



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

PROPIEDAD DE DENSIDAD DE LOS NÚMEROS RACIONALES EN LIBROS DE TEXTO DE PRIMER GRADO DE SECUNDARIA EN MÉXICO

PARA OBTENER EL TÍTULO DE
MAESTRA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

PRESENTA
LIC. Z Aidanys Rodríguez Valle

DIRECTOR DE TESIS
DR. JOSÉ ANTONIO JUÁREZ LÓPEZ

CO-DIRECTORA DE TESIS
DRA. Lidia Aurora Hernández Rebollar

PUEBLA, PUE.

MAYO 2022



DR. SEVERINO MUÑOZ AGUIRRE
SECRETARIO DE INVESTIGACIÓN Y
ESTUDIOS DE POSGRADO, FCFM-BUAP
P R E S E N T E:

Por este medio le informo que la C:

RODRÍGUEZ VALLE ZIDANYS

Estudiante de la Maestría en Educación Matemática, ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 01 de diciembre de 2021, con la tesis titulada:

"PROPIEDAD DE DENSIDAD DE LOS NÚMEROS RACIONALES EN LIBROS DE TEXTO DE PRIMER GRADO DE SECUNDARIA EN MEXICO"

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

A T E N T A M E N T E,
H. Puebla de Z. a 13 de mayo de 2022

DRA. LIDIA AURORA HERNÁNDEZ REBOLLAR
COORDINADORA DE LA MAESTRÍA
EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA.



DRA. LIDIA AURORA HERNÁNDEZ REBOLLAR

Facultad
de Ciencias
Físico Matemáticas

Av. San Claudio y 18 Sur, edif. FM1
Ciudad Universitaria, Col. San
Manuel, Puebla, Pue. C.P. 72570
01 (222) 229 55 00 Ext. 7550 y 7552

Este trabajo fue posible gracias al financiamiento del
Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT),
de enero de 2020 a diciembre de 2021.

No. CVU: 1049623

Agradecer a mi familia que a pesar de la distancia ha sido mi mayor apoyo
y la inspiración para dar lo mejor de mí cada día.

Al claustro de profesores con los que tuve el gusto de compartir.

A mi director de tesis el Dr. José Antonio Juárez López por su excelente guía.

En especial al gobierno mexicano por ofrecer oportunidades de superación

a personas extranjeras,

GRACIAS MÉXICO.

Índice

Índice de figuras	2
Resumen	3
Abstract	4
Introducción	5
Capítulo 1	7
PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	7
Capítulo 2	10
LOS NÚMEROS RACIONALES Y LA PROPIEDAD DE DENSIDAD EN LIBROS DE TEXTOS ESCOLARES.	10
Capítulo 3	14
MÉTODO	14
Capítulo 4	17
ANÁLISIS DE TEXTOS	17
Capítulo 5	54
RESULTADOS	54
5.1 Acerca del texto	54
5.1.1 Ubicación del contenido en el texto.	54
5.1.2 Enfoque y objetivo del bloque o secuencia donde se ubica el contenido.	55
5.2 Conocimientos	56
5.2.1 Definición.	56
5.2.2 Uso de las representaciones del número racional.	58
5.2.3 Explicación de los algoritmos.	59
5.3 Reforzamiento del contenido.....	60
5.3.1 Ejercicios para aplicar el contenido.	60
5.3.2 Situación o aspecto de motivación.....	61
CONCLUSIONES	63
REFERENCIAS	67

Índice de figuras

Figura 1. Actividad de comparación de fracciones en S00338	18
Figura 2. Actividad de comparación de decimales en S00338.....	18
Figura 3. Propiedad de densidad del conjunto de los números fraccionarios en S00338.....	19
Figura 4. Propiedad de densidad del conjunto de los números decimales en S00338	20
Figura 5. Actividad ubicación en recta numérica en S00328.....	22
Figura 6. Propiedad de densidad en S00328	23
Figura 7. Actividad de comparación y ubicación en la recta numérica en S00329.....	24
Figura 8. Propiedad de densidad en S00329	25
Figura 9. Actividad que introduce la propiedad de densidad en S00330	27
Figura 10. Propiedad de densidad para los números fraccionarios en S00330	27
Figura 11. Propiedad de densidad para los números decimales en S00330	28
Figura 12. Relación entre fracciones y decimales en S00332	30
Figura 13. Propiedad de densidad para números fraccionarios en S00332.....	30
Figura 14. Actividad en recta numérica de fracciones y decimales en S00331	32
Figura 15. Propiedad de densidad en S00331	32
Figura 16. Propiedad de densidad en S00333	33
Figura 17. Propiedad de densidad en S00334	35
Figura 18. Relación entre fracciones y decimales en S00335	36
Figura 19. Propiedad de densidad en S00335	36
Figura 20. Actividades introductorias en S00336	38
Figura 21. Propiedad de densidad en S00336	38
Figura 22. Comparar números racionales en S00337.....	39
Figura 23. Propiedad de densidad en S00337	40
Figura 24. Propiedad de densidad para los números decimales en S00337	41
Figura 25. Comparación de fracciones y decimales en S00339.....	42
Figura 26. Propiedad de densidad en S00339	42
Figura 27. Preguntas introductorias de la propiedad de densidad en S00340	44
Figura 28. Propiedad de densidad en S00340	45
Figura 29. Actividades que involucran al sucesor en S00341.....	46
Figura 30. Propiedad de densidad en S00341	47
Figura 31. Propiedad de densidad en S00342	48
Figura 32. Conjunto denso en S00342	49
Figura 33. Propiedad de densidad en S00342	49
Figura 34. Propiedad de densidad en S00343	50
Figura 35. Actividades de reafirmación de la propiedad en S00343.....	51
Figura 36. Aprendizajes esperados del primer periodo en S00327	52
Figura 37. Propiedad de densidad en S00327	53

Resumen

Cuando se introduce el conjunto de los números racionales los estudiantes hasta ese momento han aprendido lo relacionado con el conjunto de los números naturales por lo que tienen concebidas sus propias ideas de la discreción. Deberán comenzar a cambiar su sistema de conocimientos de dominio número natural a uno de dominio número racional. Una de las resignificaciones de los conceptos construidos hasta ese momento es el que conduce de la discreción a la densidad y la comprensión de que los nuevos conjuntos numéricos son diferentes de los naturales y los enteros en los cuales esa propiedad no se cumple.

Para lograr tal entendimiento los libros de textos de matemáticas juegan un papel fundamental, dado que es una de las fuentes principales de donde se nutren tanto estudiantes como docentes. Es por ello que esta investigación desarrolla un análisis de libros de textos de primer grado de secundaria, dado que es en este grado escolar donde se imparte lo relacionado a la propiedad de densidad de los números racionales, en México.

Se consideraron los libros de texto de matemáticas para primer grado de secundaria, publicados por la Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos (CONALITEG) en su portal digital. Constituyen un total de 17 textos, de los cuales se tomó el apartado referente a la propiedad de densidad y se realizó el análisis siguiendo un conjunto de variables.

Del análisis y los resultados se observó que los textos presentan varios errores matemáticos, relacionados con la definición de la propiedad en cuestión. Además, la cantidad de páginas dedicadas a este contenido en general es baja, por lo que no da paso a que el estudiante pueda reafirmar lo que aprendió. Por otra parte, por cómo están estructurados los textos se puede inferir que otorgan gran importancia a la labor docente, al proponer actividades que deben ser guiadas por el maestro para su realización y debate en el aula.

Durante el desarrollo de la investigación se fueron identificando aspectos que están relacionados pero que no son el objetivo de la misma. Dada la importancia de cada uno de estos aspectos se propone continuar investigaciones futuras y se ofrecen algunas variantes de cómo pueden estar guiadas.

Abstract

When the set of rational numbers is introduced, students have so far learned what is related to the set of natural numbers so they have their own ideas of discretion. They should begin to change their knowledge system from a natural number domain to a rational number domain. One of the resignifications of the concepts built up to that moment is the one that leads from discretion to density and to understand that the new numerical sets are different from the natural ones and the integers in which this property is not fulfilled.

To achieve such an understanding, mathematics textbooks play a fundamental role, since it is one of the main sources from which both students and teachers draw. That is why the research develops an analysis of first grade textbooks, given that it is in this grade where matters related to the density property of rational numbers are taught in Mexico.

Mathematics textbooks for the first grade of secondary school were considered, published by the National Commission for Free Textbooks (CONALITEG) on its digital portal. They constitute a total of 17 texts, from which the section referring to the property of density was taken and the analysis was carried out following a set of variables.

From the analysis and the results, it was observed that the texts present several errors of a mathematical type, related to the definition of the property in question. In addition, the number of pages dedicated to this content in general is very scarce, so it does not allow the student to reaffirm what she learned. On the other hand, because of how the texts are structured, it can be inferred that they attach great importance to the teaching work, by proposing activities that must be guided by the teacher for their realization and discussion in the classroom.

During the development of the research, aspects that are related but are not the objective of the same were identified. Given the importance of each of these aspects, it is proposed to continue future research and some variants of how they can be guided are offered.

Introducción

En el marco de la investigación histórica en educación matemática, se ha puesto de manifiesto la importancia del análisis del libro de texto como reflejo de la actividad que se realiza en el aula. Su implementación y utilización se ha producido de forma generalizada desde los inicios de la educación obligatoria hasta nuestros días, ejerciendo para ello diferentes papeles: como objeto de estudio, como material de consulta, como registro de las actividades del alumno, como colección de ejercicios propuestos y problemas a resolver.

Quien se dedica a la construcción de instrumentos de enseñanza y aprendizaje, en especial para las matemáticas, debe tener en cuenta los tipos de problemas que se deben seleccionar para desarrollar el interés del alumno y favorecer la adquisición de conocimientos matemáticos, la forma como debe organizar la secuencia de actividades y cómo debe ser la progresión de los aprendizajes del currículo.

El análisis de textos escolares en cualquiera de los niveles educativos arroja no sólo información sobre el contenido de los conocimientos, sino que también lo hace sobre aspectos pedagógicos, curriculares o sociales. Cuando se trabaja en Educación Matemática y se estudian libros de texto, hay que considerar que los textos que se estudian y analizan son fuentes primarias para conocer el estado del conocimiento científico y en qué medida estos conocimientos se relacionan con los planes de formación (Maz y Rico, 2009).

Al seno de esta línea de investigación correspondiente al campo de investigación en Educación Matemática, análisis de libros de textos, considerada aún en una etapa temprana de su desarrollo en cuanto a fundamentos filosóficos, marcos teóricos y métodos de investigación según Fan (2013), se propone analizar cómo se aborda en los textos escolares la propiedad de densidad de los números racionales, tema de la disciplina de matemática que ha presentado dificultades tanto para su enseñanza como su aprendizaje por parte de los estudiantes. Para ello, se tiene en cuenta la definición de Centeno (1988), donde plantea que entre dos números racionales siempre se puede encontrar un racional, y por tanto una infinidad, basta con hacer $(a + b)/2$ con a y b números racionales, y a esta propiedad se le conoce como propiedad de densidad de los números racionales. En el Capítulo 1 se discute el planteamiento de la problemática que gira en torno a las principales dificultades que se presentan en el estudio de la propiedad de densidad de los números racionales. Investigadores como Cabarcas y Soler, Vamvakoussi y Vosniadou plantean que estas dificultades están muy relacionadas con el tránsito del estudio del conjunto de los números naturales al nuevo

conjunto numérico, el de los números racionales. Por otra parte, se tiene en cuenta el papel de los libros de texto de matemática en el aula y dificultades encontradas en materiales de apoyo para las clases de matemáticas en México, referentes a la propiedad. En consecuencia, se elaboran objetivos y una pregunta de investigación.

Respecto a los números racionales y la propiedad de densidad, su inserción en el currículo de varios países y en particular en México, se aborda en el Capítulo 2. Se expone una revisión de la literatura acerca de los conocimientos y creencias que tiene el estudiante, en general, sobre ideas relacionadas con la discreción y la densidad. Las principales dificultades halladas por diferentes investigadores en la enseñanza aprendizaje de este tema, el análisis de textos escolares y cómo muestran los números racionales, también son aspectos que se tienen en cuenta en este capítulo.

El método utilizado queda expuesto en el Capítulo 3. Con base en la metodología de análisis de libros de texto que se plantea en Rodríguez, Basso y García (2019) se propone considerar un conjunto de categorías de análisis de los textos, para las cuales se describen las variables que se tuvieron en cuenta para analizar la propiedad de densidad en los libros de texto de primer grado de secundaria en México y el motivo por el cuál fueron seleccionadas cada una de ellas.

El Capítulo 4 describe cómo se aborda la propiedad de densidad en cada uno de los textos seleccionados. Se toman en cuenta las variables para su análisis y se van destacando los hallazgos significativos, ya sea, errores matemáticos, la falta de explicación de algoritmos, la ausencia de las TICs para el desarrollo de las actividades o la vinculación de los problemas propuestos con la vida diaria, aspectos que pueden llegar a dificultar el aprendizaje de la propiedad por parte de los estudiantes, incluso que la aprendan de manera errónea. Posteriormente se realizan las reflexiones, mostrando los resultados del análisis, esto en el Capítulo 5.

Capítulo 1

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Las investigaciones en educación matemática muestran que una de los errores que tienen los estudiantes al estudiar el conjunto de los números racionales, es la de extender las propiedades que tiene el conjunto de los números naturales, con el que han venido trabajando, al nuevo conjunto numérico, y que al no generar situaciones que enfrenten a los estudiantes con la necesidad de tener que construir otra forma de representación numérica, se asume simplemente el conjunto de los números racionales como una extensión de los números naturales llevando a que se consideren las mismas propiedades, lo que dificulta la comprensión de otras, como la propiedad de densidad que es inherente al conjunto de los números racionales (Cabarcas y Soler, 2017).

En Vamvakoussi y Vosniadou (2010) se argumenta que la idea de discreción es solo uno de los factores que debe tenerse en cuenta para explicar las dificultades de los estudiantes con la propiedad de densidad en los números racionales. Consideran que otro factor es la interpretación de las diferentes notaciones de estos números. Además, sostienen que estos dos problemas están relacionados con uno más general, en este caso de conceptualización, que es la transición de números naturales a números racionales.

Estas dificultades en torno a la comprensión de la propiedad están muy ligadas al uso que se hace de los libros de texto de matemáticas, ya que estos ejercen una notable influencia sobre el aprendizaje de los alumnos, orientando las actividades de estos y de sus profesores; además, constituyen una fuente de problemas y preguntas para la evaluación de los alumnos (Campanario y Otero, 2000).

Muchas son las investigaciones realizadas en torno a las dificultades en la comprensión de la propiedad de densidad de los números racionales, con estudiantes y profesores, pero hasta el momento no se ha prestado mucha atención al papel que juegan los libros de texto de matemáticas en la comprensión de dicha propiedad. Teniendo en cuenta que los libros de texto escolares son el material más frecuente de consulta para estudiantes y docentes, cabe preguntarse si se le está dando la importancia que requiere el estudio de esta propiedad en el grado escolar en que se comienza, específicamente en México. Es por ello que la presente investigación se plantea como **pregunta general de investigación** : ¿Cómo se aborda la propiedad de densidad de los números racionales en los libros de texto de matemática para el primer grado de secundaria en México?

Como **objetivo general** se tiene: Analizar cómo se aborda la propiedad de densidad de los números racionales en los libros de texto de matemática para el primer grado de secundaria en México.

Objetivos específicos:

- Identificar las principales dificultades en el aprendizaje de los números racionales y la propiedad de densidad descritas en la literatura.
- Describir brevemente la inserción en el currículo de los números racionales y la propiedad de densidad en algunos países, haciendo énfasis en el currículo mexicano.
- Describir cómo se aborda la propiedad de densidad en los libros de texto de matemáticas de primer grado de secundaria en México.

La enseñanza de la propiedad de densidad de los números racionales en este grado escolar es de gran importancia, dado que es donde el estudiante, por primera vez, se enfrenta a la idea de lo que es un conjunto denso, propiedad que no posee el conjunto numérico de los naturales, que hasta ese momento es el que han venido estudiando. En México existen varias fuentes donde el maestro puede nutrirse para impartir este contenido, se pueden encontrar varios materiales de diferentes formatos, que se pueden utilizar en el salón de clases para enriquecer o reafirmar este contenido en específico. Al revisar uno de estos materiales que se exhibe en el portal digital de la Secretaría de Educación Pública (SEP) específicamente para telesecundaria, destinado a maestros, como material educativo en formato audiovisual para la asignatura de matemáticas de primer grado de secundaria, el video dedicado a la secuencia 16 denominado: *La propiedad de densidad de los números fraccionarios y decimales*, es posible notar que al hacer mención de la propiedad de densidad de los números decimales, la maestra comete un notable error matemático al relacionar esta propiedad con la existencia de antecesor y sucesor de números decimales. Dado que estos son materiales que el maestro puede utilizar y apoyarse en ellos para impartir sus clases, la preocupación respecto al tratamiento de la propiedad de densidad, aumenta, este y otros errores pueden aparecer en la literatura básica destinada a estudiantes y profesores, de ahí la importancia de analizar los textos de matemáticas para primer grado de secundaria en México.

Además, en la revisión de literatura realizada, a pesar de que se pueden encontrar muchas investigaciones en torno a las dificultades en la comprensión de la propiedad de densidad de los números racionales, ninguna de ellas se enfoca en el análisis de libros de texto, y de cómo éstos abordan dicha propiedad, lo que constituye una real fuente de investigación debido al papel que juegan los textos en el proceso de enseñanza aprendizaje.

