\right) + \sum_{k=5}^{6}\left(\frac{k-1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{2}\right)$

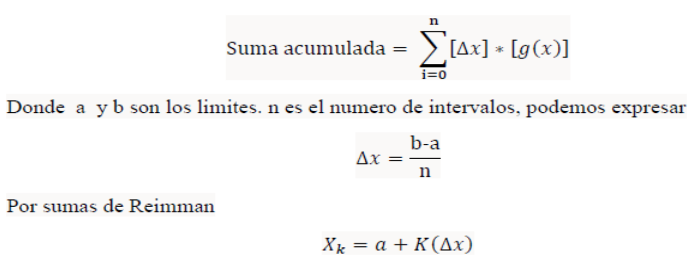
$= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{4}(k-1) + \frac{1}{4}\sum_{k=5}^{6}(k+1) = \frac{1}{4}\left(\frac{4(4+1)}{2} - 4\right) + \frac{1}{4}\left((5+1)+(6+1)\right)$

$= \frac{5}{2} - 1 + \frac{13}{4} = \frac{10}{4} - \frac{4}{4} + \frac{13}{4} = 4.75u^2 = S_A$

En la Figura 18 se muestra un ejemplo de cómo respondieron E2, E3, E5, E9, E10 y E11. En esta se puede observar que los estudiantes representaron la suma acumulada utilizando la notación indicada. Los elementos de la partición tienen la forma $x_k = a + k\Delta x$, donde el tamaño de los subintervalos esta dado por: $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3}{n}$. A partir de esta respuesta concluimos que los estudiantes muestran evidencia de la estructura Proceso a través de la interiorización de las siguientes acciones: calcular los elementos de la partición para n subintervalos; determinar la imagen de todos los elementos de la partición; calcular el ancho de los subintervalos; calcular los productos correspondientes al ancho de los subintervalos por la imagen de los elementos de la partición. Y por último expresar la suma acumulada como sumatoria de n elementos.

Figura 18.

Respuesta de E5 para representar la suma



$$\text{Suma acumulada} = \sum_{i=0}^{n}[\Delta x] * [g(x)]$$

Donde a y b son los limites. n es el numero de intervalos, podemos expresar

$$\Delta x = \frac{\text{b-a}}{\text{n}}$$

Por sumas de Reimman

$$X_k = a + K(\Delta x)$$

En la Tabla 7, se muestran los pasos de la DG que se observaron en las respuestas de los informantes al inciso *d).* En esta se observa que E2, E3, E5, E9, E10 y E11 mostraron evidencia de la estructura Proceso en el registro analítico al exhibir los pasos 2AA, 2BA, 2CA, 2DA y al 2EA de la DG. A pesar de que E6 y E8 aparecen en la tabla, no muestran la estructura Proceso, porque no exhiben todos los pasos de la DG correspondientes al paso 2 en el registro analítico. Los informantes E1, E4 y E7 no aparecen en la tabla porque no mostraron evidencia de ningún paso de la DG correspondientes a la estructura Proceso y esto se debe a que expresaron la suma acumulada utilizando un número específico de subintervalos (seis subintervalos).

Tabla 7.

Pasos de la DG observados en las respuestas de los informantes, inciso d).

Informantes	Inciso d)					Total de pasos de la DG
	Registro analítico					
	Pasos de la DG					
	2AA	2BA	2CA	2DA	2EA	
E2	1	1	1	1	1	5
E3	1	1	1	1	1	5
E5	1	1	1	1	1	5
E6	0	1	1	1	1	4
E9	1	1	1	1	1	5
E8	0	0	1	0	0	1
E10	1	1	1	1	1	5
E11	1	1	1	1	1	5
Total	6	7	8	7	7	

Nota: El número 1 indica que se observó evidencia mientras que el 0 que no se observó.

Después de representar la suma acumulada como una sumatoria de n elementos, los estudiantes E2, E5 y E10 dividen el intervalo $[0,3]$ en dos subintervalos, considerando el punto donde la asignación de la función cambia y en cada uno de estos, calcula la suma acumulada. Manifiestan hacer esto por el tipo de función (función a trozos).

En la figura 19 se muestra el proceso seguido por E5 para calcular la suma acumulada en el intervalo $[0,2)$. Lo primero que realiza el estudiante es calcular el ancho de los subintervalos utilizando la fórmula $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, donde $a = 0;\ b = 2$ y $n = 4$. Luego calcula los elementos de la partición con la fórmula $x_k = a + k\Delta x$ y por último expresa en sumatoria los productos del ancho de los subintervalos por la imagen de los elementos de la partición. De los índices de la sumatoria es fácil identificar que para $i = 4$ el valor que toma función es incorrecto.

