BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ESTRATEGIAS REVELADAS POR ALUMNOS DE QUINTO GRADO AL RESOLVER CUATRO PROBLEMAS DE DIVISIÓN PARTITIVA CON RESTO

TESIS
PARA OBTENER EL TÍTULO DE
MAESTRO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

PRESENTA
LUIS ANTONIO SANDOVAL BARRETO

DIRECTOR DE TESIS
DR. MANUEL PONCE DE LEÓN PALACIOS

CO-DIRECTOR DE TESIS
DR. JOSÉ ANTONIO JUÁREZ LÓPEZ

PUEBLA, PUE. JUNIO 2024

BUAP

DR. SEVERINO MUÑOZ AGUIRRE
SECRETARIO DE INVESTIGACIÓN Y
ESTUDIOS DE POSGRADO, FCFM-BUAP
P R E S E N T E:

Por este medio le informo que el C:

LUIS ANTONIO SANDOVAL BARRETO

Estudiante de la Maestría en Educación Matemática, ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 13 de diciembre de 2023, con la tesis titulada:

"ESTRATEGIAS REVELADAS POR ALUMNOS DE QUINTO GRADO AL RESOLVER CUATRO PROBLEMAS DE DIVISIÓN PARTITIVA CON RESTO"

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

A T E N T A M E N T E.
H. Puebla de Z. a 24 de junio de 2024

DRA. LIDIA AURORA HERNÁNDEZ REBOLLAR
COORDINADORA DE LA MAESTRÍA
EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA.

DRA´LAHR/l´agm*

Facultad
de Ciencias
Físico Matemáticas

Av. San Claudio y 18 Sur, edif. FM1
Ciudad Universitaria, Col. San
Manuel, Puebla, Pue. C.P. 72570
01 (222) 229 55 00 Ext. 7550 y 7552

¨Afrontar la enseñanza de las matemáticas en el nivel de la Educación Infantil es una tarea a la que el maestro no puede, ni debe, enfrentarse sin otras herramientas que la mera intuición o el recurso de sus experiencias y vivencias escolares, confiando en su arte personal para enseñar¨.

MA. DEL CARMEN CHAMORRO

Este trabajo de investigación fue posible gracias al respaldo financiero brindado por el Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías (CONAHCYT), a través de la Beca de Maestría Nacional otorgada durante el periodo enero 2022 a diciembre 2023 (No. De CVU: 1173047).

Así mismo, expreso mi más sincero y profundo agradecimiento a la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla y al Posgrado en Educación Matemática por abrirme las puertas de sus instalaciones, por permitirme ser parte de una de las universidades más reconocidas y de mayor prestigio a nivel mundial, y por contribuir en mi formación profesional y en la de muchos otros estudiantes.

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, expreso mi eterna gratitud a dios. Cada vez que alguien me pregunta - ¿Cómo es que lograste ingresar al Posgrado en Educación Matemática que imparte BUAP? Siempre respondo que dios tuvo que ver algo en ello y empiezo a platicar la siguiente anécdota:

> En agosto de 2020 inicié mi proceso para ingresar a la maestría en Educación Matemática. De acuerdo con la convocatoria, lo primero que hice fue enviar de manera digital mi solicitud de examen acompañada de los siguientes documentos: una copia de mi título de licenciatura, una copia de mi cédula de licenciatura, una copia de mi certificado de estudios con promedio y una copia de mi acta de nacimiento.
>
> Después de ahí se vino la etapa del examen de admisión, un examen conformado por 5 problemas, de los cuales solamente estuve seguro de haber respondido correctamente 2 de ellos.
>
> Cando se llegó la etapa de comunicación de los resultados recibí un correo electrónico en el que me informaban que no había logrado aprobar el examen. Sin duda alguna lo primero que me vino a la mente es que a partir de ese momento yo ya había quedado fuera del proceso. Muy triste y decepcionado de mí, pero con mucha fe, le pedí a dios que me ayudara a ingresar al posgrado durante ese año.
>
> Pasaron varias semanas y recibí un correo en el que la licenciada Aby me notificó que el comité de admisión me daba otra oportunidad para presentar otro examen y que de aprobar dicho examen pasaría a la etapa de entrevista. La única explicación que puedo dar a ello es que dios realmente me escuchó y puso todos los medios para que yo pudiera ingresar al posgrado.
>
> Después de ahí, presenté un segundo examen, pasé a la etapa de entrevista y finalmente me aceptaron en la maestría en Educación Matemática, y ahora estoy aquí redactando el apartado de agradecimientos.

Agradezco enormemente a mi familia: Mi mamá Marcelina, mi papá Andrés, mi hermana Maribel, mi hermano Abelardo, mi hermano Jesús y mi sobrino Alan por estar siempre conmigo en los momentos buenos y en los momentos difíciles. En especial agradezco a mi mamá Marcelina Barreto Alonso por cada una de sus palabras de aliento que me dio y que me impulsaron a continuar con este proyecto. Durante mi formación hubo un momento en que estuve a punto de renunciar a este sueño, el momento exacto fue en diciembre de 2023, justo después de presentar mi segundo avance de tesis y de escuchar cada una de las observaciones que externaron los integrantes de la mesa del jurado. Recuerdo que ese día no me fue nada bien con mi presentación, salí muy triste del salón de clases, pensando que lo mejor era renunciar y no regresar a la universidad en enero de 2024.

También agradezco inmensamente a mi mamá porque cada vez que yo viajaba desde Morelos a Puebla, ella dejaba de hacer sus cosas y dedicaba su tiempo a prepararme algunos alimentos. No hubo un sólo día en que ella no se preocupara por tener listo un topper con comida para que yo pudiera llevármelo a la universidad. Mi horario de trabajo en la escuela primaria era de 8:00 a.m. a 1:00 p.m., el traslado de mi centro de trabajo a mi casa era de una hora, el viaje desde mi casa a la universidad era de dos horas y las clases en la universidad comenzaban a las 4:00 p.m. De ahí que, terminado mi jornada de trabajo no me queda más tiempo que para pasar a casa, dejar mis cosas de la primaria, tomar mis cosas de la universidad y, saludar y despedirme de mi mamá, justo en ese momento era cuando ella siempre tenía listo un topper con comida para mí.

Agradezco enormemente al Dr. Manuel Ponce de León Palacios por haber aceptado dirigir este trabajo de investigación, por haber confiado en mí a pesar de todas esas dificultades que evidencié durante todo este proceso. Agradezco profundamente su paciencia, sus enseñanzas y sus recomendaciones. Fue un honor ser alumno y sobre todo ser asesorado de alguien como usted: sabio, dedicado y con vasta experiencia y conocimiento referente al mundo de la investigación en educación matemática.

Expreso mi más profundo agradecimiento al Dr. José Antonio López Juárez, a la Dra. Lidia Aurora Hernández Rebollar, a la Dra. Estela de Lourdes Juárez Ruiz y al Dr. José del Carmen Orozco Santiago, por su amable disposición para participar en esta investigación, por haberse dado el tiempo de leer mi trabajo y el de cada uno de los demás alumnos que tuvieron a su cargo. Aprecio profundamente cada una de sus observaciones. En su momento llegué a sentir dichas recomendaciones como críticas constructivas realmente fuertes, sin embargo, entiendo que su única intención era hacerme ver las áreas de oportunidades de mi trabajo y en ese sentido llevarme a mejorar cada vez más la estructura, redacción, presentación y formato de mi proyecto. Ahora comparo las primeras y las últimas versiones de mi investigación y veo claramente la diferencia entre unas y otras. Gracias por sus valiosos aportes a este trabajo y a mi formación académica.

A la plantilla docente de la maestría, por su compromiso, responsabilidad y profesionalismo con el que nos impartieron cada uno de los cursos. Por compartir sus amplios conocimientos con nosotros, por motivarnos y exigirnos dar lo mejor de nosotros mismos. Mi respeto y admiración para cada una y cada uno de ellos. Las materias que nos impartieron me permitieron conocer muchas cosas que ignoraba respecto a la investigación en educación matemática, tanto es así, que en su momento

llegué a sentir mucha inseguridad por no entender varias cosas que solían salir de manera natural en los discursos entre compañeros y profesores.

También agradezco profundamente a la Licenciada Aby, asistente de Posgrado en Educación Matemática, por apoyarnos en cada uno de los trámites que debíamos realizar al inicio, durante y al final de la maestría, por estar al pendiente y recordarnos las fechas en las que debíamos inscribirnos, reinscribirnos, presentar nuestros avances de tesis, evaluar a los maestros y realizar los pagos correspondientes. También, agradezco mucho que nos haya brindado su confianza para poder acercarnos a ella, enviarle un correo electrónico o escribirle un mensaje de texto a través de WhatsApp cada vez que nos surgía alguna duda respecto a una cuestión administrativa.

Gracias a mis compañeros y amigos de la maestría por ayudarme a crecer como persona y como profesional de la educación. Sus amplios conocimientos me motivaron a esforzarme cada vez más para poder entender las clases de la misma manera en la que lo hacían ustedes, lo hacían parecer tan fácil y digerible. Muchas gracias Carlos Alberto Juárez Moreno porque desde el primer día de clases aunque fue virtual, me brindaste tu amistad y la confianza para poderme acercar a ti cada vez que tenía alguna duda respecto a alguna tarea o algún trabajo.

Por último, pero no menos importante, le agradezco enormemente a mi amiga Elizabeth Barreto por haberme permitido utilizar su computadora portátil durante los dos años que estuve estudiando la maestría en Educación Matemática. También le doy gracias por motivarme a continuar estudiando el posgrado hasta lograr terminarlo.

ÍNDICE

Resumen 11
INTRODUCCIÓN 13
CAPÍTULO 1 17
PLANTEAMIENTO DE LA INVESTIGACIÓN 17
1.1 Antecedentes 17
1.2 Planteamiento del problema 20
1.3 Pregunta de investigación 22
1.3.1 Pregunta general 23
1.3.2 Preguntas específicas 23
1.4 Objetivo 23
1.4.1 Objetivo general 24
1.4.2 Objetivo específico 24
1.5 Justificación 24
CAPÍTULO 2 27
MARCO CONCEPTUAL 27
2.1 La división 27
2.2 Problemas rutinarios y no rutinarios de división 29
2.3 Cuatro tipos de problemas no rutinarios de división 31
2.4 Estrategias 32
CAPÍTULO 3 36
DISEÑO METODOLÓGICO 36
3.1 Paradigma de investigación 37
3.2 Método 38
3.3 Muestreo 39
3.4 Técnicas e instrumentos 41
3.4.1 Procedimiento para la recolección de datos 41
CAPÍTULO 4 45
RESULTADOS 45
4.1 Análisis Resultados 45
4.1.1 Estrategias que utilizan los estudiantes al resolver el problema que implica Reajustar el cociente incrementándolo parcialmente. Las habitaciones. El problema de los turistas y las habitaciones 46

4.1.2 Estrategias que utilizan los estudiantes al resolver el problema que implica un Cociente no decimal. El problema de la cumpleañera y los globos......................................49

4.1.3 Estrategia que utilizan los estudiantes al resolver el problema que implica un Resto Divisible. El problema de los cuatro amigos y la compra del balón (siete alumnos, una misma estrategia) 56

4.1.4 Estrategias que utilizan los estudiantes al resolver el problema que considera Resultado es el Resto. El problema de la campaña de fumigación contra el dengue y los trabajadores que no formarán parte de ningún equipo...60

CONCLUSIONES...64

REFERENCIAS 67

Resumen

Esta investigación cuyo enfoque es cualitativo de tipo descriptivo, tuvo como objetivo analizar las estrategias que estudiantes de quinto grado utilizan al resolver problemas de división partitiva con resto: uno del tipo Reajustar el Cociente Incrementándolo, uno del tipo Resto no divisible, uno del tipo Resto Divisible y uno del tipo resultado es el Resto.

En este estudio participaron siete alumnos de entre 10 y 11 años, seleccionados por conveniencia y de manera intencional. La recolección de datos se llevó a cabo a través de un cuestionario y de una entrevista semiestructura que fue grabada y posteriormente transcrita para su análisis.

Los resultados revelaron que las estrategias que utilizaron los estudiantes para resolver los problemas tipo 1, tipo 2 y tipo 4 fueron variadas. También se encontró que los alumnos tienden a utilizar una misma estrategia al resolver el problema tipo 3.

Trabajos como este brindan una oportunidad a los maestros y a los futuros maestros para entender y ver los procedimientos de la forma en que los ven sus estudiantes, situación que sin duda alguna puede contribuir en el desarrollo de una mayor empatía dentro de las aulas, ayudar a construir relaciones más fuertes y significativas entre los educadores y los educandos y, sobre todo, ayudar a adoptar nuevas formas de enseñanza que permitan satisfacer las necesidades de cada uno de los pequeños.

Palabras clave: Primaria, quinto grado, problemas no rutinarios de división, problemas de división con resto, división partitiva, estrategias.

Abstract

This research, whose focus is qualitative and descriptive, aimed to analyze the strategies that fifth grade students use when solving problems of partitive division with remainder: one of the Readjust the Quotient by Increasing it type, one of the Non-divisible Remainder type, one of the Remainder type Divisible and one of the result type is the Remainder.

Seven students between 10 and 11 years old participated in this study, selected by convenience and intentionally. Data collection was carried out through a questionnaire and a semi-structured interview that was recorded and later transcribed for analysis.

The results revealed that the strategies that students used to solve type 1, type 2 and type 4 problems were varied. It was also found that students tend to use the same strategy when solving problem type 3.

Work like this provides an opportunity for teachers and future teachers to understand and see procedures the way their students see them, a situation that can undoubtedly contribute to the development of greater empathy within the classrooms, help build stronger and more meaningful relationships between educators and students and, above all, help adopt new forms of teaching that meet the needs of each of the children.

Keywords: Primary, fifth grade, non-routine division problems, division problems with remainder, partitive division, strategies.

INTRODUCCIÓN

La matemática es considerada una de las materias básicas y de gran importancia en las distintas etapas de la educación. Para cerciorarnos de ello basta con analizar la carga horaria que se le asigna dentro de los planes y programas de estudio de nivel preescolar, primaria, secundaria y media superior, y contrastarla con la carga horaria del resto de las asignaturas.

Esta disciplina tiene aplicaciones prácticas en muchos aspectos de la vida diaria, prepara a los estudiantes para futuras oportunidades educativas y profesionales, contribuye en gran medida al desarrollo de las capacidades mentales de los alumnos, desde su estudio es posible estimular procesos como atención, memoria y pensamiento. Orrantia (2006) señala que el aprendizaje de las matemáticas, junto a la lectura y la escritura, constituyen uno de los aprendizajes fundamentales de la educación elemental, dado el carácter instrumental de estos contenidos.

Existen varias razones para afirmar que el aprendizaje de la matemática no es una tarea fácil. Algunas de ella son las siguientes, las cuales reafirman la idea de que el logro y aprendizaje exitoso dentro de esta disciplina sigue siendo un desafío a nivel mundial.

1. Dentro de esta disciplina aparecen muchos conceptos que son abstractos y que pueden ser difíciles de entender y de visualizar.
2. La resolución de problemas, especialmente cuando hablamos de ellos en términos de situaciones no comunes, de situaciones que le exigen al resolutor un enfoque lógico para dar una respuesta correcta.
3. La falta de habilidades cognitivas previas y de un crecimiento secuencial. Si los estudiantes no tienen una base sólida en matemáticas, pueden tener dificultades para entender conceptos más avanzados.
4. La falta de motivación.
5. Las experiencias previas con la materia.
6. El escaso conocimiento del contenido de la materia y del contenido pedagógico general.

Actualmente estas y otras dificultades en el aprendizaje de las matemáticas se han convertido en una preocupación que se manifiesta en buena parte de los profesionales dedicados al mundo de la educación. Tanto es así que cada vez son más evidentes los esfuerzos y compromisos por parte de la comunidad científica, que busca avanzar y profundizar aún más en sus estudios y al mismo tiempo contribuir en el mejoramiento de logro esperado en esta disciplina. Socas (2007), señala que las dificultades y los errores en el aprendizaje de esta materia son hoy en día un foco de estudio e investigación en educación matemática.

Para aprender matemáticas no basta con memorizar y recitar una fórmula o con resolver una operación utilizando su algoritmo convencional. Polya (1965) menciona que limitar la enseñanza de la matemática a la ejecución mecánica de operaciones rutinarias es rebajarla al nivel de una simple receta de cocina, donde el cocinero no usa ni su juicio ni su imaginación.

La comunidad científica reconoce que dentro de las aulas se debería priorizar la resolución de problemas matemáticos verbales. Cuando una persona se enfrenta a una situación que precisa resolver, y para la cual no dispone de un camino rápido y directo que lo lleve a la solución, se hace presente por parte del resolutor: reflexión, creatividad, búsqueda, exploración de diversas vías de solución, así como, la formulación de argumentos que validen sus resultados una vez encontrados (SEP, 2012). Enfrentarse y resolver un desafío o una situación por méritos propios, resulta satisfactorio y gratificante, especialmente cuando uno es consciente del grado de dificultad apreciable en dicho planteamiento.

En ese mismo sentido, trabajos realizados en los últimos años también han mostrado la importancia que tiene centrar la atención no sólo en las respuestas correctas o incorrectas que dan los estudiantes, precisamente porque detrás de una respuesta o de un resultado final se encuentran algunos de sus procesos, algunas de sus formas de entender y de interpretar, algunos de sus errores que comente, algunas de sus dificultades por las que atraviesan y algunas de sus formas en cómo resuelven. Socas (2007) señala que es preciso comenzar a observar más cuidadosamente el trabajo en matemáticas de nuestros alumnos, ya que, esto nos pone en posibilidades de obtener resultados a veces inesperados y sobre todo enriquecedores.

