BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

EL CÍRCULO MATEMÁTICO INFANTIL. UNA PROPUESTA PARA EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS A NIVEL PRIMARIA EN UN CONTEXTO EXTRAESCOLAR

TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE
MAESTRA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

PRESENTA
LIC. SINAI HERNÁNDEZ GONZÁLEZ

DIRECTOR DE TESIS
DR. JUAN CARLOS MACÍAS ROMERO

CO-DIRECTORA DE TESIS
DRA. MARÍA ARACELI JUÁREZ RAMÍREZ

PUEBLA, PUE. JUNIO 2024

BUAP

DR. SEVERINO MUÑOZ AGUIRRE
SECRETARIO DE INVESTIGACIÓN Y
ESTUDIOS DE POSGRADO, FCFM-BUAP
P R E S E N T E:

Por este medio le informo que la C:

SINAI HERNÁNDEZ GONZÁLEZ

Estudiante de la Maestría en Educación Matemática, ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 10 de noviembre de 2023, con la tesis titulada:

"EL CÍRCULO MATEMÁTICO INFANTIL. UNA PROPUESTA PARA EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS A NIVEL PRIMARIA EN UN CONTEXTO EXTRAESCOLAR"

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

A T E N T A M E N T E.
H. Puebla de Z. a 13 de junio de 2024

DRA. LIDIA AURORA HERNÁNDEZ REBOLLAR
COORDINADORA DE LA MAESTRÍA
EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA.

DRA´LAHR/l´agm*

AGRADECIMIENTOS

Agradezco al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías (CONAHCYT) por su apoyo financiero a través del número de beca CVU 1080806 sin el cual este trabajo de investigación ni los estudios de posgrado hubieran sido posible.

AGRADECIMIENTOS

A mis hermanas Armel, Edna y Lizet por motivarme, apoyarme y ser un ejemplo para mí de perseverancia y trabajo. A mi sobrina Tessa que la he visto crecer y que es parte importante en mi vida. Gracias a todas por su cariño y amor.

A Gustavo por su apoyo incondicional, escucharme, motivarme e impulsarme a alcanzar mis metas. Gracias por estar mi en mi vida y por ser mi equilibrio.

A mi director de tesis Dr. Juan Carlos Macías Romero por permitirme trabajar bajo su dirección. Por su confianza y el apoyo brindado durante la elaboración de esta tesis. Un cálido agradecimiento a la Dra. María Araceli Juárez Ramírez, la Dra. Lidia Aurora Hernández Rebollar y al Dr. José Antonio Juárez López por sus observaciones y comentarios para mejorar este trabajo.

ÍNDICE

Resumen

El objetivo de esta investigación es evaluar el impacto de un Círculo Matemático implementado con estudiantes de 5to y 6to año de primaria para promover el aprendizaje de la matemática en un contexto extraescolar. Para la evaluación propuesta se utilizaron 3 problemas. La investigación se desarrolló con un enfoque mixto. El impacto del Círculo Matemático se evaluó a través de las experiencias de los participantes y de lo observado por el responsable de este espacio. Para el análisis cuantitativo, se realizó una prueba estadística con datos apareados que se obtuvieron al calificar un pre y post test. Los resultados muestran que el Círculo Matemático es una alternativa a los ambientes escolares tradicionales para la resolución de problemas matemáticos sin presión, sin competencia y sin evaluación. De este modo, un Círculo Matemático puede complementar el aprendizaje de las matemáticas de los participantes.

Palabras clave: Círculo Matemático, primaria, resolución de problemas, aprendizaje de las matemáticas.

Abstract

This research aims to evaluate the impact of a Math Circle implemented with 5th and 6th grade students to promote mathematics learning in an out-of-school context. For the proposed evaluation, three problems were used. The research was developed with a mixed approach. The impact of the Mathematical Circle was evaluated through the experiences of the participants and what was observed by the person in charge of this space. For the quantitative analysis, a statistical test was performed with paired data obtained by scoring a pre- and post-test. The results show that the Math Circle is an alternative to traditional school environments for solving mathematical problems without pressure, without competition and without evaluation. Thus, a Math Circle can complement participants' mathematics learning.

Keywords: Math Circle, elementary school, problem solving, learning mathematics

INTRODUCCIÓN

Uno de los fines de la educación en el siglo XXI al término de la Educación Básica y Media Superior establece que los estudiantes deben ser capaces de resolver problemas que se encuentren en la vida diaria. Esto involucra, entre otros, la capacidad de argumentar y comunicar información, ser críticos, reflexivos y creativos. Se plantea que este fin se logre progresivamente a lo largo de la trayectoria escolar. Sin embargo, también existe la educación informal donde el aprendizaje y la enseñanza ocurren fuera del aula tradicional (Bakker et al., 2021). Estos ambientes son llamados entornos informales. Investigaciones en enseñanza y aprendizaje de las matemáticas muestran que los entornos informales tienen efectos positivos en los participantes (Nemirovsky et al., 2017; Mast, 2015; Kennedy y Smolinsky, 2016).

Los Círculos Matemáticos son un ejemplo de un entorno informal donde es posible apartarse del currículo y las evaluaciones de la educación formal (Nemirovsky et al., 2017). Estos espacios surgieron en Rusia a principios del siglo XX, llamados Mathematics Circles, en donde se realizaban reuniones informales con el objetivo de resolver problemas matemáticos o preparar estudiantes para competencias matemáticas (Kaplan y Kaplan, 2014). Posteriormente, en 1990 empieza la expansión de los primeros Mathematics Circles en Estados Unidos donde se llamaron Math Circles (MC), que fueron establecidos por profesores rusos quienes tuvieron la experiencia de participar en su juventud en estos ambientes (Mast, 2015). Actualmente existen alrededor de 200 programas de MC que se establecen en un horario extraescolar y el lugar de reunión puede ser en una escuela o en una universidad.

Los primeros MC se enfocaron en preparar a jóvenes con talento matemático para que participaran en competencias matemáticas. Sin embargo, Vandervelde (2009) propone nuevos objetivos para los MC: abordar temas avanzados de matemáticas con estudiantes sobresalientes; o, explorar, a través de juegos y actividades, las matemáticas y resolución de problemas matemáticos. Con este antecedente, para 2017, en Estado Unidos se realizó una encuesta a los responsables de los MC, que mostró que el 69% de estos espacios ya no tenían como objetivo preparar a jóvenes para competencias (Long et al., 2017).

Actualmente, en un MC pueden participar maestros de matemáticas, interesados en las matemáticas y estudiantes de nivel básico hasta el nivel medio superior. En este espacio se trabaja de manera conjunta con participantes y matemáticos. A causa del rápido crecimiento de los MC en Estados

Unidos, se comenzó a hacer investigación para analizar el impacto que tienen los MC en profesores, estudiantes y en los responsables de los MC (Bryant et al., 2019; Burns et al., 2017; Donaldson et al., 2018; Kennedy y Smolinsky, 2016). En nuestro país, el primer MC se implementó en el año 2017 con estudiantes del nivel medio superior en el Instituto de Matemáticas de la UNAM y fue nombrado Círculos Matemáticos. En 2020, en el estado de Guanajuato se desarrolló un Círculo Matemático (CM, en plural CMs) virtual, dirigido a interesados en la matemática y a docentes de secundaria que impartían la materia de matemáticas.

Con lo anterior, se puede notar que los CMs son escasos con respecto a los implementados en Estados Unidos y esto no ha favorecido la investigación sobre el impacto que tienen estos espacios en México. Por ello, el objetivo planteado en esta investigación es evaluar el impacto de un Círculo Matemático implementado con estudiantes de 5to y 6to año de primaria para promover el aprendizaje de la matemática en un contexto extraescolar. El impacto del CM se evaluó cuantitativamente a través de un pre y post test y cualitativamente a través de la experiencia del participante, la cual se recabó mediante un cuestionario, y lo observado por el responsable del CM. La pregunta que guía esta investigación es ¿Cómo favorece un Círculo Matemático al aprendizaje de las matemáticas con estudiantes de 5to y 6to de primaria en un contexto extraescolar?

La presentación del trabajo se organiza como sigue. En el Capítulo 1, se aborda el planteamiento del problema. Además, se proporcionan la pregunta de investigación, objetivos y motivaciones que impulsaron este trabajo. En el Capítulo 2 se presente el marco conceptual. En este apartado se proporcionan las definiciones requeridas para el desarrollo de este trabajo. En el Capítulo 3 se describe el método de la investigación, es decir, se proporciona información de los participantes, el espacio donde se desarrolló el CM, normas de interacción, el pre y post test así como los problemas que se desarrollaron en las sesiones. Además, en este apartado se incluye el cuestionario aplicado a los participantes para documentar su experiencia en el CM. En el Capítulo 4 se muestran los resultados cuantitativos y cualitativos de la implementación del CM. Finalmente, se dan las Conclusiones.

Capítulo 1

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas no se da únicamente en el contexto de la escuela sino también en entornos informales (Bakker et al., 2021). En un entorno informal no se tienen las limitaciones del aula tradicional y se permite flexibilidad para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. Un CM es un ejemplo de un entorno informal. Participar en un CM tiene efectos positivos tanto en los alumnos, profesores y responsables del CM (Bryant et al., 2019; Burns et al., 2017; Kennedy y Smolinsky, 2016; Donaldson et al., 2018). Sin embargo, en México se han implementado únicamente dos CMs, el primero se desarrolló en el año 2017 con estudiantes y el segundo con docentes de matemáticas o interesados en las matemáticas en el año 2020. Por lo anterior, la investigación de estos espacios se encuentra limitada, por ello se implementó un CM en un contexto extraescolar con estudiantes de 5to y 6to año de primaria en el estado de Puebla para iniciar con la investigación de estos espacios. A continuación, se presentan las preguntas y objetivos que guiaron la investigación.

1.1 Pregunta de la investigación

Pregunta general

¿Cómo favorece un Círculo Matemático al aprendizaje de las matemáticas con estudiantes de 5to y 6to de primaria en un contexto extraescolar?

Preguntas específicas

- ¿Qué condiciones permiten la creación de un Círculo Matemático?
- ¿Qué factores permiten al Círculo Matemático adaptarse a un contexto urbano?
- ¿Qué problemas permiten a los estudiantes de 5to y 6to de primaria favorecer su aprendizaje en un contexto extraescolar?
- ¿Cuál fue la experiencia de los participantes al asistir al Círculo Matemático?
- ¿Existe evidencia de avance en el aprendizaje de los participantes en los temas abordados en el Círculo Matemático?
- ¿Qué estrategias utilizaron los participantes en la resolución de los problemas propuestos?

1.2 Objetivos de la investigación

Para dar respuesta a las preguntas de investigación se plantean los siguientes objetivos:

Objetivo general

Evaluar el impacto de un Círculo Matemático implementado con estudiantes de 5to y 6to año de primaria para promover el aprendizaje de la matemática en un contexto extraescolar.

Objetivos específicos

- Identificar las condiciones que permiten la creación del Círculo Matemático.
- Identificar los factores que permiten al Círculo Matemático adaptarse a un contexto urbano.
- Identificar problemas que permitan a los participantes de 5to y 6to año de primaria favorecer su aprendizaje en un contexto extraescolar.
- Conocer la experiencia de los participantes del Círculo Matemático.
- Exhibir evidencias de avance en el aprendizaje de los participantes en los temas abordados en el Círculo Matemático.
- Identificar las estrategias que utilizaron los participantes en la resolución de los problemas.

1.3 Justificación

Los estudiantes pueden aprender matemáticas en museos, hogares, calles u otros entornos informales (Bakker et al., 2021). En un entorno informal es posible omitir las evaluaciones, las tareas y la calificación, las cuales son características que predominan en la educación formal. Los CMs son un ejemplo de entorno informal. Investigaciones realizadas en Estados Unidos muestran el impacto positivo que tienen los CMs. Burns et al. (2017) implementaron un CM con estudiantes sobresalientes y mostraron que estos espacios ofrecen un trabajo más desafiante en comparación con el del aula, además los participantes crearon relaciones de amistad. Kennedy y Smolinsky (2016) trabajaron con estudiantes de bajo ingreso socioeconómico y reportaron que los participantes incrementaron su interés por las matemáticas y su confianza para abordar problemas matemáticos. Por otro lado, Donaldson et al. (2018) mencionan que los CMs dirigidos a profesores son efectivos para aumentar el conocimiento matemático de los docentes en algunas áreas. Hasta este punto se ha mostrado el impacto de los CMs en participantes y profesores, sin embargo, éste impacto también se puede apreciar en los encargados de estos espacios. Bryant et al. (2019) narran que al implementar un CM tuvieron una mayor comprensión de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, crearon una red de apoyo entre facultad, universidad y comunidad, desarrollaron habilidades de liderazgo y crearon conexiones con la comunidad matemática.

En México, los CMs comenzaron a implementarse recientemente. En 2017 el Instituto de Matemáticas de la UNAM inauguró el primer CM dirigido a estudiantes de tercero de secundaria y los tres niveles de preparatoria. En 2020, en el estado de Guanajuato se implementó un CM virtual dirigido a profesores de matemáticas de secundaria o interesados en las matemáticas. Sin embargo, no se tiene conocimiento de cómo impactaron tales CMs en los participantes. Por lo anterior, es de interés conocer el impacto que generan estos espacios informales.

Hasta el momento, según nuestro conocimiento, no existe un CM para estudiantes de nivel primaria en el país. Aunque podría considerarse un desafío implementar un CM con estudiantes de nivel primaria, existe evidencia que a esa edad los estudiantes tienen curiosidad, un enfoque creativo y una disposición al aprendizaje (Mast, 2015). Por lo tanto, se optó por la implementación de un CM con estudiantes de 5to y 6to año de primaria para el aprendizaje de las matemáticas en un entorno extraescolar.

Lo que se busca es crear un ambiente distinto al de la escuela que permita desarrollar la comunicación y la resolución de problemas. Esto fue motivado ya que los estudiantes tienen las siguientes creencias sobre las matemáticas:

a) cuando se trata de aprender matemáticas basta con memorizar hechos y fórmulas, combinándolos con la práctica de procedimientos (Garofalo, 1989),
b) en diez minutos o menos se puede resolver cualquier problema matemático si se comprende el contenido (Schoenfeld 1992, como se citó en Santos, 2014).

A través de la resolución de problemas matemáticos, los estudiantes adquieren habilidades de pensamiento que permitan crear hábitos de persistencia, curiosidad y generar confianza ante situaciones desconocidas o no familiares (Godino y Batanero, 2004).

El ambiente propuesto para el CM es de no competencia y de asistencia voluntaria ya que se busca generar un espacio de convivencia para promover la resolución de problemas matemáticos. En la resolución de problemas, no se restringe a reportar la respuesta sino buscar distintos caminos para resolverlo, esto a través de la exploración, discusión y el cuestionamiento entre participantes y responsable de este espacio.

Debido a que el CM consta de participantes de 5to y 6to grado se espera que tengan conocimiento sobre los temas de patrones geométricos, ampliación a escala y combinación sin repetición, por lo que los problemas propuestos están relacionados con estos temas.

