



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

**RELACIONES ENTRE SUBDOMINIOS DEL CONOCIMIENTO
ESPECIALIZADO DE DOS PROFESORES DE MATEMÁTICAS.
UN ACERCAMIENTO DESDE LA RESOLUCIÓN
DE PROBLEMAS MULTIPLICATIVOS**

TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE
MAESTRA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

PRESENTA

LIC. LINA MARCELA TASCÓN CARDONA

DIRECTORA DE TESIS

DRA. ESTELA DE LOURDES JUÁREZ RUÍZ

CO-DIRECTORA DE TESIS

DRA. LETICIA SOSA GUERRERO

PUEBLA, PUE. MAYO 2024

Este trabajo de investigación fue realizado gracias al apoyo financiero del Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías (Conahcyt), mediante la Beca de Maestría Nacional otorgada durante el periodo enero 2022 a diciembre de 2023. N° 1180008.

AGRADECIMIENTOS

Con toda la humildad que mi corazón pueda emanar, dedico primeramente esta investigación a Dios. Al creador de todas las cosas, al que me ha dado la fuerza necesaria para continuar cuando a punto de caer he estado.

Han sido dos años de arduo trabajo, momentos de pausa entre el ánimo y el desaliento por ver la meta aún lejana. Pero finalmente se hizo realidad este sueño que apoyaron muchas personas, por lo que, esta investigación también está dedicada a todos los que creyeron y siguen creyendo en mí.

A Guadalupe y Emmanuel, gracias por llegar y cambiar nuestra visión del mundo.

A mí madre y hermanos, ¡Gracias por tanto y por todo!

A Ruby, gracias por sus consejos, por estar siempre para mí y por motivarme a recorrer este camino.

A la Dra. Estela Juárez, gracias por ser la mejor asesora y guía que se pueda desear en la vida. Gracias por motivarme a investigar sobre el MTSK. Gracias por creer en mí y por animarme en los momentos de dificultad. Espero que sigamos compartiendo e investigando.

Gracias a las Dras. Leticia Sosa y Lidia Hernández, quienes con sus comentarios y aportes contribuyeron a la mejora de esta investigación.

Gracias a todos los profesores de la Maestría en Educación Matemática de la BUAP.

A mis compañeros colombianos, gracias por enseñarme que es mejor tener amigos que plata. A los mexicanos que llegaron a mí vida en este proceso, gracias por abrirme las puertas de sus hogares y de sus corazones. Me quedan grandes recuerdos de ustedes, de Puebla y de México.

ÍNDICE

| | |
|---|----|
| Resumen | 1 |
| Abstract | 2 |
| Introducción | 3 |
| Capítulo 1 | 7 |
| ASPECTOS GENERALES DE LA INVESTIGACIÓN | 7 |
| 1.1 Planteamiento del problema | 7 |
| 1.2 Preguntas de investigación | 10 |
| 1.2.1 Pregunta general | 10 |
| 1.2.2 Pregunta Específica | 10 |
| 1.3 Objetivos de la investigación..... | 10 |
| 1.3.1 Objetivo general..... | 10 |
| 1.3.2 Objetivo específico | 10 |
| 1.4 Supuesto de la Investigación | 10 |
| 1.5 Justificación..... | 11 |
| 1.6 Viabilidad de la investigación | 13 |
| Capítulo 2 | 14 |
| FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA..... | 14 |
| 2.1 Antecedentes del Modelo MTSK | 14 |
| 2.2 Modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK)..... | 16 |
| 2.2.1 Subdominios del modelo MTSK..... | 17 |
| 2.2.2 Relaciones entre subdominios de conocimiento del MTSK | 18 |
| 2.3 Enseñanza a través de la Resolución de Problemas Matemáticos..... | 19 |
| Capítulo 3 | 22 |
| METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN..... | 22 |
| 3.1 Paradigma de la investigación | 22 |
| 3.2 Tipo de investigación..... | 24 |

| | |
|--|-----|
| 3.3 Diseño de la Investigación..... | 24 |
| 3.4 Descripción de los informantes | 25 |
| 3.5 Técnicas e instrumentos de recolección de la información | 26 |
| 3.6 Instrumento de análisis de los datos | 27 |
| Capítulo 4 | 31 |
| ANÁLISIS Y RESULTADOS | 31 |
| 4.1 Relaciones establecidas del conocimiento especializado de Julia..... | 31 |
| 4.2 Relaciones establecidas del conocimiento especializado de Alan..... | 59 |
| 4.3 Análisis de las relaciones encontradas..... | 115 |
| Conclusiones | 125 |
| Referencias | 130 |
| Anexos..... | 138 |
| Anexo A: Descriptores de conocimiento..... | 138 |
| Anexo B Planeación de clase Propuesta por Julia..... | 149 |
| Anexo C Planeación de clase Propuesta por Alan..... | 154 |

ÍNDICE DE TABLAS

| | |
|---|----|
| Tabla 1. Ejemplos de descriptores elaborados para cada categoría | 28 |
| Tabla 2. Categorías y descriptores evidencias del subdominio KMLS..... | 32 |
| Tabla 3. Categorías y descriptores evidenciados de los subdominios KoT y KSM..... | 35 |
| Tabla 4. Categorías y descriptores evidenciados de los subdominios KMT, KFLM y KoT | 38 |
| Tabla 5. Categorías y descriptores evidenciados de los subdominios KMT, KFLM y KPM..... | 41 |
| Tabla 6. Categorías y descriptores evidenciados del subdominio KMLS..... | 44 |
| Tabla 7. Categorías y descriptores evidenciados de los subdominios KMLS y KPM..... | 45 |
| Tabla 8. Categorías y descriptores evidenciados de los subdominios KMLS y KFLM | 48 |
| Tabla 9. Categorías y descriptores evidenciados de los subdominios KFLM, KMLS y KoT | 50 |
| Tabla 10. Categorías y descriptores evidenciados de los subdominios KMLS y KMT..... | 53 |
| Tabla 11. Categorías y descriptores evidenciados de los subdominios KFLM y KMT..... | 55 |
| Tabla 12. Categorías y descriptores evidenciados de los subdominios KFLM, KMT y KPM..... | 57 |
| Tabla 13. Categorías y descriptores evidenciados del subdominio KoT | 60 |
| Tabla 14. Categorías y descriptores evidenciados de los subdominios KoT y KMLS | 62 |
| Tabla 15. Categorías y descriptores evidenciados de los subdominios KSM y KMT | 65 |
| Tabla 16. Categorías y descriptores evidenciados de los subdominios KMT y KPM | 67 |
| Tabla 17. Categorías y descriptores evidenciados de los subdominios KPM, KFLM y KMT | 69 |
| Tabla 18. Categorías y descriptores evidenciados de los subdominios KoT y KMT | 72 |
| Tabla 19. Categorías y descriptores evidenciados de los subdominios KFLM y KMT..... | 75 |
| Tabla 20. Categorías y descriptores evidenciados del subdominio KFLM..... | 77 |
| Tabla 21. Categorías y descriptores evidenciados de los subdominios KoT, KSM y KMT..... | 80 |
| Tabla 22. Categorías y descriptores evidenciados de los subdominios KoT y KSM..... | 82 |
| Tabla 23. Categorías y descriptores evidenciados de los subdominios KoT | 84 |

| | |
|--|-----|
| Tabla 24. Categorías y descriptores evidenciados de los subdominios KoT, KSM y KMLS | 86 |
| Tabla 25. Categorías y descriptores evidenciados de los subdominios KFLM y KMT..... | 89 |
| Tabla 26. Categorías y descriptores evidenciados de los subdominios KoT, KFLM y KMT | 92 |
| Tabla 27. Categorías y descriptores evidenciados de los subdominios KoT, KFLM y KMT | 95 |
| Tabla 28. Categorías y descriptores evidenciados de los subdominios KoT, KSM y KMLS | 97 |
| Tabla 29. Categorías y descriptores evidenciados de los subdominios KoT, KFLM y KMT | 100 |
| Tabla 30. Categorías y descriptores evidenciados de los subdominios KoT y KMT | 103 |
| Tabla 31. Categorías y descriptores evidenciados de los subdominios KoT, KMLS, KFLM, KMT | 105 |
| Tabla 32. Categorías y descriptores evidenciados de los subdominios KFLM, KMLS y KoT ... | 108 |
| Tabla 33. Conocimiento especializado de Alan y Julia evidenciado en las relaciones de conocimiento | 110 |

ÍNDICE DE FIGURAS

| | |
|--|----|
| Figura 1. Modelo del conocimiento especializado del profesor de matemáticas..... | 16 |
| Figura 2. Referentes de calidad utilizados por Julia..... | 31 |
| Figura 3. Relación Intra-subdominio al interior del KMLS..... | 33 |
| Figura 4. Estándar básico de competencias utilizado por Julia..... | 34 |
| Figura 5. Relación de conocimiento Intra-dominio al interior del dominio MK..... | 36 |
| Figura 6. Aprendizajes esperados propuestos por Julia..... | 36 |
| Figura 7. Video utilizado en el diseño de la planeación de clase..... | 37 |
| Figura 8. Actividad propuesta al inicio de la planeación de clase..... | 37 |
| Figura 9. Relaciones de conocimiento Intra-subdominio, Intra-dominio e Inter-dominio..... | 39 |
| Figura 10. Relaciones de conocimiento Intra-dominio e Inter-dominio..... | 42 |
| Figura 11. Conocimientos previos considerados por Julia en el plan de clase..... | 42 |
| Figura 12. Relación intra-subdominio al interior del KMLS..... | 44 |
| Figura 13. Relaciones de conocimiento Inter-dominio entre los subdominios KPM y KMLS..... | 46 |
| Figura 14. Relaciones de conocimiento Intra-subdominio e Intra-dominio al interior del PCK..... | 49 |
| Figura 15. Relaciones de conocimiento Intra-dominio e Inter-dominio..... | 51 |
| Figura 16. Recurso interactivo utilizado por Julia en el desarrollo de la clase..... | 51 |
| Figura 17. Relaciones de conocimiento Intra-subdominio e Intra-dominio..... | 54 |
| Figura 18. Relaciones de conocimiento Intra-dominio al interior del PCK..... | 56 |
| Figura 19. Relaciones de conocimiento Intra-dominio e Inter-dominio..... | 58 |
| Figura 20. Primer estándar de aprendizaje propuesto por Alan..... | 59 |
| Figura 21. Relación de conocimiento Intra-subdominio al interior del KoT..... | 60 |
| Figura 22. Tercer estándar de aprendizaje propuesto por Alan..... | 61 |
| Figura 23. Relación de conocimiento Intra-subdominio al interior del KMLS e Inter-dominio entre el KoT y KMLS..... | 63 |
| Figura 24. Cuarto estándar de aprendizaje propuesto por Alan..... | 63 |
| Figura 25. Actividad propuesta por Alan en la planeación de clase..... | 64 |
| Figura 26. Relación de conocimiento Inter-dominio entre el KSM y KMT..... | 65 |
| Figura 27. Quinto estándar de aprendizaje propuesto por Alan..... | 66 |
| Figura 28. Relaciones de conocimiento Inter-dominio entre los subdominios KMT y KPM..... | 68 |

| | |
|---|-----|
| Figura 29. Relaciones de conocimiento Intra-dominio al interior del PCK y de tipo Inter-dominio | 70 |
| Figura 30. Sexto estándar de aprendizaje propuesto por Alan | 71 |
| Figura 31. Relaciones de conocimiento Intra-subdominio al interior del KoT e Inter-dominio.... | 73 |
| Figura 32. Desempeños de aprendizaje propuesto por Alan..... | 74 |
| Figura 33. Relación de conocimiento Intra-dominio entre el KMT y KFLM..... | 75 |
| Figura 34. Relación de conocimiento Intra-subdominio al interior del KFLM | 78 |
| Figura 35. Indicador de desempeño utilizado en la planeación por Alan | 78 |
| Figura 36. Relaciones de conocimiento Intra-dominio e Inter-dominio | 80 |
| Figura 37. Cuarto indicador de desempeño propuesto por Alan en el plan de clase | 81 |
| Figura 38. Relaciones de conocimiento Intra-dominio al interior del MK entre el KoT y KSM .. | 83 |
| Figura 39. Quinto indicador de desempeño propuesto por Alan en el plan de clase | 83 |
| Figura 40. Relación de conocimiento Intra-subdominio al interior del KoT | 85 |
| Figura 41. Indicador de desempeño propuesto por Alan en el plan de clase | 85 |
| Figura 42. Relaciones de conocimiento Intra-dominio e Inter-dominio | 87 |
| Figura 43. Objetivo de aprendizaje propuesto en la semana uno..... | 88 |
| Figura 44. Relaciones de conocimiento Intra-subdominio e Intra-dominio..... | 90 |
| Figura 45. Momento inicial de la semana uno | 90 |
| Figura 46. Relación de conocimiento Intra-dominio e Inter-dominio | 92 |
| Figura 47. Actividades propuestas en la semana uno..... | 93 |
| Figura 48. Relaciones de conocimiento Intra-dominio e Inter-dominio | 95 |
| Figura 49. Actividades propuestas en la semana uno..... | 96 |
| Figura 50. Relaciones de conocimiento Intra-dominio e Inter-dominio | 98 |
| Figura 51. Video sobre multiplicación propuesto en la semana dos..... | 98 |
| Figura 52. Video sobre división propuesto en la semana dos | 99 |
| Figura 53. Relaciones de conocimiento Intra-dominio e Inter-dominio | 101 |
| Figura 54. Actividad propuesta en la semana dos | 101 |
| Figura 55. Relación de tipo Inter-dominio entre el KoT y KMT | 104 |
| Figura 56. Relación de tipo Intra-dominio e Inter-dominio | 106 |
| Figura 57. Momento de recapitulación propuesto por Alan en la planeación de clase..... | 107 |
| Figura 58. Relaciones de conocimiento Intra-dominio e Inter-dominio | 109 |

Figura 59. Relaciones de conocimiento Intra-subdominio evidenciadas por Alan..... 115

Figura 60. Relaciones de conocimiento Intra-subdominio evidenciadas por Julia 116

Figura 61. Relaciones de conocimiento Intra-dominio evidenciadas por Alan 117

Figura 62. Relaciones de conocimiento Intra-dominio evidenciadas por Julia..... 119

Figura 63. Relaciones de conocimiento Inter-dominio evidenciadas por Alan 120

Resumen

El conocimiento especializado de los profesores de matemáticas en las últimas décadas ha llamado la atención de la investigación en didáctica de la matemática. Se considera que el conocimiento que posee el profesor y la forma de articularlo en su actividad diaria es fundamental en el proceso de enseñanza y aprendizaje. En esta investigación se presenta un análisis sobre las relaciones de conocimiento que evidencian dos profesores de matemáticas de Educación Básica Primaria en el diseño de planeaciones de clase para la enseñanza de la estructura multiplicativa a través de la resolución de problemas. Se considera el modelo *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* (MTSK) como sustento teórico y fue empleado como instrumento de análisis de las evidencias de conocimiento.

El estudio se realizó bajo una metodología cualitativa a través de un estudio de caso de tipo instrumental donde la recolección de datos se llevó cabo a través de planeaciones de clase y una entrevista semiestructurada a cada profesor. Se pudo concluir que los subdominios que más se evidenciaron son el KoT, KMT, KFLM y KMLS. Dentro del dominio Didáctico, se resalta el subdominio KFLM como uno de mayor predominancia. Considerando que, lo que conocen los profesores sobre la forma de interacción de los estudiantes con un contenido matemático, así como lo que saben sobre las teorías de aprendizaje, las fortalezas y dificultades y los aspectos emocionales del aprendizaje de las matemáticas, tiene influencia significativa en el diseño y elección de las actividades, las tareas y recursos que utilizan en su práctica.

Dentro del dominio del Conocimiento Matemático, el KoT es uno de los que más evidencian los profesores, resulta lógico considerando que, el conocimiento mínimo que requiere un profesor de matemáticas es el conocimiento de los contenidos. Además, se logró evidenciar que la Resolución de Problemas Matemáticos como estrategia de enseñanza permite a los docentes desarrollar conocimientos sobre la estructura multiplicativa, permitiendo establecer diversas relaciones de conocimiento entre las diferentes categorías del modelo MTSK.

Palabras clave: Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas, MTSK, relaciones entre subdominios, resolución de problemas, estructura multiplicativa.

Abstract

The specialized knowledge of mathematics teachers has attracted the attention of mathematics didactics research in recent decades. It is considered that the knowledge possessed by the teacher and the way he/she articulates it in his/her daily activity is fundamental in the teaching and learning process. This research presents an analysis of the knowledge relationships evidenced by two mathematics teachers of Primary Basic Education in the design of lesson plans for the teaching of the multiplicative structure through problem solving. Let us consider the Mathematics Teacher Specialized Knowledge (MTSK) model based on the theory and the tool used to analyze the evidences of knowledge.

The study was conducted under a qualitative methodology through a case study of instrumental type where data collection was carried out through lesson plans and a semi-structured interview with each teacher. It was possible to conclude that the subdomains that were most evident were KoT, KMT, KFLM and KMLS. Within the Didactic domain, the KFLM subdomain stands out as one of the most predominant. Considering that, what teachers know about how students interact with mathematical content, as well as what they know about learning theories, strengths and difficulties, and emotional aspects of learning mathematics, has a significant influence on the design and choice of activities, tasks and resources they use in their practice.

Within the domain of Mathematical Knowledge, KoT is one of the most evidenced by teachers, which is logical considering that the minimum knowledge required by a mathematics teacher is knowledge of the contents. In addition, it was evidenced that Mathematical Problem Solving as a teaching strategy allows teachers to develop knowledge about the multiplicative structure, allowing the establishment of different knowledge relationships between the different categories of the MTSK model.

Keywords: Specialized knowledge of the mathematics teacher, MTSK, relations between subdomains, problem solving, multiplicative structure.

Introducción

El conocimiento especializado del profesor de matemáticas ha llamado la atención en la investigación en didáctica de la matemática durante las últimas décadas. El conocimiento que posee el profesor de matemáticas y la forma de articularlo en su actividad diaria son fundamentales en el proceso de enseñanza, es decir, el éxito de los estudiantes depende de lo que el profesor conoce sobre un tema y de la forma de enseñarlo (Mazibe et al., 2020). Para Contreras (2021) las acciones del profesor están centradas en la construcción de conocimiento matemático y para ello pone en juego su conocimiento didáctico. Desde esta perspectiva y siguiendo a Pascual et al. (2021) y Carrillo-Yáñez (2019), el profesor de matemáticas debe poseer un conocimiento amplio y profundo que va más allá del conocimiento exclusivamente disciplinar.

La investigación sobre el conocimiento especializado del profesor de matemáticas también ha centrado sus esfuerzos en identificar y establecer las conexiones entre distintos elementos que lo conforman, considerando que estos se vinculan y se relacionan entre sí (Contreras, 2021). Al respecto, Escudero-Ávila et al. (2017) indican que el estudiar la forma en la que se relacionan los conocimientos del profesor de matemáticas, permite comprender desde distintas perspectivas aspectos concretos de un mismo contenido matemático.

Por lo anterior, en la presente investigación se analizan las relaciones del conocimiento especializado que dos profesores de matemáticas de educación primaria de Colombia evidencian en la enseñanza de la multiplicación y división a través de la resolución de problemas, ejemplificándolas a partir de planeaciones de clase. La aproximación a dichas relaciones se realiza a partir del modelo MTSK como perspectiva teórica y metodológica, que permite estudiar dicho conocimiento en diferentes contextos y situaciones propios de la educación matemática.

El modelo MTSK se considera una herramienta teórica y metodológica que permite estudiar el conocimiento profesional de los profesores de matemáticas. Está dividido en tres dominios: dominio del Conocimiento Matemático (MK), dominio del Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK) y en el centro del modelo se sitúan las creencias y concepciones del profesor sobre la matemática, su enseñanza y aprendizaje que permean todo el conocimiento en su conjunto (Contreras, 2021). Por la forma en la que está estructurado el modelo, podría considerarse el conocimiento del profesor como un conjunto de elementos aislados y fragmentados, pero contrario a esta consideración, el modelo disecciona artificialmente el conocimiento para una mejor

comprensión, considerándolo integrado y relacionado (Contreras, 2021; Vasco y Climent, 2021). El dominio del Conocimiento Matemático se conforma de los subdominios: conocimiento de los temas; conocimiento de la estructura matemática; conocimiento de la práctica matemática. El dominio del Conocimiento Didáctico del contenido se compone de los subdominios: conocimiento de la enseñanza de las matemáticas; conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas; conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas. En la presente investigación se tuvieron en cuenta los dominios MK y PCK, considerando cada uno de sus subdominios y categorías de conocimiento.

El objetivo principal de esta investigación es establecer relaciones entre subdominios del conocimiento especializado que manifiestan dos profesores de matemáticas de educación básica primaria en el diseño de una planeación de clase para la enseñanza la estructura multiplicativa a través de la de resolución de problemas, basados en la clasificación de relaciones propuesta por Delgado-Rebolledo y Espinoza-Vásquez (2021).

Algunas investigaciones ponen en evidencia la posibilidad de establecer diferentes relaciones entre los subdominios del modelo. En Delgado-Rebolledo y Zakaryan (2020) por ejemplo, se estudia el conocimiento especializado de un profesor de matemáticas de nivel universitario logrando establecer relaciones entre el subdominio KPM y los subdominios KMT y KFLM. En Espinoza-Vásquez et al. (2018) se estudia el conocimiento especializado del profesor de matemáticas en el uso de la analogía en la enseñanza del concepto de función en secundaria estableciendo relaciones entre los subdominios KoT, KSM, KMT y KFLM, con mayor predominancia del KoT. Del mismo modo, se han realizado investigaciones que hacen uso de las planeaciones de clase como escenario que permite estudiar el conocimiento especializado de los profesores de matemáticas teniendo en cuenta diferentes contenidos matemáticos (Pacheco-Muñoz et al., 2022; Otero-Valega et al., 2023; Paternina-Borja y Juárez-Ruíz, 2023).

Se resalta en esta investigación el vínculo entre el subdominio de la práctica matemática con los subdominios del conocimiento de la enseñanza de las matemáticas y características del aprendizaje de las matemáticas. También, se pudo observar que existen similitudes y diferencias entre el conocimiento especializado de ambos profesores. Se evidenciaron relaciones de conocimiento en ambos dominios del modelo. El profesor, por su parte, evidenció un conocimiento

más rico en el dominio del Conocimiento Matemático y la profesora evidenció más relaciones al interior del Conocimiento Didáctico del Contenido.

Esta investigación se divide en cuatro capítulos: en el primero se presentan los aspectos generales de la investigación. Se inicia con el planteamiento del problema, sus antecedentes y una revisión literaria que permite argumentar la problemática existente en torno a las operaciones de multiplicación y división y su importancia en el desarrollo del pensamiento matemático. Se resalta la necesidad de estudiar el conocimiento profesional que los profesores ponen en evidencia al momento de recurrir a la resolución de problemas como estrategia de enseñanza. Seguido, se realiza la formulación de las preguntas que orientan la investigación y posteriormente se plantea el objetivo general y los objetivos específicos. Luego, se presenta el supuesto de la investigación y la justificación donde se argumenta la importancia de estudiar las relaciones entre el conocimiento especializado de los profesores cuando enseñan las operaciones que aquí se abordan considerando la resolución de problemas. Por último se presenta la viabilidad de la investigación.

En el segundo Capítulo, se desarrollan los aportes teóricos que sustentan la investigación. Inicialmente se abordan las bases del modelo MTSK considerando a Shulman (1987) y Ball et al. (2008). Luego se presenta la estructura del modelo MTSK propuesto por Carrillo-Yáñez et al. (2018), teniendo en cuenta sus dominios, subdominios y categorías de conocimiento. Posteriormente se expone la forma en la que se establecen las relaciones de conocimiento: intra-dominio, intra-subdominio e inter-dominio (Delgado- Rebolledo y Espinoza-Vásquez. 2021), presentando algunos ejemplos de investigaciones sobre estas relaciones.

En el tercer Capítulo, se presenta la metodología de la investigación donde se aborda el paradigma de la investigación, en este caso, de carácter interpretativo. Además, se realiza una caracterización del estudio de casos y el diseño de la investigación. Se presentan las técnicas e instrumentos de recolección de los datos tales como la entrevista semiestructurada y la planeación de clase. También se expone el procedimiento de análisis de la información teniendo en cuenta el modelo MTSK y la triada evidencia-Indicio-Oportunidad. Por último se realiza una descripción de los informantes (una profesora y un profesor de matemáticas de Colombia).

En el cuarto Capítulo, se presenta el análisis de la información recolectada de los dos informantes y los resultados de la investigación. Se establecen las relaciones entre los subdominios

de su conocimiento especializado. Además, se presentan las diferencias y similitudes entre el conocimiento evidenciado por ambos profesores.

Por último, se presentan las conclusiones de la investigación. En este apartado se resalta que los resultados de esta investigación permiten evidenciar que la planeación de clase representa un escenario que proporciona oportunidades para estudiar el conocimiento especializado de los profesores de matemáticas. También se resalta la Resolución de Problemas Matemáticos como estrategia de enseñanza que permite a los docentes desarrollar conocimientos sobre la estructura multiplicativa, brindando la oportunidad de establecer diversas relaciones de conocimiento entre las diferentes categorías del modelo MTSK.

Capítulo 1

ASPECTOS GENERALES DE LA INVESTIGACIÓN

1.1 Planteamiento del problema

Uno de los intereses en los últimos años en el campo de la investigación en Educación Matemática, ha sido caracterizar el conocimiento profesional que manifiestan los maestros en su quehacer diario. Algunos autores concuerdan en que se hace necesario analizar la naturaleza de su conocimiento, su organización, las características que lo conforman, el grado de conocimiento que poseen y que deberían poseer para poder realizar una práctica docente adecuada (Carrillo-Yáñez et al., 2015a; Carrillo-Yáñez et al., 2018; Carrillo-Yáñez y Martín, 2019).

El conocimiento que posee el educador sobre la materia que enseña es una condición necesaria pero no suficiente para llevar a cabo una buena práctica (Carrillo-Yáñez et al., 2018; Carrillo-Yáñez et al., 2019). El profesor de matemáticas no solo debe conocer y dominar los contenidos propios de la disciplina, sino también es importante que conozca cómo se debe estructurar y organizar la materia de forma tal que sea plausible para ser enseñada, es decir, los profesores de matemáticas deben conocer la materia de una manera diferente a otros profesionales de las matemáticas (Carrillo-Yáñez et al., 2018).

Desde este punto de vista, no se trata únicamente de dominar el contenido disciplinario: conocer las definiciones, los teoremas, los objetos matemáticos, sus relaciones, sus procedimientos, etc., sino que también, los profesores deben conocer las aplicaciones y contextos donde esos contenidos cobran sentido, las formas de representación, las conexiones que poseen con otros contenidos y las estrategias utilizadas en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. El conocimiento del profesor de matemáticas debe ser mucho más amplio y profundo que el conocimiento matemático escolar (Carrillo-Yáñez et al., 2016; Carrillo-Yáñez et al., 2018), también debe poseer un amplio conocimiento didáctico de los contenidos, pues ese conocimiento es el que le permite organizar y gestionar una práctica significativa a través de diversas estrategias y recursos de aprendizaje (Carrillo-Yáñez et al., 2019).

Ahora bien, gran parte del currículo matemático en la educación básica primaria se dedica a comprender el concepto de las operaciones básicas. Además, el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 1998) de Colombia indica que, “la mayor parte de las actividades de la vida diaria de una persona y en la mayoría de las profesiones se exige el uso de la aritmética” (p. 26). No obstante, aunque hacen parte de los conceptos más importantes “es en la aritmética donde los alumnos encuentran más dificultades, puesto que estos son los contenidos a los que se enfrentan en primer lugar, además de que posiblemente sean la base en la que se asientan los demás contenidos” (Orrantia, 2006, p. 66).

En cuanto a las operaciones básicas de multiplicación y división, algunos autores han puesto de manifiesto que la comprensión de sus procesos y significados son mucho más complejos que la adición y la sustracción. Además, se considera a la estructura multiplicativa como una de las estructuras más ricas en el campo matemático no solo por su nivel conceptual sino también porque posee un amplio campo de aplicación (MEN, 1998; Carrillo-Yáñez et al., 2019).

Se han seleccionado para efectos de esta investigación los conceptos de multiplicación y división, considerando que son parte fundamental del currículo de todos los niveles educativos. Además, estos contenidos se abordan en los diferentes programas de formación de profesores, pero en la práctica siguen siendo motivo de conflictos didácticos y, a pesar de su importancia, en la educación básica se privilegia su enseñanza por medio de algoritmos tradicionales y reglas para su realización que, en la mayoría de los casos, los estudiantes llevan a cabo de forma mecánica sin realizar un proceso adecuado de comprensión sobre los conceptos que los fundamentan (MEN, 1998). Al respecto, Ribeiro (2009) manifiesta que, los docentes dejan de lado el uso de la resolución de problemas como medio para promover el aprendizaje de los estudiantes, llevando a cabo una enseñanza con contenidos exclusivamente matemáticos, reafirmando que el conocimiento didáctico que poseen los maestros incide de forma significativa en el aprendizaje que ofrecen a sus educandos.

Por otra parte, la resolución de problemas ha sido uno de los campos que más ha llamado la atención en la investigación en didáctica de la matemática. Muchas investigaciones han buscado comprender la manera en la que se enfrentan los estudiantes con

la actividad de resolver problemas, las tareas que se les presentan, las características individuales de los estudiantes, las formas de evaluación; buscando identificar aquellos aspectos que influyen en este proceso y en el aprendizaje mismo de los estudiantes (Godino et al., 2003). De acuerdo con Carrillo-Yáñez et al. (2019):

La naturaleza intrínseca de las matemáticas a través de la resolución de problemas, dando prioridad a la autonomía del alumno, hace que el aula de matemáticas sea un escenario impredecible, y es el acervo de conocimientos del profesor lo que le permitirá reconfigurar sus guiones. (p. 298)

Desde esta perspectiva, la actividad matemática basada en la resolución de problemas le exige al docente una movilización constante de su conocimiento especializado, y “para que el docente sea totalmente instrumental en su función, su conocimiento profesional de las matemáticas y la resolución de problemas es crucial” (Carrillo-Yáñez et al., 2019, p. 298).

Considerando lo expuesto hasta el momento, parece relevante realizar una investigación que permita, no solo identificar qué conoce el profesor de matemáticas, sino cómo lo conoce y cómo lo utiliza en el proceso de enseñanza de las matemáticas a través de la resolución de problemas multiplicativos. Para abordar la pregunta de investigación se ha decidido utilizar el modelo del *Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (MTSK por sus siglas en inglés), considerando que permite analizar el conocimiento especializado del profesor en la enseñanza teniendo en cuenta los conocimientos matemáticos y didácticos, además, permite analizar las creencias del profesor respecto a las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje (Carrillo-Yáñez et al., 2015a; Carrillo-Yáñez et al., 2015b; Contreras et al., 2017; Carrillo-Yáñez et al., 2019).

En relación con lo anterior, se considera fundamental analizar cómo se establecen relaciones entre los distintos subdominios, puesto que permiten la comprensión en profundidad de los conocimientos que involucran los maestros cuando abordan cualquier contenido matemático. Al respecto, Escudero-Ávila et al. (2017) manifiestan que el análisis de relaciones específicas entre los dominios y subdominios de conocimiento permiten refinar la observación de aspectos concretos del conocimiento y generar distintas perspectivas o formas de conocer un determinado contenido matemático para usarlo como objeto de

enseñanza y aprendizaje, que es precisamente el conocimiento que el profesor debe tener sobre los objetos.

1.2 Preguntas de investigación

1.2.1 *Pregunta general*

¿Qué relaciones entre subdominios del conocimiento especializado manifiestan dos profesores de matemáticas de educación básica primaria en el diseño de una planeación de clase para enseñanza de la estructura multiplicativa a través de la resolución de problemas?

1.2.2 *Pregunta Específica*

¿Cuál es el conocimiento especializado que manifiestan dos profesores de matemáticas de educación básica primaria en el diseño de una planeación de clase en la enseñanza de la estructura multiplicativa a través de la de resolución?

Para lograr dar respuesta a las preguntas planteadas se proponen los siguientes objetivos de investigación:

1.3 Objetivos de la investigación

1.3.1 *Objetivo general*

Establecer relaciones entre subdominios del conocimiento especializado que manifiestan dos profesores de matemáticas de educación básica primaria en el diseño de una planeación de clase en la enseñanza la estructura multiplicativa a través de la de resolución de problemas.

1.3.2 *Objetivo específico*

Identificar el conocimiento especializado que manifiestan dos profesores de matemáticas de educación básica primaria en la enseñanza a través de la resolución de problemas multiplicativos.

1.4 Supuesto de la Investigación

El modelo MTSK permite comprender el conocimiento que movilizan los maestros al momento de enseñar cualquier contenido matemático, además permite establecer las relaciones entre los distintos subdominios del modelo (Muñoz-Catalán et al. 2015; Escudero-Ávila et al. 2017; Aguilar-Gonzales, 2018; Delgado-Rebolledo y Espinoza-Vásquez, 2021). En la enseñanza de las matemáticas a través de la resolución de problemas multiplicativos,

por ejemplo, es posible relacionar cómo algunos recursos materiales y virtuales (KMT) utilizados en la enseñanza contribuyen en los procedimientos realizados por los estudiantes en la solución de las tareas propuestas (KoT) y también en cómo el profesor conoce los aspectos de la vida cotidiana y del entorno que despiertan el interés y la motivación de los estudiantes en su aprendizaje (KFLM). También permite relacionar los contenidos matemáticos (KMLS) con las tareas que potencializan el aprendizaje y las estrategias y las técnicas necesarias para su enseñanza (KMT), y la forma de proceder en la resolución de problemas (KPM) involucrando los conocimientos previos (KSM) que permitan modelar la situación y resolverla (KoT).

1.5 Justificación

La enseñanza de las matemáticas a través de la resolución de problemas procedentes de la vida diaria y de otras ciencias, es el camino adecuado para el desarrollo del pensamiento y para contribuir tanto al sentido como a la utilidad de las matemáticas. A pesar de ello, tradicionalmente las matemáticas han sido enseñadas de manera formal y abstracta sin un contexto y sin un sentido, y con frecuencia la resolución de problemas se relega para el final de los programas o en muchas ocasiones no logran ser abordados por falta de tiempo (MEN, 1998).

Se debe reconocer que la resolución de problemas es una parte integral e importante en cualquier aprendizaje matemático, y no debe ser uno de los fines de la enseñanza sino el medio por el cual se logra el aprendizaje. No sólo se debe pensar en la actividad de resolución de problemas como un contenido más del currículo, sino que se debe considerar como uno de los vehículos principales cuando se busca conseguir aprendizajes matemáticos significativos (MEN, 1998; Godino et al., 2003; Blanco, 2015; Secretaría de Educación Pública [SEP], 2017).

En el proceso de aprendizaje basado en la resolución de problemas, el profesor tiene un papel relevante, considerando que es quien debe seleccionar y adecuar los recursos y estrategias con que permitirá a sus estudiantes el acceso al conocimiento matemático (SEP, 2017), donde el objetivo en la enseñanza de las matemáticas debe ser no solamente que los estudiantes resuelvan problemas de los cuales ya conocen su solución, sino que deben ser preparados para enfrentarse a problemas que aún no conocen. Por tal motivo, el profesor debe

realizar un trabajo autentico, permitiendo a los estudiantes vincular sus conocimientos previos para solucionarlos (Godino et al., 2003), considerando que en el proceso de resolución de problemas no se trata de transmitir reglas, métodos o trucos, sino que, por el contrario, pretende que los estudiantes desarrollen estrategias a partir de sus propias experiencias (Blanco, 2015).

El proceso de enseñanza de las matemáticas a través de la resolución de problemas es fundamental, considerando que permite que el maestro involucre a sus estudiantes en el proceso de aprendizaje de forma activa a partir de la reflexión y la comunicación, logrando que descubran su propio estilo, sus capacidades y sus limitaciones. Godino et al. (2003), al respecto manifiestan que:

Los estudiantes aprenden matemáticas por medio de las experiencias que les proporcionan los profesores. Por tanto, la comprensión de las matemáticas por parte de los estudiantes, su capacidad para usarlas en la resolución de problemas, y su confianza y buena disposición hacia las matemáticas están condicionadas por la enseñanza que encuentran en la escuela. (p. 68)

En el caso particular de las operaciones básicas, están presentes desde los primeros grados de escolaridad y a medida que avanza el nivel escolar el grado de complejidad en su aprendizaje también aumenta, por tal motivo se hace indispensable que los estudiantes cuenten con una buena formación desde los primeros grados considerando que son la base para la construcción de otros conocimientos más avanzados. Por ejemplo, en el aprendizaje del álgebra en la educación secundaria es indispensable que los estudiantes cuenten con bases sólidas en la aritmética para que logren vincular los conocimientos previos con los nuevos conocimientos. También, según Zakaryan y Ribeiro (2016), las dificultades que presentan los estudiantes en el aprendizaje de los números racionales pueden estar relacionado con el desarrollo débil del razonamiento multiplicativo.