Además, autores como Gimeno (1995) o Apple (1989) indican que, en las investigaciones relacionadas con los libros de texto, es necesario analizar tanto la posición de las diferentes unidades como la

cantidad de páginas dedicadas a cada una de las unidades. Según estos autores, esta información permite establecer la importancia que dan los autores o el grupo editorial a la unidad que se estudia. Para quienes han realizado una pequeña ojeada a los textos de matemática para el primer grado de secundaria en México, en cuanto a lo relacionado con la propiedad de densidad de los números racionales, se puede observar que la cantidad de páginas dedicadas a su estudio es muy escasa, en promedio estos textos dedican 3 páginas como máximo para introducir la propiedad, enunciarla, proponer ejemplos y finalmente proponer actividades para fomentar su comprensión. De ahí que resulte de vital importancia investigar si algunas de las dificultades que se presentan en la comprensión de la propiedad, están estrechamente relacionadas a cómo se aborda este contenido en los textos escolares.

Capítulo 2

LOS NÚMEROS RACIONALES Y LA PROPIEDAD DE DENSIDAD EN LIBROS DE TEXTOS ESCOLARES.

Según Sánchez y Rueda (2006), todos los números racionales tienen representaciones en forma de fracciones. Estos números racionales se pueden clasificar en números decimales o no decimales por medio de las llamadas fracciones decimales. Estos autores señalan que por medio del algoritmo de la división se puede llegar a una expresión decimal y que todo número decimal viene representado por una expresión decimal finita y un número no decimal por una expresión decimal periódica infinita.

Teniendo en cuenta lo planteado anteriormente, los números decimales constituyen un subconjunto de los números racionales dado que estos están asociados directamente con las fracciones decimales y a su vez con la obtención de expresiones decimales finitas. El complemento de este subconjunto lo constituyen los números no decimales, los cuales poseen una expresión decimal periódica infinita y ambos constituyen **el conjunto de los números racionales**.

Para Perera y Valdemoros (2009), las dificultades en el aprendizaje de los números racionales comienzan cuando el niño se enfrenta al estudio de las fracciones, sin tener los conocimientos previos necesarios y la insuficiencia de situaciones de la vida diaria donde se presentan problemas relacionados con este tipo de números. Estas dificultades de los alumnos con los números racionales se configuran como un obstáculo en el desarrollo de su conocimiento matemático, que puede tener su origen en la utilización precoz de reglas y algoritmos en el estudio de los racionales (Behr et al., 1983); o en la falta de experiencias concretas, necesarias para la construcción de la comprensión conceptual de la fracción; o en la falta de conexiones entre esas experiencias y los conceptos abstractos debido a un desarrollo débil del razonamiento multiplicativo (Vanhille y Baroody, 2002).

La investigación sobre este fenómeno está siendo replanteada a nivel internacional en los últimos años desde nuevas perspectivas, que subrayan que el conocimiento sobre los números naturales facilita la resolución de tareas de números racionales que son compatibles con este conocimiento, pero provoca el efecto contrario cuando las tareas no son compatibles con dicho conocimiento (Vamvakoussi, Van Dooren y Verschaffel, 2012; Van Dooren et al., 2015)

Este conjunto de los números racionales posee propiedades que lo diferencian de los conjuntos anteriores, como es la propiedad de densidad. Siguiendo las ideas de Centeno (1998), al pensar en

la recta numérica como una representación gráfica de los números racionales, estos números se distribuyen de manera densa sobre la recta; entre dos números racionales siempre se puede encontrar un racional, y por tanto una infinidad, basta con hacer $(a + b)/2$, con a, b números racionales, y a esta propiedad se le conoce como propiedad de densidad de los números racionales. Respecto a las dificultades en cuanto a la comprensión de dicha propiedad, Ávila (2008) indica que los profesores refieren que es un proceso difícil que un alumno pueda entender la propiedad de densidad cuando se trabajan comparaciones de números decimales, precisamente por las dificultades que enfrenta el estudiante para ordenarlos, y más, cuando se usa la recta numérica para ello.

Uno de los mayores problemas en el entendimiento de la propiedad de densidad es que el alumno solo puede referir cierta cantidad de cifras decimales y decir que no hay más porque creen que un número decimal es un número de una sola cifra decimal, o a lo mucho, consideran las centésimas (Ávila y García, 2008). Por ello, algunos estudiantes, que tienen esta concepción de número decimal, piensan que los extremos de un intervalo son consecutivos, los llamados consecutivos “falsos” (Vamvakoussi y Vosniadou, 2004).

Por otra parte, para poder comprender la propiedad de densidad, se necesita que el estudiante haya aprendido correctamente lo relacionado con los números racionales, que según Stafylidou y Vosniadou (2004), requiere que construyan significados para las nuevas anotaciones simbólicas, como las fracciones y los decimales. Esto no se considera una situación sencilla, Vamvakoussi y Vosniadou (2010) en un estudio, demostraron que el estudiante tiene dificultades para interpretar que la notación decimal y la fraccionaria representan el mismo valor numérico en el conjunto de los números racionales. También enfatizaron en la importancia que diferentes notaciones simbólicas se refieren al mismo número, es decir, los números con escritura decimal y las fracciones son representaciones “intercambiables” de números racionales y no diferentes objetos matemáticos. Esta dificultad se puede asociar a la manera en que los diferentes currículos escolares insertan el estudio de estos números.

La inserción de los números racionales en el currículo escolar varía en diferentes países. Lo que es consistente en la mayoría es que se comienza por el estudio de las fracciones, varía en el grado escolar donde se inicia. Ejemplo de ello, en Chile se comienza en tercer grado de primaria la idea de las fracciones comunes, mientras que en Inglaterra lo hacen desde el primer grado, en este nivel solo se espera que los estudiantes reconozcan, encuentren e identifiquen un medio como una de

dos partes iguales de un objeto, forma o cantidad. También se espera que reconozcan, encuentren e identifiquen un cuarto como una de cuatro partes iguales de un objeto, forma o cantidad. En segundo se trabaja con reconocer, encontrar, nombrar y escribir fracciones $1/3$, $1/4$, $2/4$ y $3/4$ de una longitud, forma, conjunto de objetos o cantidad. También se trabajan algunas fracciones equivalentes. Por otra parte en Corea del Sur estas nociones las inician apenas en el cuarto grado de primaria, en el grado anterior trabajan con fracciones decimales e incluso insertan el estudio de los décimos y centésimos en los números decimales (Rojano-Ceballos y Solares-Rojas, 2017).

Por lo general no se tiene en cuenta la importancia del estudio de estos números en el sistema educativo escolar, situación que se experimenta a nivel mundial y en particular en la cultura escolar mexicana, lo que se puede observar claramente cuando se revisa el currículo del último medio siglo. En la década de 1960, los decimales se introducían en cuarto grado prácticamente como una extensión de la escritura para los naturales. El enfoque para el estudio de los decimales consistía en hacer énfasis en su escritura mediante los principios del sistema decimal de numeración y revelar el valor posicional de las cifras, y luego de ejercitado esto, una de las tareas podría ser el trabajo con las cuatro operaciones con decimales (Ávila, 2008).

En la década de 1970 se incorporaron cambios en los programas y textos escolares, considerados como un avance porque se hacía notar un poco más la naturaleza de los decimales. La importancia radicó en que fue posible considerarlos como números con funciones y propiedades particulares, lo que era necesario para su comprensión. Sin embargo, se mantuvo la desproporción con las fracciones, a éstas se le dedicaron más de cuarenta lecciones mientras que a los decimales solo seis. (Ávila, 2008) No es hasta el año 2000 que la Secretaría de Educación Pública intentó promover un trabajo conceptual sobre los decimales. Es aquí donde se pretende que los decimales se comprendan como números distintos de los naturales, con propiedades y funciones que los hacen característicos. Pero todavía es posible observar que existen errores en su enseñanza, sobre todo lo que respecta a la propiedad de densidad que estos poseen (Ávila, 2008).

La propiedad de densidad se inserta en el currículo escolar mexicano en el primer grado de secundaria, aunque en el programa de matemáticas de sexto grado de primaria, como parte de las orientaciones didácticas, se plantea que se pueden trabajar algunos ejemplos que sirvan de motivación a los estudiantes para este tema que ampliarán en el grado posterior.

En el programa de matemáticas para primer grado de secundaria, esta propiedad constituye uno de los temas a tratar en el primer eje temático de la asignatura (Secretaría de Educación Pública, 2021). Como

parte de las orientaciones didácticas se explica que debe abordarse luego de recordado el contenido referente al orden que les fue impartido en último grado de educación primaria, además de explicar brevemente el procedimiento a seguir en el caso de los números fraccionarios y posteriormente de los decimales. Como consecuencia, la propiedad de densidad aparece en los libros de texto de matemáticas para el primer grado de secundaria en México.

Los libros de texto juegan un papel fundamental en la enseñanza aprendizaje, ya que como mencionan Braga y Belver (2016) estos se han configurado como una invariante de la escuela, como un material estable, el material pedagógico de más larga duración en la historia de la escuela, aunque sujeto a modificaciones y transformaciones que hacen que se haya diversificado en una gran variedad de modelos.

En cuanto al tratamiento de los números racionales en libros de texto de matemáticas, Centeno (1998), plantea que “la representación de los números racionales en forma de fracción es la más usual, de allí que la mayoría de los problemas en la enseñanza y aprendizaje de los racionales surgen en este aspecto” (p. 89).

Siguiendo esta afirmación, Escolano (2004) realiza un análisis de los diferentes significados del concepto de fracción presentados en los libros de texto del sistema educativo español. El análisis se enfocó en las estructuras fenomenológicas y epistemológicas y concluyó que el significado de relación parte-todo ha sido un recurso del que se viene sirviendo la práctica escolar. Su principal objetivo fue indagar por qué prevalece el significado parte-todo sobre los otros significados de la fracción.

Por otra parte, Gairín y Muñoz (2005), en un estudio realizado sobre libros de texto para la enseñanza de los racionales en el nivel de educación secundaria, también en España, afirman que el concepto de número racional queda opacado por el estudio de aspectos procedimentales, haciendo difícil la transferencia de este concepto a problemas de la vida diaria.

Quispe (2008), plantea como uno de sus objetivos específicos evaluar los significados del número racional utilizados en los libros de texto. El autor hace un análisis de los significados del número racional en los libros de texto peruanos considerando el programa curricular al que corresponden, el año de edición, conceptos, significados, sistemas de representación, problemas e ilustraciones representativos. Encontró que, si bien los textos presentan los distintos significados del número racional, no son trabajados de manera sistemática, enfatizándose en el significado parte – todo y utilizando el significado cociente solo para justificar la necesidad de ampliar los enteros.

Capítulo 3

MÉTODO

De acuerdo en el objetivo general de la investigación, analizar cómo se aborda la propiedad de densidad de los números racionales en los libros de texto de matemática para el primer grado de secundaria de México, la investigación es eminentemente cualitativa y se centra en la exploración de los textos analizando la propiedad en cuestión.

Se consideraron los libros de texto de matemáticas para primer grado de secundaria, publicados por la Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos (CONALITEG) en su portal digital. Constituyen un total de 17 libros y su elección se basa en que estos textos son el material de consulta obligatorio tanto para docentes como estudiantes de este grado escolar. La organización de los contenidos varía en cada texto, pero de igual manera en todos se abordan definiciones, propiedades, ejemplos y ejercicios de manera organizada para cada contenido.

Se ha tomado de cada texto el apartado dedicado a la enseñanza de la propiedad de densidad de los números racionales. Con el fin de facilitar su mención durante toda la investigación, se ha confeccionado una tabla que recoge los nombres, editoriales y número clave de cada texto analizado. Para hacer mención de algunos de los textos se utilizará el número clave que poseen, el cual es único para cada uno como se muestra en la Tabla 1.

Tabla 1.

Identificación de los sujetos de análisis

Título	Editorial	Clave
Matemáticas 1. Interacciones	Pearson	S00327
Matemáticas 1	Innova Ediciones	S00328
Matemáticas 1. Travesías	Ediciones Castillo	S00329
Matemáticas 1. Infinita	Ediciones Castillo	S00330
Matemáticas 1	Santillana	S00331
Matemáticas 1	Trillas	S00332
Conecta más	Ediciones SM	S00333
Soy protagonista	Ediciones SM	S00334
Matemáticas 1	Ek Editores	S00335
Matemáticas 1	Santillana	S00336

Título	Editorial	Clave
Espacios creativos	Santillana	S00337
Matemáticas 1.Selva	Esfinge	S00338
Matemáticas		
Matemáticas 1	Ediciones Impresas y Digitales del Río	S00339
Matemáticas 1	Progreso Grupo Edelvives	S00340
Matemáticas 1	Correo del Maestro	S00341
Matemáticas 1	Patria	S00342
Matemáticas 1	Larousse	S00343

Con base en la metodología de análisis de libros de texto que se plantea en Rodríguez, Basso y García (2019) se propone considerar como categorías de análisis de los textos: la ubicación del tema, aspectos conceptuales y reforzamiento del contenido. Las variables para analizar la propiedad se desglosan en la Tabla 2 .

Tabla 2.

Variables y aspectos para analizar la propiedad

Ubicación del tema	Aspectos conceptuales	Reforzamiento del contenido
Ubicación del contenido en el texto.	Definición.	Ejercicios para aplicar el contenido.
Enfoque y objetivo del bloque o secuencia donde se ubica el contenido.	Uso de las representaciones del número racional.	Situación o aspecto de motivación.
	Explicación de los algoritmos.	

Para abordar cada variable se tomaron en cuenta estos aspectos por la relevancia que tienen en el análisis de cada uno de los textos. La ubicación del contenido se relaciona con la parte del texto donde se muestra este tema, permite conocer qué temas se vieron con anterioridad. El enfoque y objetivo del bloque o secuencia donde se ubica el contenido se consideró importante porque de esto depende la profundización que se puede llegar a hacer del contenido.

Por otra parte, para la segunda variable relacionada con los aspectos conceptuales, la definición de la propiedad es de vital importancia porque no todos los textos lo hacen de la misma manera, incluso puede ser que no llegue ni a definirse. Esto proporciona una posible causa de aparición de dificultades en la comprensión de la propiedad por parte de los estudiantes. El uso de las diferentes representaciones del número racional, constituye en este análisis un aspecto imposible a dejar de analizar, se pueden observar dificultades en la forma en que se aborda la representación decimal y la fraccionaria, incluso algunos textos lo trabajan como conjuntos de números totalmente diferentes.

La explicación de los algoritmos que permiten encontrar números racionales entre dos dados inicialmente, ya sea en representación decimal o fraccionaria, también varía en los textos. Hay textos que dan más importancia a estos algoritmos que a la misma propiedad de densidad, otros ni siquiera abordan o mencionan la variedad que se puede utilizar, sino que más bien se enfocan en un solo procedimiento.

Para el reforzamiento del contenido se tiene en cuenta los ejercicios que se proponen para aplicar la propiedad porque no todos los textos tienen en cuenta la necesidad de proponer este tipo de ejercicios. Se pueden encontrar textos donde luego de planteada o definida la propiedad se culmina la unidad o bloque y no se proponen más ejercicios o problemas para que el estudiante pueda tener esta etapa de reforzamiento de lo que aprendió. Por último, el tema motivacional que es tan importante para el estudiante porque llega a influir en su predisposición o no respecto al contenido matemático que se enseña. La escasez de situaciones de la vida diaria en los ejercicios que se proponen, junto a la no incitación del uso de las TICs (Tecnologías de la Información y las Comunicaciones) en este siglo donde todo está informatizado, solo logra crear una brecha entre el mundo matemático y el mundo real del estudiante, por eso es considerado como uno de los aspectos a tener en cuenta.

Capítulo 4

ANÁLISIS DE TEXTOS

Libro: Selva Matemáticas

Editorial: Esfinge

Clave: S00338

El texto está dividido en 3 unidades. Cada una contiene un número diferente de secuencias dependiendo de los temas a desarrollar, cuyo propósito es alcanzar los diferentes aprendizajes esperados. Como parte de las secuencias aparecen recuadros marcados en color verde que contienen información relevante a manera de resumen, además de las distintas actividades que se proponen. Al finalizar las unidades se propone una evaluación y una autoevaluación, acompañadas de una actividad que incita la reflexión pero que no se considera propiamente como un reto matemático.

La propiedad de densidad es abordada en este texto en la cuarta secuencia de la primera unidad, la que lleva por título: *Ordena y compara números fraccionarios y decimales. Reconoce la propiedad de densidad de los números fraccionarios y decimales.*

Al adentrarse en la secuencia es posible encontrar la propiedad enmarcada en color verde, lo que como se mencionó anteriormente significa que se considera información relevante, pero a manera de resumen, lo que es un poco contradictorio porque hasta ese momento en el texto no se había abordado este tema, por lo que no debería considerarse resumen, sino más bien la introducción de la propiedad en sí.

En las secuencias iniciales del capítulo se proponen actividades donde los estudiantes, de manera individual o consultando con sus compañeros, deben comparar números fraccionarios y decimales, se muestra en las Figuras 1 y 2 respectivamente.

Figura 1. Actividad de comparación de fracciones en S00338

Actividad 1. Trabajen en equipos de tres o cuatro integrantes para resolver el siguiente problema matemático. No utilicen su calculadora.

1.1 Juan sacó las llaves mixtas (herramientas para tornillos con medidas en fracciones de pulgada) de su estuche y no recuerda el orden que tenían. Para regresarlas a su lugar debe ordenarlas de mayor a menor, las medidas son las siguientes:

$\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{16}$, $\frac{9}{16}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$. Ayúdale a ordenarlas.

Las medidas ordenadas son: _____

Nota: Tomado de *Matemáticas 1. Selva Matemáticas* (p.23), por R.O. López, 2018, Esfinge

Figura 2. Actividad de comparación de decimales en S00338

Actividad 8. Resuelve de manera individual el siguiente problema.