Lo que se busca es exhibir evidencia de un avance en el aprendizaje de estos temas en un contexto extraescolar, esto se verá reflejado por la aplicación de un pre y post test. También es de interés identificar las estrategias que presentaron los participantes en un ambiente donde no hay competitividad, calificaciones ni presión. Finalmente es importante conocer la experiencia de los participantes a través de su opinión para identificar ventajas y desventajas del CM.

Capítulo 2

MARCO CONCEPTUAL

La investigación en torno a los CMs es reciente por lo que se motiva a investigar sobre el impacto que genera en los estudiantes (Wiegers y White, 2016). En este trabajo de investigación se considera a la resolución de problemas matemáticos un aspecto relevante en la investigación ya que permitirá evaluar el impacto del CM. La resolución de problemas se puede abordar desde dos perspectivas: enseñar a resolver problemas matemáticos o el aprendizaje de la matemática a través de la resolución de problemas matemáticos. Para esta investigación, se considera el segundo enfoque. En específico nos interesa explorar las estrategias utilizadas en la resolución de los problemas. A continuación, se presentan los conceptos requeridos.

2.1 Concepto de problema

Un problema ha sido definido como una situación en la que un individuo actúa con el objetivo de alcanzar una meta, para ello debe utilizar algunas estrategias (Chi y Glase, 1983). Por su parte, Reys et al. (1995) señalan que un problema es una situación en la que se desea algo y no se sabe cómo obtenerlo de manera inmediata, por lo que se deben utilizar diferentes destrezas o estrategias para llegar a la solución. En particular cuando se habla de un problema matemático, de acuerdo con Santos (2014) las características que debe tener un problema matemático son: a) un individuo o un grupo de individuos debe tener el interés de encontrar una solución al problema; b) no hay un procedimiento o regla inmediata que se pueda utilizar y garantice la solución completa del problema; c) la presencia de diversos caminos o métodos de solución y d) la atención por parte del resolutor para realizar un conjunto de acciones que le permita resolverlo.

Para la investigación se adopta la definición de Chi y Glase (1983), es decir, se considera un problema como una situación donde no existe una solución inmediata y se utilizan estrategias que permitan llegar a la solución.

2.2 Modelo para la resolución de problemas

Polya (1945) expone un método heurístico con cuatro etapas: Comprensión de problema (cuestionamiento e identificar datos e incógnitas), configuración de un plan (diseño de una estrategia para la solución del problema), ejecutar el plan (implementar la estrategia) y mirar hacia atrás (verificar la respuesta hallada). Schoenfeld (1985) publica su libro Mathematical Problem Solving donde encontró que existen cuatro aspectos que influyen en el proceso de resolver problemas. Tales categorías son: recursos (conocimientos matemáticos que el individuo posee y es capaz de aplicarlos en una situación particular cuando sea requerido), métodos heurísticos (estrategias generales que permiten descubrir alternativas cuando se encuentra una dificultad y que pueden ayudar para avanzar en la solución del problema), control (la manera en que el individuo usa la información que posee al resolver un problema) y sistemas de creencias (la concepción que tiene el estudiante acerca de las matemáticas). Otro modelo que existe para la resolución de problemas es el Modelo de Miguel de Guzmán.

2.2.1 Modelo de Miguel de Guzmán

El modelo de Guzmán (1995) (como se citó en Blanco, 1996) se basa en "las observaciones realizadas en su propia actividad, en el intercambio de experiencia con sus compañeros, en la exploración de las formas de pensar de sus alumnos en la universidad y en el estudio de las obras de otros autores" (p.17). Dicho modelo toma ideas del modelo de Polya y de Schoenfeld. A continuación, se muestran las características de cada etapa.

1. **Familiarizarse con el problema**. Engloba todas las acciones encaminadas a comprender, del modo más preciso posible, la naturaleza del problema. Las sugerencias heurísticas que propone Guzmán (1995) (como se citó en Blanco, 1996) son: ¿De qué trata el problema?, ¿Cuáles son los datos? y ¿Qué pide determinar o comprobar el problema?
2. **Buscar la estrategia adecuada**. Se trata de determinar varias estrategias para abordar el problema, pero sin llevarlas a cabo, ya que cuando se tengan establecidas se elegirá la más adecuada. Se enumeran algunas estrategias.
    - Empezar por lo fácil. Realizar un problema semejante, pero con menor dificultad. Después, se va complicando el problema hasta conseguir el problema propuesto.
    - Experimentar. Las propiedades generales de un conjunto de números, figuras u objetos se aprecian mejor en casos particulares.
    - Hacer un esquema, una figura o un diagrama. Las imágenes que se realicen deben contener los datos más importantes del problema. De esta manera se consigue resaltar de manera visual las relaciones que existen y clarificar la situación.
    - Suponer que el problema está resuelto. Si se imagina el problema resuelto desde un principio aparecerán datos similares a los que buscamos. De esta manera, se hallará

más fácilmente el recorrido desde la situación de partida hasta donde se quiere llegar.

Arbona et al. (2021) clasifican las estrategias que ocupan los estudiantes de 6to año de primaria al resolver problemas de patrones geométricos de la manera siguiente:

- Recuento. Consiste en representar gráficamente el término requerido y posteriormente contar las piezas como unidades independientes.
- Recursiva. Para calcular el valor de un término requerido, se obtiene la constante a partir de la diferencia entre los valores de dos términos consecutivos. Posteriormente, iniciando en el término final que se proporciona se suma de manera reiterada tal constante hasta el término requerido.
- Descomposición. Se caracteriza por dividir el número de representaciones gráficas del problema en distintas partes con el objetivo de encontrar alguna relación entre la posición del término de la sucesión y la cantidad de representaciones gráficas en cada parte.
- Proporcional. Para calcular el valor de algún término, se crea una relación de proporcionalidad directa entre la posición de algún término y la cantidad de objetos que hay en ese término. En general, esta estrategia no es de utilidad para resolver problemas de patrones geométricos.
- Aditiva. El término requerido se obtiene a partir de la suma de algunas posiciones de otros términos. Se utilizan los valores de la sucesión de los términos elegidos para calcular el resultado.
- Combinada. Consiste en calcular el valor del término solicitado al combinar la estrategia de proporcionalidad en conjunto con la estrategia aditiva.

Por otro lado, Rivera y Maldonado (2012) mencionan que estudiantes de primaria pueden ocupar las siguientes estrategias al enfrentarse a problemas de combinación:

- Dibujos de las representaciones de los elementos a combinar.
- Listado de las posibles combinaciones.
- Construcción de tablas que permitan conocer todas las posibilidades.
- Diagrama de árbol.

El conteo puede ser sistemático o al tanteo. Se llama un conteo sistemático si, a través de cualquier estrategia para la obtención de todas las posibilidades, es posible mirar o identificar algún patrón que le permita generar todas las posibilidades, en caso contrario, se considera un conteo al tanteo.

3. **Seguir dicha estrategia.** En esta etapa aplica la estrategia seleccionada. Se debe considerar lo siguiente:
    - Tomar las mejores estrategias seleccionadas, una a una.
    - Reflexionar sobre la validez de cada paso.
    - Preguntarse si el resultado es la solución.
4. **Revisar el proceso.** Una vez resuelto el problema se inicia una reflexión sobre el proceso de solución.

Los tres modelos expuestos se crearon a partir de investigaciones con estudiantes universitarios, pero se pueden aplicar en otros niveles educativos como primaria o secundaria (Blanco, 1996). Se ocupará el Modelo de Miguel de Guzmán para identificar las estrategias que utilizaron los participantes del CM al resolver los problemas matemáticos propuestos.

2.3 Aprendizaje activo

El aprendizaje activo es cualquier método de instrucción que involucra a los estudiantes en el proceso de aprendizaje a través de actividades y/o discusiones en clase (Freeman et al., 2014). En este tipo de aprendizaje el estudiante habla, escucha, escribe y reflexiona durante el proceso de aprendizaje. Este tipo de aprendizaje es contrario al aprendizaje pasivo donde el estudiante escucha la exposición del profesor, responde preguntas cerradas, practica y aplica la información que se le presentó. Las preguntas, trabajo en grupo, aprendizaje cooperativo y el trabajo individual son ejemplos de métodos de aprendizaje activo (Takele, 2020). Para facilitar el aprendizaje activo se pueden ocupar las siguientes estrategias de instrucción: realizar preguntas para provocar la participación de los estudiantes, registrar las ideas de los estudiantes en el pizarrón y si al realizar una pregunta no hay una respuesta por parte del estudiante, redirigir la pregunta a otros estudiantes de la clase (Takele, 2020). Por otra parte, existen diferentes tipos de diseño del aula que facilita el aprendizaje activo. Algunos de estos diseños son: forma de U, círculo, agrupación de estaciones de trabajo y aula tradicional.

2.4 Conceptos matemáticos

Para proporcionar evidencia del aprendizaje de los temas abordados en el CM se implementó un pre y post test. Los resultados de estos tests se utilizaron para verificar si existió una mejora en el aprendizaje de los participantes en los temas abordados. Las calificaciones asignadas a los test fueron valores entre cero y diez. Los individuos que presentaron el pre y post test se pueden considerar como una muestra independiente apareada, ya que los mismos participantes realizaron el pre test con los conocimientos adquiridos en el ambiente escolar y posteriormente estos mismos participantes realizaron el post test con las estrategias desarrolladas en el CM. Por lo tanto, para obtener una comparación cuantitativa entre la resolución de problemas antes del CM y después del CM se decidió utilizar algunas técnicas estadísticas, las cuales se describen a continuación.

2.4.1 Prueba de Shapiro-Wilk

La prueba de Sahpiro-Wilk o prueba W es un procedimiento estadístico que permite probar la normalidad de una muestra. Esta prueba no es conveniente cuando la muestra es de gran tamaño (Shapiro y Wilk, 1965). El estadístico de prueba w para normalidad se define por

$$w = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i y_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2},$$

donde $y_1, \ldots y_n$ son los datos ordenados de la muestra. Denotemos como $a^T = (a_1, \ldots, a_n)$ el cual se calcula de la manera siguiente:

$$a^T = (a_1, \ldots, a_n) = \frac{m^T V^{-1}}{(m^T V^{-1} V^{-1} m)^{\frac{1}{2}}},$$

m^T es el vector de valores esperados, $V = (v_{ij})$ la matriz de covarianza de tamaño nxn y V^{-1} es la matriz inversa de V.

Las hipótesis que se contrastan son:

H_0: Los datos siguen una distribución normal vs H_a:Los datos no siguen una distribución normal.

Para la toma de decisión se rechaza la hipótesis nula H_0 si el p valor es menor que α, donde α es el nivel de significancia de la prueba (error Tipo 1).

2.4.2 Comparación de las medias de dos poblaciones usando muestras apareadas

Para el desarrollo de este trabajo, se utiliza la comparación de las medias de dos poblaciones usando muestras apareadas. A continuación, se plantea este procedimiento:

Si se tienen n pares de unidades experimentales para comparar dos tratamientos y se asignan los dos tratamientos aleatoriamente, uno a cada miembro del par, se obtienen dos muestras relacionadas. La información resultante la denotaremos por $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$ donde X_i es la respuesta al primer tratamiento y Y_i es la respuesta al segundo tratamiento con $i = 1, \dots, n$. Además, los pares (X_i, Y_i) son independientes. Para el análisis estadístico, se definen las siguientes variables aleatorias:

$$D_i = X_i - Y_i, \; i = 1, \dots, n.$$

La esperanza y la varianza de cada D_i las denotaremos por μ_D y σ_D^2 respectivamente.

Observe que si $\mu_D = 0$ entonces las medias poblacionales de los dos tratamientos son iguales. Si $\mu_D > 0$ indica que la media poblacional del primer tratamiento es mayor que la del segundo. Finalmente, si $\mu_D < 0$ entonces la media poblacional del segundo tratamiento es mayor que la primera.

Se considera el problema bajo la suposición de que $D_1, D_2, \dots, D_n$ es una muestra aleatoria de una distribución $N(\mu_D, \sigma_D^2)$ (Infante y Zarate de Lara, 1984).

Cuando se tienen muestras apareadas, las inferencias sobre los tratamientos se llevan a cabo usando $D_1, D_2, \dots, D_n$. Existen tres juegos de hipótesis con sus respectivas regiones de rechazo:

a) $H_0: \mu_D = k \; vs \; H_a: \mu_D \neq k$. Rechazo H_0 si $|T| \geq t(\frac{\alpha}{2}, n-1)$,

b) $H_0: \mu_D \leq k \; vs \; H_a: \mu_D > k$. Rechazo H_0 si $T \geq t(\alpha, n-1)$,

c) $H_0: \mu_D \geq k \; vs \; H_a: \mu_D < k$. Rechazo H_0 si $T \leq -t(\alpha, n-1)$,

donde es común que k tome el valor de cero (Infante y Zarate de Lara, 1984).

Como D_i, $i = 1, \dots, n$ es una muestra aleatoria normal con media μ_D y varianza σ_D^2, entonces se tiene que:

$$\bar{D} \sim N\left(\mu_D, \frac{\sigma_D^2}{n}\right),$$

donde $\bar{D}$ es el promedio de las D_i. Por lo tanto, la prueba adecuada es una prueba t usando la estadística: (Infante y Zarate de Lara, 1984).

$$T = \frac{\sqrt{n}(\bar{D} - k)}{S_D},$$

donde $S_D^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (D_i - \bar{D})^2$.

Por lo tanto, los juegos de hipótesis a), b) y c) son las de una prueba t considerando los valores críticos $t(\alpha, n-1)$ o $t(\frac{\alpha}{2}, n-1)$, según sea el caso.

Capítulo 3

MÉTODO

Para la implementación del CM se consideró la Guía de círculos matemáticos: un recurso para iniciar su propio programa (Círculos y Festivales Matemáticos, s.f.). Para el desarrollo del CM se utilizó el esquema que se propone en tal Guía. En esta sección se muestra cómo se organizó el CM, información general de este espacio, las normas de interacción del CM, así como el pre y post test y los problemas que se propusieron para las sesiones del CM junto con sus soluciones. Finalmente, se presenta el cuestionario que se aplicó a los participantes para valorar cualitativamente el impacto del CM.

3.1 Implementación del CM

Antes de iniciar las sesiones se realizó una lista de actividades para organizar el CM. Los aspectos enlistados están clasificados en bloques: uno es de visión general, el otro corresponde a la selección de problemas matemáticos y el último es referente a la logística, ver en la Tabla 1.

Tabla 1

Organización del CM

Aspectos por considerar	Descripción
Visión general	• Niveles de grado de los estudiantes • Número de participantes • Frecuencia de reunión y tiempo • Espacio disponible para las sesiones
Problemas	• Seleccionar problemas de recursos preexistentes. En el proceso de selección de problemas ser flexible para adaptarse a diferentes estilos de aprendizaje
Logística	• Contactar al personal indicado para el uso de instalaciones • Incluir una autorización para documentar las sesiones a través de fotos y video • Material para utilizar: plumones para pizarrón y borrador

3.2 Información general del CM

Para la difusión del CM se acudió con padres de familia, docentes y un director de una escuela primaria donde se les extendió la invitación a estudiantes de 5to y 6to año de primaria a participar en el primer CM desarrollado en Puebla. La invitación se realizó mediante un poster (Anexo A). Con esto se logró conformar un grupo de 8 estudiantes de 5to año y 7 de 6to año. De acuerdo con los datos recopilado, participaron estudiantes de distintas escuelas. También, se pudo observar que la mayoría de las escuelas de procedencia de los estudiantes se encuentran establecidas cerca de las instalaciones donde se llevaron a cabo las sesiones del CM. El lugar donde se realizaron las sesiones fue en la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas (FCFM) de la BUAP, durante un periodo de 8 sábados continuos con una duración de 90 minutos en cada sesión. Entre las razones por las que se implementó el CM en la FCFM fueron las siguientes: los estudiantes salen del contexto escolar del que están acostumbrados, pueden crear nuevas amistades y se fomenta la participación variada. Además, se propicia que los participantes conozcan las instalaciones de la universidad.