La investigación en educación matemática comprende diversas situaciones, preocupaciones y fenómenos. Una de esas preocupaciones está relacionada precisamente con los conocimientos que poseen los profesores y la toma de decisiones en su actividad diaria (Schoenfeld, 2010). Por tal motivo, para lograr analizar relaciones entre subdominios del conocimiento especializado del profesor de matemáticas se utilizará el modelo MTSK,

teniendo en cuenta que considera un conjunto de dominios, subdominios y categorías que permiten identificar tanto el conocimiento matemático como el conocimiento didáctico del contenido.

La evidencia de las relaciones que exponen los maestros entre conocimientos se pueden considerar parte de cómo conoce el profesor las matemáticas, su enseñanza y su aprendizaje, por lo cual las relaciones sustentan una visión del conocimiento especializado del profesor como un conocimiento en acción, dinámico y conectado (Delgado-Rebolledo y Espinoza-Vásquez, 2021). Además, permiten reconocer diferentes perspectivas o formas de comprender un mismo contenido matemático y usarlo como objeto de enseñanza que es precisamente el conocimiento que debe tener el profesor de matemáticas (Escudero-Ávila et al., 2017).

Por lo expresado anteriormente, se pretende con este proyecto de investigación profundizar en los conocimientos matemáticos, didácticos y curriculares que exhiben los profesores en su intención de enseñanza, con el objetivo de ofrecer herramientas tanto a los profesores participantes, como también a futuros profesores y profesores en ejercicio, que permitan una mejora en sus prácticas educativas. Esto es posible, resaltando que, es en la reflexión sobre la práctica donde se logran identificar y buscar soluciones a problemas concretos de la educación matemática.

1.6 Viabilidad de la investigación

La presente investigación es viable considerando que cuenta con los recursos materiales y humanos para ser llevada a cabo. Además, es importante resaltar que los informantes seleccionados tienen una formación en el campo de la educación matemática y cuentan con varios años de experiencia en la labor docente aspecto que enriquece y aporta elementos de valor para el propósito de la investigación.

Esta investigación se realiza de acuerdo con las directrices establecidas desde el programa de posgrado de Maestría en Educación Matemática y el financiamiento del Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías (Conahcyt), de enero de 2022 a diciembre de 2023 No. De CVU 1180008.

Capítulo 2

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

En este apartado se presentan las bases teóricas que fundamentan la elaboración de esta investigación. Se hace énfasis en los aportes teóricos del Modelo MTSK, abordando los dominios, subdominios y categorías que lo conforman.

2.1 Antecedentes del Modelo MTSK

El conocimiento profesional del profesor de matemáticas ha atraído el interés de diversos grupos de investigación en Didáctica de la Matemática. En las últimas décadas se han realizado diversas investigaciones en diferentes países con el propósito de avanzar en la definición y organización de dicho conocimiento (Reyes y Sosa, 2017), desarrollando diversas propuestas teóricas que permiten el análisis y la conceptualización del conocimiento especializado que requiere y utiliza el profesor de matemáticas para la enseñanza.

En el intento por estudiar el conocimiento del profesor, Shulman (1986) realiza un estudio en el que propone tres dominios: El Conocimiento de la Materia (SMK), el Conocimiento Curricular (CK), y un dominio especial del conocimiento del profesor, el cual denomina Conocimiento Pedagógico del Contenido (PCK). Este dominio es la mayor contribución del trabajo de Shulman, pues centra la atención en el papel de la enseñanza del contenido de la materia, considerando que, para que el proceso de enseñanza sea de alta calidad se requiere de un conocimiento profesional sofisticado (Ball et al., 2008)).

Más tarde y tomando como referencia el trabajo de Shulman (1986), Ball et al. (2008) proponen un nuevo modelo denominado Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT). Este modelo toma como base dos de los dominios presentados por Shulman: SMK y PCK, y emerge como un modelo de conocimiento propio del profesor de matemáticas (Escudero et al., 2012). El dominio SMK se divide en tres subdominios: Conocimiento del Contenido Común (CCK), se considera como aquel conocimiento y habilidad matemática que posee un individuo bien educado y que se utiliza en contextos distintos al de la enseñanza; el Conocimiento Especializado del Contenido (SCK), se considera como aquel conocimiento matemático adaptado a las necesidades específicas que surgen en el proceso de enseñanza de las matemáticas y que solo se requiere para fines específicos de la enseñanza y, el Conocimiento en el Horizonte Matemático (HCK), el cual se considera como aquel

conocimiento que manifiesta el profesor sobre cómo se deben articular las matemáticas escolares.

Del mismo modo, el dominio PCK se divide en tres subdominios: el Conocimiento del Contenido y la Enseñanza (KCT), considerado como aquel conocimiento que permite articular el saber sobre las matemáticas y la forma más adecuada para su enseñanza; el Conocimiento del Contenido y los Estudiantes (KCS), que incluye el conocimiento de los errores de los estudiantes respecto a un contenido matemático en particular, como también la interpretación del pensamiento que manifiestan los estudiantes en el proceso de aprendizaje (Scheiner et al., 2019); y por último, el Conocimiento del Contenido y el Currículo (KCC), que se encuentra relacionado con aquellos contenidos matemáticos que deben aprender los estudiantes en un determinado nivel y que guían el proceso de enseñanza. El aporte más importante del modelo propuesto por Ball et al. (2008), son los subdominios SCK y HCK puesto que consideran que la enseñanza de las matemáticas requiere de un conocimiento especializado diferente al de otras profesiones (Carrillo-Yáñez et al., 2013; Muñoz-Catalán et al., 2015; Scheiner et al., 2019).

Ahora bien, algunas investigaciones han puesto de manifiesto las deficiencias que presenta el modelo MKT. Según Carrillo-Yáñez et al. (2018) en este modelo el interés no radica en el conocimiento especializado que movilizan los docentes para la enseñanza de las matemáticas, sino que centra su atención en la evaluación de los conocimientos necesarios para llevarla a cabo; otra es la cuestión de si algunos conocimientos matemáticos son o no exclusivos del profesor de matemáticas (Escudero et al., 2012; Flores et al., 2013) y, también la dificultad de diferenciar claramente los elementos de algunos subdominios puesto que cuando se le da un uso analítico, algunos subdominios tienden a superponerse (Flores et al., 2013).

Por tal motivo Carrillo-Yáñez et al. (2013), proponen el modelo denominado *Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (MTSK, por sus siglas en inglés – *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge*) el cual centra su atención en aquellos conocimientos que los profesores de matemáticas requieren en su quehacer diario, permitiendo analizar qué conocimientos posee y/o moviliza en su actividad profesional (Climent y Montes, 2022).

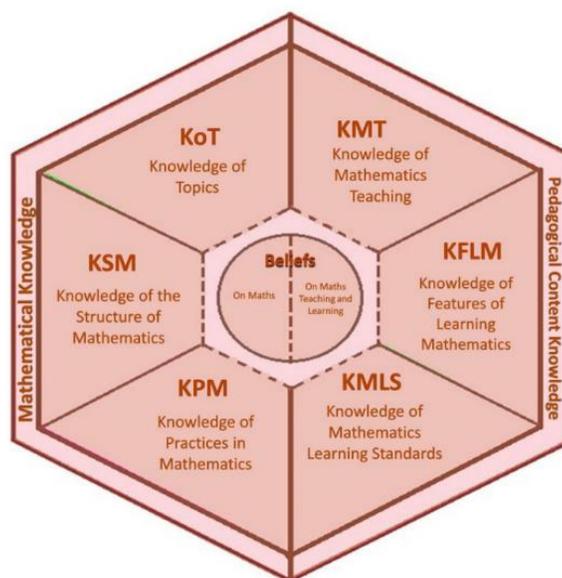
2.2 Modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK)

El MTSK es un modelo analítico basado en la premisa de que el conocimiento especializado del profesor de matemáticas está integrado y se distribuye en tres dominios: *Conocimiento Matemático (MK)*, *Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK)* y un dominio central relacionado con las *Creencias y Concepciones que tiene el profesor con respecto a las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje*. Cabe aclarar que el último dominio no será objeto de estudio en la presente investigación.

Los dos primeros dominios están conformados cada uno por tres subdominios y estos a su vez se conforman por una serie de categorías de conocimiento. El dominio del *Conocimiento Matemático (MK)*, considera el conocimiento que posee el profesor de matemáticas en relación con la disciplina científica en el contexto educativo, se relaciona con características propias de las matemáticas como el conocimiento de los temas, las conexiones entre ellos y la forma de hacer matemáticas (Carrillo-Yáñez, et al., 2018). El dominio del *Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK)*, tiene en cuenta el conocimiento matemático que posee el profesor en relación con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. En la Figura 1 se puede apreciar la estructura del modelo MTSK.

Figura 1

Modelo del conocimiento especializado del profesor de matemáticas



Fuente: Carrillo-Yáñez et al. (2018)

2.2.1 Subdominios del modelo MTSK

El dominio *Conocimiento Matemático (MK)* se compone del *Conocimiento de los Temas (KoT)*, en el que se contempla el contenido matemático en sí mismo, hace referencia al conocimiento sobre los conceptos y procedimientos que posee el profesor, es decir, describe qué y de qué manera el profesor de matemáticas conoce los temas que enseña. Se compone de cuatro categorías: Fenomenología y aplicaciones; Definiciones, propiedades y sus fundamentos; Registros de representación; y Procedimientos (Vasco y Moriel, 2022). Este subdominio también contempla el *Conocimiento de la Estructura Matemática (KSM)*, en el cual se considera el conocimiento que posee el profesor sobre las conexiones entre los contenidos matemáticos. Está constituido por los conocimientos más avanzados y también más elementales que le permiten vincular los contenidos anteriores y posteriores en la construcción de conocimiento a medida que avanza la secuencia curricular. Incluye cuatro categorías: Conexiones de complejización; Conexiones de simplificación; Conexiones auxiliares; y Conexiones transversales (Carrillo-Yáñez et al., 2018; Flores-Medrano, 2014; Flores-Medrano, 2022). Y, por último, el *Conocimiento de Practicas en Matemáticas (KPM)*, este subdominio tiene en cuenta el conocimiento que posee el profesor sobre las formas de proceder en matemáticas, el foco está puesto en el funcionamiento de las matemáticas más que en el proceso de enseñarlas. Está conformado por cuatro categorías: Demostrar; Definir; Resolver problemas; y El papel del lenguaje matemático (Delgado-Rebolledo et al., 2022).

El dominio del *Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK)* se conforma del *Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM)*, centrando su atención en el conocimiento que posee el profesor de matemáticas sobre cómo se aprende un contenido, considerando la necesidad de que el profesor conozca cómo los estudiantes piensan y construyen el conocimiento matemático al momento de enfrentarse a actividades y tareas matemáticas. Cabe aclarar que su interés principal no es el estudiante, sino que centra su atención en el conocimiento del profesor sobre los contenidos matemáticos como objeto de aprendizaje. Incluye cuatro categorías: Teorías del aprendizaje matemático; Fortalezas y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas; Formas de interacción de los estudiantes con el contenido matemático; y Aspectos emocionales del aprendizaje de las matemáticas (Carrillo-Yáñez et al., 2018; Escudero-Ávila, 2022). También se contempla el subdominio del *Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT)*, el cual tiene en cuenta el

conocimiento que posee el profesor en relación con los contenidos matemáticos y su enseñanza, integrando los conocimientos teóricos, personales e institucionales que posee y que pueden aplicarse en el proceso de construcción de conocimiento matemático. Incluye tres categorías: Teorías de enseñanza de las matemáticas (personales o instituciones); Recursos didácticos (físicos y digitales); y Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos (Sosa y Reyes, 2022). Y, por último, se encuentra el *Conocimiento de los Estándares del Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS)*, que incluye el conocimiento que posee el profesor sobre lo que sus estudiantes deben aprender en un nivel particular, teniendo en cuenta los conocimientos previos y su relación con conocimientos posteriores. Se compone de tres categorías: Resultados de aprendizaje esperados; Nivel esperado de desarrollo conceptual y procedimental; y Secuencia de temas (Carrillo-Yáñez et al., 2018; Codes y Contreras, 2022).

El modelo MTSK permite estudiar con gran detalle el conocimiento especializado que los profesores de matemáticas ponen de manifiesto al momento de enseñar cualquier contenido matemático, además, posibilita la reflexión sobre experiencias de enseñanza concretas, centrando la atención en aquellos aspectos específicos que deben ser destacados o que requieren un estudio a profundidad. Es posible, además, desarrollar estudios asociados con las relaciones entre los diferentes subdominios pues considera que el conocimiento del profesor no se compone de elementos aislados, y que por el contrario es una red compleja de relaciones (Carrillo-Yáñez et al., 2018).

Por la forma en la que se encuentra estructurado el MTSK, se pueden establecer tres diferentes tipos de relaciones de conocimiento: las relaciones Intra-subdominios, considerándose aquellas relaciones entre conocimientos de un mismo subdominio; las relaciones Intra-dominios, son aquellas relaciones entre conocimientos al interior de un mismo dominio; y las relaciones Inter-dominios, son aquellos conocimientos pertenecientes a los diferentes subdominios del modelo (Delgado-Rebolledo y Espinoza-Vásquez, 2021).

2.2.2 Relaciones entre subdominios de conocimiento del MTSK

Algunas investigaciones ponen en evidencia la posibilidad de establecer diferentes relaciones entre los subdominios del modelo. En Delgado-Rebolledo y Zakaryan (2020) por ejemplo, se estudia el conocimiento especializado de un profesor de matemáticas de nivel universitario, logrando establecer relaciones entre el subdominio KPM y los subdominios

KMT y KFLM. En Espinoza-Vásquez et al. (2018) se estudia el conocimiento especializado del profesor de matemáticas en el uso de la analogía en la enseñanza del concepto de función en secundaria, logrando establecer relaciones entre los subdominios KoT, KSM, KMT y KFLM, con mayor predominancia del KoT. En Aguilar-González et al. (2018), se establecen relaciones entre los subdominios del modelo y las concepciones sobre el aprendizaje y enseñanza de las figuras planas en el grado quinto de primaria, evidenciando relaciones entre los subdominios KoT, KMT, KFLM y KPM. En Escudero-Ávila et al. (2015) se ponen de manifiesto relaciones existentes entre el subdominio KoT con todos los demás subdominios del modelo, considerándose al KoT como el eje sobre el cual se relacionan y organizan los demás conocimientos del MTSK. Zakaryan y Ribeiro (2016) se enfocan en el estudio del conocimiento del profesor sobre los números racionales en el nivel de la enseñanza secundaria, evidenciando relaciones entre el KMT y los otros cinco subdominios del modelo, con mayor presencia del KoT.

Es importante aclarar por qué el uso del término didáctico y no pedagógico en la presente investigación. La pedagogía es la ciencia que orienta la labor del maestro, permitiéndole reflexionar sobre el proceso educativo. La didáctica como ciencia de la enseñanza, es el saber que tematiza el proceso de instrucción, orienta los métodos, las estrategias y los recursos, es decir, es la que orienta la práctica profesional del profesor. En este sentido, es la didáctica la que permite mejorar y transformar los procesos educativos mediante la comprensión de los procesos de enseñanza, estudiándolos en sus condiciones más generales (Lucio, 1989). El MTSK es un modelo que busca comprender el conocimiento que manifiestan los profesores de matemáticas en el proceso de enseñanza, permitiéndoles reflexionar sobre su propia práctica, centrando su atención en aquellos aspectos más importantes del proceso de instrucción, por tal motivo en la presente investigación se asumirá el término didáctico.

2.3 Enseñanza a través de la Resolución de Problemas Matemáticos

La actividad de resolver problemas ha sido considerada como una actividad fundamental en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y en el estudio del conocimiento matemático. En diferentes propuestas curriculares se afirma que la resolución de problemas debe ser el eje central del currículo matemático y debe ser el objetivo primario de la enseñanza (MEN, 1998; SEP 2017), y considerarse como el soporte principal del

contenido matemático (Blanco, 2015). Además, la actividad de resolver problemas es el corazón de las matemáticas (Schoenfeld, 2013).

La resolución de problemas es una gran oportunidad para que el profesor de matemáticas despierte el interés y la curiosidad en sus estudiantes desarrollando en ellos el pensamiento crítico (Polya, 1965). Además, permite analizar el proceso cognitivo y no solo los productos que muestran los estudiantes (Santos-Trigo, 2009). La resolución de problemas pone en evidencia la capacidad de análisis, el razonamiento, la comprensión, la aplicación y la movilización de conocimientos previos. A medida que los estudiantes resuelven problemas ganan confianza en sí mismos y en las matemáticas (MEN, 1998).

Se puede considerar el papel de la resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas desde tres perspectivas: la enseñanza para la resolución de problemas; enseñanza sobre la resolución de problemas y enseñanza vía resolución de problemas (Cárdenas y Blanco, 2015). La primera forma de asumir la resolución de problemas es una acepción muy tradicional donde las actividades propuestas permiten la aplicación de conocimientos ya adquiridos. Esta forma se refleja en algunos libros de texto al situar los problemas después de introducir algún concepto o algoritmo, en este sentido, la resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas encuentra su justificación en saber aplicar los conocimientos adquiridos, es decir, es el paso desde el conocimiento a su utilización práctica (Blanco y Pino, 2015)

La enseñanza sobre la resolución de problemas se centra en que los estudiantes experimenten y asuman diferentes formas de abordar los problemas, es decir, centra los esfuerzos en trabajar diferentes fases y modelos favoreciendo la discusión sobre el proceso de resolución. Desde esta perspectiva, la resolución de problemas es vista como un contenido más del currículo y como una actividad compleja que los estudiantes deben aprender a desarrollar (Cárdenas y Blanco, 2015). Castro (2008) insiste en que los intentos que se han realizado para enseñar estrategias generales de resolución de problemas a los estudiantes de primaria y secundaria no han tenido éxito.

Por último, la consideración de la resolución de problemas como un punto de partida que permite generar, consolidar y construir conocimiento matemático, es decir, la resolución de problemas vista como metodología o como contexto para el aprendizaje. Esta forma de

ver la resolución de problemas se refleja en diferentes propuestas curriculares (MEN, 1998; SEP, 2017), pero como bien lo expone Blanco (2015), su uso en las aulas de matemáticas sigue siendo muy escasa y no se refleja de manera clara en la práctica docente.

En la presente investigación asumimos la resolución de problemas como fuente principal para la construcción de conocimiento matemático, considerando que pone de manifiesto la capacidad de análisis, comprensión, razonamiento y aplicación de los conocimientos previos. Se considera que las estrategias de resolución de problemas dependen tanto de los estudiantes como de los problemas planteados, y sería un pensamiento muy simplista recurrir a una serie de estrategias o pasos que deberían ser enseñados. Además, se ha evidenciado que cuando el profesor selecciona tareas y actividades que involucran a los estudiantes en la resolución de problemas y los anima a articular su pensamiento a través de preguntas, estimula su reflexión y logra avances significativos en la comprensión del aprendizaje matemático (Carrillo-Yáñez et al., 2019).

Por otra parte, en esta investigación se entiende que un problema es una tarea que presenta algún grado de dificultad en su solución, es decir, es una relación particular entre la tarea y el individuo que trata de resolverla (Blanco y Pino, 2015) cuando algunas reglas o procedimientos para la solución no pertenecen a su bagaje cognitivo y los métodos o estrategias que se ponen en juego requieren un acto creativo por parte del resolutor (D'Amore, 2011). Un problema es todo aquello que genera en los estudiantes un pensamiento productivo, es decir, que les permite general estrategias de solución propias que implica crear algo nuevo, realizar conjeturas, modelos, etc., (Blanco y Pino, 2015). Y la resolución de un problema matemático será entendida como el proceso que lleva a cabo el estudiante desde que se enfrenta al enunciado hasta que llega a su solución (Carrillo-Yáñez et al., 2016).

Capítulo 3

METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

En este apartado se presentan los fundamentos metodológicos que sustentan la manera en la que se obtuvo, se organizó y se analizó la información. También se presentan las fases de la investigación, las técnicas para la recolección de los datos, el instrumento de análisis y la descripción de los informantes.

3.1 Paradigma de la investigación

En el campo de la investigación educativa la elección del paradigma de investigación posee gran importancia considerando que, es el que guía y orienta la manera en cómo nos aproximamos a un estudio sistemático y coherente de la realidad que buscamos comprender. Es el paradigma de investigación el que permite situarnos ante el problema y nos indica el camino para intentar describirlo, comprenderlo, explicarlo y en algunas ocasiones controlarlo y transformarlo (Sánchez, 2013).

Desde la perspectiva de Guba y Lincoln (2002) un paradigma de investigación es un sistema básico de creencias o visión del mundo que guía al investigador, y que define aquello que se puede realizar dentro de una investigación legítima. Las creencias, en este sentido hacen referencia a un conjunto de supuestos sobre la naturaleza de las cosas que se admiten como verdaderas (Santos, 2002). Teniendo en cuenta lo anterior y en concordancia con Hernández-Sampieri y Mendoza (2018), en la presente investigación asumiremos que un paradigma es un conjunto de concepciones y premisas que tiene el investigador acerca del mundo y los métodos y técnicas que considera apropiadas para conocerlo e investigarlo.

Las creencias básicas que definen cada paradigma pueden asociarse a la manera en que estos responden a tres aspectos fundamentales: primero, la interpretación de la realidad, es decir, cómo son y cómo funcionan las cosas y lo que podemos conocer de ellas (perspectiva ontológica). Segundo, cuál es la relación existente entre la persona que busca conocer y aquello que puede ser conocido (perspectiva epistemológica). Por último, cómo puede el investigador descubrir aquello que desea conocer (perspectiva metodológica). Por consiguiente, es posible considerar la existencia de cuatro paradigmas de investigación: positivismo, post-positivismo, teoría crítica y constructivismo (Guba y Lincoln, 2002).

Teniendo en cuenta que el interés de nuestra investigación se centra en un fenómeno educativo con el fin de explorar, analizar e interpretar el conocimiento especializado que los profesores participantes ponen en evidencia al diseñar un plan de clases y a partir de ello establecer relaciones que emergen entre subdominios del MTSK, consideramos que el paradigma más adecuado para la investigación es el interpretativo, ya que permite una comprensión de la realidad (Roca, 2020), con la finalidad de analizarla, interpretarla y comprenderla a partir de la interacción entre el investigador y el objeto de estudio. En este sentido, compartimos la idea de Hernández-Sampieri y Mendoza (2018) de que el mundo social es relativo y solo puede ser entendido desde el punto de vista de los actores involucrados.

Frente a la perspectiva ontológica que considera la interpretación de la realidad y lo que es posible comprender de ella, adoptamos una postura donde no intentamos controlar ni predecir el objeto de estudio, pero sí conocerlo e interpretarlo. Reconocemos que existen múltiples realidades resultado de las construcciones e interpretaciones de los sujetos basadas social y experiencialmente (Guba y Lincoln, 2002), por lo cual no buscamos encontrar regularidades sobre la naturaleza de los fenómenos ni hacer generalizaciones o inferencias. Con esta investigación lo que pretendemos es comprender a profundidad el conocimiento especializado que los profesores participantes ponen en juego al momento de llevar a cabo su práctica docente.

Ahora bien, frente a la perspectiva epistemológica que considera el grado de relación que establecemos con el fenómeno objeto de estudio, compartimos la idea de que la realidad educativa es una construcción social que deriva de interpretaciones subjetivas y de los significados que los participantes le otorgan (Sánchez, 2013). Por lo tanto, asumimos una postura donde el investigador y el investigado están vinculados interactivamente y el conocimiento se crea en la interacción entre los ellos (Guba y Lincoln, 2002). Buscando comprender aspectos que consideramos relevantes del conocimiento especializado de los profesores involucrados en el proceso de enseñanza de las matemáticas, como las características sociales, culturales, creencias, contexto educativo, contenido matemático y ciclo de escolaridad, puesto que, estos aspectos determinan los significados que atribuyen a su labor.

Por último, y teniendo en cuenta la perspectiva metodológica, consideramos que en este tipo de estudios los participantes son la fuente principal para obtener la información que buscamos comprender y dar significado (Hernández-Sampieri y Mendoza, 2018). La forma en la que nos acercaremos al conocimiento especializado de los profesores participantes será a través de dos planeaciones de clase, considerando que permiten tener un panorama de los posibles conocimientos que posee el profesor y que son una gran oportunidad para explorar y profundizar en ellos (Flores et al., 2013) a través de una entrevista semiestructurada. También utilizaremos videgrabaciones por plataformas digitales para su posterior transcripción y análisis.

3.2 Tipo de investigación

Considerando que nuestro objetivo consiste en identificar y establecer relaciones entre los distintos subdominios del MTSK en su intención de enseñanza, el enfoque que hemos decidido utilizar para efectos de la presente investigación es de tipo cualitativo. Nuestro interés se centra en analizar y profundizar en dicho conocimiento por lo que, este enfoque resulta conveniente puesto que posibilita extraer elementos importantes que permiten explorar, comprender y describir la forma en la que los participantes experimentan los fenómenos que los rodean, profundizando en sus puntos de vista, interpretaciones y significados (Hernández-Sampieri y Mendoza, 2018).

3.3 Diseño de la Investigación

Se elige el estudio de caso como diseño de la investigación considerando que, posibilita identificar y describir de forma detallada algunos fenómenos que se presentan en un caso particular, además, utiliza diversos métodos para recoger y analizar la información incluyendo aspectos como el caso y la manera de cómo aproximarse a su estudio (Muñoz-Catalán y Monteiro, 2016). Stake (1998) sostiene que, un estudio de caso centra su atención en aquello que puede aprenderse de un caso único buscando comprender cómo y por qué algunos fenómenos ocurren de la forma en la que lo hacen. Según Stake (1998), un caso puede ser una persona, un programa, un maestro, un estudiante, es decir, todas aquellas situaciones o grupos sociales que merecen la atención en la investigación.

Stake (1998) realiza una clasificación de los estudios de caso en intrínsecos e instrumentales. Los estudios de casos intrínsecos son aquellas investigaciones donde el

interés se encuentra en el caso particular y no se pretende obtener información sobre otros casos o sobre algún problema general, es decir, se tiene un interés intrínseco del caso. Los estudios de casos instrumentales son investigaciones en las que se busca tener una comprensión más general de un fenómeno por medio de un caso particular, en la cual el caso seleccionado representa solo un ejemplo.

Ahora bien, un estudio de caso instrumental puede ser un estudio de casos múltiple o colectivo, cuando el foco de la investigación se centra en el estudio de más de una singularidad. Esta característica permite identificar mejor el fenómeno estudiado, permite comprender algunos elementos de una forma más completa, aportando rasgos claves y relevantes que quizás con un solo caso sería imposible visualizar (Stake, 1998). Desde esta perspectiva, se considera pertinente adoptar el estudio de casos múltiple de tipo instrumental donde los casos son dos profesores de matemáticas de Colombia: Julia y Alan.

La investigación se realiza con dos casos considerando que, pretendemos proporcionar una mejor comprensión del conocimiento profesional del profesor de matemáticas de educación primaria en relación con la enseñanza de la estructura multiplicativa a través de la resolución de problemas.

3.4 Descripción de los informantes

Para esta investigación se seleccionaron los informantes con la estrategia de muestreo por conveniencia (Cohen et al., 2007; Hernández-Sampieri y Mendoza, 2018) teniendo en cuenta la disponibilidad de los profesores, el acceso a ellos y la disposición para ser incluidos en la investigación. Se consideró que los informantes seleccionados fueran docentes en ejercicio, con cinco años o más de experiencia en la enseñanza de las matemáticas, que hubieran enseñado el contenido matemático de interés al menos una vez durante los últimos años y que tuvieran formación en el campo de la Educación Matemática. También se tuvo en cuenta que los profesores participantes tuvieran diferentes niveles de formación, que fueran de diferentes lugares y contextos, con diferentes años de experiencia docente, considerando esto como una posibilidad para obtener mayor riqueza en la información proporcionada.

Por tanto, se contó con la participación de una profesora y un profesor de matemáticas de educación primaria de Colombia (a quienes, por cuestiones de privacidad, hemos decidido llamar Julia y Alan). Julia es Licenciada en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas,

cuenta con más de siete años de experiencia en el campo de la Educación Matemática en los diferentes niveles educativos: básica primaria, básica secundaria, media y técnica profesional. Actualmente labora en una Institución de carácter privado en la ciudad de Jamundí, y ha impartido el tema objeto de estudio, también es importante resaltar que pertenece a una comunidad indígena de Colombia. Julia resalta mayor experiencia en el nivel básico. Alan es Licenciado en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas, es Maestro en Educación Matemática, cursa una especialización en el uso de las Tecnologías de la Información en la Educación, cuenta con más de ocho años de experiencia en la enseñanza de las matemáticas con estudiantes de primaria, secundaria y nivel profesional. Actualmente labora en una institución de carácter privado en la ciudad de Santiago de Cali, y manifiesta haber impartido el contenido de interés durante los últimos años. Es importante resaltar que el profesor pertenece a una comunidad afrocolombiana. Alan resalta mayor experiencia en el nivel básico secundario y superior. Hay que resaltar que ambos profesores mostraron mucho interés en participar en la investigación y aportaron la suficiente dedicación desde su limitado tiempo para poder llevarla a cabo.

3.5 Técnicas e instrumentos de recolección de la información

La recolección de datos en un estudio cualitativo pretende dotar de significado las experiencias de los sujetos (Hernández-Sampieri y Mendoza, 2018). En este tipo de estudios los participantes son la fuente principal para obtener la información que el investigador busca comprender y dar significado. Como instrumento para la recolección de los datos utilizamos en total dos planeaciones de clase. Al respecto, se le solicitó a Julia y Alan diseñar un plan de clase relacionado con la enseñanza de la estructura multiplicativa a través de la resolución de problemas, considerando que representan un escenario que proporciona oportunidades para explorar y profundizar en el conocimiento especializado de los profesores de matemáticas (Flores et al., 2013; Paternina-Borja., 2023; Otero-Valega et al., 2023; Tascón-Cardona y Juárez-Ruíz, 2024). Es importante resaltar que a cada uno de los informantes se le brindó total libertad de seleccionar la forma en la que llevarían a cabo su planeación: competencias a trabajar, actividades, recursos, metodología y cantidad de sesiones, etc. También se utilizaron videgrabaciones por plataformas digitales para su posterior transcripción y análisis. Como técnica para recolectar la información se utilizó la entrevista semiestructurada considerando que permite introducir preguntas adicionales para profundizar

en el conocimiento de los informantes buscando precisar conceptos y obtener más información (Hernández-Sampieri y Mendoza, 2018). Consideramos que el análisis del conocimiento especializado del profesor de matemáticas por su complejidad no puede ser captada a partir de un solo instrumento por lo cual decidimos hacer uso de las planeaciones de clase y la entrevista semiestructurada.

3.6 Instrumento de análisis de los datos

La información se recolecta con el propósito de analizarla y comprenderla para de esta manera lograr dar respuesta a la pregunta de investigación. En un primer momento se realizó el análisis de las planeaciones de clase teniendo en cuenta la triada evidencia-indicio-oportunidad considerando que permite reconocer todos los aportes que manifiestan los informantes en sus planeaciones de clase dando la oportunidad de profundizar en ellos, buscando identificar si realmente hacen parte de su conocimiento. Las evidencias de conocimiento son aquellos elementos que le permiten al investigador afirmar que el profesor posee o no un determinado conocimiento; los indicios son las sospechas de que existe o no un determinado conocimiento y que se hace necesario profundizar en ello para que se convierta en una evidencia; las oportunidades de investigación sirven para explorar el conocimiento que el profesor pone de manifiesto en una situación determinada (Escudero-Ávila, et al., 2016).

Debe señalarse que, para realizar el análisis de las planeaciones de clase se construyeron descriptores de conocimiento para cada una de las categorías de los subdominios del modelo MTSK, asimismo, se establecieron preguntas específicas para cada descriptor. De acuerdo con el análisis realizado a las planeaciones de clase y los indicios y evidencias de conocimiento encontrados, se seleccionaron las preguntas a realizar en la entrevista semiestructurada. Los descriptores permitieron determinar los conocimientos evidenciados por los profesores (ver Anexo A). En la Tabla 1 se presentan como ejemplo los descriptores diseñados para los subdominios KMLS y KoT pertenecientes a los dominios PCK y MK respectivamente.

Tabla 1*Ejemplos de descriptores elaborados para cada categoría*

| Subdominio | Categoría | Descriptor |
|--|---|---|
| Conocimiento de los estándares del aprendizaje de las matemáticas (KMLS) | Resultados de aprendizajes esperados. | Conoce los estándares básicos de competencias en matemáticas que deben alcanzar los estudiantes en el proceso de aprendizaje de las operaciones de multiplicación y división y todo lo relacionado con documentos de política pública. |
| | Nivel esperado del desarrollo conceptual o procedimental. | Conoce los contenidos matemáticos curriculares adecuados al ciclo de escolaridad y el nivel de desarrollo procedimental y conceptual que deben alcanzar los estudiantes en la enseñanza de la Educación Primaria teniendo en cuenta los documentos de política pública. |
| | Secuencia de temas. | Conoce la secuenciación de los temas con respecto a las operaciones de multiplicación y división, teniendo en cuenta los temas anteriores y posteriores y los conocimientos, habilidades y competencias necesarias para las tareas matemáticas. |
| Conocimiento de los temas (KoT) | Definiciones, propiedades y fundamentos. | Conoce la definición del concepto de multiplicación y división en el campo numérico de los números naturales. Conoce las propiedades de la estructura multiplicativa en el campo numérico de los números naturales. |
| | Fenomenología y aplicaciones. | Conoce diferentes situaciones del contexto cercano a los estudiantes en |

| | |
|------------------------------|---|
| | los que se puede aplicar los conceptos de multiplicación y división. |
| Registros de representación. | Conoce distintas representaciones que se pueden utilizar para representar los objetos matemáticos de multiplicación y división en el campo numérico de los números naturales. |
| Procedimientos. | Conoce los elementos de los algoritmos de la multiplicación y división, y las técnicas del cálculo en el campo numérico de los números naturales. |

Fuente: Elaboración propia

En este punto, realizamos el análisis de las planeaciones de clase teniendo en cuenta los descriptores establecidos para cada categoría en busca de evidencias, indicios y oportunidades de conocimiento y se seleccionaron las preguntas correspondientes para profundizar en ellos a través de la entrevista semiestructurada. Posteriormente, se realizó la entrevista semiestructura. Es importante resaltar que, durante la entrevista se tuvieron en cuenta las oportunidades para profundizar en el conocimiento que los informantes ponían de manifiesto en una situación determinada y que consideramos relevantes para profundizar.

Luego, se realizó la transcripción de la entrevista. Buscamos hacerlo lo más claro y exacto posible, respetando fielmente los argumentos de los profesores, su contexto y su realidad. Después de tener la información escrita se procedió a realizar su análisis teniendo en cuenta las categorías propuestas en el modelo MTSK y los descriptores elaborados para cada uno de ellos.

Ahora bien, después de identificar las evidencias de conocimiento haciendo uso de la triada mencionada anteriormente y los descriptores de conocimiento, se realizó la triangulación de los datos obtenidos desde las diferentes fuentes con el fin de establecer relaciones de tipo Intra-dominio, Intra-subdominio e Inter-dominio del conocimiento especializado de los informantes. Siguiendo la recomendación de Flores-Medrano (2015) y Aguilar-González et al. (2018), podemos afirmar que dos o más subdominios de

conocimiento están relacionados en un episodio, cuando se identifican indicios o evidencias de conocimiento que permiten interpretar qué conocimiento han manifestado Julia y Alan y, con dicha identificación, lograr establecer las relaciones.

Capítulo 4

ANÁLISIS Y RESULTADOS

Para el análisis de la planeación de clase como de la entrevista semiestructurada se hizo uso del MTSK como modelo analítico que permite realizar una descripción detallada del conocimiento especializado que moviliza el profesor de matemáticas al momento de enseñar la estructura multiplicativa a través de la resolución de problemas, buscando en esta investigación establecer relaciones de tipo Intra-subdominio, Intra-dominio e Inter-dominio (Delgado-Rebolledo y Espinoza-Vásquez, 2021). A continuación, se describen algunas de las relaciones que se lograron evidenciar entre las categorías de los diferentes subdominios del modelo. Se debe resaltar que, para el análisis de la información primero se identificaron indicios de conocimiento en las planeaciones de clase y posteriormente por medio de la entrevista semiestructurada se profundizó en cada uno de ellos buscando tener la certeza de que tal conocimiento pertenece al bagaje cognitivo de los profesores convirtiéndose en evidencia de conocimiento.

4.1 Relaciones establecidas del conocimiento especializado de Julia

A partir de los indicios de conocimiento encontrados en la planeación de clase (ver Anexo B), se pudo observar que, en la primera sección de la planeación, la profesora Julia utiliza referentes de calidad, donde plantea dos Estándares Básicos de Competencias Matemáticas (en adelante EBCM) y tres Derechos Básicos de Aprendizaje (en adelante DBA), como se muestra en la Figura 2.

Figura 2

Referentes de calidad utilizados por Julia

| REFERENTES DE CALIDAD | |
|--|--|
| ESTÁNDARES BÁSICOS DE COMPETENCIAS. | DERECHOS BÁSICOS DE APRENDIZAJE (DBA). |
| <ul style="list-style-type: none">• Resuelvo y formulo problemas cuya estrategia de solución requiera de las relaciones y propiedades de los números naturales y sus operaciones.• Identifico en el contexto de una situación, la necesidad de un cálculo exacto o aproximado y lo razonable de los resultados obtenidos. | <ul style="list-style-type: none">• Puede estimar el resultado de un cálculo sin necesidad de calcularlo con exactitud.• Resuelve problemas que involucran sumas, restas, multiplicaciones y divisiones con números naturales• Resuelve problemas de proporcionalidad directa. |

Fuente: Plan de clase de Julia

Al respecto, en la entrevista se le preguntó lo siguiente:

Fragmento de entrevista a Julia

En la planeación logramos evidenciar que utiliza dos EBCM, ¿de dónde obtuvo esos estándares?