Figura 19.

Respuesta de E5 para representar la suma acumulada

Dividimos el problema en 2, debido a que son 2 funciones distintas tal que:

Para [0,2)

$$\Delta x = \frac{2}{4}$$

$$X_k = K(2/4)$$

Teniendo que

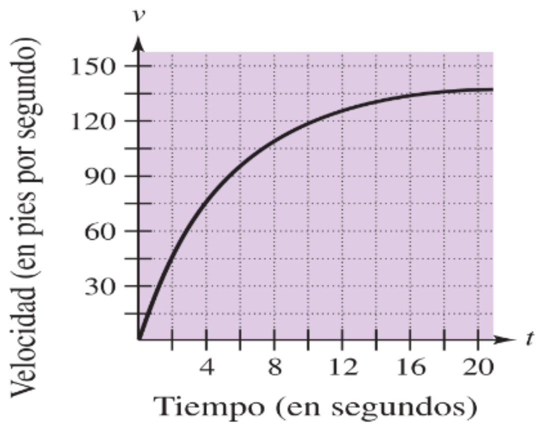
$$\sum_{i}^{4} (\frac{2}{4})(k\frac{2}{4})$$

e) La suma acumulada del inciso *d)* ¿es el valor del área de la región limitada por la gráfica de la función g y las rectas $x = 0$ y $x = 3$?

En sus respuestas, los informantes E1, E4, E9, E10 y E11 indicaron que el área de la región limitada por la gráfica de la función g y las rectas $x = 0$ y $x = 3$ es una aproximación de la suma acumulada y esto se debe a que la suma del área de los rectángulos excede al área de la región limitada. Por su parte, los estudiantes E3, E5, E6, E7 indicaron que podrían ser iguales al hacer tender a infinito el número de subintervalos, mientras que E2 y E8 indicaron que son iguales y esto se debe a que esta es igual al área de rectángulos bajo la curva.

4.4 Actividad 4

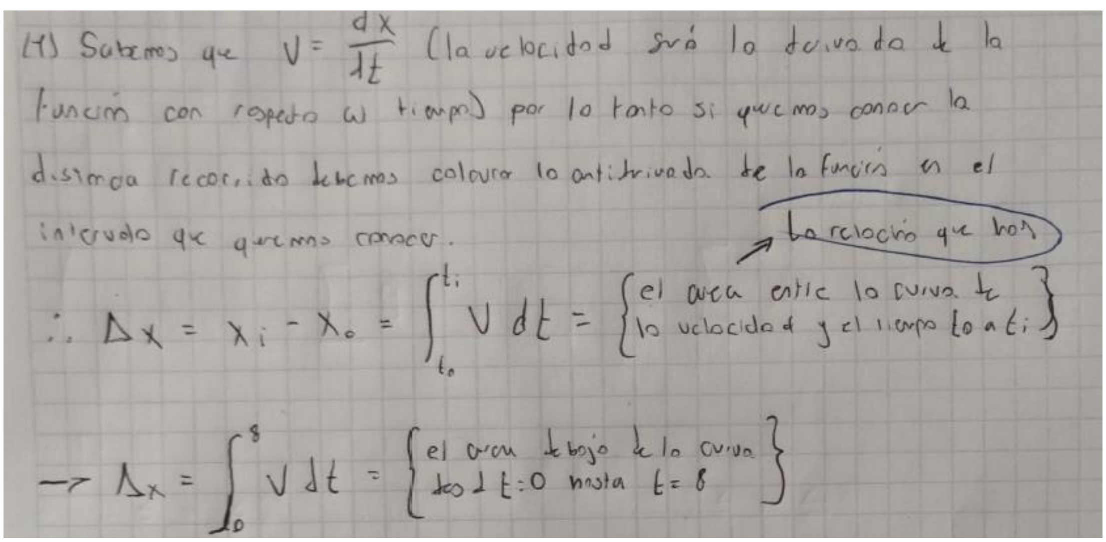
La gráfica muestra la velocidad, en pies por segundo, de un automóvil que acelera desde el estado de reposo. Emplea la gráfica para estimar la distancia que el automóvil recorre en los primeros ocho segundos. ¿Existe alguna relación entre el área bajo la gráfica de la función en el intervalo [0,8] y la distancia recorrida por el automóvil? Justifica tu respuesta mostrando todos tus cálculos.