3.3 Normas de interacción

El responsable de las sesiones consideró los siguientes aspectos al interactuar con los participantes, con el objetivo de generar confianza en los participantes para lograran que expresaran sus ideas. El primer aspecto para considerar fue el no criticar los comentarios o respuestas de los participantes sino cuestionarle sobre cómo llegó a la conclusión. Otro aspecto fue no apresurar a los participantes para que ellos exploraran los problemas a su ritmo. También, se permitió que los estudiantes explicaran y argumentaran sus ideas ante los compañeros. Adicionalmente, se pidió ser respetuoso, entusiasta, paciente y buen oyente con los participantes. Por otro lado, por parte del responsable del CM se generaron preguntas para promover que los participantes indagaran en el problema y de esta manera promover diferentes estrategias durante su solución. Algunas preguntas que se formularon hacia los participantes fueron: ¿qué estamos buscando?, ¿hay alguna manera de organizar los hallazgos para entenderlos mejor?, ¿podemos generalizar esta idea?, ¿puedes argumentar por qué esto no es posible?, ¿hay más de una solución o la solución es única?

3.4 Problemas

3.4.1 Pre y post test

En esta sección se presenta el pre y post test que se aplicó en la primera y octava sesión respectivamente con el objetivo de obtener datos cuantitativos y evidenciar si el CM promueve el aprendizaje de las matemáticas, en tres temas: ampliación a escala, patrones geométricos y combinaciones sin repetición. El pre y post test están compuestos por los mismos tres ejercicios y cada ejercicio pertenece a un tema (Anexo B). El primer problema está relacionado con una figura de un barco, la idea es averiguar si el participante tiene la noción de ampliación de una figura dada. El segundo problema pertenece al tema de patrones geométricos y lo que se pretende es averiguar si son capaces de proponer el término general de la sucesión involucrada en el enunciado. Finalmente, el tercer problema del tema de combinaciones sin repetición, cuyo propósito es averiguar si los participantes pueden obtener las combinaciones posibles, dada una colección de elementos.

3.4.2 Problemas abordados durante el CM

A continuación, se muestran los 5 problemas que abordaron los participantes durante las sesiones del CM. Los 5 problemas fueron seleccionados de recursos preexistentes producidos por JRMF, CYFEMAT, Givental et al. (2018) y del artículo de Arbona et al. (2021). Dos de los cinco problemas tuvieron como objetivo el de crear un ambiente de confianza entre el responsable del CM y los participantes. A la vez, estos problemas permitieron observar las estrategias que utilizaron los participantes durante el proceso de solución. Los 3 problemas restantes tuvieron la finalidad de abordar los temas de ampliación, combinación sin repetición y patrones geométricos. Tales temas fueron abordados en el pre y post test. Las soluciones propuestas por los participantes en los tres problemas se utilizaron como material de análisis. Los 5 problemas y su respectiva solución se presentan a detalle a continuación.

Problema 1

Los materiales utilizados para el desarrollo del Problema 1 fueron dos laberintos de 4x4 cuadros y 2 laberintos de 5x5, ver Figura 1. El Problema 1 consiste en que el participante se coloque en el primer cuadro superior izquierdo (etiquetado con la palabra Start). Lo que se busca es que el participante llegue al cuadro inferior derecho marcado con una estrella (etiquetado con la palabra Goal).

Figura 1. Laberintos propuestos en el Problema 1.

Las reglas para llevar a cabo el juego son las siguientes.

Reglas:

- Comenzar en el cuadro superior izquierdo con la etiqueta Start
- El número en el cuadro en el que se encuentra el participante indica cuántos pasos puede avanzar. (Ejemplo, si el participante se encuentra en un cuadro marcado con un 2, debe pasarse a un cuadro que esté a dos espacios de distancia).
- Únicamente se puede caminar horizontal o verticalmente, pero no en diagonal.

El objetivo inicial del problema es motivar la confianza entre los participantes y posteriormente generar confianza entre el responsable del CM y los participantes. A la vez, se pretende mostrar, específicamente en este problema, que existen distintas formas de resolver un problema matemático a través de varias estrategias (unas más cortas que otras).

Resolver un laberinto significa escoger un camino correcto que permite llegar a la meta siendo que existen diferentes caminos posibles (Belfiori, 2018), por lo que las respuestas pueden variar. A continuación, se muestra una posible solución para el Problema 1.

Laberinto 1:

El problema se resuelve de forma inversa y se encuentra un posible camino que lleve a la solución. Se puede identificar del Laberinto 1 que existe un único cuadro para llegar a la meta, éste es el encerrado con color rojo, ver Figura 2. Una opción para llegar a dicha cuadro es provenir de tres cuadros atrás de manera vertical. Del cual se puede llegar si nos colocamos dos cuadros hacia abajo para encontramos en el cuadro con el número 2. Para llegar a este cuadro, una de las opciones es provenir del cuadro izquierdo marcado con el número 1 y de este cuadro precede el cuadro “Start”. Por lo tanto, la solución se encuentra avanzando dos casillas hacia abajo, una a la derecha, dos hacia arriba, tres hacia abajo y dos a la derecha.

Figura 2. Cuadro clave para resolver el Laberinto 1.

Laberinto 2:

La solución propuesta para el Laberinto 2 también es de forma inversa. Para este laberinto se tienen dos números que permiten llegar a la meta, encerrados con color rojo, ver Figura 3. Fijémonos que en el cuadro con el número 3 del segundo renglón. Para llegar ahí, nos desplazamos desde dos cuadros a la izquierda, antes bajamos dos cuadros y llegamos al cuadro marcado con el número 2. Para ello, nos tuvimos que mover dos cuadros a la izquierda y nos encontramos en el cuadro marcado con el número 2 y la forma de llegar a este es porvenir del cuadro marcado con Start. Por lo tanto, hemos encontrado un posible camino: bajar tres cuadros, movernos dos cuadros a la derecha, luego dos cuadros hacia arriba, posteriormente dos cuadros a la derecha y finalmente tres cuadros hacia abajo con lo que se llega a la meta.

Figura 3. Cuadros claves para resolver el Laberinto 2.

Problema 2

Los materiales utilizados para el desarrollo del Problema 2 fueron tarjetas de flores mágicas y números del 1 al 5, como la que se muestra en la Figura 4. El Problema 2 consiste en que el participante coloque los números del 1 al 5, sin repetición, en los cuadros de la flor mágica y de tal manera que la suma sea la misma de manera horizontal y vertical.

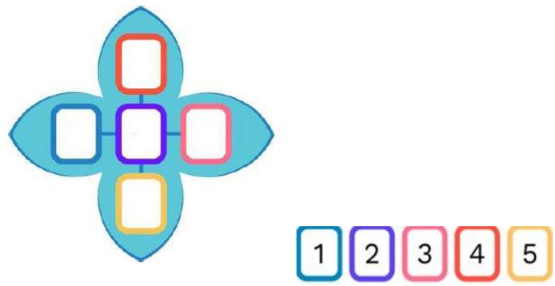
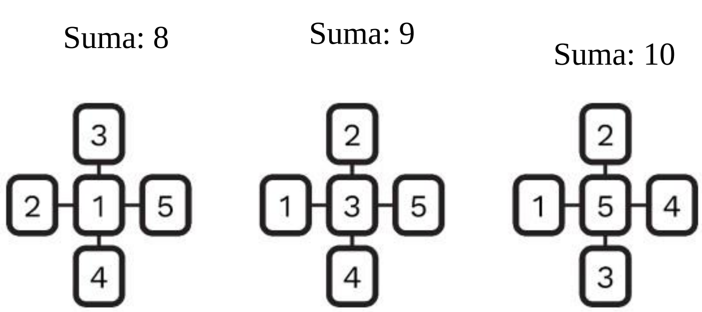


Figura 4. Flor mágica propuesta en el Problema 2.

Las reglas para resolver el problema son las siguientes.
Reglas:

- Cada grupo de tres números en una línea horizontal o vertical debe tener la misma suma, dicho número se llama el Número de la Flor Mágica.
- Los números no se pueden repetir.

El objetivo de este problema es mostrar que existen distintas formas de resolver un problema matemático a través de varias estrategias (unas más cortas que otras). Al mismo tiempo se pretende motivar la confianza entre los participantes y posteriormente generar confianza entre el responsable del CM y los participantes.
Las respuestas pueden variar ya que, en cada solución, dejando fijo el número del centro, los números se pueden rotar y/o voltearlos. A continuación, se muestra una posible solución para el Problema 2.



Los siguientes tres problemas se desarrollaron en las sesiones del CM para favorecer el aprendizaje de los participantes en tres temas: ampliación, combinaciones sin repetición y patrones geométricos. Además, de identificar las estrategias que emplean los participantes durante el proceso de solución del problema. A continuación, se enuncian tales problemas con su respectiva solución.

Problema 3

El enunciado del Problema 3 es el siguiente**.**

Trazar el rompecabezas que se muestra en la Figura 5 y recortar pieza por pieza. Posteriormente construir, pieza por pieza, un rompecabezas a escala más grande, de tal manera que el lado que mide 4cm en el original mida 7 cm en el rompecabezas ampliado. Finalmente, armar el rompecabezas ampliado y comprobar que las piezas embonen.

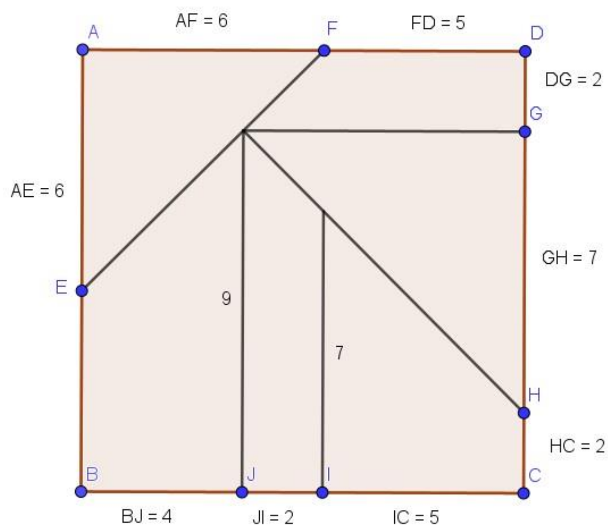


Figura 5. Dimensiones del rompecabezas propuesto en el Problema 3.

Una figura es una ampliación a escala de otra cuando se tiene la misma forma, pero diferente tamaño. Cuando una figura es una ampliación a escala de otra los lados de una son proporcionales a los lados de la otra respectivamente. En este problema, todas las medidas del rompecabezas aumentado pueden obtenerse multiplicando las medidas del rompecabezas original por un mismo número. Dicho número se llama constante de proporcionalidad. Por lo tanto, la constante de proporcionalidad que permite ampliar cada lado del rompecabezas original es de $\frac{7}{4}$. Así, en la Figura 6 se muestra el rompecabezas ampliado con las respectivas longitudes.

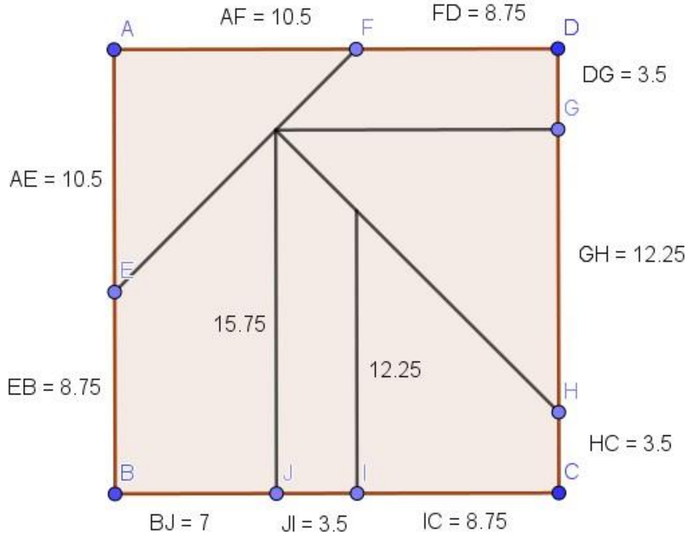


Figura 6. Dimensiones del rompecabezas ampliado del Problema 3.

Problema 4

El Problema 4 corresponde al tema de combinaciones sin repetición. A continuación, se presentan los enunciados del problema.

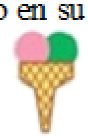
Problema 4.1

Ana puede poner dos bolitas de helado en su cono una al lado de la otra:

Debe seleccionar dos sabores distintos. Los sabores que hay son: vainilla, chocolate, pistache y fresa. ¿Cuántas combinaciones de bolitas de helado diferentes puede hacer Ana?

Problema 4.2

Ana puede poner dos bolitas de helado en su cono una al lado de la otra:



Debe seleccionar dos sabores distintos. Los sabores que hay son: vainilla, chocolate, pistache, zarzamora y fresa. ¿Cuántas combinaciones de bolitas de helado diferentes puede hacer Ana?

Para la solución de cada problema se utiliza como recurso el diagrama de árbol para construir y contar las posibles formas de combinar los sabores. Se muestran las soluciones a continuación.

Problema 4.1

Vainilla — chocolate, pistache, fresa

Chocolate — pistache, fresa

Pistache — fresa

Una posible combinación es vainilla con chocolate. Por lo tanto, al contar todas las posibles combinaciones que se obtuvieron con el diagrama de árbol, se pueden formar 6 combinaciones de bolitas de helado diferentes.

Problema 4.2

Vainilla — chocolate, pistache, zarzamora, fresa

Chocolate — pistache, zarzamora, fresa

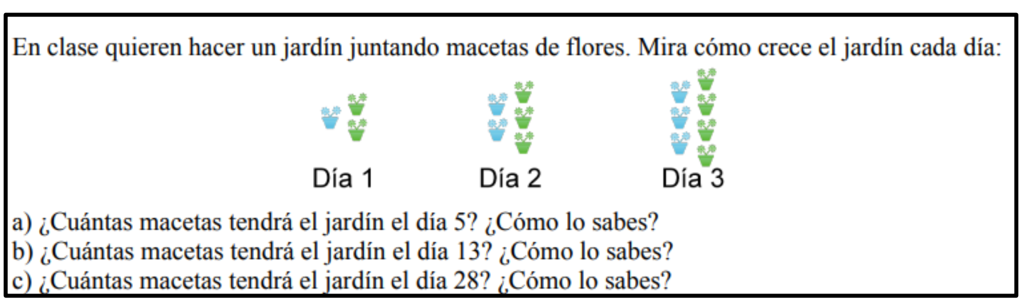
Pistache — zarzamora, fresa

Zarzamora — fresa

Una posible combinación es vainilla con zarzamora. Por lo tanto, al contar todas las posibles combinaciones que se obtuvieron con el diagrama de árbol, se pueden formar 10 combinaciones de bolitas de helado diferentes.