Se habla mucho de la heterogeneidad que podemos encontrar dentro de un aula de clases, y de la importancia que tiene el centrar la atención en cada uno de nuestros estudiantes y en su propio proceso de aprendizaje. Claro está que cada alumno difiere de los demás en condiciones intelectuales, ritmos de trabajo y de aprendizaje. Siendo estas las razones principales de que un mismo problema generalmente no sea enfrentado de igual forma por todo un grupo de escolares.

Para nosotros los docentes puede ser de gran a ayuda conocer los procedimientos que los estudiantes de quinto grado utilizan al resolver los problemas de división partitiva con resto. Contar con este tipo de conocimiento nos pone en posibilidades de comprender de una mejor manera la forma en cómo es que los alumnos abordan cada tipo de problema, nos permiten anticipar el pensamiento de los pequeños, nos da la oportunidad de promover el desarrollo de ambientes de aprendizaje que inviten a nuestros educandos a expresarse libremente y sin miedo a equivocarse, nos ayuda a identificar las estrategias efectivas para enfrentar estos tipos de problemas y nos permite intervenir de la mejor manera para ayudar a los alumnos a conectar los aprendizajes nuevos con los que ya poseen.

Sin duda alguna, son muchas las razones para realizar en el aula investigaciones del tipo exploratorias, empezando porque este tipo de trabajos permiten comprender cómo es que piensan nuestros estudiantes, nos ayudan a identificar malentendidos, dificultades, errores y nos ayuda a comprender algún fenómeno o problema en mayor profundidad.

La estructura de esta tesis está conformada por cuatro capítulos, una sección de conclusiones y un apartado de fuentes bibliográficas. El capítulo 1 expone algunos estudios que abordan aspectos similares o relacionados con el tema de investigación, describe la situación problemática que se investigó, presenta la pregunta general, las preguntas específicas, el objetivo general, el objetivo específico y las razones de la investigación.

El capítulo 2 presenta el conjunto de conceptos que se utilizaron para comprender el problema de investigación. Los conceptos que ahí se abordan son: Las diferentes formas de entender a la división, la diferencia entre los problemas rutinarios y los no rutinarios, las características de cada uno de los cuatro tipos de problemas no rutinarios de división y las estrategias que alumnos de nivel básico utilizan al enfrentarse a diferentes problemas de división que han sido reveladas en otros estudios.

En el capítulo 3 se describe el enfoque que se utilizó al llevar a cabo la investigación, el paradigma, el tipo de estudio, el proceso mediante el cual se seleccionaron a los participantes, las técnicas e instrumentos que se utilizaron para recopilar los datos y el procedimiento que se siguió para recolectar los mismos.

El capítulo 4 expone los hallazgos obtenidos a partir del análisis de los datos recopilados. Las conclusiones reúnen la ultimas reflexiones y análisis que dan muestra de los resultados obtenidos después de todo el proceso de sistematización. Finalmente, las referencias constituyen cada una de las fuentes teóricas consultadas durante el proceso de elaboración de esta tesis.

CAPÍTULO 1

PLANTEAMIENTO DE LA INVESTIGACIÓN

1.1 Antecedentes

Los antecedentes de investigación son un aspecto que forman parte de la estructura de un proyecto. Este elemento nos permite ubicar qué investigaciones similares se han realizado en torno al campo problemático que decidimos plantear y qué resultados se han obtenido (Cházaro, 2020). Para poder redactar esta sección de la tesis fue necesario realizar una selección de aquellas investigaciones que más aportan a mi planteamiento.

La revisión de la literatura reveló que, durante las últimas décadas, algunos investigadores de Australia (Dowton, 2009), Brasil (Borba y Selva, 2006), Chile (Márquez et al. 2019), Francia (Matalliotaki, 2012), España (Ivars y Fernández, 2016; Rodríguez et al., 2009; Zorrilla et al., 2021) y México (Pacheco-Muñoz et al., 2023) han realizado estudios con niños de educación básica en torno al análisis de las estrategias que utilizan cuando resuelven problemas de división con y sin resto.

Parte de estas investigaciones han puesto de manifiesto que no todos los alumnos tienden a resolver los problemas de división de la misma manera (Borba y Selva, 2006; De Lima y Carvalho 2013; Márquez et al., 2019; Pacheco-Muñoz et al., 2023;). Otras de ellas han encontrado que los alumnos a partir de tercer grado de educación primaria tienden a utilizar el algoritmo convencional para dar respuesta a este tipo de problema (Ivars y Fernández, 2016; Zorrilla et al., 2021). Hallazgos como estos nos invitan a reflexionar en torno a las siguientes preguntas ¿Por qué algunos estudiantes resuelven los problemas de una manera y otros de otra? ¿Será que algunos estudiantes disponen de un repertorio más amplio de estrategias y utilizan los procedimientos que más les resultan cómodos? ¿Será que algunos estudiantes probablemente sólo disponen de una estrategia y es la que utilizan?

Dentro de las investigaciones previas sobre esta temática se encuentra un trabajo realizado en España a cargo de Ivars y Fernandes (2016) cuyo objetivo fue caracterizar la evolución de los niveles de éxito y las estrategias empleadas por estudiantes de educación primaria de 6 a 12 años cuando resolvían problemas de estructura multiplicativa. Los responsables de dicho trabajo de investigación involucraron a 273 estudiantes, recolectaron los datos durante el ciclo escolar 2013-

2014 a través de la aplicación de un cuestionario conformado por 8 problemas de números naturales. Parte del análisis de sus resultados reveló los siguientes procedimientos como estrategias de resolución correctas e incorrectas respectivamente: Modelación-gráfica (agrupamiento, reparto y medida), conteo (conteo a saltos, conteo por ensayo y error), uso de hechos numéricos, uso del algoritmo y la multiplicación como suma de sumandos iguales; uso del algoritmo inverso, aditiva no adecuada, uso de todos los datos, combinación 1 a 1 y otras.

El mismo trabajo mostró que los estudiantes de los dos primeros cursos, 1ro y 2do de educación primaria, empleaban mayoritariamente estrategias de modelización y conteo, así como una variedad de estrategias sin sentido. A su vez reveló que, a partir del tercer curso de educación primaria, la estrategia uso del algoritmo crecía rápidamente y el uso del resto de estrategias correctas tendía a desaparecer.

Otro trabajo de investigación sobre el mismo tema es el que se realizó en Chile (Márquez et al., 2019) en el que participaron 100 estudiantes de séptimo básico, de entre 12 y 14 años. El objetivo de dicho estudio fue caracterizar las estrategias que los participantes utilizaban al resolver problemas de estructura multiplicativa, específicamente problemas de división medida. Los responsables de la investigación recolectaron los datos a través de la aplicación de un cuestionario conformado por tres problemas de estructura multiplicativa, de isomorfismo de medida del tipo división-medida, y analizaron los resultados mediante la triangulación de expertos. El estudio reveló que los procedimientos utilizados por los estudiantes eran: división, modelación-agrupamiento, multiplicación, suma-resta repetida, conteo a saltos, regla de tres, uso de todos los datos y combinación de estrategias.

Los hallazgos de Márquez et al. (2019) no coinciden con lo evidenciado por Ivars y Fernández (2016) respecto a la idea de que los alumnos durante sus primeros años de estudio disponen de un repertorio amplio de estrategias que les permiten solucionar con cierta solvencia problemas de estructura multiplicativa, pero que a medida que avanzan los cursos, van abandonando esas estrategias limitándose casi exclusivamente a la aplicación del algoritmo de la división de manera mecánica.

En publicaciones más recientes se encuentra un trabajo realizado en España (Zorrilla et al., 2021) en el que participaron 177 estudiantes de tercero a sexto grado de primaria, de entre 8 y 12 años. El estudio se llevó a cabo con la intención de analizar cómo es que los participantes resolvían problemas realistas de división-medida y división-partitiva con resto. El análisis de los resultados arrojó que, a partir del tercer curso el algoritmo no es la única estrategia, pero sí la más utilizada por los estudiantes. También mostró los siguientes procedimientos como otras estrategias correctas utilizadas por los niños: la estrategia gráfica, la combinación de dos estrategias (el algoritmo y estrategia gráfica), sumas-restas sucesivas, regla de tres y hechos numéricos.

Recientemente Pacheco et al. (2023) publicaron un estudio que se enfoca en el análisis de las estrategias que estudiantes mexicanos de cuarto grado utilizan cuando resuelven e interpretan el resultado de problemas no rutinarios, específicamente de división medida y división partitiva con resto. Los investigadores presentaron el análisis de sus resultados en términos de dos situaciones: el carácter realista e irreal de las respuestas y las estrategias utilizadas por los estudiantes al resolver dos problemas del tipo Reajustar el Cociente Incrementándolo Parcialmente. Con respecto a la segunda situación, los resultados mostraron que los estudiantes dan una respuesta realista cuando utilizan estrategia gráfica combinada con el conteo.

Por otra parte, los resultados, producto de esas investigaciones, apoyados en otros estudios previos han mostrado que los estudiantes no poseen las mimas dificultades según el tipo de división con resto. Por ejemplo, Lago et al. (2008) dentro su estudio, llevado a cabo con 49 alumnos españoles de primer grado de secundaria, concluyeron que es más apropiado hablar de las dificultades de los problemas que implican Reajustar el Cociente Incrementándolo Parcialmente, que hablar de los problemas de división con resto en general. Ellos sostienen que, dentro de los problemas realistas, habitualmente, las situaciones en las que los alumnos logran alcanzar un mayor éxito son aquellas que implican un resto No divisible, un Resto Divisible o el Resultado es el Resto.

No obstante, Zorrilla et al. (2021) encontraron algo diferente a lo hallado por Lago et al. (2008), revelaron que los estudiantes de educación primaria tendían a resolver con más facilidad los problemas en los que el resto no se considera (siendo la solución el cociente no decimal), seguido de los problemas en los que la presencia del resto obliga a reconocer como solución el valor del cociente más una unidad y, por último, los problemas en los que el resultado es el cociente más la parte fraccionaria del resto.

1.2 Planteamiento del problema

En los párrafos anteriores de este trabajo quedó evidenciado que los problemas de división con resto han despertado y continúan despertando el interés de la comunidad científica. Esto se debe a que este tipo de problemas son considerados particularmente complejos por lo que merecen ser estudiados. Saiz (1994) señala que resolver problemas de división no es un asunto fácil, cuando se plantea una división dentro de un contexto para poder llegar a una respuesta correcta es necesario reflexionar en torno a las siguientes preguntas ¿El problema solicita un cociente entero o no?, ¿se debe continuar hasta obtener dos decimales?, ¿o tres?, ¿o más? ¿Es necesario analizar el resto? Y la respuesta, ¿es la misma si esta pregunta se plantea en la escuela o en la vida diaria?

Vale la pena centrar la atención en este tipo de investigaciones porque en nuestro país, al igual que en otros, son escasos los trabajos que se han realizado en torno a este tópico. Rodríguez et al. (2009) señalan que los estudios centrados en los problemas de división con resto son bastante escasos.

En México son pocos los estudios en los cuales a los alumnos se les ha permitido exponer libremente y sin miedo a equivocarse, las estrategias que utilizan al enfrentarse a este tipo de problemas. Dada esta situación, es imprescindible enfocar nuestra atención no sólo en las evidencias escritas de nuestros pequeños, sino también en lo que ellos tienen para decirnos.

Existe una situación que continúa preocupando a algunos investigadores (D´Amore, 2006; Lago et al., 2008; Pacheco et al., 2023; Rodríguez et al. 2009, Saiz, 1994). Ellos han encontrado que los estudiantes, a partir de tercer grado de educación primaria no tienen mayor problema en establecer que la división es el procedimiento de resolución correcta para este tipo de problemas y mucho menos tienen conflicto en ejecutarla. Sin embargo, sucede que tienden a responder incorrectamente.

Esta situación se adjudica a que los estudiantes no interpretan correctamente los resultados numéricos. Lago et al. (2008) mencionan tres posibles causas de este fenómeno: la primera de ellas hace referencia a que los estudiantes no aplican el conocimiento cotidiano a la hora de interpretar la respuesta. La segunda causa es que los estudiantes no ofrecen interpretación alguna del resultado y/o describen simplemente el procedimiento seguido para hallar la solución. Y la tercera es que ignoran el nivel de realismo permitido en sus interpretaciones dentro del contexto escolar.

En términos generales, otras posibles causas del fracaso de los estudiantes al resolver problemas matemáticos, radica en que muchos escolares, inmediatamente después de planteado el problema comienzan a hacer operaciones que reflejan un insuficiente análisis. En ocasiones el escolar, de forma precipitada, ejecuta una serie de pasos organizados a los que otorga prioridad, olvidando lo esencial para el éxito en la actividad: un proceso de reflexión activa, consciente acerca del problema y las posibilidades para su resolución (Labarrete, 1995).

Dichas dificultades están relacionadas en algunos casos con la falta de asimilación de contenidos propios de los diferentes bloques del área; en otras ocasiones se basan en la comprensión lectora, en el uso del lenguaje o en el desconocimiento de conceptos propios de otras disciplinas que intervienen en la situación planteada. Comprender el enunciado de un problema es fundamental para su solución, ya que esto implica hacerse una película mental, recordar los datos y relacionarlos con la idea principal.

Otras explicaciones que se dan con respecto a las posibles causas del fracaso de los estudiantes cuando estos intentan resolver algún problema matemático van más allá de la comprensión lectora, el uso del lenguaje o la asimilación de determinados conceptos. D´Amore (2006) utiliza la idea del contrato didáctico, propuesta por Guy Brousseau en los años 70 para hacer referencia al conjunto de comportamientos específicos del maestro que son esperados por el alumno, y el conjunto de comportamientos del alumno que son esperados por el maestro. Dos de las cláusulas que se mencionan dentro del contrato didáctico son la edad del capitán y la delega formar, estas dos clausulas describen dos conductas particulares de los estudiantes cuando se enfrentan a la resolución de un problema matemático y explican el por qué los resolutores responden incorrectamente.

Los términos edad del capitán son empleados para señalar el comportamiento de aquel estudiante que al calcular la respuesta de un problema tiende a utilizar una parte o la totalidad de los números que se han proporcionado, aun cuando el problema no tenga una solución numérica. Esta cláusula del contrato didáctico también ha sido descrita como el comportamiento específico de aquellos niños que al resolver un problema ni siquiera leen el texto. Solamente se limitan a recórrelo rápidamente, se concentran únicamente en los datos numéricos y por ende sólo buscan intuir el tipo de operación necesaria, ya que, para ellos, lo más importante no es entender, sino resolver el planteamiento (D´Amore, 2014).

La delega formal es una cláusula más del contrato didáctico. Utilizada por los investigadores para dar otra posible explicación del fracaso de los estudiantes al resolver el problema matemático. Por medio de ella se tratan de explicar el pensamiento del alumno:

> ¨Resolver un problema quiere decir leer el texto y buscar la operación que lo resuelve usando los números dados en él. Una vez que los estudiantes transformen fundamentalmente el texto a un lenguaje aritmético o algebraico, su tarea intelectual se acabó, no necesitan ya de ulteriores controles. Delegan formalmente la operación: ejecutando el algoritmo y lo que encuentren al final es el resultado, es decir la solución del problema¨ (D´Amore et al., 2006, p. 301).

1.3 Pregunta de investigación

> ¨Hacer preguntas es una actividad específicamente humana. A lo largo de la historia el hombre ha sido siempre un ser preocupado por entender el mundo que lo rodea, por penetrar en sus relaciones y leyes, por orientarse hacia el futuro y descubrir el posible sentido de las cosas que existen a su alrededor, buscando la respuesta a sus interrogantes¨ (Arnal et al., 1992, p. 2).

Cualquier pregunta ya sea del tipo abierta o cerrada se formula con la intención de recabar información, de ahí que los enunciados interrogativos sean considerados la base para lograr conocimientos nuevos. De acuerdo con Freire (2013) ¨Todo conocimiento comienza por una pregunta. Sólo a partir de preguntas se busca respuesta y no al revés¨ (p. 69).

Dentro de cualquier estudio la pregunta de investigación funge uno de los papeles más importantes, pues es la que guía la selección del tema, la revisión de la literatura, la recopilación y el análisis e interpretación de los datos.

Para que una pregunta pueda considerarse una buena pregunta de investigación, esta debe ser relevante y significativa para el campo de estudio, y tener el potencial para contribuir al conocimiento existente, además, debe ser los suficientemente amplia como para permitir una exploración profunda del tema, pero al mismo tiempo lo suficientemente estrecha como para mantener el enfoque del estudio. Fraenkel et al. (2011) señalan que una buena pregunta de investigación se caracteriza por ser factible, clara, significativa y ética, es decir, se puede investigar con los recursos disponibles, asegura que el mensaje que va ser recibido por el lector es el indicado por el remitente, vale la pena para ser investigada y sobre todo garantiza que no implicará daño físico o psicológico a los seres humanos, entorno natural y social del que forme parte.

Las siguientes interrogantes se estructuraron teniendo como argumento la problemática de investigación y las cuatro características previamente descritas.

1.3.1 Pregunta general

¿Cuáles son las estrategias que estudiantes de quinto grado utilizan al resolver problemas de división partitiva con resto?

1.3.2 Preguntas específicas

1. ¿Cuáles son las estrategias que estudiantes de quinto grado utilizan al resolver problemas de división partitiva con resto del Tipo Reajustar el Cociente Incrementándolo Parcialmente?
2. ¿Cuáles son las estrategias que estudiantes de quinto grado utilizan al resolver problemas de división partitiva con resto del Tipo Resto No Divisible?
3. ¿Cuáles son las estrategias que estudiantes de quinto grado utilizan al resolver problemas de división partitiva con resto del Tipo Resto Divisible?
4. ¿Cuáles son las estrategias que estudiantes de quinto grado utilizan al resolver problemas de división partitiva con resto del Tipo Resultado es el Resto?