8.1 Mariana cortó una moldura de madera en 3 piezas. Una vez cortada, Mariana mide los 3 segmentos obteniendo las medidas siguientes:

Pieza 1	Pieza 2	Pieza 3
0.47 m	0.458 m	0.5 m

- a) ¿Cuál es la pieza de mayor tamaño? _____
- b) ¿Y cuál la de menor tamaño? _____
- c) ¿Qué medida hubiera querido Mariana que tuviera la segunda pieza, si es que quería que ésta midiera exactamente la mitad entre lo que mide la pieza 1 y lo que mide la pieza 3? _____
- d) ¿Cuánto debería medir una pieza que estuviera justo a la mitad entre lo que mide la pieza 1 y la pieza 2? _____

Nota: Tomado de *Matemáticas 1. Selva Matemáticas* (p.27), por R.O. López, 2018, Esfinge

Es posible observar que en estas actividades de comparación solo se involucran números escritos en la misma notación, decimal o fraccionaria. Luego, se da paso a actividades donde, ya sea mediante la ubicación en la recta numérica o simplemente enunciándolo, el estudiante debe hallar el número que

se encuentra justo a la mitad de dos decimales, como se muestra en los incisos c y d de la Figura 2 o entre fraccionarios dados, y es con esta idea que se llega al enunciado de la propiedad de densidad. Primeramente, se enuncia la propiedad de densidad para los números fraccionarios, como se muestra en la Figura 3.

Figura 3. Propiedad de densidad del conjunto de los números fraccionarios en S00338

De acuerdo con la **propiedad de la densidad del conjunto de los números fraccionarios**, siempre que se tienen dos fracciones diferentes es posible encontrar otra fracción que se localice entre ellas.

En particular, siempre que se tienen dos fracciones distintas se puede encontrar una fracción que se localice justo a la mitad.

Para encontrarla es recomendable calcular fracciones equivalentes:

La mitad entre $\frac{3}{5}$ y $\frac{4}{5}$ es: $\frac{7}{10}$ porque $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$ y $\frac{4}{5} = \frac{8}{10}$, entonces $\frac{3}{5} < \frac{7}{10} < \frac{4}{5}$

La mitad entre $\frac{4}{6}$ y $\frac{6}{8}$ es: $\frac{17}{24}$ porque $\frac{4}{6} = \frac{16}{24}$ y $\frac{6}{8} = \frac{18}{24}$, entonces $\frac{4}{6} < \frac{17}{24} < \frac{6}{8}$

¡El reto es encontrar las fracciones equivalentes a las que es conveniente convertir!

Nota: Tomado de *Matemáticas 1.Selva Matemáticas* (p.31), por R.O. López, 2018, Esfinge

Se puede observar que en el enunciado de la propiedad se menciona que es para el conjunto de los números fraccionarios y la vía o método recomendado para encontrar estas fracciones es utilizando sus equivalentes y hallar justo la que se localiza a la mitad del intervalo. No se aborda otro método en el texto que sea de utilidad al estudiante para poder hallar fracciones en un intervalo dado, por ejemplo, hallando el promedio entre dos fracciones cualesquiera, como se aborda en otros de los textos para este grado escolar.

En el mismo recuadro aparece enunciada la propiedad para el conjunto de los números decimales, tal como se muestra en la Figura 4.

Figura 4. Propiedad de densidad del conjunto de los números decimales en S00338

De acuerdo con la **propiedad de la densidad del conjunto de los números decimales**, cuando se tienen dos números decimales siempre es posible encontrar otro que se localice entre ellos. Por ejemplo entre 0.3 y 0.4 se pueden localizar el 0.31, el 0.32, el 0.33, etc.

En particular, siempre es posible encontrar un número decimal que se localice justo a la mitad entre otros dos números decimales, para ello, regularmente conviene convertir los números a unidades que sean más fáciles de utilizar.

Para calcular la mitad entre 0.37 y 0.1, por ejemplo, pueden convertirse ambas cantidades a milésimos: 370 milésimos y 100 milésimos. Teniendo las mismas unidades se puede utilizar un promedio:

$$\frac{370+100}{2} = \frac{470}{2} = 235 \text{ milésimos que se pueden expresar como } 0.235 \text{ unidades}$$

La propiedad de la densidad no se cumple para el conjunto de números naturales, ya que si se tiene al número 6 y al número 7, no se puede encontrar un número natural que se localice entre el 6 y el 7.

Nota: Tomado de *Matemáticas I. Selva Matemáticas* (p.31), por R. O. López, 2018, Esfinge

El método utilizado para hallar los decimales en el intervalo, como se puede observar, consiste en convertir los números a la misma unidad y realizar el cálculo del promedio, esto asegura la existencia de decimales entre cualesquiera dos dados.

Luego de enunciada la propiedad culmina la secuencia y se da paso a la siguiente que aborda otro contenido, es decir, no se proponen en este texto actividades que ayuden al estudiante a reafirmar lo aprendido acerca de dicha propiedad, lo que no facilita el reforzamiento del contenido adquirido.

Otro aspecto interesante, se hace distinción entre ambas notaciones, decimal y fraccionaria, lo que lleva a plantear la propiedad de densidad por separado como si estos números pertenecieran a conjuntos numéricos diferentes. Esta situación puede estar dada porque cuando se analizan las orientaciones didácticas que ofrece el programa de estudio de matemáticas para primer grado de secundaria (Secretaría de Educación Pública, 2021), es posible observar que en el apartado referente a la propiedad de densidad se hace mención al conjunto de los números fraccionarios y al conjunto de los números decimales, pero no se explica que estos no son conjuntos disjuntos. No dejan explícitamente escrito que el conjunto de los racionales está formado por fracciones y que poseen un subconjunto que es el de los números decimales, como lo plantean Ávila y García (2008).

Libro: Matemáticas 1

Editorial: Innova Ediciones

Clave: S00328

Este texto organiza los contenidos en tres bloques, con cinco secuencias cada uno. En estas secuencias se abordan tres momentos. En un primer momento, denominado Exploremos, el estudiante recordará lo que conoce de cada tema, lo que le servirá de base para las nuevas lecciones a aprender. Un segundo momento, Transitamos, es donde se analizan los contenidos conceptuales y procedimentales relacionados con el aprendizaje que se está trabajando. Por último, Integramos, en este momento los estudiantes podrán aplicar lo aprendido en cada lección.

La propiedad de densidad se aborda en este texto en el Bloque 1, en su primera secuencia denominada: *Conversión entre fracciones y decimales*. Al finalizar esta secuencia se espera que los estudiantes sean capaces de convertir fracciones decimales a notación decimal y viceversa, aproximar fracciones no decimales utilizando notación decimal y finalmente que ordenen fracciones y números decimales. Como se puede observar no se menciona explícitamente el aprendizaje que se espera respecto a la propiedad de densidad, si no que más bien lo asocian al de ordenar números racionales en las dos notaciones.

Antes de abordar la propiedad, se trabajan las relaciones entre decimales y fracciones, enfatizando en la equivalencia de estas últimas. Además, se proponen ejercicios de ubicación de decimales y fracciones en la recta numérica, alternando estas representaciones, lo que permite al estudiante analizar y llegar a concluir que son representaciones distintas de un mismo número racional y que estos no se vean como números diferentes, se muestra en la Figura 5. Se proponen actividades de este tipo para trabajar de manera individual, en parejas o en un grupo de estudiantes, por lo que se puede afirmar que en el texto se fomenta la discusión matemática que se puede llegar a establecer entre ellos durante el proceso de resolución de la actividad.

Figura 5. Actividad ubicación en recta numérica en S00328

5. En parejas, resuelvan los siguientes problemas.

a) Ubiquen estos números en la recta numérica. 0.25 , $\frac{3}{8}$, 2 , 1.5 , 0.5 , $\frac{5}{2}$, $\frac{5}{4}$.



b) Escriban los números que localizaron en la recta numérica anterior, ordenados de menor a mayor. _____

c) Representen una fracción entre las dos fracciones dadas en la recta numérica.



d) Representen un número decimal entre los números dados en la recta numérica.



e) ¿Qué números decimales corresponden a los puntos señalados en la recta? Anótenlos en el recuadro correspondiente.



Nota: Tomado de Matemáticas I. (p.25), por M.L. Martínez y D. Mohar, 2018, Innova Ediciones

La propiedad de densidad se enmarca en un recuadro, donde se enuncia explícitamente en qué consiste y se abordan procedimientos que permiten al estudiante hallar un número racional entre dos dados inicialmente como se muestra en la Figura 6. El caso de las fracciones se explica con el uso de las fracciones equivalentes y con el cálculo de la fracción intermedia utilizando la fórmula del promedio de dos números. Este último procedimiento es el que se toma en cuenta para explicar en la notación decimal.

En el enunciado de la propiedad se puede observar cómo se hace mención de fracciones y decimales por separado, sin abordar en ningún apartado del texto la relación conjuntista que existe.

Figura 6. Propiedad de densidad en S00328

La **propiedad de la densidad** de las fracciones y de los decimales indica que, entre cualquier par de números, siempre es posible encontrar otro número, como se explica en los siguientes ejemplos.

Una forma de encontrar una fracción entre dos fracciones dadas, consiste en obtener fracciones equivalentes, con el mismo denominador.
Por ejemplo, para encontrar una fracción entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{4}$,

- Se obtienen las fracciones equivalentes con igual denominador: $\frac{1}{3} = \frac{4}{12}$ y $\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$.
- En este caso, no es posible encontrar una fracción entre $\frac{3}{12}$ y $\frac{4}{12}$ con denominador 12, entonces se buscan fracciones equivalentes con denominadores más grandes: $\frac{4}{12} = \frac{8}{24}$ y $\frac{3}{12} = \frac{6}{24}$.
- Así se determina que $\frac{7}{24}$ se encuentra entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{4}$.

Otra forma consiste en sumar las dos fracciones y dividir el resultado entre dos. Esto es igual al promedio de los números correspondientes.

$$\frac{2}{3} \text{ y } \frac{8}{9} \rightarrow \frac{6}{9} + \frac{8}{9} = \frac{14}{9} \rightarrow \frac{14}{9} \div 2 = \frac{7}{9}$$

Lo mismo se puede hacer con números decimales.

$$0.2 \text{ y } 0.3 \rightarrow 0.2 + 0.3 = 0.5 \rightarrow 0.5 \div 2 = 0.25$$

Nota: Tomado de *Matemáticas 1*. (p.26), por M.L. Martínez y D. Mohar, 2018, Innova Ediciones

Luego de abordar la propiedad se proponen una serie de actividades de las cuales solo 3 guardan alguna relación con la propiedad enunciada. Dichas actividades están enfocadas a la ubicación en la recta numérica y se deben realizar de manera individual por cada estudiante. No se proponen actividades que motiven al estudiante a analizar lo aprendido respecto a la propiedad de densidad, más que utilicen el algoritmo para ubicar en la recta numérica, lo que fomenta un pensamiento algorítmico más no un razonamiento matemático, coincidiendo con los resultados del estudio de Gairín y Muñoz (2005), donde afirman que el concepto de número racional queda opacado por el estudio de aspectos procedimentales, haciendo difícil la transferencia de este concepto a problemas de la vida diaria.

No se aborda mucho más de la propiedad, el contenido se muestra en apenas dos páginas del texto.

Libro: Matemáticas 1. Travesías

Editorial: Ediciones Castillo

Clave: S00329

El texto está formado por tres Bloques, cada uno incluye secuencias didácticas en las que se trabajan los contenidos indispensables para cubrir los aprendizajes esperados. Al iniciar cada bloque se

encuentra una imagen relacionada con el contenido que se abordará , títulos de las secuencias y una cita que permitirá al estudiante reflexionar acerca de lo que aprenderá.

Al adentrarse en los bloques es posible encontrar las secuencias, cada una comienza con un párrafo introduciendo el tema y contextualizando al estudiante en el aprendizaje que se espera obtener. Cada una de estas secuencias contiene seis secciones:Partimos,Recorremos, Arribamos, Integración, Formalización y las llamadas Secciones de apoyo.

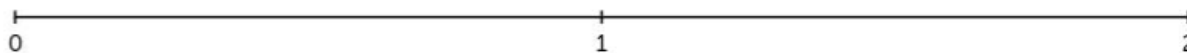
La propiedad de densidad se aborda en el texto en la segunda secuencia del primer bloque denominada: *Orden de fracciones y números decimales*.Esta secuencia solo persigue como aprendizaje esperado que los estudiantes sean capaces de ordenar fracciones y decimales al finalizar la secuencia, de igual manera que en el texto S00328 no se especifica nada respecto a la propiedad de densidad, sin embargo en el desarrollo de la secuencia sí se aborda este contenido.

Antes de enunciar la propiedad se proponen actividades que se deben realizar en parejas o de manera grupal, relacionadas con la comparación de fracciones y decimales utilizando como recurso la ubicación en la recta numérica , se muestra en la Figura 7.

Figura 7. Actividad de comparación y ubicación en la recta numérica en S00329

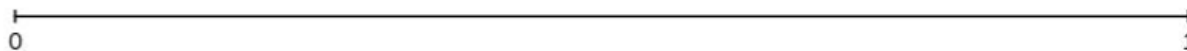
4. En equipos, ubiquen en cada segmento los números que se indican.

a) $\frac{125}{1000}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{3}{6}$, 0.5, $\frac{3}{2}$, $\frac{20}{16}$ y 1.875.



• ¿Cómo resolvieron la actividad? Expliquen.

b) $\frac{1}{3}$, 0.3, $\frac{45}{100}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{8}{9}$, 0.8.



Nota: Tomado de *Matemáticas 1.Travesías* (p.28), por E.M. Canché, E. Domínguez y M.J. Peña, 2016, Ediciones Castillo

En el fragmento de actividad que se muestra en la Figura 7, es posible observar cómo se trabajan al unísono ambas representaciones de los números racionales, la decimal y la fraccionaria, lo que se puede considerar un aspecto muy positivo porque permite que el estudiante relacione estas representaciones con un mismo número racional y que no llegue a crear la concepción errónea que por representarse diferente son números distintos, que es uno de los posibles factores que se abordan en Vamvakoussi y Vosniadou (2010), y que pueden influir en las dificultades de comprensión de la propiedad de densidad. La propiedad se enuncia como se muestra en la Figura 8. Es posible observar que se incluyen los procedimientos para encontrar números entre dos cualesquiera dados, en ambas representaciones. Algo distintivo en este texto es que uno de esos procedimientos consiste en utilizar subdivisiones en la recta numérica para el caso de los decimales. Este algoritmo no se había tenido en cuenta en los textos anteriores S00338 y S00328.

Figura 8. Propiedad de densidad en S00329

La **densidad** es una propiedad que implica lo siguiente: entre cualquier par de fracciones o números decimales, siempre se pueden encontrar más fracciones o decimales.

Por ejemplo, entre $\frac{1}{4}$ y $\frac{2}{4}$ están $\frac{3}{8}$, $\frac{7}{16}$, $\frac{15}{32}$, etcétera; y entre 1.5 y 1.6 están 1.53, 1.54, 1.541, etcétera.

Los números naturales no son densos, ya que, por ejemplo, entre 1 y 2 no hay ningún otro número natural.

En el siguiente esquema se muestran algunas formas de encontrar un número entre dos fracciones o decimales.

Decimales	Súmalos y divide el resultado entre 2. Por ejemplo, 0.525 está justo en medio de 0.52 y 0.53. $0.52 + 0.53 = 0.65$; $0.65 \div 2 = 0.525$
	Ubícalos en la recta numérica y traza 10 subdivisiones entre uno y otro. Todos esos números están entre los dos números dados.
Fracciones	Súmalos y divide el resultado entre 2. Por ejemplo, $\frac{13}{16}$ está justo en medio de $\frac{6}{8}$ y $\frac{7}{8}$. $\frac{6}{8} + \frac{7}{8} = \frac{13}{8}$; $\frac{13}{8} \div 2 = \frac{13}{16}$
	Encuentra fracciones equivalentes con denominadores mayores. Por ejemplo, entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$ están $\frac{4}{9}$ y $\frac{5}{9}$, ya que $\frac{1}{3} = \frac{4}{9}$ y $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$.

Nota: Tomado de *Matemáticas 1. Travesías* (p.30), por E. M. Canché, E. Domínguez y M. J. Peña, 2016, Ediciones Castillo

Al finalizar el enunciado de la propiedad se proponen problemas que el estudiante debe resolver haciendo uso de los algoritmos y además de la propiedad. Uno de estos problemas consiste en; comenzando desde el número 3 dos estudiantes deben ir sumando términos hasta obtener como resultado de la suma el número 10, gana el estudiante que más sumandos logre incluir. Este tipo de actividades además de permitirle al estudiante ejercitar el algoritmo de búsqueda de números racionales entre otros dos dados, logra que se reafirme lo aprendido durante la secuencia, relacionado con la propiedad de densidad y además los motiva al incluir la competencia

Libro: Matemáticas 1. Infinita

Editorial: Ediciones Castillo

Clave: S00330

El texto está conformado por tres unidades, cada una de ellas se organiza en secuencias, las que a su vez están divididas en lecciones. En cada lección se identifican tres momentos: Inicio, desarrollo y Cierre. La sección "Inicio" corresponde a una situación problemática que se debe resolver partiendo de los conocimientos previos que poseen los estudiantes, situación que a su vez está relacionada con el aprendizaje que deberán adquirir. La etapa de "desarrollo" consta de una serie de actividades con las que se deben construir los conceptos, algoritmos y procedimientos necesarios para alcanzar los aprendizajes esperados. Se culmina con la sección de "cierre", se retoma en este momento el problema de la situación inicial para que el estudiante lo resuelva con los conocimientos adquiridos a lo largo de la lección.