Julia En Colombia tenemos unos *documentos de política pública*, los cuales el MEN nos sugiere para que orientemos nuestras clases, esto se hace *con el fin de que diferentes instituciones del país tengan los mismos desempeños y desarrollen las mismas competencias*. Esos documentos son los EBCM y los DBA [...].

Los estándares (indican) *lo que los estudiantes van a desarrollar en los ciclos*, es decir el MEN los agrupan por ciclos, entonces los estudiantes deben desarrollar unas competencias en este ciclo, entonces ellos (el MEN) dan la orientación de qué se debe desarrollar en estos grados. Mientras que *los DBA (indican) lo que los estudiantes deben alcanzar en un determinado grado*, entonces ellos (los estudiantes) deben desarrollar esos derechos básicos de aprendizaje, es decir, lo mínimo que ellos (los estudiantes) deben saber es lo que está en los DBA.

De lo anterior se pudo evidenciar y profundizar en el conocimiento de Julia sobre los referentes curriculares propuestos por el Ministerio de Educación Nacional (MEN), como son los EBCM y los DBA. Julia evidencia tanto en la planeación como en la entrevista que posee conocimientos sobre cuáles son las competencias que deben alcanzar los estudiantes en el ciclo de escolaridad y también manifiesta conocimientos sobre los aprendizajes que se deben desarrollar en el grado de interés (Expectativas de aprendizaje - KMLS). Además, en la planeación indica que los estudiantes deben estar en la capacidad de resolver y formular problemas cuya estrategia de solución requiera de las relaciones y propiedades de los números naturales y sus operaciones. De esta manera, se logra evidenciar que la profesora tiene conocimiento sobre el nivel procedimental y conceptual que deben alcanzar los estudiantes (Nivel Esperado de Desarrollo Procedimental o Conceptual – KMLS) pues manifiesta que los estudiantes deben estar en la capacidad de resolver problemas que involucran operaciones con números naturales. Entonces, la profesora evidencia relaciones entre dos categorías del subdominio KMLS, lo que permite establecer una relación de tipo Intra-subdominio como se muestra en la Tabla 2.

Tabla 2

Categorías y descriptores evidencias del subdominio KMLS

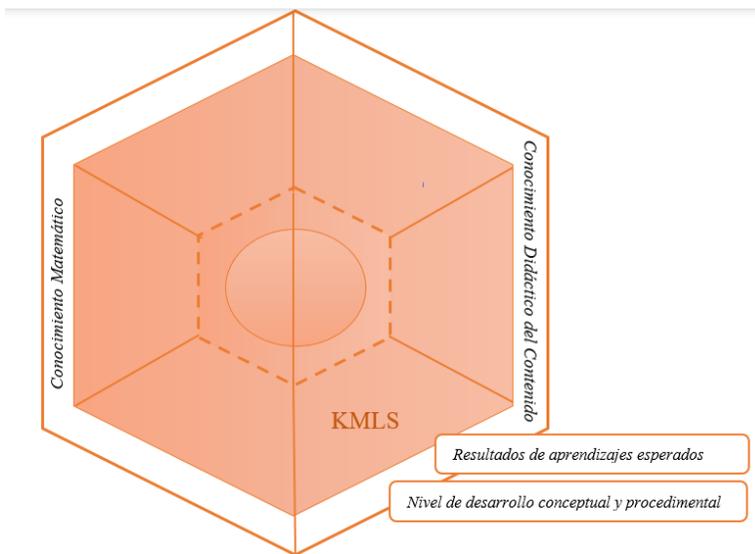
| | |
|------------|------|
| Subdominio | KMLS |
|------------|------|

| Categoría | Resultados de aprendizajes esperados | Nivel esperado del desarrollo conceptual o procedimental |
|------------------|---|--|
| Descriptor | Conoce que las relaciones y propiedades de los números naturales y sus operaciones hacen parte de aquellos contenidos matemáticos adecuados al nivel escolar en el que está enseñando, teniendo en cuenta los documentos de política pública. | Conoce que los estudiantes deben estar en la capacidad de resolver y formular problemas cuya estrategia de solución requiera de las relaciones y propiedades de los números naturales y sus operaciones teniendo en cuenta los documentos de política pública. |
| Tipo de relación | Relación de tipo intra-subdominio | |

Las relaciones de conocimiento evidenciadas se resumen en la Figura 3.

Figura 3

Relación Intra-subdominio al interior del KMLS



Fuente: Elaboración propia.

Otro indicio de conocimiento que brindó la planeación para profundizar en el conocimiento de Julia es el que hace referencia a las relaciones y propiedades de los números naturales y sus operaciones, tal como se observa en la Figura 4.

Figura 4

Estándar básico de competencias

| ESTÁNDARES BÁSICOS DE COMPETENCIAS. |
|---|
| <ul style="list-style-type: none">• Resuelvo y formulo problemas cuya estrategia de solución requiera de las relaciones y propiedades de los números naturales y sus operaciones. |

Fuente: Plan de clase de Julia

Por lo cual durante la entrevista se profundizó en lo siguiente:

Fragmento de entrevista a Julia

En el primer estándar que utiliza, se mencionan problemas cuyas estrategias de solución requieran las relaciones y propiedades de los números naturales y sus operaciones. ¿A qué se refiere cuando habla de las relaciones y propiedades de los números naturales?

Julia: Las operaciones de *multiplicación y división tienen unas propiedades específicas*, entonces a eso es a lo que yo me refiero.

¿Recuerda cuáles son esas propiedades?

Julia: Sí, las propiedades de la multiplicación son *la conmutativa, la distributiva, la asociativa*. Ahora, las propiedades de la división son diferentes porque *la división es una operación inversa a la multiplicación. La división no es una operación conmutativa, tampoco es cerrada es decir que no siempre al dividir dos números naturales da como resultado otro número natural. En la multiplicación lo que se busca es agrupar conjuntos mientras que en una división se busca separar. Entonces son operaciones que se relacionan dado que son operaciones inversas.*

Menciona los conjuntos. ¿Los niños ya tienen claro qué es un conjunto?

Julia: *Ya, ellos en ese grado deben comprender que un conjunto es la agrupación de varios elementos con características en común, y deben reconocer también a los números naturales como un conjunto.*

De lo anterior se puede evidenciar y profundizar en los conocimientos de Julia sobre los temas (Definiciones, propiedades y fundamentos- KoT), pues manifiesta conocimientos sobre las propiedades de las operaciones de multiplicación y división en el campo de los números naturales, además indica que dichas operaciones están estrechamente relacionadas puesto que, la división es la operación inversa a la multiplicación.

De la misma forma, Julia pone en evidencia conocimientos sobre la estructura matemática (Conexiones de simplificación - KSM) manifestando que “en la multiplicación lo que se busca es agrupar conjuntos”, que es una conexión de simplificación de la estructura multiplicativa con el concepto de conjunto y la relación que ambos poseen en la enseñanza y aprendizaje de las operaciones de multiplicación y división. Es importante resaltar que los estudiantes desde los primeros años de escolaridad tienen un acercamiento al concepto de conjunto. Además, Julia nuevamente pone en evidencia conocimientos sobre los temas (Definiciones, propiedades y sus fundamentos - KoT) al definir qué es un conjunto y además reconoce a los números naturales como un conjunto, es decir, reconoce que los números naturales se caracterizan por ser una colección o agrupación de objetos de una misma naturaleza. De esta manera se evidencia una relación de tipo Intra-dominio al interior de dominio MK entre los subdominios KoT y KSM, como se muestra en la Tabla 3.

Tabla 3

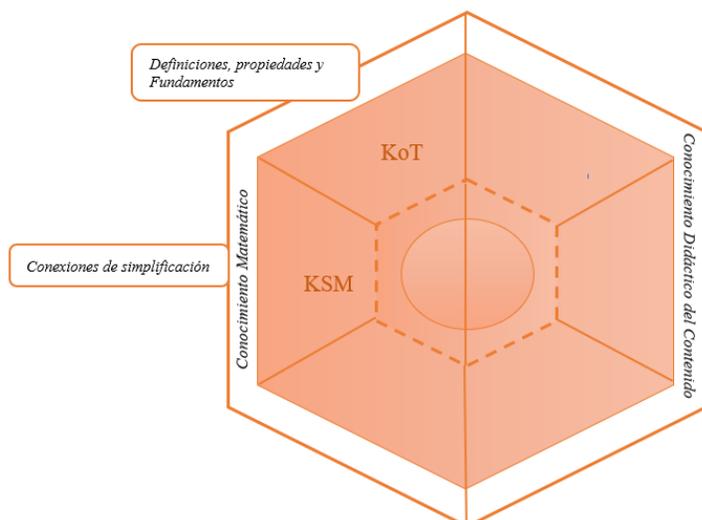
Categorías y descriptores evidenciados de los subdominios KoT y KSM

| Subdominio | KoT | KSM |
|------------------|---|---|
| Categoría | Definiciones, propiedades y fundamentos | Conexiones de simplificación |
| Descriptor | <p>Conoce propiedades de la multiplicación como la propiedad conmutativa, distributiva y asociativa;</p> <p>y a la división como una operación no conmutativa y no cerrada. Además, reconoce a la multiplicación y división como operaciones inversas</p> | <p>Conoce que los conjuntos son un contenido de menor complejidad que se relacionan con la estructura multiplicativa y permite a los estudiantes aproximarse a los conceptos de multiplicación y división</p> |
| Tipo de relación | Relación de tipo Intra-dominio | |

Las relaciones de conocimiento evidenciadas se resumen en la Figura 5.

Figura 5

Relación Intra-dominio al interior del dominio MK



Fuente: Elaboración propia.

Otro indicio de conocimiento identificado en la planeación de clase de Julia se encuentra en los aprendizajes esperados descritos, donde indica que espera que los estudiantes resuelvan situaciones que implican el uso de las operaciones de multiplicación y división para su solución, con el fin de determinar su aplicación en situaciones cotidianas como se muestra en la Figura 6.

Figura 6

Aprendizajes esperados

| | |
|--------------------------------|---|
| APRENDIZAJES ESPERADOS: | Se espera que los estudiantes resuelvan situaciones que implican la multiplicación y la división con el fin de determinar la aplicación en situaciones cotidianas. Para esta actividad, se evalúa el análisis que los estudiantes hicieron con respecto a las situaciones y las estrategias de resolución que plantean. |
|--------------------------------|---|

Fuente: Plan de clase de Julia

Por lo cual, durante la entrevista se profundizó en su conocimiento, como se muestra a continuación:

Fragmento de entrevista a Julia

Dentro de los aprendizajes esperados manifiesta que espera que los estudiantes resuelvan situaciones que implican la multiplicación y la división, con el fin de determinar la aplicación en situaciones cotidianas: ¿En qué situaciones de la vida cotidiana, los estudiantes pueden aplicar las operaciones de multiplicación y de división?

Julia: En mi planeación yo lo estoy utilizando cuando ellos necesitan una *cantidad de alimentos para preparar alguna receta, cuando ellos tienen que distribuir alimentos, paquetes de bombones, dulces para una fiesta, los panes del desayuno,* todo ese tipo de situaciones cotidianas que manejen los niños.

Al momento de profundizar sobre el porqué plantear este tipo de situaciones, manifestó lo siguiente:

Julia: Ellos ya tienen unos aprendizajes previos, entonces la idea es que ellos utilicen ese conocimiento que ya tienen dentro de un contexto, ese contexto es la situación de los panes. [Se busca] *que ellos propongan las estrategias, las operaciones para resolver la actividad. Esas son preguntas orientadoras que llevan al estudiante a preguntarse qué debo hacer, cómo debo enfrentar la situación, qué operaciones o acciones sirven para solucionarla, una suma, una resta, una multiplicación. Esa es la idea de esas preguntas.*

Cuando Julia habla de preguntas orientadoras, hace referencia a la actividad introductoria donde propone un video a los estudiantes con la historia de un sujeto que está comprando una cantidad de panes para repartirlos entre los miembros de su familia y después de realizada la compra debe tomar tres buses pagando la cantidad de \$1,750 pesos colombianos en cada uno de ellos para llegar a casa (ver Figura 7). Posterior a ello, realiza una serie de preguntas orientadoras como se muestra en una imagen de la planeación de clase en la Figura 8.

Figura 7

Actividad introductoria propuesta en la planeación de clase



Fuente: Plan de clase de Julia.

Figura 8

Preguntas orientadoras propuestas en el plan de clase

| | | |
|----------------|---|--|
| INICIO. | Realiza las siguientes preguntas: <ul style="list-style-type: none"> • ¿Cuántos panes le corresponden a cada familiar? ¿Cómo lo podemos determinar? • ¿Cuánto dinero gastó en el transporte, si cada uno de los tres pasajes costó \$1750? y ¿qué debemos hacer para saberlo? Posteriormente, los estudiantes discutirán las posibles formas de solucionar las situaciones. | |
|----------------|---|--|

Fuente: Plan de clase de Julia.

De lo anterior se puede evidenciar que la profesora utiliza situaciones contextualizadas con preguntas orientadoras como una estrategia para la enseñanza de las matemáticas, manifestando que esto permite a los estudiantes reflexionar sobre la ruta a seguir para darle solución a los problemas planteados (Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos - KMT). Además, pone en evidencia el conocimiento de situaciones que son familiares para los estudiantes (Fenomenología y aplicaciones - KoT) considerando que reconoce una amplia variedad de contextos en los que los alumnos pueden aplicar la estructura multiplicativa. También se logra evidenciar el conocimiento de las formas de enseñar en matemáticas, puesto que hace uso de recursos virtuales y tecnológicos en su clase (Recursos y materiales virtuales – KMT) y relaciona este conocimiento con el uso de preguntas orientadoras. También se logra evidenciar conocimiento sobre las características del aprendizaje de las matemáticas (Formas en la que los alumnos interactúan con el contenido - KFLM) pues reconoce que las preguntas orientadoras llevan al estudiante a reflexionar sobre los procedimientos y las acciones que deben realizar para resolver las situaciones y que estos harán uso de los conocimientos previos para solucionarlos. Por lo anterior se logra evidenciar una relación de tipo Intra-subdominio entre categorías del subdominio KMT; una relación de tipo Intra-dominio al interior del dominio PCK entre los subdominios KMT-KFLM; y una relación de tipo Inter-dominio entre los subdominios KMT-KFLM-KoT, tal como se presenta en la Tabla 4.

Tabla 4

Categorías y descriptores evidenciados de los subdominios KMT, KFLM y KoT

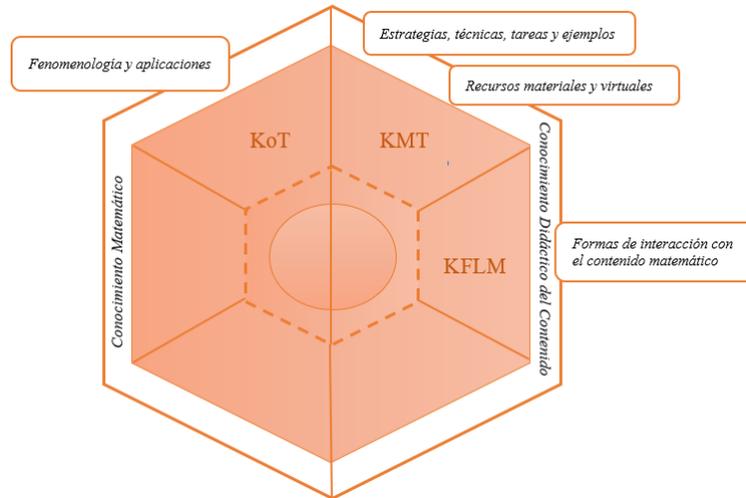
| Dominio | PCK | | MK |
|------------|-----|------|-----|
| Subdominio | KMT | KFLM | KoT |

| Categoría | Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos | Formas de interacción con un contenido matemático | Fenomenología y aplicaciones |
|------------------|--|--|--|
| Descriptor | <p data-bbox="431 352 683 417">Recursos y materiales virtuales</p> <p data-bbox="423 516 691 871">Conoce y utiliza situaciones contextualizadas con preguntas orientadoras como estrategia de enseñanza considerando que permiten la reflexión de los estudiantes.</p> | <p data-bbox="740 516 1024 871">Sabe que los conocimientos previos llevan al estudiante a preguntarse qué debe hacer, cómo deben enfrentarse a las situaciones, qué operaciones u acciones les permiten solucionarlas.</p> | <p data-bbox="1073 457 1393 926">Conoce diversos contextos que son familiares para los estudiantes y en los cuales pueden aplicar la estructura multiplicativa: cantidad de alimentos para preparar una receta, distribuir alimentos, paquetes de bombones, dulces para una fiesta, reparto de los panes para el desayuno.</p> |
| Tipo de relación | Intra-subdominio, Intra-dominio e Inter-dominio. | | |

Las relaciones de conocimiento evidenciadas se resumen en la Figura 9.

Figura 9

Relaciones de conocimiento Intra-subdominio, Intra-dominio e Inter-dominio



Fuente: Elaboración propia.

Otro indicio de conocimiento identificado se encuentra nuevamente en la sección de los aprendizajes esperados, puesto que Julia hace referencia en esta ocasión a que espera que sus estudiantes resuelvan problemas que involucran para su solución operaciones de multiplicación y división (Figura 6). Por lo que se profundizó en lo siguiente:

Fragmento de entrevista a Julia

¿Enseñar los conceptos de multiplicación y división a través de la resolución de problemas es fundamental en la educación?

Julia: Sí, es fundamental porque es allí donde los estudiantes le dan un sentido a esa multiplicación, a esa división o a cualquier concepto que ellos estén aprendiendo. Siempre que ellos encuentren un contexto, una explicación del porqué ellos lo necesitan [el aprendizaje puesto en juego], que no sea un aprendizaje aislado de lo que él está desarrollando en su vida cotidiana. Siempre se trata de que ellos tengan un contexto, una situación problema donde ellos se sientan identificados porque abordar las operaciones solamente buscando resolverlas, que se enfrenten solamente a ellas, no tendrían un aprendizaje significativo. Se empieza a hacer ese énfasis en que el estudiante sea el que empiece a solucionar, empiece a indagar a partir de ciertas situaciones. El docente pasa a ser un orientador porque ellos a partir de ciertas situaciones deben iniciar ese análisis, esa exploración y ese proceso de resolución a partir de los saberes previos. Es decir, [que el estudiante] por sí mismo pueda ir haciendo un acercamiento hacia el aprendizaje matemático.

En el fragmento anterior Julia reafirma el uso de la resolución de problemas como estrategia de enseñanza (Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos – KMT) manifestando que

este tipo de actividades son las que potencializan el aprendizaje de los estudiantes y reconoce que los contenidos matemáticos cobran sentido cuando se les presenta con un contexto y una intención. Además, Julia evidencia que conoce las características del aprendizaje de las matemáticas puesto que, reconoce que algunos aspectos de la vida cotidiana tienen influencia en el interés de los estudiantes para el aprendizaje que se desea alcanzar (Aspectos emocionales en el aprendizaje de las matemáticas -KFLM). Al respecto de la importancia de la enseñanza a través de la resolución de problemas, Julia reconoce que es el puente entre el estudiante y el conocimiento matemático y que es por medio del análisis, la indagación y la exploración de las situaciones planteadas que el estudiante logra acercarse al conocimiento, dotarlo de sentido y considerarlo útil para su cotidianidad (La práctica de resolver problemas – KPM). Por lo anterior, se logra evidenciar una relación de tipo Intra-dominio al interior del PCK entre los subdominios KMT-KFLM; y una relación de tipo Inter-dominio entre los subdominios KMT-KFLM-KPM, como se observa en la Tabla 5.

Tabla 5

Categorías y descriptores evidenciados de los subdominios KMT, KFLM y KPM

| Dominio | PCK | | MK |
|------------|---|--|--|
| Subdominio | KMT | KFLM | KPM |
| Categoría | Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos | Aspectos emocionales del aprendizaje de las matemáticas | Conocimiento de la práctica de resolver problemas |
| Descriptor | Conoce y utiliza la resolución de problemas como una estrategia de enseñanza que le permite a los estudiantes darle sentido y significado al contenido matemático que están aprendiendo | Conoce que algunos aspectos de la vida cotidiana de los estudiantes despiertan el interés y la motivación por el aprendizaje matemático como lo son situaciones donde ellos se sientan identificados | Conoce procesos asociados a la resolución de problemas como forma de producir en matemáticas considerando que, a través del análisis, la indagación y la exploración de las situaciones planteadas los estudiantes logran acercarse al conocimiento matemático |

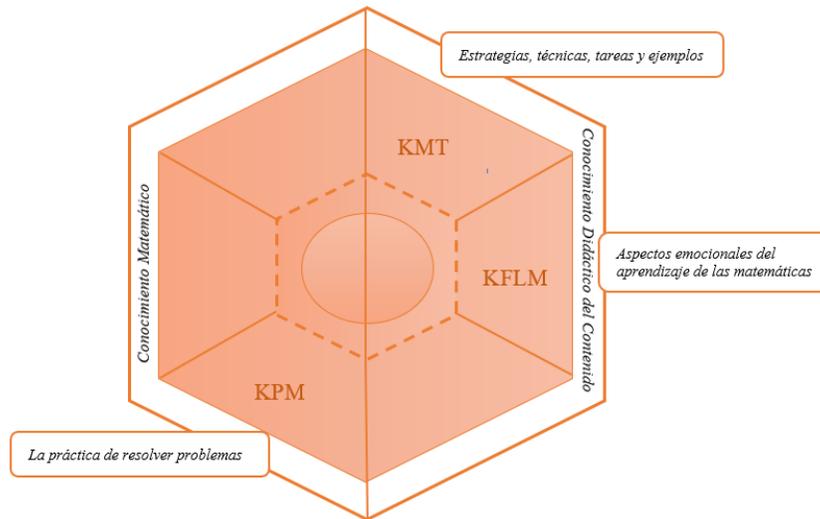
Tipo de relación

Intra-dominio e Inter-dominio.

Las relaciones de conocimiento evidenciadas se resumen en la Figura 10.

Figura 10

Relación Intra-dominio e Inter-dominio



Fuente: Elaboración propia.

Se logró identificar en la sección de conocimientos previos un nuevo indicio de conocimiento. Julia menciona que algunos de los conocimientos previos que considera importantes en el aprendizaje de la estructura multiplicativa son la suma y la resta, como se observa en la Figura 11.

Figura 11

Conocimientos previos

| | |
|-------------------------------|-----------------|
| CONOCIMIENTOS PREVIOS. | Sumas y restas. |
|-------------------------------|-----------------|

Fuente: Plan de clase de Julia.

Al respecto en la entrevista semiestructurada se consideró profundizar en lo siguiente:

Fragmento de entrevista a Julia

En su planeación manifiesta que los niños deben tener unos conocimientos previos y hace referencia a la suma y a la resta ¿Considera que esos son los únicos conocimientos previos que requieren los estudiantes para lograr dar una solución a las situaciones que usted plantea? ¿o considera que requieren de otros conocimientos?

Julia: No, a lo largo de la vida escolar, ellos ya han adquirido otros conocimientos: *conjuntos, valor posicional, lectura, análisis.*

Menciona los temas anteriores con los que se articula la estructura multiplicativa, ahora, ¿con qué temas o contenidos posteriores se podrían articular estos conocimientos?

Julia: Bueno la multiplicación y la división son muy importantes a la hora de resolver *potenciaciones, radicaciones, logaritmos, incluso fracciones, un concepto fundamental en las matemáticas como el álgebra.*

Entonces, usted considera que estos contenidos o trabajar estas situaciones ¿es realmente importante para el trabajo posterior que debe realizar el maestro en el salón de clase?

Julia: Trabajar este tipo de situaciones sí. *Es muy importante que ellos en primaria lleguen al bachillerato claros con las operaciones de multiplicación y división, resolver situaciones problema donde se vean involucradas estas operaciones, el algoritmo de las operaciones para que ellos puedan seguir avanzando en otros conocimientos que se empiezan a desarrollar en el bachillerato.*

De lo anterior se puede evidenciar y profundizar en el conocimiento de Julia sobre los contenidos matemáticos previos que deben tener sus estudiantes y de los cuales puede hacer uso para el aprendizaje de los nuevos temas. Julia propone en la planeación que los estudiantes tienen conocimientos sobre las sumas y las restas. Al momento de profundizar en la entrevista, argumenta que no son los únicos y que los estudiantes tienen conocimientos sobre conjuntos, valor posicional, lectura, análisis. Además, reconoce que los contenidos matemáticos previos y los nuevos conocimientos son importantes para un trabajo futuro y se relacionan con el conocimiento de potencias, radicaciones, logaritmos, fracciones, e incluso el álgebra considerada por Julia como uno de los conceptos fundamentales de las matemáticas (Secuencia de temas anteriores y posteriores – KMLS). Julia también expone que el trabajar los contenidos de multiplicación y división es muy importante para que los estudiantes al terminar su educación primaria estén en la capacidad de resolver situaciones que requieran de su uso para su solución, teniendo claridad en sus operaciones y en el algoritmo de esas operaciones, argumentando que los nuevos conocimientos les permitirán a sus estudiantes avanzar en conocimientos posteriores (Nivel esperado de desarrollo conceptual y procedimental – KMLS). Lo anterior permite establecer una relación de tipo Intra-subdominio al interior de KMLS, como se muestra en la Tabla 6.

Tabla 6

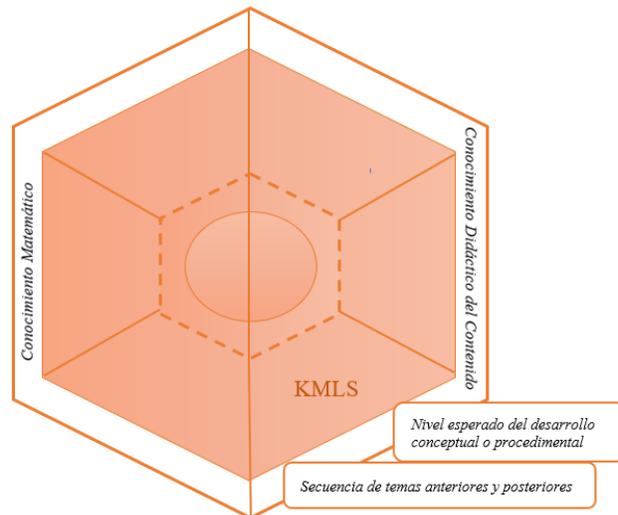
Categorías y descriptores evidenciados del subdominio KMLS

| Subdominio | | KMLS |
|------------------|--|---|
| Categoría | Secuenciación de temas anteriores y posteriores | Nivel esperado del desarrollo conceptual o procedimental |
| Descriptor | Conoce la secuenciación de los temas del aprendizaje de la estructura multiplicativa teniendo en cuenta temas previos (conjuntos, valor posicional, lectura, análisis) y posteriores (potenciaciones, radicaciones, logaritmos, incluso fracciones y el álgebra) | Sabe que los estudiantes al finalizar la educación primaria deben conocer las operaciones de multiplicación y división, y, además deben estar en la capacidad de resolver situaciones donde se vean involucradas estas operaciones y su algoritmo |
| Tipo de relación | Relación de tipo Intra-subdominio | |

Las relaciones de conocimiento evidenciadas se resumen en la Figura 12.

Figura 12

Relación intra-subdominio al interior del KMLS



Fuente: Elaboración propia.

Julia en el fragmento de entrevista presentado en la página 42, hace referencia al algoritmo de las operaciones. En ese momento se identificó una oportunidad para profundizar en su conocimiento profesional. Por lo que se le preguntó lo siguiente:

Fragmento de entrevista a Julia

Ha hecho referencia al algoritmo de la multiplicación y de la división. Podría contarme ¿cuáles son los elementos del algoritmo de esas operaciones? Y ¿cómo lo utilizan los chicos en la resolución de las situaciones que se plantean?

Julia: Sí, yo estaba hablando de los algoritmos de la multiplicación y de la división, porque *los lineamientos nos dicen que los estudiantes deben dominar los procedimientos y los algoritmos matemáticos, y reconocer cómo, cuándo y por qué usarlos de manera flexible y eficaz. Se vincula la habilidad procedimental con la comprensión conceptual que fundamentan esos procedimientos. ¿Cuáles son los elementos? eh, bueno, los elementos de la multiplicación son el multiplicando, el multiplicador y el producto. Los de la división son, el dividendo, el divisor, el cociente y residuo.*

Del fragmento anterior podemos concluir que Julia evidencia conocimiento sobre el papel del lenguaje matemático y también sobre el nivel esperado de desarrollo conceptual y procedimental que deben tener los estudiantes de acuerdo con los lineamientos curriculares. Por un lado, manifiesta que los estudiantes deben dominar los procedimientos y algoritmos matemáticos reconociendo cómo, cuándo y por qué usarlos al momento de resolver las situaciones que se les plantean (Nivel esperado de desarrollo conceptual y procedimental – KMLS). También pone en evidencia conocimiento de términos y expresiones propiamente matemáticas para referirse a los elementos que componen los algoritmos de la multiplicación y la división indicando que son el multiplicando, el multiplicador y el producto para la operación de multiplicación; y el dividendo, el divisor, el cociente y el residuo para la operación de división (Papel del lenguaje matemático - KPM). Lo que permite establecer una relación de tipo Inter-dominio entre los subdominios KMLS y KPM, tal como se observa en la Tabla 7.

Tabla 7

Categorías y descriptores evidenciados de los subdominios KMLS y KPM

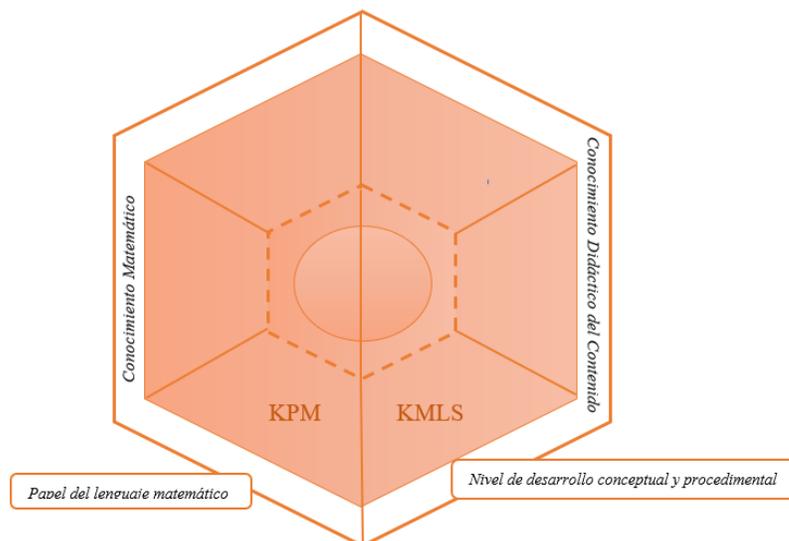
| Dominio | PCK | MK |
|---------|-----|----|
|---------|-----|----|

| Subdominios | KMLS | KPM |
|------------------|--|---|
| Categorías | Nivel esperado del desarrollo conceptual o procedimental | Papel del lenguaje matemático |
| Descriptor | Conoce que los estudiantes deben dominar los procedimientos y los algoritmos matemáticos y reconocer cómo, cuándo y por qué usarlos de manera flexible y eficaz. | Conoce el papel del lenguaje matemático haciendo uso de expresiones propiamente matemáticas para referirse a los elementos de las operaciones de multiplicación y división: multiplicando, multiplicador, producto, divisor, dividendo, cociente y residuo. |
| Tipo de relación | Inter-dominio | |

Las relaciones de conocimiento evidenciadas se resumen en la Figura 13.

Figura 13

Relaciones de conocimiento Inter-dominio entre los subdominios KPM y KMLS



Fuente: Elaboración propia.

Considerando la oportunidad presentada por Julia en los fragmentos anteriores sobre su conocimiento sobre los algoritmos de las operaciones, se profundizó en lo siguiente:

Fragmento de entrevista a Julia

Cómo los utilizan maestra [los algoritmos], si cuando presenta a los chicos las situaciones problema lo hace en un lenguaje natural. ¿En qué momento utilizarían los chicos el algoritmo para darle solución a las situaciones?

Julia: Esto se hace a través de la resolución de problemas, donde ellos deben, esa situación que se les está presentando en un lenguaje natural, de su contexto, de su diario vivir, pasarlo a un lenguaje matemático. *Este proceso no es tan fácil, teniendo en cuenta la edad de ellos.* No es un proceso fácil, de hecho, alguna *teoría semiótico cognitiva como la de Duval* plantea que hacer *ese cambio de un lenguaje natural a un lenguaje matemático no es un proceso fácil para los estudiantes.* Y por eso es por lo que en el Colegio se empieza a trabajar desde temprana edad para que *cuando ellos lleguen por ejemplo al álgebra*, donde es un lenguaje más algebraico, ellos no tengan tantas dificultades para hacer esa traducción de esos lenguajes. Entonces [lo que se busca es] que ellos tengan una representación clara de cómo unir ese lenguaje o cómo hacer ese cambio, darle un significado a ese objeto matemático desde lo cotidiano. Porque eso no es un proceso fácil.

De lo anterior se puede deducir que Julia posee conocimientos sobre la relación que existe entre la estructura multiplicativa con el aprendizaje de temas posteriores. Reconoce las potencialidades que el aprendizaje actual tiene para el desarrollo de conocimientos matemáticos más avanzados, en este caso, el álgebra (Secuencia de temas - KMLS). También se evidencia que tiene conocimientos sobre las dificultades que pueden llegar a presentar los estudiantes en su aprendizaje, considerando que el cambio de lenguaje no es un proceso fácil para los estudiantes pero que se debe promover su aprendizaje desde niveles tempranos para que en el aprendizaje posterior logren tener una representación más clara de cómo usar esos lenguajes (Fortalezas y debilidades en el aprendizaje de las matemáticas - KFLM). Por último, se logra evidenciar conocimientos sobre teorías de aprendizaje de las matemáticas. Julia hace referencia a la teoría de Representaciones Semióticas de Duval, con la cual argumenta su conocimiento del por qué los cambios de registros no es un proceso sencillo para los estudiantes (Teorías de aprendizaje de las matemáticas – KFLM). Por lo anterior, se puede establecer una relación de tipo Intra-subdominio al interior del KFLM; y otra relación de tipo Intra-dominio entre los subdominios KFLM-KMLS, ambos subdominios pertenecientes al PCK, tal como se muestra en la Tabla 8.

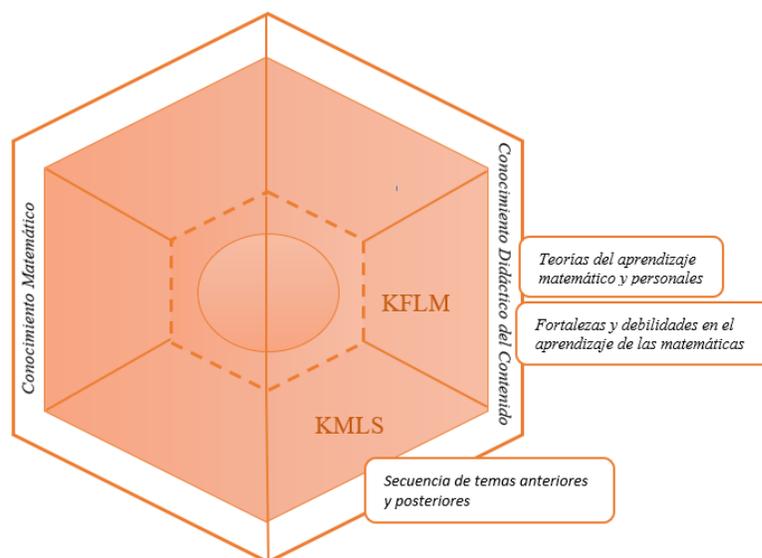
Tabla 8*Categorías y descriptores evidenciados de los subdominios KMLS y KFLM*

| Dominio | | PCK |
|------------------|---|--|
| Subdominio | KMLS | KFLM |
| Categoría | Secuencia de temas anteriores y posteriores | Fortalezas y debilidades en el aprendizaje de las matemáticas |
| | | Teorías del aprendizaje matemático y personales |
| Descriptor | Conoce la relación que existe entre el aprendizaje de la estructura multiplicativa y las potencialidades que tendrá para el desarrollo de temas posteriores como el álgebra | Conoce las dificultades que pueden presentar los estudiantes al momento de hacer el cambio del lenguaje natural al lenguaje matemático |
| | | Conoce la Teoría de Representaciones Semióticas de Duval y la utiliza en el diseño de oportunidades para el aprendizaje de la estructura multiplicativa a través de la resolución de problemas |
| Tipo de relación | Intra- dominio e Intra-subdominio | |

Las relaciones de conocimiento evidenciadas se resumen en la Figura 14.