1.4 Objetivo

Los objetivos son una parte esencial dentro de un proceso de investigación. La redacción de estos enunciados nos ayuda a definir los alcances de nuestro trabajo, nos proporciona una dirección clara a nuestro estudio, nos ayuda a minimizar cualquier desviación del tema y, sobre todo, en este caso ayuda a nuestros lectores a comprender la intención y el contenido de la tesis. Sánchez (2006) señala que la elaboración de los objetivos es un elemento central en el diseño de una investigación, a través de él o ellos podemos expresar lo que pretendemos lograr, pues son el reflejo de la o las inquietudes que dan origen a un determinado proyecto.

Redactar los objetivos no siempre es una tarea sencilla. Cuando no se cuenta con experiencias previas como investigador puede ser difícil establecer objetivos realistas y alcanzables. Una forma de facilitar la redacción de los objetivos es la que está dada en términos de las siguientes consideraciones: deben ser claros, específicos, medibles, apropiados y realista (Hernández, 2014). A ello le agregamos que deben ser coherentes con el enfoque del estudio y por supuesto que deben estar en línea con la o las preguntas de investigación.

Al redactar los objetivos es preciso utilizar al inicio del enunciado algún verbo de acción. Estas palabras son un referente clave del grado de complejidad de la tarea a realizar para poder lograrlo. No es lo mismo enfocar nuestro trabajo a explorar, describir, comparar o analizar que, a proponer, modificar, confirmar o evaluar. Bloom (Citado en Sánchez, 2006) propone un listado de verbos que consideran distintos niveles de pensamiento, los cuales pueden utilizarse para su redacción. La lista de verbos propuesta por este autor se divide en seis categorías que van desde recordar hasta crear.

1.4.1 Objetivo general

Analizar las estrategias que siete estudiantes de quinto grado de educación primaria utilizan al enfrentarse a cuatro problemas de división partitiva con resto.

1.4.2 Objetivo específico

Revelar las estrategias que estudiantes de quinto grado de educación primaria utilizan al resolver un problema de cada tipo de problemas de división partitiva con resto.

Evidentemente el grado de complejidad de este estudio no es muy elevando, sin embargo, es importante mencionar que dentro de este trabajo se observan, se describen, se descubren, se obtiene información y se examinan diferentes partes de un todo, en este caso las estrategias que los estudiantes de quinto grado utilizan al resolver problemas de división partitiva con resto.

1.5 Justificación

Hay mucha diferencia entre hablar de una enseñanza que apunte a la adquisición de saberes institucionalizados y una enseñanza que implique el reconocimiento de situaciones y de significados de conceptos. Saiz (1994) menciona que el primer tipo de enseñanza es fácil de organizar en el salón de clase, podemos identificar, describir y verificar su adquisición de forma simple. Por el contrario, al hablar de reconocimiento de situaciones y de significados de conceptos se entra en un terreno mucho más ambiguo y difícil de identificar. ¨Para evaluar si los alumnos saben dividir es suficiente plantearles varias cuentas y verificar sus resultados. Además, se trata de técnicas conocidas por la sociedad. Los padres también pueden saber si sus hijos aprendieron a dividir o no¨ (Saiz, 1994, p. 8).

Las aspiraciones que tienen todos los agentes que participan dentro del proceso de enseñanza aprendizaje, apuntan hacia una enseñanza que permita lograr en los alumnos no sólo el conocimiento de los saberes institucionales, sino también la comprensión. Sin embargo, ante la falta de una solución evidente, el aprendizaje de los algoritmos termina por eliminar la búsqueda de la comprensión.

Por lo anterior, la representación de la división no puede reducirse únicamente al conocimiento de reglas y operaciones, especialmente porque la expresión dividir un número entre otro, resulta sumamente vaga, en el entendido de que dicho algoritmo puede hacer aparecer diferentes tipos de cocientes (Saiz,1994).

Dentro de la literatura, encontramos a la resolución de problemas matemáticos como una propuesta prometedora, orientada a alcanzar desde la clase, el pensamiento reflexivo del alumno y su implicación en el acto de aprender. Dicha línea de investigación ha sido valorada como la primera área o línea de investigación matemática. Durante los últimos 30 años se ha considerado una actividad importante dentro del aprendizaje de las matemáticas y se ha sugerido que sea uno de los ejes fundamentales en el estudio de esta disciplina. Este tema ha atraído y continúa atrayendo la atención de muchos investigadores. Lo cual, ha permitido un gran cúmulo de estudios en el mundo.

La resolución de problemas es la forma más eficaz para el desarrollo de la actividad matemática de los estudiantes. Este tipo de prácticas escolares inciden favorablemente en el aprendizaje de los alumnos. Especialmente cuando vemos a estas tareas educativas como una oportunidad para permitirles a los niños equivocarse y sobre todo explorar diversas vías de solución (D´Amore 2006).

Es a los profesores a quienes nos toca ser muy cuidadosos con respecto a las actividades que proponemos dentro de las aulas, si son repetitivas, poco interesantes o de aplicación mecánica, pueden provocar aburrimiento y rechazo por parte de nuestros estudiante, por el contrario, si los invitamos a resolver actividades que los lleven a sumergirse en su interior para navegar entre los conocimientos matemáticos que posee y rescaten de ellos los que pueden serle útiles para aplicar en el proceso de resolución, tal vez estemos contribuyendo en sus experiencias agradables con las matemáticas.

> Sí un maestro de matemáticas dedica sus horas de clases para que los estudiantes únicamente realicen cálculos, terminará por ahogar su interés, detener su desarrollo mental y desperdiciará la oportunidad que se le presenta. En cambio, si despierta la curiosidad de los estudiantes proponiendo problemas de dificultad proporcional a los conocimientos de los escolares y los ayuda a resolver las cuestiones propuestas con preguntas oportunas, el sabrá inspirar en ellos el gusto por el razonamiento original (D´Amore, 2006, p. 298).

Es más productivo proponerles a los estudiantes la resolución problemas matemáticos. Estos exigen por parte del alumno un análisis detallado para definir la incógnita, identificar los datos precisos y decidir las estrategias necesarias para llegar a su resolución. Aunado a ello, hay que permitir que los niños prueben sus propios procedimientos, sus propias soluciones. Particularmente porque la utilización un procedimiento en lugar de otro, dependen del significado que el alumno atribuya a la situación que se le propone.

Es preciso evitar el discurso del maestro que frecuentemente va acompañado de las siguientes interrogantes: ¿Qué operación hicieron?, ¿Qué operación habría que hacer? O Acuérdate que ya hicimos problemas como éste. Pues este tipo de discurso no hace otra cosa más que imponer el método de solución.

CAPÍTULO 2

MARCO CONCEPTUAL

2.1 La división

La división es considerada una de las cuatro operaciones básicas. Suele ser representada por medio de la galera o de alguno de los siguientes símbolos matemáticos: ÷, /, :. Esta operación matemática se utiliza para repartir un todo en partes iguales.

Los elementos que componen una división son: dividendo, número que está siendo dividido; divisor, el número por el cual el dividendo será dividido; cociente, cantidad de veces que el divisor cabe en el dividendo; y el resto, número que al ser menor que el divisor no se puede volver a dividir.

> La división es una operación aritmética en la cual el resultado es un par ordenado de números que indica el número de veces que es posible repartir una cantidad denominada dividendo en otra llamada divisor. Al establecerse esta relación de términos se transforman las cantidades involucradas para obtener dos cantidades más y en las cuales una de éstas representa el número de elementos que se distribuyen equitativamente en cada reparto y se conoce con el nombre de cociente. En algunas situaciones que se presentan bajo otras condiciones, quedan elementos sin repartir, porque no son suficientes para completar otro reparto y esta última cantidad se denomina residuo (Peñalosa, 2009, p. 81).

Comúnmente esta operación es conocida como la operación contraria a la multiplicación, ya que, estas dos operaciones están relacionadas de manera inversa. Si se conoce el resultado de una multiplicación (en términos de una división el dividendo) y uno de los factores (en términos de una división el divisor), se puede encontrar el otro factor (en términos de una división el cociente) pensando en esto como ¿Cuál es el número que multiplicado por el factor (divisor) da como resultado el producto (el dividendo)? Por ejemplo, si se quiere dividir $12 \div 3$, se puede pensar en esta operación como ¿Cuál es el número que multiplicado por 3 da como resultado 12? En este caso el número es 4, ya que 4 multiplicado por 3 es igual a 12, por lo tanto 12 dividido entre 3 es igual a 4.

La resta es otra forma de entender a la división, probablemente menos conocida que las anteriores. Se puede entender de esta manera porque es una forma de encontrar cuántas veces un número puede ser restado de otro hasta que el resultado sea cero o menor que el divisor. Según Peñalosa (2009), ¨Cuando se presenta un número llamado A y se pide que sea repartido entre un número B, significa las veces que puede ser restado B de A, encontrándose así un tercer elemento denominado C que determina el número de veces que se restó B de A¨ (p.81). Por ejemplo, desde esta perspectiva al efectuar la división 12 ÷ 4, se puede pensar como una resta repetida de 4 de 12 hasta que el resultado sea cero. En un primer momento se resta 4 a 12 y da como resultado 8, en un segundo momento se resta 4 a 8 y da como resultado 4, finalmente en un tercer momento se resta 4 a 4 y da como resultado 0. Los tres momentos indican el número de veces que el divisor pudo ser restado del dividendo, en otras palabras, el número tres representa el cociente de la división.

En numerosos estudios se reconoce que existen dos significados del concepto de la división: El modelo partitivo y el modelo distributivo (Borba y Selva, 2006; Downton, 2008; Ivars y Fernandez, 2016; Lago et. al, 1999; Lago et al., 2009). Las incógnitas a las que se refiere cada modelo respectivamente son el valor unitario y el número de grupos que se pueden formar de una determinada medida. Lago et al. (1999) mencionan que los problemas que envuelven el modelo división partitiva describen el reparto de un objeto o colección de objetos en subcolecciones o fragmentos, siendo el dividendo el dato que representa el tamaño de cada objeto o el número de colecciones, el divisor el número de fragmentos o subcolecciones y el cociente el tamaño de cada fragmento o subcolección.

En cambio, dentro de los problemas de división distributiva se conoce el número de subconjuntos y se desconoce el tamaño del subconjunto. Dicho modelo de la división se asociado con la idea de que un objeto o colección de objetos son partidos en subcolecciones o fragmentos, siendo el dividendo el tamaño de cada objeto o el número de colecciones, el divisor el número de fragmentos o subcolecciones y el cociente el tamaño de cada fragmento o subcolecciones (Lago et al., 1999).

En algunas situaciones de aprendizaje la división puede ser presentada a los alumnos como acción de compartir y en algunas otras como acción de medir. De Lima y Carvalho (2013) señalan que esta operación envuelve dos ideas: la partitiva y la distributiva. El primer modelo se representa bajo la idea de dividir *x* entre *y* en partes iguales, mientras que el segundo hace referencia a la idea de cuantos *y* hay en *x*. En otras palabras, el primer modelo proporciona información sobre el número de elementos en un conjunto que debe ser distribuidos de igual forma en un número predeterminado de partes, debiéndose calcular el número de elementos en cada parte, en cambio el segundo modelo ofrece información sobre el conjunto conocido que debe ser dividido en partes de magnitud previamente establecida, debiéndose calcular el número de partes que serán obtenidas.

Las definiciones suelen ser comprendidas de una mejor manera cuando van acompañadas de algún ejemplo, ya que proporcionan un contexto más claro y específico. Ivars y Fernandez (2016) utilizan los siguientes problemas para ejemplificar el modelo de división partitiva y el modelo de división medida. Ferran compra 4 fichas para la feria que le cuestan 8 euros. Si todas tienen el mismo precio ¿Cuánto le ha costado cada ficha?; Julia ha puesto 20 lápices de las bandejas dentro de unos botes. Si ha puesto 4 lápices en cada bote ¿Cuántos botes ha utilizado?

La respuesta al primer problema requiere de calcular el valor unitario, específicamente el costo de una ficha. Dentro del contexto del problema se mencionan 8 euros que representan el número total de elementos que debe distribuirse por igual en un número predeterminado de partes, en este caso entre 4 fichas, debiéndose calcular el número de elementos en cada parte, es decir, el precio de cada ficha. En cambio, el segundo problema solicita calcular cuántas veces una cantidad dada es contenida en otra, la información que proporciona describe al conjunto conocido, los 20 lápices, que debe dividirse en partes de magnitud previamente establecida, 4 lápices en cada bote, debiéndose calcular el número de subcolecciones, en este caso el número de botes necesarios para acomodar todos los lápices.

2.2 Problemas rutinarios y no rutinarios de división

Dentro de la literatura se exponen diversas definiciones respecto al término problema. Aunque cada una de ellas alude a diferentes puntos de vista es importante mencionar que presentan elementos comunes o al menos no contradictorios. En general, todas coinciden en que un problema es una situación que requiere una solución, y que, si bien no es imposible de resolver, si resulta desafiante para aquella persona que la enfrenta, especialmente por el grado de dificultad apreciable en ella. Según Polya (1965), ¨Un problema es un fin que se desea alcanzar¨ (p. 153). Por su parte Díaz y Poblete (2001) mencionan que un problema representa una situación en donde el estudiante intenta responder una pregunta que se ha formulado o intenta realizar una tarea determinada, y para responderla es realmente necesario buscar un medio, por lo que debe recurrir a la matemática o a las habilidades frecuentemente utilizadas para lograrlo.

Un problema le exige al resolutor sumergirse en su interior para navegar entre los conocimientos matemáticos que posee y rescatar de entre ellos los que pueden serle útiles para aplicar en el proceso de resolución. Puede servirse de experiencias anteriores que hagan referencia a situaciones parecidas, para rememorar cuál fue el camino o vía seguida, en caso de poder volver a utilizarlos en esta nueva situación.

En algunas investigaciones se reportan dos tipos de problemas: los rutinarios y los no rutinarios. Rodríguez et al. (2009) definen a los primeros como aquellos que pueden ser representados y resueltos directamente por una operación aritmética. Y refieren a los segundos, como aquellos problemas en los que el modelo matemático requiere ser refinado porque el resultado que produce la operación aritmética debe considerarse una aproximación o debe ajustarse dependiendo de la situación descrita en el problema.

Las ideas expuestas en el párrafo anterior comparten similitud con las definiciones que aparecen en algunos libros de didáctica de la matemática, respecto a lo que es un ejercicio y lo que es un problema. D´Amore (2006) señala que se tiene un ejercicio cuando la resolución prevé que se tengan que utilizar reglas y procedimientos ya aprehendidos. Por el contrario, manifiesta que los problemas son aquellas situaciones que no se resuelven con la aplicación de una regla o receta conocida a priori.

En varios trabajos de investigación aparece el siguiente célebre problema de los soldados y los autobuses, ¨Un autobús del ejercito transporta 36 soldados. Si se tiene que llevar a 1128 soldados al campo de entrenamiento ¿Cuántos autobuses son necesarios? ¨ (Schoenfeld, 1987, p. 196). Algunos investigadores han utilizado este problema para explicar el fenómeno de la delega formal y algunos otros para explicar la diferencia entre un problema rutinario de división y un problema no rutinario de división. Lago et al. (2008) plantean este famoso problema de dos formas diferentes y las utiliza para explicar la segunda situación. Un autobús militar puede transportar 36 soldados. Si hay que trasladar a 1116 soldados al centro de entrenamiento ¿Cuántos autobuses se necesitaran?; Un autobús militar puede transportar 36 soldados. Si hay que trasladar a 1128 soldados al centro de entrenamiento ¿Cuántos autobuses se necesitaran?

Es evidente que ambos problemas se pueden resolver utilizando una división. La diferencia radica en que la respuesta al segundo problema no depende solamente de leer el texto y de decidir que la operación a efectuar es la división y que los números con los que debe operar son 1128 ÷ 36. La solución al problema va más allá de transcribir el resultado tal cual es arrojado por el algoritmo, requiere de interpretar el resultado numérico en términos de la situación descrita. En este caso, la respuesta correcta al problema dos, no sería 31.3 autobuses.

Evidentemente existe una gran diferencia entre un problema rutinario y uno no rutinario o entre un ejercicio y un problema. Sin embargo, es importante reconocer que lo que para un individuo puede ser un ejercicio, para otro puede no serlo porque está fuera de su alcance o lo que para un estudiante puede representar un problema, para otro puede no serlo porque su nivel de conocimiento es superior al planteamiento (Parra, 1990).

2.3 Cuatro tipos de problemas no rutinarios de división

Los problemas de división con resto forman parte de la categoría de problemas no rutinarios. Según Pacheco et. al (2023) ¨Este tipo de planteamientos como aquellos problemas en los que el dividendo y el divisor son números enteros y la división arroja un resultado no entero¨ (p.156). Dentro de esta categoría de problemas podemos encontrar otras categorías más específicas. Zorrilla et al. (2021), señalan que dentro de esta categoría de problemas podemos encontrar tres subcategorías de contextos diferentes en los que la consideración del resto desempeña un papel importante: Tipo 1, Tipo 2 y Tipo 3. Por su parte Lago et al. (2008) reconocen que en esta categoría de problemas podemos encontrar cuatro tipos de situaciones diferentes en las que la consideración del resto desempeña un papel importante: Reajustar el Cociente Incrementándolo Parcialmente (RCIP), Resto no divisible (RND), Resto Divisible (RD) y Resultado es el Resto (RR). La tabla 1 describe y ejemplifica cada una de estas situaciones.