La propiedad de densidad se ubica en el texto en la segunda secuencia de la primera unidad, la que lleva por nombre: *Recta numérica, densidad y orden*. En esta secuencia se dedican 2 lecciones al trabajo con la propiedad, la primera de ellas denominada: *Ubicar números fraccionarios en la recta, orden y noción de densidad*, la segunda lección dedicada al estudio de los decimales: *Ubicar números decimales en la recta y concepto de densidad*.

Como bien se adelanta en el título de cada lección, las actividades se enfocan en la ubicación en la recta numérica, las que deberán realizarse, unas de manera individual, otras en parejas y algunas otras de manera grupal. En la primera lección, dedicada a los números fraccionarios, antes de mencionar la propiedad de densidad, se proponen actividades como la que se muestra en la Figura 9.

Figura 9. Actividad que introduce la propiedad de densidad en S00330

5. Realiza la actividad de manera individual.

a) Coloca en la recta las fracciones $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$.

- 
- Ubica una fracción que corresponda a un punto que se encuentre entre los que representan $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$.
 - Compara tu resultado con el de tus compañeros. ¿En qué difieren o en qué coinciden? _____
 - ¿Algún punto entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$ les parece especialmente sencillo? ¿Cuál? ¿Por qué? _____
 - ¿Sabes lo que es el punto medio? Explica en tu cuaderno.
- b) Si tu respuesta fue "no", investiga y compara tu respuesta con las de tus compañeros y escriban una conclusión grupal en su cuaderno.

Nota: Tomado de *Matemáticas 1. Infinitas* (p.29), por C. Bosch , A. Guardiola y C. Gómez, 2016, Ediciones Castillo

Con este tipo de actividades se comienza a introducir la noción de densidad para el caso de las fracciones, además se muestra uno de los posibles procedimientos para hallar las fracciones entre dos dadas inicialmente, utilizando la idea del punto medio.

La propiedad de densidad para los números fraccionarios se enuncia como se muestra en la figura 10. Como se había trabajado en las actividades anteriores, se fomenta el cálculo de las fracciones que constituyen el punto medio de otras dos, para llegar a concluir que por esta razón es posible hallar siempre una fracción en cualquier intervalo dado, de manera que existe una infinidad de ellas.

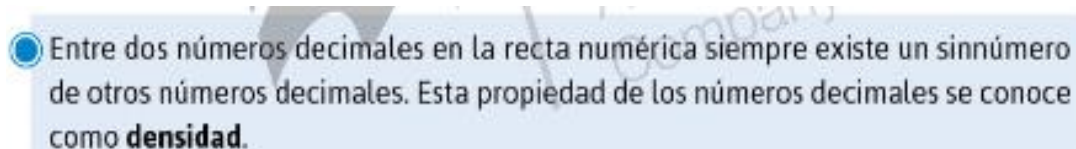
Figura 10. Propiedad de densidad para los números fraccionarios en S00330

Entre dos números fraccionarios siempre hay una **infinidad** de números fraccionarios diferentes; por ejemplo, el **punto medio** entre ellos dos; dadas dos fracciones, existe otra que es su punto medio, y entre el punto medio y una de las fracciones anteriores hay otra fracción que es el punto medio, etcétera. Además del punto medio hay otras fracciones que se pueden construir como en los ejercicios anteriores. Entre dos números fraccionarios, en la recta numérica, existe un sinnúmero de otros números fraccionarios, a esta propiedad de los números fraccionarios se le conoce como **densidad**.

Nota: Tomado de *Matemáticas 1. Infinitas* (p.31), por C. Bosch , A. Guardiola y C. Gómez, 2016, Ediciones Castillo

En la lección 2 de esta secuencia, dedicada al estudio de los números decimales, de manera similar las actividades que se proponen se enfocan en la ubicación en la recta numérica de números mediante esta notación. La propiedad de densidad para los números decimales se enuncia como se muestra en la Figura 11.

Figura 11. Propiedad de densidad para los números decimales en S00330



Entre dos números decimales en la recta numérica siempre existe un número de otros números decimales. Esta propiedad de los números decimales se conoce como **densidad**.

Nota: Tomado de *Matemáticas 1. Infinitas* (p.35), por C. Bosch , A. Guardiola y C. Gómez, 2016, Ediciones Castillo

Para llegar a este enunciado, se formalizó antes la división del intervalo en 10 partes iguales como procedimiento para hallar cualquier número decimal en la recta numérica.

Hasta este momento en el texto se trabajan por separado números fraccionarios y decimales, como si fueran números distintos. Cuestión que de alguna manera en la sección final de la lección se corrige al abordar relaciones entre fracciones y decimales. Aún podrían existir dudas debido a que solo abordan la relación con fracciones decimales, no se establece en el texto que también existen las fracciones no decimales y que a pesar de no ser números decimales también se pueden representar mediante una expresión decimal.

Este tipo de dificultades se han evidenciado en los resultados de estudios realizados por Vamvakoussi y Vosniadou (2007, 2010), quienes señalan que la representación simbólica en los extremos de un intervalo afecta el juicio de los estudiantes para determinar qué tipo de representación son los números intermedios que hay en dicho intervalo. Es decir, el estudiante manifiesta que hay números decimales entre decimales y fracciones entre fracciones, pero que no puede haber decimales entre fracciones y/o fracciones entre decimales. Así mismo, las autoras indican que muchos alumnos refieren que hay una cantidad finita de números en un intervalo.

Libro: Matemáticas 1

Editorial: Editorial Trillas

Clave: S00332

El texto se divide en tres bloques, cada uno a su vez se divide en lecciones. Estas se clasifican en dos tipos; las que tratan los conceptos y procedimientos del contenido que se aborda y las que proponen actividades para aplicar lo aprendido durante las primeras lecciones.

Una cuestión interesante en este texto es que antes de abordar la propiedad de densidad, dedica una lección a la relación que se establece entre la representación de los racionales en decimales y fracciones. Esta es la lección 2 del primer bloque, denominada: *Nombres distintos para medidas iguales*. En esta lección se proponen actividades que permiten al estudiante observar y comprender que un número racional se puede representar de manera fraccionaria o decimal y no significa que sean números distintos, como se muestra en la Figura 12. Aunque si se analiza la actividad, es posible observar que solo se utilizan las fracciones decimales o algunas fracciones equivalentes a fracciones decimales, no se aborda nada relacionado con las fracciones no decimales.

La propiedad de densidad se enuncia para los números fraccionarios en la lección 7 que lleva por título: *¿Cuántas fracciones hay?*. Para introducirla se proponen actividades utilizando la recta numérica. En el enunciado de la propiedad, mostrado en la Figura 13, no se abordan procedimientos para encontrar las fracciones que se mencionan, pero en las actividades que se proponen en la lección se hace énfasis en encontrar el punto medio entre dos fracciones dadas y en la partición de la unidad en partes iguales, de esta manera se puede inferir que estos serían los procedimientos recomendados por el texto, porque de manera explícita no se mencionan.

Figura 12. Relación entre fracciones y decimales en S00332


2. En cada caso, marquen con una \checkmark los números decimales que son equivalentes a la fracción indicada.

$\frac{1}{2}$	<input type="checkbox"/> 0.05	<input type="checkbox"/> 0.5	<input type="checkbox"/> 0.50
$\frac{1}{4}$	<input type="checkbox"/> 0.250	<input type="checkbox"/> 0.25	<input type="checkbox"/> 0.025
$\frac{2}{5}$	<input type="checkbox"/> 0.04	<input type="checkbox"/> 0.4	<input type="checkbox"/> 0.40
$\frac{3}{25}$	<input type="checkbox"/> 0.12	<input type="checkbox"/> 0.012	<input type="checkbox"/> 0.120

Seguramente encontraron que $\frac{1}{4}$, 0.25 y 0.250 son equivalentes.

Nota: Tomado de *Matemáticas 1*. (p.21), por F. Escareño y O. L. López, 2018, Editorial Trillas

Figura 13. Propiedad de densidad para números fraccionarios en S00332



Los números fraccionarios cumplen con la propiedad de *densidad*. Por lo tanto, en una recta numérica, dada cualquier pareja de fracciones no equivalentes, entre ellas es posible ubicar una infinidad de fracciones.

Nota: Tomado de *Matemáticas 1*. (p.30), por F. Escareño y O. Leticia, 2018, Editorial Trillas

Muy interesante el hecho que solo se aborde la propiedad para números fraccionarios, no se menciona en el texto la densidad de los números decimales. Puede deberse a que ya se había mencionado en lecciones anteriores la relación entre las fracciones decimales y los números decimales y no se sienta la necesidad por parte de los autores de enunciar la propiedad también para los decimales. Pero como se mencionó anteriormente, el conjunto de los números racionales no está formado únicamente por las fracciones decimales, de ahí que para llegar a la formalización

que se muestra en la Figura 13, y que esta se pueda considerar correcta, debió haberse trabajado la relación conjuntista entre fracciones y números decimales.

Libro: Matemáticas 1

Editorial: Santillana

Clave: S00331

El texto está organizado en 3 trimestres, cada uno de ellos contiene secuencias didácticas. Estas secuencias constan de tres fases: Exploro, Construyo y Aplico. La primera fase, introduce el tema a abordar en la secuencia, además que ayuda al estudiante a identificar los conocimientos que ya posee y los que necesita para continuar aprendiendo. La segunda fase propone un conjunto de actividades que deberán realizarse en parejas, grupos o de manera individual. Estas actividades están destinadas al logro de las habilidades, conocimientos y actitudes matemáticas por parte del estudiante. Se incluye en esta fase, además, una sección con problemas y ejercicios para que el estudiante aplique lo que aprendió en la secuencia. Por último, la tercera fase propone actividades también, pero estas son más generales, de manera que el estudiante pueda integrar todos los conocimientos que ha adquirido hasta ese momento. Es en el primer trimestre donde se aborda el trabajo con números fraccionarios y decimales. Antes de enunciar la propiedad de densidad, el texto en la secuencia didáctica 2, denominada: Un número, dos formas; establece la relación que existe entre las dos representaciones de los números racionales. Con estas actividades se incita al estudiante a realizar la conversión de una representación a otra, lo que minimiza los errores en el aprendizaje de operaciones y propiedades de los números racionales según Vamvakoussi y Vosniadou (2010). La propiedad de densidad se trabaja en la secuencia didáctica 4: *Entre dos, ¡siempre hay otro!* Se proponen actividades de comparación y ubicación en la recta numérica

para números decimales y fraccionarios, incluso en algunas de ellas se trabajan simultáneamente ambas representaciones como se muestra en la Figura 14.

Figura 14 .Actividad en recta numérica de fracciones y decimales en S00331

La propiedad de densidad

De acuerdo con la **propiedad de densidad** de los números decimales y fraccionarios, entre dos fracciones distintas y entre dos números decimales diferentes siempre es posible encontrar otra fracción y otro número decimal. Además, entre una fracción y un número decimal distintos siempre es posible encontrar una fracción y un número decimal.

Una forma de obtener un número que está entre dos números dados es sumar los números dados y dividir el resultado entre 2. El número obtenido de esta forma está justo a la mitad de la distancia entre los extremos.

Nota: Tomado de *Matemáticas 1*. (p.38), por P. Martínez y G. Carrasco, 2018, Santillana

Se enuncia la propiedad como se muestra en la Figura 15. Se puede observar que se hace énfasis en ambas representaciones e incluso junto al enunciado se propone uno de los procedimientos que se pueden utilizar.

Figura 15. Propiedad de densidad en S00331

- b) ¿Qué estrategia usaron para encontrar el número anterior? _____

- c) ¿Hay alguna otra estrategia para determinar ese número? _____
¿Cual? _____
- d) Determinen tres números que estén entre 0.83 y $\frac{5}{6}$. _____
- e) Escriban una fracción que esté entre 0.33 y 0.34 . _____
- f) ¿Qué estrategia usaron para encontrar el número anterior? _____

- g) Determinen tres números que estén entre $\frac{6}{5}$ y $\frac{5}{4}$. _____
- h) Determinen tres números que estén entre $\frac{12}{100}$ y 0.12 . _____
- i) ¿Qué estrategia usaron para encontrar el número anterior? _____

- **Discutan con sus compañeros los procedimientos que usaron y verifiquen que todas las respuestas sean correctas. ¿Cuántos procedimientos distintos encontraron en su grupo?**

Nota: Tomado de *Matemáticas 1*. (p.38), por P. Martínez y G. Carrasco, 2018, Santillana

Este texto se puede considerar como uno de los que ayuda a minimizar errores en cuanto a la comprensión de la propiedad de densidad de los números racionales debido a que trabaja al unísono ambas representaciones, de manera que el estudiante puede entender que es posible en un intervalo de fracciones encontrar decimales y viceversa, y que además estos son infinitos.

Libro: Conecta más

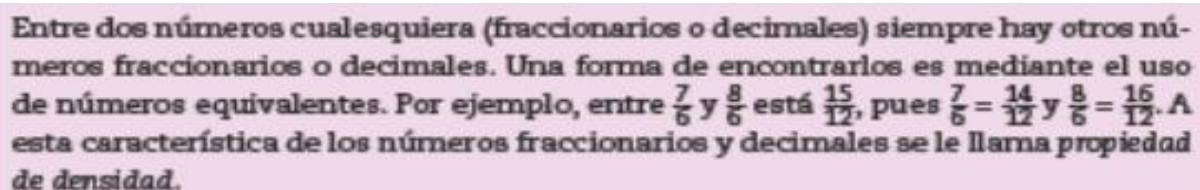
Editorial: Ediciones SM

Clave: S00333

El texto se divide en 30 secuencias, cada una se identifica con un nombre y número. El nombre alude al tema que se va a estudiar. Cada secuencia a su vez está formada por lecciones en las que se desarrollan los contenidos. Al inicio de las secuencias se propone una actividad que ayuda al estudiante a identificar el contenido matemático que se trabajará o para que recuerde conocimientos previos que serán de utilidad durante el desarrollo de la secuencia. Como parte del desarrollo, se proponen problemas que intentan motivar en el estudiante el pensamiento matemático en busca de vías de solución, tareas para desarrollar fuera del libro y ejercicios para consolidar lo aprendido. Las modalidades de trabajo se indican mediante íconos y se orientan para realizar de manera individual, en parejas, equipos o de manera grupal.

La propiedad de densidad se aborda en la secuencia 21, denominada: *Comparación de fracciones y decimales*. La secuencia comienza con la lección 67: *Números en la recta I*. Como indica el nombre de la lección, se proponen actividades de ubicación de decimales y fracciones en la recta numérica. Además, en la lección 70: *Del 0 al 1*; las actividades van encaminadas a la búsqueda del punto medio de un segmento dado. Son estas, las que dan paso al enunciado de la propiedad de densidad como se muestra en la Figura 16.

Figura 16. Propiedad de densidad en S00333



Entre dos números cualesquiera (fraccionarios o decimales) siempre hay otros números fraccionarios o decimales. Una forma de encontrarlos es mediante el uso de números equivalentes. Por ejemplo, entre $\frac{7}{5}$ y $\frac{8}{5}$ está $\frac{15}{12}$, pues $\frac{7}{5} = \frac{14}{12}$ y $\frac{8}{5} = \frac{16}{12}$. A esta característica de los números fraccionarios y decimales se le llama propiedad de densidad.

Nota: Tomado de *Conecta Más*. (p.155), por D. Block, S. García y H. Balbuena, 2020, Ediciones SM

Una característica diferente en este texto lo constituye la ubicación del contenido referente a la propiedad. En los demás textos, luego de abordar las relaciones entre fracciones y decimales se da paso al enunciado de la propiedad de densidad, pero en este texto las primeras lecciones abordan las relaciones y no es hasta la secuencia 21 que se enuncia la propiedad. Esta separación del contenido en el texto, implica que se tenga que recordar al estudiante lo que se estudió en las primeras secuencias antes de poder enunciar la propiedad, dado que en las demás secuencias se abordan contenidos diferentes.

Libro: Soy protagonista

Editorial: Ediciones SM

Clave: S00334

En este texto, el contenido temático de la materia se organiza en secuencias, las cuales constan de tres momentos didácticos: “Mis primeras ideas”, “Mi proceso de aprendizaje” y “Mis nuevos conocimientos”. En el primer momento se presenta una situación cotidiana relacionada con las matemáticas, la cual los estudiantes resolverán aplicando diversas estrategias y con los conocimientos que ya poseen. El segundo momento contiene dinámicas individuales o grupales para construir el nuevo conocimiento. Se resaltan los conceptos, algoritmos y la información importante. En el tercer y último momento, se proponen problemas matemáticos más complejos que se resolverán con los conocimientos y habilidades adquiridas.

Un aspecto interesante y diferente a la mayoría de los textos analizados, es la dispersión de los contenidos. En su mayoría, el estudio de las fracciones y los decimales se concentran en una unidad o bloque, en dependencia de cómo esté organizado el texto. En este, su estudio comienza en las secuencias 2 y 3 donde se introducen ambas representaciones. No es sino hasta la secuencia 34 que se aborda lo relacionado con el orden de fracciones y decimales.

La secuencia 34 comienza con actividades donde el estudiante debe utilizar ambas representaciones de los racionales, para ubicar en la recta numérica. Estas actividades dan paso al planteamiento de la propiedad de densidad, que en este texto se plantea únicamente para los números fraccionarios como se muestra en la Figura 17. Constituye una diferencia con respecto a los demás textos, el hecho de proponer que se verifique, con la ayuda del profesor, si esta propiedad es válida también para los números decimales.