Para estimar la distancia recorrida por el automóvil 10 de los 11 informantes utilizaron el área de figuras bajo la curva.

Figura 20.

Justificación de E2 para calcular la distancia mediante la integral


H) Sabemos que $V = \frac{dx}{dt}$ (la velocidad será la derivada de la función con respecto al tiempo) por lo tanto si queremos conocer la distancia recorrida debemos calcular la antiderivada de la función en el intervalo que queremos conocer.

la relación que hay

$\therefore \Delta x = x_i - x_0 = \int_{t_0}^{t_i} V\,dt =$ {el área entre la curva de la velocidad y el tiempo t_0 a t_i}

$\rightarrow \Delta x = \int_0^8 V\,dt =$ {el área debajo de la curva desde $t=0$ hasta $t=8$}

En la Figura 20 se presenta un ejemplo del argumento que dieron los estudiantes E2, E3, E5, E7 y E11 para estimar la distancia del automóvil mediante el área bajo la curva. En esta se observa que definen a la velocidad como la derivada de la función respecto al tiempo $\left(v = \frac{dx(t)}{dt}\right)$. Para conocer la distancia, despejan la variable de la fórmula anterior y aplican la integral.

Posteriormente manifiestan que, dado que la integral es igual al área bajo la curva (sólo E5 indica que esto se cumple para funciones positivas) basta con calcular esta para conocer la distancia del automóvil.

En las respuestas proporcionadas por los estudiantes se observó lo siguiente:

- Los estudiantes E1, E6, E10 y E11 mostraron la acción de dividir el intervalo [0,8] en cuatro subintervalos utilizando la gráfica de la función.
- E3, E9, mostraron la acción de calcular los elementos de la partición
- E3, E6, E9, E10 y E11 mostraron la acción de calcular el ancho de los subintervalos
- E1, E7 mostró la acción de identificar el ancho de los subintervalos utilizando la gráfica de la función
- Los informantes E1, E3, E6, E9, E10 y E11 mostraron la acción de identificar los puntos sobre la gráfica de la función, cuya variable independiente corresponde a los elementos de la partición.
- E1, E3, E6, E9, E10 y E11 calcularon el área de rectángulos cuyas dimensiones son: base igual al ancho de los subintervalos y altura, la distancia del eje X a un punto sobre la gráfica de la función correspondiente a un extremo del subintervalo.
- E1, E3, E6, E9, E10 y E11 acumularon las áreas del producto del ancho del subintervalo por el valor de la gráfica de la función en los elementos de la partición
- E6 mostró evidencia de la estructura Acción en el registro geométrico al construir rectángulos.

Los informantes E2, E5, E7, E8 no exhiben evidencia de ningún paso de la DG porque utilizaron el método gráfico para determinar la distancia. Además, el estudiante E8 no identificó el intervalo de interés. Por su parte el estudiante E4 manifiesta que la curva de la gráfica se asemeja a la de la función logaritmo natural y propone una función en base a esta. Indica que la distancia sería igual a la antiderivada de la función.

4.5 Actividad 5

Se pone un jarrón con agua a calentar durante siete minutos. La rapidez con la que aumenta la temperatura del agua en grados Celsius (°C) por minuto lo expresa la función

$\mathrm{F}(t) = \mathrm{u}t^2 - \mathrm{v}t$, donde $\mathrm{u} = 1.25\frac{°C}{min^3}, v = 2.5\frac{°C}{min^2}$ ¿Cuánto aumentó la temperatura durante los siete minutos? Justifica tu respuesta escribiendo todos tus cálculos y consideraciones.

Para calcular el cambio de temperatura todos los informantes utilizaron la integral definida. Sin embargo, sólo E3, E5, E7, E9 y E11 argumentaron el por qué la utilizaron. Manifestaron que la rapidez con la que aumenta la temperatura está dada por la razón de cambio de esta respecto al tiempo $f(t) = \frac{dT(t)}{dt}$, de donde se tiene $dT(t) = f(t)dt$. Al aplicar el signo de la integral se tiene que el cambio de temperatura esta dado como la integral de la función respecto al tiempo. $T(t) = \int_{t_0}^{t_1} f(t)dt$.