Tabla 1. *Situaciones en las que considerar el resto desempeña un papel importante.*

<table>
<tr><th>Situación</th><th>Definición</th><th>Ejemplo</th></tr>
<tr><td>Tipo 1</td><td>Situaciones en las que la presencia del resto obliga a reconocer como solución el valor del cociente más una unidad.</td><td rowspan="2">100 niños son transportados en minibuses a un campamento de verano en la playa. Cada minibús puede transportar un máximo de 8 niños. ¿Cuántos minibuses se necesitan?</td></tr>
<tr><td>Reajustar el Cociente Incrementándolo Parcialmente (RCIP)</td><td>Problema de cociente incrementado.</td></tr>
</table>

Tipo 2	Situación en las que el resto no es considerado, siendo la solución el cociente no decimal	Un abuelo regala a sus nietos una caja con 80 globos. Si los comparten por igual ¿Cuántos globos obtiene cada nieto?
Resto no divisible (RND)	Problema de solo cociente	
Tipo 3	Situaciones en las que el resultado es el cociente más la parte fraccionaria del resto.	Un sastre vendió una gran pieza de tela con una longitud de 50 metros. Quiere cortarla en 4 piezas de la misma longitud. ¿Cuánto medirá cada pieza?
Resto Divisible (RD)	Este tipo de problemas conllevan la posibilidad de realizar una división exacta mediante un cociente decimal.	
Resultado es el Resto (RR)	Problemas en los que solo el resto es considerado como solución.	Es la fiesta de mi colegio y los 35 alumnos de segundo grado de secundaria han celebrado una olimpiada deportiva con 4 equipos. Si todos los equipos tienen el mismo número de alumnos ¿Cuántos equipos podrán tener suplentes?

Fuente: Elaboración propia basada en información de Zorrilla et al. (2021) y Lago et al. (2008).

2.4 Estrategias

La palabra estrategia tiene su origen en la milicia. Según la RAE (2022) Esta palabra proveniente del latín strategĭa 'provincia bajo el mando de un general', y esta a su vez del gr. στρατηγία stratēgía 'oficio del general', der. de στρατηγός stratēgós 'general', significa el arte de dirigir las operaciones militares, el arte de trazar para dirigir un asunto o el conjunto de las reglas que buscan una decisión óptima en cada momento.

Actualmente esta palabra se ha convertido en una aceptación de uso generalizado. Por ejemplo, si a la palabra estrategia la acompañamos de las palabras ¨de solución de problemas¨, podríamos definir a esta idea como el conjunto de acciones que un estudiante lleva a cabo con la intención de alcanzar una meta, responder una pregunta, enfrentar una situación o llegar a una solución.

Algunos trabajos de investigación reportados dentro de la literatura han centrado sus análisis en las formas, acciones o procedimientos que los estudiantes de diferentes grados de educación básica utilizan al resolver problemas de división. Los datos recabados en estos estudios han dado pauta para establecer algunas categorías que sirven como marco de referencia para poder identificar estos procedimientos en algunos otros estudios. Un ejemplo de ello es el proyecto realizado por Ivars y Fernández (2016), quienes analizaron las respuestas que 273 estudiantes españoles dieron a ocho problemas de estructura multiplicativa considerando el éxito en la revolución y las estrategias utilizadas. Los participantes revelaron cinco estrategias correctas y cinco estrategias incorrectas. La tabla 2 y la tabla 3 describe cada una de las categorías reveladas en el estudio, respectivamente.

Tabla 2. *Estrategias correctas reveladas por alumno españoles al resolver problemas de estructura multiplicativa.*

Categoría	Descripción de la estrategia
Modelación-gráfica	Los alumnos representan gráficamente las cantidades y la relación entre las mismas.
Conteo	El estudiante adopta el conteo a saldos o el conteo por ensayo y error.
Uso de hechos numéricos	Implica el uso de las tablas de multiplicar.
Uso del algoritmo	Los estudiantes utilizan el algoritmo de las operaciones de multiplicar o dividir.
Multiplicación como suma de sumandos iguales	El estudiante suma un determinado número tantas veces sea necesario.

Fuente: Elaboración propia basada en información de Ivars y Fernández (2016).

Tabla 3. *Estrategias incorrectas reveladas por alumno españoles al resolver problemas de estructura multiplicativa.*

Categoría	Descripción de la estrategia
Uso del algoritmo inverso	Se basa en usar la operación inversa a la correcta para ofrecer una solución.
Aditiva	Hacen sumas o restas con los datos que proporciona el enunciado.
Uso de todos los números del enunciado	Se utilizan todos los números del enunciado, aunque sean datos o caracteres numéricos.
Combinación 1 a 1	Se combinan elementos 1 a 1, sin tener en cuenta que pueden hacerse repeticiones.
Otras	Respuestas sin sentido o respuestas en blanco.

Fuente: Elaboración propia basada en información de Ivars y Fernández (2016).

Márquez et al. (2019) involucró a 100 estudiantes de séptimo básico en Chile y tuvo como objetivo caracterizar las estrategias que los participantes presentaban cuando resolvían problemas de estructura multiplicativa, específicamente problemas de división medida. A través de este estudio, los investigadores lograron clasificar las respuestas dadas por los participantes en las siguientes ocho categorías que aparecen en la Tabla 4.

Tabla 4. *Estrategias utilizadas por alumnos chilenos al resolver problemas de división medida.*

Categoría	Descripción de la estrategia
División (D)	Consiste en utilizar el algoritmo de la división para la resolución del problema.
Modelación-Agrupamiento (MA)	Consiste en representar gráficamente las cantidades y agruparlas hasta llegar al total.
Multiplicación (M)	Consiste en utilizar la multiplicación para la resolución del problema.
Suma-Resta Repetida (SRR)	Consiste en realizar sumas o restas repetidas hasta llegar al total.
Conteo a Saltos (CS)	Consiste en contar a saltos teniendo en cuenta el número de elementos de un grupo o conjunto.
Regla de tres (RT)	Consiste en relacionar los datos de manera multiplicativa igualando los productos cruzados.
Uso de todos los datos (UTD)	Consiste en utilizar todos los datos del enunciado en diversas operaciones y dar una respuesta sin sentido.
Combinación de estrategias (CE)	Consiste en utilizar dos estrategias; en particular, los autores mencionan que en su estudio lograron identificar casos en donde los estudiantes realizaban un dibujo como apoyo (Modelación-agrupamiento) y, además, se aplicaba un algoritmo (multiplicación o división).

Fuente: Elaboración propia basada en información de Márquez et al (2019).

Por su parte, Zorrilla et al (2021) realizaron una investigación con 177 estudiantes españoles de 3° a 6° grado de educación primaria. A los participantes les propusieron resolver un cuestionario conformado por seis problemas realistas de división con resto: dos de ellos de división medida y cuatro de división partitiva. Parte de su estudio se centró en el análisis de las estrategias que utilizaron los participantes a lo largo de los grados. Los resultados revelaron seis estrategias que se exponen en la tabla 5.

Tabla 5. *Estrategias utilizadas por alumnos españoles al resolver problemas de división medida y división partitiva*

Categoría	Descripción de la estrategia
Uso del algoritmo	Respuestas en las que se resuelve el problema mediante el algoritmo de la división
Estrategia gráfica	Respuesta que ofrece una solución gráfica, el estudiante se apoya de dibujo para realizar el reparto.
Uso del algoritmo y la estrategia gráfica	Respuestas que implica la combinación de la estrategia uno y dos, incluye el algoritmo de la división y una solución gráfica.
Uso de sumas-restas sucesivas.	Uso iterativo de la sumas o restas.
Regla de tres	Respuestas que relacionan los datos de forma multiplicativa igualando los productos cruzados
Hechos numéricos	Uso del conocimiento de las tablas de multiplicar

Fuente: Elaboración propia basada en información de Zorrilla et al (2021).

CAPÍTULO 3

DISEÑO METODOLÓGICO

La persona que esté comenzando o que haya comenzado una investigación, a menudo o lo más probable es que tendrá dificultades para lograr el diseño correcto de su proyecto. Jonker y Pennink (2009) señalan que esto se debe especialmente a que, en un inicio, uno no cuenta con una estructura, ni con un conocimiento sólido. Por su puesto estas dificultades pueden ser comunes y pueden superarse con una planificación cuidadosa.

Un proyecto de investigación conlleva una gran responsabilidad, más aún, sabiendo que la intención de este tipo de trabajos es generar conocimiento nuevo y contribuir en el avance de la ciencia. Por tal motivo, los investigadores que comenzamos con algún tipo de estudio adquirimos el compromiso de garantizar que nuestro trabajo sea ético, relevante y que cumpla con los estándares especifico. La situación más complicada dentro de todo ese proceso es que recae exclusivamente en el responsable de la investigación, al final de cuentas no hay o habrá otra persona más que él, quien dará forma y guiará todo ese proceso de manipulación basado en sus nociones, teorías, habilidades y sus posiciones con respecto a los resultados que está buscando.

Por lo anterior, la esencia de una investigación sólida es, sigue y seguirá siendo la toma de decisiones conscientes, el rigor metodológico, la relevancia, la originalidad, la fundamentación teórica, la calidad de los datos y la interpretación de los mismos. Ciertamente, estas situaciones no representan una tarea sencilla, pues se traducen en nada más y nada menos que en la reflexión constante sobre qué pasos dar dentro del proyecto de investigación, ya que entendemos a este como un proceso dinámico que a menudo implica ajustes y cambios a medida que se avanza en el estudio.

La pirámide de investigación es una representación gráfica que muestra y organiza los diferentes momentos de un proceso de indagación. Esta propuesta es una herramienta y una guía útil para aprender a estructurar conscientemente nuestro enfoque del estudio. Según Jonker y Pennink (2009):

> Esta pirámide se compone de cuatro niveles de acción: Paradigma, cómo el investigador ve la realidad; metodología, forma de realizar la investigación que se adapta al paradigma de investigación; métodos, pasos de acción específicos que deben ejercitarse en un cierto orden

estricto; y las técnicas de investigación, instrumentos o herramientas prácticas para generar, recopilar y analizar datos (p. 23).

3.1 Paradigma de investigación

De acuerdo con la pirámide de investigación, un primer e importante momento dentro del proceso de un estudio es establecer el paradigma de indagación, es decir, reflexionar en torno al conjunto de creencias, supuestos y valores que uno posee, pues esto representan la forma particular de ver el mundo y de interpretar la realidad.

La actitud de investigación básica que uno tiene influye directamente en la forma en que se plantea la o las preguntas de investigación, en la manera en que se recopilan, se analizan e interpretan los datos, así como, en la forma en que se comunican los hallazgos. De ahí la importancia de definir en un principio el paradigma de investigación y seguirlo con el comportamiento correspondiente. Jonker y Pennink (2009) señalan que un paradigma de investigación refiere a la forma implícita en que un investigador aborda la realidad y su investigación, puede denominarse su enfoque básico, en donde las premisas y suposiciones sobre cómo se puede conocer la realidad caracterizan esta actitud básica. Por su parte Flores (2004), señala que un paradigma engloba un sistema de creencias sobre la realidad, la visión del mundo, el lugar que el individuo ocupa en él y las diversas relaciones que esa postura permitiría con lo que se considera existente. Representan la cosmovisión que cada uno tiene, de su naturaleza y del lugar que cada sujeto ocupa en ese mundo.

Las razones de que existan distintos tipos de paradigmas están en que diferentes investigadores, disciplinas y culturas tienen diferentes formas de ver y comprender el mundo. A pesar de ello es importante mencionar que cada paradigma proporciona una perspectiva única y valiosa. Los paradigmas pueden, por lo tanto, considerarse herramientas mentales muy útiles, marcos de referencia que ayudan a las personas dentro de un grupo en particular a comunicarse y entenderse entre sí. Santamaría (2013) señala que los tres paradigmas más destacados dentro de la investigación educativa son: empírico-analítico, interpretativo- cualitativo y socio-crítico, cada uno de ellos con características que lo hacen diferente al resto.

En este trabajo se adopta un enfoque interpretativo-cualitativo. La intención de una investigación que asume este paradigma es comprender los significados y las perspectivas de los participantes en el estudio, y no simplemente medir o cuantificar los fenómenos. Se suelen utilizar métodos de recolección de datos como las entrevistas y las observaciones. Santamaria (2013) menciona que la finalidad de cualquier investigación que asuma un paradigma interpretativo-cualitativo es la de comprender y describir la realidad a través del análisis profundo de las percepciones e interpretaciones de los sujetos intervinientes.

3.2 Método

El enfoque cuantitativo se centra en la medición y cuantificación de los datos, en tanto el enfoque cualitativo se basa en la recolección y análisis de datos descriptivos y no numéricos. Stake (1998) señala que los investigadores cuantitativos perciben lo que ocurre en términos de variables descriptivas, representan los acontecimientos con escalas y mediciones, en cambio los investigadores cualitativos perciben lo que ocurre en clave de episodios o testimonios, representan los acontecimientos con su propia interpretación directa y con sus historias.

En otras palabras, los investigadores cuyo enfoque es del tipo cuantitativo, destacan la explicación, el control y buscan establecer generalizaciones, por el contrario, los investigadores cuyo enfoque es cualitativo investigan para impulsar la comprensión. En lo que respecta al segundo enfoque, que es el que se asume dentro de esta investigación, Hernández (2014) menciona que la recolección de datos, no se busca de forma estandarizada, ni efectuando una medición numérica, más bien, a través de esta acción se pretende obtener la perspectiva y puntos de vista de los participantes, sus emociones, prioridades, experiencias, significados, así como otros aspectos subjetivos. Según Stake (1998) ¨La investigación cualitativa intenta establecer una comprensión empática para el lector, mediante la descripción, a veces la descripción densa, transmitiendo al lector aquello que la experiencia misma transmite¨ (p. 43).

Algunos métodos que podemos encontrar dentro del enfoque cualitativo son la observación participante, los grupos focales, análisis de contenido y estudio de caso. Este último método fue el que se utilizó en este trabajo, el cual consiste en realizar una investigación en profundidad y detallada de un individuo, grupo o situación específica, es decir, por parte del investigador hay poco interés en generalizar sobre los sujetos; el mayor interés reside en el caso concreto. Según Stake (1998):

> El cometido real del estudio de casos es la particularización, no la generalización. Se toma un caso particular y se llega a conocerlo bien, y no principalmente para ver en qué se diferencia de los otros, sino para ver qué es, qué hace. Se destaca la unicidad, y esto implica el conocimiento de los otros casos de los que el caso en cuestión se diferencial pero la finalidad primera es la comprensión de este último (p. 20).

Existen algunas limitaciones y algunas bondades de utilizar este método. Stake (1998) señala por un lado que la mayoría de los científicos prefieren estudiar grupos de población más que la unidad de vidas individuales, debido a que el estudio de casos es una base pobre para poder generalizar, además de que muy pocas veces se llega a una comprensión enteramente nueva, por otra parte, él mismo autor reconocer que si bien, es posible que no se consideren generalizaciones las que se hacen sobre un caso o unos pocos caso, si es necesario denominarlas generalizaciones menores, situaciones que en algunas ocasiones pueden producir modificaciones válidas de las generalizaciones mayores debido a que la investigación se realiza en mayor profundidad y detalladamente.

3.3 Muestreo

Además de adoptar un paradigma y un método de investigación, otro aspecto importante que tenemos que considerar es la estrategia de muestreo, debemos establecer criterios claros y específicos para la selección de los individuos. Cohen et. al (2007) señalan que con frecuencia algunos factores como gastos, tiempo o accesibilidad pueden llegar a impedir que los investigadores logren obtener información de toda la población. En ese sentido, es preciso valerse de la recolección de datos a partir de un grupo más pequeño o un subconjunto de la población total, que sea representativo del total de la población bajo estudio.

Dentro de la literatura solemos encontrar afirmaciones como: una muestra demasiado pequeña puede no ser representativa del total de la población y una muestra demasiado grande puede ser costosa y requerir más tiempo y recursos de los disponibles. De ahí que a los investigadores novatos nos llene de incertidumbre la pregunta ¿Cuán grande o pequeña debe ser la muestra de nuestro estudio? Cohen et. al (2007) mencionan que una pregunta que a menudo nos atormenta a los investigadores novatos es cuán grande deben ser nuestra muestra para llevar a cabo la investigación, la respuesta que ellos dan a sus lectores es que no hay una respuesta clara para esta pregunta, argumentan que el tamaño correcto de la muestra depende del propósito del estudio y de la naturaleza de la población bajo escrutinio, es decir, que el tamaño de la muestra está determinado en cierta medida por el tipo de investigación.

Al realizar una investigación cuyo estilo es de encuesta lo más recomendable es establecer una muestra más grande, en contraste con una investigación cualitativa en la que es más probable que se establezca un tamaño de la muestra mucho más pequeña (Cohen et. al, 2007).

El muestreo es una técnica utilizada en investigación que consiste en seleccionar una muestra representativa de una población objeto, ya sea de manera aleatoria o sistemática. Cohen et. al (2007), señalan la existencia de dos métodos principales de muestreo: la muestra probabilística, conocida también como muestra aleatoria, y la muestra no probabilística conocida como muestra intencional.

La diferencia entre un tipo de muestreo y otro radica en que, dentro del primer tipo, cada miembro de la población en general tiene una igualdad de oportunidades para ser incluido dentro la muestra; la inclusión o exclusión de la muestra no es más que una cuestión del azar. En cambio, en el segundo tipo de muestreo algunos miembros de la población definitivamente serán incluidos y otros no, siendo el investigador el que influye directamente y a propósito en la selección de los participantes. En palabras de Cohen et. al (2007):

> En una muestra probabilística las posibilidades de miembros de la población en general que se seleccionan para la muestra son conocidas, mientras que en una muestra no probabilística las posibilidades de los miembros de la población más amplia seleccionada para la muestra son desconocidos (p.110).