Problema 5

En el Problema 5 se muestran los primeros términos de una sucesión creciente de número naturales representados mediante figuras. Se muestra a continuación el enunciado.


En clase quieren hacer un jardín juntando macetas de flores. Mira cómo crece el jardín cada día:

Día 1 Día 2 Día 3

a) ¿Cuántas macetas tendrá el jardín el día 5? ¿Cómo lo sabes?
b) ¿Cuántas macetas tendrá el jardín el día 13? ¿Cómo lo sabes?
c) ¿Cuántas macetas tendrá el jardín el día 28? ¿Cómo lo sabes?

Para la solución del Problema 5 se observa que el número de macetas azules corresponden al día n, es decir, en el día n habrá n macetas azules. Mientras que el número de macetas verdes corresponden al día n más una maceta. Para obtener el total de macetas en el día n se suma la cantidad de macetas azules con el número de macetas verdes. Con lo anterior,

a) Para el día 5 habrá 5 macetas azules y 6 macetas verdes. En total habrá 11 macetas.
b) Para el día 13 habrá 13 macetas azules y 14 macetas verdes. En total habrá 27 macetas.
c) Para el día 28 habrá 28 macetas azules y 29 macetas verdes. En total habrá 57 macetas.

3.5 Cuestionario

El cuestionario tiene el objetivo de conocer la experiencia que tuvieron los participantes al asistir al CM en un contexto extraescolar. El cuestionario consta de 5 preguntas, las cuales son siguientes:

1. ¿Te gustó asistir al CM?

Esta pregunta tiene la finalidad de identificar si el CM sirvió como un espacio agradable para el aprendizaje de las matemáticas mediante la resolución de problemas.

2. Cuando asististe a la primera sesión, ¿fue porque tú quisiste venir o tu mamá/papá o tutor quiso que asistieras?

El CM es un espacio donde los participantes acuden de manera voluntaria por lo que se trata de identificar si los participantes cumplían con esta condición o si fueron obligados.

3. En la sesión 2 y el resto de las sesiones de cada sábado, ¿viniste porque te gustaba asistir al CM o porque tu mamá/papá o tutor quería que asistieras?

La pregunte tiene como objetivo indagar si la primera sesión tuvo un impacto en la opinión de los participantes que asistieron obligatoriamente. Para aquellos que asistieron de manera voluntaria a la primera sesión, se pretende observar si seguían interesados en el CM.

4. ¿Hubo alguna diferencia entre las sesiones del CM y la escuela? ¿Por qué?

Se necesita identificar las diferencias entre el ambiente extraescolar y el ambiente escolar.

5. ¿Por qué asististe al CM?

Conocer las razones por las cuales los participantes asistían a las sesiones del CM.

Capítulo 4

ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

Al inicio de este capítulo se muestran las condiciones y factores que permitieron implementar el CM con estudiantes de 5to y 6to año de primaria. Después, se hace un análisis cualitativo de las estrategias utilizadas por los participantes en el pre test. Posteriormente, se presentan las soluciones de los 5 problemas propuestos a los participantes durante las sesiones del CM. La solución de Problemas 1 y 2 se relatan desde el punto de vista del responsable del CM. Las soluciones de los tres problemas restantes se presentan y se analizan con ayuda del modelo propuesto por Guzmán (1995) (como se citó en Blanco, 1996). Además, durante el análisis desarrollado se identificaron las estrategias que los participantes emplearon en el proceso de solución. Luego, se hace un análisis cualitativo de estrategia utilizadas en el post test. Finalmente, se presentan los resultados que se obtuvieron en el pre y post test, los datos recabados fueron usados en un análisis estadístico. Este análisis mostró una mejora en los resultados obtenidos del post test con respecto al pre test. Por otro lado, a través del cuestionario se documentó la experiencia de los participantes al asistir al CM.

4.1 Condiciones y factores que ayudaron a implementar el CM

Entre los factores identificados para la implementación del CM se encontraron los siguientes: contar con las instalaciones que permitan llevar a cabo el CM; apoyo en la divulgación del CM por parte de docentes y padres de familia para la conformación del grupo de participantes; disponer del material adecuado para el desarrollado de las actividades propuestas durante las sesiones del CM (Pizarrón, plumones, borrador, hojas, reglas, tijeras, pegamento, colores, material didáctico); que los participantes tengan el apoyo de sus familiares para trasladarse a las instalaciones donde se llevó a cabo el CM y cercanía del domicilio de los participantes a las instalaciones donde se desarrolló el CM.

Por otro lado, las condiciones identificadas para la implementación del CM fueron las siguientes: generar un ambiente atractivo mediante actividades para motivar el interés de los participantes; promover un ambiente no competitivo, de colaboración y libre de evaluaciones; el responsable del CM no debe actuar como un profesor, sino como un miembro activo del grupo; compromiso de familiares y participantes para cumplir con el horario establecido.

4.2 Análisis cualitativo del Pre test

Para analizar las estrategias que utilizaron los participantes del CM al resolver los problemas propuestos en el pre test se utilizó las siguientes referencias. Para el problema de patrones geométricos se tomó en cuenta lo propuesto por Abona et al. (2021) y para el problema de combinación sin repetición se consideró la propuesta de Rivera y Maldonado (2012).

Problema 1. Ampliación a escala

De acuerdo con las respuestas que proporcionaron los participantes, la mayoría entiende por ampliación a escala que el dibujo fuera más grande que el original, por lo tanto, la mayoría escogió el barco 4 como respuesta al Problema 1.

Problema 2. Patrones geométricos

La respuesta al inciso a) del Problema 2, donde se pidió un término próximo, las estrategias que utilizaron los participantes fueron las siguientes:

- Hicieron una representación gráfica hasta el término 5, usando la estrategia de recuento, Figura 7.

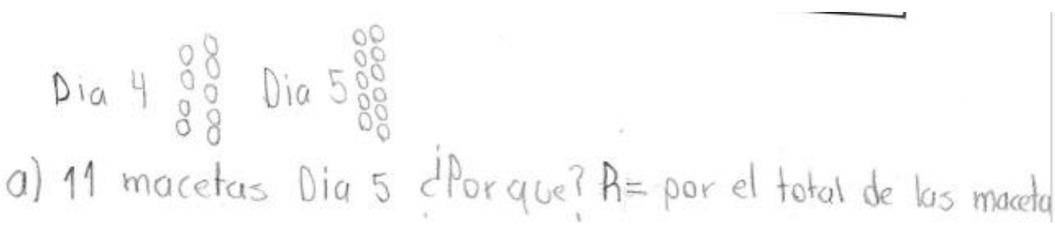


Figura 7. Resultado del Problema 2 que muestra el uso de la estrategia de recuento.

- Continuaron con la sucesión de términos con una tabla, ver Figura 8.

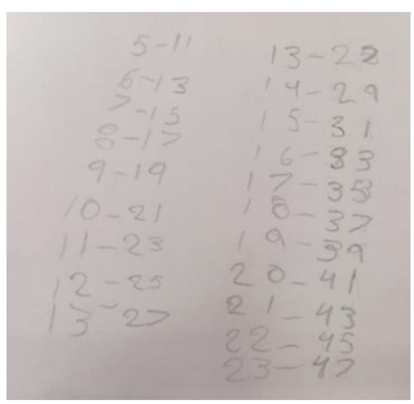
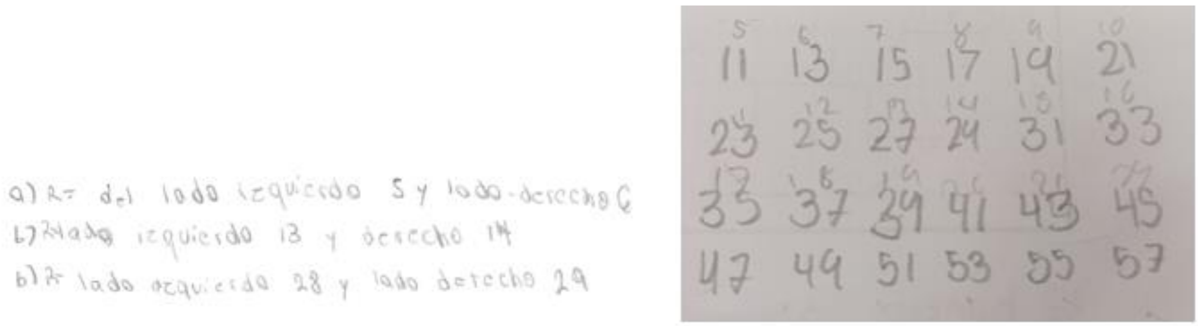


Figura 8. Resultado del Problema 2 que muestra el uso de la estrategia de hacer una tabla.

La respuesta al inciso b) y c), donde se pidió un término cercano y uno lejano, los participantes utilizaron la misma estrategia para ambos incisos. A continuación, se mencionan tales estrategias.

- Continuaron con la sucesión con número arábigo hasta la posición 28, Figura 9 a).
- Ocuparon una relación de proporcionalidad directa entre el día y el valor que corresponde a ese día.
- Observaron la relación que hay entre el número de macetas y el día, es decir, utilizaron la estrategia de descomposición, Figura 9 b).



a) b)

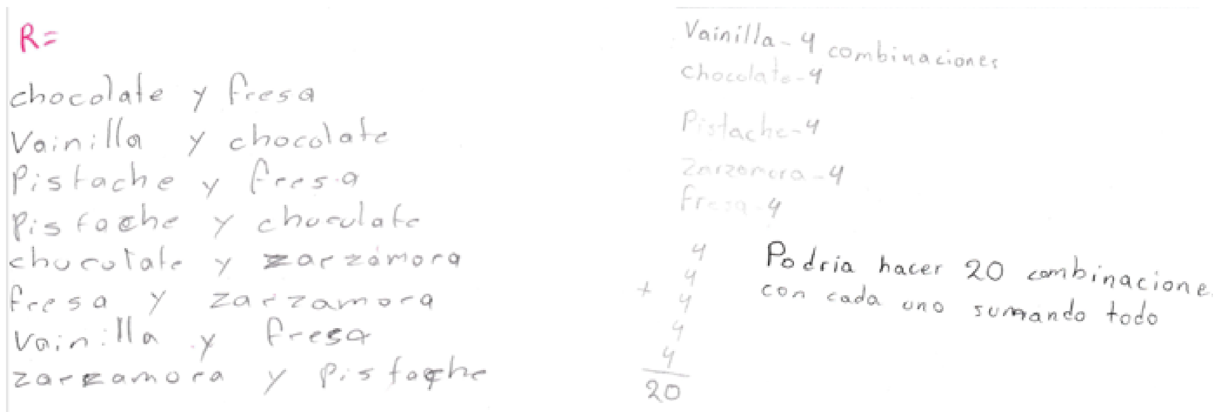
Figura 9. Resultados del Problema 2 que muestran el uso de la estrategia: a) tabla y b) descomposición

Algunos de los participantes ocuparon dos estrategias para resolver el problema. Para obtener el término próximo (inciso a)) emplearon la estrategia de recuento, sin embargo, para obtener el término cercano y lejano (incisos b) y c)) ocuparon una relación de proporcionalidad directa. Para este problema la estrategia utilizada en el inciso b) y c) es errónea.

Problema 3. Combinación sin repetición

En este problema los participantes mostraron las siguientes estrategias:

- Algunos participantes realizaron un listado de las posibles combinaciones y se identificó que no hubo algún patrón que permitiera generar todas las combinaciones posibles, por lo que el conteo realizado fue al tanteo, ver Figura 10 a).
- La mayoría de los participantes obtuvieron las posibles permutaciones con un solo sabor, posteriormente multiplican las permutaciones obtenidas por el número de sabores restantes. Para este problema tal estrategia fue errónea ya que les permitió calcular las permutaciones de los objetos proporcionados y no las combinaciones, ver Figura 10 b).



a) b)

Figura 10. Resultados del Problema 3 que muestran el uso de la estrategia: a) conteo al tanteo y b) aditiva.

En la Tabla 2, se muestran las estrategias que la mayoría de los participantes utilizaron para contestar el pre test.

Tabla 2

Estrategias evidenciadas por los participantes en el pre test

Problema 1. Ampliación a escala	Problema 2. Patrones geométricos	Problema 3. Combinaciones
Observación	Recuento, tablas	Permutaciones y listado de posibles combinaciones con un conteo al tanteo

4.3 Soluciones propuestas por los participantes del CM

Problema 1: *Colocarse en el primer cuadro superior izquierdo (etiquetado con la palabra Start) para llegar al cuadro inferior derecho marcado con una estrella (etiquetado con la palabra Goal).* Para resolver el Problema 1 se dividió al grupo en dos equipos. Se mostraron los dos laberintos y se proporcionaron las reglas. Primero se trabajó con el laberinto de 4x4 cuadros y posteriormente se utilizó el laberinto de 5x5 cuadros. Las observaciones por parte del responsable del CM se enumeran a continuación.

- Se observó que los participantes buscaron estrategias para llegar al objetivo. Algunos actuaron por ensayo y error, mientras que otros realizaron un análisis de cómo llegar a la meta.
- En un equipo se contó el número de movimientos necesarios para llegar al objetivo. Sin embargo, no resultó útil ya que algunos integrantes de los equipos ya no intentaron llegar a la meta debido a que se sintieron presionados. En el otro equipo no se contó el número de movimientos realizados, se notó que todos los integrantes pudieron llegar a la meta.
- Cuando se les preguntó: ¿cómo resolvieron el problema?, las respuestas fueron dos. La primera fue por ensayo y error y la segunda fue identificando el número que le permitía llegar a la meta.
- Al trabajar con el segundo laberinto, sin contar el número de movimientos, los participantes ocuparon las mismas estrategias que en laberinto anterior.

Lo que se pudo observar fue que contar el número de movimientos para llegar no resultó eficaz porque los participantes se sentían presionados. Por otra parte, como se planteó en los objetivos del Problema 1, los participantes comenzaron a interactuar entre ellos y ganaron confianza para discutir los posibles caminos que permitían llegar a la solución. A la vez, esto favoreció generar confianza entre los participantes y con el encargado del CM.

Problema 2: Colocar los números del 1 al 5, sin repetición en los cuadros de la flor mágica y de forma que la suma sea horizontal y vertical.

Para el Problema 2 se observó lo siguiente.

- En los primeros intentos ningún equipo logró que la suma de los números de la fila horizontal fuera la misma que la fila vertical. Se pudo notar que los participantes perdían el interés en encontrar la solución. Para mantener el interés en los participantes, se les proporcionó una posible solución: cuando la suma horizontal y vertical da 9.
- Con lo anterior, un equipo sugirió la siguiente solución

  4,3,2 ---> fila horizontal y 5,1,3 ---> fila vertical

  Otro equipo sugirió la triada de números:

  1,3,5 ---> fila horizontal y 4,2,3 ---> fila vertical

  Para introducir la búsqueda de soluciones se les preguntó lo siguiente: ¿Qué número se repite? y el número que se repite, ¿dónde piensan que se debe colocar en la Flor Mágica?