Figura 14

Relación Intra-subdominio e Intra-dominio al interior del PCK



Fuente: Elaboración propia

En el fragmento de entrevista anterior Julia hace referencia a dos tipos de lenguaje: natural y escrito, por lo que, ha puesto de manifiesto una nueva oportunidad para profundizar en su conocimiento. Por lo cual, se le realizó la siguiente pregunta:

Fragmento de entrevista a Julia

Menciona un lenguaje matemático y un lenguaje natural, pero ¿existen otras formas en las que los estudiantes podrían realizar ese cambio de representación o solo para la enseñanza de esos objetos o conceptos matemáticos se utilizan esos dos tipos de representaciones? Es decir, ¿ellos podrían recurrir a otros tipos de representaciones para darle solución a esos problemas o solamente pueden basarse en esos dos tipos representaciones?

Julia: No, ellos pueden recurrir a otros tipos de representación como la gráfica, por ejemplo. De hecho, ellos siempre tratan como de hacer primero sus representaciones concretas con semillas, tapas, piedritas y luego pasan a sus dibujitos de la situación que se les está presentando. De hecho, algunos se les facilita más este método de hacer el dibujito de la situación, ya a medida que ellos han ido avanzando, ya les queda más fácil pasar directamente o hacer esa asociación de lo matemático y el natural y es lo que se espera que logren. Pero claro que utilizan otros tipos de representaciones para el mismo objeto matemático.

De lo anterior se puede deducir y concluir que Julia tiene conocimientos sobre las formas de interacción que tienen sus estudiantes al momento de resolver problemas multiplicativos puesto que, manifiesta que en un primer momento recurren a representaciones concretas, luego realizan gráficas y luego representaciones en un lenguaje matemático (Formas de interacción con un contenido matemático – KFLM). También se evidencia conocimiento sobre lo que se espera que logren sus estudiantes en el proceso de los cambios de registro, pues manifiesta que, aunque en un primero momento los estudiantes recurren a representaciones concretas y gráficas se espera que logren en algún momento de su vida escolar realizar un cambio de registro del lenguaje natural al matemático de forma directa (Nivel esperado de desarrollo conceptual y procedimental – KMLS). Por último, en este fragmento se evidencian conocimientos sobre las distintas representaciones que se pueden utilizar para los objetos matemáticos de multiplicación y división en el campo numérico de los números naturales (Registros de representación – KoT). Por tal motivo, se puede determinar una relación de tipo Intra-dominio entre el KFLM-KMLS, ambos subdominios del PCK; y una relación de tipo Inter-dominio entre los subdominios KFLM-KMLS-KoT. Tal como se observa en la Tabla 9.

Tabla 9

Categorías y descriptores evidenciados de los subdominios KFLM, KMLS y KoT

| Dominio | PCK | | MK |
|------------|---|--|---|
| Subdominio | KFLM | KMLS | KoT |
| Categoría | Formas de interacción con un contenido matemático | Nivel esperado de desarrollo conceptual y procedimental | Registros de representación |
| Descriptor | Conoce la forma en la que sus estudiantes podrían resolver los problemas planteados: representaciones concretas, representaciones gráficas, representación simbólica o matemática | Conoce que los estudiantes a medida que avanzan en la resolución de problemas multiplicativos lograrán realizar una conversión directa del lenguaje natural al lenguaje matemático | Conoce las distintas representaciones que se pueden utilizar para los objetos matemáticos de multiplicación y división en el campo numérico de los números naturales: |

concretas, gráficas,
simbólicas y lenguaje
natural

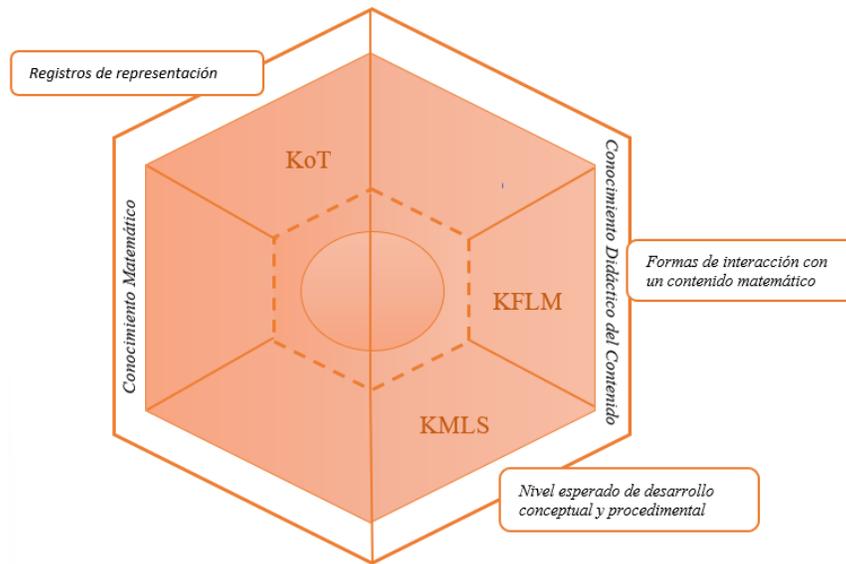
Tipo de
relación

Intra-dominio e Inter-dominio.

Las relaciones de conocimiento evidenciadas se resumen en la Figura 15.

Figura 15

Relaciones Intra-dominio e Inter-dominio



Fuente: Elaboración propia

Otro aspecto importante considerado en la planeación de clase es en el que Julia propone utilizar un recurso interactivo para promover el aprendizaje de las operaciones de multiplicación y división. El recurso muestra a un chef que está preparando macarrones para sus 540 invitados y al finalizar de cocinar se da cuenta que 12 kg de macarrones alcanza para 180 platos (Figura 16).

Figura 16

Recurso interactivo utilizado por Julia en el desarrollo de la clase

DESARROLLO.

En el recurso interactivo se muestra a un chef que está preparando macarrones para sus invitados que son 540, al finalizar de cocinar se da cuenta que 12 Kg de macarrones alcanza para 180 platos. Se hace la siguiente pregunta:

1. ¿Para cuántos platos alcanzaría si preparara 36 Kg de macarrones? 540 platos



Si siguiendo el recurso interactivo, se muestran problemas donde el estudiante deba utilizar la multiplicación o la división para resolverlos.:

2. ¿Cuántas hojas se deben repartir por igual a 54 niños si hay 486 hojas? Respuesta: 9
3. Si Camilo empacó 35 Kg de dulces en una bolsa. ¿Cuántos Kg de dulces empacará en 8 bolsas? Respuesta: 280
4. ¿Cuántas bolsas se necesitan para empacar 8640 canicas, si en cada bolsa caben 96 canicas? Respuesta: 90
5. ¿Cuánto habría que pagar por 9 kg de galletas, si cada kilogramo vale 3.900 pesos? Respuesta: 35.100

Fuente: Plan de clase de Julia.

Por lo cual, durante la entrevista se profundiza en lo siguiente:

Fragmento de entrevista a Julia

En la parte del desarrollo de la planeación, usted hace uso de un recurso interactivo, ¿Por qué utiliza el recurso en su planeación de clase o al momento de llevarle a los niños estas situaciones problemas?

Julia: Este recurso interactivo, como te decía, nosotros acá en Colombia tenemos unos lineamientos que nos da el MEN y nos dice qué deben desarrollar los estudiantes en diferentes niveles, de hecho, *este recurso es un recurso que nosotros podemos encontrar en un portal educativo del Ministerio de Educación, conocido como “Colombia Aprende”.* Ahí encontramos temas, recursos, actividades que están agrupadas por grados, entonces siempre nos presentan este tipo de recursos. Ahora, ¿yo por qué escogí este recurso? como te digo, nosotros en el colegio tenemos la facilidad de que los estudiantes puedan hacer una exploración con el medio, en este caso, *estamos haciendo una exploración haciendo uso de la tecnología,* y pues así ellos puedan ir dándole ese significado, *que ellos a través del juego por decirlo así, también puedan ir practicando esos conceptos de la multiplicación, de la división a través de la resolución de problemas y del juego de cierta forma. Presentar este tipo de recursos a los niños les llama mucho la atención, a llevarlos solamente en una hoja y que ellos imaginen las situaciones.* Como estamos trabajando con niños, la verdad es que tenerlos concentrados a ellos una hora y pretender que ellos estén leyendo, muchas veces la atención se dispersa, *entonces cuando llevamos este tipo de recursos o salimos a hacer la exploración del medio he notado que ellos se concentran más, participan más, porque ellos a través del juego también están aprendiendo, y este tipo de recursos los mantiene atentos, activos, a querer encontrar la respuesta, a ver quién la hace primero.*

En el fragmento anterior se pone en evidencia el conocimiento de Julia sobre recursos virtuales que favorecen la enseñanza del nuevo conocimiento. Es importante resaltar que, la profesora conoce recursos interactivos que proporciona el MEN a los maestros de Colombia a través de portal “Colombia Aprende”, y los utiliza en su actividad en el aula. Además, conoce las potencialidades de dichos recursos considerando que al hacer uso de ellos los estudiantes se encuentran más concentrados, más atentos, activos y participativos (Recursos de enseñanza materiales y virtuales – KMT). También manifiesta que, la enseñanza de la estructura multiplicativa a través del juego y de la resolución de problemas permite a sus estudiantes avanzar en el aprendizaje matemático lo cual pone en evidencia que conoce y utiliza diversas estrategias de enseñanza que ayudan a los estudiantes a darle sentido y significado al contenido matemático que están aprendiendo (Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos – KMT). Por lo anterior, se puede establecer una relación de tipo Intra-subdominio al interior del KMT; y una relación de tipo Intra-dominio entre KMT – KMLS ambos subdominios pertenecientes al dominio PCK. Tal como se presenta en la Tabla 10.

Tabla 10

Categorías y descriptores evidenciados de los subdominios KMLS y KMT

| Dominio | | PCK |
|------------|--|--|
| Subdominio | KFLM | KMT |
| Categoría | Aspectos emocionales del aprendizaje de las matemáticas | Recursos de enseñanza materiales y virtuales |
| | | Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos |
| Descriptor | Conoce que el uso de recursos virtuales que despiertan el interés y la motivación de los estudiantes por el aprendizaje matemático | Conoce recursos de enseñanza virtuales que potencializan el aprendizaje de sus estudiantes como los recursos interactivos proporcionados por el MEN a través del portal “Colombia Aprende” |
| | | Conoce y utiliza diversas estrategias de enseñanza que ayudan a los estudiantes a darle sentido y significado al contenido |

matemático que están aprendiendo como el juego y la resolución de problemas

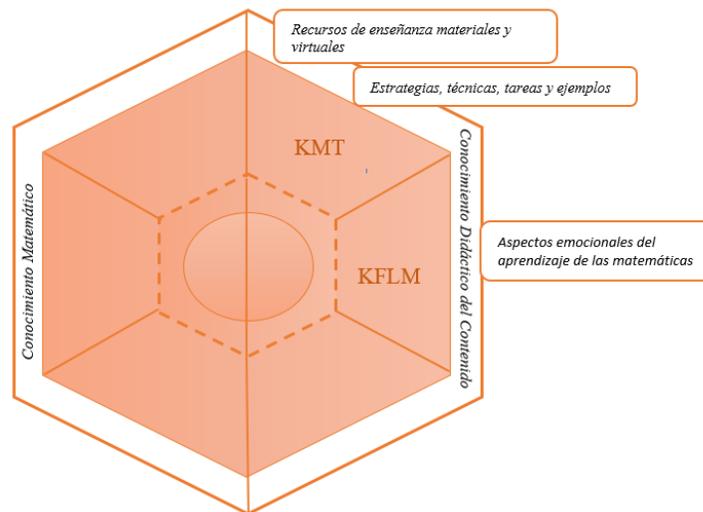
Tipo de relación

Intra- dominio e Intra-subdominio

Las relaciones de conocimiento evidenciadas se resumen en la Figura 17.

Figura 17

Relación Intra-subdominio e Intra-dominio



Fuente: Elaboración propia

Como se observa en la Figura 16, Julia en el desarrollo de su clase propone a sus estudiantes una serie de situaciones problema, por lo cual se consideró interesante profundizar en lo siguiente:

Fragmento de entrevista a Julia

Ya sabemos que el recurso es interesante para los niños, pero ¿las actividades que se plantean allí son realmente interesantes para ellos o solamente ellos resuelven las actividades porque se les está presentando en un recurso interactivo?

Julia: Pues de hecho *los estudiantes son los que escogen los temas que se van a trabajar.* Por ejemplo, ellos mencionan, nosotros queremos trabajar este proyecto o este tema matemático, haciendo énfasis en los dinosaurios. Entonces a ellos siempre se les presentan los problemas de matemáticas haciendo uso de los dinosaurios por decirlo así, entonces, *ya el recurso que yo elabore deber ir relacionado o se buscan recursos que estén relacionados con lo que ellos escogieron. Siempre son los estudiantes los que escogen qué temática se va a asociar con el objeto matemático,*

qué es lo que les llama la atención a ellos y los motiva, y entonces ellos lo escogen y eso es lo que se trabaja y se desarrolla.

En el fragmento se puede evidenciar que Julia conoce sobre aspectos de la vida cotidiana que pueden llegar a tener influencia en el interés, la motivación y las expectativas de los estudiantes por aprender matemáticas. Considera que el permitir a sus estudiantes seleccionar aspectos de su cotidianidad y de su interés para abordar contenidos matemáticos despiertan su motivación en el aprendizaje (Aspectos emocionales del aprendizaje de las matemáticas – KFLM). También, es importante resaltar que Julia como estrategia de enseñanza permite que sean los estudiantes los que seleccionen temas de su interés y las temáticas con las que les gustaría que se abordaran los contenidos. Esa elección le permite crear o seleccionar los recursos que llevará al aula y con los cuales promueve aprendizaje significativo (Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos – KMT). Por lo anterior, se logra establecer una relación de tipo Intra-dominio entre el KFLM-KMT, ambos subdominios pertenecientes al PCK, tal como se observa en la Tabla 11.

Tabla 11

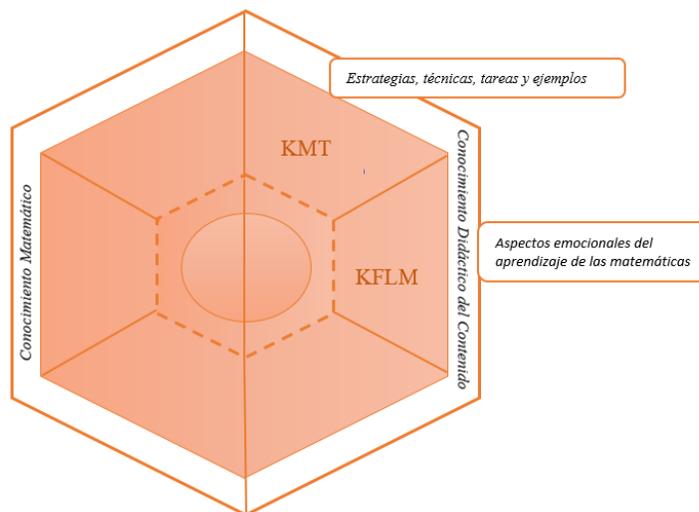
Categorías y descriptores evidenciados de los subdominios KFLM y KMT

| Dominio | | <i>PCK</i> |
|------------------|---|---|
| Subdominio | KFLM | KMT |
| Categoría | Aspectos emocionales del aprendizaje de las matemáticas | Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos |
| Descriptor | Conoce que el permitir que los estudiantes seleccionen aspectos de su interés y de la vida cotidiana para abordar los contenidos matemáticos despiertan su motivación y expectativas por aprender | Conoce y utiliza diversas estrategias de enseñanza que ayudan a los estudiantes a darle sentido y significado al contenido matemático que están aprendiendo como el permitir que sus estudiantes sean los que seleccionen la temática con la que les gustaría que fueran abordados los contenidos matemáticos |
| Tipo de relación | Intra- dominio | |

Las relaciones de conocimiento evidenciadas se resumen en la Figura 18.

Figura 18

Relaciones de conocimiento Intra-dominio al interior del PCK



Fuente: Elaboración propia

Al finalizar la entrevista, se le brindó la posibilidad a Julia de realizar algunos comentarios finales que considerara importantes y en los que no se hubiera profundizado en las preguntas. Sus aportes finales se presentan a continuación:

Fragmento de entrevista a Julia

Algunos comentarios finales que quiera hacer, hablar sobre algo que le parezca relevante de su planeación y que quizás no haya tocado en las preguntas.

Julia: Sí me gustaría decir que [en] la formulación y [en] el tratamiento de problemas es también importante que los estudiantes se enfrenten con situaciones donde tal vez no hay una solución, porque ellos siempre se acostumbran que en un problema matemático tiene que haber una solución y muchas veces no es así. Entonces también es importante que en la resolución de problemas ellos se topen con situaciones donde no encuentren esa solución, donde no existe una solución. Generalmente ellos siempre tratan de encontrar una solución, pero cuando el problema no tiene esa solución entonces ellos se quedan como qué pasó, entonces también es importante que ellos se enfrenten a esas situaciones problemas.

Ellos se van acostumbrando a ir analizando toda la información. Van haciendo que ese conocimiento que ellos tienen se vaya fortaleciendo, que empiecen a formular nuevas preguntas, a cuestionar lo que está pasando y a través de esas nuevas preguntas, ese cuestionarse qué está pasando hace que se desarrolle y avance mucho más ese pensamiento matemático en diversas formas. También en algunas ocasiones uso enunciados incompletos, donde ellos deben completar la información con el fin de que inventen o formulen nuevas situaciones. Y así puedan ir avanzando en esa curiosidad sobre ese objeto matemático que se está trabajando.

De lo anterior se pueden considerar varios aspectos importantes. Primero, que Julia posee conocimientos sobre las tareas que favorecen el aprendizaje de sus estudiantes, por ejemplo, las situaciones problema sin solución y las situaciones problema con enunciados incompletos (Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos – KMT). Segundo, se reconoce que algunas estrategias utilizadas para resolver problemas son considerar problemas equivalentes reemplazando condiciones, formular problemas sin solución, formular problemas incompletos y la formulación de problemas, considerando que ese tipo de tareas permiten a los estudiantes analizar toda la información, cuestionarse sobre las estrategias que debe utilizar para darle solución a las situación, permitiendo con esto tener un aprendizaje más consciente y avanzar en el pensamiento matemático (Conocimiento de la práctica de resolver problemas - KPM). Por último, expone que el hacer uso de esas situaciones permite que sus estudiantes puedan avanzar en la curiosidad sobre el objeto matemático que están abordando, lo que indica que proponer este tipo de situaciones ayudan en su interés por aprender, poniendo en evidencia conocimiento sobre aquellos aspectos que despiertan las expectativas y la motivación de sus estudiantes (Aspectos emocionales del aprendizaje de las matemáticas – KFLM). Por lo anterior se pueden establecer una relación de tipo Intra-dominio entre el KFLM-KMT, ambos pertenecientes al PCK; y una relación de tipo Inter-dominio entre el KFLM-KMT- KPM. Tal como se evidencia en la Tabla 12.

Tabla 12

Categorías y descriptores evidenciados de los subdominios KFLM, KMT y KPM

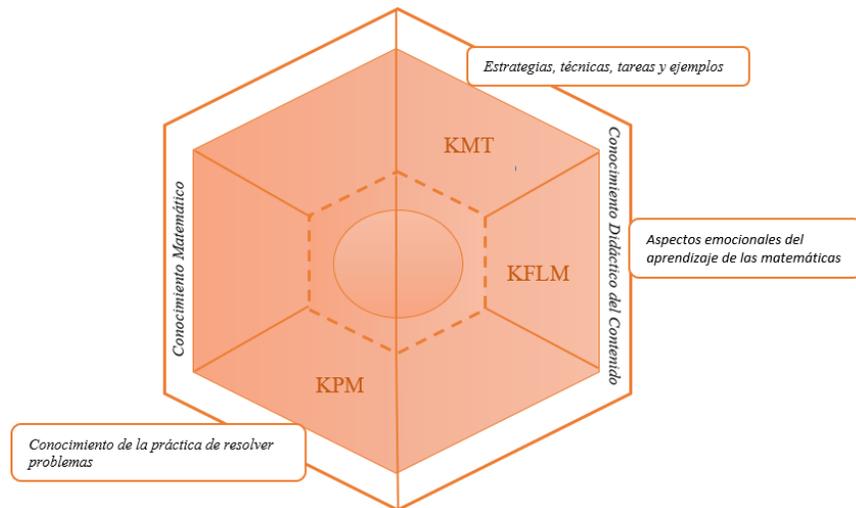
| Dominio | PCK | | MK |
|------------|------|-----|-----|
| Subdominio | KFLM | KMT | KPM |

| Categoría | Aspectos emocionales del aprendizaje de las matemáticas | Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos | Conocimiento de la práctica de resolver problemas |
|------------------|---|---|---|
| Descriptor | Conoce que el proponer a los estudiantes situaciones incompletas y situaciones sin solución despierta su curiosidad y les permite avanzar en el conocimiento matemático | Conoce que las situaciones problema sin solución y las situaciones problemas con enunciados incompletos potencializan el aprendizaje de los estudiantes | Conoce que algunas estrategias utilizadas para resolver problemas son considerar problemas equivalentes reemplazando condiciones, formular problemas sin solución, formular problemas incompletos y la formulación de problemas |
| Tipo de relación | Intra-dominio e Inter-dominio. | | |

Las relaciones de conocimiento evidenciadas se resumen en la Figura 19.

Figura 19

Relaciones de conocimiento Intra-dominio e Inter-dominio



Fuente: Elaboración propia

4.2 Relaciones establecidas del conocimiento especializado de Alan

A partir de los indicios encontrados en la planeación de clase propuesta por Alan se logró profundizar en su conocimiento profesional. En el plan de clase se tienen en cuenta diferentes estándares de aprendizaje. Uno de ellos se muestra en la Figura 20.

Figura 20

Primer estándar de aprendizaje propuesto

-
- 1) Describo, comparo y cuantifico situaciones con números, en diferentes contextos y con distintas representaciones.

Fuente: Plan de clase de Alan.

Por lo anterior, en la entrevista se decide profundizar en lo siguiente:

Fragmento de entrevista a Alan

En el primer estándar manifiesta que el estudiante debe: describir, comparar y cuantificar situaciones con números en diferentes contextos y con distintas representaciones ¿a qué se refiere con eso? ¿Cuáles pueden ser esos contextos? ¿Qué tipos de representaciones pueden utilizar los estudiantes al momento de resolver las situaciones?

Alan: Bueno, aquí específicamente me está diciendo describo, comparo y cuantifico situaciones numéricas en diferentes contextos. *El estudiante puede hacer uso de un contexto matemático propio, un problema presentado en un lenguaje matemático propio o un contexto verbal. Cuando me refiero a un contexto verbal hago alusión a un problema que describe una situación real para los estudiantes o una situación pseudo-realista es decir que puede tratar de simular una realidad, pero no lo es. ¿Y qué tipo de modelos? por ejemplo puede presentársele una tabla, un gráfico y el estudiante sea capaz de entender el grafico, entender la tabla o entender el enunciado del problema y poderle dar solución, es decir, sacar los datos necesarios y poderle dar solución al problema que se le está planteando en diferentes modelos o formas o representaciones.*

En el fragmento anterior Alan pone en evidencia el conocimiento de diferentes contextos en los que se pueden aplicar los conceptos de multiplicación y división, haciendo referencia a contextos matemáticos y contextos verbales (Fenomenología y aplicaciones - KoT). También se evidencian conocimientos sobre las distintas representaciones que se pueden utilizar para los objetos matemáticos de multiplicación y división en el campo

numérico de los números naturales, por ejemplo; tablas, gráficos y representaciones en lenguaje verbal (Registros de representación – KoT). Por tal motivo, se puede determinar una relación de tipo Intra-subdominio al interior del KoT, como se muestra en la Tabla 13.

Tabla 13

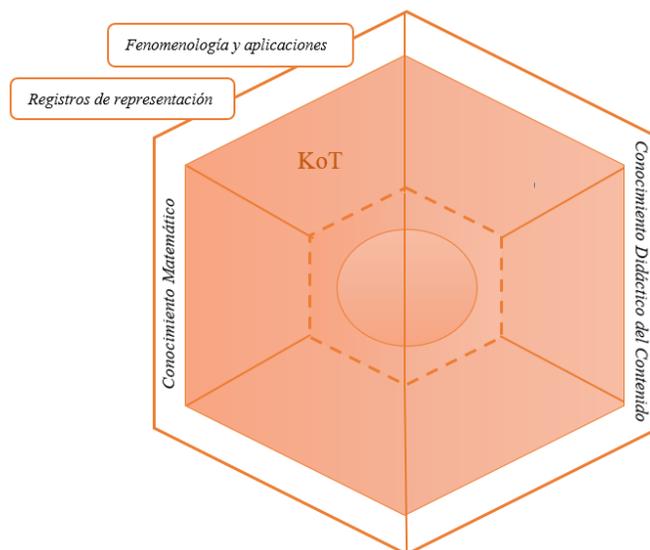
Categorías y descriptores evidenciados del subdominio KoT

| | | |
|------------------|---|--|
| Dominio | | MK |
| Subdominios | | KoT |
| Categorías | Fenomenología y Aplicaciones | Registros de Representación |
| Descriptor | Conoce diferentes contextos en los que se pueden aplicar los conceptos de multiplicación y división: contexto matemático, contexto verbal (situaciones reales, situaciones pseudo-realistas). | Conoce distintas representaciones que se pueden utilizar para representar los objetos matemáticos de multiplicación y división en el campo numérico de los números naturales: representaciones verbales, tablas, gráficos. |
| Tipo de relación | Intra-subdominio | |

La relación de conocimiento evidenciada se resume en el Figura 21.

Figura 21

Relación de conocimiento Intra-subdominio al interior del KoT



Fuente: Elaboración propia.

Otro indicio de conocimiento lo encontramos en el tercer estándar de aprendizaje propuesto por Alan en su planeación de clase, en el cual indica que los estudiantes deben reconocer propiedades y relaciones de los números naturales.

Figura 22

Tercer estándar de aprendizaje propuesto

-
- 3) Reconozco las propiedades de los números (ser par, ser impar, etc.) y las relaciones entre ellos (ser mayor que, ser menor que, ser múltiplo de, ser divisible por, etc.)

Fuente: Plan de clase de Alan.

Durante la entrevista se profundizó en lo siguiente:

Fragmento de entrevista a Alan

En el tercer estándar ¿Por qué es importante que los estudiantes reconozcan las propiedades (par, impar) y relaciones (ser mayor que, ser menor que, ...) de los números naturales? ¿Cómo se vinculan estos conocimientos con el aprendizaje de la multiplicación y la división?

Alan: Bueno, cuando los estudiantes están aprendiendo, normalmente aprenden las propiedades de los números ser par e impar. Por ejemplo, de la forma $2n$ que sería un número par y de la forma $2n + 1$ que sería un número impar. Entonces de la forma $2n$, cuando nosotros entendemos la expresión $2n$, a pesar de que los niños no lo van a ver así, se podrían dar cuenta que los números pares son producto de

una multiplicación. Por ejemplo, $2n$: $2x1 = 2$, $2x2 = 4$ Entonces ahí me va surgiendo todo el conjunto de los números pares y el conjunto de los números impares $2n + 1$, $2x1 + 1 = 3$ y se generaría todo el conjunto de los números impares, entendiendo que los niños en ese punto trabajan sobre números naturales y todavía no se permean mucho sobre los números negativos, el conjunto de los números negativos porque es un trabajo posterior.

De lo anterior se pudo evidenciar que Alan tiene conocimientos sobre algunas propiedades de los números naturales: ser par o impar. Además, manifiesta conocimiento sobre la expresión general del conjunto de los números impares: $2n + 1$ y la expresión general del conjunto de los números pares: $2n$ (Definiciones propiedades y fundamentos - KoT). También pone en evidencia que conoce que sus estudiantes en el ciclo de escolaridad de interés no logran reconocer dichas expresiones (Nivel esperado de desarrollo conceptual y procedimental – KMLS). Por último, se evidencia conocimiento sobre la secuencia curricular que siguen algunos contenidos matemáticos, evidenciando que el aprendizaje de los números enteros se da después del aprendizaje de los números naturales (Secuencia de temas anteriores y posteriores -KMLS). Por lo anterior, se logra identificar una relación de tipo Intra-subdominio al interior del KMLS y una relación de tipo Inter-dominio entre los subdominios KoT-KMLS, tal como se evidencia en la Tabla 14.

Tabla 14

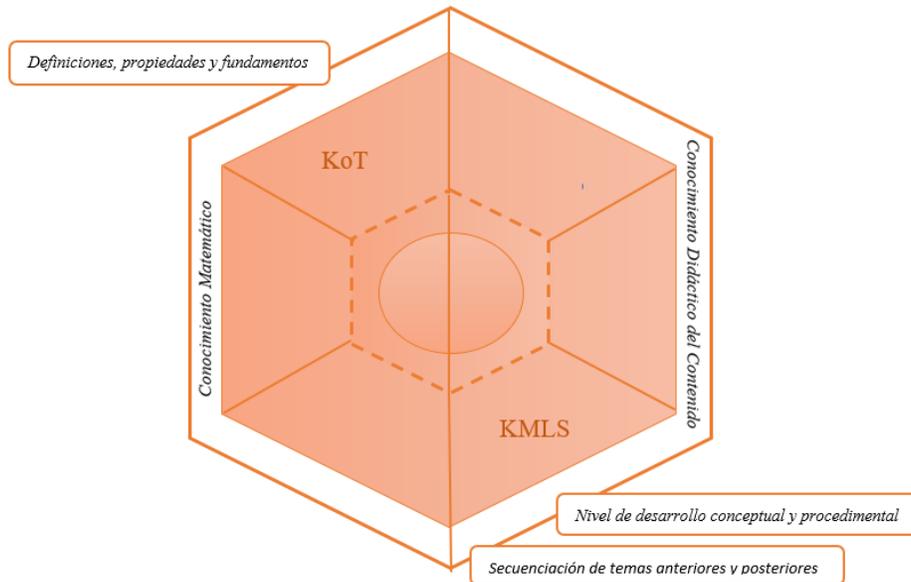
Categorías y descriptores evidenciados de los subdominios KoT y KMLS

| Dominio | MK | PCK | |
|------------|---|--|--|
| Subdominio | KoT | KMLS | |
| Categoría | Definiciones propiedades y fundamentos | Nivel esperado del desarrollo conceptual o procedimental | Secuenciación de temas anteriores y posteriores |
| Descriptor | Conoce propiedades de los números pares e impares en el campo de los números naturales: los números pares e impares se representan de la forma $2n$ y $2n + 1$ respectivamente. | Conoce que los estudiantes en el nivel de escolaridad de interés todavía no logran reconocer las expresiones $2n$ y $2n + 1$ como números pares e impares respectivamente. | Conoce que los números enteros hacen parte del aprendizaje posterior que tendrán los estudiantes |

Las relaciones encontradas se resumen en la Figura 23.

Figura 23

Relación Intra-subdominio e Inter-dominio



Fuente: Elaboración propia.

Otra evidencia de conocimiento la encontramos en el cuarto estándar propuesto por Alan en la planeación de clase, donde propone que sus estudiantes resuelvan y formulen problemas en situaciones aditivas, por lo que, en la entrevista se decide profundizar en lo siguiente:

Figura 24

Cuarto estándar de aprendizaje propuesto por Alan

- 4) Resuelvo y formulo problemas en situaciones aditivas de descomposición y transformación.

Fuente: Plan de clase de Alan.

Fragmento de entrevista a Alan

En el cuarto estándar: En el aprendizaje de la estructura multiplicativa ¿Por qué es importante que los estudiantes resuelvan y formulen problemas en situaciones aditivas? Entiendo que hace referencia a problemas que requieran de operaciones de suma y resta para su solución ¿Qué relación existe con el tema de interés en nuestro caso que es la multiplicación y la división?

Alan: Al analizar la planeación, *la primera actividad que se propone que son filas y columnas donde se quiere expresar una multiplicación que es 3×9 , eso se puede tomar como una situación aditiva porque los estudiantes pueden contar la cantidad de cuadrados que hay y llegar a la solución, pero podríamos resumirlo por bloques, entonces habría tres bloques donde cada bloque tiene 9 cuadritos entonces por eso es la multiplicación 3×9 . Yo sé y se entiende que sumar tiene unos procesos diferentes a los procesos que son de la multiplicación, pero se busca hacer ese enlace entre los dos porque los estudiantes suelen asociar que la multiplicación es una forma resumida de la suma. Ellos lo suelen ver así y se suele explicar de esa manera, muchos docentes lo explican así, aunque en procesos cognitivos requieren de procesos diferentes, por ejemplo, la multiplicación también puede ser vista como agrupación de elementos.*

Alan, hace referencia a la siguiente actividad donde propone algunos arreglos rectangulares:

Figura 25

Actividad propuesta por Alan en la planeación de clase

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| Actividades: | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Muestre a los alumnos esta matriz: | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <table border="1"><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table> | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Pida a los alumnos que escriban expresiones de multiplicación y división para describir este rectángulo. Por ejemplo, $3 \times 9 = 27$, $27 = 9 \times 3$ o $27 \div 3 = 9$, $27 \div 9 = 3$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

Fuente: Plan de clase de Alan.

De lo anterior se logra evidenciar que Alan tiene conocimiento sobre aquellas tareas que potencializan el aprendizaje de los conceptos de la multiplicación y división como lo son los arreglos rectangulares (Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos – KMT). También, se logra evidenciar conocimiento sobre las conexiones que tiene el aprendizaje de la estructura

multiplicativa con la estructura aditiva, considerando que sus estudiantes pueden llegar a asumir el proceso de multiplicar como una forma resumida de suma e incluso puede ser vista como una agrupación de elementos (Conexiones de simplificación – KSM). Por lo anterior, se logra establecer una relación de tipo Inter-dominio entre categorías de los subdominios KMT y KSM, tal como se evidencia en la Tabla 15.

Tabla 15

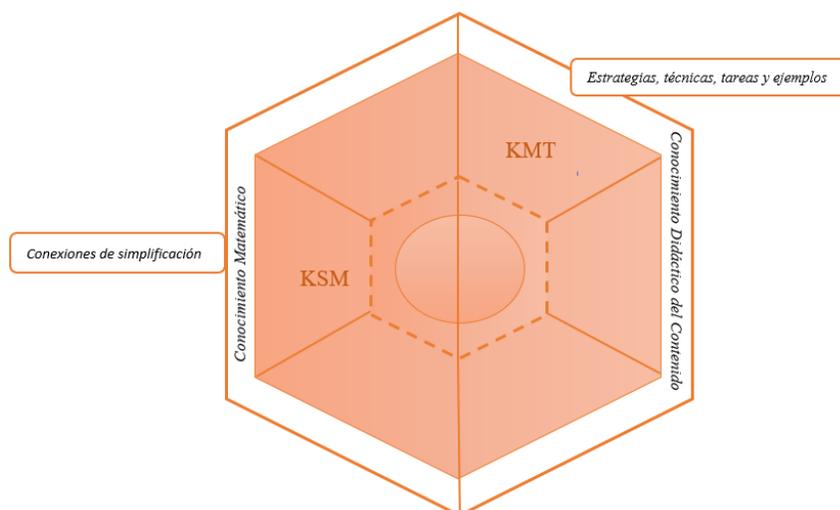
Categorías y descriptores evidenciados de los subdominios KSM y KMT

| | | |
|------------------|---|--|
| Dominio | MK | PCK |
| Subdominios | KSM | KMT |
| Categorías | Conexiones de simplificación | Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos |
| Descriptor | Conoce que el concepto de conjunto y de suma son contenidos de menor complejidad que se relacionan con el aprendizaje de la estructura multiplicativa y permite a los estudiantes aproximarse a los conceptos de multiplicación y división. | Conoce y utiliza arreglos rectangulares como tareas que potencializan el aprendizaje de los conceptos de multiplicación y división, considerando que permite vincular temas anteriores como la suma y los conjuntos. |
| Tipo de relación | Inter-dominio | |

La relación de conocimiento evidenciada se resume en la Figura 26.

Figura 26

Relación Inter-dominio entre el KSM y KMT



Fuente: Elaboración propia.

Otra evidencia de conocimiento la encontramos en el quinto estándar propuesto por Alan, en él expresa que sus estudiantes utilizan diferentes estrategias de cálculo y estimación para resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas.

Figura 27

Quinto estándar de aprendizaje propuesto por Alan

- | |
|--|
| <p>5) Utilizo diferentes estrategias de cálculo (especialmente cálculo mental) y estimación para resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas.</p> |
|--|

Fuente: Plan de clase de Alan

Por lo que, en la entrevista se profundizó en lo siguiente:

Fragmento de entrevista a Alan

En el quinto estándar: ¿Por qué es importante que los estudiantes utilicen diferentes estrategias de cálculo y estimación para resolver situaciones? ¿Cuáles son las diferentes estrategias de cálculo que pueden utilizar los estudiantes para resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas?

Alan: En este aspecto, cuando se desarrolla esta competencia *se busca que los estudiantes encuentren o resuelvan una situación como más cómodos estén, porque yo no les exijo o no se les exige dentro de este currículo que el estudiante utilice solamente un método matemático para resolver el problema, es decir, un estudiante puede resolver el problema gráficamente, es decir esbozar el problema en un dibujo, en*

un gráfico, una tabla, lo que guste y pueda darle solución a partir de ese método. Entonces puede estar el método matemático, un método gráfico, el tanteo. Se le llama tanteo, que viene siendo por descubrimiento es decir probando números en sí y poder llegar a la solución o por intuición que es algo que los estudiantes usan mucho, o por lógica lo estoy asociando, es por lógica. Es decir, si tengo 3 bananas en cada bolsa y tengo 5 bolsas entonces ¿cuántas bananas tengo?, entonces por lógica dice tengo 15 bananas. Sin necesidad de mostrarme un proceso matemático riguroso escrito, si no que llegue a dar la respuesta y pueda explicarlo así sea de manera verbal, cómo llego a la solución.