Naturalmente, es preciso optar ya sea por la primera o por la segunda estrategia de muestreo. Algunas consideraciones para elegir la mejor opción radican en que el muestreo probabilístico es popular en los ensayos controlados aleatorios, se extrae al azar de una población más amplia, es útil si el investigador busca hacer generalizaciones. En cambio, una muestra no probabilística evita deliberadamente representar a la población más amplia; solo busca representar a un grupo en particular, una sección específica nombrada de la población más amplia, como una clase de estudiantes, un grupo de estudiantes que están tomando una clase particular o un grupo de maestros.

Dadas las características de la investigación y lo expuesto anteriormente, el tipo de muestra que se consideró pertinente para este estudio fue el método de muestreo no probabilístico, específicamente muestreo por conveniencia e intencional. Estos tipos de muestreo permiten seleccionar a las participantes tomando en cuenta la facilidad de acceso, disponibilidad y en función del juicio del investigador (Cohen et. al, 2007). Lo cual puede incluir a personas que cumplan ciertos criterios específicos, como por ejemplo la edad, el género, la ubicación geográfica, el desempeño escolar, y que estén disponibles en un momento o lugar determinado. Evidentemente este método de muestreo es útil cuando se busca una muestra especifica y que sea fácil de reclutar.

Actualmente soy el profesor responsable de un grupo de 24 alumnos que cursan el quinto grado de educación primaria en una escuela pública del estado de Morelos. Sus edades oscilan entre 10 y 11 años. Siete de los 24 alumnos fueron seleccionados para participar en esta investigación. Los criterios que se consideraron para elegir a los estudiantes fueron: la facilidad de acceso, la disponibilidad de los pequeños, su desempeño escolar, el gusto e interés por el estudio de las matemáticas y las referencias que dio la maestra que los tuvo a cargo durante del ciclo escolar anterior.

3.4 Técnicas e instrumentos.

Las técnicas y los instrumentos de recolección de datos son mecanismos y medios utilizados para recopilar información en una investigación, respectivamente. Es importante seleccionar la o las técnicas y el o los instrumentos que se ajuste a los objetivos y a la o las preguntas de investigación. Algunos ejemplos comunes de técnicas son: encuesta, entrevista, observación, grupos focales, diario de campo, fotografías. En tanto algunos instrumentos de recolección de datos incluyen: cuestionarios, guía de observación, guía de entrevista, escalas de medición.

En este trabajo se optó por utilizar la entrevista semiestructurada como técnica de recolección y como instrumentos el cuestionario y el guion de entrevistas.

3.4.1 Procedimiento para la recolección de datos

Este apartado describe detalladamente el procedimiento que seguí durante la recolección de los datos, da a conocer el proceso y la manera en cómo me involucré durante la investigación. Chárazo (2020) menciona que los párrafos que se redactan en esta sección tienen la intención de darle a lector claridad sobre el uso de las técnicas, así como, describir la forma en cómo se aplicaron los instrumentos, si se utilizó cámara, grabación, solamente diálogo y transcripción posterior. También se anotan cuantos registros se realizaron y si son registros de observación o de entrevista.

La recolección de los datos se llevó a cabo a través de un cuestionario conformado por 4 problems de división partitiva con resto de diseño propio: un problema en el que la respuesta correcta era el cociente reajustado por incremento parcial, un problema en el que la respuesta correcta era el cociente no decimal, un problema en el que la respuesta correcta implicaba el uso del cociente decimal y un problema en el que sólo el resto era considerado como solución.

La aplicación del cuestionario se administró en un entorno tranquilo y sin distracciones, los estudiantes utilizaron lápiz y papel, y tuvo una duración de 50 minutos. A cada estudiante se le entregaron las hojas que contenían los problemas y se les especificó lo siguiente:

1. Los problemas se deben resolver de manera individual.
2. Debes permanecer en silencio y concentrado durante toda la sesión.
3. Contesta de acuerdo con lo que tú sabes.
4. Esta no es una prueba para calificar con un 10, un 5 u otro número. Simplemente estoy interesado en saber cómo piensan los niños y cómo resuelven este tipo de problemas.
5. Al momento de contestar los problemas utiliza los espacios en blanco para escribir tus procedimientos.
6. En cuanto termines de contestar los 4 problemas, entrega tus hojas al aplicador.

Tabla 6. *Problemas de división partitiva con resto.*

Problemas del cuestionario	Características.
El próximo sábado viajarán 74 personas a la playa, y pretenden quedarse allá durante una semana. Todas las personas necesitan hospedarse en el mismo hotel. Si solamente hay 25 habitaciones disponibles en el hotel ¿Cuántas personas tendrían que hospedarse en cada habitación?	RCIP. Tipo de problemas en los que la respuesta correcta requiere Reajustar el Cociente Incrementándolo Parcialmente (lago et al., 2008).
El día de su cumpleaños, Marcela compró 57 globos y los repartió entre sus 6 amigas, de tal manera que a cada una de sus	RDN. Tipo de problemas en los que la respuesta correcta

amigas le tocó la misma cantidad de globos ¿Cuántos globos le tocaron a cada una de sus amigas?	hace referencia al Resto No divisible (lago et al., 2008).
Raúl, Manuel, Andrés y Mario quieren comprar un balón que cuesta $86. Para poder comprarlo, los cuatro amigos acordaron que van a cooperar la misma cantidad de dinero ¿Cuánto dinero le tocará poner a cada uno?	RD. Tipo de problemas en los que la respuesta correcta hace referencia al Reto Divisible (lago et al., 2008).
A una comunidad de Morelos llegaron 53 trabajadores que fueron comisionados por la Secretaría de Salud para realizar una campaña de fumigación contra el dengue. Para facilitar el recorrido por toda la comunidad se ha decidido formar 13 equipos con el mismo número de trabajadores ¿Cuántos trabajadores no formaran parte de ningún equipo?	RR. Tipo de problemas en los que el resultado es el resto (lago et al., 2008).

Fuete: Elaboración propia.

Después de aplicar el cuestionario se realizó una entrevista con cada uno de los siete estudiantes. Hunting (1997) señala que una entrevista es entendida como un intercambio verbal y no verbal por parte del participante, cara a cara o como consulta privada, cuyo objetivo es obtener información de primera mano de la persona entrevistada a través de una serie de preguntas.

Específicamente, el tipo de entrevistas que se llevó a cabo fue del tipo semiestructurada. Este tipo de consulta privada permiten una mayor flexibilidad en las preguntas y respuestas, pues combina elementos de una entrevista estructurada y una entrevista no estructurada, es decir, el investigador tiene una guía de preguntas predefinidas, pero también tiene la flexibilidad de realizar preguntas adicionales en función de las respuestas del entrevistado, ya sea para obtener más información o para aclarar puntos importantes. Corbetta (2003) señala que una entrevista semiestructurada de investigación es un instrumento capaz de adaptarse a las diversas personalidades de cada sujeto, en la cual se trabaja con las palabras del entrevistado y con sus formas de sentir, no es una técnica que conduce simplemente a recabar datos acerca de una persona, sino que intenta hacer hablar a ese sujeto, para entenderlo desde dentro.

Cada entrevista tuvo una duración de entre 20 y 25 minutos. La grabadora del celular fue el instrumento que se utilizó para grabar la información. Naturalmente la memoria humana es débil, en el entendido de que está limitada en su capacidad para amanecer y recuperar información. De ahí que Fabregues y Paré (2016) proponen que la grabación de la información puede llevarse a cabo de varias maneras, una de ellas suele ser el bolígrafo y una libreta donde tomar nota, esta forma de registrar la información suele ser útil cuando se toman notas cortas y de una manera rápida sin demasiado riesgo de alterar los datos recabados, en el mismo sentido señalan que otro instrumento de grabación es la grabadora, la cual permite incrementar la proximidad con la situación investigada.

Otras de las razones por las que se optó por utilizar la grabadora del celular aparte de para asegurar la precisión y la exactitud de la información proporcionada por los entrevistados fueron: para poder revisarlas y escucharlas posteriormente las veces que fueran necesarias; para poder tenerlas como evidencia concreta y objetiva del intercambios verbal, en dado caso que se llegue a requerir para su verificación, las grabaciones pueden ser utilizadas como respaldo de los hallazgos o resultados del audio; para poder realizar un análisis más exhaustivo, así como para facilitar la transcripción de las mismas.

Las interrogantes que sirvieron de guía para llevar a cabo el intercambio verbal entre el entrevistado y el entrevistador fueron del tipo de preguntas abiertas. Ginsburg (1997) menciona que las preguntas abiertas a diferencia de las preguntas que se pueden responder con un simple sí o no, nos brinda una mayor posibilidad de obtener información sobre el pensamiento del niño, ya que, al entrevistado le dan libertad de responder y expresarse en términos de su forma de pensar y de ver el mundo.

1. *¿Crees que me puedes explicar cómo obtuviste este resultado?*
2. *¿Cómo dices que le hiciste para resolver el problema?*
3. *Aquí observo que pusiste… ¿Me podrías decir que significa?*
4. *Me pareció muy interesante la forma en cómo resolviste el problema ¿Me podrías explicar un poco más?*
5. *Jamás se me hubiera ocurrido resolver el problema de la forma en que tú lo hiciste ¿Podrías dar más detalles sobre esto?*
6. *¿Podrías ampliar un poco más esta información, por favor?*

CAPÍTULO 4

RESULTADOS

4.1 Análisis Resultados

En palabras de Cházaro, (2020):

> El análisis de los datos recolectados es la parte sustantiva de una investigación. Lo que se hace en esta etapa evidencia las habilidades del investigador, pero sobre todo, al ser humano que eres, qué tan sensible eres y qué tan presto estás para comprender la condición humana de los participantes, así como al problema social que decidiste aportarle (p. 49).

En esta sección presento y describo los datos recopilados durante el estudio, y doy respuesta a la pregunta de investigación que me planteé en un inicio ¿Cuáles son las estrategias que utilizan los alumnos de quinto grado para resolver cada uno de los cuatro tipos de problemas de división partitiva con resto?

Los hallazgos que expongo en este apartado se encuentran organizados en cuatro subsecciones que fueron el producto de la implementación de un análisis tipológico. Este tipo de análisis consiste en dividir el conjunto de datos general en categorías o grupos de acuerdo con tipologías predeterminadas, la teoría, del sentido común y/o los objetivos de investigación (Hatch, 2002). En ese sentido se establecieron las siguientes categorías basadas en las cuatro situaciones diferentes en las que la consideración del resto desempeña un papel importante según Lago et al. (2008). El título de cada subsección se estructuró a partir de la palabra estrategias más el tipo de problema de división con resto más algunas palabras claves del problema que se analizó.

1. Estrategias que utilizan los estudiantes al resolver el problema que implica Reajustar el Cociente Incrementándolo Parcialmente. El problema de los turistas y las habitaciones.
2. Estrategias que utilizan los estudiantes al resolver el problema que implica un Cociente no decimal. El problema de la cumpleañera y los globos.
3. Estrategia que utilizan los estudiantes al resolver el problema que implica un Resto Divisible. El problema de los cuatro amigos y la compra del balón (siete alumnos, una misma estrategia).

4. Estrategias que utilizan los estudiantes al resolver el problema que considera Resultado es el Resto. El problema de la campaña de fumigación contra el dengue y los trabajadores que no formarán parte de ningún equipo.

En cada subsección se analizan los procedimientos que emergieron por parte de los estudiantes al resolver libremente cada uno de los problemas que se les plantearon, y se contrastan las evidencias escritas con las evidencias obtenidas a partir de las entrevistas.

Al inicio de cada uno de los subapartados aparece una tabla; la primera columna aloja las iniciales de los nombres de los participantes; las ocho columnas restantes tienen escritas en la parte superior las iniciales de las estrategias que fueron utilizadas para realizar el análisis.

Las ocho categorías propuestas por Márquez et al. (2019) sirvieron como marco de referencia para poder identificar y analizar los procedimientos que cada participante de este estudio utilizó al enfrentarse a cada uno de los cuatro problemas de división partitiva con resto. En las tablas se muestra marcada con una x la estrategia que cada participante utilizó para resolver el problema.

4.1.1 Estrategias que utilizan los estudiantes al resolver el problema que implica Reajustar el cociente incrementándolo parcialmente. Las habitaciones. El problema de los turistas y las habitaciones

Tabla 7. *Estrategias utilizadas por los estudiantes para dar respuesta al problema de las habitaciones.*

Estudiante	D	MA	M	SRR	CS	RT	UTD	CE
C		X			X			
JT			X					
V			X					
B			X					
A		X			X			
I			X					
JM			X					

Fuente: Elaboración propia.

El trabajo que los participantes realizaron para solucionar este problema reveló dos cosas interesantes:

1. Ningún de los estudiantes utilizó el algoritmo de la división.
2. Las únicas estrategias que emergieron para dar respuesta a este planteamiento fueron la multiplicación y la representación gráfica combinada con el conteo a saltos.

Hubo estudiantes que durante la entrevista mencionaron que en un principio pretendían utilizar el algoritmo de la división. Sin embargo, señalaron que mientras más avanzaban en la parte mecánica y en la interpretación de los datos había algo que les resultaba extraño. Aseguraban que la respuesta al problema no era posible reportarla en términos de un cociente decimal.

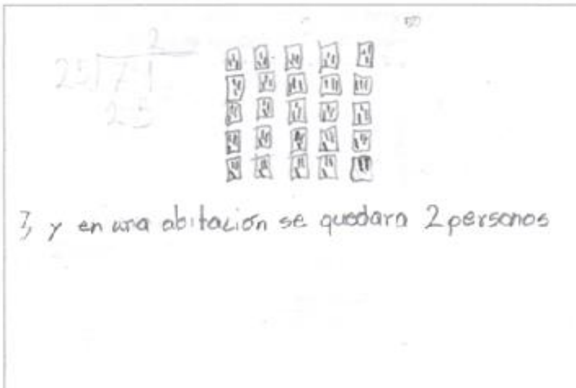
Las entrevistas que se presentan a continuación son evidencia de que dos alumnas de los siete estudiantes utilizaron la estrategia Modelación acompañada del Conteo a Saltos. Las dos participantes que revelaron el uso de esta estrategia mencionaron que lo primero que hicieron para saber cuántas personas debían acomodar en cada habitación, fue dibujar 25 cuadritos. Cada cuadrito les sirvió para representar una de las 25 habitaciones. Una vez que las estudiantes terminaron de dibujar las 25 habitaciones procedieron a alojar en ellas a las 75 personas.

La acción que realizaron para llevar a cabo la segunda parte de su procesamiento fue representar a los turistas a través de un trazo vertical (Ver Figura 1) o a través de un numeral (Ver Figura 2), de tal manera que al colocarlas en las habitaciones pudieron pensar en términos de una en una, de dos en dos y finalmente de tres en tres. Esa forma de pensar las llevó a obtener las siguientes conclusiones:

1. Si en cada habitación se coloca una persona, únicamente se podrán alojar a 25 personas de las 74 que son en total.
2. Si en cada habitación se colocan dos personas, únicamente se podrán alojar 50 personas de las 74 que son en total.
3. Si en cada habitación se colocan 3 personas, se podrá alojar 1 persona más de las que están consideradas en el problema.

Figura 1. *Modelación Agrupamiento combinada con el Conteo a Saltos*

L: Arami ¿crees que me puedes explicar cómo resolviste? Es que acá veo cosas que borraste y no sé si las utilizaste.
A: Ahh… no, sólo utilicé esto. Lo iba a utilizar, pero como era muy grande ya no lo podía. Entonces lo hice en estos cuadritos (la niña comienza a señalar



en su dibujo) estas eran las habitaciones y las 74 personas las empecé a poner.
L: Ahhh… Las empezaste a poner, y me podrías decir ¿Cómo las empezaste a poner?
A: Primero de a uno y fueron 25, después de otro y fueron 50, y me sobran 24 para llegar a 74. Entonces lo puse otra vez, de tres. En una irían 2.
L: ¿Entonces cuantas personas tendrían que hospedarse en cada habitación?
A: 3 en 24 habitaciones y en una irían 2.

Figura 2. *Modelación Agrupamiento combinada con el Conteo a Saltos*

L: Me gustaría saber cómo fue que lo resolviste. Para entender de dónde sale esto. Entonces este cuadrito ¿Qué es?
C: Es un cuarto, es una habitación, esta es otra habitación.
L: ¿Y aquí veo un número como que lo borraste?
C: Si, es que le estaba viendo para que me dieran.
L: Ahhhh… Primero viste con ¿qué número? ¿qué número estuvo antes?
C: Con el dos.
L: Y cuando pusiste dos en cada habitación ¿Qué pasaba?
C: Los iba sumando y no me dieron.
L: ¿Cuánto te daba?
C: Me daba (La alumna cuenta de 2 en 2) me daba 50, entonces no me daba.
L: Después ¿qué pensaste?
C: Dije entonces ahora con el 3.
L: ¿Y cuánto te daba con el 3?
C: Me faltaba o me sobraba uno (la alumna cuenta de 3 en 3) me dio 75, se me pasaba con uno. Y aquí ya nada más con dos personas.

Cinco de los siete participaron resolvieron el problema utilizando el algoritmo de la multiplicación. Todos ellos representaron su procesamiento a través de dos factores 25 y 3, y el producto 75, colocados de forma vertical. Los estudiantes construyeron la multiplicación tomando en cuenta al multiplicador como la incógnita del problema. La siguiente entrevista y la Figura 3 exponente el pensamiento de uno de los estudiantes, tal pensamiento se hizo presente en todos los demás y consistió en buscar un número de personas que multiplicado por las 25 habitaciones diera como resultado los 74 turistas.