En la Figura 21 observamos la respuesta de E7, la cual es similar a las respuestas de los estudiantes E1, E3, E4, E5, E6, E8, E9, E10 y E11. Para calcular el cambio de temperatura abordaron el concepto de integral definida mediante el teorema fundamental del cálculo en el intervalo $[0,7]$. Este concepto matemático no es considerado en la DG de Bernabé et al. (2013), por lo que, no podemos concluir que los estudiantes exhiban la estructura mental Objeto a pesar de resolver de manera correcta la actividad, pues no se tienen evidencia de que los estudiantes conozcan y manejen los procesos involucrados en la construcción del concepto de integral definida desde este acercamiento. Coincidimos con Jiménez-Villanueva (2017) quien manifiesta que la aplicación exitosa del teorema fundamental del cálculo no manifiesta que el estudiante tenga una concepción Objeto del concepto.

Figura 21.

Respuesta de E7 para calcular el cambio de temperatura

Aplicado a este caso, el aumento de la temperatura durante un intervalo de tiempo será la integral de la taza de cambio de la temperatura respecto al tiempo en ese intervalo.

Es decir: $T(t)=\int f(t)dt$, donde T(t) es el aumento de temperatura buscado de t=0 a t

$$T(t)=\int (ut^2-vt)dt$$
$$=\int ut^2dt-\int vtdt=\frac{ut^3}{3}-\frac{vt^2}{2}+C$$
$$T(t)=\int (ut^2-vt)dt=\frac{ut^3}{3}-\frac{vt^2}{2}+C$$

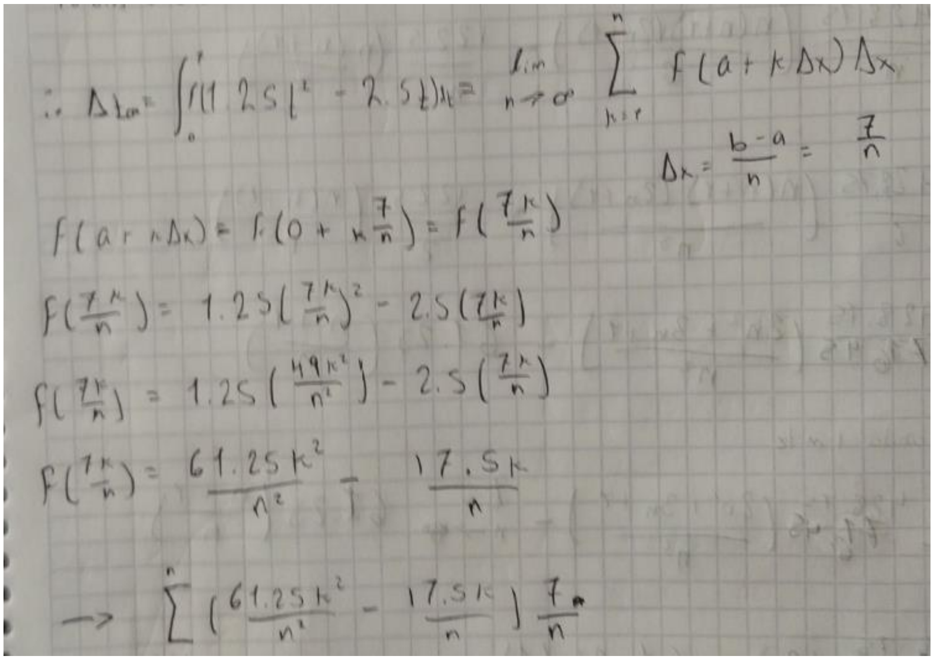
La integral definida en el intervalo [0, 7min] es entonces

$$T(t)=\int_0^7 (ut^2-vt)dt=(\frac{u(7\min)^3}{3}-\frac{v(7\min)^2}{2})+C-(\frac{u0^3}{3}-\frac{v0^2}{2})-C$$
$$=(\frac{(1.25\frac{°C}{\min^3})(343\min^3)}{3}-\frac{(2.5\frac{°C}{\min^2})(49\min^2)}{2})$$
$$=\frac{1715}{12}°C-\frac{245}{4}°C=\frac{1715}{12}°C-\frac{735}{12}°C$$
$$T(t)=\frac{980}{12}°C$$

En la Figura 22 se muestra la respuesta del informante E2. En esta se observa que, aborda la integral definida como el límite de las sumas de Riemann.

Figura 22.

Respuesta de E2 para calcular el cambio de temperatura.