Luego de planteada la propiedad se proponen actividades para reafirmar el contenido, las cuales involucran ambas representaciones, la fraccionaria y la decimal. Estas actividades están enfocadas en la ubicación en la recta numérica y para ello no se propone el uso de ninguna herramienta tecnológica, por lo que las TICs no son consideradas en este texto.

Figura 17. Propiedad de densidad en S00334

Entre dos números fraccionarios hay siempre otro situado en la recta numérica; a esta propiedad se le llama densidad.

Nota: Tomado de *Soy protagonista*. (p.211), por A. Castañeda y R. González, 2020, Ediciones SM

Libro: Matemáticas I

Editorial: Ek Editores

Clave: S00335

El texto está organizado en 3 bloques, cada uno se divide en secuencias didácticas. Al inicio de cada secuencia se plantea una pregunta detonante diseñada para captar la motivación e interés del estudiante, y durante el desarrollo se presentan diferentes secciones que van guiando al estudiante en la construcción del nuevo conocimiento.

El tema de fracciones y decimales se aborda en el primer bloque, el cual está dedicado al estudio de los números, álgebra y variación. Este bloque cuenta con 6 secuencias, de las cuales solo la primera tiene como aprendizaje esperado: *Convertir fracciones decimales a notación decimal y viceversa. Aproximar algunas fracciones a decimales usando la notación decimal. Ordenar fracciones y números decimales.* Teniendo en cuenta lo que se propone como aprendizaje esperado en la secuencia, es posible observar que no se hace mención de la propiedad de densidad, lo que no necesariamente implicaría su omisión en el desarrollo de la misma.

La secuencia comienza con actividades donde se relacionan cantidades expresadas en fracciones y decimales. Se hace necesario destacar que este texto sí menciona explícitamente la relación entre ambas representaciones, incluso hace mención del por qué la mayoría de las ocasiones se realizan operaciones con decimales y no con fracciones como se muestra en la Figura 18.

Figura 18. Relación entre fracciones y decimales en S00335

Las fracciones y los decimales son dos formas distintas de representar partes de un entero. Los números decimales ayudan a reducir la dificultad de las operaciones con fracciones. El sistema decimal se utiliza por su simplicidad al hacer operaciones.

Nota: Tomado de *Matemáticas I*. (p.13), por D. Cetina y E. Verónica, 2021, Ek Editores

Hasta este texto, ninguno de los anteriores había expresado esta relación tan explícitamente y aunque de manera implícita se abordara la simplicidad de los cálculos con la notación decimal, solo en este se explica el por qué de tal elección. Aunque cabe mencionar que esta nota mostrada en la figura 18, tiene errores matemáticos, al afirmar que las fracciones y los decimales son dos formas distintas de representar partes de un entero, dado que existen fracciones que no son números decimales, aspecto que no se tiene en cuenta en este texto.

De la misma manera en que se pueden señalar aspectos positivos, cabe mencionar que no se formaliza en el texto la propiedad de densidad, solo se menciona, sin llegar a enunciarla correctamente, para los números fraccionarios en la Figura 19.

Figura 19. Propiedad de densidad en S00335

Entre dos números enteros consecutivos no hay ningún número entero; en cambio, entre dos fraccionarios siempre encontrarás otro número fraccionario. ¿Cómo hallarlos? Es fácil encontrar un número fraccionario entre dos fraccionarios con el mismo denominador.

Nota: Tomado de *Matemáticas I*. (p.15), por D. Cetina y E. Verónica, 2021, Ek Editores

El procedimiento que se expone en el texto es haciendo uso de fracciones equivalentes para hallar otra fracción entre dos dadas.

Para el caso de los decimales solo se menciona un procedimiento al tratar de encontrar un decimal entre otros dos dados inicialmente, se hace alusión al cálculo del promedio, pero en ningún momento se menciona la propiedad de densidad.

Es todo el intento que se hace en el texto por abordar la densidad de los racionales, esto en conjunto con dos ejercicios que se proponen a los estudiantes, donde deben hallar un número entre dos dados, ya sea fraccionario o decimal, más que énfasis en la propiedad, se priorizan los procedimientos.

Un aspecto destacable en este texto es que para algunas actividades se propone el uso de una hoja de cálculo, aunque no se encuentren aplicadas a la propiedad de densidad, mencionarla y explicar cómo debe ser usada, acerca más al estudiante al siglo tecnológico que se está viviendo.

Libro: Matemáticas I

Editorial: Santillana

Clave: S00336

El texto está organizado en 3 trimestres, los cuales a su vez se dividen en secuencias. Para el estudio de cada secuencia, se dividen en lecciones, las que comienzan con un problema que permite al estudiante retomar y recordar contenidos anteriores. Los procedimientos, definiciones y actividades tienen lugar durante el desarrollo de la lección, junto a otras secciones que se incluyen para profundizar en el conocimiento esperado.

La propiedad de densidad se enuncia en la primera lección de la tercera secuencia del primer trimestre y en la segunda lección se proponen actividades para aplicarla. Antes de formalizar la propiedad, se proponen actividades donde el estudiante debe ser capaz de, dadas dos fracciones o dos números decimales, encontrar otros ubicados entre estos como se muestra en la Figura 20.

Como se puede observar las actividades se plantean por separado para fracciones y decimales. En ambos extremos del intervalo se encuentran números racionales en la misma notación, fraccionaria o decimal, lo que puede dar a entender al estudiante, además de que son números distintos, que no es posible encontrar fracciones entre decimales y viceversa. Este aspecto es un poco contradictorio, dado que en lecciones anteriores se explica detalladamente cómo convertir fracciones en decimales y viceversa.

A partir de estas actividades es que se enuncia la propiedad de densidad para los números fraccionarios y decimales en la Figura 21.

Figura 20. Actividades introductorias en S00336

1. Analiza las parejas de números y contesta.

a. Considera las fracciones $\frac{2}{5}$ y $\frac{3}{4}$.

- Escribe una fracción mayor que $\frac{2}{5}$ y menor que $\frac{3}{4}$. _____
- Ahora anota una fracción que se encuentre entre $\frac{2}{5}$ y la que escribiste. _____
- Ahora escribe una que esté entre $\frac{2}{5}$ y la anterior. _____
- Analiza los denominadores de todas las fracciones. ¿Qué observas? _____
- ¿Puedes encontrar más fracciones intermedias? ¿Por qué? _____

b. Considera los números decimales 1.2 y 1.3.

- Escribe un número decimal mayor que 1.2 y menor que 1.3. _____
- Ahora anota un número decimal que se encuentre entre 1.2 y el que escribiste. _____
- Ahora escribe uno que esté entre 1.2 y el anterior. _____
- ¿Qué características tienen los números que anotaste? _____
- ¿Cuántos números puedes encontrar si continúas este procedimiento? ¿Por qué? _____

Nota:

Tomado de *Matemáticas I*. (p.33), por M. Trigueros, M. Lozano, I. Sandoval, M. Cortés, E. Jinich y M. Schulmaister, 2018, Santillana

Figura 21. Propiedad de densidad en S00336

Entre dos números cualesquiera fraccionarios o decimales, se puede encontrar una infinidad de fracciones y decimales. A esto se le conoce como propiedad de densidad. Esta propiedad no la tienen los números enteros.

Nota: Tomado de *Matemáticas I*. (p.33), por M. Trigueros, M. Lozano, I. Sandoval, M. Cortés, E. Jinich y M. Schulmaister, 2018, Santillana

En la lección posterior al enunciado de la propiedad de densidad, se proponen actividades que permiten al estudiante reafirmar y comprender mucho mejor en qué consiste y cómo se aplica la propiedad de densidad. Además, estas actividades dan paso a que se expliquen procedimientos para hallar números entre dos dados. Algunas de las estrategias que se mencionan para las fracciones, son mediante el uso de las fracciones equivalentes y otra forma, hallando la fracción intermedia entre dos dadas, esta última también se aplica para el caso de los números decimales.

Respecto al uso de la tecnología, se hace mención a las hojas de cálculo pero no para resolver problemas que involucren la propiedad de densidad sino que son utilizadas en las lecciones anteriores.

Libro: Espacios creativos

Editorial: Santillana

Clave: S00337

El texto se divide en tres trimestres, cada uno comienza con una breve introducción de los temas que se abordarán y una explicación de cómo se relacionan con los conocimientos previos adquiridos en trimestres anteriores. Estos tres trimestres están organizados en secuencias didácticas que se dividen en varias sesiones de dos páginas para facilitar el trabajo a los estudiantes.

Una característica diferente en este texto lo constituye la definición, aunque no formal, del número racional. Al definir el número racional como el cociente de dos números enteros con denominador distinto de cero, ya acerca un poco al estudiante al estudio del nuevo conjunto numérico y con ello las propiedades que cumple. Antes de enunciar la propiedad de densidad, en la secuencia 4 del primer trimestre, este texto hace mención de cómo es posible comparar números racionales en diferentes representaciones como se muestra en la Figura 22.

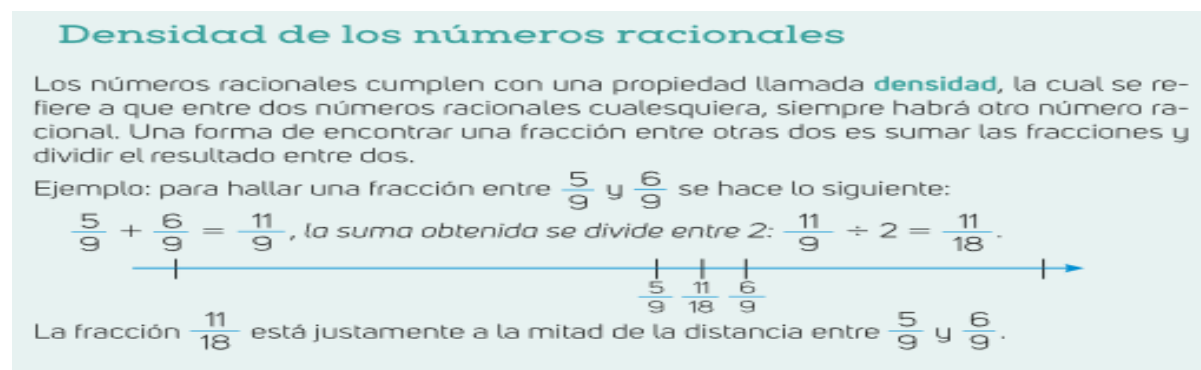
Figura 22. Comparar números racionales en S00337

Una manera de **comparar números racionales** es ubicarlos en la recta numérica. Para ello, se pueden hacer conversiones entre sus distintas representaciones, ya sea de fracción a número decimal o de número decimal a fracción, dependiendo de cuál sea más sencillo de ubicar. En la recta siempre será mayor el número que se encuentre más a la derecha.

Nota: Tomado de *Espacios Creativos*. (p.45), por M. A. Riva, 2018, Santillana

A partir de este recuadro se puede inferir que el texto deja claro que los números fraccionarios y los decimales no son más que diferentes representaciones de un mismo número racional, pero posteriormente se hace distinción cuando se aborda la propiedad de densidad como se muestra en la Figura 23.

Figura 23. Propiedad de densidad en S00337



Nota: Tomado de *Espacios Creativos*. (p.46), por M. A. Riva, 2018, Santillana

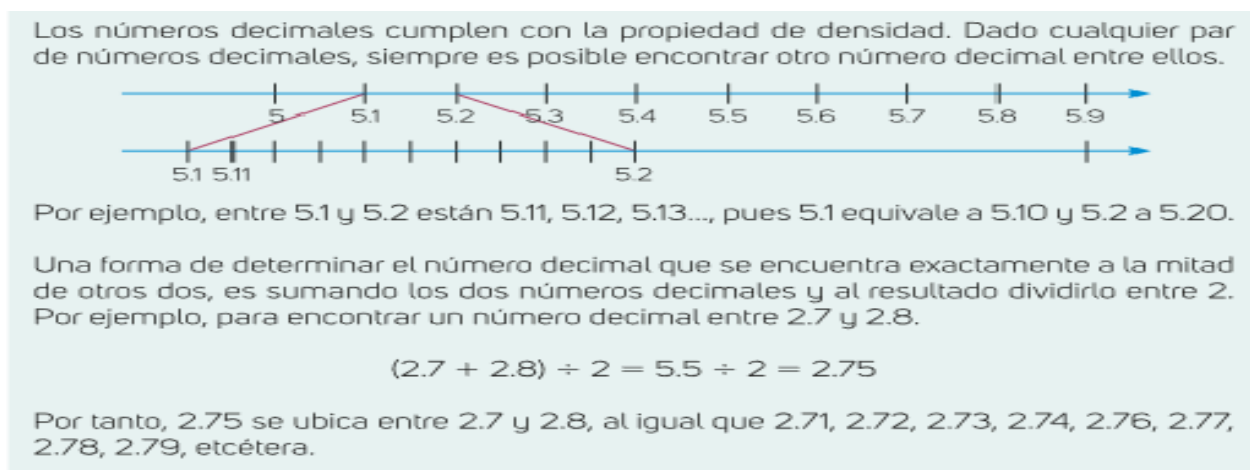
Como se puede observar en la Figura 23, cuando se enuncia la propiedad de densidad, en el mismo recuadro se menciona a los números fraccionarios y cómo se puede hallar otro entre dos cualesquiera dados. Este procedimiento consiste en encontrar la fracción que está justo al centro, posteriormente en otro recuadro hacen mención del uso de las fracciones equivalentes.

Lo interesante en este texto es que a pesar de haber dejado enunciado que los números fraccionarios y decimales no son totalmente distintos, sino diferentes representaciones de un mismo número racional, cuando se introduce la propiedad de densidad, se hace por separado y no solo se deja generalizado al mencionar a los números racionales.

Para los decimales esta propiedad se enuncia como se muestra en la Figura 24, donde se incluye además una estrategia de cálculo para hallar decimales entre dos dados.

Se puede suponer que al plantear la propiedad de densidad primeramente para los números racionales y notar en el mismo recuadro solo a los fraccionarios puede crear la falsa concepción que los números decimales y los fraccionarios son distintos, incluso pudiese el estudiante llegar a entender que los decimales ni siquiera son números racionales, al ser enunciada de manera independiente la propiedad de densidad para ellos.

Figura 24. Propiedad de densidad para los números decimales en S00337



Nota: Tomado de *Espacios Creativos*. (p.49), por M. A. Riva, 2018, Santillana

Luego de la propiedad, solo se proponen dos actividades relacionadas con ésta y se basan en la ubicación en la recta numérica o en hallar un número entre dos dados. Estas actividades carecen de aplicaciones en la vida diaria, así como del uso de la tecnología, solo se enfocan en repasar los procedimientos aprendidos.

Libro: Matemáticas I

Editorial: Ediciones Impresas y Digitales Del Río

Clave: S00339

El texto se organiza en tres trimestres, cada uno de ellos divididos en secuencias. En la entrada de cada trimestre se puede observar un breve texto, *Recomiendo este libro*, donde se sintetizan los contenidos que se abordarán en el trimestre en cuestión. Se acompaña con una imagen que busca inspirar y motivar el aprendizaje de los estudiantes, las mismas están vinculadas con un tema del trimestre. Los aprendizajes esperados se organizan en secuencias didácticas. En estas se presentan los contenidos y actividades que le permitirán al estudiante construir los conocimientos y desarrollar las habilidades para luego poder ponerlas en práctica.

Lo relacionado con la propiedad de densidad de los racionales se puede encontrar en este texto en la segunda secuencia del primer trimestre. En la secuencia anterior, se aborda lo relacionado con la transformación de fracciones a números decimales y viceversa, lo que se pretende sea utilizado para que puedan ordenar y comparar fracciones y decimales.

Este texto se caracteriza por mostrar explícitamente el proceso para comparar números racionales en notación decimal y fraccionaria, como se muestra en la Figura 25.

Figura 25. Comparación de fracciones y decimales en S00339

Hagamos una reflexión

Una manera de comparar un **decimal y un fraccionario** es convertir el decimal a fracción y realizar la comparación. O bien, convertir la fracción en decimal y comparar los decimales. Por ejemplo:

$$\frac{128}{80} < \frac{170}{80} \rightarrow 1.6 > \frac{17}{8} \quad \text{O bien } \frac{17}{8} = 2.125 \rightarrow 1.6 < 2.125$$

$1.6 = \frac{16}{10} = \frac{128}{80}$ $\frac{17}{8} = \frac{170}{80}$

Nota: Tomado de *Matemáticas I*. (p.35), por J. A. Díaz, 2018, Ediciones Impresas y Digitales del Río

El proceso mostrado en este recuadro se complementa en el texto con actividades de comparación y ubicación en la recta numérica de los números en ambas representaciones, las que dan paso al enunciado de la propiedad de densidad como se muestra en la Figura 26. Como se puede observar, se tienen en cuenta ambas representaciones del número racional, incluso se aclara que es una propiedad que no poseen los números naturales.

Figura 26. Propiedad de densidad en S00339

Hagamos una reflexión

Entre dos números **decimales o fraccionarios** cualesquiera hay una infinidad de números decimales o fraccionarios situados entre ellos, esto se le conoce como la propiedad de **densidad**. Por ejemplo: entre 3.4 y 3.41 se encuentra el 3.401, 3.4001, 3.40002... Para los números naturales esta propiedad no se cumple, por ejemplo: entre 2 y 3 no hay otro natural.