El fragmento de entrevista anterior evidencia que Alan utiliza como estrategia de enseñanza el permitir que sus estudiantes seleccionen los métodos con los que se sientan cómodos y seguros para darle solución a los problemas matemáticos: pueden recurrir a un método gráfico, tabular, por descubrimiento, tanteo o incluso pueden recurrir a métodos matemáticos para resolver las situaciones (Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos – KMT). También es importante resaltar el conocimiento que tiene Alan sobre la resolución de problemas, reconociendo que un mismo problema matemático se puede solucionar haciendo uso de diferentes métodos o estrategias y que lo estudiantes pueden recurrir a cualquiera de ellas para llegar a la solución. Polya (1965) hace uso del término heurística para describir los métodos que permiten la resolución de problemas, indicando como un ejemplo de heurísticas el dibujar un esquema, tal como lo reconoce Alan. De este modo, se evidencia conocimiento de Alan sobre la práctica de resolver problemas considerando que más allá de solo buscar que sus estudiantes resuelvan problemas, busca que sean conscientes del proceso de resolución (La práctica de resolver problemas - KPM). Por lo anterior se logra establecer una relación de tipo Inter-dominio entre categorías de los subdominios KMT-KPM, como se muestra en la Tabla 16.

Tabla 16

Categorías y descriptores evidenciados de los subdominios KMT y KPM

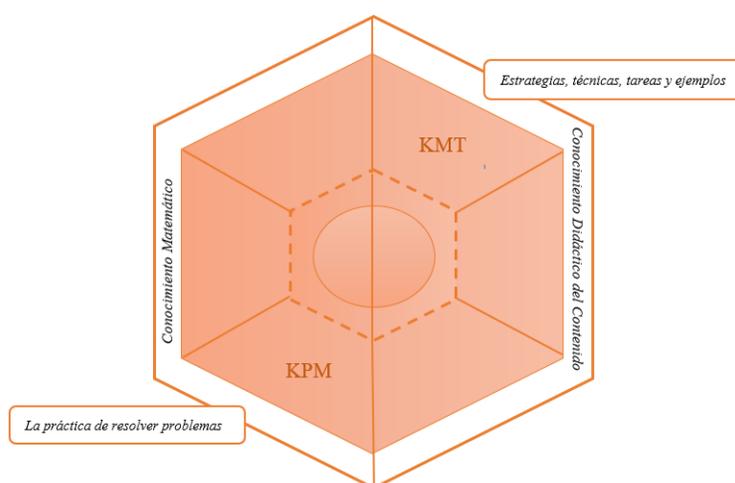
| Dominio | PCK | MK |
|------------|--|-----------------------------------|
| Subdominio | KMT | KPM |
| Categoría | Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos | La práctica de resolver problemas |

| | | |
|------------------|---|--|
| Descriptor | Conoce y utiliza como estrategia de enseñanza el permitir que sus estudiantes decidan la forma en la que abordan los contenidos matemáticos: método gráfico, matemático, tabular o por descubrimiento | Conoce que los estudiantes pueden recurrir a diferentes heurísticas para darle solución a los problemas: dibujar un esquema, realizar un gráfico y representar la situación en una tabla |
| Tipo de relación | Inter-dominio | |

Las relaciones de conocimiento evidenciadas se resumen en la Figura 28.

Figura 28

Relaciones de conocimiento Inter-dominio entre los subdominios KMT y KPM



Fuente: Elaboración propia.

En el fragmento de entrevista anterior, Alan nos brinda la oportunidad de profundizar en su conocimiento especializado considerando que manifiesta que una estrategia de enseñanza que aplica en sus clases es el permitir que sus estudiantes decidan la manera en la que abordan los contenidos, por lo que, se decide profundizar en lo siguiente:

Fragmento de entrevista a Alan

¿Qué aporta el trabajar las matemáticas con los estudiantes de esta manera, es decir, no decirles cómo los deben resolver si no que ellos busquen diferentes caminos para darles solución? ¿cómo le aporta al trabajo del estudiante?

Alan: Primero que todo les ayuda a entender que *no existe un único método para llegar a una solución, es lo primordial porque pueden existir diferentes métodos para llegar a una misma solución o darle solución a un problema*, incluso cuando el problema no tiene solución única. Entonces *estaríamos favoreciendo eso, que el estudiante entienda que existen diferentes métodos para llegar a una solución*. Segundo, *ayuda a los estudiantes a forjar y desarrollar sus propias competencias dependiendo del tipo de aprendizaje que el estudiante tenga, es decir si el estudiante es más visual entonces va a desarrollar más la metodología de hacer un gráfico de entender todas estas partes graficas. El que el estudiante lo resuelva de esa forma no quiere decir que no va a aprender los distintos métodos, es decir, los aprende todos para que no se quede con un solo panorama y pueda explorar otros métodos cuando sus métodos o el método que ha desarrollado con mayor rigurosidad no es factible o no le genera tanta confianza en sus soluciones entonces se busca atender todos los campos en sí, desde la parte visual, desde la parte gráfica y desde la parte matemática incluso desde la parte verbal*. Entonces buscamos que sea un desarrollo de competencia completo.

De lo anterior, se logra evidenciar que Alan tiene conocimiento sobre la práctica de resolver problemas, considerando que no existe un único método para resolver una situación determinada y que sus estudiantes pueden recurrir a diferentes heurísticas para llegar a una misma solución (La práctica de resolver problemas – KPM). También reconoce que el permitir que sus estudiantes busques sus propios caminos de solución los llevará a utilizar la estrategia con la que más cómodos se sientan, pueden resolverlas de una manera gráfica, visual e incluso matemática (Formas de interacción con un contenido matemático – KFLM). Y, por último, se evidencia que una de las estrategias de enseñanza que utiliza, es permitir que los estudiantes utilicen diferentes métodos de solución, considerando que esto los llevará a explorar distintas formas de resolver los problemas (Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos – KMT). Por lo anterior, se logra establecer una relación de tipo Intra-dominio al interior del PCK entre los subdominios KFLM-KMT, y una relación de tipo Inter-dominio entre los subdominios KPM-KFLM-KMT, como se muestra en la Tabla 17.

Tabla 17

Categorías y descriptores evidenciados de los subdominios KPM, KFLM y KMT

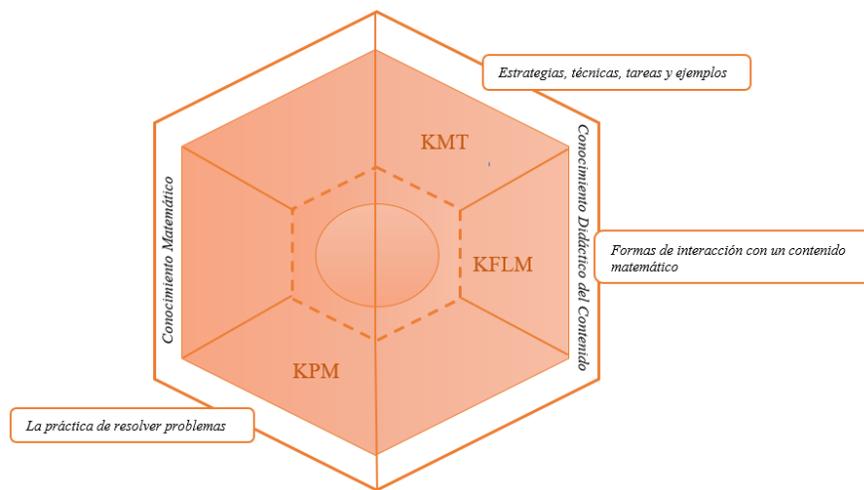
| Dominio | MK | PCK | |
|------------|-----|------|-----|
| Subdominio | KPM | KFLM | KMT |

| | | | |
|------------------|---|---|---|
| Categoría | La práctica de resolver problemas | Formas de interacción con un contenido matemático | Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos |
| Descriptor | Conoce que se pueden utilizar diferentes heurísticas para darle solución a los problemas: visual, gráfica, matemática y verbal. | Conoce que el permitir que los estudiantes recurran a sus propios caminos de solución los llevará utilizar la estrategia o método con el que más se sientan cómodos: estrategias de solución visual, gráfica, matemática. | Conoce y utiliza como estrategia de enseñanza el permitir que sus estudiantes utilicen diferentes caminos para darle solución a los problemas considerando que esto los llevará a explorar diferentes métodos y formas de resolver las situaciones. |
| Tipo de relación | Intra-subdominio e Inter-dominio. | | |

Las relaciones de conocimiento se resumen en la Figura 29.

Figura 29

Relaciones de conocimiento Intra-dominio al interior del PCK y de tipo Inter-dominio



Fuente: Elaboración propia.

Otra evidencia de conocimiento la encontramos en el sexto estándar propuesto por Alan, en él expresa que sus estudiantes deben identificar regularidades y propiedades de los números utilizando diferentes herramientas de cálculo.

Figura 30

Sexto estándar de aprendizaje propuesto por Alan

- 6) Identifico regularidades y propiedades de los números utilizando diferentes herramientas de cálculo (calculadora, ábaco, bloques múltiples).

Fuente: Plan de clase de Alan.

Por lo que, en la entrevista se decide profundizar en lo siguiente:

Fragmento de entrevista a Alan

En el sexto estándar menciona el que los estudiantes puedan identificar regularidades y propiedades de los números ¿A qué regularidades y propiedades se refiere? ¿Cómo el uso de diferentes recursos como la calculadora, ábaco, bloques múltiples permiten a los estudiantes observar regularidades y propiedades de los números? ¿Utiliza los recursos en su clase?

Alan: *La propiedad de un número ser par, la propiedad de un número ser impar, las propiedades de un número ser más grande que o menor que, o múltiplo de, cuando me refiero a todas estas propiedades hago alusión de que si un estudiante es capaz de reconocer cuando un número es par, impar y así mismo asumir, estimar una respuesta estaríamos garantizando y estableciendo que los estudiantes están desarrollando una competencia matemática por estimación dado las propiedades de los números. Es decir, si el paquete de bananas es par y tengo un número par o impar de paquetes yo voy a poder asumir que el resultado va a ser un número par y podríamos establecerlo de esa forma. Por eso es importante también el cálculo mental, ejemplo, si tienes una fiesta y tienes un número par de invitados, entonces tú buscarías que el número de pedazos de torta sean par o que sean exactos. Ejemplo la propiedad de ser mayor o menor que, yo tengo 10 invitados, tomando el ejemplo de invitados de la fiesta, y yo voy a dividir la torta de manera que me den 20 porciones, entonces reconocer que 10 es menor que 20 entonces me permite a mí entender que, si me va a alcanzar, y cómo aplica la multiplicación aquí, ah son 10 y tengo 20 entonces a cada uno le va a tocar de 2 porque 10×2 es 20, entonces me alcanza y eso lo hago. Ahora, como el uso de los recursos nos sirven, cuando nosotros usamos las calculadoras, el Abaco, los bloques múltiples nos sirve, bueno cuando nosotros usamos las calculadoras para hacer este tipo de operaciones, operaciones mucho más grandes de dos o tres dígitos o incluso con números decimales, es que los estudiantes puedan comprender este tipo de operaciones y no creen concepciones erróneas, por ejemplo, la calculadora me sirve a mí para que el estudiante cuando haga una multiplicación con un número decimal*

o cuando los estudiantes más adelante vean las fracciones se den cuenta que su resultado va a ser menor, o cuando dividen por un decimal o una fracción su resultado va a ser más grande. Entonces identificar a partir de estas herramientas, como la calculadora, que no siempre una multiplicación quiere decir que va a ser un número grande o que una división va a ser un número más pequeño.

Teniendo en cuenta el fragmento anterior, se logra evidenciar que Alan posee conocimientos sobre las propiedades de los números naturales (Definiciones, propiedades y fundamentos – KoT). También se logra evidenciar conocimientos de diferentes contextos que son familiares para los estudiantes y en los cuales se puede aplicar la estructura multiplicativa y potenciar su aprendizaje (Fenomenología y aplicaciones - KoT). Es importante resaltar que, el profesor también conoce que a medida que avanza la secuencia curricular la estructura multiplicativa adquiere mayor complejidad (Conexiones de complejización – KoT). Por último, se logra evidenciar que conoce y utiliza recursos virtuales que potencializan el aprendizaje de sus estudiantes (Materiales virtuales – KMT). Por lo anterior, se identifica una relación de tipo Intra-subdominio al interior del KoT, y una relación de tipo Inter-dominio entre los subdominios KoT y KMT. Tal como se observa en la Tabla 18.

Tabla 18

Categorías y descriptores evidenciados de los subdominios KoT y KMT

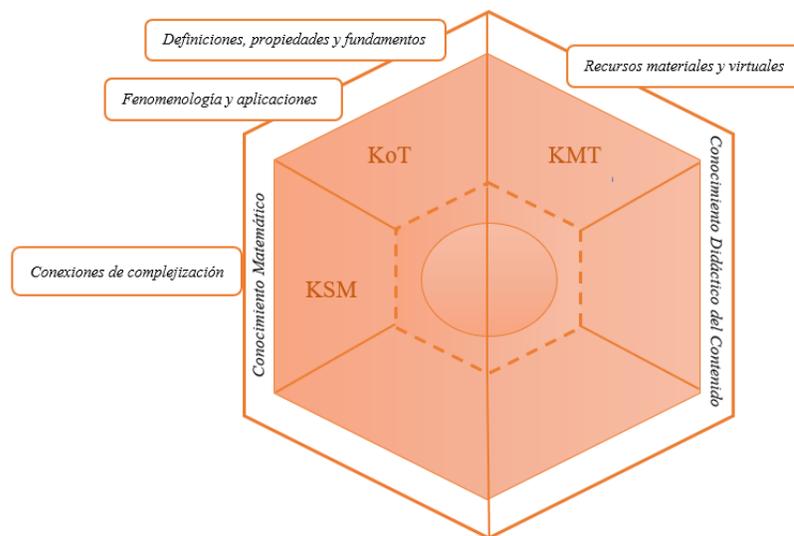
| Dominio | | MK | PCK |
|------------|--|---|--|
| Subdominio | KoT | KSM | KMT |
| Categoría | Definiciones, propiedades y fundamentos | Conexiones de Complejización | Materiales virtuales |
| | Fenomenología y Aplicaciones | | |
| Descriptor | <p>Conoce propiedades de los números naturales como ser par, ser impar.</p> <p>Además, reconoce relaciones entre ellos como ser mayor que, menor que, múltiplo de.</p> | <p>Conoce que la estructura multiplicativa a medida que avanza la secuencia curricular adquiere una mayor complejidad: sabe que al dividir un número natural por un decimal o</p> | <p>Conoce recursos de enseñanza que potencializan el aprendizaje de sus estudiantes como</p> |

| | | |
|---|---|--|
| <p>Conoce diversos contextos que son familiares para los estudiantes y en los cuales pueden aplicar las propiedades de los números naturales: cantidad de invitados a una fiesta, repartir la torta de una fiesta, paquetes de bananas.</p> | <p>una fracción el resultado aumenta y al multiplicar un número natural por un decimal o una fracción el resultado disminuye. Contrario a lo que ocurre con las operaciones de multiplicación y división con números naturales donde la división siempre disminuye y la multiplicación siempre aumenta.</p> | <p>calculadoras, ábacos y bloques múltiples.</p> |
| <p>Tipo de relación: Intra-subdominio e Inter-dominio.</p> | | |

Las relaciones de conocimiento se resumen en la Figura 31.

Figura 31

Relaciones Intra-subdominio, Intra-dominio e Inter-dominio



Fuente: elaboración propia.

Por otra parte, se logró evidenciar conocimiento en el *desempeño* utilizado por el profesor. En él argumenta que los estudiantes deben resolver situaciones problema en las que utilicen diferentes estrategias para calcular el resultado de multiplicaciones o repartos equitativos.

Figura 32

Desempeños de aprendizaje propuesto por Alan

| |
|---|
| Resuelve situaciones problemáticas en las que utilice diferentes estrategias para calcular el resultado de multiplicaciones o repartos equitativos. |
|---|

Fuente: Plan de clase de Alan.

Considerando lo anterior, se decide profundizar en lo siguiente:

Fragmento de entrevista a Alan

Ahora quiero preguntarle del desempeño que dice que los estudiantes utilicen diferentes estrategias para calcular el resultado de multiplicaciones o repartos equitativos y quería saber ¿a qué se refiere, es decir, ¿cómo podrían ellos enfrentarse a la situación y cómo esas estrategias le permiten al estudiante avanzar en su conocimiento matemático?

Alan: Los estudiantes pueden hacer uso de cualquier método de solución, ya sea que la estrategia sea visual pueden utilizar bloques, material manipulativo, palitos, ramitas, lo que ellos consideren necesario para darle solución al problema, incluso hay estudiantes que son más matemáticos entonces utilizarían únicamente los números. Cuando se soluciona un problema no me interesa que el resultado esté bien, es importante, sí, pero me interesa más qué método o estrategia utilizó para llegar a la solución y encontrar en dónde se equivocó el estudiante o en que falló su estrategia o en dónde tuvo virtud su estrategia o si llegó a la solución y si su estrategia no fue la correcta porque solo se cumple para algunos casos, eso me interesa verlo. Entonces lo que buscamos es que cuando se resuelve un problema o se plantea un problema los estudiantes lo solucionan primeramente ya sea individual o en parejas o grupal, dependiendo de cuál sea la situación y posteriormente ellos dan cuenta de eso, pero no me dan cuenta a mí únicamente, le dan cuenta a todo el salón, entonces todo el salón va a aprender una nueva estrategia, un nuevo método, o conocer que hicieron el mismo el método, pero en orden diferente y entender que se puede hacer. Entonces estaría llenando de herramientas a los estudiantes o de diferentes estrategias o métodos, como se quiera llamar, para llegar a la solución de un mismo problema.

Del fragmento de entrevista anterior, se logra evidenciar conocimiento del subdominio PCK, considerando que Alan manifiesta que el permitirles a sus estudiantes elegir sus caminos de solución, los llevará a utilizar el método y los recursos con los que más

se sientan cómodos en su aprendizaje (Formas de interacción con un contenido matemático). También conoce que el permitir que sus estudiantes utilicen diferentes estrategias de solución les permite el reconocimiento de las ventajas y desventajas de cada una de ellas (Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos – KMT). Por lo anterior, se identifica una relación de tipo Intra-dominio al interior del PCK, entre los subdominios KFLM- KMT. Tal como se observa en le Tabla 19.

Tabla 19

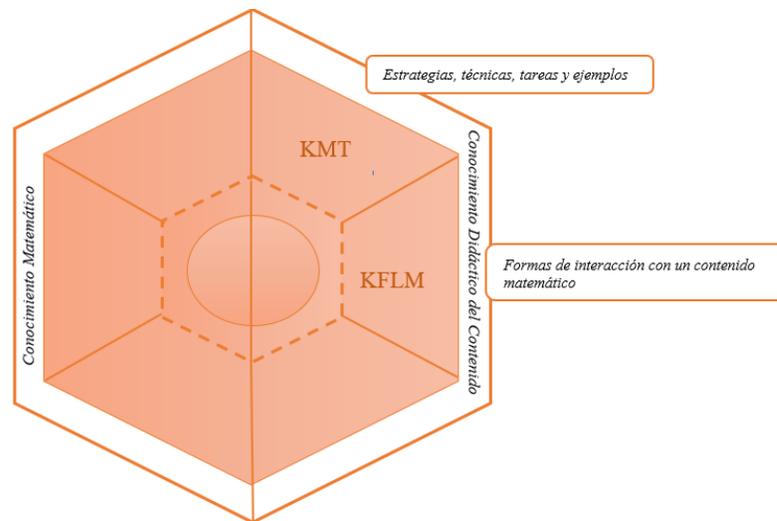
Categorías y descriptores evidenciados de los subdominios KFLM y KMT

| Dominio | | PCK |
|------------------|--|---|
| Subdominios | KFLM | KMT |
| Categorías | Formas de interacción con un contenido matemático | Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos |
| Descriptor | Conoce que el permitir que los estudiantes recurran a sus propios caminos de solución los llevará utilizar la estrategia o método con el que más se sientan cómodos y podrán hacer uso de materiales concretos, bloques o lo que consideren necesario. | Conoce y utiliza como estrategia de enseñanza el permitir que sus estudiantes utilicen diferentes caminos para darle solución a los problemas considerando que esto le permite identificar las ventajas y desventajas de cada estrategia. |
| Tipo de relación | Intra-dominio | |

Las relaciones de conocimiento se resumen en la Figura 33.

Figura 33

Relación Intra-dominio



Fuente: Elaboración propia.

Considerando la oportunidad presentada por Alan en el fragmento anterior sobre las fortalezas o dificultades que pueden presentar los estudiantes al momento de utilizar las diferentes estrategias, se profundizó en lo siguiente:

Fragmento de entrevista a Alan

Hace referencia a que las estrategias de los estudiantes pueden generar algunas dificultades o algunas fortalezas. En su experiencia como docente ¿qué dificultades o qué fortalezas pueden presentar los estudiantes al momento de resolver esas situaciones?

Alan: *Hay que entender que dificultad vendría siendo cuando un estudiante comete de manera reiterada errores. Es decir que cometió un error, volvió y cometió el mismo error y se encuentra estancado en un conocimiento que se formó, un obstáculo para el estudiante, y que posteriormente vendría siendo una dificultad, eso basado en la literatura, no recuerdo en este momento el autor pero una dificultad cuando están trabajando problemas multiplicativos es que, en la mayoría de los casos la multiplicación es asumida como una suma reiterada de objetos y cuando se dan cifras muy grandes el estudiante que busca como estrategia contar se demora mucho tiempo e incluso en ese proceso de contar comete errores que lo llevan a dar una respuesta errónea, entonces una dificultad de esa. Una fortaleza que yo podría evidenciar cuando los estudiantes utilizan cualquier método es que por ejemplo cuando un grupo de estudiantes o un estudiante utiliza un material manipulativo y asocia cantidades grandes a un solo elemento, es decir, voy a asociar a este palito o a este cubito el 100, entonces ya tengo 100, 200, 300, 400, 500, y los va asociando y lo va agrupando y dice 500 aquí, 500 acá, 500 acá, 500*

acá, 500 acá, entonces son 5×500 y cuando ellos son capaces de demostrar y explicar su solución es una gran fortaleza porque el estudiante no solamente reconoce el problema, entiende el problema, usa una estrategia para solucionar el problema, sino que también es capaz de comunicar, entonces cuando ya un estudiante es capaz de comunicar los resultados o incluso explicar el problema para darle solución al mismo estaría avanzando mucho dentro de estas competencias que es la comunicación en la parte comunicativa de hallazgos encontrados, considerándose esta forma de resolver las situaciones como una estrategia para fortalecer la resolución de problemas según lo expone Polya.

De lo anterior, se logra evidenciar que Alan tiene conocimientos sobre teorías formales en la Educación Matemática, considerando que hace referencia a las dificultades, errores y obstáculos y también hace referencia a la teoría propuesta por George Polya para resolver problemas matemáticos (Teorías de Aprendizajes de las matemáticas – KFLM). También evidencia conocimientos sobre algunas de las dificultades y fortalezas que pueden llegar a presentar los estudiantes al momento de resolver problemas multiplicativos (Fortalezas y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas – KFLM). De lo anterior se evidencia una relación de tipo Intra-subdominio al interior del KFLM, tal como se observa en la Tabla 20.

Tabla 20

Categorías y descriptores evidenciados del subdominio KFLM

| | | |
|-------------|--|---|
| Dominio | | PCK |
| Subdominios | | KFLM |
| Categorías | Teorías de aprendizaje de las matemáticas | Fortalezas y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas |
| Descriptor | Conoce teorías formales de Aprendizaje de las Matemáticas como la Teoría para Resolver Problemas propuesta por George Polya. | Conoce dificultades y fortalezas que pueden evidenciar los estudiantes al momento de Resolver Problemas de multiplicación. Una de las dificultades es utilizar como estrategia de solución el conteo, considerando que puede tomar mucho tiempo e incluso llevar a respuestas erróneas. Una de las fortalezas es cuando los estudiantes |

logran asociar una cantidad a un objeto, simplificando el conteo.

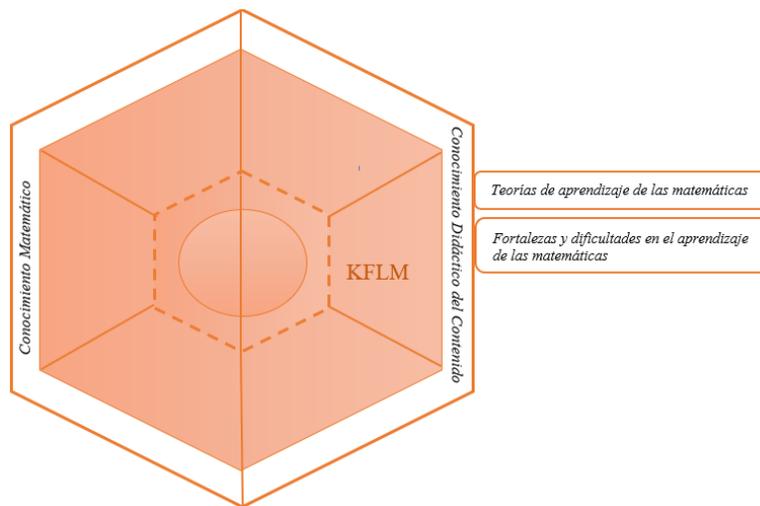
Tipo de relación

Intra-subdominio

Las relaciones de conocimiento se resumen en la Figura 34.

Figura 34

Relación de conocimiento Intra-subdominio al interior del KFLM



Fuente: Elaboración propia.

Otra evidencia de conocimiento identificada en la planeación se encuentra en el primer indicador de desempeño propuesto tal como se muestra en la Figura 35.

Figura 35

Indicador de desempeño utilizado en la planeación por Alan

Números naturales

- Comprender las propiedades conmutativas y asociativas de la suma y usarlas para simplificar los cálculos.

Fuente: Plan de clase de Alan

En la entrevista se decide profundizar en lo siguiente:

Fragmento de entrevista a Alan

Vamos a iniciar con el primer indicador de desempeño ¿A qué se refiere con comprender las propiedades conmutativas y asociativas de la suma y usarlas para la simplificación de cálculos? ¿Cómo se relacionan estos conocimientos con el aprendizaje de la multiplicación y la división?

Alan: Este tipo de propiedades, que es la conmutativa y asociativa y si mal no recuerdo también usé la de la multiplicación. Los estudiantes cuando empiezan su proceso educativo y se les enseñan los números y empiezan a enseñarse las propiedades los estudiantes identifican que, *en la suma existe la conmutatividad*, es decir, yo tengo $3 + 2$ me daría 5 y $2 + 3$ me daría 5. Entonces se puede conmutar, *es decir el orden no importa o bueno yo puedo tener primero uno y después el otro y el resultado va a ser lo mismo y lo asociativo es, tenemos tres datos por sumar y podemos hacerlo, entonces podemos asociar el primero con el segundo, el primero con el tercero y luego el segundo, de distintas formas*. Que los estudiantes comprendan *esas propiedades en la adición nos permite a nosotros ampliarlo y decirle, vea la multiplicación no es ajena, en la multiplicación también existe la propiedad conmutativa entonces los estudiantes pueden establecer que 2×3 es 6 y que 3×2 es 6. Una de las recomendaciones que suelo tener en cuenta no es hacer que el estudiante se aprenda las tablas de multiplicar, no dárselas ya hechas, sino que las construyan*, en ese proceso de construir con los distintos métodos que ya mencionamos construir las tablas de multiplicar, empezando desde las más sencillas la del 1, 2 etc. *Pero existe esa conmutatividad y ellos lo pueden expresar y comprender*.

Del fragmento de entrevista anterior se logran evidenciar conocimientos sobre la propiedad conmutativa y asociativa de la suma y la multiplicación. Alan reconoce que el cambiar el orden de los sumandos no altera la suma, que el orden de los factores no altera el producto y que la forma de agrupar los sumandos no altera el resultado (Definiciones, propiedades y fundamentos – KoT). También es evidente el conocimiento que posee sobre la relación de complejización que tiene la estructura aditiva con la estructura multiplicativa. Alan manifiesta que algunas propiedades de la adición también están presentes en la multiplicación y cuando los estudiantes logran comprender esas propiedades en la operación de suma pueden trasladar ese aprendizaje a la operación de multiplicación (Conexiones de complejización – KSM). También, se pone en evidencia conocimiento sobre estrategias de enseñanza de las tablas de multiplicar, considerando que el permitir que los propios estudiantes las construyan a partir de diferentes estrategias les permitirá reconocer y

comprender algunas propiedades de la multiplicación como, por ejemplo, la propiedad conmutativa (Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos – KMT). De esta manera, se logra establecer una relación de tipo Intra-dominio entre los subdominios KoT-KSM, ambos pertenecientes al MK; y una relación de tipo Inter-dominio entre los subdominios KoT-KSM-KMT, tal como se muestra en la Tabla 21.

Tabla 21

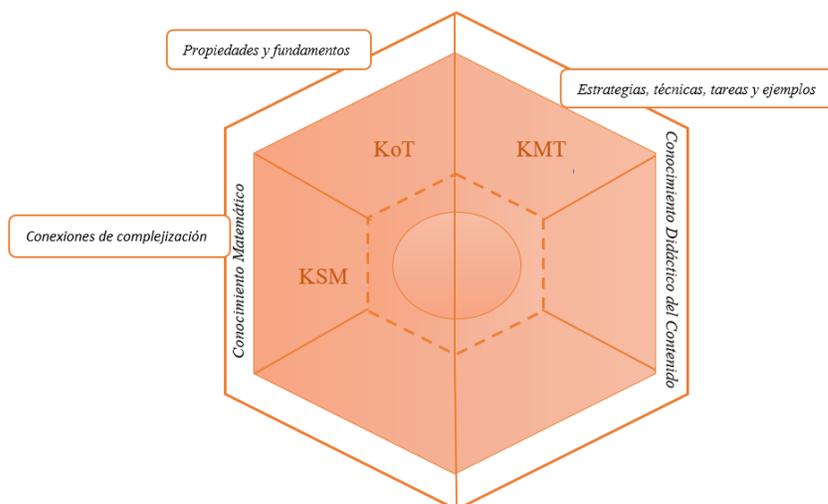
Categorías y descriptores evidenciados de los subdominios KoT, KSM y KMT

| Dominio | | MK | PCK |
|------------------|---|---|--|
| Subdominio | KoT | KSM | KMT |
| Categoría | Propiedades y fundamentos | Conexiones de complejización | Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos |
| Descriptor | Conoce propiedades de la suma y la multiplicación como las propiedades conmutativa y asociativa | Conoce que el aprendizaje de las propiedades de la estructura aditiva se relaciona con el aprendizaje de la estructura multiplicativa | Conoce que el permitir que los estudiantes construyan las tablas de multiplicar a partir de diferentes estrategias, les permitirá reconocer algunas características de las operaciones como la conmutatividad de la multiplicación |
| Tipo de relación | Intra-dominio e Inter-dominio. | | |

Las relaciones de conocimiento evidenciadas se resumen en la Figura 36.

Figura 36

Relaciones de conocimiento Intra-dominio e Inter-dominio



Fuente: Elaboración propia.

Otra oportunidad para profundizar en el conocimiento de Alan se encuentra en el cuarto indicador propuesto por Alán, tal como se muestra en la Figura 37.

Figura 37

Cuarto indicador de desempeño propuesto

- Comprender y explicar la relación entre multiplicación y división.

Fuente: Plan de clase de Alan

Fragmento de entrevista de Alan

El siguiente indicador dice comprender y explicar la relación entre multiplicación y división, ¿quiero preguntarle qué relación existe entre la multiplicación y la división? ¿Y por qué es importante que los estudiantes comprendan esta relación?

Alan: Ok, te voy a responder con preguntas y ya tú te encargas de interpretar. *Cuando tú enseñas sumas, y luego enseñas resta es necesario explicarle la relación que hay entre los dos, es decir lo opuesto a sumar es restar, es una operación opuesta o contraria como le quieras decir, y esto lo puedes llevar a la multiplicación y división, porque comparten estas operaciones algunas características. Ahora bien, cuando estamos enseñando multiplicaciones y divisiones es necesario enseñarles que existen ciertas relaciones entre ellas, como lo es que, la división es la operación contraria a la multiplicación. Es decir 5×10 es 50 ¿cierto?, entonces 50 dividido 10 te va a dar un número que multiplicado por 10 sea 50 ¿cuál es? el 5. Entonces que ellos logren entender eso, que lo contrario a multiplicar es dividir.*

Del fragmento anterior se logran identificar dos evidencias de conocimiento. Primero, Alan reconoce que las operaciones de suma y resta cumplen la propiedad de ser operaciones inversas, y del mismo modo reconoce que las operaciones de multiplicación y división cumplen la misma propiedad (Definiciones, propiedades y fundamentos – KoT). También es evidente el conocimiento que posee sobre la relación de complejización que tiene el pensamiento aditivo con el pensamiento multiplicativo, manifestando que las cuatro operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división) comparten algunas características y por tanto el aprendizaje de la estructura aditiva servirá de base para el aprendizaje de la estructura multiplicativa, manifestando que algunas características aprendidas en las operaciones de suma y resta también se evidencian en las operaciones de multiplicación y división, tal como ser operaciones opuestas (Conexiones de complejización – KSM). Por lo anterior se logra establecer una relación de tipo Intra-dominio al interior del MK entre los subdominios KoT-KSM, como se evidencia en la Tabla 22.

Tabla 22

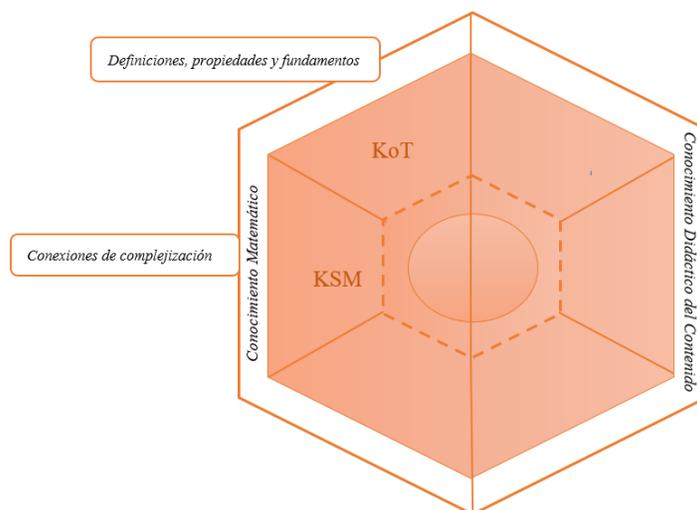
Categorías y descriptores evidenciados de los subdominios KoT y KSM

| Dominio | | MK |
|------------------|---|---|
| Subdominio | KoT | KSM |
| Categoría | Definiciones, propiedades y fundamentos | Conexiones de complejización |
| Descriptor | Conoce que las operaciones de suma y resta cumplen la propiedad de ser operaciones opuestas. Como también que la multiplicación y división cumplen la misma propiedad | Conoce que el aprendizaje de las propiedades de la estructura aditiva se relaciona con el aprendizaje de la estructura multiplicativa. Reconoce las implicaciones que la comprensión de que la resta sea una operación inversa a la suma tiene en la comprensión de que la multiplicación y división son operaciones opuestas |
| Tipo de relación | Intra-dominio | |

Las relaciones de conocimiento evidenciadas se resumen en la Figura 38.

Figura 38

Relaciones de conocimiento Intra-dominio al interior del MK entre el KoT y KSM



Fuente: Elaboración propia.

Otra evidencia de conocimiento la encontramos en el quinto indicador de desempeño propuesto por el profesor en su planeación de clase. Tal como se muestra a continuación.

Figura 39

Quinto indicador de desempeño propuesto por Alan en el plan de clase

- Comprender y explicar las propiedades conmutativa y distributiva de la multiplicación y utilizarlas para simplificar los cálculos.

Fuente: Plan de clase de Alan

Por lo que, en la entrevista se decide profundizar en lo siguiente:

Fragmento de entrevista a Alan

En el siguiente indicador dice comprender y explicar las propiedades conmutativa y distributiva de la multiplicación y utilizarla para simplificar los cálculos, la pregunta es, ¿en qué consisten esas propiedades y cómo estas propiedades les permiten a los estudiantes simplificar esos cálculos?