Figura 3. *Algoritmo de la multiplicación.*

L: Oyes Iker, ya vez que les propuse 4 problemas para que los resolvieran. Los estuve revisando Me pareció muy interesante la forma en cómo resolviste el problema ¿Me podrías explicar un poco más?
I: Ahhhhh… (el alumno empieza a leer el primer problema)
I: Hice mi multiplicación y me dio 75, pero 75 ya se pasa de 74, así que en una habitación se van a quedar 2 personas y en las demás 3. 3x25 me da 75, así que dije si se pasa, noooooo….. este, no este. ¿Cómo le digo? Es que porque en una van a quedar dos personas. Le quite 1 a….
L: ¿Le quitaste 1 a que número?
I: Al 75 para que me diera 74.

El estudiante a través de su procedimiento logró reconocer que:

1. Si multiplicaba 25 x 3, es decir que, si en cada habitación colocaba a 3 personas, se podrían acomodar a 75 turistas, uno más de los que se consideran en el problema.
2. Era posible acomodar a las 74 personas siempre y cuando en una habitación se colocaban 2 personas y en las 24 habitaciones restantes se colocaban 3 personas.

4.1.2 Estrategias que utilizan los estudiantes al resolver el problema que implica un Cociente no decimal. El problema de la cumpleañera y los globos

Tabla 8. *Estrategias utilizadas por los estudiantes para dar respuesta al problema 2.*

Estudiante	D	MA	M	SRR	CS	RT	UTD	CE
C		X						
JT	X							
V				X				
B			X					
A	X							
I								X
JM			X					

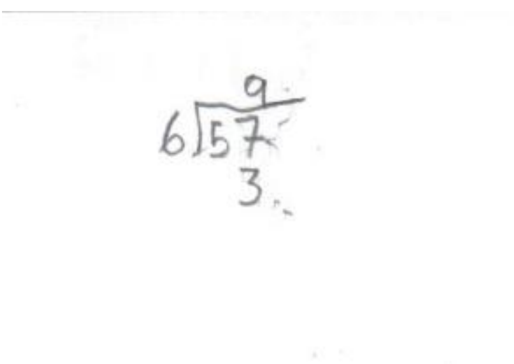
Fuente: Elaboración propia.

Recordemos que el planteamiento número dos invitaba a los estudiantes a realizar un reparto de 57 globos entre 9 amigas. La especificación para resolver el problema fue que a cada una de las amigas le tenía que tocar la misma cantidad de globos. Evidentemente las producciones escritas mostraron que todos los participantes lograron identificar la intención del problema y por su puesto llegar al resultado esperado. Tanto es así que pareciera que ningún alumno tuvo dificultad alguna para resolverlo.

De los cuatro problemas resueltos por los participantes, el problema de los globos fue el que hizo emerger una mayor cantidad de estrategias, específicamente cinco de las ocho estrategias reveladas por Márquez et al. (2019). Hubo dos estudiantes que utilizaron el algoritmo de la división, un estudiante que utilizó la Modelación Gráfica, dos estudiantes que utilizaron la Multiplicación, una estudiante que utilizó la Suma Repetida y un estudiante que utilizó la Combinación de Estrategias.

En las Figuras 4 y 5, y extractos de entrevistas, una alumna y un alumno dan a conocer al algoritmo de la división como la estrategia que utilizaron para resolver el problema. La niña indicada con la inicial **A** al igual que el alumno indicado con las iniciales **JT** representaron su procedimiento a través del número 57 como el dividendo, una galera y un divisor, el 6. Después de ello, ejecutaron la división de manera convencional. Rápidamente se dieron cuenta que no era posible dividir el numeral 5 del dividendo entre el divisor, así que procedieron a trabajar con los dos dígitos del dividendo. Ante esa situación, ambos alumnos lograron reconocer que el cociente de 57 ÷ 6 era igual a 9, con un residuo 3. Es decir, que la respuesta al problema debía estar señalada en términos de un cociente entero o del cociente entero y del residuo.

Figura 4. *Estrategia de División.*



L: Ahora crees que me pudieras decir en este (El entrevistador señala el problema número 2)
A: Ahhh.. hice una división 6 entre 57 y no la completé. Hice 6 en 5 no cabe, 6 en 57 cabe 9 veces y sobra 3 y ya ahí se quedó la división.
L: ¿Por qué decidiste dejarla hasta ahí?
A: Por que 6 entre 57 cabe 9 y sobra 3 para llegar a 57, entonces ya no puedo hacer esto (la alumna señala continuar con los decimales) y son 57 globos, ni modos que los parta a la mitad.
L: Ahhh ya ya entendí, ¿Qué pasaría si los partes a la mitad?
A: Pues ya no se podrían inflar. Entonces a cada una de sus amigas les repartiría nueve a las seis amigas y sobrarían 3. Entonces esos tres, yo si estuviera en eso, los inflaría yo.

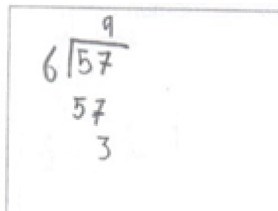


Figura 5. *Estrategia de División*

L: ¿Cómo dices que le hiciste para resolver el problema?
I: Porque dice en el problema que le tiene que tocar a sus seis amigas la misma cantidad de globos, y tiene 57 globos. Y yo lo dividí y me dieron 9, y 9 lo multipliqué por 6 y me dio 54, y me sobraban y no sabía cómo, ¿si dejarlo o dárselo a otras tres? Al final se los dejé.

Una de las siete estudiantes utilizó la estrategia de Modelación Agrupamiento para resolver el problema (Ver Figura 6). Este procedimiento al igual que el de la división, también llevó a la solución correcta del enunciado. La alumna durante su estrategia de solución evidenció el uso de representaciones esquemáticas, ella mencionó que a través de dibujos pudo representar a las niñas que se mencionaban en el planteamiento. Para representar a las niñas no fue necesario que ella dibujara las caras y los cuerpos de las amigas de Marcela, le bastó con trazar 6 cuadros. Una vez terminado esa parte del procedimiento, prosiguió a realizar el reparto de los globos aplicando la estrategia de la Suma Repetida. A cada una de las niñas le asignó 9 globos y comenzó a sumar 9 + 9 + 9 + 9 + 9 +9, lo cual le arrojó como resultado el número 54. De ahí que pudo llegar a la conclusión de que a cada una de las amigas de Marcela le tocarían 9 globos y que la cumpleañera se quedaría con 3. La alumna reconoció el nivel de realismo cuando menciona que sería mejor que la cumpleañera se quedara con los tres globos restantes para evitar peleas entre las amigas.

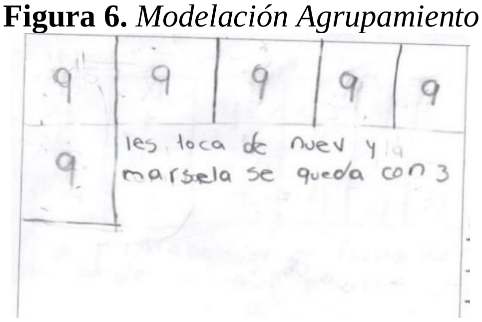


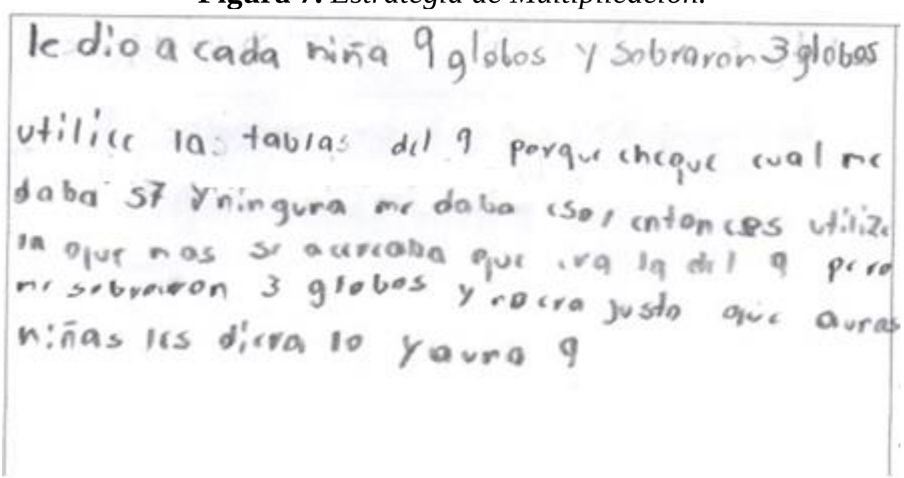
Figura 6. *Modelación Agrupamiento*

C: En este si no le entendí muy bien (Señala le problema 2). Porque como a unas amigas les va tocar menos.
L: ¿Por qué menos?
C: Porque aquí dice que en su cumpleaños Marcela tuvo que comprar casi una bolsa de globos de 57, para repartirlo entre sus 6 amigas, entonces tuve que hacer una niña, otra niña, otra niña…
L: Ahhh… ese cuadro representaba una niña, este otro cuadro otra niña… ¿y después que hiciste?
C: Entonces puse de a 9 (la alumna comienza a sumar de nueve en 9) y me dio 54. Y después ya no supe que hacerle, porque si no a 3 niñas les va tocar de a más.
L: ¿Y entonces que se te ocurrió? ¿entonces de a cuantos globos le tocaría cada niña?
C: De a nueve y los demás se los quedaría ella.
L: ¿Por qué?
C: Porque ya no alcanza. La cumpleañera se va a quedar con 3 globos, para que no se peleen de que a unas le tocó más y unas le tocó menos. Y mejor ella se va a quedar con los 3 globos.

El alumno que a continuación informa su procedimiento de solución menciona que utilizó las tablas de multiplicar para poder resolver el problema (Ver Figura 7). El resolutor pensó la incógnita de la situación en torno a la siguiente pregunta ¿Cuál es el número que multiplicado por 6 da como resultado 57 o se acerca a él? En ese sentido, se percató que el producto de los factores 9 y 6 daban como resultado un número aproximado a 57. Es decir, que al entregar de a 9 globos a cada una de las seis amigas de Marcela era posible distribuir 54 de los 57 globos que se mencionaban en el problema.

El estudiante a través de su razonamiento demostró que comprendió el problema. En el extracto de la entrevista el alumno deja en claro que reconoció que a cada una de las seis amigas de Marcela le tendría que tocar la misma cantidad de globos. También reconoció el nivel de realismo del planteamiento al no forzar el reparto de los tres globos restantes. Además de ello, ofreció una interpretación correcta del resultado al mencionar que no sería justo que a algunas de las amigas de la cumpleañera les tocasen 10 globos y a otras sólo 9.

Figura 7. *Estrategia de Multiplicación.*


le dio a cada niña 9 globos y sobraron 3 globos
utilice las tablas del 9 porque cheque cual me
daba 57 y ninguna me daba eso, entonces utilize
la que mas se acercaba que era la del 9 pero
me sobraron 3 globos y no era justo que a otras
niñas les diera 10 y a otra 9

L: ¿Y acá? ¿Qué pasó en este problema?
B: Pues aquí, utilicé la tabla del 9 y me sobraron 3 globos. Me dio 54 de resultado. Y como iban a sobrar 3 globos y aquí dice que a cada una de sus amigas le tocara la misma cantidad, les repartí 9 porque iban a sobrar 3 globos, y no era justo que a unas les diera 10.
L: ¿Y por qué las tablas del 9 y no otra?
B: Porque chequé las tablas, cuál me diera 57 y ninguna me dio 57. Entonces la que más se acercaba era la del 9.

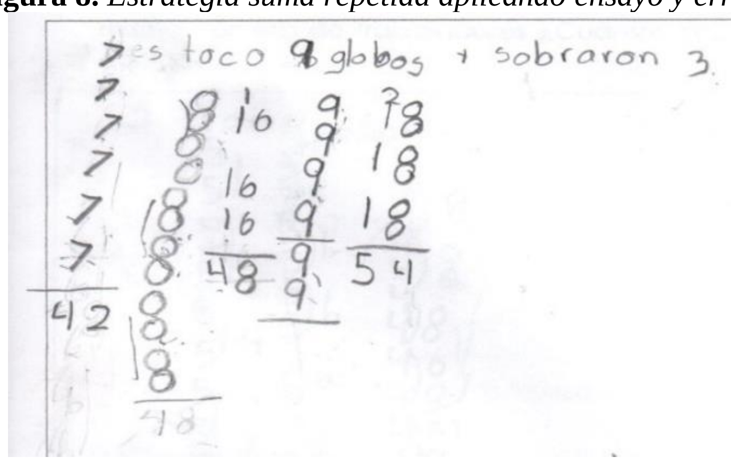
La Suma Repetida es una estrategia que ha sido revelada en la mayoría de los estudios que han tenido por objetivo analizar los procedimientos que los estudiantes utilizan para dar respuesta a algunos problemas de división. Ivars y Fernández (2016) al igual que Márquez et al. (2019)

coinciden en que esta estrategia consiste en usar sumas repetidas hasta llegar al total. La situación que hasta el momento no ha sido mencionada en algún estudio de los que se consultaron es que, detrás de la suma repetida es casi probable encontrar la estrategia de Ensayo y Error.

Una de las alumnas entrevistada admite que el procedimiento que siguió para poder saber cuántos globos le tocaría a cada niña, consistió en ir probando diferentes sumas repetidas hasta lograr aproximarse al número de globos que se debían repartir. Claramente la estudiante no inició con una suma repetida del número cinco, tampoco tuvo la necesidad de plasmar la suma repetida del número 10. Tal vez esto se deba a que las series de los números 5 y 10 suelen ser las primeras que los niños aprenden y dominan durante su paso por la primaria.

El análisis de la evidencia escrita y de la entrevista no sólo permitió identificar la estrategia utilizada por la estudiante, también, reveló la apremiante necesidad de invitar a través de este discurso a los docentes o futuros docentes de matemáticas a trabajar dentro de sus aulas actividades que lleven a sus alumnos a familiarizarse y aprenderse las series de los números 6, 7, 8 y 9. En la Figura 8 claramente se aprecia la dificultad que tiene la estudiante para llegar al resultado de la suma repetida de 6 veces el número ocho y de 6 veces el número nueve, tanto es así que, la niña tuvo que agrupar en pares a dichos números y traducir esa nueva información en dos nuevas sumas repetidas, 16 + 16 + 16, la cual arrojó como resultado 48 y 18 + 18 +18, la cual arrojó como resultado 54. Evidentemente esta última suma repetida le permitió a la estudiante llegar a la conclusión de que a cada amiga de Marcela le debía tocar 9 globos y sobrarían 3.

Figura 8. *Estrategia suma repetida aplicando ensayo y error.*

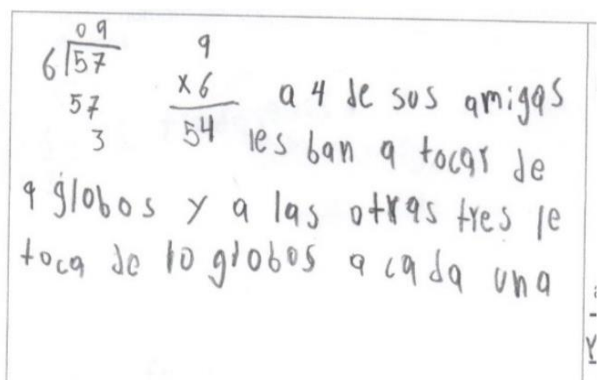


L: ¿Y aquí cómo le hiciste Vane? ¿si te acuerdas de este problema?
V: si ese si estaba fácil (La alumna lee el problema). La puse en (la niña intenta buscar explicar que lo puso en suma repetida) ah iré aquí se ve, pero yo los borré. Lo sumé para ver si me daba el

resultado. Le puse de a seis a cada amiga, entonces hice la cuenta, entonces me iban a sobrar más globos.
L: ¿Y que le ibas a hacer con esos globos?
V: Ah… pues los podía poner más
L: ¿Y cuánto eran hasta de más?
V: Vi con el de 7. (la alumna comienza a sumar pares de 7) 42 hasta sobraban globos, le puse de a otro globo, si le puse de a ocho. pero con el 10 va a dar 60.
L: ¿Entonces con el 10 ya no quedaba?
V: Al menos que fuera de 9 y me iban a sobrar 3 globos.
L: ¿Y qué hiciste con estos tres globos?
V: Esos este, porque ya no se van a poder repartir.
L: ¿Por qué ya no se pueden repartir?
V: Porque son seis amigas y no más son tres globos.
L: Entonces ¿Qué pasaría?
V: No los daría Marcela a sus amigas.

Márquez et al (2019) reconocen que la combinación de estrategias consiste en utilizar dos estrategias, el uso de la representación gráfica y la aplicación de un algoritmo. En la siguiente transcripción del intercambio verbal entre entrevistador y el entrevistado se reporta el uso del algoritmo de la división y de la multiplicación como un procedimiento exitoso utilizado por un estudiante para dar respuesta al problema de los globos (Ver Figura 9).

Figura 9. Combinación de estrategias



I*: Ahhhhh… (el alumno empieza a leer el primer problema). No les puede tocar la misma cantidad por que lo dividí y me da 9 y 9 lo multipliqué por 6 y medio 54, y me sobraban 3 globos. Y si reparten los 3 globos que sobran, a tres amigas les iban a tocar 10 globos y a las demás nueve. Pero así que nos quede la misma cantidad no se puede, o sobrarían los globos.*
L: Ahhhh… Sobrarían los globos
I: Si
L: Por qué si le entregas de a 10 a unas y a otras de a 9 ¿Estarías respondiendo el problema o crees que no?
I: No.
L: ¿Por qué no?
I: Porque aquí dice (El alumno señala el problema) que a cada una le tiene que tocar la misma cantidad.