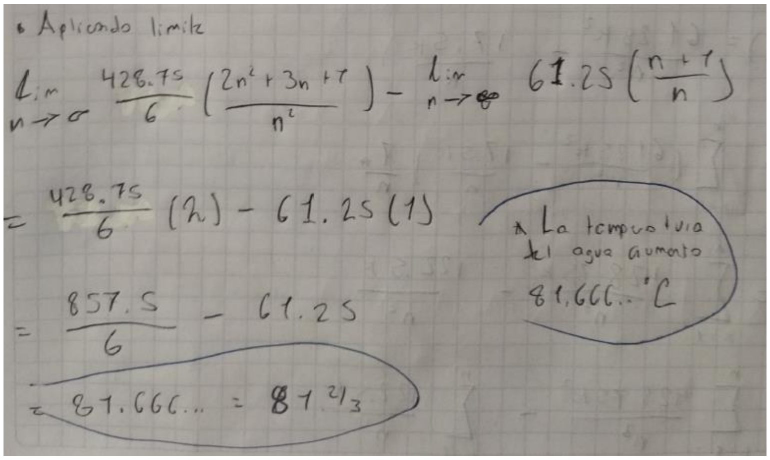
En su respuesta exhibe evidencia de la estructura mental Proceso a través de la interiorización de las siguientes acciones:

- Calcular los valores de los elementos de la partición para n subintervalos.
- Determinar la imagen de todos los elementos de la partición al considerar n subintervalos.
- Calcular el ancho de los subintervalos cuando el número de elementos de la partición es n
- Calcular los productos del ancho de los subintervalos por la imagen de la función cuando el número de elementos de la partición es n.
- Expresar como sumatoria de n elementos los productos.

En la Figura 23 se observa, que el estudiante aplica propiedades de sumatoria y exhibe la Estructura Objeto del concepto integral definida desde un acercamiento a sumas de Riemann al aplicar el límite cuando n tiende a infinito al Proceso Suma de Riemann (Arnon et al., 2014, p.22)

Figura 23.

Aplicación del límite a las sumas de Riemann



Conclusiones

En este trabajo se analizaron las estructuras y mecanismos mentales que utilizó un grupo de estudiantes de primer semestre de la Licenciatura en Física de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP) cuando resuelven actividades relacionadas con el concepto de integral definida. En la literatura revisada no se encontraron investigaciones donde se observen las estructuras y mecanismos mentales de un grupo de estudiantes después de estudiar el concepto de integral definida de manera tradicional, en su lugar, se han encontrado investigaciones que buscan la comprensión de este concepto matemático.

Del análisis de los resultados se encontró que cuatro estudiantes exhiben la estructura mental Acción en el registro geométrico mientras que siete lo hacen en el registro analítico.

En el registro geométrico las Acciones corresponden a la construcción de rectángulos inscritos o circunscritos en el área bajo la curva, mientras que, en el analítico estas Acciones corresponden a dar una aproximación al valor total acumulado mediante la suma de cantidades que se forman multiplicativamente.

Sólo nueve de los 11 estudiantes mostraron la estructura Proceso en el registro analítico a través del mecanismo mental interiorización al proporcionar una estimación al valor total acumulado mediante una sumatoria de n elementos de la partición.

Del análisis de las respuestas, se observó un predominio del registro analítico sobre el geométrico. Al identificar que, los estudiantes prefieren trabajar con la expresión algebraica de la función, en lugar de la información que proporciona la gráfica de la función. Este resultado coincide con González-Martín (2006) quien indica que las cuestiones que requieren trabajar explícitamente en un registro distinto del algebraico son abandonadas por un gran número de estudiantes.

El estudiante E2 mostró la estructura Objeto del concepto integral definida desde un acercamiento a sumas de Riemann de acuerdo con Arnon et al. (2014) al aplicar el límite cuando n tiende a infinito al Proceso Suma de Riemann. Esta estructura no es considerada en la descomposición genética de Bernabé et al. (2013) porque no se llega a la Acción de aplicar el límite.

En las respuestas de los informantes también se observaron dificultades para reconocer que la integral definida no siempre provee el valor del área bajo la curva. Este resultado coincide con Bezuidenhout y Olivier (2000) quienes indican que los estudiantes tienen la concepción errónea de que la integral definida es siempre un área y, por tanto, provee un valor positivo.

Otra dificultad que se observó en las respuestas de los informantes fue al momento de calcular el valor que toma la función a trozos en el punto donde esta es discontinua. Consideramos que esta dificultad es un obstáculo para que el estudiante comprenda el concepto de integral definida y coincidimos con Jiménez-Villanueva (2017) quien plantea que, independientemente del enfoque con el que se aborde la integral definida se requiere que el estudiante construya, previamente, un Esquema de función.