Alan: *La conmutativa ya te la había explicado.* Por ejemplo, los estudiantes pueden decir, ay es que Dios mío, no me sé la tabla del 9 cuando se las han enseñado por memorización. Entonces 9 por 2 ¡Dios mío! ¿cuánto me da 9 por 2? *No me sé la tabla del 9. Pues venga conmútelo, 2 por 9, la tabla del 2 muy sencilla ahí está la*

respuesta. En dados casos, por ejemplo, en una repartición y retomo el ejemplo de la torta, son 10 invitados, hay 10 trozos de torta. Sí, entonces podríamos decir 10 por 2 sería 20, entonces 2 por 10 igual 20. En el caso de la distributiva, cuando ellos empiezan a decir Ah ok es que me toca multiplicar por este y agregarle este otro también multiplicandos. Doy un ejemplo concreto, por ejemplo, 20 por (1 + 3) entre paréntesis 1 + 3. Podemos asociarlo de la siguiente manera, un grupo tiene 20 puntos más los otros 3 grupos que cada uno tiene 20 puntos. Entonces sería 20 por 1 y 20 por 3 y luego añadir los resultados o incluso enseñarse que se pueden añadir los resultados y luego hacer la multiplicación. En fin, podemos establecer este tipo de propiedades a los estudiantes y que ellos la empleen de forma que consideren correctos. Otro ejemplo de la distributiva puede ser el siguiente, estamos tú y yo en una fiesta, pero yo solamente logré coger 1 paquete de 20 dulces y Lina cogió 3 paquetes de 20 dulces, cierto. Los paquetes eran de 20. Lo único es que tú vas a tener 60 y yo voy a tener 20 y sí los sumamos nosotros dos, pues estarían 80. Empezar a explicar ese tema desde ahí.

Se puede evidenciar que Alan tiene conocimientos sobre las propiedades conmutativa y distributiva de la multiplicación (Definiciones, propiedades y fundamentos – KoT). También se evidencia que tiene conocimientos sobre contextos que son familiares para los estudiantes y que utiliza para la enseñanza de las operaciones (Fenomenología y aplicaciones – KoT). De lo anterior, se logra establecer una relación de tipo Intra-subdominio al interior de KoT, tal como se presentan en la Tabla 23.

Tabla 23

Categorías y descriptores evidenciados de los subdominios KoT

| | | |
|------------|---|---|
| Dominio | MK | |
| Subdominio | KoT | |
| Categoría | Definiciones, propiedades y fundamentos | Fenomenología y aplicaciones |
| Descriptor | Conoce propiedades de la multiplicación como la propiedad conmutativa y distributiva. | Conoce diversos contextos que son familiares para los estudiantes y en los cuales pueden aplicar las propiedades de la multiplicación: repartir la torta de una fiesta, cantidad de puntos en un torneo y paquetes de dulces de una fiesta. |

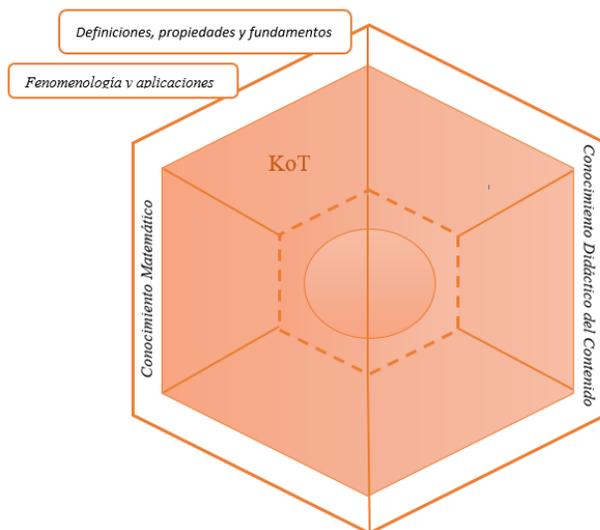
Tipo de
relación

Intra-subdominio.

Las relaciones de conocimiento evidenciadas se resumen en la Figura 40.

Figura 40

Relación de conocimiento Intra-subdominio al interior del KoT



Fuente: Elaboración propia.

El profesor en el séptimo indicador propone multiplicar números naturales mayores que 100 por 2, 3, 4 y 5, tal como se observa a continuación.

Figura 41

Indicador de desempeño propuesto por Alan en el plan de clase

Estimar y multiplicar números naturales mayores que 100 por 2, 3, 4 y 5

Fuente: Plan de clase propuesto por Alan.

Por lo que, se decide profundizar en lo siguiente:

Fragmento de entrevista a Alan

Muy bien en el siguiente indicador menciona estimar y multiplicar números naturales mayores que 100 por 2, 3, 4 y 5. ¿Por qué trabajar con los estudiantes este tipo de

contenidos?, ¿por qué trabajar los múltiplos y qué relación existe con las operaciones de multiplicación y división?

Alan: Cuando hacemos alusión a eso, es decir que *podemos establecer esas reglas y esas propiedades que hemos aplicado con números menores a 100 pueden ser aplicadas a números superiores a 100. Así entonces, por ejemplo, encontrar resultados en cantidades semejantes como 100, 200 o 1.000, 2.000. Es decir que las propiedades de los números aplican para todos en general, porque normalmente se trabaja o los niños en primero de primaria trabajan hasta el 100 y luego empezará a desarrollar toda esa parte alrededor de números de tres cifras. Posteriormente ya se busca ampliar esas cantidades. ¿Por qué los múltiplos? Porque cuando los estudiantes aprenden esas tablas de multiplicar empiezan a identificar cuáles son los múltiplos de cada uno de los números y que existen múltiplos en común, toda esta parte vendría siendo importante. Lo mismo en la división, como te lo mencioné, resumiendo, el otro indicador vendría siendo lo mismo, bueno no lo mismo, pero si semejante en el sentido de que nosotros tenemos la división como una operación opuesta a la multiplicación. Entonces si queremos encontrar la división de un número podemos hacerlo a partir de la multiplicación.*

Se puede evidenciar conocimiento sobre las propiedades de las operaciones, considerando que, reconoce que las operaciones de multiplicación y división son operaciones opuestas (Definiciones, propiedades y fundamentos – KoT). También expone conocimiento sobre las conexiones que tiene el aprendizaje de las propiedades de los números naturales en cantidades pequeñas, es decir con números menores que cien, con números mayores, considerando que, cuando los estudiantes aprendan cantidades más grandes pueden trasladar dichas reglas y propiedades (Conexiones de complejización – KSM). También se logra evidenciar conocimiento sobre los contenidos que deben aprender sus estudiantes en el grado de escolaridad de interés, reconociendo que los estudiantes en su primer año escolar deben aprender los números hasta el 100 y posteriormente cantidades más grandes (Nivel de desarrollo conceptual y procedimental - KMLS). Por lo anterior, se logra establecer una relación de tipo Intra-dominio al interior del MK entre los subdominios KoT-KSM, y una relación de tipo Inter-dominio entre KoT-KSM-KMLS. Tal como se observa en la Tabla 24.

Tabla 24

Categorías y descriptores evidenciados de los subdominios KoT, KSM y KMLS

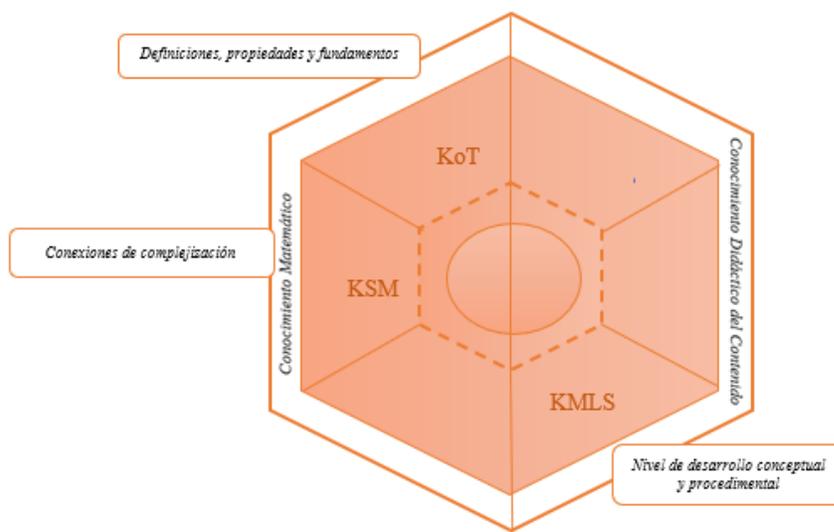
| Dominio | MK | PCK |
|---------|----|-----|
|---------|----|-----|

| Subdominio | KoT | KSM | KMLS |
|------------------|--|--|--|
| Categoría | Definiciones, propiedades y fundamentos | Conexiones de complejización | Nivel de desarrollo conceptual y procedimental |
| Descriptor | También reconoce que la división cumple la propiedad de ser una operación inversa a la multiplicación. | Conoce que el aprendizaje de las propiedades de los números naturales en cantidades menores que 100, se relaciona con el aprendizaje posterior considerando que, a medida que avanza la secuencia curricular se busca promover el aprendizaje de cantidades más grandes. | Sabe que en el primer año de la escuela primaria se trabaja el conjunto de los números naturales hasta el 100 y posteriormente los niños empezarán a desarrollar conocimiento con números de hasta 3 cifras. |
| Tipo de relación | Intra-subdominio e Inter-dominio. | | |

Las relaciones de conocimiento evidenciadas se resumen en la Figura 42.

Figura 42

Relaciones de conocimiento Intra-dominio e Inter-dominio



Fuente: Elaboración propia

Al iniciar la semana uno, Alan propone el siguiente objetivo de aprendizaje.

Figura 43

Objetivo de aprendizaje propuesto en la semana uno

Comparar y evaluar ideas matemáticas, representaciones o soluciones para identificar ventajas e inconvenientes.

Fuente: Plan de clase de Alan

Por lo que, en la entrevista se decide profundizar en lo siguiente.

Fragmento de entrevista a Alan

Muy bien, ahora ya pasamos a la primera semana. La secuencia de actividades significativas se divide en tres momentos: actividades de apertura, actividades de desarrollo y actividades de evaluación. En la primera y en la última semana logro observar que plantea un objetivo de aprendizaje donde manifiesta lo siguiente: comparar y evaluar ideas, representaciones o soluciones matemáticas para identificar ventajas y desventajas ¿a qué se refiere con eso de identificar ventajas y desventajas?

Alan: Cuando nosotros buscamos que los estudiantes comparen sus ideas, representaciones o soluciones, y como ya te lo mencioné es qué ventajas tiene aplicar este método y no el otro o qué ventajas tiene cada uno de los métodos o qué desventajas tiene el método aplicado para el estudiante. Entonces, cuando se están haciendo soluciones y todo va en pro a ese objetivo general que son las diferentes estrategias de cálculo o de calcular esas soluciones, *es que los estudiantes empleen diferentes métodos, pero expliquen y sean capaces de expresar sus soluciones y que los mismos estudiantes identifiquen si les conviene o no y si les conviene por qué y si no les conviene por qué. Ahí estarían siendo las ventajas y desventajas. Ejemplos, ah es que el estudiante usa como estrategia de multiplicación la suma reiterada o si utiliza el Ábaco. Ventaja de usar el ábaco, que podría llegar a la solución de manera correcta, precisa. Desventaja, al usar la suma reiterada que tardaría mucho tiempo o cuando son números muy grandes cometer errores, entonces que ellos sean capaces de identificar ventajas y desventajas de cada uno de los métodos de la solución del problema.*

Del Fragmento de entrevista anterior, se puede concluir que Alan evidencia conocimientos sobre las dificultades y fortalezas que pueden presentar sus estudiantes al momento de resolver problemas relacionados con la operación de multiplicación, considerando que pueden recurrir al conteo y esto les puede tomar mucho tiempo y es posible que los lleve a resultados equivocados. También reconoce que una fortaleza es que sus

estudiantes hagan uso del ábaco, considerando que los llevará a una respuesta más rápida y precisa (Fortalezas y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas – KFLM). También, conoce que sus estudiantes al momento de resolver problemas pueden llegar a hacer uso de sumas reiteradas o materiales como el ábaco (Formas de interacción con un contenido matemático – KFLM). Nuevamente evidencia como estrategia de enseñanza el permitir que sus estudiantes decidan la manera en la que solucionarán las situaciones planteadas (Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos – KMT). Por lo anterior, se logra establecer una relación de tipo Intra-subdominio al interior del KFLM, y una relación de tipo Intra-dominio al interior del PCK entre el KFLM-KMT. Tal como se observa en la Tabla 25.

Tabla 25

Categorías y descriptores evidenciados de los subdominios KFLM y KMT

| Dominio | | PCK | |
|------------|---|---|--|
| Subdominio | | KFLM | KMT |
| Categoría | Fortalezas y debilidades en el aprendizaje de las matemáticas | Formas de interacción con un contenido matemático | Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos |
| Descriptor | Conoce dificultades y fortalezas que pueden evidenciar los estudiantes al momento de resolver problemas de multiplicación. Una de las dificultades es utilizar como estrategia de solución el conteo considerando que puede tomar mucho tiempo e incluso llevar a respuestas erróneas. Una de las fortalezas es hacer uso del ábaco considerando que les permite llegar a una solución de manera precisa y rápida | Conoce la forma en la que sus estudiantes podrían resolver los problemas planteados: recurrir a las sumas reiteradas o hacer uso de materiales concretos como el ábaco. | Conoce y utiliza como estrategia de enseñanza el permitir que sus estudiantes utilicen diferentes caminos para darle solución a los problemas considerando que esto le permite identificar las ventajas y desventajas de cada estrategia. Además, les permite que comparen sus ideas, representaciones o soluciones. |

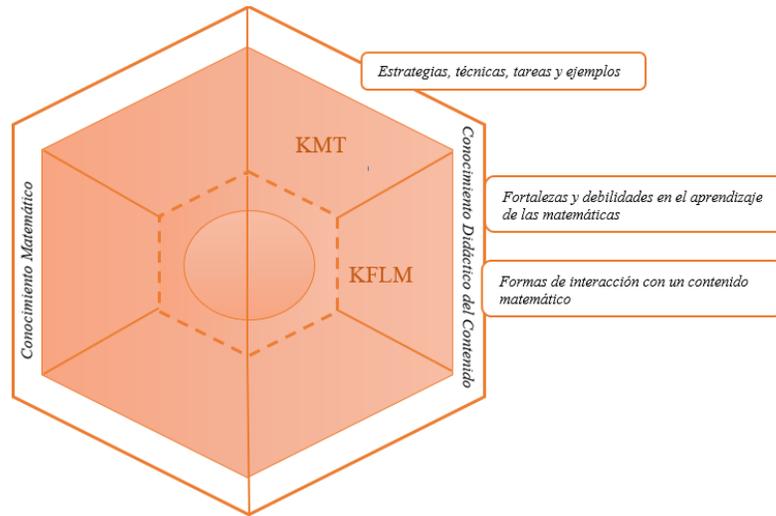
Tipo de relación

Intra-subdominio e Intra-dominio.

Las relaciones anteriores, se resumen en la figura 44.

Figura 44

Relaciones de conocimiento Intra-subdominio e Intra-dominio



Fuente: Elaboración propia

El profesor, en un momento inicial, propone realizar un repaso de las tablas de multiplicar con situaciones de la vida cotidiana, como se muestra a continuación.

Figura 45

Momento inicial de la semana uno

Calentamiento:

En un momento inicial, realizaremos un repaso de las tablas de multiplicar con situaciones de la vida cotidiana. El estudiante podrá dar su respuesta y decir si su compañero da una respuesta incorrecta o hay un error en su proceso.

Fuente: Plan de clase de Alan

En la entrevista se decide profundizar en lo siguiente:

Fragmento de entrevista a Alan

En la parte del calentamiento propone realizar un repaso de las tablas de multiplicar con situaciones de la vida cotidiana. ¿Qué situaciones del contexto de los estudiantes o de la vida cotidiana podrían servir para el estudio de este tema y por qué plantear situaciones de la vida cotidiana?

Alan: Cómo te lo dije anteriormente, los estudiantes ya están expuestos a esto antes de aprenderlo matemática o formalmente. Entonces podemos hacer actividades como, *no necesariamente problemas verbales, sino que hacemos actividades como ir a la tienda y comprar empanadas, comprar dulces, regalar*. Cada una de estas situaciones va enfocada a algo. *Ejemplo, vamos a hacer un compartir, entonces cada uno de los estudiantes lleva algo diferente y empezamos a hacer este ejercicio de aprender a multiplicar o a dividir dependiendo de cuál sea el caso o lo que sea que se lleve y dar una respuesta. Ejemplo, tengo cien bananas y somos veinte personas, entonces, de cuánto nos toca a cada uno, es una división, él lo puede plantear como una división o una multiplicación, entonces somos veinte, por tanto, es decir, a cada uno nos toca de tanto para que nos de cien, o si yo empiezo a repartir, hacer reparticiones*. Cada una de esas situaciones me permite a mí fortalecer eso que son las tablas de multiplicar que normalmente buscan que se memoricen. Que tiene sus ventajas, sí, que tiene sus desventajas, pues también. *¿Qué ventajas tiene memorizarlas? obviamente encontrar los resultados rápidamente, desventaja es que se estaría limitando únicamente o basado únicamente en la memorización de los estudiantes, y con algunos que a veces falla y más a esta edad*.

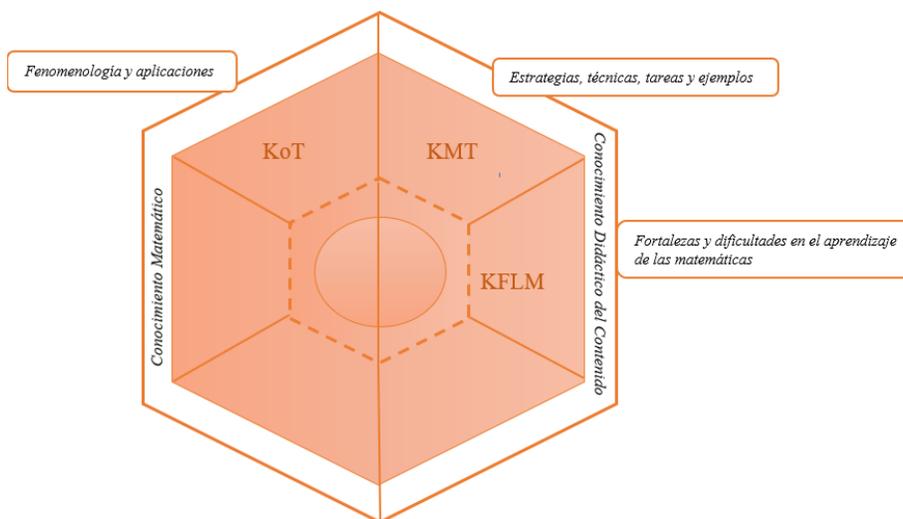
Por lo anterior, se logra evidenciar conocimiento sobre diferentes contextos que son familiares para los estudiantes y en los cuales pueden aplicar los conceptos de multiplicación y división (Fenomenología y aplicaciones – KoT). También, se evidencia que Alán utiliza esos contextos para promover el aprendizaje de la estructura multiplicativa utilizando en sus clases (Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos – KFLM). También, es importante resaltar que el profesor reconoce algunas dificultades y fortalezas relacionadas con la memorización de las tablas de multiplicar, considerando como una ventaja el que los estudiantes encuentran un resultado rápidamente, y como una desventaja el que está limitado a la memoria de los estudiantes. Por lo anterior, se logra establecer una relación de tipo Intra-subdominio al interior del PCK entre el KLFM-KMT y una relación de tipo Inter-dominio entre el KoT-KFLMKMT, como se observa en la Tabla 26.

Tabla 26*Categorías y descriptores evidenciados de los subdominios KoT, KFLM y KMT*

| Dominio | MK | PCK | |
|------------------|--|---|---|
| Subdominio | KoT | KMT | KFLM |
| Categoría | Fenomenología y aplicaciones | Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos | Fortalezas y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas |
| Descriptor | Conoce diversos contextos y actividades que son familiares para los estudiantes y en los cuales pueden aplicar la multiplicación y la división: jugar a la tienda, comprar empanadas, comprar y regalar dulces, realizar un compartir. | Conoce y utiliza como estrategia de enseñanza el uso de actividades y contextos que son familiares para los estudiantes buscando promover el aprendizaje de la multiplicación y la división | Conoce dificultades y fortalezas que pueden presentar los estudiantes al memorizar las tablas de multiplicar. Una ventaja es que los estudiantes encuentran el resultado rápidamente. Una desventaja es que está limitado a la memoria de los estudiantes, es decir, a recordar resultados. |
| Tipo de relación | Inter-dominio e Intra-dominio | | |

Las relaciones anteriores, se resumen en la Figura 46.

Figura 46*Relación de conocimiento Intra-dominio e Inter-dominio*



Fuente: Elaboración propia.

Una nueva evidencia de conocimiento se encuentra en las actividades propuestas por Alan en la primera semana de clases.

Figura 47

Actividades propuestas en la semana uno

Actividades:
Muestre a los alumnos esta matriz:

| | | | | | | | | | |
|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |

Pida a los alumnos que escriban expresiones de multiplicación y división para describir este rectángulo. Por ejemplo, $3 \times 9 = 27$, $27 = 9 \times 3$ o $27 \div 3 = 9$, $27 \div 9 = 3$

Pregunte a los alumnos:
¿Qué notas acerca de las expresiones numéricas?

Dé a los estudiantes otras matrices y pídale que escriban oraciones de multiplicación y división para describirlas.

Fuente: Plan de clase propuesto por Alan.

Por lo anterior, se decide profundizar en lo siguiente:

Fragmento de entrevista a Alan

En la actividad inicial, propone algunos arreglos rectangulares y luego pide a los estudiantes que escriban expresiones de multiplicación y división para describirlos. ¿Cómo aporta este tipo de actividades en el aprendizaje de este nuevo conocimiento, la multiplicación la división y qué dificultades puedan presentar los estudiantes al resolverlas?

Alan: ¿Cómo beneficio? ¡Okey listo! Tenemos arreglos en ese caso rectangulares, donde están divididos en nueve casillas cada una. ¿Qué buscamos? que los estudiantes gráficamente puedan entender ese gráfico y puedan plantearlo matemáticamente. Entonces estamos potencializando dos cosas. Primero la parte gráfica. mostrándoles una forma gráfica de cómo se podría expresar una división, un arreglo y que ellos lo expresen matemáticamente, que encuentra una solución. En el sentido de que tengo tres filas y nueve columnas entonces podrían ser tres por nueve igual a veintisiete o viceversa, tengo veintisiete en total que si yo lo divido en tres partes me va a dar de nueve cada una, entonces ya estaríamos empezando a *trabajar la división y multiplicación de manera combinada y de manera relacionada*. En otro ejemplo, podría ser, Ah es que yo tengo veintisiete en total y dividí o puse o lo arreglé en filas de nueve. Entonces cuántas filas son, son tres filas, Ah ok entonces veintisiete dividido nueve me da tres o nueve por tres me va a dar veintisiete y no me sobró ninguna. *Utilicé más que todo en esos tipos de arreglos que son físicos números exactos, evitando la dificultad de decir, Ah es que me sobra uno porque podría ser una dificultad que se presente y desarrollar algún tipo de obstáculo por hacerle falta uno o sobrarle uno. Entonces de manera inicial solamente operaciones que te den números enteros.*

De lo anterior se logra evidenciar que Alan posee conocimientos sobre las tareas que potencializan el aprendizaje de sus estudiantes relacionado con las operaciones de multiplicación y división. Alan expone que los arreglos rectangulares permiten desarrollar conocimientos de las operaciones de forma combinada y relacionada (Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos – KMT). También se evidencia que Alan hace uso de distintos registros de representación que posibilitan el aprendizaje, considerando que, presenta los arreglos rectangulares con el fin de que sus estudiantes lo analicen, lo comprendan y realicen un tratamiento para presentar la solución de la situación en un lenguaje matemático (Registros de representación – KoT). También se logra evidenciar que Alan tiene conocimiento sobre las dificultades que podrían presentar sus estudiantes por lo que, seleccionó arreglos rectangulares con cantidades enteras argumentando que el presentar cantidades inexactas

podría generar obstáculos en el aprendizaje en el nivel de interés (Fortalezas y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas – KFLM). Por lo anterior, se logra establecer una relación Intra-subdominio al interior del PCK entre el KFLM-KMT, y una relación de tipo Inter-dominio entre el KoT-KFLM-KMT, como se muestra en la Tabla 27.

Tabla 27

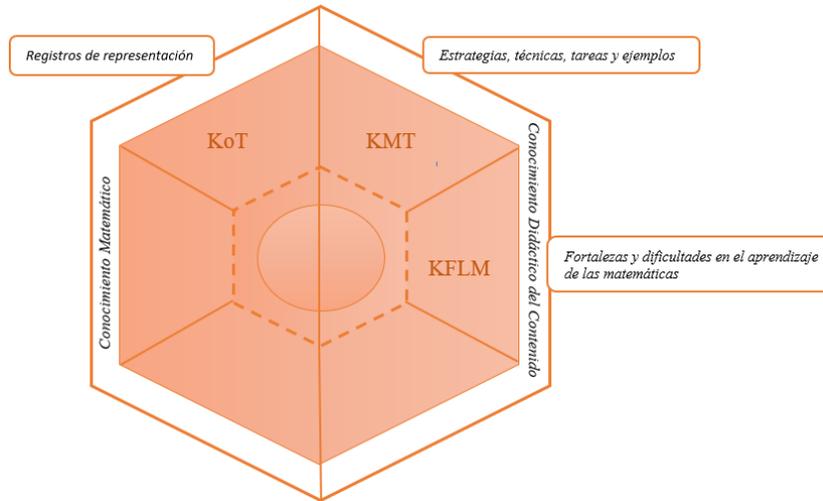
Categorías y descriptores evidenciados de los subdominios KoT, KFLM y KMT

| Dominio | MK | PCK | |
|------------------|--|---|--|
| Subdominio | KoT | KFLM | KMT |
| Categoría | Registros de representación | Fortalezas y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas | Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos |
| Descriptor | <p>Conoce distintas representaciones que se pueden utilizar para los objetos matemáticos de multiplicación y división en el campo de los números naturales:</p> <p>Representaciones gráficas como arreglos rectangulares y representaciones en un lenguaje matemático.</p> | <p>Conoce que una dificultad que pueden presentar los estudiantes al momento de trabajar las operaciones de multiplicación y división con arreglos rectangulares se da al utilizar cantidades inexactas, por lo que, prefiere inicialmente hacer uso de cantidades enteras.</p> | <p>Conoce que hacer uso de los arreglos rectangulares potencializan el aprendizaje de los estudiantes, considerando que, permite trabajar las operaciones de multiplicación y división de forma combinada y relacionada.</p> |
| Tipo de relación | Intra-dominio e Inter-dominio. | | |

Las relaciones de conocimiento de resumen en la Figura 48.

Figura 48

Relaciones de conocimiento Intra-dominio e Inter-dominio



Fuente: Elaboración propia

Otra evidencia de conocimiento se encuentra nuevamente en las actividades propuestas por Alan para la primera semana de su planeación.

Figura 49

Actividades propuestas en la semana uno

| Multiplication | Division | |
|---|---|---|
| $6 \times 3 = 18$ Because, $6 + 6 + 6 = 18$ <small>©math-only-math.com</small> | $18 \div 3 = 6$ Because, $18 - 3 = 15$ $12 - 3 = 9$ $6 - 3 = 3$ <small>©math-only-math.com</small> | $18 \div 6 = 3$ Because, $18 - 6 = 12$ $12 - 6 = 6$ $6 - 6 = 0$ <small>©math-only-math.com</small> |

Fuente: Plan de clase de Alan

Este recurso se puede consultar en <https://www.math-only-math.com/relationship-between-multiplication-and-division.html>

Por lo que, durante la entrevista se decide profundizar en lo siguiente:

Fragmento de entrevista a Alan

Muy bien, propone a los estudiantes un recurso, ahí colocas un enlace donde se presenta la relación existente entre la multiplicación y la división ¿por qué utilizó ese recurso virtual y qué potencialidades encontró en él para utilizarlo y no utilizar otro, por ejemplo?

Alan: *Esta página me gusta utilizarla en general porque les permite a los estudiantes consultar sobre cualquier tema, en este caso la relación entre la multiplicación y la división y que ellos lo pudieran ver con diferentes ejemplos. Entonces, si tú miras nos presentan una multiplicación, incluso lo hacen como una suma reiterada y luego la división y no las muestra. Proyecto un momentito. Incluso, esto podría responder la pregunta que te quedé debiendo como de la resta, de la división. Mira dieciocho dividido entre tres es seis, podemos verlo también como seis por tres igual a dieciocho, son operaciones opuestas. O incluso la división la podemos ver así: dieciocho menos tres es igual a quince, quince menos tres es igual a doce, doce menos tres es igual a nueve, nueve menos tres es igual a seis, seis menos tres es igual a tres y tres menos tres es igual a cero. Entonces nosotros podemos decir cuántas veces hicimos la resta, entonces se puede ver el resultado como la resta de ese número tantas veces.*

Por lo anterior, se logra evidenciar que Alan tiene conocimiento sobre las propiedades de las operaciones de multiplicación y división, reconociéndolas como operaciones inversas (Definiciones, propiedades y fundamentos – KoT). También, pone de manifiesto que las operaciones de suma y resta se relacionan con las operaciones de multiplicación y división, considerando a la multiplicación como una suma reiterada y a la división como una resta reiterada (Conexiones de simplificación – KSM). Por último, se logra evidenciar que conoce recursos de enseñanza que potencializan el aprendizaje de las operaciones de multiplicación y división y sus relaciones (Recursos de enseñanza materiales y virtuales – KMT). Por lo anterior, se logra establecer una relación de tipo Intra-dominio al interior del MK entre el KoT-KSM y una relación de tipo Inter-dominio entre el KoT-KSM-KMLS como se muestra en la Tabla 28.

Tabla 28

Categorías y descriptores evidenciados de los subdominios KoT, KSM y KMLS

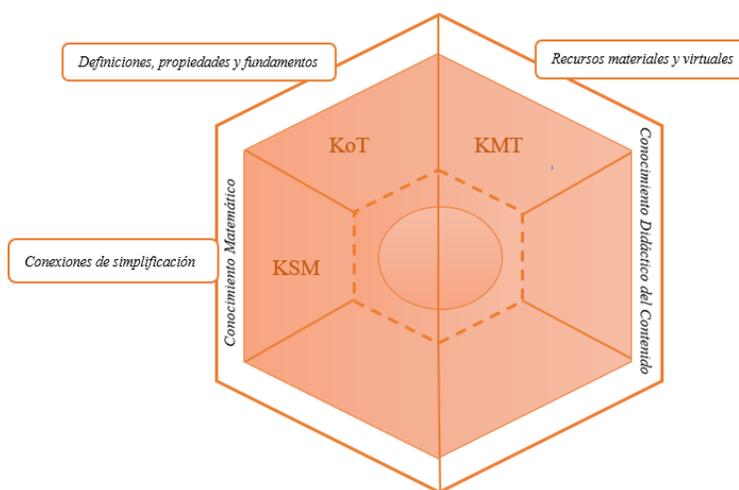
| Dominio | MK | | PCK |
|------------|---|--------------------------------------|--|
| Subdominio | KoT | KSM | KMT |
| Categoría | Definiciones, propiedades y fundamentos | Conexiones de simplificación | Recursos de enseñanza materiales y virtuales |
| Descriptor | Conoce que las operaciones de | Conoce que las operaciones de suma y | Conoce recursos de enseñanza virtuales |

| | | | |
|------------------|--|--|--|
| | <p>multiplicación y división cumplen la propiedad de ser operaciones inversas.</p> | <p>resta se relacionan con el aprendizaje de la multiplicación y división.</p> | <p>que potencializan el aprendizaje de las operaciones de multiplicación y división y su relación.</p> |
| Tipo de relación | Intra-dominio e Inter-dominio. | | |

Las relaciones de conocimiento evidenciadas se resumen en la Figura 50.

Figura 50

Relación de conocimiento Intra-dominio e Inter-dominio



Fuente: Elaboración propia.

Para la semana dos, el profesor propone dos videos. Uno relacionado con la operación de multiplicación (Figura 51) y otro relacionado con la operación de división (Figura 52).

Figura 51

Video sobre multiplicación propuesto en la semana dos

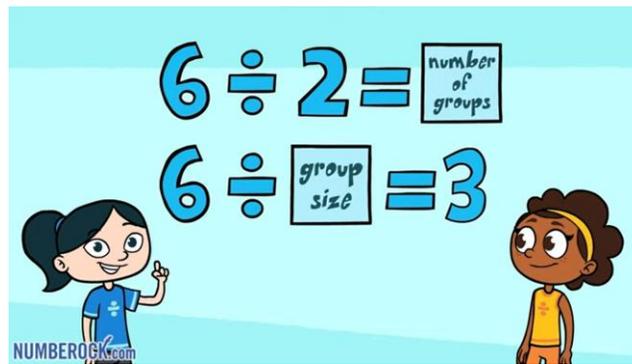


Fuente: Plan de clase de Alan

El video se puede consultar en <https://youtu.be/gzFbUZ8VjEg>

Figura 52

Video sobre división propuesto en la semana dos



Fuente: Plan de clase de Alan

El video se puede consultar en <https://youtu.be/oF2fITujB4c>

Por lo que, en la entrevista se profundiza en lo siguiente:

Fragmento de entrevista a Alan

Propone a los estudiantes dos vídeos, uno sobre la multiplicación y otra sobre la división. Varias preguntas sobre esos dos vídeos ¿cuál es el objetivo de utilizar este recurso? ¿Por qué utilizar recursos virtuales en la enseñanza de estos contenidos matemáticos? ¿Qué potencialidades y limitaciones se encuentra en ellos para utilizarlos?, y ¿de qué forma influye ese recurso virtual en la enseñanza de la estructura multiplicativa?

Alan: Si las atendemos una por una ¿cuál es el objetivo al utilizar el recurso?

Es una canción, bueno, esos recursos son mucho *más llamativos, interesantes para los estudiantes*. Porque ellos están inmersos dentro de la tecnología, este mundo y

esta realidad ya es tecnológica. Tu común es la tecnología, incluso lo cita un investigador, en este momento me olvidé exactamente el nombre, pero dice lo siguiente: *La tecnología ha influenciado directamente a la sociedad, pero al mismo tiempo ha influenciado la educación y el trabajo del docente, por lo que los profesores debemos incluir el uso de la tecnología en las aulas. Entonces usar herramientas o recursos tecnológicos, como son videos, aplicaciones y demás, nos permiten tener la atención de los estudiantes, motivar a los estudiantes darles una perspectiva diferente de lo que son las matemáticas.* Entonces, una canción los estudiantes se la aprenden, están como mucho más atentos a ella, incluso este material para su formación es bastante significativo, por eso el uso de este.

Además, retoma ejercicios de la actividad pasada, porque muestran las abejitas y los diferentes animales organizados en columnas y filas y retoma lo que ya vimos anteriormente. Entonces me está diciendo vea, *usted puede encontrar el dividendo teniendo el divisor y multiplicándolo por un número, que vean esas organizaciones y todo lo demás, esa relación. Los dos vídeos tratan sobre las relaciones entre las operaciones y los explican muy bien, a pesar de que son canciones.*

Alan nuevamente manifiesta que las operaciones de multiplicación y división son operaciones inversas, por lo que, se evidencia conocimiento sobre las propiedades de las operaciones y su relación (Definiciones, propiedades y fundamentos – KoT). También expone que es importante que los profesores incluyan en sus actividades de aula el uso de tecnología (Recursos de enseñanza materiales y virtuales – KMT), considerando que son más llamativos e interesantes para los estudiantes y su uso los motiva y les brinda una visión distinta de las matemáticas (Aspectos emocionales del aprendizaje de las matemáticas – KFLM). Por lo anterior se logra establecer una relación de tipo Intra-dominio al interior del PCK entre el KFLM-KMT y una relación de tipo Inter-dominio entre el KoT-KFLM-KMT, tal como se observa en la Tabla 29.

Tabla 29

Categorías y descriptores evidenciados de los subdominios KoT, KFLM y KMT

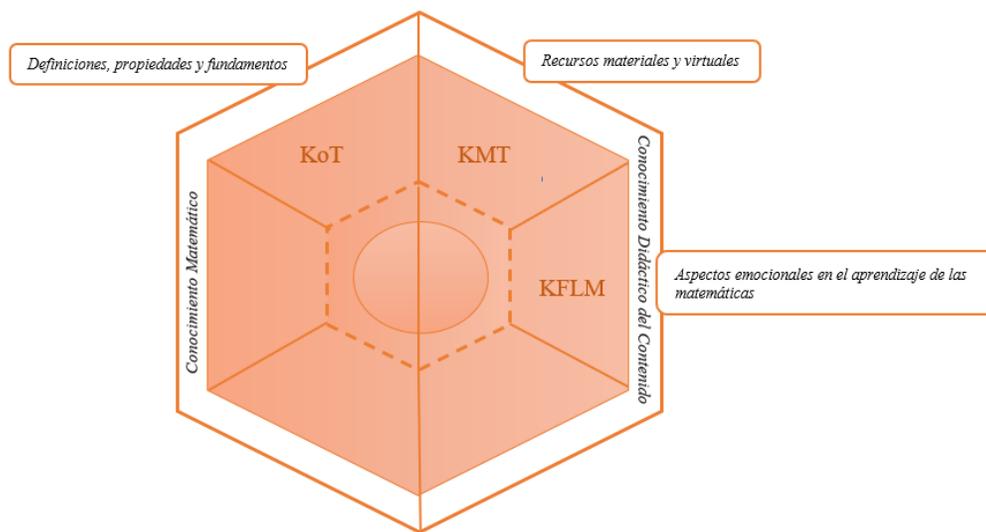
| Dominio | <i>MK</i> | <i>PCK</i> | |
|------------|---|---|--|
| Subdominio | KoT | KFLM | KMT |
| Categoría | Definiciones, propiedades y fundamentos | Aspectos emocionales del aprendizaje de las matemáticas | Recursos de enseñanza materiales y virtuales |

| | | | |
|------------------|---|--|---|
| Descriptor | Conoce que las operaciones de multiplicación y división cumplen la propiedad de ser operaciones inversas. | Conoce que el uso de recursos virtuales despierta el interés y la motivación de los estudiantes por el aprendizaje matemático. | Conoce recursos de enseñanza virtuales que potencializan el aprendizaje de sus estudiantes. |
| Tipo de relación | Intra-dominio e Inter-dominio | | |

Las relaciones de conocimiento establecidas se resumen en la Figura 53.