L: ¿Y si les dieras 10 a unas y 9 a otras ¿Ya no sería la misma cantidad verdad?
I: Por eso mejor dije sobran globos. Le entrego de a 9 a cada una y tres que se los quede ella.

De acuerdo con el discurso del alumno, el uso de la combinación de estrategias aparece después de comprender el problema, obtener una primera solución e interpretar el resultado obtenido. Específicamente cuando el estudiante se da cuenta que la respuesta a este tipo de problemas no puede ser reportada con un cociente decimal.

El resolutor comprendió que la solicitud del problema implicaba repartir equitativamente 57 globos entre 6 amigas. Rápidamente identificó el algoritmo de la división como un posible camino de solución, procedió a ejecutarlo y llegó a la conclusión de que a cada amiga le corresponderían 9 globos. Sin embargo, los tres globos restantes le causaron conflicto por dos razones: porque sabía que los globos no se pueden dividir y por ende al no poderse dividir era imposible reportar la división con un residuo cero.

Pareciera que los estudiantes siempre que se enfrentan a un problema de división esperan repartir todo el conjunto que se describe en el planteamiento, aún después de haber identificado el contexto y el realismo permitido dentro de la situación. En este caso, el resolutor al no logra obtener un residuo cero, procedió a comprobar su resultado por medio del algoritmo de la multiplicación, esto lo llevó a darse cuenta de que sucedía lo mismo, lo cual lo terminó por convencer de que la respuesta que había obtenido en ambos procedimientos era la correcta.

Claramente el objetivo del estudio no fue analizar la manera en que cada participante percibió el grado de dificultad de los problemas. Sin embargo, es importante mencionar que durante todas las entrevistas se hizo presente un mismo dialogo, cada alumno lo expuso a su manera. Los estudiantes a través de su discurso reconocieron el alto grado de complejidad del planteamiento, señalaron que, de los cuatro problemas, el de los globos fue el que les resultó más difícil de resolver.

I: Este se me dificultó
L: ¿Por qué se te dificultó?
I: Porque dice en el problema que le tiene que tocar a sus seis amigas la misma cantidad de globos, y tiene 57 globos. Y yo lo dividí y me dieron 9, y 9 lo multipliqué por 6 y me dio 54, y me sobraban y no sabía cómo, ¿si dejarlo o dárselo a otras tres?
L: ahhhh… ¿no sabías si dejárselos o dárselos?
I: Por eso dije sobran globos. Le entrego de a 9 a cada una y tres que se los que de ella.

C: Este difícil (Señala el problema de los globos) porque no encontraba y ella se tuvo que quedar con 3
L: Ahhh… ya no sabías que hacer con los globos.

A: Este problema se me dificultó
L: ¿Por qué?
A: Porque no sabía cómo partirlos a la mitad.
L: ¿Y al final que pensaste?
A: Pusss… si pongo 9, los tres... si yo estuviera en ese problema, yo los tres los inflaría yo y ya.

Las afirmaciones de los participantes confirman lo que Saiz (1994) menciona en cuando a que resolver problemas de división no es un asunto fácil, especialmente cuando se trata de resolver problemas que implican analizar el resto y el nivel de realismo permitido. De la misma manera se confirma lo que Lago et al. (2008) señalan con respecto a la idea de que, para poder resolver un problema del tipo de división con resto, no basta con transcribir el resultado tal cual es arrojado por el algoritmo, sino que se requiere de una interpretación correcta de los resultados numéricos.

El resolutor tuvo que aplicar su conocimiento cotidiano al momento de interpretar su respuesta y tuvo considerar el nivel de realismo permitido en sus interpretaciones, es decir, antes de dar una respuesta numérica al problema de los globos fue necesario detenerse un momento para reflexionar en torno a las siguientes preguntas ¿El problema me pide busca un cociente entero o un cociente decimal? ¿Qué hago con los globos que me sobran? ¿Si yo fuera la del problema partiría los globos, me los quedaría o los inflaría?

4.1.3 Estrategia que utilizan los estudiantes al resolver el problema que implica un Resto Divisible. El problema de los cuatro amigos y la compra del balón (siete alumnos, una misma estrategia)

Tabla 9. *Estrategias utilizadas por los estudiantes para dar respuesta al problema 3.*

Estudiante	D	MA	M	SRR	CS	RT	UTD	CE	DN+CM+O
C									X
JT									X
V									X
B									X
A									X
I									X
JM									X

Fuente: Elaboración propia.

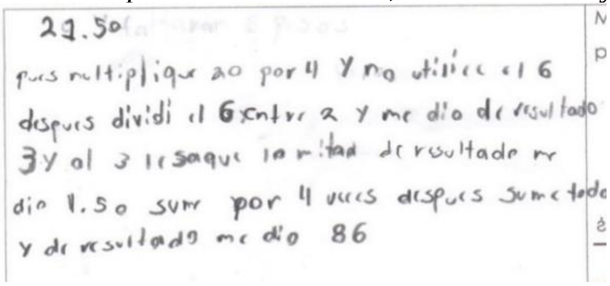
Los hallazgos más interesantes de todo el estudio se encuentran concentrados en esta subsección, dado que las producciones escritas de los participantes muestran a simple vista que los resolutores hicieron uso de las siguientes estrategias: La Multiplicación, Modelación Agrupamiento y la Suma Repetida **(**Ver Figuras 10, 11 y 12**).** Sin embargo, al explorar en mayor profundidad el pensamiento de los niños, los siete participantes coincidieron en que la estrategia que implementaron para dar respuesta a este problema fue el cálculo mental, apoyados de la descomposición del número. Por lo que se consideró apropiado agregar esta categoría con el nombre de *uso de descomposición del número, cálculo mental y de más de una operación.*

Recordemos que el planteamiento mencionaba que cuatro niños estaban interesados en cooperar la misma cantidad de dinero para poder comprar un balón de fútbol que costaba 86 pesos. El problema invitaba a los estudiantes a hallar dicha cantidad de dinero que debían cooperar los niños.

Al resolver el problema los participantes comenzaron descomponiendo el número 86, para poder hacerlo tomaron como referente el valor relativo de cada digito. De esta manera pudieron visualizar al número 86 como las suma de 80 + 6. Una vez que los estudiantes lograron transitar de la primera a la segunda representación, procedieron a trabajar con dichos números de forma separada. Primero hicieron el reparto de los 80 pesos entre los 4 amigos, esta parte del procedimiento les arrojó como resultado 20. La segunda parte de su procedimiento consistió en repartir los 6 pesos restantes también entre los cuatro amigos, lo cual se tradujo en 1.50. Los alumnos una vez que terminaron de obtener los resultados de ambos repartos, es decir, el 20 y el 1.50, procedieron a aplicar la regla de combinación de la suma, situación que los llevó a concluir que cada uno de los cuatro niños debía cooperar 21.50 pesos para que pudieran comprar el balón.

En la figura 10 y en el extracto de la entrevista que aparece a continuación, uno de estudiantes explica el procedimiento que siguió para resolver el problema.

Figura 10. *Descomposición del número, cálculo mental y escalar.*



L: Jamás se me hubiera ocurrido resolver el problema de la forma en que tú lo hiciste ¿Me podrías dar más detalles sobre cómo lo resolviste?
B: Pues multipliqué 20 por 4 y me dio 80, pero me di cuenta que me faltaban 6 pesos.
L: ahhh… primero estabas buscando repartir el 80. ¿y después de ahí?
B: Me di cuenta que la mitad 6 es 3, y la mitad de 3 es 1.50. Y el 1.50 se los repartí entre 4, y después sumé y me dio 6. Y por eso les puse 21.50 a cada niño.

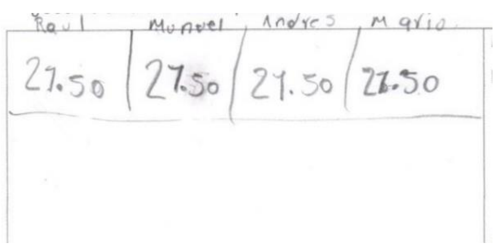
De acuerdo con las evidencias anteriores, el alumno reconoce que para que él pudiera resolver el problema lo primero hizo fue considerar al número 86 de forma separada. Primero trabajó con el número 80 y posteriormente con el número 6. Para realizar el primer reparto el alumno utilizó la estrategia de multiplicación, identificó que el producto del 20 x 4 era igual a 80. Hasta ese momento el estudiante ya se había percatado que cada uno de los cuatro niños tendría que cooperar 20 pesos. Sin embargo, aún le quedaba pendiente realizar el reparto del número 6. Para poder hacer este segundo reparto el estudiante igualó el número 4 con el número 6 y a ambos números los dividió entre dos, dicha acción le arrojó como resultado los números 2 y 3. El entrevistado volvió a repetir el procedimiento anterior, es decir, igualó el número 2 y 3, y posteriormente dividió a ambos entres dos, situación que le dio como resultado 1 y 1.50.

Detrás de todo el trabajo que el estudiante realizó con los números se encuentra la manera en que él vio las cosas: si 4 amigos tendrían que cooperar 6 pesos, entonces 2 amigos tendrían que cooperar 3 pesos, y por lo tanto un sólo amigo tendría que cooperar 1.50 pesos. Una vez que el estudiante logró obtener el resultado de dividir el 80 entre 4 y el 6 entre 4, lo único que bastó fue sumar los resultados de ambos repartos, 20 + 1.50, llegando así a la conclusión de que cada niño tendría que cooperar 21.50 pesos.

A continuación, presento el análisis de las entrevistas que llevé a cabo con el resto de los participantes. Únicamente transcribí dos de ellas porque el procedimiento fue prácticamente el mismo en todos los casos. Los seis estudiantes comenzaron su procedimiento de solución de la misma manera que el alumno anterior, es decir, en un primer momento repartieron los 80 pesos entre los 4 amigos. Los entrevistados evidenciaron que la estrategia que utilizaron para obtener el resultado del reparto anterior fue en algunos casos la suma repetida y en algunos otros la multiplicación, señalaron que 80 entre 4 era igual 20 porque 20 + 20 +20 +20 era igual a 80 o porque 4 x 20 era igual a 80 o porque 4 veces 20 era igual a 80.

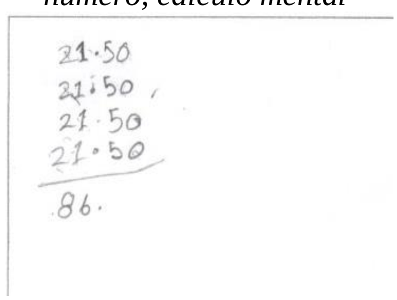
Con respecto al reparto de los 6 pesos entre los 4 amigos, los estudiantes evidenciaron el uso de una situación de la vida real, en este caso el uso de las monedas de 50 centavos. Es importante mencionar que este segundo reparto no representó una tarea sencilla, los entrevistados tuvieron que pasar por la estrategia de ensayo y error para darse cuenta que cada amigo debía cooperar 1.50 pesos. Esto claramente quedó evidenciado en el discurso de los estudiantes cuando mencionaron que si a cada amigo le encomendaban cooperar con 1 peso, el dinero no alcanzaría para comprar el balón, por el contrario, si a cada alumno le encargaban cooperar con 2 pesos tendrían dinero de sobra.

Figura 11. *Descomposicion del numero, calculo mental.*



C: Fui sumando.
L: ¿Qué sumaste?
C: para que me diera 20 y 20 y 20 y 20. Ochenta me dieron y de ahí dije 1.50 más 1.50 más 1.50 más 1.50 me van a dar 6 pesos. Y de ahí dije de a 21.50 se tienen que cooperar para comprar el balón.
L: ¿Entonces separas este número?
C: Si, fui primero viendo para que me diera 80. 20 más 20 más 20 más 20 me da 80. Ahora voy a buscar el resto para que me de 6 pesos. Dije de 2 no me da, de un peso tampoco me da y de a 1.50 si me va a dar.

Figura 12. *Descomposicion del numero, calculo mental*



V: Esta si le entendí.
L: ¿Y cómo dices que le hiciste?
V: Aquí dice que Raúl, Manuela, Andrés y Mario, querían un balón que costaba 87 pesos, pero se querían cooperar, y ya sumé porque yo le ponía 20 y ya sumaba.
L: ¿Y por qué le ponías 20?
V: porque pensé que me daba. Porque aquí 4 veces 20 me daba 80, pero ahí no me dio, porque me dio 80 nomas, faltaban los 6 pesos y de ahí como eran 4 amigos le puse los 21.50.
L: ¿y cómo le hiciste para saber que era 1.50?
V: porque le sume también 21 y no me daba, le faltaba, me daba 84. Ya de aquí los sumé con los cincuenta centavos. Me acordé de los cincuenta centavos. Porque si aquí fueran de a 2 pesos iba a sobrar, iban a sobrar dos pesos.

Con respecto a esta estrategia valdría la pena peguntarnos si los estudiantes también optarían por utilizar este procedimiento en cualquier problema del tipo Resto Divisible o si utilizando esta misma estrategia lograrían resolver exitosamente el problema del balón, solamente que con una modificación en los números. Por ejemplo, cambiar el digito que aparece en la posición de las decenas por un número impar o modificar el dividendo por números de tres cifras.

1. Raúl, Manuel, Andrés y Mario quieren comprar un balón que cuesta $76. Para poder comprarlo, los cuatro amigos acordaron que van a cooperar la misma cantidad de dinero ¿Cuánto dinero le tocará poner a cada uno?

2. Raúl, Manuel, Andrés y Mario integrantes de un equipo de futbol quieren comprar un balón que cuesta $176. Para poder comprarlo, los cuatro amigos acordaron que van a cooperar la misma cantidad de dinero ¿Cuánto dinero le tocará poner a cada uno?

Al repartir los 80 pesos entre los cuatro amigos el procedimiento es relativamente fácil, porque el cociente no implica el uso de números decimales. Sin embargo, si pensamos que a los estudiantes se les plantea el primer problema de los dos anteriores e intentan resolverlo de la misma manera que lo hicieron con el problema analizado en esta parte de la investigación, es decir, considerar el dividendo de forma separada (70 + 6) y posteriormente aplicar el reparto de cada número entre 4, en ambos casos se toparían con cocientes decimales, lo cual implica un mayor grado de dificultad. Al repartir los 70 pesos y los 6 pesos entre los cuatro amigos los resultados arrojados serían: 12.50 pesos y 1.50 pesos respectivamente.

4.1.4 Estrategias que utilizan los estudiantes al resolver el problema que considera Resultado es el Resto. El problema de la campaña de fumigación contra el dengue y los trabajadores que no formarán parte de ningún equipo

Tabla 10. *Estrategias utilizadas por los estudiantes para dar respuesta al problema 4.*

Estudiante	D	MA	M	SRR	CS	RT	UTD	CE
C		X			X			
JT			X					
V				X				
B			X					
A		X			X			
I			X					
JM			X					

Fuente: Elaboración propia.

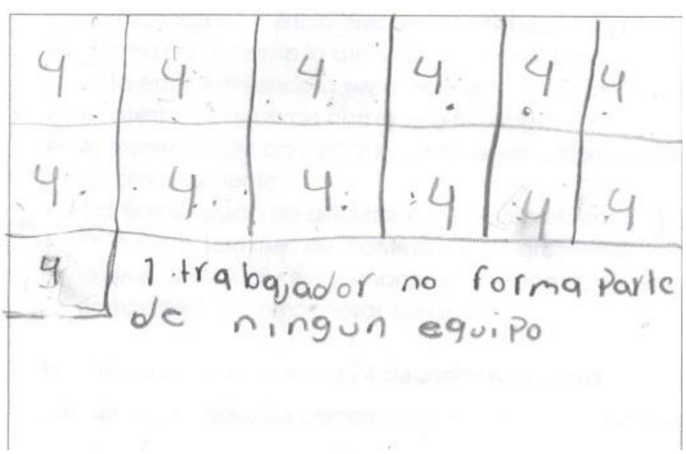
Las estrategias que emergieron por parte de los siete estudiantes al resolver el problema que implicaba el Resto como Respuesta Correcta fueron: la Modelación Agrupamiento combinada con el Conteo a Saltos, la Multiplicación y la Suma Repetida.

El problema invitaba al resolutor a distribuir en 13 equipos a 53 trabajadores comisionados por la secretaria de salud para realizar una campaña de fumigación contra el dengue. Los estudiantes a partir de la distribución equitativa de los trabajadores debían identificar la cantidad de recursos humanos que no formarían parte de ningún equipo. Claramente la respuesta correcta al problema estaba dada en términos de un residuo menor a 13.

Esta parte del análisis de los resultados reveló dos cosas interesantes. La primera de ellas fue que ninguno de los participantes utilizó el algoritmo de la división como estrategia de solución, la segunda de ellas fue que las mismas dos estudiantes que utilizaron la estrategia Modelación Agrupamiento combinada con la estrategia Conteo a Saltos para resolver el problema de las habitaciones, volvieron a utilizar dicha estrategia para resolver el problema de la campaña de fumigación contra el dengue.

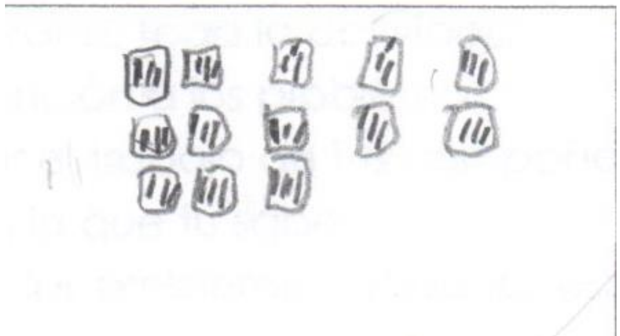
Las Figuras 13 y 14 y los extractos de las entrevistas que aparecen a continuación son las evidencias del procedimiento que siguieron las dos informantes que utilizaron la estrategia de Modelación Agrupamiento combinada con la estrategia de Conteo a Saltos.