Derivado de lo anterior, algunas recomendaciones son: trabajar con actividades que permitan observar las estructuras Proceso, Objeto y los mecanismos mentales de interiorización, coordinación y encapsulación al refinar los elementos de la partición en los registros geométrico y analítico. Las actividades de este trabajo sólo consideran las estructuras Acción y Proceso.

Para la enseñanza del concepto integral definida, se sugiere considerar actividades donde los estudiantes reconozcan que la integral definida no siempre provee un valor positivo, sino más bien, la conciban como cantidades que se acumulan creadas por pequeños incrementos que se forman multiplicativamente, lo cual les permita reconocer que la integral definida puede tomar tanto valores positivos como negativos e incluso valer cero. Además de trabajar con funciones continuas y discontinuas.

La DG de Bernabé et al. (2013) considera por separado las estructuras mentales en los registros geométrico y analítico, es decir, no considera una coordinación de los registros, sin embargo, en la categoría 1 de la actividad 1 se observó que los estudiantes hacen conversiones del registro geométrico al analítico. Esto, permite hacer un refinamiento de la descomposición genética

Referencias

Aldana Bermúdez, E. (2011). *Comprensión del concepto de integral definida en el marco de la teoría "APOE".* [Tesis doctoral, Universidad de Salamanca].

Arnon, I., Cottril, J., Dubinsky, ED., Oktac, A., Roa-Fuentes, S., Trigueros, M., y Weller, K. (2014). *APOS Theory A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education.* Springer.

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D. J., Dubinsky, ED., Mathews, D. y Thomas, K. (1996). A Framework for Research and Curriculum Development in Ungraduate Mathematics Education. En E. Dubinsky, J. Kaput, A. H. Schoenfeld. (Eds.). *Research in Collegiate Mathematics Education, 2* (pp. 1-32). American Mathematical Society.

Bernabé, Gordillo y Jiménez-Villanueva. (2013, del 22 al 25 de octubre). Descomposición genética del concepto integral definida [conferencia]. *VIII Congreso Internacional de Innovación Educativa: Innovación educativa y sociedad, visión y tendencia. Ciudad de México, México.*

https://www.repo-ciie.dfie.ipn.mx/VIII.php

Bezuidenhout, J., y Olivier, A. (2000). Student's conceptions of the integral. *Proceedings of the 24th Conference of International Group of the Psychology of Mathematics Education, 2*, 73-80.

Boigues, F. J., Llinares, S. y Estruch, V. D. (2010). Desarrollo de un esquema de la integral definida en estudiantes de ingeniería relacionadas con las ciencias de la naturaleza: Un análisis a través de la lógica Fuzzy. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *13*(3), 255-282.

Czarnocha, B., S. Loch, V. Prabhu y D. Vidakovic (2001). The concept of definite integral: Coordination of two Schemas. In M. v. Penhuizen (Ed.), *Proceedings of the XXV*

Conference of the International Group of Mathematics Education. 2, pp. 297-304. Freudenthal Institute.

Dubinsky, E. (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. En D. Tall. (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-123). Kluwer Academic Publishers.

González-Martín, A. S. (2006). *La generalización de la integral definida desde las perspectivas numérica, gráfica y simbólica utilizando entornos informáticos. Problemas de enseñanza y de aprendizaje*. [Tesis de doctorado, Universidad de La Laguna].

Jiménez-Villanueva, M. P. (2017). *Estudio de la integral definida: un acercamiento a través de la función de acumulación*. [Tesis de doctorado, CINVESTAV-IPN].

Llorens, J. L., y Santoja, F. J. (1997). Una Interpretación de las dificultades en el aprendizaje del Concepto Integral. *Divulgaciones Matemáticas*, *5*(1/2), 61-76.

McDonald, M. A., Mathews, D., y Strobel, K. (2000). Understanding sequences: A tale of two objects. *Research in collegiate mathematics education IV*, *8*, 77-102.

Mundy, J. (1984). Analysis of errors of first year calculus students. *Theory*, 170-172.

Orton, A. (1983). Students' understanding of integration. *Educational Studies in Mathematics*, *14*, 1-18.

Piaget, J. y García, R. (1984). *Psicogénesis e Historia de la Ciencia*. Editores Siglo XXI.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*, 151-169.

Thompson, P. W., y Silverman, J. (2007). The concept of accumulation in calculus. In M. Carlson, & C. Rasmussen (Ed.), *Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics,* 117-131.

Turégano, P. (1994). *Los conceptos en torno a la medida y el aprendizaje del cálculo infinitesimal* [Tesis Doctoral, Universitat De València].