- Se observó que la mayoría de los equipos, al buscar tres números que al sumarlos diera 9 de forma horizontal y vertical, lo resolvieron por ensayo y error. Sin embargo, un equipo fijó un número del centro de la flor y los integrantes buscaron pares de números cuya suma fuera igual en forma horizontal y vertical.
- Cuando todos los equipos finalizaron el problema, se les preguntó lo siguiente: ¿qué número aparece en medio de cualquier flor?, ¿cuánto da la suma de los pares de números horizontales que rodena al número de en medio? y ¿cuánto da la suma de los pares de números verticales que rodean al número de en medio? Después de discutir las preguntas en plenaria, se concluyó que para llenar la flor mágica cuya suma horizontal y vertical diera 9 se deben buscar pares de números que al sumarlos diera 6 porque el 3 siempre quedaba en el centro de la flor.

El problema permitió que los participantes interactuaran entre ellos y el responsable del CM. Así, lograron expresar sus ideas e inquietudes que surgieron al abordar el problema. Adicionalmente, se observó que la estrategia que ocuparon durante la resolución del problema fue por ensayo y error. Sin embargo, se les dio la sugerencia de trabajar por submetas a través de las preguntas ¿qué número se coloca en medio de la flor mágica?, ¿cuánto da la suma de los pares de números horizontales que rodena al número de en medio? y ¿cuánto da la suma de los pares de números verticales que rodean al número de en medio?

Finalmente, se notó que la aplicación del Problema 2 cumplió con su propósito ya que al término de la sesión los participantes interactuaban más entre ellos, fueron más participativos y crearon nuevos vínculos de amistad.

Problema 3: Trazar un rompecabezas a escala más grande de tal manera que el lado que mide 4 cm en el original mida 7 cm en el rompecabezas ampliado.

Familiarizarse con el problema.

- Antes de trazar el rompecabezas algunos participantes mencionaron que la longitud faltante era de 5 cm porque la longitud total del lado del rompecabezas era de 11 cm. También expresaron que la forma del rompecabezas correspondía a un cuadrado.
- El conocimiento previo que tenían del término ampliación era que la figura se volvía más grande, ver Figura 11.

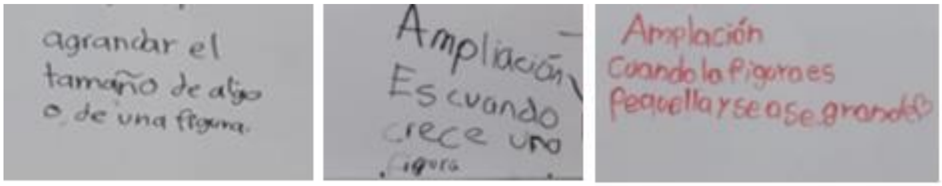


Figura 11. Definición de ampliación propuesta por los participantes.

Búsqueda e implementación de estrategias.

Para ampliar el rompecabezas, todos los participantes utilizaron un procedimiento aditivo, a cada longitud de los lados de cada pieza le sumaban 3 cm.

Revisión del proceso

Durante la revisión del proceso un participante mostró la ampliación de su rompecabezas. Explicó que sumó 3 cm a cada lado de la figura, pero que no era correcto lo que había hecho ya que no lograba que las piezas del rompecabezas encajaran, ver Figura 12.

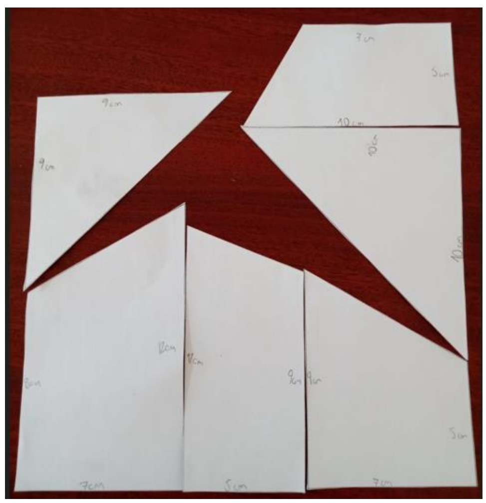


Figura 12. Ampliación del rompecabezas utilizando propiedad aditiva

Como conclusión de esa sesión, se mencionó que al sumar una constante a las longitudes de los lados de las piezas del rompecabezas no se logra una ampliación del rompecabezas de manera correcta. En la sesión posterior del CM se modificó el problema, se les pidió trazar el mismo rompecabezas a escala más grande de tal manera que el lado que mide 4 cm en el original mida 8 cm en el rompecabezas ampliado

En este problema, la mayoría de los participantes tuvieron éxito, ya que lo relacionaron con el doble, Figura 13. Sin embargo, aún hubo dos participantes que sumaron 4 cm a cada longitud del lado del rompecabezas.

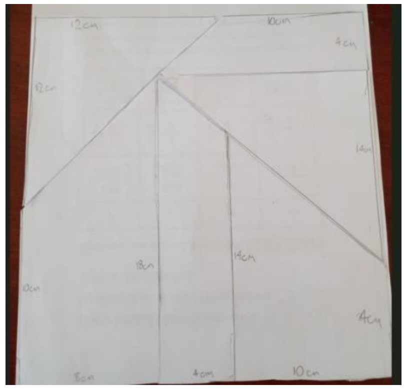


Figura 13. Propuesta de ampliación a escala 1:2.

En la sesión posterior del CM se retomó el Problema 1. Durante el proceso de solución, se notó que algunos participantes buscaron, ya sea por tanteo o dividiendo, por qué número había que multiplicar en lado original de 4 cm para obtener el lado de la ampliación de 7 cm. Quienes realizaron lo anterior, tuvieron éxito en el armado del rompecabezas, Figura 14. Aún hubo 2 participantes que utilizaron el método aditivo por lo que su rompecabezas no embonó.

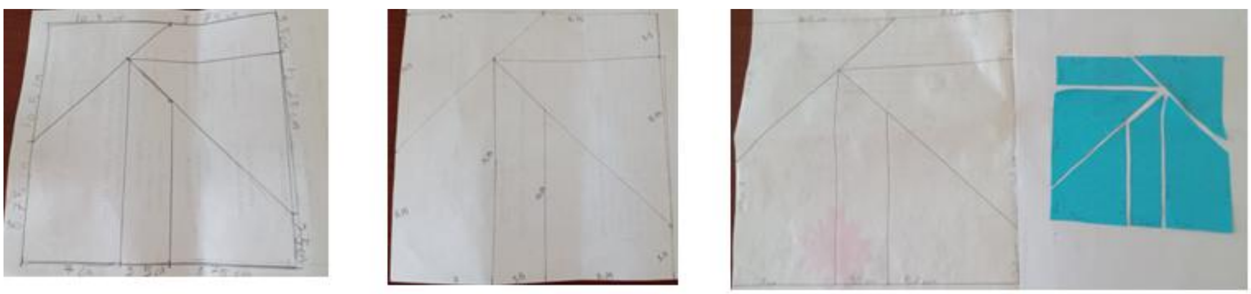


Figura 14. Propuesta de ampliación a escala 4:7.

Por lo tanto, cuando se solicitó una ampliación de 4 cm a 7 cm del rompecabezas la relación entre estos números no fue tan evidente para el participante, es por ello que acudieron al modelo aditivo. Para poder incorporar otro modelo, en este caso el multiplicativo, fue necesario que los participantes utilizaran el modelo aditivo para que se convencieran de que no funcionaba para que después asumieran que existe otro que da solución al problema. Al proponer duplicar las medidas del rompecabezas original la mayoría tuvo éxito en la solución y esto se debe a que aplicaron un conocimiento que ya tenían: duplicar (Detzel y Ruíz, 2000). Resolver el problema exigió en los participantes una reestructuración de sus conocimientos, que no todos lograron. Esta reestructuración, se dio porque hubo discusión durante tres sesiones del CM entre el responsable del CM y los participantes, para llegar a la conclusión que debe haber un número, constante de proporcionalidad, que permitiera ampliar el rompecabezas de manera correcta.

Problema 4

Problema 4.1

Ana puede poner dos bolitas de helado en su cono una al lado de la otra:

Debe seleccionar dos sabores distintos. Los sabores que hay son: vainilla, chocolate, pistache, zarzamora y fresa. ¿Cuántas combinaciones de bolitas de helado diferentes puede hacer Ana?

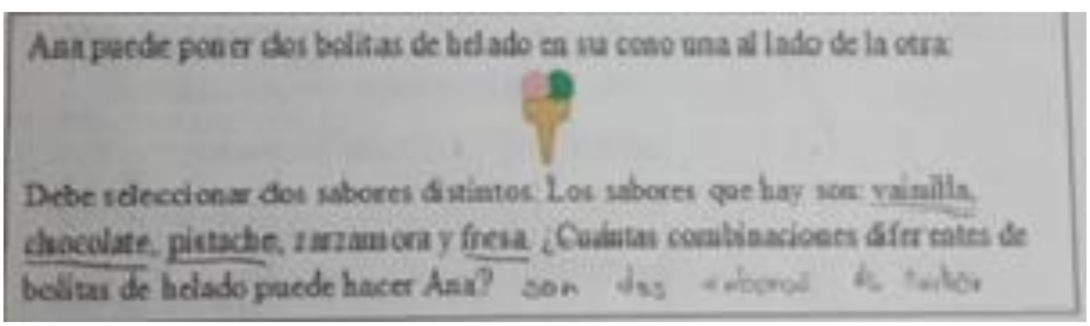
Problema 4.2

Ana puede poner dos bolitas de helado en su cono una al lado de la otra:

Debe seleccionar dos sabores distintos. Los sabores que hay son: vainilla, chocolate, pistache y fresa. ¿Cuántas combinaciones de bolitas de helado diferentes puede hacer Ana?

Familiarizarse con el problema.

- Algunos participantes subrayaron la información que creyeron relevante, ver Figura 15. También hubo participantes que expresaron verbalmente lo que habían entendido del problema.



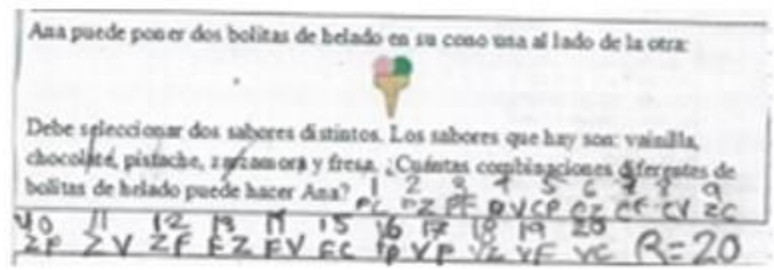
Ana puede poner dos bolitas de helado en su cono una al lado de la otra:

Debe seleccionar dos sabores distintos. Los sabores que hay son: vainilla, chocolate, pistache, zarzamora y fresa. ¿Cuántas combinaciones diferentes de bolitas de helado puede hacer Ana?

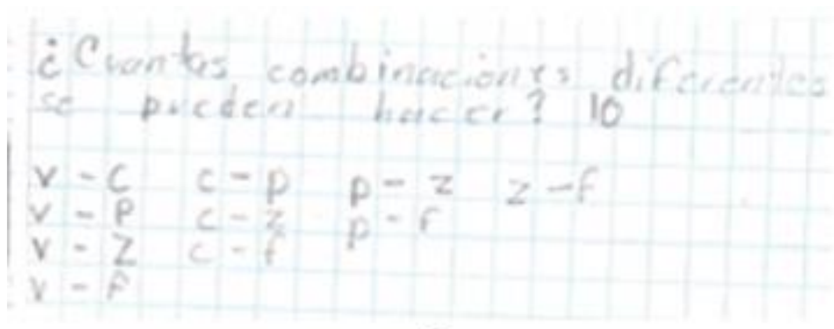
Figura 15. Subrayado de información relevante

Búsqueda e implementación de estrategias

- En las soluciones escritas que dieron los estudiantes, todos hicieron un listado de las posibles combinaciones. La estrategia que utilizaron fue repetir la selección de un sabor hasta que formaron todas las combinaciones posibles (o aparentemente posibles) con ese sabor. Una vez agotadas las combinaciones con ese sabor, los participantes eligieron uno nuevo que permaneció constante para repetir el proceso, ver Figura 16.



a)



b)

Figura 16. Listados de combinaciones propuestas.

Revisión del proceso

Para el problema 4.1, únicamente dos participantes llegaron al resultado correcto de 10 combinaciones posibles, Figura 16 b). Con el resto del grupo sucedió lo siguiente:

- Se observa que de la lista de las posibles combinaciones que hicieron, para ellos un helado con una bolita de vainilla y una de chocolate, una junto a la otra, es distinto que un helado con una bolita de chocolate y una vainilla, Figura 16 a).
- Cuando se les proporcionó el material para que formaran las combinaciones posibles de helados se hizo evidente la diferencia entre permutaciones y combinaciones, es decir, se resaltó la idea de que en las permutaciones importa el orden mientras que en las combinaciones no importa el orden. Se recordó que, de acuerdo con el problema, no podían colocar dos sabores iguales. Además, se percataron que tener el sabor, por ejemplo, vainilla-

chocolate es lo mismo que chocolate-vainilla. Con lo anterior, la resolución manipulativa dio lugar a la solución del problema.

En el Problema 4.2, dos estudiantes aún no lograron llegar a la respuesta correcta, porque siguieron considerando que, por ejemplo, un helado con una bolita de vainilla y una de fresa era distinto que un helado con una bolita de fresa y una vainilla, una junto a la otra, Figura 17 a), es decir, consideraron permutaciones en lugar de combinaciones. El resto de los participantes, al exponer su solución, concluyeron que son 6 combinaciones posibles, Figura 17 b).

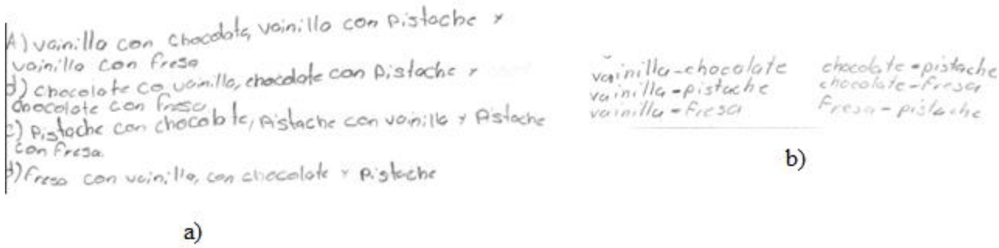
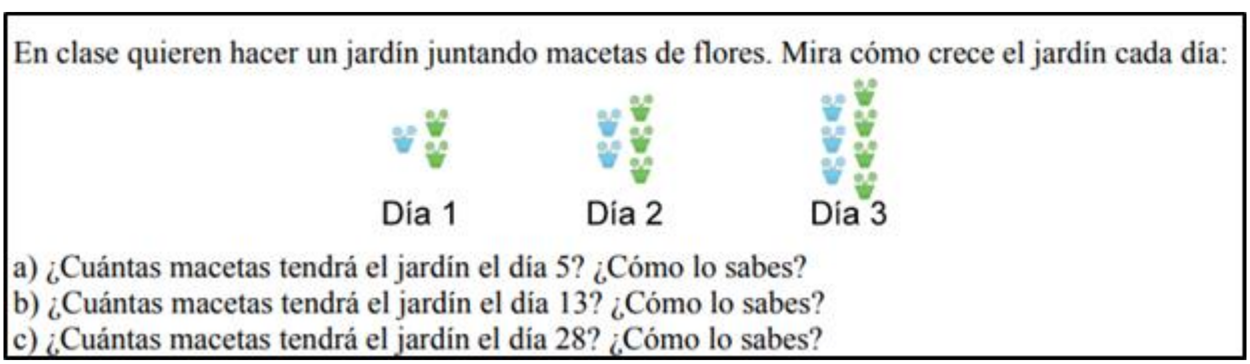


Figura 17. Listados de combinaciones propuestas.