Figura 53

Relación de conocimiento Intra-dominio e Inter-dominio



Fuente: Elaboración propia

En la semana dos, el profesor propone una serie de actividades para trabajar la propiedad conmutativa de la multiplicación, tal como se evidencia en la Figura 54.

Figura 54

Actividad propuesta en la semana dos

cada una de ellas, entonces me sale un resultado exacto. Entonces aplica para ambas, por eso están propuestas esas situaciones. Incluso también me lo muestra que si tú miras en el último que dice cuatro por tres es igual a seis por dos, entonces si utiliza este tipo de arreglos de crear rectángulos con filas y columnas puede establecer relaciones. Ejemplo ¿tres filas y cuatro columnas daría el mismo resultado que es seis filas y dos columnas? *Entonces los estudiantes podrían partir de esos arreglos decir, Ah ok sí. Sí lo hay, hay diferentes factores que podrían llegar al mismo producto.*

Se logra evidenciar en el fragmento de entrevista anterior, que Alan posee conocimiento sobre las propiedades y relaciones de las operaciones, manifestando nuevamente que la multiplicación y división son operaciones opuestas, y que, además reconoce que la división no es una operación conmutativa (Definiciones, propiedades y fundamentos – KoT). También se logra evidenciar que Alan, utiliza como tareas que potencializan el aprendizaje de las operaciones y sus propiedades los arreglos rectangulares (Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos – KMT). Por lo anterior, se logra establecer una relación de tipo Inter-dominio entre el KoT-KMT, tal como se observa en la Tabla 30.

Tabla 30

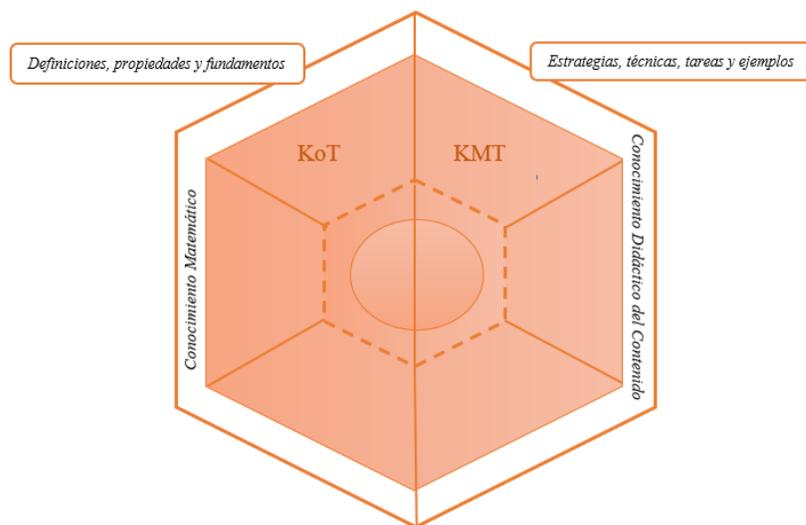
Categorías y descriptores evidenciados de los subdominios KoT y KMT

| | | |
|------------------|---|---|
| Dominio | MK | PCK |
| Subdominios | KoT | KMT |
| Categorías | Definiciones, propiedades y fundamentos | Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos |
| Descriptor | Conoce que las operaciones de multiplicación y división cumplen la propiedad de ser operaciones opuestas. También conoce que la división de números naturales no cumple la propiedad de conmutatividad. | Conoce y utiliza arreglos rectangulares como tareas que potencializan el aprendizaje de los conceptos de multiplicación y división y sus propiedades. |
| Tipo de relación | Inter-dominio | |

Las relaciones de conocimiento establecidas se resumen en la Figura 55.

Figura 55

Relación de conocimiento Inter-dominio



Fuente: Elaboración propia.

Otra evidencia de conocimiento se encuentra en la tercera semana de clase, donde el profesor propone cinco situaciones problema a sus estudiantes, por lo que, se decide profundizar en ello.

Fragmento de entrevista a Alan

Ahora pasamos a la semana tres. En esta semana presenta una serie de problemas. Si mal no recuerdo son cinco situaciones y la primera pregunta es ¿cuál es la intención de presentar esos problemas y cómo estas situaciones aportan al conocimiento no solamente de la estructura multiplicativa, sino también a ese proceso de resolución de problemas?

Alan: Ok y aquí es donde entra ya todo lo que hemos visto, *ya los estudiantes conocen y recuerdan la propiedad conmutativa* porque ya la habían trabajado anteriormente pero no se ejercitó, lo que estaba haciendo era con el fin de que el estudiante lo tenga presente, y que recuerde y lo fortalezca. *Ahora en cada uno de estos problemas, el estudiante va a poder hacer uso de todos sus conocimientos y puede aplicar cualquier tipo de estrategia. Ejemplo, puede hacer arreglos como los rectangulares mostrados anteriormente y puede formar grupos y demás.*

Entonces ya apliqué sobre el proceso de la estructura multiplicativa, entonces yo te diría que este tipo de problemas por tratarse de problemas, entonces el estudiante va a tratar de darle solución a esta situación que describe una situación real, a pesar

de que no lo involucre de lleno a ella. *Este tipo de situaciones son apropiadas para estudiar esto porque el estudiante va a tener o puede emplear diferentes métodos, ya sea matemático, ya sea gráfico, ya sea tabular, ya sea no sé, diferentes representaciones. Modelos para poder solucionar el problema, eso sí, estaría contribuyendo en ese sentido y que pueden aplicar las leyes.*

De lo anterior se puede concluir que Alan evidencia conocimiento sobre el nivel de desarrollo conceptual en el que deben estar sus estudiantes considerando que, manifiesta que en este punto ya deben conocer y recordar la propiedad conmutativa (Nivel esperado de desarrollo conceptual y procedimental - KMLS). También, pone en evidencia conocimiento sobre la forma en la que sus estudiantes se enfrentarán a las situaciones indicando que pueden recurrir a arreglos rectangulares o formar grupos de elementos (Formas de interacción con un contenido matemático – KFLM). Por otro lado, pone en evidencia que utiliza las situaciones problema como tareas que potencializan el aprendizaje de las matemáticas, considerando que le permite al estudiante seleccionar sus propios caminos de solución (Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos – KMT). Por último, se evidencia conocimiento sobre los diferentes registros de representación que pueden utilizarse para resolver las situaciones (Registros de representación – KoT). Por lo anterior, se logra establecer una relación de tipo Intra-dominio al interior del PCK entre el KMLS-KFLM-KMT, y una relación de tipo Inter-dominio entre el KoT-KMLS-KFLM-KMT, tal como se observa en la figura 31.

Tabla 31

Categorías y descriptores evidenciados de los subdominios KoT, KMLS, KFLM, KMT

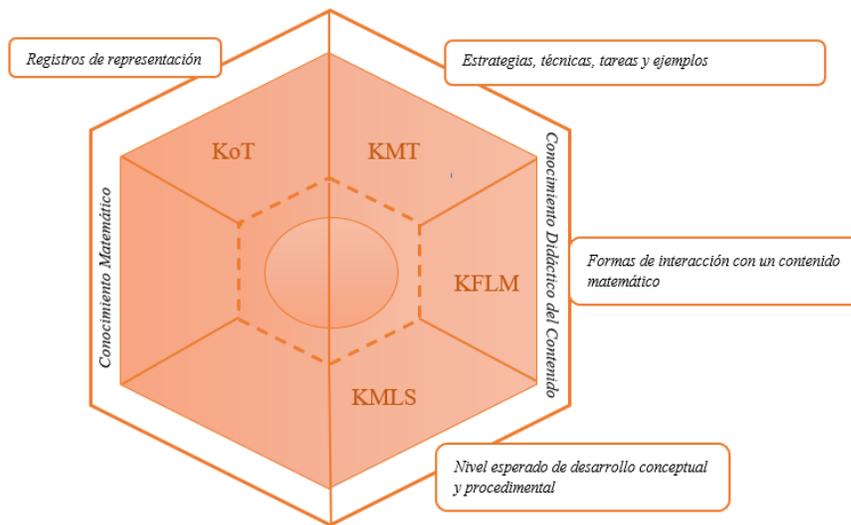
| Dominio | <i>MK</i> | <i>PCK</i> | | |
|------------|-----------------------------|--|---|--|
| Subdominio | KoT | KMLS | KFLM | KMT |
| Categoría | Registros de Representación | Nivel esperado del desarrollo conceptual o procedimental | Formas de interacción con un contenido matemático | Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos |

| | | | |
|---|---|--|---|
| <p>Descriptor</p> <p>Conoce distintas representaciones que se pueden utilizar para resolver problemas de estructura multiplicativa: registro gráfico, tabular y matemático.</p> | <p>Sabe que los estudiantes en este nivel deben conocer y recordar la propiedad conmutativa de la multiplicación.</p> | <p>Conoce que los estudiantes al momento de resolver las situaciones problema, pueden hacer uso de todos sus conocimientos y, además, pueden aplicar cualquier estrategia de solución como, por ejemplo, arreglos rectangulares o formar grupos.</p> | <p>Conoce y utiliza situaciones problema como tareas que potencializan el aprendizaje de los conceptos de multiplicación y división considerando que los estudiantes deben o pueden aplicar distintos métodos para su solución.</p> |
| <p>Tipo de relación</p> | <p>Intra-dominio e Inter-dominio</p> | | |

Las relaciones de conocimiento evidenciadas se resumen en la Figura 56.

Figura 56

Relación de tipo Intra-dominio e Inter-dominio



Fuente: Elaboración propia.

Otro indicio del conocimiento de Alan lo encontramos en la sección de recapitulación que propone al terminar la tercera semana de clase, como se evidencia en la Figura 57.

Figura 57

Momento de recapitulación propuesto por Alan en la planeación de clase

Recapitulación:

En un momento final, el profesor preguntará a los alumnos sobre lo que han aprendido durante la clase. Pero lo más importante, preguntará a los alumnos sobre la relación entre la multiplicación y la división.

Fuente: Plan de clase de Alan

Por lo que, en la entrevista se profundizó en lo siguiente:

Fragmento de entrevista a Alan

Al finalizar la última semana, en la parte de la recapitulación manifiesta que el profesor preguntará a los alumnos sobre lo que han aprendido durante la clase, pero lo más importante, resalto esa parte, *preguntará a los alumnos sobre la relación entre la multiplicación y la división, ¿por qué es tan importante en esta planeación de clase que los estudiantes reconozcan la relación entre estas dos operaciones?*

Alan: Es importante que reconozcan esta relación, o esta que se está exponiendo directamente aquí, en el sentido de que muchas veces los estudiantes trabajan o saben multiplicar muy bien, pero al momento de dividir dicen que eso es muy difícil, que eso es lo peor que les ha pasado en la vida. Entonces, si ellos entienden que si tú sabes multiplicar vas a poder encontrar la solución a una división a partir de la multiplicación, vas tener las herramientas necesarias para resolver situaciones de división o incluso si sabes dividir muy bien, podrías resolver situaciones de multiplicación, eso les ayudaría en situaciones o en conceptos futuros, como los ya mencionados: razones y proporciones, simplificación de fracciones, por ejemplo, o amplificación de fracciones, que son dos temas que también les causa mucho, mucho ruido en el futuro, en secuencias, que encontramos secuencias aritméticas y secuencias geométricas, donde la secuencia geométrica pues están dados por multiplicaciones. Entonces estos conceptos que parecen ser sencillos y que dejan de tener sentido en el bachillerato e incluso superiores, pues prácticamente son la base de los conceptos mucho más complejos.

De lo anterior se puede evidenciar y profundizar en los conocimientos de Alan sobre los temas. Manifiesta que existe una relación entre las operaciones de multiplicación y división y que si los estudiantes logran comprender dicha relación van a tener herramientas que les permiten resolver situaciones multiplicativas. Se reconoce que en este fragmento de entrevista no se hace muy explícito el conocimiento sobre la relación entre estas dos

operaciones, por lo que, se remite a al fragmento de entrevista de la página 93, donde Alan expone de manera más detallada su conocimiento, no solo de que la multiplicación y división son operaciones inversas sino también, de la relación existente entre las operaciones de suma y resta (Definiciones, propiedades y fundamentos – KoT). También se hace evidente que Alan reconoce que el no comprender dicha relación hará que los estudiantes presenten algunas dificultades, como, por ejemplo, al momento de enfrentarse a la división los estudiantes indiquen que “dividir es lo peor que les ha pasado en la vida”, sin reconocer que por medio de la multiplicación es posible encontrar el resultado de una división y viceversa, resaltando de este modo la importancia de la comprensión por parte de los estudiantes de que la división es la operación inversa a la multiplicación (Dificultades y fortalezas en el aprendizaje de las matemáticas – KFLM). También se logra evidenciar que posee conocimiento sobre la importancia que tiene el aprendizaje actual en el aprendizaje de temas futuros: razones y proporciones, amplificación y simplificación de fracciones, secuencias aritméticas y secuencias geométricas. Es importante el reconocimiento que el profesor realiza a las operaciones de multiplicación y división, exponiendo que “estos conceptos que parecen ser sencillos y que dejan de tener sentido en el bachillerato e incluso [en niveles] superiores, prácticamente son la base de los conceptos mucho más complejos” (Secuencia de temas – KMLS). Por lo anterior, se logra evidenciar una relación de tipo Intra-dominio al interior del dominio PCK entre los subdominios KFLM-KMLS; y una relación de tipo Inter-dominio entre los subdominios KFLM-KMLS-KoT, tal como se muestra en la Tabla 32.

Tabla 32

Categorías y descriptores evidenciados de los subdominios KFLM, KMLS y KoT

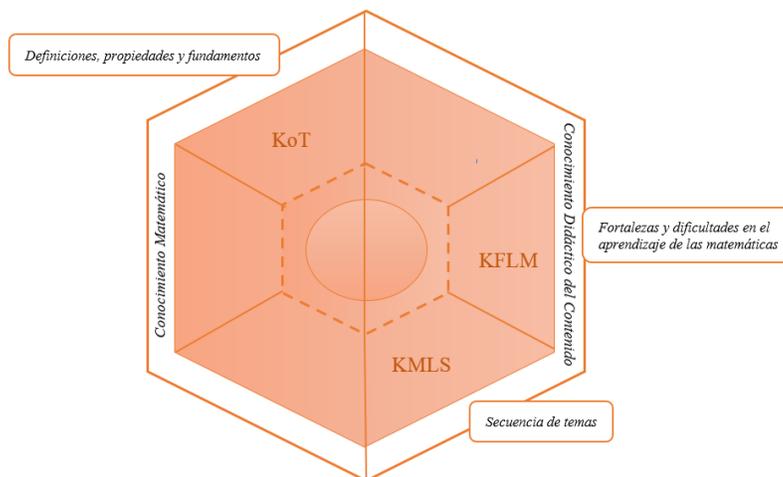
| Dominio | PCK | | MK |
|------------|--|---|---------------------------|
| Subdominio | KFLM | KMLS | KoT |
| Categoría | Fortalezas y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas | Secuencia de temas anteriores y posteriores | Propiedades y fundamentos |

| | | | |
|------------------|--|---|---|
| Descriptor | Conoce que los estudiantes pueden presentar dificultades al momento del aprendizaje de la división como también en aprendizajes posteriores como la amplificación y simplificación de fracciones | Conoce la relación y la potencialidad del aprendizaje de la estructura multiplicativa con aprendizajes futuros: razones y proporciones, amplificación y simplificación de fracciones, secuencias aritméticas y secuencias geométricas | Conoce la multiplicación y la división como operaciones inversas y reconoce que cuando el estudiante logra comprender esta relación tiene herramientas necesarias para resolver problemas matemáticos |
| Tipo de relación | Intra-dominio e Inter-dominio. | | |

Las relaciones de conocimiento evidenciadas se resumen en la Figura 58.

Figura 58

Relaciones de conocimiento Intra-dominio e Inter-dominio



Fuente: Elaboración propia.

En la Tabla 33, se presenta el conocimiento especializado evidenciado por Alan y Julia de acuerdo con los subdominios y las categorías del MTSK identificados en las relaciones de conocimiento.

Tabla 33*Conocimiento especializado de Alan y Julia evidenciado en las relaciones de conocimiento*

| Categoría/Subdominio | Julia Conoce | Alan Conoce |
|--|--|---|
| Fenomenología y aplicaciones/ KoT | Diversos contextos que son familiares para los estudiantes: Paquetes de dulces para una fiesta. Distribuir alimentos. | |
| | Cantidad de alimentos para preparar una receta. Reparto de los panes para el desayuno. | Cantidad de invitados a una fiesta. Cantidad de puntos en un torneo. Contexto matemático, contexto verbal (situaciones reales, situaciones pseudo-realistas). |
| Definiciones, propiedades y fundamentos/ KoT | Propiedad conmutativa, distributiva y asociativa de la multiplicación. La multiplicación y división como operaciones inversas. La división como una operación no conmutativa y no cerrada. | |
| | | Los números pares e impares se representan de la forma $2n$ y $2n+1$ respectivamente. Relaciones entre los números naturales como ser mayor que, menor que, múltiplo de. La suma y resta como operaciones opuestas. |
| Registros de representación/KoT | Representaciones verbales o lenguaje natural. Representaciones graficas. Representaciones simbólicas. | |

| | Representaciones concretas. | Representaciones tabulares. |
|-----------------------------------|---|--|
| Conexiones de simplificación/KSM | Los conjuntos como un contenido de menor complejidad. | <p>La suma como contenido de menor complejidad a la multiplicación.</p> <p>La resta como contenido de menor complejidad a la división.</p> |
| Conexiones de complejización/KSM | | <p>Que al dividir un número natural por un decimal o una fracción el resultado aumenta y al multiplicar un número natural por un decimal o una fracción el resultado disminuye.</p> <p>Que las propiedades de la estructura aditiva se relacionan con la estructura multiplicativa.</p> <p>Que el aprendizaje de las propiedades de los números naturales en cantidades menores que 100 se relaciona con el aprendizaje posterior.</p> |
| Resolver problemas/KPM | <p>Procesos asociados a la resolución de problemas como forma de producir en matemáticas: análisis, indagación y exploración de las situaciones.</p> <p>Estrategias utilizadas para resolver problemas: considerar problemas equivalentes, formular problemas sin solución, formular problemas incompletos.</p> | Diferentes heurísticas para solucionar problemas: dibujar un esquema, realizar un gráfico y representar la situación en una tabla y representarlo verbalmente. |
| Papel del lenguaje matemático/KPM | El papel del lenguaje matemático haciendo uso de expresiones propiamente matemáticas: multiplicando, multiplicador, producto, divisor, dividendo, cociente y residuo. | |
| Teorías del aprendizaje/KFLM | La teoría de Representaciones Semióticas de Duval. | La teoría de Resolución de Problemas de George Polya. |

Fortalezas y dificultades/KFLM

Que una dificultad es el cambio del lenguaje natural al lenguaje matemático.

Que una dificultad es utilizar como estrategia de solución el conteo.

Que una fortaleza es asociar una cantidad a un objeto simplificando el conteo.

Una fortaleza es hacer uso del ábaco.

Que una fortaleza al memorizar las tablas de multiplicar es encontrar el resultado rápidamente.

Que una dificultad al memorizar las tablas de multiplicar es que está limitado a la memoria de los estudiantes.

Que una dificultad se da al usar cantidades inexactas y prefiere hacer uso de cantidades enteras.

Que una dificultad se da en el aprendizaje de la división y también en aprendizajes posteriores: amplificación y complicación de fracciones.

Formas de interacción/KFLM

Que el permitir que los estudiantes recurran a sus propios caminos de solución los llevará utilizar estrategias o métodos con el que más se sientan cómodos: representaciones concretas, representaciones gráficas, representación simbólica o matemática.

Que los conocimientos previos llevan al estudiante a preguntarse qué debe hacer, cómo deben enfrentarse a las situaciones, qué operaciones u acciones les permiten solucionarlas.

Que sus estudiantes podrían resolver los problemas planteados recurriendo a sumas reiteradas o haciendo uso de materiales concretos como el ábaco.

Pueden hacer uso de todos sus conocimientos y, además, pueden aplicar cualquier estrategia de solución.

Que el uso de recursos virtuales despierta el interés y la motivación de los estudiantes por el aprendizaje matemático.

| | | | |
|--|---|---|---|
| Aspectos emocionales/KFLM | Que algunos aspectos de la vida cotidiana donde los estudiantes se sientan identificados despiertan el interés y la motivación por el aprendizaje. | Que el permitir que los estudiantes seleccionen aspectos de su interés y de la vida cotidiana para abordar los contenidos matemáticos despiertan su motivación y expectativas por aprender. | Que el proponer a los estudiantes situaciones incompletas y situaciones sin solución despierta su curiosidad y les permite avanzar en el conocimiento matemático. |
| Recursos didácticos/KMT | Recursos de enseñanza virtuales que potencializan el aprendizaje de sus estudiantes. | | |
| | Recursos interactivos proporcionados por el MEN a través del portal “Colombia Aprende” | Recursos de enseñanza virtuales como https://matemath.com/ . También canciones, videos, apps. | |
| Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos/KMT | Actividades y contextos que son familiares para los estudiantes. Situaciones problema como estrategia de enseñanza. | | |
| | Situaciones contextualizadas con preguntas orientadoras. El juego. La resolución de problemas. Permite que sus estudiantes sean los que seleccionen la temática de interés. Situaciones problema sin solución. Situaciones problemas con enunciados incompletos. | Uso de arreglos rectangulares. Permite que sus estudiantes decidan la forma en la que abordan los contenidos. Permite que los estudiantes construyan las tablas de multiplicar a partir de diferentes estrategias | |
| Resultados de aprendizajes esperados/KMLS | Que las relaciones y propiedades de los números naturales y sus operaciones hacen parte de aquellos contenidos matemáticos adecuados al nivel escolar. | | |

| | | |
|--|---|---|
| Nivel esperado de desarrollo conceptual/KMLS | <p>Que los estudiantes deben estar en la capacidad de resolver y formular problemas cuya estrategia de solución requiera de las relaciones y propiedades de los números naturales y sus operaciones.</p> <p>Que los estudiantes al finalizar la educación primaria deben conocer las operaciones de multiplicación y división y deben estar en la capacidad de resolver situaciones.</p> <p>Que los estudiantes deben dominar los procedimientos y los algoritmos matemáticos y reconocer cómo, cuándo y por qué usarlos.</p> <p>Que los estudiantes a medida que avanzan en la resolución de problemas multiplicativos lograrán realizar una conversión directa del lenguaje natural al lenguaje matemático.</p> | <p>Que los estudiantes en el nivel de escolaridad de interés todavía no logran reconocer las expresiones $2n$ y $2n+1$ como números pares e impares respectivamente.</p> <p>Que en el primer año de la escuela primaria se trabaja el conjunto de los números naturales hasta el 100.</p> <p>Que los estudiantes deben conocer y recordar la propiedad conmutativa de la multiplicación</p> |
| Secuencia de temas/KMLS | <p>Temas previos: conjuntos, valor posicional, lectura, análisis. Y posteriores: potenciaciones, radicaciones, logaritmos, incluso fracciones y el álgebra).</p> | <p>Que los números enteros, la simplificación y amplificación de fracciones, secuencias aritméticas y secuencias geométricas hacen parte del aprendizaje posterior.</p> |

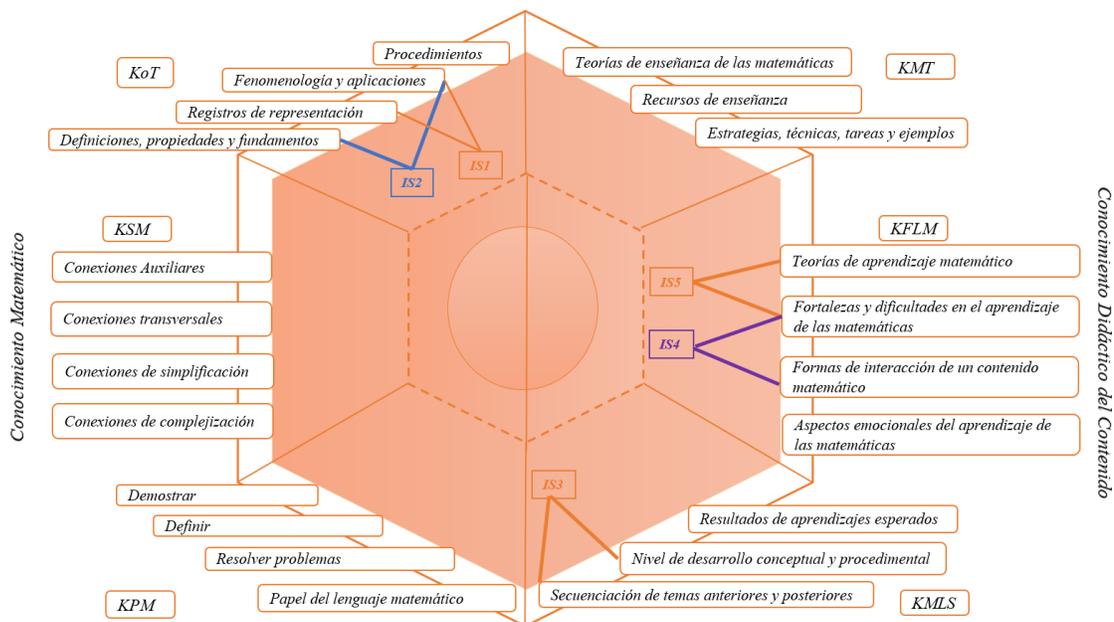
4.3 Análisis de las relaciones encontradas

En esta investigación se profundizó en los conocimientos que dos profesores de matemáticas ponen en juego al realizar una planeación de clase teniendo en cuenta la Resolución de Problemas como medio para promover el aprendizaje de las operaciones de multiplicación y división. Del análisis presentado hasta el momento, se puede concluir que intervienen diferentes subdominios de conocimiento especializado de manera relacionada e integrada.

Teniendo en cuenta los subdominios del modelo MTSK se lograron establecer diferentes tipos de relaciones de conocimiento para cada uno de los informantes, identificando similitudes y diferencias entre ellos. Las relaciones de tipo Intra-subdominio que evidenció Alan se resumen en la siguiente Figura 59.

Figura 59

Relaciones de conocimiento Intra-subdominio evidenciadas por Alan



Fuente: elaboración propia.

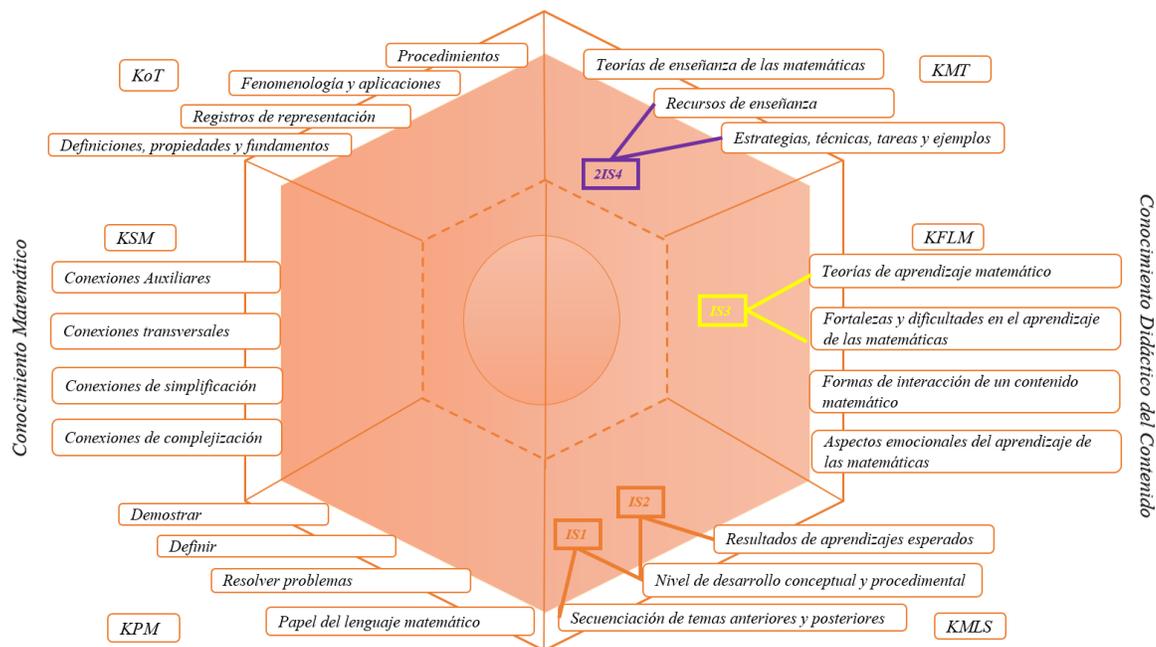
En relación con la figura, se puede indicar que las relaciones Intra-subdominio se identificaron al interior de los subdominios KoT, KFLM y KMLS. Dentro del KoT se evidencia que la categoría *Fenomenología y Aplicaciones* se relaciona con dos categorías:

Registros de Representación [IS1] y *Definiciones, propiedades y fundamentos* [IS2]. Del mismo modo el subdominio KFLM en la categoría de *Fortalezas y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas* se relaciona con *Teorías de aprendizaje matemático* [IS5] y *Formas de Interacción con un contenido matemático* [IS4]. En los subdominios KMT, KSM y KPM no se identificaron relaciones de tipo Intra-subdominio.

En el caso de Julia, las relaciones de tipo Intra-subdominio se encuentran al interior de los subdominios KMT, KFLM y KMLS pertenecientes al Conocimiento Didáctico del Contenido como se evidencia en la Figura 60.

Figura 60

Relaciones de conocimiento Intra-subdominio evidenciadas por Julia



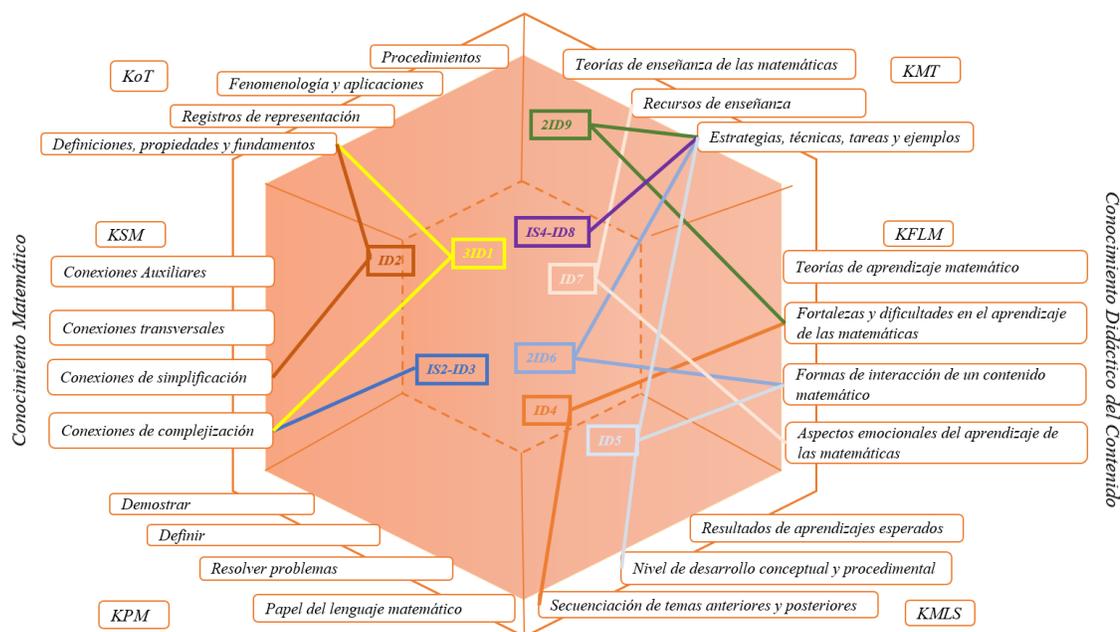
Fuente: elaboración propia.

Dentro del KMT se evidenciaron dos relaciones idénticas entre las categorías *Recursos de enseñanza* y *Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos* [2IS4]. En el KMLS se evidencia que la categoría *Nivel de desarrollo conceptual y procedimental* se relaciona con las categorías *Resultados de aprendizajes esperados* [IS2] y *Secuenciación de temas anteriores y posteriores* [IS1]. No se identificaron relaciones de tipo Intra-subdominio al interior del Conocimiento Matemático.

Ahora bien, Alan evidenció distintas relaciones de tipo Intra-dominio al interior tanto del MK como del PCK. La Figura 61 permite comprender dichas relaciones.

Figura 61

Relaciones de conocimiento Intra-dominio evidenciadas por Alan



Fuente: elaboración propia.

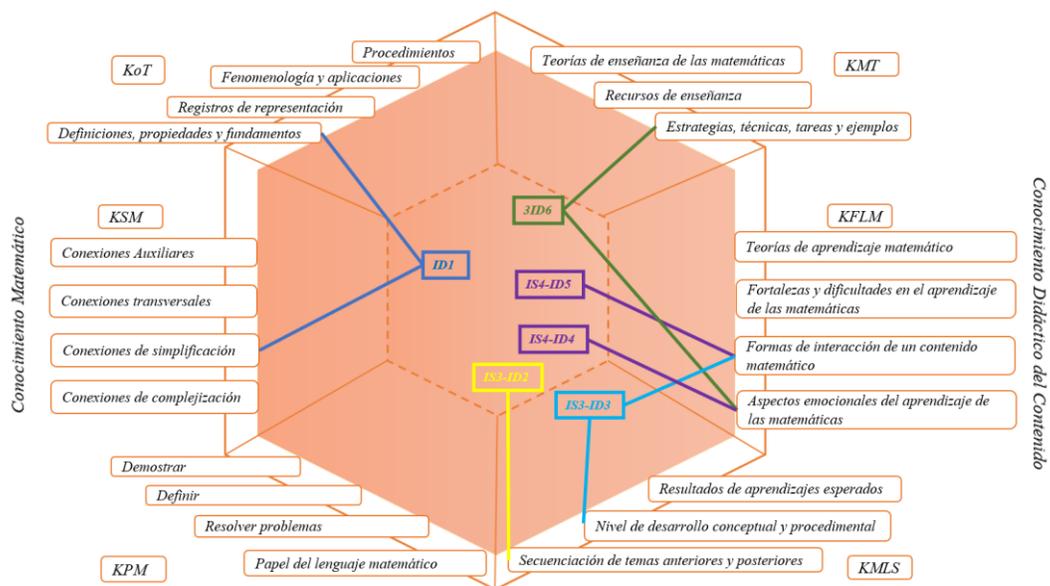
Al interior del dominio MK se observan tres relaciones idénticas entre el KoT y el KSM entre las categorías *Definiciones, propiedades y fundamentos* y *Conexiones de complejización* [3ID1]. También se logra observar que la categoría *Definiciones, propiedades y fundamentos* se relaciona con la categoría de *Conexiones de simplificación* [ID2]. Esta última categoría también se vincula con la relación de tipo Intra-subdominio [IS2] (Ver Figura 59) dando lugar a una relación de tipo Intra-dominio donde se relacionan tres categorías de conocimiento: *Fenomenología y aplicaciones*, *Definiciones, propiedades y fundamentos* y *Conexiones de simplificación* [IS2-ID3]. Los subdominios que más se evidenciaron fueron el KoT y el KSM en sus categorías *Definiciones, propiedades y fundamentos* y *Conexiones de complejización* respectivamente. No se evidenció ninguna relación de tipo Intra-dominio con el subdominio KPM.

Dentro del dominio PCK se relacionaron todos sus subdominios. Se logra evidenciar dos veces la misma relación entre el KMT y KFLM en las categorías *Estrategias técnicas tareas y ejemplos* y *Fortalezas y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas* [2ID9]. También se logra evidenciar dos veces la misma relación entre dichos subdominios, pero esta vez, entre las categorías *Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos* y *Formas de interacción con un contenido matemático* [2ID6]. También se logra evidenciar una relación entre los subdominios KMT, KFLM y KMLS, entre las categorías *Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos*, *Formas de interacción con un contenido matemático* y *Nivel de desarrollo conceptual y procedimental* [ID5]. También es importante resaltar que, la categoría *Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos* se vincula con la relación de tipo Intra-subdominio [IS4] (Ver Figura 59) dando lugar a una relación de tipo Inter-dominio donde se relacionan tres categorías de conocimiento: *Fortalezas y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas*, *Formas de interacción con un contenido matemático* y *Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos* [IS4-ID8]. El subdominio que más se evidenció fue el KMT en la categoría de *Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos*. Seguido del subdominio KFLM en las categorías *Fortalezas y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas* y *formas de interacción con un contenido matemático*.