Nota: Tomado de *Matemáticas I*. (p.38), por J. A. Díaz, 2018, Ediciones Impresas y Digitales del Río

El título de los recuadros puede causar curiosidad al lector porque se muestran los contenidos o definiciones importantes en este texto: *Hagamos una reflexión*. Precisamente al inicio del texto se mencionan todos los apartados que este posee y se describe lo que se realiza en cada uno de ellos. Este específicamente, tiene como finalidad proporcionar al lector la información conceptual y

procedimental para formalizar lo que se ha visto en la secuencia, de ahí que la propiedad venga acompañada de este título en el recuadro.

Un aspecto a destacar en este texto es que junto a los procedimientos que se mencionan para encontrar fracciones o decimales entre otros dos dados, se hace uso de las hojas de cálculo. Aplicando la fórmula del promedio y dando formato a las celdas de fracciones y números decimales, el estudiante hace uso de la tecnología para aplicar lo aprendido de la propiedad de densidad.

Posterior al enunciado de la propiedad de densidad, se proponen actividades para reafirmar lo aprendido, estas van desde la comparación y ubicación en la recta numérica, hasta encontrar números decimales o fraccionarios entre dos dados, lo que permite al estudiante lograr una mejor comprensión del contenido abordado en la secuencia.

Libro: Matemáticas 1

Editorial: Progreso Grupo Edelvives

Clave: S00340

El texto está dividido en tres trimestres que incorporan quince lecciones, a través de las cuales el estudiante deberá ir construyendo su aprendizaje.

Este texto posee características muy particulares y diferentes a los textos analizados hasta el momento. Se introduce el tema de fracciones y decimales mediante actividades, pero no cualquier actividad sino que éstas están dirigidas a resolver diferentes problemas de la vida diaria, de ahí que la primera lección de este texto tenga como título : *Fracciones y decimales en entorno cotidiano*.

Presentar al alumno estas situaciones permite que se cree la necesidad de tener que construir otra forma de representación numérica dado que la que conocen hasta ese momento no les ayuda a dar solución al problema que se les presenta. De esta manera se podría propiciar que el alumno no entienda los números racionales como extensión de los naturales, aspecto considerado por Cabarcas y Soler (2017) como uno de los que dificulta la comprensión de la propiedad de densidad de los racionales.

Para dar paso al enunciado de la propiedad de densidad en este texto, primeramente se proponen actividades de orden y comparación de decimales y fracciones. En estas se puede observar que se

involucran ambas representaciones del número racional, lo que en un primer momento da a entender al lector que se tiene en cuenta en el texto que ambas representaciones pertenecen a un mismo número racional. Otro aspecto interesante a señalar es que luego de proponer este tipo de actividades, se le plantean al alumno un conjunto de preguntas que dan paso al posterior planteamiento de la propiedad de densidad como se muestra en la Figura 27.

Figura 27. Preguntas introductorias de la propiedad de densidad en S00340

Las siguientes afirmaciones es correcta:

- a) Entre cualquier par de números naturales consecutivos, siempre es posible encontrar otro número natural.
- b) Entre cualquier par de fracciones, siempre es posible encontrar otro número fraccionario.
- c) Entre cualquier par de números decimales, siempre es posible encontrar otro número decimal.

Nota: Tomado de *Matemáticas I*. (p.32), por V. Jiménez, 2018, Editorial Progreso Grupo Edelvives

Hasta este punto del análisis éste pudiese ser uno de los textos que aborda con mayor profundidad la propiedad de densidad de los racionales, por cómo se plantean las actividades y las preguntas alrededor de las mismas. A pesar de ello, pareciera que no se tuvo en cuenta lo que hasta el momento se había venido fomentando, la relación entre los decimales y las fracciones.

El enunciado de la propiedad de densidad en la Figura 28, deja explícitamente claro que son números que pertenecen a conjuntos diferentes y no se aclara en ningún apartado del texto la relación conjuntista que se establece, lo que se puede considerar un aspecto contradictorio dentro del mismo texto que presenta toda una lección inicial dedicada a la relación de decimales y fracciones.

Figura 28. Propiedad de densidad en S00340

Una forma de encontrar números entre dos fracciones dadas consiste en obtener fracciones equivalentes con el mismo denominador fraccionario; por ejemplo, para encontrar una fracción que esté entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$, se obtienen las fracciones equivalentes a las dadas, de tal forma que tengan el mismo denominador; en este caso, corresponden a $\frac{6}{12}$ y $\frac{4}{12}$, respectivamente; y así se determina que $\frac{5}{12}$ se encuentra entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$.

Otra forma de hallar una fracción entre otras dos conocidas, consiste en sumar las dos fracciones y el resultado dividirlo entre dos. Lo mismo se puede hacer con números decimales.

La **propiedad de la densidad** del conjunto de las fracciones y del conjunto de los decimales se manifiesta en el hecho de que, entre cualquier par de números, siempre es posible encontrar otro número. Esta propiedad no la tienen los números naturales. Por ejemplo, entre los números naturales 8 y 9, si bien hay fracciones y decimales, no hay ningún otro número natural.

Nota: Tomado de *Matemáticas I*. (p.33), por V. Jiménez, 2018, Editorial Progreso Grupo Edelvives

Como se puede observar en la figura 28, se abordan los procedimientos para hallar fracciones entre dos dadas, al igual que para los decimales. En este mismo recuadro se aborda la propiedad de densidad, la que se enuncia para el conjunto de las fracciones y el conjunto de los decimales. No es la primera vez que se hace mención a dos conjuntos diferentes, el de fracciones y decimales, durante el análisis de los textos, lo que causa aún más preocupación, dado que no se trata de los mismos autores ni la misma editorial, y en ninguno se explica o analiza correctamente el conjunto de los números racionales en general.

Luego del enunciado de la propiedad de densidad, se propone una actividad con tres incisos, de igual forma aplicando lo aprendido en esta lección a la resolución de problemas de la vida diaria. Solo una actividad y sin alguna sugerencia de utilizar tecnología para darle solución, además de no estar destinada a repasar el contenido de la propiedad en sí sino que se enfoca más en la comparación de números racionales. Para repasar la propiedad, este texto propone analizar la información que se muestra en la figura 28 y a partir de ahí revisar si se realizaron correctamente las actividades que se resolvieron con anterioridad.

Libro: Matemáticas 1

Editorial: Correo del Maestro

Clave: S00341

El texto se organiza en tres módulos. En cada uno de ellos se distribuyen las lecciones numeradas, que son secuencias didácticas de actividades. Los términos o conceptos resaltados en negritas que aparecen en las lecciones son los que se irán desarrollando a lo largo del contenido, por otra parte se marcan en color rojo los términos nuevos que ayudan al estudiante a enriquecer su vocabulario. La propiedad de densidad se ubica en este texto en la segunda lección del primer módulo. En la primera lección se explica la relación entre fracciones y decimales, para lo que se proponen un conjunto de problemas que el alumno debe resolver. Estos problemas varían, están los aplicados a la vida diaria y los que se enuncian como una actividad directa que debe ser resuelta.

Una característica diferente en este texto es que lo fundamental son las actividades que debe resolver el alumno, la formalización matemática completa, según los autores del texto, se expresa en el margen de las páginas con el nombre : *Tomo Nota*.

Al analizar las actividades que se proponen es posible observar un término que hasta el momento no se había tenido en cuenta en los demás textos analizados, el "sucesor", figura 29.

Figura 29. Actividades que involucran al sucesor en S00341

- Balam le dijo a Martín que los sucesores de 37, de 4.7 y de $\frac{2}{8}$, son 38, 4.8 y $\frac{6}{8}$, respectivamente.
- a. Si consideras que Balam cometió algún error, explícalo.
 - b. Encuentra tres números decimales que estén entre 4.7 y 4.8.
 - ¿La cantidad de decimales que hay entre 4.7 y 4.8 es finita o infinita? Explica tu respuesta.
 - ¿Consideras, como Balam, que un número decimal tiene un sucesor?
 - c. Encuentra tres fracciones que estén entre $\frac{5}{8}$ y $\frac{6}{8}$.
 - ¿La cantidad de fracciones que hay entre $\frac{5}{8}$ y $\frac{6}{8}$ es finita o infinita? Explica tu respuesta. _____
 - ¿Consideras que una fracción tiene un sucesor? Explica tu respuesta. _____

Nota: Tomado de *Matemáticas I*. (p.25), por A. Alberro y R. García, 2018, Correo del Maestro

Este tipo de actividades fomenta el análisis en cuanto a la cantidad de números racionales que se pueden encontrar entre dos dados inicialmente, que con la ayuda del profesor este puede derivar en

una mejor comprensión de la propiedad de densidad por parte de los estudiantes y al total entendimiento de que los términos sucesor y antecesor, no es posible utilizarlos para este nuevo conjunto numérico que se les introduce, los números racionales.

Como ya se había explicado anteriormente, en este texto las formalizaciones aparecen en los márgenes de las páginas, por lo que la propiedad de densidad, figura 30, se encuentra justo al margen de la actividad que se observa en la figura 29.

Figura 30. Propiedad de densidad en S00341

TOMO NOTA
Las fracciones cumplen la propiedad de densidad porque entre dos fracciones distintas siempre se puede _____ otra entre ellas. Por ejemplo, $\frac{5}{8}$ está entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{4}$. Y, como todo número decimal es igual a una fracción decimal, también se tiene que entre 4.5 y 4.55 hay otro número decimal.

Nota: Tomado de *Matemáticas I*. (p.25), por A. Alberro y R. García, 2018, Correo del Maestro

Observando este recuadro donde, según los autores del texto se formaliza la propiedad de densidad, es posible observar algunos detalles. Si este recuadro constituye una formalización matemática cabe preguntarse por qué aparece un subrayado que se supone debe ser completado por el estudiante. Además, se menciona que es posible encontrar fracciones o decimales entre dos dadas inicialmente pero no se explica en este texto los procedimientos que se pueden seguir para encontrarlos. Como todo el contenido se trabaja mediante actividades que debe resolver y analizar el estudiante, es posible observar que este texto no hace énfasis en procedimientos ni en

formalizaciones, se puede considerar más como un cuaderno de trabajo que como un libro de texto básico.

Un aspecto positivo, es que posee una sección donde incita al estudiante a utilizar las tecnologías, en su mayoría se ofrecen sugerencias de link donde se puede visualizar en mayor medida el contenido que se imparte y con mayor profundidad.

Libro: Matemáticas 1

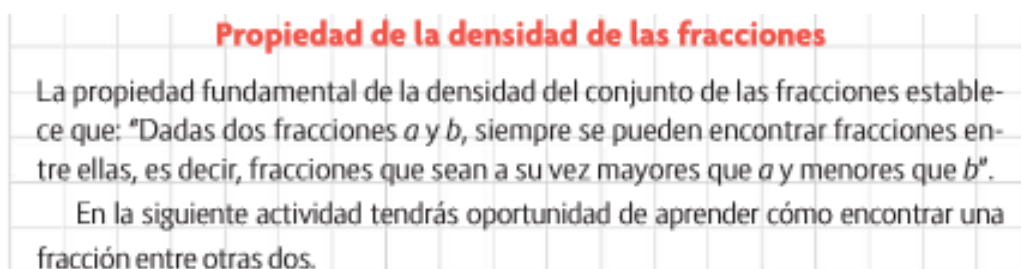
Editorial: Patria

Clave: S00342

El texto se divide en tres bloques, cada uno de ellos organizados en secuencias. Cada secuencia cuenta con las siguientes secciones: “Una mirada previa”, “Sesiones”, “En retrospectiva” y “¿Qué aprendí?”.

La propiedad de densidad se encuentra en este texto en la segunda secuencia del primer bloque. Esta secuencia aborda lo relacionado con las aproximaciones decimales y el orden de fracciones y decimales. Para dar paso a la propiedad se utilizan actividades relacionadas con el orden, las cuales involucran números en la misma notación, no se alternan las representaciones del número racional. Luego de estas actividades se da paso al enunciado de la propiedad de densidad como se muestra en la figura 31.

Figura 31. Propiedad de densidad en S00342



Nota: Tomado de *Matemáticas I*. (p.39), por E. Sánchez, V. Hoyas y M. Saiz, 2018, Patria

Se puede observar que se enuncia la propiedad para el conjunto de las fracciones, que se pudiera considerar correcto si en el texto se hubiese explicado con anterioridad que este conjunto es el conjunto de los números racionales y que incluye las fracciones decimales, por tanto a los números decimales, de esta manera si se plantea generalizado para el conjunto de las fracciones, estaría enunciado correctamente. Para ello se menciona el orden, más no se aborda ningún procedimiento

para hallar fracciones entre dos dadas. Un aspecto relevante en este texto es que a manera de profundizar en esta propiedad, aparece un recuadro que especifica cuándo un conjunto es denso, figura 32.

Figura 32. Conjunto denso en S00342

En otras palabras
Se dice que un conjunto de números es **denso** si dado cualquier número del conjunto siempre hay otro tan cerca de él como se quiera.

Nota: Tomado de *Matemáticas I*. (p.39), por E. Sánchez, V. Hoyos y M. Saiz, 2018, Patria

Basándose en esta aclaración, es que se hace mención de la propiedad de densidad de los números decimales en la figura 33. Con el planteamiento que aparece en esta figura, es posible observar que los autores de este texto entienden que los números fraccionarios y los decimales pertenecen a conjuntos diferentes, aspecto que se observa en textos anteriores que no coinciden en autores ni en editorial, con el texto en cuestión.

Figura 33. Propiedad de densidad en S00342

¿Los números decimales son un conjunto denso?

Es conveniente saber argumentar que los números decimales y las fracciones son conjuntos densos. Con la siguiente actividad podrás hacerlo.

Nota: Tomado de *Matemáticas I*. (p.40), por E. Sánchez, V. Hoyos y M. Saiz, 2018, Patria

Posteriormente, se proponen actividades donde deben ser hallados números decimales entre dos dados, pero de igual manera no se explica procedimiento alguno para encontrar estos números. En este texto, una vez analizados los contenidos y actividades propuestas, se puede considerar que fomenta lo relacionado con el orden de fracciones y decimales por separado, no se utilizan ambas notaciones del número racional en las actividades, lo que, como ya se ha explicado durante el

análisis de otros textos, no son conjuntos diferentes sino que uno está contenido en otro, aspecto que no se explica en los textos.

Libro: Matemáticas 1

Editorial: Larousse

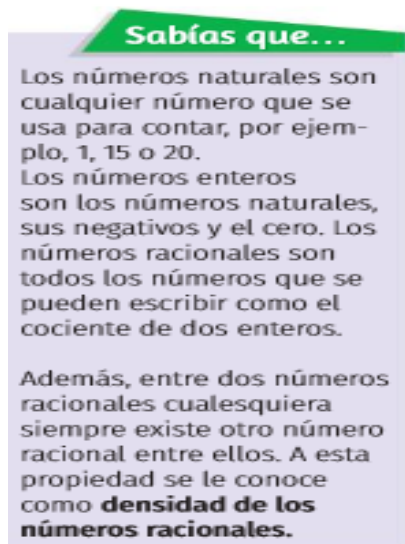
Clave: S00343

El texto se organiza en tres bloques, cada uno de ellos aborda diferentes lecciones. Las primeras cuatro lecciones del primer bloque están dedicadas al estudio de fracciones y decimales y la relación que se puede establecer. Es necesario aclarar en este texto que posee una sección donde se abordan los conocimientos teóricos necesarios durante el desarrollo del contenido de las secuencias para que el estudiante sea capaz de comprender los nuevos temas, además de saber cómo surge y por qué, esta se titula: “*Sabías que*”.

Para introducir la propiedad de densidad se proponen actividades que involucran ambas notaciones, la decimal y la fraccionaria, pero por separado. Los extremos del intervalo donde debe ser hallado un número son iguales, ya sea fracciones o números decimales. En el texto no se explican los procedimientos que se deben seguir para hallar estos números, solo se deja para debatir pero en el texto no se exponen en ninguna de las lecciones anteriores.

La propiedad de densidad se plantea en la sección de “*Sabías que*”; que como se explicó anteriormente es la destinada a mostrar los conocimientos teóricos necesarios en cada secuencia de actividades, figura 34.

Figura 34. Propiedad de densidad en S00343



Nota: Tomado de *Matemáticas I*. (p.27), por J. M. Hernández y L. Jiménez, 2018, Larousse

Este recuadro presenta aspectos muy interesantes y que no se observan en ninguno de los otros textos analizados. Es el único texto donde queda definido, aunque no de manera formal, el conjunto de los números racionales. En los demás textos solo se aborda fracciones y decimales pero nunca se deja claro la relación conjuntista. Además, la propiedad de densidad se enuncia para los números racionales, no se hace distinción como en los demás textos, para fracciones y decimales, sino que ya trae implícito que pertenecen a un mismo conjunto numérico.

En cuanto a las actividades que se proponen luego de enunciada la propiedad, se hace énfasis en el uso de la misma, figura 35, lo que también marca una diferencia con los demás textos, dado que las actividades no hacían mención a la necesidad de utilizar la propiedad para dar respuesta a los problemas propuestos.

Figura 35. Actividades de reafirmación de la propiedad en S00343

- c) De acuerdo con la propiedad de densidad que investigaron de manera previa, ¿qué fracción puede estar entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{6}$? _____
- Si pasan las fracciones a notación decimal, ¿cómo pueden encontrar la fracción entre ellas? _____
¿Por qué implica una situación problemática? _____
 - Expliquen la estrategia que usaron para obtener la fracción anterior, de acuerdo con la propiedad de densidad. _____
 - Según lo anterior, ¿la fracción que obtuvieron es la única que hay entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{6}$? _____
¿Por qué lo consideran así? _____
 - ¿Qué fracción se encuentra entre $\frac{2}{12}$ y $\frac{3}{12}$? _____ ¿Cómo la obtuvieron?