Para el proceso de solución del Problema 4, la mayoría de los participantes la estrategia que utilizaron fue un listado fijando un elemento y buscaron un patrón que les permita llevar una sistematicidad para agotar todos los casos, esto coincide con la investigación de Rivera y Maldonado (2012).

Problema 5


En clase quieren hacer un jardín juntando macetas de flores. Mira cómo crece el jardín cada día:

a) ¿Cuántas macetas tendrá el jardín el día 5? ¿Cómo lo sabes?
b) ¿Cuántas macetas tendrá el jardín el día 13? ¿Cómo lo sabes?
c) ¿Cuántas macetas tendrá el jardín el día 28? ¿Cómo lo sabes?

Familiarizarse con el problema.

Cuando el responsable del CM preguntó a los participantes de qué trataba el problema, cuáles eran los datos y qué pedía, observó que los participantes lograron comprender lo que pedía el problema ya que proporcionaron las respuestas correctas.

Búsqueda e implementación de estrategias

A continuación, se muestran las estrategias que ocuparon los participantes para encontrar el número de macetas que se pide en cada inciso del problema.

- Para dar respuesta al inciso a), dos participantes dibujaron el total de macetas correspondientes al término 5. Para ello, siguieron el patrón de los primeros términos dados y posteriormente contaron la cantidad total de macetas. Para el inciso b) ocuparon la misma estrategia, pero ahora hasta el término 13, ver Figura 18. De los incisos a) y b) se pudo observar que la estrategia que ocuparon fue la estrategia de recuento. Para contestar el inciso c), que pide un término lejano, ninguno de los dos participantes consideró la estrategia anterior. Uno de los participantes no respondió el inciso c), ver Figura 18 a), mientras que el otro continuó con la sucesión hasta el día 28 con número arábigo, ver Figura 18 b).

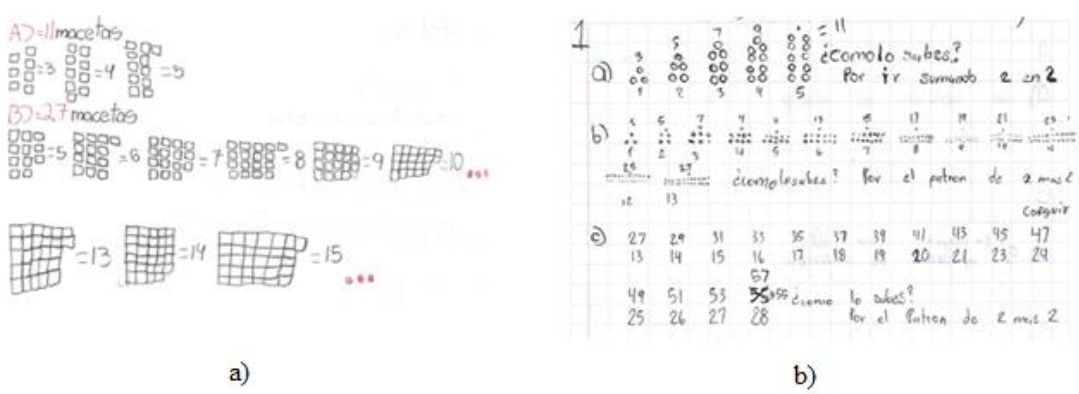


Figura 18. Resultados del Problema 5 que muestran el uso de la estrategia de recuento.

- Otro participante observó una correspondencia entre la posición y la cantidad de macetas que hay. Cuando se le preguntó cómo encontró la respuesta, mencionó que la cantidad de macetas azules corresponde al día que se tiene en el problema al igual que las macetas verdes, pero se le suma una maceta más, ver Figura 19**.** Por lo anterior, este participante ocupó la estrategia de descomposición.

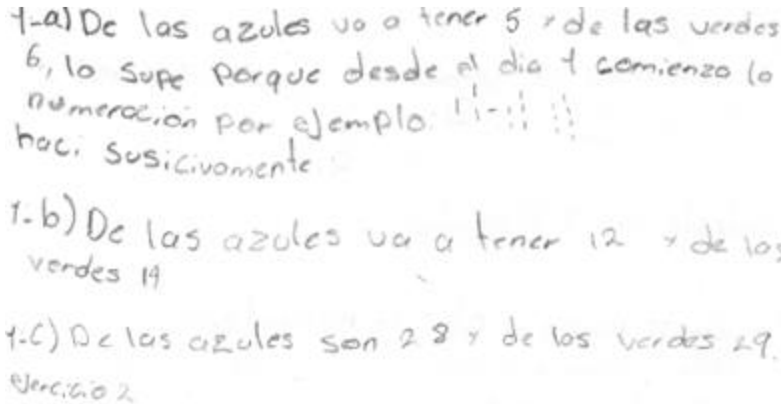
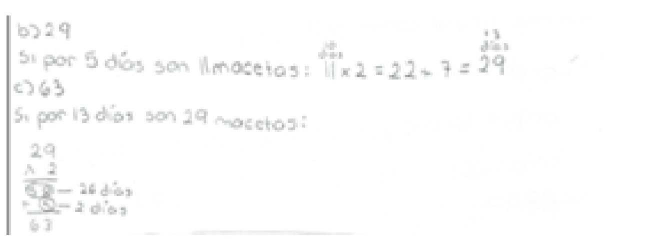

1-a) De las azules vo a tener 5 y de las verdes 6, lo supe porque desde el dia 1 comienzo la numeracion por ejemplo:
hac. susicivamente
1.b) De las azules va a tener 12 y de los verdes 14
1.c) De los azules son 28 y de los verdes 29.
Ejercicio 2

Figura 19. Resultados del Problema 5 que muestran el uso de la estrategia de descomposición.

- Otro participante, para el inciso a) contó la cantidad de macetas en el término 1 (3 macetas) y sumó 2 (la diferencia entre los valores de dos términos consecutivos) las veces necesarias hasta llegar al término 5, de esto se observó que le participante ocupó la estrategia recursiva, ver Figura 20 a). Para los incisos b) y c) el participante utilizó una estrategia combinada. Primero usó una relación de proporcionalidad directa, es decir, usó el valor del término 5 (11 macetas) para obtener el valor del término 10 ($f(10) = 2 \times f(5) = 2 \times 11$). Posteriormente, sumó el valor del término 3 (7 macetas) para obtener el resultado, ver Figura 20 b). Sin embargo, utilizar una relación de proporcionalidad directa el problema no se resuelve de manera correcta.


a) 11
Cada día van aumentando 2 mas del número original.
3+2+2+2+2=11

a)


b) 29
Si por 5 días son 11 macetas: 11×2=22+7=29
c) 63
Si por 13 días son 29 macetas:
29
×2
58 — 26 días
+5 — 2 días
63

b)

Figura 20. Resultados del Problema 5 que muestran el uso de: a) estrategia recursiva y b) estrategia combinada.

Con lo anterior, se muestra que las estrategias que emplearon los participantes en la resolución del Problema 5 fueron las siguientes: recuento, recursiva, descomposición y combinada (proporcionalidad y aditiva).

Revisión del proceso

Tres participantes compartieron sus respuestas del inciso b) del Problema 5 de manera voluntaria y se observó el uso de las estrategias mencionadas en el párrafo anterior. Para comparar respuestas, el encargado del CM propuso realizar una tabla en la que se colocó el número de día y el número de macetas correspondiente. Con la participación de algunos de los asistentes se completó la tabla y se compararon con las respuestas que los participantes voluntarios proporcionaron, ver Figura 21. En la discusión grupal notaron no se puede utilizar la proporcionalidad directa para resolver este problema.

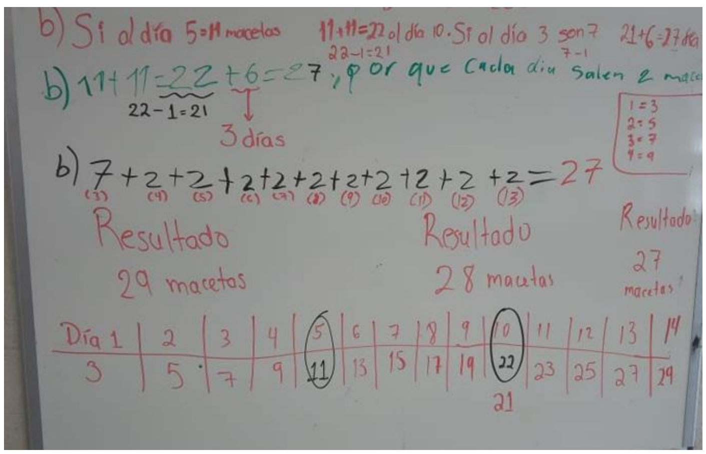


Figura 21. Resultados grupales del Problema 5.

Comentario

El Problema 5 requiere calcular 3 términos: inmediato, próximo y lejano. Para obtener el término inmediato, los participantes utilizaron estrategias diversas: recuento, descomposición y recursiva. Del total de participantes, solo uno utilizó la descomposición que le permitió calcular la cantidad de macetas que habrá en el día n de manera correcta. Para calcular el término próximo y el término lejano la mayoría de los participantes ocuparon una estrategia combinada. Sin embargo, el problema no se soluciona con proporcionalidad directa ya que no existe una constante de proporcionalidad que permita hallar el número de macetas en el día n. En el CM se encontró un participante que utilizó la estrategia combinada, la cual mencionan Arbona et al. (2021) no habían encontrado ejemplos de esta estrategia en las respuestas que habían analizado.

4.4 Análisis cualitativo del Post test

Para analizar las estrategias que utilizaron los participantes del CM al resolver los problemas planteados en el post test nuevamente se tomaron en cuenta los trabajos de Abona et al. (2021) y la propuesta de Rivera y Maldonado (2012).

Problema 1. Ampliación a escala

Hubo participantes que mostraron un avance en el concepto de ampliación a escala, ya que mencionaron que la ampliación es cuando se tiene la misma figura, pero ahora más grande con una proporción de 1 a 4 cuadros, ver Figura 22. Sin embargo, varios participantes seleccionaron la respuesta basándose en seleccionar como respuesta el barco más grande.

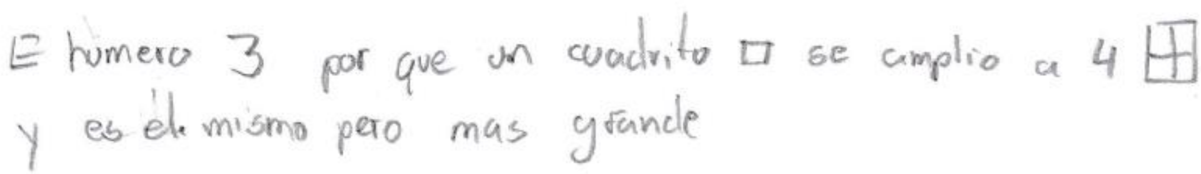


Figura 22: Resultado propuesto al Problema 3.

Problema 2. Patrones geométricos

Algunos estudiantes cambiaron la estrategia de recuento por la estrategia de descomposición, ver Figura 23. Además, pocos estudiantes utilizaron la estrategia de recuento, para el término cercano, y la estrategia de proporcionalidad directa para dar respuesta a los términos próximos y lejanos de la sucesión. También hubo algunos participantes que utilizaron la tabla para contestar el problema.

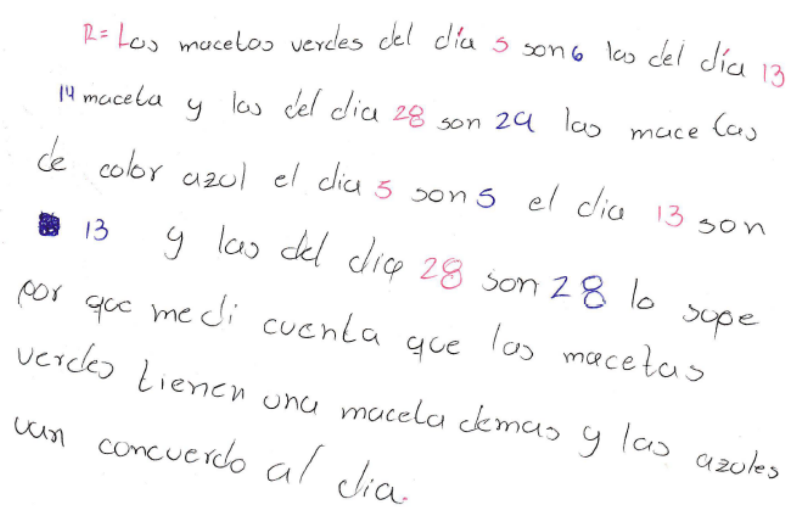


Figura 23: Resultado del Problema que muestra el uso de la estrategia de descomposición.

Problema 3. Combinaciones sin repetición

En este problema la mayoría de los participantes llevaron un orden hasta agotar todas las posibles combinaciones, ver Figura 24. Sin embargo, algunos participantes aún ocuparon la estrategia de listado, pero el conteo es al tanteo.

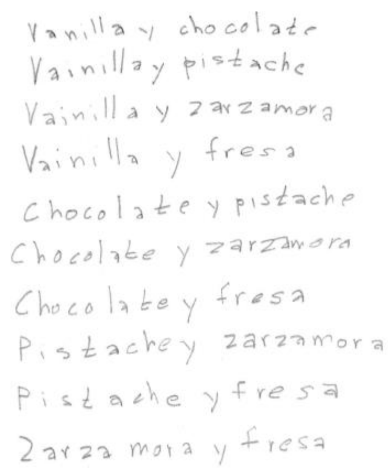


Figura 24. Resultado del Problema 3 que muestra el uso de la estrategia de un listado con un conteo sistemático.

En la Tabla 3, se resumen las estrategias que la mayoría de los participantes utilizaron para llegar a la solución de cada problema del post test.

Tabla 3

Estrategias evidenciadas por los participantes

Problema 1. Ampliación a escala	Problema 2. Patrones geométricos	Problema 3. Combinaciones
Proporción de 1 a 4 cuadros	Descomposición, tabla	Lista de posibles combinaciones con un conteo sistemático

Las sesiones del CM permitieron que los participantes observaran y trabajaran con distintas estrategias para la solución de los problemas propuestos relacionados con los temas de ampliación a escala, patrones geométrico y combinaciones. Con las respuestas que proporcionaron se puede mencionar que algunos participantes mostraron una estrategia distinta del pre con respecto al post test. En el tema de patrones geométricos la mayoría de los participantes ya no ocuparon la estrategia de proporcionalidad directa. En el tema de combinación sin repetición, la mayoría de los participantes hicieron un listado de las posibles combinaciones de los elementos con un conteo sistemático.