Figura 13. *Estrategia de Modelacion Agrupamiento combinada con la estrategia Conteo a Saltos*



L: ¿Y ahora este? ¿Cómo dices que le hiciste este?
C: (la alumna lee el problema 4). Acá esta un equipo, otro equipo…
L: Ahh... ya entendí que cada cuadrito son los equipos.
L: ¿Y este número que significa?
C: Que 4 personas van a ir en cada equipo. y una persona no forma parte de ningún equipo.
L: ¿Y este puntito que significa?
C: Es que le iba yo haciendo así (Le marca un punto) cada vez que contaba un número.
L: Ahhh… para que no te confundieras y no volviera a contar el mismo número.

Figura 14. *Estrategia de Modelacion Agrupamiento combinada con la estrategia Conteo a Saltos*



L: Y ahora ya nada mas este último.
A: Ah, de los trabajadores. Aquí dice cuántos trabajadores no forman parte de equipo, no forma pate uno porque sobra uno.
L: ¿y cómo lo hiciste?
A: Hice como lo mismo como lo primero y multipliqué. Hice trece y empecé a poner los esos, y cabían 4. Trece por 4 me dio 52 y aquí son 53, entonces sobraría 1. Entonces sólo uno no forma parte de ningún equipo.

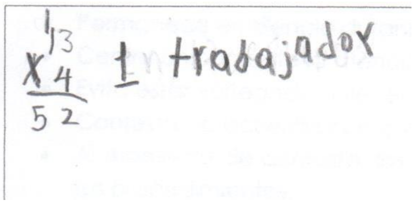
De acuerdo con las evidencias anteriores, lo primero que las participantes hicieron para poder resolver el problema fue dibujar 13 cuadritos. Cada cuadrito les sirvió para representar un equipo. Una vez que las estudiantes terminaron de dibujar los 13 equipos procedieron a distribuir en ellas a los 53 trabajadores.

La acción que realizaron para llevar a cabo la segunda parte de su procesamiento fue representar a los recursos humanos a través de un numeral (Ver Figura 13) o a través de un trazo vertical (Ver Figura 14), de tal manera que al colocarlos dentro los equipos pudieron pensar en términos de uno en uno, de dos en dos, de tres en tres y finalmente de cuatro en cuatro. Esa forma de pensar las llevó a obtener las siguientes conclusiones:

1. Si cada equipo quedara conformado por una persona, únicamente se podrían comisionar a 13 trabajadores.
2. Si cada equipo quedara conformado por dos personas, únicamente se podrían comisionar a 26 trabajadores.
3. Si cada equipo quedara conformado por tres personas, únicamente se podrían comisionar a 39 trabajadores.
4. Si cada equipo quedara conformado por cuatro personas, se comisionaría a 52 trabajadores y sobraría 1.

Cuatro estudiantes de los siete señalaron que utilizaron la estrategia del algoritmo de la Multiplicación. Todos ellos representaron su procesamiento a través de dos factores que fueron el 13 y 4, y el producto 53, colocados de formar vertical. Los estudiantes construyeron la multiplicación tomando en cuenta al multiplicador como la incógnita del problema. La siguiente entrevista y la figura 15 exponen el pensamiento de uno de los estudiantes, dicho pensamiento se hizo presente en los demás participantes y consistió en pensar en un número de trabajadores que multiplicado por los 13 equipos diera como resultado los 53 recursos humanos.

Figura 15. *Estrategia de multiplicación*



L: ¿Crees que me puedes explicar cómo obtuviste este resultado?
I: Dice que son 53 trabajadores… (el alumno lee el problema). Aquí multipliqué 13 por 4 y me dio 52, pero me faltaba 1. Sino en un equipo habría más, y por eso ya un trabajador ya no va a trabajar en ningún equipo, porque si no un equipo tendría 5 y ya los otros 12 tendían 4. Y ya después dije si son 52 me sobra 1 trabajador. Y por eso dije ese trabajador no va a trabajar.

La situación que se tradujo en la respuesta al planteamiento fue que el estudiante a través de su procedimiento logró reconocer que el producto de 13 x 4 era igual a 52, es decir, un trabajador menos de los que fueron comisionados por la secretaria de Salud, y por ende un trabajador que no formaría parte de ningún equipo.

Solamente una participante de los siete estudiantes utilizó la estrategia Suma Repetida. La Figura 16 muestra claramente que la estudiante pensó en la incógnita del problema en términos de la siguiente pregunta ¿Cuál es el número que sumado 13 veces da como resultado 53 o se aproxima a él? En ese sentido, la niña consideró pertinente obtener los resultados de las sumas: 13 veces 3, 13 veces 4 y 13 veces 5. Una vez que obtuvo los resultados de las tres sumas, procedió a compararlos con el dato que dentro del problema representaba a la cantidad de trabajadores que debían distribuirse entre los treces equipos, llegando así a la conclusión de que al formarse 13 equipos con 4 recursos humanos cada uno, solamente un trabajador quedaría fuera de la actividad.

Figura 16. *Estrategia suma repetida.*

CONCLUSIONES

A pesar de que la muestra fue muy pequeña, se observó que los alumnos de quinto grado de educación primaria utilizaron una variedad de estrategias para resolver los problemas de división partitiva con resto. Específicamente, usaron cinco de las ocho estrategias que se incluyeron como marco de referencia: división, multiplicación, modelación agrupamiento combinada con el conteo a saltos, suma repetida y combinación de estrategias. Las últimas tres acompañadas del cálculo mental y la estrategia de ensayo y error.

Además, se encontró que la estrategia de la división únicamente emergió en dos de los estudiantes cuando resolvieron específicamente el problema de los globos, el problema que implicaba una respuesta en términos de un Cociente no Decimal. En el mismo sentido, los hallazgos de este trabajo también muestran que para los estudiantes, una misma estrategia no suele ser considerada adecuada para resolver los cuatro problemas de división partitiva con resto, ya que solamente una de los siete participantes utilizó un mismo procedimiento para resolver tres de los cuatro problemas (el problema del tipo RCIP, el problema del tipo RND y el problema RR), tal estrategia fue la *Estrategia de modelacion agrupamiento combinada con la estrategia conteo a saltos.*

Se logró identificar que las respuestas que los niños dan cuando utilizan lápiz y papel no siempre representan lo que nuestros ojos ven a simple vista. Esta situación se apreció claramente al momento de contrastar las evidencias escritas con las explicaciones que los estudiantes externaron durante las entrevistas en términos de la estrategia que utilizaron al resolver el problema del tipo RD. Previo a las entrevistas se llegó a pensar que los participantes habían utilizado una variedad de estrategias para resolver el problema de los cuatros amigos y la compra del balón. No obstante, los entrevistados dejaron ver que las cosas que vemos no son siempre las que parecen, pues todos ellos coincidieron en que habían utilizado un mismo procedimiento para enfrentar el problema, aun cuando sus productos escritos evidenciaban otra cosa.

En otras palabras, si en este trabajo la recolección de los datos se hubiera limitado solamente al análisis del cuestionario escrito se hubiera cometido el error de asegurar que los participantes habían utilizado las estrategias Suma repetida, Modelación Agrupamiento y Multiplicación para dar respuesta al problema de la compra del balón. Evidentemente, los intercambios verbales entre los entrevistados y el entrevistador dejaron ver un procedimiento muy diferente a los que se apreciaban en las evidencias escritas, el cual consistió en descomponer el número, tomar como referencia el valor relativo, trabajar el reparto de forma separada y finalmente aplicar la regla de combinación de la suma. Desde esta perspectiva se reconoce la necesidad de que los maestros dispongan de un momento de su clase para escuchar a sus alumnos, ya que seguramente los niños siempre tendrán algo que decir sobre la forma en que ellos resuelven los problemas.

Estos resultados difieren de lo evidenciado en Ivars y Fernandes (2016) y Zorrilla et al., (2021) quienes afirmaban que los estudiantes, a partir del tercer curso de educación primaria, tienden a utilizar casi exclusivamente la aplicación del algoritmo de la división de manera mecánica y el uso del resto de estrategias correctas tiende a desaparecer.

Estudios como este, de tipo descriptivo, pueden ser herramientas útiles para los docentes, ya que bridan la oportunidad de anticipar, imaginar, organizar y proyectar qué es lo que puede suceder en el aula y las maneras posibles de encarar diferentes situaciones que pueden ocurrir. Además de ello, este tipo de investigaciones les brinda a los maestros la oportunidad de conocer el pensamiento matemático de sus estudiantes y, en ese sentido, de interpretar las respuestas que den en torno a este tipo de problemas, yendo más allá del hecho de determinar si la respuesta es correcta o incorrecta, además de ello, les permite examinar y comprender procedimientos de resolución de problemas no usuales.

Evidentemente, algunos estudiantes suelen utilizar procedimientos alternativos a la división cuando estos se enfrentan a problemas que implican un reparto. Desde esta perspectiva, los hallazgos de este trabajo le permiten al docente conocer, estar preparado y abierto a la posibilidad para encontrar dentro de sus salones de clases a alumnos que al resolver un problema de división partitiva con resto no forzosamente, después de comprender el problema, coloquen la galera y, dentro y fuera de ella escriban respectivamente los números que representan el dividendo y el divisor, y una vez que hayan hecho eso proceden a resolver la división de la forma en que se la hayan enseñado.

Finalmente, puedo decir que la realidad tan compleja que se vive día con día dentro de las aulas les demanda a los docentes la necesidad de conocer estas y otras estrategias que los estudiantes utilizan al enfrentarse a los problemas de división con resto. En primer lugar, porque contar con un repertorio de estrategias mucho más amplio lo ponen en posibilidades de comprender mejor el pensamiento de cada uno de sus estudiantes, situación que se traduce en un mejor acompañamiento durante el proceso de resolución de problemas de cada uno de ellos. En segundo lugar, porque contar con un repertorio de estrategias mucho más amplio lo pone en posibilidades de poder enseñarle a sus estudiantes que el algoritmo de la división sólo es una de las varias estrategias que existen y que se pueden utilizar para dar respuesta a los problemas de reparto, de ahí que si un maestro le enseña a sus aprendices todas estas estrategias posibles de solución puede traer como consecuencia que los estudiantes se muevan entre uno y otro procedimiento, contrastar los resultados que obtienen al utilizar una y otra estrategia y, a partir de ello, puedan minimizar sus errores al momento de dar una respuesta a algún problema.

REFERENCIAS

Arnal, J., Del Rincón, D. y Latorre, A. (1992). *Investigación educativa fundamentos y metodología.* Editorial Labor, S.A.

Peñalosa, S. (2009). La resolución de problemas y el pensamiento numérico en los procesos de enseñanza-aprendizaje significativos de la división. *Revista Interamericana de -Investigación, Educación y Pedagogía*, *2*(2), 75-90. https://doi.org/10.15332/s1657-107X.2009.0002.06

Barwell, R. (2011). Word Problems connecting language, mathematics and life. *What Works*, 3-4.

Block, D., Mendoza, T. y Ramírez, M. (2010) *¿Al doble le toca el doble? La enseñanza de la proporcionalidad en la educación básica.* SM de Ediciones.

Borba, R. E. y Selva, A. C. (2006, del 15 al 18 de octubre). Alunos de 3ª e 5ª séries resolvendo problemas de divisão com resto diferente de zero: o efeito de representações simbólicas, significados e escolarização [Trabajo de investigación]. *29ª Reunião anual da associação nacional de pós-graduação e pesquisa em educação ANPEd*, Caxambu MG, Brasil. http://29reuniao.anped.org.br/trabalhos/trabalho/GT19-1693--Int.pdf

Cházoro, E. (2020). *Cómo terminar mi tsis cuando es cualitativa, paso a paso.* Editorial Puente.

Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2007). *Research methods in education* (6ª ed.). Routledge.

De Lima, R. y Carvalho, M. (2013). Algumas estratégias de resolução de problemas de divisão. *Boletim GEPEM*, 62, 87-100. https://doi.org/10.4322/gepem.2014.025

Díaz, M. V. y Poblete, Á. (2001). Contextualizando tipos de problemas matemáticos en el aula. *Números Revista de didáctica de las matemáticas*, *45*(3) 33–41. https://mdc.ulpgc.es/files/original/e5f2a48f1312b83ee2b16eb7386454e312245015.pdf

Downton, A. P. (2008, del 28 de junio al 1 de julio). Links between children's understanding of multiplication and solution strategies for division [Conferencia]. *31st Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia. Navigating currents and charting directions*. Brisbane, Australia.

D´Amore, B. (2006). *Didáctica de la matemática*. Cooperativa Editorial Magisterio.

D´Amore, B., Fandiño, M. I., Marazzani, I. y Sbaragli, S. (2014). *La didáctica y la dificultad en matemática, análisis de situaciones con falta de aprendizaje.* Cooperativa Editorial Magisterio.

Fàbregues, S., Meneses, J., Rodríguez-Gómez, D. y Paré, M-H. (2016). *Técnicas de investigación social y educativa*. Editorial UOC.

Flores, M. (2004). Implicaciones de los paradigmas de investigación en la práctica educativa. *Revista Digital Universitaria*, 5 (1), 2-9

Fraenkel, J., R., Wallen, N. E. y Hyun, H. H. (2011) *How to Design and Evaluate Research in Education* (8ª ed.). New York: McGraw-hill.

Freire, P. (2013) *Por una pedagogía de la pregunta.* Editorial siglo *XXI*

Ginsburg, H. P. (1997). E*ntering the child's mind: The clinical interview in psychological research and practice*. Cambridge University Press.

Hatch, J. A. (2002). *Doing qualitative research in education settings*. Suny Press.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación* (6ª ed.). McGRAW-HILL Educacion.

Hunting, R. P. (1997). Clinical interview methods in mathematics education research and practice. *The Journal of Mathematical Behavior*, *16*(2), 145-165. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(97)90023-7

Ivars, P. y Fernández, C. (2016). Problemas de estructura multiplicativa: Evolución de niveles de éxito y estrategias en estudiantes de 6 a 12 años. *Educación matemática*, *28*(1), 9-38. https://doi.org/10.24844/EM2801.01

Jonker, J. y Pennink, B. (2010). *The essence of research methodology: A concise guide for master and PhD students in management science*. Springer Science y Business Media.

Lago, M. O., Rodríguez, P., Enesco, I. E., Jiménez, L. y Dopico, C. (2008). Me sobran cuatro y no sé qué hacer con ellos. Un estudio sobre los problemas de división con resto en alumnos de 1º de ESO. *Anales de Psicología/Annals of Psychology*, *24*(2), 201-212. https://doi.org/10.6018/analesps

Lago, M. O., Rodríguez, P., Zamora, A. y Madroño, L. (1999). Influencia de los modelos intuitivos en la comprensión de la multiplicación y la división. *Anuario de psicología/The UB Journal of psychology*, 30 (3), 71-90. https://raco.cat/index.php/AnuarioPsicologia/article/view/61427.

Márquez, M., Arredondo, E. H. y García-García, J. I. (2019). Estrategias en la resolución de problemas de división-medida por estudiantes de séptimo básico en Chile. *Revista Espacios, 40*(33), 118-132. a19v40n33p10

Matalliotaki, E. (2012). Resolution of division problems by young children: what are children capable of and under which conditions?. *European early childhood education research journal*, *20*(2), 283-299. https://doi.org/10.1080/1350293X.2012.681132

Orrantia, J. (2006) Dificultades en el aprendizaje de las matemáticas: una perspectiva evolutiva. *Revista Psicopedagogía*, 23(71), 158-180.

Parra, B. M. (1990). Dos concepciones de resolución de problemas de matemáticas. *Educación matemática*, *2*(3), 22-31. https://doi.org/10.24844/EM0203.04

Pacheco-Muñoz, E., Nava-Lobato, S., Juárez-López, J. A. y Ponce de León-Palacios, M (2023). Division problems with remainder: A study on strategies and interpretations with fourth grade Mexican students, *Mathematics Teaching Research Journal*, 15(2), 120-141.

Pólya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. Editorial Trillas

Rodríguez, P., Lago, M. O., Hernández, M. L., Jiménez, L., Guerrero, S. y Caballero, S. (2009). How do secondary students approach different types of division with remainder situations? Some evidence from Spain. *European journal of psychology of education*, 24 (4), 529-543.

Saiz, I. (1994). Dividir con dificultad o la dificultad de dividir. *Parra y Saiz.*

Sánchez, J. G. (2006). *El proceso de investigación de Tesis, un enfoque contextual.* Univ. Iberoamericana.

Santamaría, J. S. (2013). Paradigmas de investigación educativa: de las leyes subyacentes a la modernidad reflexiva. *Entelequia: revista interdisciplinar*, 16 (6), 91-102.

Schoenfeld, A. H. (1987). *Cognitive cience and Mathematics Education*. Lawrence Erlbaum. https://doi.org/10.4324/9780203062685

SEP (2012) *Programa de estudios 2011 guía para el maestro, educación básica, quinto grado.* SEP.

Silver, E. A., Shapiro, L. J. y Deutsch, A. (1993). Sense making and the solution of division problems involving remainders: An examination of middle school students' solution processes and their interpretations of solutions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *24*(2), 117-135. https://doi.org/10.2307/749216

Socas, M. M. (2007, del 4 al 7 de septiembre). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico [Ponencia]. *comunicaciones de los grupos de investigación del XI Simposio de la SEIEM*, La Laguna, España.

Stake, R. E. (1998). *Investigación con estudio de caso* (2ª Ed.). Morata.

Zorrilla, C., Ivars, P. y Fernández, C. (2021). Problemas realistas de división con resto: Un estudio sobre las estrategias en educación primaria. *Revista mexicana de investigación educativa*, *26*(91), 1313-1339.