Nota: Tomado de *Matemáticas I*. (p.28), por J.M. Hernández y L. Jiménez, 2018, Larousse

Este texto puede ser considerado como uno de los que fomenta la correcta comprensión de la propiedad, dado que enfatiza y deja claro que no son números diferentes las fracciones y los decimales.

Libro: Matemáticas 1. Interacciones

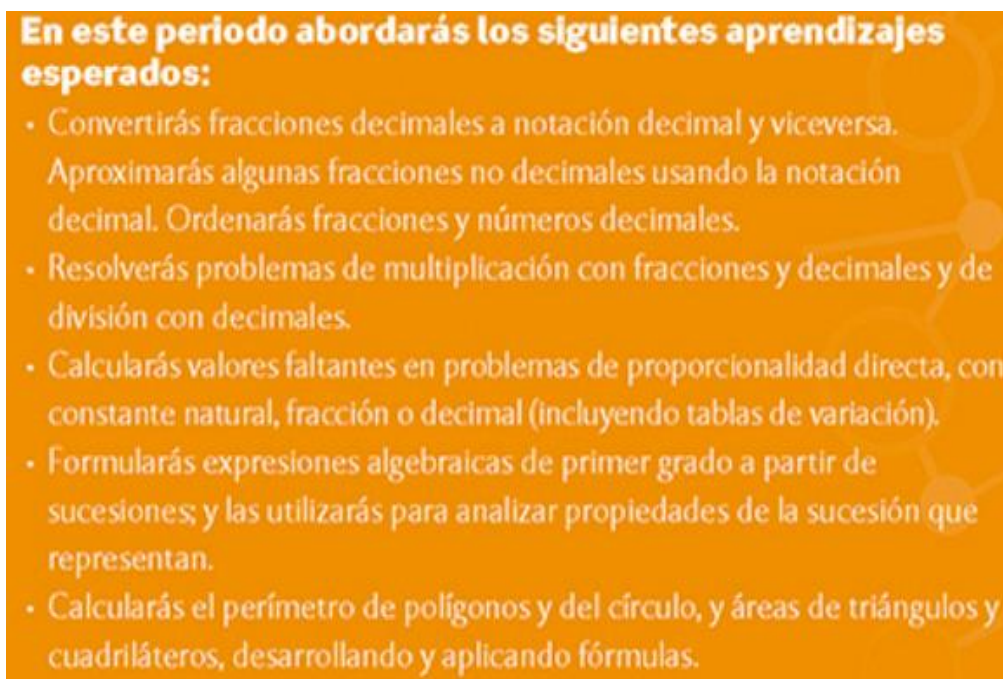
Editorial: Pearson

Clave: S00327

El texto se organiza en tres períodos, cada uno de ellos divididos en lecciones. Estas lecciones están numeradas de manera consecutiva y tienen un título que hace alusión al aprendizaje que se abordará en cada una de ellas. La propiedad de densidad se muestra en la segunda lección del primer periodo.

Este texto muestra en el inicio de cada periodo los aprendizajes que se esperan alcanzar durante el mismo. En la figura 36, se pueden observar los que se plantean para el primer periodo que es donde se aborda lo relacionado con la propiedad. Realizando la lectura de estos aprendizajes es posible observar que no se muestra nada referente a la propiedad, por lo que se puede inferir que para los autores de este texto no constituye una prioridad este contenido.

Figura 36. Aprendizajes esperados del primer periodo en S00327



En este periodo abordarás los siguientes aprendizajes esperados:

- Convertirás fracciones decimales a notación decimal y viceversa. Aproximarás algunas fracciones no decimales usando la notación decimal. Ordenarás fracciones y números decimales.
- Resolverás problemas de multiplicación con fracciones y decimales y de división con decimales.
- Calcularás valores faltantes en problemas de proporcionalidad directa, con constante natural, fracción o decimal (incluyendo tablas de variación).
- Formularás expresiones algebraicas de primer grado a partir de sucesiones; y las utilizarás para analizar propiedades de la sucesión que representan.
- Calcularás el perímetro de polígonos y del círculo, y áreas de triángulos y cuadriláteros, desarrollando y aplicando fórmulas.

Nota: Tomado de Matemáticas 1. Interacciones (p.13), por E. Mancera y E. Basurto, Pearson

Las actividades que se proponen están enfocadas a ordenar números en notación decimal y fraccionaria en la recta numérica. No se alternan ambas notaciones, el estudiante debe hallar fracciones entre fracciones y de la misma manera para los números en notación decimal. De este

tipo son las actividades que introducen la propiedad de densidad que, como se observa en la figura 37, se enuncian por separado para fracciones y números en notación decimal.

Figura 37. Propiedad de densidad en S00327

Los números decimales y los fraccionarios tienen una propiedad llamada **densidad**, la cual indica que entre dos números cualesquiera, siempre es posible ubicar otro número.

Nota: Tomado de Matemáticas 1. Interacciones (p.28), por E. Mancera y E. Basurto, Pearson

Respecto a los procedimientos que se utilizan para hallar fracciones o decimales entre dos dados inicialmente, para el caso de los números fraccionarios se aborda mediante el uso de fracciones equivalentes y, para los decimales, se explica que se debe completar con ceros a la derecha para tener representaciones equivalentes con más cifras decimales y a partir de ahí encontrar otros números, lo que provoca que entre dos cualesquiera de estos existan infinitos números.

Las actividades que se proponen luego de enunciada la propiedad, de igual manera que las anteriores están relacionadas con la ubicación en la recta numérica. Aunque el texto contiene un apartado dedicado a que el estudiante aprenda con el uso de la tecnología, en este caso con las hojas electrónicas de cálculo, las actividades que se propone realizar se vinculan con los contenidos que se muestran en la lección anterior en la que figura la propiedad. Además, se ofrece el enlace donde el estudiante puede profundizar en estos contenidos referentes al orden de las fracciones específicamente.

Capítulo 5

RESULTADOS

En este capítulo se reflexionará y se mostrará los resultados del análisis de los textos seleccionados teniendo en cuenta las variables de análisis escogidas con cada uno de sus aspectos.

5.1 Ubicación del tema

5.1.1 Ubicación del contenido en el texto.

La dispersión del contenido referente a la propiedad de densidad en los textos analizados, no es muy diferente en la mayoría de estos. Del total de los textos, 15 muestran el contenido en la primera unidad, bloque, módulo, trimestre o periodo en dependencia de cómo esté organizado. Solo dos textos, el S00333 y el S00334 presentan una diferencia en este aspecto. El S00333 está dividido en 30 secuencias, donde la primera de ellas es dedicada a la introducción del tema de fracciones y decimales y no es hasta la secuencia 21 que se aborda lo relacionado con la propiedad. Por otra parte, el S00334 de igual manera dividió en secuencias, en la 2 y 3 se introducen ambas representaciones del número racional y hasta la secuencia 34 se enuncia la propiedad de densidad. Estos textos no siguen la organización propuesta por el programa de la SEP (2021), donde se proponen 3 ejes con sus respectivos temas a abordar para este grado. El tema de “Números”, es el primero que se trata en el primer eje propuesto, involucra todo lo relacionado con los números en forma decimal y fraccionaria, de ahí le siguen otros temas que completan este primer eje. En estos textos, S00333 y S00334, se trabajan de manera simultánea todos los temas del primer eje sin tener en cuenta un orden preciso para cada uno de ellos, de ahí que se aborde la propiedad de densidad en secuencias diferentes a donde se introducen los números racionales. Esta dispersión puede traer dificultades al estudiante, dado que necesitará de los contenidos iniciales para comprender la propiedad, lo que conlleva a que les sea recordado este conocimiento, aspecto que no pasaría si se trabajaran de manera organizada y continua los contenidos referentes a los números racionales. Esta diferencia respecto a los demás textos puede estar dada porque son los únicos que pertenecen a la misma editorial, Ediciones SM. Aunque no son los mismos autores, esta similitud puede estar relacionada con la forma diferente de organizar los contenidos, respecto al resto de los textos. En la Tabla 3 es posible observar una descripción estadística mediante una tabla de frecuencias para este primer aspecto referente a la ubicación del contenido en el texto.

Tabla 3

Tabla de frecuencias para la variable ubicación del contenido en el texto.

Variable	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	Porcentaje %
Textos que abordan el contenido en la misma unidad, secuencia o bloque.	15	15/17	88 %
Textos que abordan el contenido en diferentes unidades, secuencias o bloques.	2	2/17	12%

5.1.2 Enfoque y objetivo del bloque o secuencia donde se ubica el contenido.

La propiedad de densidad, en los textos donde se enuncia, tiene como antecedente, el orden y comparación de los números en notación decimal y fraccionaria, de ahí que ese sea un aprendizaje esperado que tienen en común todos los textos. Varía en cuanto a que 9 textos no hacen mención explícita de la propiedad como aprendizaje esperado lo que no quiere decir que no se aborde, solo que puede ocasionar que el estudiante al leer este apartado no concebirá la propiedad como un aprendizaje que es necesario adquirir. Los demás textos de una forma u otra hacen mención de la propiedad, ya sea explícitamente en los aprendizajes esperados o como nombre de la secuencia donde se aborda, aspecto que los demás textos tampoco poseen. En la Tabla 4 se muestra la descripción mediante una tabla de frecuencias para este aspecto.

Tabla 4

Tabla de frecuencias para la variable enfoque y objetivo del bloque donde se ubica el contenido.

Variable	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	Porcentaje %
Textos que hacen mención de la propiedad de densidad de alguna manera.	8	8/17	47 %
Textos que no hacen mención de la propiedad de densidad de manera alguna.	9	9/17	53%

5.2 Aspectos conceptuales

5.2.1 Definición.

Este aspecto es muy relevante en la investigación dado que es el centro de la misma, de ahí la importancia de analizar cómo se define en cada uno de los textos la propiedad de densidad. Resulta que, de los 17 textos, 9 enuncian la propiedad para números fraccionarios y números decimales, explícitamente se deja escrito de esta manera, sin embargo al abordar los números decimales lo hacen a partir de las fracciones decimales y no se explica qué ocurre con las fracciones que no son decimales, entonces, al solo abordar las fracciones decimales, los números decimales no son más que otra forma de representación para este tipo de fracciones y no se deja claro, sino más bien se crea más confusión en cuanto a las posibles representaciones de este subconjunto de los números racionales. Esta irregularidad contradice los hallazgos de Vamvakoussi y Vosniadou (2010), donde las autoras enfatizaron en la importancia de entender que diferentes notaciones simbólicas se refieren al mismo número, es decir, los números con escritura decimal y las fracciones son representaciones “intercambiables” de números racionales y no diferentes objetos matemáticos.

Otros 4 textos formalizan la propiedad solo haciendo mención de los números fraccionarios. En uno de ellos (S00334), se pide verificar con el profesor si se cumple para los números decimales y en otro (S00342), solo se define lo que es un conjunto denso y a partir de ahí se menciona que los decimales son un conjunto denso, por lo que cuando se enuncia para los números fraccionarios se toman estos como un conjunto diferente al de los números decimales. Esta característica la presentan dos textos más, el S00338 y el S00340. En estos textos se formaliza la propiedad para el “conjunto de los números fraccionarios” y para el “conjunto de los números decimales”, dejan explícitamente escrito los autores, no solo que son números diferentes sino que pertenecen a conjuntos numéricos diferentes, lo que no es totalmente correcto, dado que el conjunto de los números decimales son un subconjunto de los números fraccionarios, que según Ávila y García (2008), estas fracciones son las que conforman el conjunto de los números racionales. En estos casos no coinciden las editoriales ni los autores, lo que es aún más preocupante dado que difunden una formalización incorrecta no solo de la propiedad de densidad sino del conjunto de los números racionales en general al tratarlos como conjuntos totalmente diferentes. Esta situación puede estar relacionada con las orientaciones didácticas que ofrece el programa de estudio de matemáticas para primer grado de secundaria (Secretaría de Educación Pública, 2021). En este documento es posible

observar, en el apartado referente a la propiedad de densidad, que se hace mención al conjunto de los números fraccionarios y al conjunto de los números decimales, pero en ningún apartado se propone abordar primeramente cómo se conforma el conjunto de los números racionales para que el estudiante sea capaz de entender por qué muchos textos mencionan dos conjuntos o dos números diferentes cuando se hace alusión a fracciones y decimales.

Los restantes 2 textos, S00337 y S00343, enuncian la propiedad para el conjunto de los números racionales. A pesar de ello, existe gran diferencia entre ambas definiciones, en el primer texto, a pesar que se menciona que la propiedad es de los números racionales en el mismo recuadro mencionan a las fracciones y posteriormente enuncian la propiedad para los números decimales, por lo que volviendo a los casos anteriores, se tratan como números diferentes y analizando un poco más a fondo el enunciado, se puede entender que para los autores, solo las fracciones son números racionales, los decimales no están contemplados en este conjunto numérico.

En el segundo texto, S00343, se define inicialmente “número racional” y posteriormente se enuncia la propiedad para este conjunto numérico, no se hace distinción entre ambas notaciones, sino que aquí queda explícito que son solo representaciones diferentes de un mismo número. Es el único texto de los 16 donde no dejan lugar a dudas respecto a este tema. Para observar con mayor claridad las dificultades a las que se enfrentan alumnos y docentes con el uso de estos textos, se desarrolla una tabla de frecuencias, tabla 5, que permite observar el porcentaje de errores que existen en cuanto a la definición de la propiedad en cuestión.

Tabla 5

Tabla de frecuencias para la variable definición de la propiedad de densidad.

Variable	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	Porcentaje %
Textos que de manera explícita redactan la propiedad por separado para números fraccionarios y números decimales.	9	9/17	53 %
Textos que de manera explícita redactan la propiedad por separado para el conjunto de los números fraccionarios y el conjunto de los números decimales.	2	2/17	12 %

Variable	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	Porcentaje %
Textos que enuncian la propiedad solo haciendo mención de los números fraccionarios.	4	4/17	23 %
Textos que enuncian la propiedad para el conjunto de números racionales pero abordan por separado números fraccionarios y números decimales.	1	1/17	6 %
Textos que enuncian la propiedad para el conjunto de números racionales de manera correcta.	1	1/17	6 %

Observando la Tabla 5 se puede observar que el 94 % de los textos abordan de manera incorrecta la propiedad de densidad, dado que no se tiene en cuenta los elementos que conforman el conjunto de los números racionales, solo un texto, representando el 6 %, lo hace correctamente. Datos que dejan evidente que la propiedad de densidad de los números racionales no se está abordando de manera correcta en los libros de textos de primer grado de secundaria en México.

5.2.2 Uso de las representaciones del número racional.

Estudios realizados por Vamvakoussi y Vosniadou (2007, 2010), señalan que la representación simbólica en los extremos de un intervalo afecta el juicio de los estudiantes para determinar qué tipo de representación son los números intermedios que hay en dicho intervalo. Es decir, el estudiante manifiesta que hay números decimales entre decimales y fracciones entre fracciones, pero que no puede haber decimales entre fracciones y/o fracciones entre decimales.

Esto está muy relacionado con el cómo se plantea en los textos la propiedad de densidad. Al enunciarla para números fraccionarios y números decimales, los autores entendieron que entre fracciones se pueden hallar fracciones y entre decimales, solo decimales. De esta manera solo se incentiva aún más a obtener la concepción errónea mencionada en Vamvakoussi y Vosniadou (2007, 2010), aunque posteriormente en las actividades que se propongan se utilicen estas representaciones de manera simultánea, ya al estudiante le quedó formalizada la idea anterior, no siendo cierta matemáticamente. Respecto a esto, Graca, Ponte y Guerreiro (2018), resaltan la importancia de utilizar las diferentes representaciones en paralelo, subrayando la necesidad de

formular tareas que permitan el establecimiento de relaciones de un sistema de representación a otro.

Solo el texto S00343 en sus actividades relacionadas con la propiedad de densidad, propone convertir fracciones a notación decimal y encontrar fracciones entre estos números. Se recoge una descripción estadística de estos datos mediante una tabla de frecuencias, Tabla 6.

Tabla 6

Tabla de frecuencias para la variable uso de las representaciones del número racional.

Variable	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	Porcentaje %
Textos que relacionan ambas representaciones del número racional.	1	1/17	6 %
Textos que no relacionan ambas representaciones del número racional.	16	15/17	94 %

El 94 % de los textos les está enseñando a los estudiantes que los números fraccionarios y los números decimales son totalmente diferentes y que bajo ninguna circunstancia estos pertenecen al mismo conjunto numérico.

5.2.3 Explicación de los algoritmos.

Respecto a los algoritmos que se utilizan para hallar fracciones o decimales entre dos dados, la mayoría de los textos propone, en el caso de las fracciones, hacer uso de las fracciones equivalentes o calculando la fracción que se ubica justo a la mitad de otras dos dadas, sumando los extremos del intervalo y dividiendo el resultado entre 2. Este último procedimiento es el que se utiliza para hallar decimales entre dos dados. De igual manera se utiliza la ubicación en la recta numérica, mediante la subdivisión de los intervalos se hallan números entre dos dados.

El texto S00327, hace mención de un procedimiento que no se utiliza en ninguno de los demás textos, en este se propone completar las cifras decimales con ceros a la derecha para obtener una representación equivalente con más cifras decimales y de esta manera hallar más números decimales entre los dos dados inicialmente.

Por otra parte, los textos S00334, S00341 y S00343, no mencionan ninguno de estos procedimientos, solo proponen ejercicios a resolver y que deben ser debatidos con el grupo de compañeros y el profesor, pero no deja explícito en ninguna sección cómo se realizan estos procedimientos a diferencia de los demás textos. En la Tabla 7 se muestra una descripción estadística mediante una tabla de frecuencias para esta variable.