4.5 Análisis cuantitativo del CM

Para evaluar el aprendizaje en los participantes del CM se realizó un pre y post test al inicio y término de las sesiones, respectivamente. Para cada test, el encargado del CM asignó una calificación de 0 a 10 para obtener datos cuantitativos antes y después del CM. Estas calificaciones conforman nuestros datos en dos clasificaciones: antes del CM y después del CM. Los datos recabados pertenecen a 15 estudiantes de 5to y 6to año de primaria. Para el análisis de los datos, se utilizó la prueba paramétrica de comparación de las medias de dos poblaciones usando muestras apareadas con la finalidad de saber si el CM contribuyó en el aprendizaje de los tres temas abordados durante las 8 sesiones. La prueba antes mencionada necesita que las diferencias de los datos tengan una distribución normal. En nuestro caso de estudio las diferencias están asociadas a la diferencia de calificaciones que hubo del pre y post test. Para verificar esta condición se utilizó la prueba de Shapiro-Wilk donde el juego de hipótesis fue:

H_0: Las diferencias de los datos siguen una distribución normal. vs H_a: Las diferencias de los datos no siguen una distribución normal.

Se rechaza la hipótesis nula (H_0) si el valor p es menor que el nivel de significancia de la prueba α. Será considerado $\alpha = 0.05$. Esta prueba se desarrolló con ayuda del software R a través de la función *shapiro.test()*. Esta función recibió como argumento el vector de diferencias de calificaciones del pre test y del post test, es decir, $D = x - y$, donde x es el vector de calificaciones del pre test e y es el vector de calificaciones del post test. La Figura 25 muestra los resultados obtenidos. Dado que $p - value = 0.167 \ y \ \alpha = 0.05$ se cumple que $p - value > \alpha$ entonces no se rechaza H_0. Por lo tanto, las diferencias siguen una distribución normal.

Dado que las diferencias de los datos siguen una distribución normal se pudo utilizar la prueba paramétrica de comparación de medias de dos poblaciones usando muestras apareadas. Además, las calificaciones de cada participante del pre y post test son independientes. Con la condición de normalidad e independencia es posible utilizar la prueba apareada mencionada. Lo anterior para concluir si el CM influyó en el aprendizaje de los participantes. El juego de hipótesis es el siguiente:

a) $H_0: \mu_D \geq 0 \ vs \ H_a: \mu_D < 0$ Rechazo H_0 si $T \leq -t(\alpha, n-1)$

donde

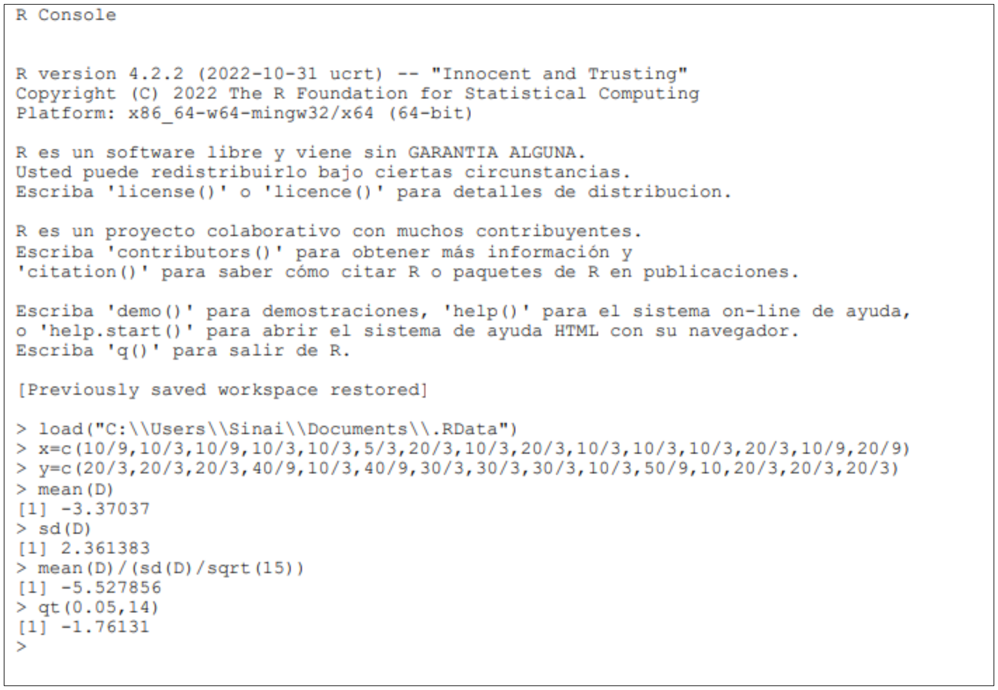
$$T = \frac{\overline{D} - 0}{\frac{S_D}{\sqrt{n}}}.$$

En R se calculó el promedio de diferencias denotado por $\overline{D}$ y la desviación estándar muestral de las diferencias, denotado por S_D. Con lo anterior, se calculó el valor del estadístico de prueba $T = -5.52$. También en R obtenemos el valor de tablas para T mediante la función $qt(0.05, 14) = -t(\alpha, n-1) = -1.76131$, ver Figura 26. Como $T < qt$(0.05, 14), se rechaza H_0 . Por lo tanto, la muestra apoya a la hipótesis alternativa, esto es, $\mu_D < 0$ lo cual implica que la media poblacional de las calificaciones del pre test es menor que la media poblacional de las calificaciones del post test. Por lo anterior, afirmamos que la implementación del CM favoreció en el aprendizaje de los estudiantes en los tres temas abordados durante las 8 sesiones.

```
R Console


R version 4.2.2 (2022-10-31 ucrt) -- "Innocent and Trusting"
Copyright (C) 2022 The R Foundation for Statistical Computing
Platform: x86_64-w64-mingw32/x64 (64-bit)

R es un software libre y viene sin GARANTIA ALGUNA.
Usted puede redistribuirlo bajo ciertas circunstancias.
Escriba 'license()' o 'licence()' para detalles de distribucion.

R es un proyecto colaborativo con muchos contribuyentes.
Escriba 'contributors()' para obtener más información y
'citation()' para saber cómo citar R o paquetes de R en publicaciones.

Escriba 'demo()' para demostraciones, 'help()' para el sistema on-line de ayuda,
o 'help.start()' para abrir el sistema de ayuda HTML con su navegador.
Escriba 'q()' para salir de R.

[Previously saved workspace restored]

> load("C:\\Users\\Sinai\\Documents\\.RData")
> x=c(10/9,10/3,10/9,10/3,10/3,5/3,20/3,10/3,20/3,10/3,10/3,10/3,20/3,10/9,20/9)
> y=c(20/3,20/3,20/3,40/9,10/3,40/9,30/3,30/3,30/3,10/3,50/9,10,20/3,20/3,20/3)
> D=x-y
> shapiro.test(D)

        Shapiro-Wilk normality test

data:  D
W = 0.91594, p-value = 0.167

>
```

Figura 25. Implementación de la prueba de Shapiro-Wilk en el software R

Esto lo concluimos ya que en promedio, las calificaciones del pre test fueron menores que las calificaciones del post test con un error del 5%.



```
R Console

R version 4.2.2 (2022-10-31 ucrt) -- "Innocent and Trusting"
Copyright (C) 2022 The R Foundation for Statistical Computing
Platform: x86_64-w64-mingw32/x64 (64-bit)

R es un software libre y viene sin GARANTIA ALGUNA.
Usted puede redistribuirlo bajo ciertas circunstancias.
Escriba 'license()' o 'licence()' para detalles de distribucion.

R es un proyecto colaborativo con muchos contribuyentes.
Escriba 'contributors()' para obtener más información y
'citation()' para saber cómo citar R o paquetes de R en publicaciones.

Escriba 'demo()' para demostraciones, 'help()' para el sistema on-line de ayuda,
o 'help.start()' para abrir el sistema de ayuda HTML con su navegador.
Escriba 'q()' para salir de R.

[Previously saved workspace restored]

> load("C:\\Users\\Sinai\\Documents\\.RData")
> x=c(10/9,10/3,10/9,10/3,10/3,5/3,20/3,10/3,20/3,10/3,10/3,10/3,20/3,10/9,20/9)
> y=c(20/3,20/3,20/3,40/9,10/3,40/9,30/3,30/3,30/3,10/3,50/9,10,20/3,20/3,20/3)
> mean(D)
[1] -3.37037
> sd(D)
[1] 2.361383
> mean(D)/(sd(D)/sqrt(15))
[1] -5.527856
> qt(0.05,14)
[1] -1.76131
>
```

Figura 26. Implementación de la prueba T en el software R.

4.6 Experiencia de los participantes al asistir al Círculo Matemático

De acuerdo con las respuestas obtenidas del cuestionario (Anexo C), en general, a los participantes les gustó asistir al CM, ya que les pareció una experiencia dinámica que a la vez les permitía aprender (Anexo D). También, destacaron que, a diferencia de la escuela, las sesiones no eran exclusivas de operaciones. Algunos participantes mencionaron que sus papás los obligaron a asistir a la primera sesión, pero conforme avanzaron las sesiones del CM, la asistencia de estos participantes cambió a una asistencia voluntaria. Además, se identificó el deseo de algunos participantes por aprender contenido matemático extra del que les presentan en un aula tradicional ya que se consideran buenos o porque querían mejorar en esta materia.

En las últimas sesiones, cuando el responsable del CM interactuaba con los participantes, estos le mencionaban que les gustaba asistir al CM ya que habían creado amistades nuevas con los participantes y, además, habían conocido una universidad.

CONCLUSIONES

Se identificaron los factores y condiciones que permitieron la implementación del CM, los cuales van desde conseguir instalaciones hasta el compromiso de los papás de los participantes. Entre los factores encontrados se tienen: instalaciones, apoyo en la divulgación del CM, disposición de material y accesibilidad a las instalaciones. Las condiciones que permitieron implementar el CM fueron proponer problemas atractivos que motiven el interés de los participantes, crear un ambiento no competitivo y de colaboración, el responsable del CM sea un miembro activo del grupo sin ocupar el lugar de un profesor.

Los tres problemas propuestos para las sesiones del CM permitieron evidenciar un avance en el aprendizaje de los participantes en los temas de ampliación, combinación sin repetición y patrones geométricos. Esto se concluye ya que se realizó una prueba estadística con datos apareados que se obtuvieron al calificar el pre y post test. La prueba se realizó con un nivel de significancia del 5%. Una condición necesaria para la prueba anterior fue que la diferencia de las calificaciones del pre y post test siguieran una distribución normal. Para comprobar este requisito se utilizó la prueba de Shapiro-Wilk con un nivel de significancia del 5%. Por las pruebas anteriores, se logró concluir que, en promedio, la calificación de los estudiantes antes del CM fue menor que la calificación de los estudiantes después del CM.

Durante el desarrollo del CM permitió que los participantes mostraran y comparan sus estrategias, en función del tipo de problema que se planteó, ya que, aunque no son idénticas permitieron llegar al mismo resultado. Por otro lado, con el pre y post test se muestra evidencia que existió un cambio de estrategias que permitieron obtener las soluciones correctas.

En el problema de patrón geométrico las estrategias identificadas en el pre test fueron: tabla, recuento, recursiva, descomposición, proporcional y combinada (proporcional y aditiva). De acuerdo con el post test, la mayoría de los participantes ya no utilizaron la estrategia proporcional y cambiaron a una estrategia de tabla o de descomposición, esto permitió que las respuestas obtenidas fueran correctas.

En el problema de combinación sin repetición, de acuerdo con el pre test la mayoría de los participantes encontraron permutaciones en lugar de combinaciones. Aquellos que lograron encontrar las combinaciones ocuparon la estrategia de hacer un listado, pero el conteo fue al tanteo. Con la información del post test se observó que la mayoría de los participantes realizó un listado de todas las posibles combinaciones con un conteo sistemático lo cual permitió que la solución del problema fuera correcta. Lo anterior coincide con Sainza (2009) donde se reporta que la estrategia de establecer un patrón es la estrategia más popular que se emplea por alumnos de primaria.

Los resultados para el problema de ampliación a escala coinciden con los encontrados en Veiga (2013), donde los niños lograron realizar la ampliación a escala cuando se duplicaban las dimensiones, sin embargo, al considerar una ampliación con fracciones lograron una ampliación adecuada de la imagen.

Finalmente, se pudo documentar la experiencia de los participantes del CM a través de un cuestionario escrito. Las conclusiones de los participantes para el CM fueron positivas ya que el contexto extraescolar del CM fue libre de competencia, de evaluaciones y de presión. Los participantes mostraron gusto por asistir al CM porque la experiencia les pareció dinámica y a la vez les permitía aprender. Algunos de estos mencionaron que la asistencia pasó de ser una asistencia obligada a una voluntaria. Además, se identificó el deseo de algunos participantes por aprender contenido matemático extra del que les presentan en un aula tradicional ya que se consideran buenos en esta materia o porque quieren mejorar en esta materia.

Este trabajo establece un antecedente de cómo un CM puede abordar problemas matemáticos de manera distinta a la propuesta en el aula tradicional. Como se mencionó antes, la investigación de los CM en México es temprana, por lo que es importante implementar y dar difusión de estos espacios para que la evaluación de su impacto continúe. Como trabajo futuro se pueden implementar CM en distintos niveles educativos con el objetivo de explorar maneras alternativas que ayuden a mejorar el aprendizaje de los participantes en temas matemáticos específicos.

Referencias

Arbona, E., Beltrán-Meneu, M. J. y Gutiérrez, Á. (2021). Estrategias empleadas por estudiantes de primaria en la resolución de problemas de patrones geométricos. En Diago, P.D., Yáñez D.F., González-Astudillo, M.T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 133-140).

Bakker, A., Cai J., y Zenger, L. (2021). Future themes of mathematics education research: an international survey before and during the pandemic. *Educational Studies in Mathematics, 107*(1), 1–24. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10049-w

Belfiori, L.V. (2018). Resolución de laberintos en las clases de matemática del nivel medio. En Lestón, Patricia (Ed.), *ACTAS DE LA XII CONFERENCIA ARGENTINA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA* (pp. 450-458). SOAREM.

Blanco, J.L. (1996). La resolución de problemas. Una revisión teórica. *SUMA, 21*, 11-20. https://revistasuma.fespm.es/sites/revistasuma.fespm.es/IMG/pdf/21/011-020.pdf

Bryant, L., Bryant S., y White, D. (2019). Striking the Right Chord: Math Circles Promote (Joyous) Professional Growth. En S. D'Agostino, S. Bryant, A. Buchmann, M. Craddock Guinn, L. Harris (Eds.). *A celebration of the EDGE Program's Impact on the Mathematics Community and Beyond* (pp. 89-97). Springer.

Burns, B., Henry, J., McCarthy, D., y Tripp, J. (2017) The value of the Math Circle for gifted middle school students. *Gifted Child Today, 40* (4), 198-204. 10.1177/1076217517723677.

Chi, M. T.H., y Glaser, R. (1983). *Problem Solving Abilities*. Pittsburgh Univ pa Learning Research and Development Center.

Círculos y Festivales Matemáticos. (s.f.). *Guía de círculos matemáticos: Un recurso para iniciar su propio programa*. https://docs.google.com/document/d/1wfjHsVjy6EVBikVqbvZ4trmszlcbUy3r-YBPX7voAK4/edit#heading=h.sgn4rrpb63cf

Detzel, P., y Ruíz, M.E. (2000). El éxito del fracaso o el fracaso del éxito: análisis de una actividad de enseñanza de matemática. *Premisa, 7*, 31-38. http://funes.uniandes.edu.co/23181/1/Detzel2000El.pdf

Donaldson, B., Nakamaye, M., Umland, K., y White D. (2018). The impact of Math Teachers' Circle participation: Case studies. *The Mathematics Educator, 27*(2), 2-32. https://ojs01.galib.uga.edu/tme/article/view/2038

Freeman, S., Eddy, S. L., McDonough, M., Smith, M. K., Okoroafor, N., Jordt, H., y Wenderoth, M. P. (2014). Active learning increases student performance in science, engineering, and mathematics. *Proceedings of the national academy of sciences*, *111*(23), 8410-8415.

Garofalo, J. (1989). Beliefs and their influence on mathematical performance. *The Mathematics Teacher, 82*(7), 502-505.

Givental, L., Nemirovskaya, M. y Zakharevich, I. (2018). *Math Circle by the Bay*. American Mathematical Soc..

Godino, J., y Batanero, C. (2004). *Didáctica de las matemáticas para maestros.* http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/

Infante, S., y Zarate de Lara, G. (2012). *Métodos Estadísticos: un enfoque interdisciplinario*. Trillas.

Kaplan, R., y Kaplan, E. (2014). *Out of the labyrinth: Setting Mathematics Free*. Bloomsbury Press.

Kennedy, E., y Smolinsky, L. (2016). Math circles: A tool for promoting engagement among middle school minority males. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *12*(4), 717-732.

Long, J., Pantano, A., White D., y Wiegers, B. (2017). Math Circles Embrace Underserved Students. *MAA FOCUS: Newsmagazine of the Mathematical Association of America*, *37*(5), 18-20.

Mast, M. B. (2015). Bringing big ideas in math to small children: math circles and other enrichment activities for elementary school students and teachers. *QScience Proceedings*, *2015*(3), 3-12.

Nemirovsky, R., Kelton, M., y Civl, M. (23-31 de julio de 2016). Crafting informal mathematics education: learning about curvature and basket weaving [Resumen de presentación de la conferencia]. 13th International Congress son Mathematical Education Hamburg.

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas.* Trillas

Reys, R., Lindquist, M.M., Lambdin, D.V., y Smith, N.L. (1995). *Helping children learn mathematics.* John Wiley & Sons.

Rivera, M. I., y Maldonado, E. S. (2012). Elementos de la combinatoria en la educación primaria. En L. Sosa, E. Aparicio y F. Rodríguez (Eds.). *Memoria de la XV Escuela de Invierno en Matemática Educativa* (pp. 326-334). Red Cimates.

Sainza, C., y Figueiras, L. (2009). Identificación de diferencias en la resolución de problemas de conteo entre alumnos de primaria y bachillerato. En M.J. González, M.T. González y J. Murillo (Eds). *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 473-485). SEIEM.

Santos-Trigo, M. (2014). *La resolución de problemas matemáticos: fundamentos cognitivos*. Trillas.

Schoenfeld, A.H. (1985). A Framework for the Analysis of Mathematical Behavior. *Mathematical problem solving* (pp. 11-44). Academic Press, INC.

Shapiro, S. S., y Wilk, M. B. (1965). An Analysis of Variance Test for Normality (Complete Samples). *Biometrika*, *52*(3/4), 591-611. DOI:10.2307/2333709

Takele, M. (2020). Implementation of active learning methods in mathematics classes of Woliso town primary schools, Ethiopia. *International Journal of Science and Technology Education Research*, *11*(1), 1-13.

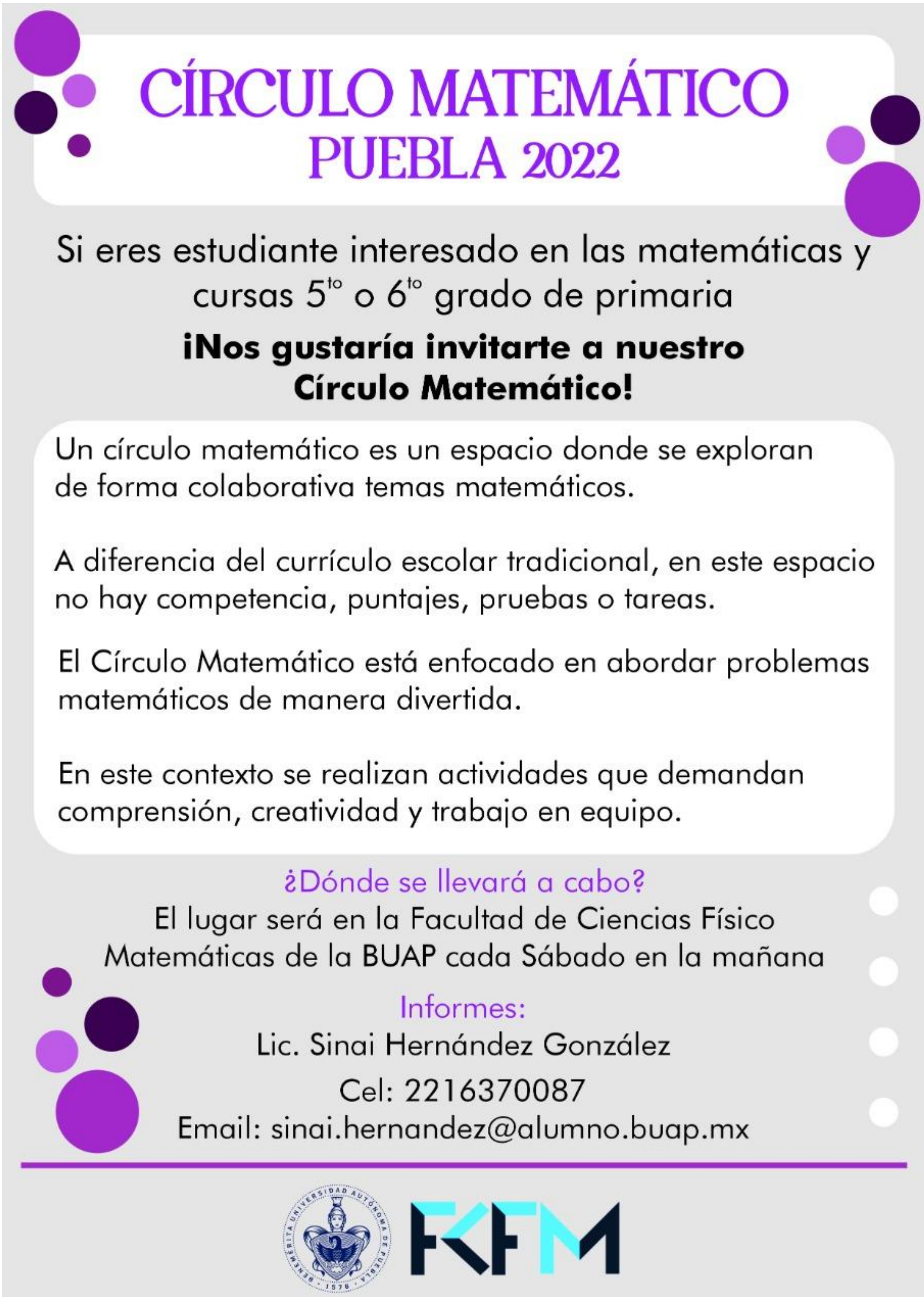
Vandervelde, S. (2009). Molding a Math Circle. *Circle in a Box* (p. 9-23). American Mathematical Soc.

Veiga, D.C. (2013). Una ingeniería didáctica aplicada sobre proporcionalidad y semejanza. *Premisa*, *56*, 3-15.

Wiegers, B., y White, D. (2016). The establishment and growth of Math Circles in America. En M. Zack y E. Landry (Eds.). *Research in History and Philosophy of Mathematics* (pp. 237-248). Birkhäuser

ANEXOS

Anexo A. Póster



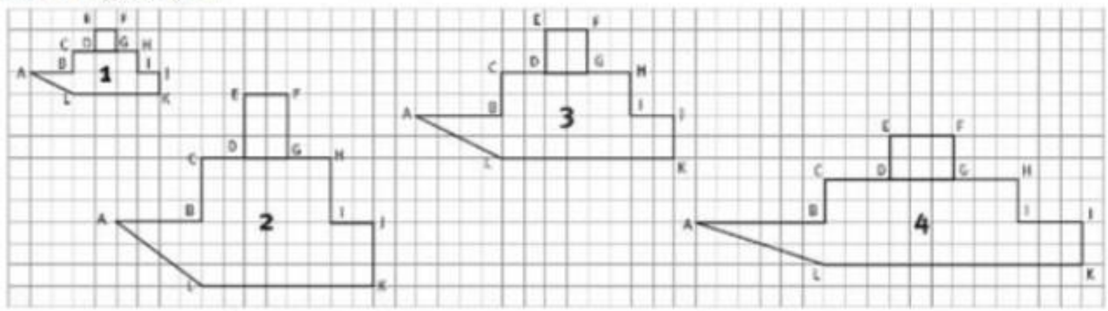
Anexo B. Pre y Post test

Agradecemos que te tomes el tiempo de responder los tres siguientes problemas matemáticos.

- La elección de participar o no en la resolución de los tres problemas no tendrá ningún impacto en tu participación del Círculo Matemático. Puedes optar por no contestar o no terminar los problemas, solo comunicárselo a la responsable del Círculo Matemático.
- Los resultados no dicen nada sobre tu rendimiento, sino que nos interesa ver el panorama general del conocimiento matemático que tienes.

Problema 1

Observa los barcos del dibujo. ¿Cuáles te parece que podrían ser ampliaciones a escala del barco 1? ¿Por qué?



En clase quieren hacer un jardín juntando macetas de flores. Mira cómo crece el jardín cada día:

a) ¿Cuántas macetas tendrá el jardín el día 5? ¿Cómo lo sabes?
b) ¿Cuántas macetas tendrá el jardín el día 13? ¿Cómo lo sabes?
c) ¿Cuántas macetas tendrá el jardín el día 28? ¿Cómo lo sabes?

Ana puede poner dos bolitas de helado en su cono una al lado de la otra:

Debe seleccionar dos sabores distintos. Los sabores que hay son: vainilla, chocolate, pistache, zarzamora y fresa. ¿Cuántas combinaciones diferentes de bolitas de helado puede hacer Ana?

Anexo C. Respuestas del cuestionario

	¿Te gustó asistir al Círculo Matemático?	Cuando asististe a la primera sesión, ¿fue porque tú quisiste venir o tu mamá/ papá o tutor quiso que asistieras?	En la sesión 2 y el resto de las sesiones de cada sábado, ¿viniste porque te gustaba asistir al Círculo Matemático o porque tu mamá/papá o tutor quería que asistieras?	¿Hubo alguna diferencia entre las sesiones del Círculo Matemático y la escuela? ¿Por qué?	¿Por qué asististe al Círculo Matemático?
Participante 1	Si, me gustó mucho gusto asistir al Círculo Matemático	Fue porque yo quise venir a la primera sesión	Fue porque me gustaba venir al Círculo Matemático	Si, había problemas más fáciles en la escuela y en el Círculo Matemático eran más difíciles	Porque me gustaba asistir al Círculo Matemático
Participante 2	Si	Porque yo quise	Yo quise	Si la escuela dura más tiempo	Porque quería aprender más cosas
Participante 3	Si porque yo lo sentí como juegos para aprender como el tapete no lo sentí como en la escuela que solo son operaciones, si me gustó	Yo si quería venir lo que no me había gustado era levantarme temprano y dormir temprano el viernes, pero empecé a venir y me gustó no me importó mucho	Para el primer día no quería venir por sueño, pero vine y me gustó	Si sentí que le Círculo Matemático es más divertido que la escuela, en la escuela nos ponen operaciones y eso aburre, en este caso no fue tanto	Porque me gustó venir. El primer día no quería venir a los demás ya me empezó a gustar
Participante 4	Si	Mi mamá quiso que asistiera	Porque me gustaba	Si	Porque mi mamá quería que asistiera

Continuación

	¿Te gustó asistir al Círculo Matemático?	Cuando asististe a la primera sesión, ¿fue porque tu quisiste venir o tu mamá/ papá o tutor quiso que asistieras?	En la sesión 2 y el resto de las sesiones de cada sábado, ¿viniste porque te gustaba asistir al Círculo Matemático o porque tu mamá/papá o tutor quería que asistieras?	¿Hubo alguna diferencia entre las sesiones del Círculo Matemático y la escuela? ¿Por qué?	¿Por qué asististe al Círculo Matemático?
Participante 5	Si mucho	Por mi tutor	Venía porque me gustaba	Si por ejemplo el horario	Porque me gustó
Participante 6	Si	Porque yo quise venir	Me gustó asistir	Aprendí a ampliar	Para aprender mas
Participante 7	Si, no era como pensaba, había actividades y muchas cosas	La verdad yo al principio no quería mi papá fue el que me dijo	Después del primer día me empezó a gustar ir	Que nos daban actividades como el laberinto de números	En la escuela soy muy bueno en matemáticas. Además de que era interesante y divertido
Participante 8	Si	Yo	Yo quise	Aquí es diferente	Para aprender
Participante 9	Si	Yo quise venir	Si me gustó mucho	Si, en mi escuela eran más fáciles los problemas y con más sumas, multiplicaciones etc.	Para aprender más matemáticas y para ser mejor en esa materia
Participante 10	Si	Vine porque mi mamá quiso que viniera al Círculo Matemático	Si vine porque me gustaba	No	Porque mi mamá quería que asistiera, pero luego me gusto venir

Continuación

	¿Te gustó asistir al Círculo Matemático?	Cuando asististe a la primera sesión, ¿fue porque tu quisiste venir o tu mamá/ papá o tutor quiso que asistieras?	En la sesión 2 y el resto de las sesiones de cada sábado, ¿viniste porque te gustaba asistir al Círculo Matemático o porque tu mamá/papá o tutor quería que asistieras?	¿Hubo alguna diferencia entre las sesiones del Círculo Matemático y la escuela? ¿Por qué?	¿Por qué asististe al Círculo Matemático?
Participante 11	Si	Mi mamá quiso que asistiera	Porque mi mamá quiso que asistiera	Si porque es diferente lo que enseñan	Porque me inscribieron
Participante 12	Si	Yo quería	No, yo quería	No	Porque quería aprender
Participante 13	Si	Porque yo quise asistir	Porque me gustaba el Círculo Matemático	Sí, no sabía cómo ampliar	Porque me gusta la matemática y quiero aprender más matemáticas y como es sábado los cursos pues esta super bien porque no tengo nada que hacer
Participante 14	Si	Mi papá quiso que asistiera	Mi papá quiso que asistiera	No	Mi papá quiso que asistiera
Participante 15	Si	Si	Porque me gusta el Círculo Matemático	No	Porque me gusta estudiar matemáticas

Anexo D. Implementación del Círculo Matemático