Tabla 7

Tabla de frecuencias para la variable explicación de los algoritmos.

Variable	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	Porcentaje %
Textos que explican algún algoritmo para hallar números racionales entre dos dados.	14	14/17	82 %
Textos que no explican algoritmo alguno para hallar números racionales entre dos dados.	3	3/17	18 %

5.3 Reforzamiento del contenido

5.3.1 Ejercicios para aplicar el contenido.

Dado que la cantidad de páginas que se dedican al estudio de la propiedad son muy pocas, esto repercute en gran medida en los ejercicios que se proponen para reafirmarla. De manera general, son muy pocas las actividades que se proponen, en su mayoría se enfocan en la ubicación en la recta numérica y hallar un número entre dos dados mediante los procedimientos de cálculo, lo que permite que se refuercen los algoritmos, más no la propiedad de densidad como tal. El texto S00338 ni siquiera propone actividades luego de enunciada la propiedad, pasa de esto a otra lección y no da espacio al estudiante para que pueda reafirmar lo aprendido. La Tabla 8 describe estadísticamente el comportamiento de estos datos mediante una tabla de frecuencias.

Tabla 8

Tabla de frecuencias para la variable ejercicios para aplicar el contenido.

Variable	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	Porcentaje %
Textos que proponen actividades para reforzar el contenido.	16	16/17	94 %
Textos que no proponen actividad alguna de reforzamiento del contenido.	1	1/17	6 %

5.3.2 Situación o aspecto de motivación.

Los libros de texto carecen de situaciones de motivación respecto a la propiedad de densidad. Los problemas que se proponen para insertar este contenido se basan más en los aspectos procedimentales que en relacionarlos con la vida diaria del estudiante o proponerlos de manera tal que el estudiante tenga que hacer uso de algunas de las tecnologías conocidas.

Los textos S00327 y S00341 de alguna manera hacen uso de la tecnología al ofrecer sugerencias de link donde se puede visualizar con mayor profundidad el contenido que se imparte. Por otra parte, el S00340, basa sus actividades en situaciones del entorno cotidiano, esto permite que se cree la necesidad de tener que construir otra forma de representación numérica dado que la que conocen hasta ese momento no les ayuda a dar solución al problema que se les presenta. De esta manera se propicia que el alumno no entienda los números racionales como extensión de los naturales, aspecto considerado por Cabarcas y Soler (2017), como uno de los que dificulta la comprensión de la propiedad de densidad de los racionales. Son estos textos los que de cierta manera presentan aspectos que se pueden considerar de motivación para el estudiante.

Tabla 9

Tabla de frecuencias para la variable situación o aspecto de motivación.

Variable	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	Porcentaje %
Textos que proponen algún aspecto o situación de motivación.	3	3/17	18 %
Textos que no proponen aspecto o situación alguna de motivación.	14	14/17	82 %

La tabla anterior muestra que el 82 % de los textos no les muestra a los estudiantes la aplicación en la vida diaria de la propiedad en cuestión o que no es necesario el uso de la tecnología para comprender mejor este tema, cuestiones que solo crean una brecha entre la matemática escolar y el entorno diario del estudiante.

CONCLUSIONES

La investigación llevada a cabo al ser del tipo exploratoria, se basó fundamentalmente en mostrar cómo los textos de primer grado de secundaria en México muestran la propiedad de densidad de los números racionales. Para ello, se fue dando cumplimiento a los objetivos que se plantearon. Los dos primeros consistían en: Identificar las principales dificultades en el aprendizaje de los números racionales y la propiedad de densidad descritas en la literatura. El segundo, describir brevemente la inserción en el currículo de los números racionales y la propiedad de densidad en algunos países, haciendo énfasis en el currículo mexicano. Estos fueron cumplidos en el desarrollo del segundo capítulo, donde se muestran las principales dificultades enunciadas por diferentes investigadores en cuanto a la comprensión de la propiedad de densidad y de los números racionales como el nuevo conjunto que debe ser aprendido por los estudiantes. Además, se hace un breve recuento de cómo se inserta en los currículos de varios países y en particular en México, los números racionales y la propiedad de densidad.

Para dar cumplimiento al tercer objetivo relacionado con mostrar cómo se aborda la propiedad de densidad en los libros de texto de matemáticas de primer grado de secundaria en México, se trabajó todo un capítulo, realizando el análisis de cada texto seleccionado teniendo en cuenta las variables descritas en el capítulo tercero. Estas fueron surgiendo a raíz del análisis de cada texto, aquellos aspectos que la investigadora fue considerando relevantes durante el análisis del apartado dedicado a la propiedad de densidad en cada uno de los textos, fueron recogidos en las variables descritas.

Dando respuesta a la pregunta general de investigación: ¿Cómo se aborda la propiedad de densidad de los números racionales en los libros de texto de matemática para el primer grado de secundaria en México?, se pudo observar en el análisis realizado a cada uno de los textos que la propiedad de densidad de los números racionales en el primer grado de secundaria en México se aborda de manera incorrecta. Los textos tienen errores matemáticos en las formalizaciones de la propiedad, además como se ha mencionado, hay textos que ni llegan a formalizarla. Los errores que se cometen en el trabajo con fracciones y decimales influyen notablemente en estas formalizaciones, reforzando las dificultades planteadas por Vamvakoussi y Vosniadou (2007, 2010), el estudiante entiende que entre fracciones

solo hay fracciones y de igual manera para los números en forma decimal. Además, un error que prevalece en todos los textos es que no se define correctamente el conjunto de los números racionales y a raíz de esto se cometen errores cuando se aborda la propiedad de densidad de este conjunto numérico.

Con el fin de contribuir a que disminuyan estos errores en los textos, se sugiere que antes de abordar la propiedad de densidad se defina el conjunto de los números racionales de acuerdo con el nivel de conocimiento que poseen los estudiantes en este grado escolar. Una forma sencilla es la que proponen Ávila y García (2008) donde plantean que el conjunto de los números racionales son todos los números que pueden escribirse como fracciones, es decir, como $\frac{a}{b}$, donde a y b son números enteros y b debe ser diferente de cero. Mediante el proceso de división, se obtienen las expresiones decimales, las que pueden ser finitas, correspondiendo a los números decimales y las expresiones decimales infinitas periódicas, la unión de ambas conforman el conjunto de los números racionales. Se puede notar que los números decimales son un subconjunto de los racionales.

Con esta idea que proponen las autoras, el estudiante entenderá que es un nuevo conjunto numérico, que contiene a los que estudiaron con anterioridad y lo más importante que los elementos de este conjunto son llamados fracciones y que además tienen otra forma de representación mediante expresiones decimales. Queda claro que solo son representaciones diferentes de un mismo número racional, con lo que se evitarían los errores cometidos en los textos analizados respecto a tratar a las fracciones y a los decimales como números totalmente diferentes y no como subconjunto de estas, además se minimizan de esta manera las dificultades a las que se enfrenta el estudiante y que han sido descritas por Vamvakoussi y Vosniadou (2010) en un estudio, donde enfatizan en la importancia que el estudiante comprenda que diferentes notaciones simbólicas se refieren al mismo número, es decir, los números con escritura decimal y las fracciones son representaciones “intercambiables” de números racionales y no diferentes objetos matemáticos.

De manera general, el análisis llevado a cabo deja varias preocupaciones respecto a la enseñanza de la propiedad de densidad de los números racionales en el primer grado de secundaria en México. El primero de ellos, se relaciona con la forma en que queda plasmado en el programa de la Secretaría de Educación Pública, en las orientaciones didácticas destinadas a los docentes de este grado escolar, específicamente lo relacionado con la propiedad de densidad, se deja explícito que se debe abordar la propiedad para el “conjunto de los números fraccionarios” y el “conjunto de los números decimales”. Dado que el programa no concibe explicar con anterioridad la formación del conjunto de los racionales

y a partir de ahí definir correctamente la propiedad de densidad que este posee, se fomenta la confusión y la creación de conceptos erróneos en cuanto a este contenido, lo que lleva a cuestionarse cómo es posible que a este grupo de personas encargadas de elaborar estos programas se les pase por alto dificultades matemáticas que posteriormente van a influir negativamente en la formación matemática de los estudiantes.

No solo presenta errores el programa, los materiales que se publican en los portales digitales, específicamente para telesecundaria destinados a apoyar a los docentes en las clases de matemáticas, en este caso, un material audiovisual dedicado a la propiedad de densidad, se plantea una relación de los términos antecesor y sucesor de números decimales con la existencia de la propiedad de densidad para estos números. Este aspecto ha sido uno de los mayores problemas en el entendimiento de la propiedad de densidad según Ávila y García (2008). Las autoras plantean que el alumno solo puede referir cierta cantidad de cifras decimales y decir que no hay más porque creen que un número decimal es un número de una sola cifra decimal o a lo mucho consideran las centésimas, es por ello que algunos estudiantes que poseen esta concepción de número decimal consideran que los extremos de un intervalo son consecutivos, los llamados “consecutivos falsos” según Vamvakoussi y Vosniadou (2004). Lo que se considera más preocupante es que este error matemático se fomente mediante materiales que tienen impacto nacional y los docentes que los lleguen a utilizar en sus clases continúan fomentándolo. De igual manera, qué pasa con el grupo encargado de revisar estos materiales que no toman en cuenta estos errores y permiten que se publiquen en los portales oficiales del sistema educativo en el país.

Por otra parte, por el análisis que se realizó de los textos es posible inferir que se da mucha importancia a la labor docente del maestro. Se dejan muchas cuestiones del contenido referente a la propiedad para ser discutidos en el aula con la guía del maestro. Si este maestro no tiene bien concebido todo lo relacionado con la propiedad de densidad le estará transmitiendo los errores a los estudiantes que además los mismos libros estarían fomentando. Esto debería constituir una preocupación para las autoridades del sistema educativo dado que en esta investigación solo se muestra un tema de los que aborda el programa y se puede observar la gran variedad de errores que presenta.

Sugerencias para investigaciones futuras

A partir de estos aspectos que fueron surgiendo del análisis de los textos que al no ser el objetivo de dicha investigación no se profundizaron, la autora considera que son temas muy importantes que deberían ser abordados en investigaciones futuras, por lo que se dejan abiertas varias líneas de

investigación. La primera de ellas relacionada con la forma de abordar el conjunto de los números racionales por varios textos y en el programa en general y el por qué no se define correctamente este conjunto antes de abordar otros temas matemáticos que lo involucren. Otra puede ser, analizar el impacto que tiene para el sistema educativo nacional el uso de estos materiales presentados en los portales oficiales para el apoyo del docente, en específico, para abordar la propiedad de densidad, dado que los mismos presentan errores matemáticos. Por último y para la autora el más importante, lo referente a la preparación que tienen los profesores de secundaria en servicio respecto a la propiedad de densidad, dado que las concepciones que poseen son las que serán transmitidas al estudiante. Puede considerarse realizar un taller breve que permita conocer las concepciones de un grupo de estos profesores y poder realizar actividades que fomenten la correcta comprensión de la propiedad de densidad de los números racionales.

REFERENCIAS

- Acervo-Televisión Educativa. (8 de noviembre de 2019). *La propiedad de densidad en los números fraccionarios y decimales* [video].
- <https://www.youtube.com/watch?v=qW4jkQVnchA&t=4s>
- Apple, M. W. (1989). *Maestros y textos*. Paidós/MEC.
- Ávila, A. (2008). Los profesores y los decimales. Conocimientos y creencias de un contenido de saber cuasi invisible. *Educación Matemática*, 20(2),5-33.
- Ávila, A., y García, S. (2008). *Los decimales más que una escritura*. INEE-CINVESTAV.
- <https://www.inee.edu.mx/wp-content/uploads/2019/01/P1D402.pdf>
- Behr, M. J., Lesh, R., Post, T. R., y Silver, E. A. (1983). Rational number concepts. En R. Lesh y M. Landau (Eds.). *Acquisition of mathematics concepts and process* (pp. 91-126). Academic Press, Inc.
- Braga, G., y Belver, J. (2016). El análisis de libros de texto: una estrategia metodológica en la formación de los profesionales de la educación. *Revista Complutense de Educación*, 27(1), 199-218. doi.org/10.5209/rev_RCED.2016.v27.n1.45688
- Cabarcas, B., y Soler, C. (2017). *Aproximación a la propiedad de densidad del conjunto de los números racionales desde las representaciones en el registro como fracción y el registro decimal* [Tesis de maestría].
- <https://repository.javeriana.edu.co/bitstream/handle/10554/37869/CabarcasTruyolBrianAlberto2017.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- Campanario, J. M., y Otero, J. (2000). Comprensión de los libros de texto. En F. J. Perales, y P.

- Cañal (Eds). *Didáctica de las ciencias experimentales* (pp. 323-338). Marfil.
- Centeno, J. (1998). *Números decimales ¿Por qué? ¿Para qué?*. Síntesis Editorial.
- Escolano, R. (2004). *Presencia histórica de la fracción en los libros de texto del sistema educativo español* [Comunicación]. VIII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, La Coruña, España.
- Fan, L. (2013). Textbook research as scientific research: towards a common ground on issues and methods of research on mathematics textbooks. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education*, 45, 765-777. doi: 10.1007/s11858-013-0530-6
- Gairín, J., y Sancho, J. (2002). *Números y Algoritmos*. Síntesis.
- Gallo, F. (2019). *El sistema Q de números racionales* [Tesis de Maestría].
<https://repositorio.une.edu.pe/bitstream/handle/UNE/4360/EL%20SISTEMA%20Q%20DE%20N%20C3%9aMEROS%20RACIONALES.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- Gimeno, J. (1995). Materiales y textos: contradicciones de la democracia cultural. En J. G. Minguez y M. Beas (Eds.). *Libro de texto y construcción de materiales curriculares*. Proyecto Sur de Ediciones.
- Graca, S., Ponte, J. P., y Guerreiro, A. (2018). As representacoes dos números racionais na perspectiva de alunos do 5 ano de escolaridade. *XXIX SIEM*. (pp. 172-186).
- Konic, P. (2011). *Evaluación de conocimientos de futuros profesores para la enseñanza de los números decimales* [Tesis de doctorado].
https://www.ugr.es/~jgodino/Tesis_doctorales/Patricia_Konic_tesis.pdf
- Maz, A., y Rico, L. (2009). Negative numbers in the 18th and 19th centuries: phenomenology

and representations. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, 7(1), 537-554.

Perera P., y Valdemoros, M. (2009). Enseñanza experimental de las fracciones en cuarto grado. *Educación Matemática*, 21(1), 29-61.

Quispe Yapo, W. (2008). *Interferencias en la comprensión de los significados del número racional*. [Tesis de maestría].

<http://es.slideshare.net/collasuyow/tesis-maestra-wenceslao-quispeyapo>

Rico, L. (1990) Diseño curricular en Educación Matemática: Una perspectiva cultural. En S. Linares y V. Sánchez (Eds.) *Teoría y Práctica en Educación Matemática* (pp. 17-62). Alfar.

Rodríguez, F., Basso, A., y García, M. (2019). El análisis de textos como metodología de investigación en educación matemática. En A. Ruiz. *Conferencia Interamericana de Educación Matemática*. Conferencia llevada a cabo en XV CIAEM, Medellín, Colombia.

Rojano-Ceballos, M. T., y Solares-Rojas, A. (2017). *Estudio comparativo de la propuesta curricular de matemáticas en la educación obligatoria en México y otros países*. INEE-CINVESTAV. <https://www.inee.edu.mx/wp-content/uploads/2019/01/P1F210.pdf>

Secretaría de Educación Pública (2021). Plan y Programa de Estudio Matemáticas Secundaria 1
Recuperado de <https://www.planyprogramasdestudio.sep.gob.mx/sec-ae-pensamiento-mate1.html>

Stafylidou, S., y Vosniadou, S. (2004). The development of students' understanding of the numerical value of fractions. *Learning and Instruction*, 14, 503-518.

doi:10.1016/j.learninstruc.2004.06.015

- Suárez-Rodríguez, M., y Figueras, O. (2019). Towards a conceptualization of the density property of decimal numbers: a study with teachers in training. En S. Otten, A.G. Candela, Z. de Araujo, C. Haines y C. Munter (Eds.). *Proceedings of the forty-first annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp.741-745). University of Missouri.
- Torres, E. (2015). *El conocimiento del profesor de Matemáticas en la práctica: enseñanza de la proporcionalidad* [Tesis de doctorado].
<https://www.tdx.cat/bitstream/handle/10803/290741/etm1de1.pdf?sequence=1>
- Vamvakoussi, X., Van Dooren, W., y Verschaffel, L. (2012). Naturally biased? In search for reaction time evidence for a natural number bias in adults. *The Journal of Mathematical Behavior*, 31(3), 344-355.
- Vamvakoussi, X., y Vosniadou, S. (2004). Understanding the structure of the set of rational numbers: A conceptual change approach. *Learning and Instruction*, 14, 453-467.
doi:10.1016/j.learninstruc.2004.06.013
- Vamvakoussi, X., y Vosniadou, S. (2010). How Many Decimals Are There Between Two Fractions? Aspects of Secondary School Students' Understanding of Rational Numbers and Their Notation. *Cognition and Instruction*, 28(2), 181-209. doi:
10.1080/07370001003676603
- Van Dooren, W., Lehtinen, E., y Verschaffel, L. (2015). Unraveling the gap between natural and rational numbers. *Learning and Instruction*, 37, 1-4.
- Vanhille, L. S., y Baroody, A. J. (2002). Fraction instruction that fosters multiplicative reasoning. En B. Litwiller (Ed.). *Making sense of fractions, ratios, and proportions: NCTM 2002*

Yearbook (pp. 224-236). National Council of Teachers of Mathematics.