Julia también evidenció relaciones Intra-dominio tanto en el MK como en el PCK tal como se evidencia en la Figura 62.

Figura 62

Relaciones de conocimiento Intra-dominio evidenciadas por Julia



Fuente elaboración propia.

Al interior del MK, al igual que Alan, se evidenció una relación entre el KoT y KSM entre las categorías *Definiciones propiedades y fundamentos* y *Conexiones de simplificación* [ID1]. No se evidenció ninguna relación de tipo Intra-dominio con el subdominio KPM.

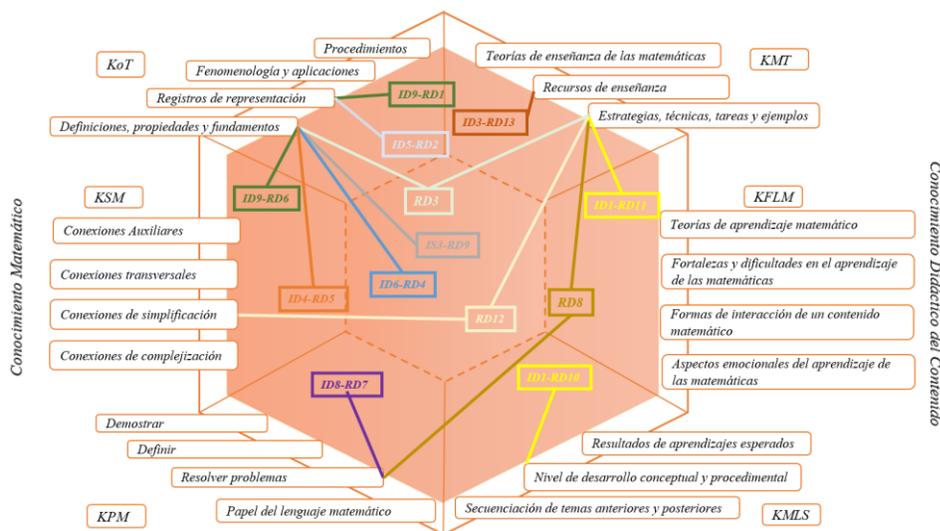
Al interior del PCK se evidenció relación entre todos sus subdominios. Se logró evidenciar tres veces la misma relación entre el KMT y KFLM en las categorías de *Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos* y *Aspectos emocionales en el aprendizaje de las matemáticas* [3ID6]. También es importante resaltar que, la categoría *Formas de interacción con un contenido matemático* se vincula con la relación de tipo Intra-subdominio [IS4] (Ver Figura 60) dando lugar a una relación de tipo Intra-dominio donde se relacionan tres categorías de conocimiento: *Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos*, *Recursos de enseñanza* y *formas de interacción con un contenido matemático* [IS4-ID5]. Del mismo modo, la categoría de *Aspectos emocionales del aprendizaje de las matemáticas* se vincula con la relación de tipo Intra-subdominio [IS4] (Ver Figura 60) dando lugar a una relación de tipo Intra-dominio donde se relacionan tres categorías de conocimiento: *Aspectos emocionales del aprendizaje de las matemáticas*, *Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos* y *Recursos de enseñanza*. Igualmente, se halló una relación entre los subdominios KFLM y KMLS, donde

la categoría de *Secuenciación de temas anteriores y posteriores* se vincula con la relación de tipo Intra-subdominio [IS3] (Ver figura 60) dando lugar a una relación de tipo Intra-dominio donde se relacionan tres categorías: *Teorías de aprendizaje matemático*, *Fortalezas y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas* y *Secuenciación de temas anteriores y posteriores* [IS3-ID2]. De la misma forma, se evidenció una relación entre el KFLM y KMLS donde se vinculan cuatro categorías de conocimiento: *Teorías de aprendizaje de las matemáticas*, *Fortalezas y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas*, *Formas de interacción con un contenido matemático* y *Nivel de desarrollo conceptual y procedimental* [IS3-ID3]. El subdominio que más se evidenció fue el KFLM en la categoría de *Aspectos emocionales del aprendizaje de las matemáticas*, seguido del dominio KMLS.

Por otra parte, en cuanto a las relaciones de tipo Inter-dominio evidenciadas por Alan, se vieron involucrados todos sus subdominios como se evidencia en la Figura 63.

Figura 63

Relaciones de conocimiento Inter-dominio evidenciadas por Alan



Fuente: elaboración propia.

Entre el KoT y el KMT se pudo observar una relación en las categorías *Definiciones, propiedades y fundamentos* y *Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos* [RD3]. Del mismo modo, se evidenció una relación entre KoT y KMLS, donde la categoría de *Definiciones, propiedades y fundamentos* se vincula con la relación Intra-subdominio [IS3] (Ver Figura

59) dando lugar a una relación de tipo Inter-dominio donde se integran tres categorías de conocimiento: *Nivel de desarrollo conceptual y procedimental, secuenciación de temas anteriores y posteriores y Definiciones, propiedades y fundamentos* [IS3-RD9]. También se lograron identificar relaciones donde se vinculan más de dos subdominios, siendo el caso del KoT, KMT y KFLM, donde las categorías *Registros de representación y definiciones propiedades y fundamentos* se vinculan con la relación de tipo Intra-dominio [ID9] (Ver Figura 61) dando lugar a dos relaciones de tipo Inter-dominio donde se integran tres categorías de conocimiento: *Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos, Fortalezas y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, Registros de representación* [ID9-RD1] y *Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos, Fortalezas y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas y Definiciones propiedades y fundamentos* [ID9-RD6]. Del mismo modo, la categoría de *Definiciones, propiedades y fundamentos* se vincula con la relación de tipo Intra-dominio [ID6] (Ver Figura 61) dando lugar a una relación de tipo Inter-dominio donde se vinculan tres categorías de conocimiento: *Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos, Formas de interacción con un contenido matemático y Definiciones, propiedades y fundamento* [ID6-RD4]. También se evidenciaron relaciones entre el KoT, KFLM y KMLS donde la categoría de *Propiedades y fundamentos* se relaciona con la relación Intra-dominio [ID4] (Ver Figura 61) dando paso a una relación donde se vinculan tres categorías de conocimiento: *Fortalezas y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, Secuenciación de temas anteriores y posteriores y Definiciones, propiedades y fundamentos* [ID4-RD5]. Es importante resaltar que se identificó una relación de tipo Inter-dominio donde se relacionan cuatro subdominios: KoT, KMT, KFLM y KMLS, donde la categoría *Registros de representación* se vincula con la relación Intra-dominio [ID5] (Ver Figura 61) dando paso a una relación donde se integran cuatro categorías de conocimiento: *Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos, Formas de interacción con un contenido matemático, Nivel de desarrollo conceptual y procedimental y Registros de representación* [ID5-RD2].

También, se logró identificar una relación entre el KSM y KMT en las categorías *Conexiones de simplificación y Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos* [RD12]. Por otra parte, es importante resaltar que se evidenciaron relaciones de tipo Inter-dominio entre el KPM y KMT en las categorías de *La práctica de resolver problemas y Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos* [RD8]. También, la categoría de la *Practica de resolver problemas*, se

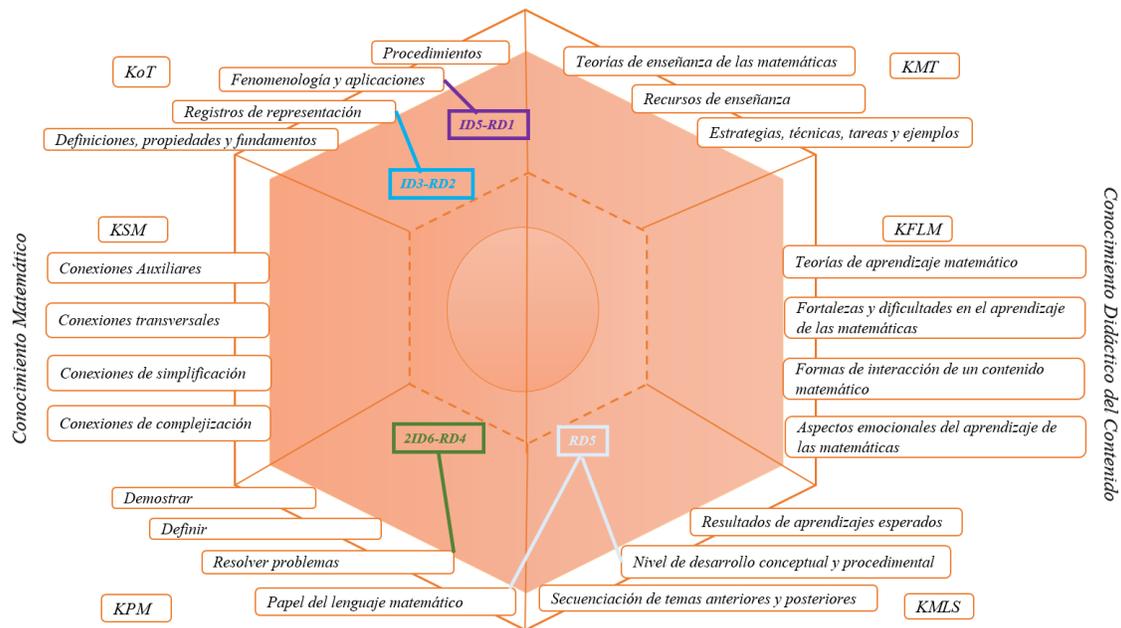
vincula con la relación de tipo Intra-dominio [ID8] (ver Figura 61) dando lugar a una relación de tipo Inter-dominio entre el KPM, KMT y KFLM donde se vinculan cuatro categorías de conocimiento: *Fortalezas y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, Formas de interacción con un contenido matemático, Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos y La práctica de resolver problemas* [ID8-RD7].

Del mismo modo, se logró identificar relación entre los subdominios KMLS, KoT y KSM donde la categoría de *Nivel de desarrollo conceptual y procedimental* se vincula con la relación de tipo Intra-dominio [ID1] (Ver Figura 61) dando lugar a la relación de tipo Inter-dominio donde se vinculan tres categorías de conocimiento: *Definiciones, propiedades y fundamentos, Conexiones de complejización y Nivel de desarrollo conceptual y procedimental* [ID1-RD10]. Del mismo modo, se logró identificar relación entre el KMT, KoT y KSM donde la categoría *Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos* se vincula con la relación de tipo Intra-dominio [ID1] (Ver Figura 61) dando lugar a la relación de tipo Inter-dominio donde se vinculan tres categorías de conocimiento: *Definiciones, propiedades y fundamentos, Conexiones de complejización y Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos* [ID1-RD11]. La categoría *Recursos de enseñanza* se vincula con la relación de tipo Intra-dominio [ID3] (Ver Figura 61) dando lugar a la relación de tipo Inter-dominio: *Fenomenología y aplicaciones, Definiciones, propiedades y fundamentos, conexiones de complejización y Recursos de enseñanza* [ID3-RD13] donde se relacionan cuatro categorías de conocimiento. Los subdominios que más se relacionan con otros subdominios son el KoT y el KMT, seguidos del KMLS y el KFLM.

Por otra parte, las relaciones de tipo Inter-dominio evidenciadas por Julia se resumen en la Figura 64. En su caso, se vieron involucrados cinco de los seis subdominios.

Figura 64

Relaciones de conocimiento Inter-dominio evidenciadas por Julia



Fuente: elaboración propia.

Se logró evidenciar una relación entre el KoT, KFLM y KMT, donde la categoría *Fenomenología y aplicaciones* se vincula con la relación de tipo Intra-dominio [ID5] (ver Figura 62) dando lugar a la relación de tipo Inter-dominio donde se vinculan cuatro categorías de conocimiento: *Recursos de enseñanza*, *Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos*, *Formas de interacción con un contenido matemático* y *Fenomenología y aplicaciones* [ID5-RD1]. También, se evidenció relación entre el KoT, KMSL y KFLM, donde la categoría *Registros de representación* se vincula con la relación [ID3] (Ver Figura 62) dando lugar a una relación de tipo Inter-dominio [ID3-RD2] donde se integran cinco categorías de conocimiento: *Registros de representación*, *Formas de interacción con un contenido matemático*, *Nivel de desarrollo conceptual y procedimental*, *Teorías de aprendizaje matemático* y *Fortalezas y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas*. Es importante agregar que se evidenció dos veces la relación entre el KPM, KMT y KFLM, donde la categoría de la *Práctica de resolver problemas* se vinculó con la relación de tipo Intra-dominio [ID6] (ver Figura 62) dando lugar a la relación Inter-dominio [2ID6-RD4] donde se relacionan tres categorías de conocimiento: *Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos*, *Aspectos emocionales del aprendizaje de las matemáticas* y *La práctica de resolver problemas*. Por último, la relación evidenciada entre el KPM y el KMLS entre las categorías del *Papel del Lenguaje Matemático*

y *Nivel de desarrollo conceptual y procedimental [RD5]*. Los subdominios que más se relacionan con otros subdominios son el KFLM y el KoT.

Conclusiones

En este estudio hubo un interés por profundizar y analizar el conocimiento especializado que el profesor de matemáticas pone en juego al momento de realizar una planeación de clase en su intención de enseñanza de la estructura multiplicativa a través de la resolución de problemas, y la forma en la que se relacionan dichos conocimientos. De los análisis y resultados pudimos inferir que intervienen diferentes subdominios del conocimiento especializado de los profesores de manera relacionada e integrada.

Pudimos observar que existen similitudes y diferencias entre el conocimiento especializado de ambos profesores. Tanto Alan como Julia evidenciaron relaciones de conocimiento en ambos dominios del modelo. Alan por su parte evidenció un conocimiento más rico en el Conocimiento Matemático y Julia, evidenció más relaciones al interior del Conocimiento Didáctico del Contenido. Esto se debe quizás a la formación de ambos profesores: recordemos que Alan, a diferencia de Julia, cuenta con un Posgrado en Educación Matemática y que la mayor parte de su experiencia docente ha sido con grados superiores. Julia en cambio ha tenido su mayor experiencia en niveles básicos. Es importante resaltar que Alan dejó en evidencia más relaciones de conocimiento que Julia, posiblemente esto se deba a que Alan planificó tres semanas de clase mientras que Julia, solo planificó una. Es importante resaltar que esto se dejó a consideración de cada docente, de su experiencia y necesidades de sus estudiantes. Lo anterior permite observar, tal como se propone en Codes y Contreras (2022) que el conocimiento especializado del profesor de matemáticas es carácter no universal, dinámico y se encuentra en constante evolución. Además, no está exento de valores sociales, culturales y educativos.

En este orden de ideas, se puede concluir que los subdominios que más se evidenciaron son el KoT, KMT, KFLM y KMLS. Dentro del dominio KMLS, se logró identificar conocimiento en las diferentes categorías que dan cuenta del Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas que tienen los profesores y que les permite estructurar su actividad en el aula. Como resultado de esta investigación se resalta el vínculo de este subdominio con el KoT, KFLM y KMT. En este sentido y teniendo en cuenta a Codes y Contreras (2022) el Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas dota los conocimientos sobre los cuales el profesor hace las elecciones de estrategias, actividades,

materiales y recursos para llevar a cabo su práctica en el aula. También, al realizar estas elecciones tienen en cuenta fortalezas y dificultades que pueden presentar sus estudiantes, las formas de interacción con el contenido matemático, los aspectos emocionales y las teorías que les permitan promover un mayor aprendizaje en sus estudiantes. Del subdominio KMLS Julia evidenció todas las categorías de conocimiento, mientras que Alan no evidenció la categoría de *Resultados de Aprendizajes Esperados*.

Dentro del dominio Didáctico, también se resalta el subdominio KFLM como uno de mayor predominancia. Considerando que, lo que conoce Julia y Alan sobre la forma de interacción con un contenido matemático, así como lo que conocen sobre las teorías de aprendizaje, las fortalezas y dificultades y los aspectos emocionales del aprendizaje de las matemáticas tiene influencia significativa en el diseño y elección de las actividades, las tareas y recursos que utilizan en su práctica. Se resalta en esta investigación el vínculo de este subdominio con el KMT, KMLS, KoT y KPM. Del subdominio KFLM Ambos profesores evidenciaron todas las categorías de conocimiento.

También se tuvo evidencia del KMT, el cual permitió comprender el conocimiento de los profesores sobre la enseñanza de las matemáticas. Se evidenció cómo el conocimiento de recursos de enseñanza y de estrategias, técnicas tareas y ejemplos permite a los profesores estructurar su práctica en el aula y desarrollar conocimiento matemático teniendo en cuenta el contenido a enseñar, las características del aprendizaje de sus estudiantes y lo que busca alcanzar con ellos. Esta investigación pone en evidencia el vínculo estrecho entre este subdominio con el KFLM, considerando que permiten comprender e interpretar el conocimiento del profesor en la enseñanza de la estructura multiplicativa a través de la resolución de problemas desde dos perspectivas: como contenido a aprender y como contenido a enseñar. También se evidenció su vínculo con subdominios como KMLS, KPM y KoT. Del subdominio KMT ninguno de los profesores evidenció la categoría *Teorías de Enseñanza*.

Dentro del dominio del Conocimiento Matemático, el KoT es uno de los que más evidencian los profesores, resulta lógico considerando que, el conocimiento mínimo que requiere un profesor de matemáticas es el conocimiento de los contenidos. Además, Según Escudero et al. (2017) podría considerarse a este subdominio como la base en la cual se

relacionan y organizan los demás conocimientos del profesor. Se evidencia en esta investigación la relación existente entre el KoT con subdominios como el KMT, KMLS y KFLM. En el subdominio KoT ninguno de los profesores evidenció la categoría de *Procedimientos*.

También, se presentaron algunas evidencias del KPM en la categoría de *la Práctica de Resolver Problemas*, considerando que, este subdominio permitió a los profesores tomar decisiones en la forma de trabajar el contenido, así como organizar y validar los procesos de sus estudiantes en la actividad matemática. Se resalta el vínculo entre este subdominio con los subdominios KMT, KFLM y KMLS, dejando en evidencia que los profesores conocen y utilizan la Resolución de Problemas como una *estrategia de enseñanza* que le permite a los estudiantes darle sentido y significado al contenido matemático que están aprendiendo. También reconocieron que sus estudiantes pueden recurrir a diferentes heurísticas para darle solución a los problemas y que algunos aspectos de la vida cotidiana de los estudiantes despiertan el interés y la motivación por el aprendizaje matemático con situaciones que les permitan sentirse identificados.

Se logra evidenciar que la Resolución de Problemas Matemáticos como estrategia de enseñanza permite a los docentes desarrollar conocimientos sobre la estructura multiplicativa, permitiendo establecer diversas relaciones de conocimiento entre las diferentes categorías del modelo MTSK que dan cuenta del conocimiento especializado del profesor en su intención de enseñanza. Es importante resaltar que, la Resolución de Problemas en las dos planeaciones es entendida como un recurso de enseñanza para propiciar el aprendizaje y favorecerlo. Como resultado de lo anterior, debemos resaltar la riqueza y variedad de las relaciones evidenciadas, y consideramos que los profesores se identifican fuertemente con la Resolución de Problemas y la consideran fundamental para fomentar el aprendizaje de sus estudiantes. De acuerdo con Fuenlabrada (2009) una enseñanza que busca propiciar el razonamiento como parte del proceso de aprendizaje considera la Resolución de Problemas como recurso didáctico para adquirir conocimiento. Se ha evidenciado que cuando el profesor selecciona tareas y actividades que involucran a los estudiantes en la Resolución de Problemas y los anima a articular su pensamiento a través de preguntas, estimula su reflexión y logra avances significativos en la comprensión del aprendizaje matemático (Carrillo-Yáñez et al., 2019).

Se debe reconocer que la resolución de problemas es una parte integral e importante en cualquier aprendizaje matemático y no debe ser uno de los fines de la enseñanza sino el medio por el cual se logra el aprendizaje. Se deja en evidencia que no sólo se debe pensar en la actividad de resolver problemas como un contenido más del currículo, sino que se debe considerar como uno de los vehículos principales cuando se busca conseguir aprendizajes matemáticos significativos (MEN, 1998; Godino et al., 2003; Blanco, 2015; SEP, 2017). Del subdominio KPM ninguno de los profesores evidenció las categorías *La Práctica de Definir* y *La Práctica de Demostrar*, consideramos que esto se debe al instrumento de recolección de datos, es posible que, en otros escenarios como la observación de clase sea posible evidenciar categorías como estas.

Por otra parte, el evidenciar relaciones entre los distintos subdominios del conocimiento especializado del profesor se contribuye al esfuerzo de las diferentes investigaciones por comprender la naturaleza de tal conocimiento y cómo este se evidencia en su intención de enseñanza en la Educación Básica Primaria. Esto permite enriquecer la literatura sobre dichas relaciones y siendo un ejemplo que brinda elementos conceptuales, procedimentales y didácticos como insumos y herramientas para propuestas futuras, no solo para los docentes en formación, sino también para la formación de profesores en servicio aportando en el desarrollo profesional de su práctica en diferentes ámbitos y niveles. También, aporta en la generación de conciencia en la comunidad educativa en general, en relación con que el profesor de matemáticas tiene un conocimiento profesional específico que va más allá del conocimiento disciplinar y que es indispensable para estructurar su actividad en el aula. En este sentido, resaltamos la importancia de la Resolución de Problemas en el aula de matemáticas y pretendemos con este trabajo de investigación generar conciencia sobre su importancia como actividad vertebradora e indispensable, aportando conocimientos que promuevan su uso.

Considerando que el concepto de operaciones básicas es un tema presente en la matemática escolar como en la formación inicial de profesores, los resultados de esta investigación y de estudios como este sobre el conocimiento matemático y didáctico del profesor, son potencialmente útiles para los formadores de profesores en el diseño de tareas en los cursos de formación. Esto fue probado en la investigación de Pascual et al., (2021) donde se indica que el identificar el conocimiento especializado de los profesores permite

reflexionar sobre los contenidos que deben incluirse en los programas de formación de profesores y de cómo el educador de docentes podría mediar entre el contenido y los futuros maestros

Finalmente, los resultados de esta investigación permiten evidenciar que la planeación de clase representa un escenario que proporciona oportunidades para estudiar el conocimiento especializado de los profesores de matemáticas, permitiendo tener un panorama de los posibles conocimientos que posee y brindando la oportunidad para profundizar y explorar en ellos (Flores et al., 2013; Pacheco-Muñoz et al., 2022; Paternina-Borja y Juárez-Ruíz, 2023; Tascón-Cardona y Juárez- Ruíz, 2024).

Referencias

- Aguilar-González, A., Muñoz-Catalán, C., Carrillo, J., y Rodríguez-Muñiz, J. L. (2018). ¿Cómo establecer relaciones entre conocimiento especializado y concepciones del profesorado de matemáticas? *PNA*, 13(1), 41-61. <https://doi.org/10.30827/pna.v13i1.7944>
- Ball, D. L., Thames, M. H., y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407. <https://doi.org/10.1177/0022487108324554>
- Blanco, L. (2015) Resolución de problemas de matemáticas: aspectos cognitivos y afectivos. En L. Blanco, J. Cárdenas, y A. Caballero, (Eds.). *La resolución de problemas matemáticos en la formación inicial de profesores de primaria* (pp. 11-19). Universidad de Extremadura.
- Blanco, L., y Pino, J. (2015). ¿Qué entendemos por problema de matemáticas? En L. Blanco, J. Cárdenas y A. Caballero, (Eds.). *La resolución de problemas matemáticos en la formación inicial de profesores de primaria* (pp. 123-138). Universidad de Extremadura.
- Cárdenas, J., y Blanco, L. (2015). La resolución de problemas de matemáticas como contenido en el currículo de primaria. En L. Blanco, J. Cárdenas y A. Caballero, (Eds.), *La resolución de problemas matemáticos en la formación inicial de profesores de primaria* (pp. 23-37). Universidad de Extremadura.
- Carrillo-Yáñez, J., Contreras, L.C., y Flores, P. (2013). Un modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.). *Investigación en Didáctica de la Matemática. Libro homenaje a Encarnación Castro* (pp. 193-200). Comares.
- Carrillo-Yáñez, J., Flores-Medrano, P., y Rojas, N. (2015a). Conocimiento Especializado de un Profesor de Matemáticas de Educación Primaria al Enseñar los Números Racionales. *Boletín de Educación Matemática*, 29(51),143-166. <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=291238322009>
- Carrillo-Yáñez, J., Climent, N., Contreras, L., Escudero-Ávila, D., Flores-Medrano, E., y Montes, M. (2015b). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas

- detectado en la resolución del problema de las cuerdas. *PNA*, 10(1), 53-77.
<https://redined.educacion.gob.es/xmlui/handle/11162/112769>
- Carrillo-Yáñez, J., Contreras, L., Climent, N., Escudero, D., Flores-Medrano, E., y Montes, M. (2016). *Didáctica de las Matemáticas para maestros de Educación Primaria, colección: Didáctica y Desarrollo*. Paraninfo, SA.
- Carrillo-Yáñez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-Gonzales, A., Ribeiro, M., y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 20(3), 236-253.
<https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981>
- Carrillo-Yáñez, J., y Martín, J. (2019). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas como fruto del cambio. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 100, 147-152. http://sinewton.es/revista_numeros/100/
- Carrillo-Yáñez, J., Climent, N., Contreras, L., y Montes, M. (2019). Mathematics teachers' specialised knowledge in managing problem-solving classroom tasks. En P. Felmer, P. Liljedahl y B. Koichu (Eds.), *Problem Solving in Mathematics Instruction and Teacher Professional Development* (pp. 297-316). Springer.
https://doi.org/10.1007/978-3-030-29215-7_16
- Castro, E. (2008). Resolución de Problemas. Ideas, tendencias e influencias en España. En M. Camacho y L. Blanco (Eds.). *Investigación en Educación Matemática*. Actas del XII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en educación Matemática (pp. 113-140). SEIEM.
- Climent, N. y Montes, M. (2022). El modelo MTSK: Antecedentes y estructura. En J. Carrillo, M. Montes y N. Climent (Eds.). *Investigación sobre el conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): 10 años de camino* (pp. 27-34). Dykinson.
- Cohen, L., Manion, L., y Morrison, K. (2007). *Research methods in education*. Routledge.
- Codes, M. y Contreras, L. (2022). El Conocimiento de las Características del Aprendizaje Matemático. En J. Carrillo, M. Montes y N. Climent (Eds.). *Investigación sobre el conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): 10 años de camino* (pp. 95-108). Dykinson.

- Contreras, L., Montes, M., Muñoz-Catalán, M., y Joglar, N. (2017). Fundamentos teóricos para conformar un modelo de conocimiento especializado del formador de profesores de matemáticas. En J. Carrillo-Yáñez y L. Contreras (Eds.). *Avances, utilidades y retos del modelo MTSK. Actas de las III Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 11-25). <https://cdn.congresse.me/j2jtromysv6jzla78f2h533qw67#page=11>
- Contreras, L. C. (2021). Una aproximación a un modelo de conocimiento del formador de profesores de matemáticas. *Revista Venezolana De Investigación En Educación Matemática*, 1(1), e202101. <https://doi.org/10.54541/reviem.v1i1.12>
- D'Amore, B. (2011). *Didáctica de la Matemática* (A. Balderas, Trad.). Cooperativa Editorial Magisterio. (Obra original publicada en 1999)
- Delgado-Rebolledo, R., y Zakaryan, D. (2020). Relationships between the knowledge of practices in mathematics and the pedagogical content knowledge of a mathematics lecturer. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 18(3), 567-587. <https://doi.org/10.1007/s10763-019-09977-0>
- Delgado-Rebolledo, R. y Espinoza-Vásquez, G. (2021). ¿Cómo se relacionan los subdominios del conocimiento especializado del profesor de matemáticas? En J.G: Moriel-Junior (Ed.). *Anais do V Congresso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 288-295). Congresseme
- Delgado-Rebolledo, R., Zakaryan, D., y Alfaro, C. (2022). El Conocimiento de la Práctica Matemática. En J. Carrillo, M. Montes y N. Climent (Eds.). *Investigación sobre el conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): 10 años de camino* (pp. 27-34). Dykinson.
- Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales* (2ª ed.). [M. Vega Restrepo, Trad.]. Universidad del Valle, Instituto de educación y pedagogía, GEM (Obra original publicada en 1995).
- Escudero-Ávila, D., Flores-Medrano, E., y Carrillo-Yáñez, J. (2012). *El conocimiento especializado del profesor de matemáticas*. En L. Sosa, E. Aparicio y F. Rodríguez (Eds.). *Memoria de la XV Escuela de Invierno en Matemática Educativa* (pp. 35-42). Ciudad de México: Red Cimates. <http://funes.uniandes.edu.co/16540/>

- Escudero, D. (2015). *Una caracterización del conocimiento didáctico del contenido como parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas de secundaria*. [Tesis doctoral, Universidad de Huelva]. Biblioteca Universitaria Huelva. <http://hdl.handle.net/10272/11456>
- Escudero-Ávila, D., Gomes Moriel, J., Muñoz-Catalán, M.C., Flores-Medrano, E., Flores, P., Rojas, N. y Aguilar, A. (2016). Aportaciones metodológicas de investigaciones con MTSK. En J. Carrillo, L.C. Contreras y M. Montes (Eds.). *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 60-68). SGSE.
- Escudero-Ávila, D., Vasco, D., y Aguilar-González, Á. (2017). Relaciones entre los dominios y subdominios del conocimiento especializado del profesor de matemáticas. Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (Eds.). *Actas del VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática* (pp. 83-91). FESPM <http://funes.uniandes.edu.co/19810/>
- Escudero-Ávila, D. (2022). Conocimiento de las Características del Aprendizaje Matemático. En J. Carrillo, M. Montes y N. Climent (Eds.). *Investigación sobre el conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): 10 años de camino* (pp. 83-94). Dykinson.
- Espinoza-Vásquez, G., Zakaryan, D., y Carrillo Yáñez, J. (2018). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas en el uso de la analogía en la enseñanza del concepto de función. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 21(3), 301-324. <https://doi.org/10.12802/relime.18.2133>
- Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D. y Aguilar, A. (2013). Oportunidades que brindan algunos escenarios para mostrar evidencias del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 275-282). SEIEM. <https://www.seiem.es/pub/actas/index.shtml>
- Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Montes, M., Aguilar, Á., y Carrillo, J. (2014). Nuestra modelación del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, el MTSK. En Á. Aguilar, E. Carmona, J. Carrillo, L. C. Contreras, N. Climent, D. Escudero-Ávila, E. Flores-Medrano, P. Flores, J. L. Huitrado, M. Montes, M. Muñoz-Catalán, N. Rojas, L. Sosa, D. Vasco, y D. Zakaryan (Eds.), *Un marco teórico para*

- el Conocimiento especializado del Profesor de Matemáticas* (1st ed., pp. 71–93). Universidad de Huelva. <https://doi.org/10.13140/2.1.3107.4246>
- Flores-Medrano, E. (2015). *Una profundización en la conceptualización de elementos del modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK)* [Tesis doctoral, Universidad de Huelva, España]. Repositorio Institucional de la Universidad de Huelva. <http://hdl.handle.net/10272/11503>
- Flores-Medrano, E. (2022). Conocimiento de la estructura de las matemáticas. En J. Carrillo, M. Montes y N. Climent (Eds.). *Investigación sobre el conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): 10 años de camino* (pp. 47-57). Dykinson.
- Fuenlabrada, I. (2009). *¿Hasta el 100? ¡No! ¿Y las cuentas? Tampoco. Entonces ¿Qué?* Dirección General de Desarrollo Curricular SEP.
- Godino, J. D., Batanero, C., y Vicenç, F. (2003). Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. En J. D. Godino, C. Batanero y F. Vicenç (Eds.). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros* (pp. 7-121). Departamento de Didáctica de la Matemática Universidad de Granada.
- Guba, E., y Lincoln, Y. (2002). Paradigmas en competencia en la investigación cualitativa. En C. Denman y J.A. Haro (Eds.). *Por los rincones. Antología de métodos cualitativos en la investigación social* (pp. 113-145). El colegio de sonora.
- Hernández-Sampieri, R. y Mendoza, C. (2018). *Metodología de la investigación* (6ta ed.). McGraw-Hill Interamericana.
- Lucio, R. (1989). Educación y pedagogía, enseñanza y didáctica: diferencias y relaciones. *Revista de la Universidad de la Salle*, 1989(17), 35-46.
- Mazibe, E.N., Coetzee, C., y Gaigher, E. A. (2020). Comparison Between Reported and Enacted Pedagogical Content Knowledge (PCK) About Graphs of Motion. *Research in Science Education* 50, 941–964. <https://doi.org/10.1007/s11165-018-9718-7>
- Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos Curriculares para Matemáticas*.
- Muñoz-Catalán, M. C., Contreras, L. C., Carrillo-Yáñez, J., Rojas, N., Montes, M. Á., y Climent, N. (2015). Conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): un modelo analítico para el estudio del conocimiento del profesor de matemáticas. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 18 (3), 589 – 605. <https://gaceta.rsme.es/abrir.php?id=1294>

- Muñoz-Catalán, M. C. y Monteiro (2016). Afrontando la controversia: Discusión sobre la naturaleza de los elementos metodológicos en la investigación en Educación. *Omnia, Revista interdisciplinaria de ciencias e Artes* 4, 23-30. <https://idus.us.es/handle/11441/49766>
- Orrantía, J. (2006). Dificultades en el aprendizaje de las matemáticas: una perspectiva Evolutiva. *Rev. Psicopedagogía*. 23(71). 158-180. <http://pepsic.bvsalud.org/pdf/psicoped/v23n71/v23n71a10.pdf>
- Otero-Valega, K., Juárez-Ruiz, E., y Zakaryan, D. (2023). Relaciones entre subdominios de conocimiento de un profesor de matemáticas sobre resolución de problemas aditivos. *Revista Venezolana De Investigación En Educación Matemática*, 3(1), e202318. <https://doi.org/10.54541/reviem.v3i1.92>
- Pacheco-Muñoz, E., Juárez-Ruiz, E. y Flores-Medrano, E. (2022). Conocimiento didáctico del contenido en la enseñanza de la localización en el plano cartesiano. *Investigación e Innovación en Matemática Educativa*. <https://doi.org/10.46618.iime143>
- Pascual, M., Montes, M., y Contreras, L. (2021). The Pedagogical Knowledge Deployed by a Primary Mathematics Teacher Educator in Teaching Symmetry. *Mathematics*, 9, 1241. <https://doi.org/10.3390/math9111241>
- Paternina-Borja, O., y Juárez-Ruiz, E. (2023). Planeación de clase para enseñar simetrías: escenario para caracterizar el conocimiento didáctico de una profesora de matemáticas. *Revista LASALLISTA de Investigación*, 20(1), 67-82. <https://doi.org/10.22507/rli.v20n1a5>
- Polya, G., (1965). *Cómo plantear y resolver problemas* (J. Zugazagoitia, Trad., 2.^a ed.). Trillas. (Trabajo original publicado en 1957).
- Reyes, A. y Sosa, L. (2017). Caracterización del conocimiento didáctico de la razón como un significado de la fracción. El caso de un profesor en formación inicial de primaria. En Serna, Luis Arturo (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 1218-1226). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Ribeiro, C. (2009). Conhecimento Matemático para Ensinar: uma experiência de formação de professores no caso da multiplicação de decimais. *Boletim de Educação Matemática*, 22 (34), 1-26. <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=291221876002>

- Roca, C. (2020). Teoría y elección metodológica en la investigación. En: C. Lopezosa, J. Díaz-Noci y L. Codina (Eds.). *Anuario de Métodos de Investigación en Comunicación Social* (pp.01-03). DigiDoc-Universitat Pompeu Fabra.
- Sánchez. J. (2013). Paradigmas de investigación educativa: de las leyes subyacentes a la modernidad reflexiva. *Entelequia: revista interdisciplinar*, 16 (101), 91-102. <https://www.eumed.net/es/revistas>
- Santos, L. (2002). A investigação e os seus implícitos: contributos para uma discussão. En P. Arnal, J. Ramon, R. Escolano, J. Gairin y L. Blanco (Eds.). *Actas del VI Simposio de la SEIEM* (157-170). Logroño. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/libro?codigo=3588>
- Santos-Trigo, M. (2009). Innovación e investigación en educación matemática. *Innovación Educativa*, 9(46), 5-13. <https://www.redalyc.org/pdf/1794/179414894002.pdf>
- Scheiner, T., Montes, M. A., Godino, J. D., Carrillo-Yáñez, J., y Pino-Fan, L. R. (2019). What makes mathematics teacher knowledge specialized? Offering alternative views. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 17(1), 153-172. <https://doi.org/10.1007/s10763-017-9859-6>
- Schoenfeld, A.H., Sriraman, B., y English, L. (2010). Theories of mathematics education: seeking new frontiers. *ZDM Mathematics Education* 42, 503–506. <https://doi.org/10.1007/s11858-010-0268-3>
- Schoenfeld, A. H. (2013). Reflections on problem solving theory and practice. *The Mathematics Enthusiast*, 10(1), 9-34. <https://doi.org/10.54870/1551-3440.1258>
- Secretaría de Educación Pública. (2017). *Aprendizajes clave para la educación integral*. SEP.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational researcher*, 15(2), 4-14. <https://doi.org/10.3102/0013189X015002004>
- Sosa, L. y Reyes A. (2022). Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas. En J. Carrillo, M. Montes y N. Climent (Eds.). *Investigación sobre el conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): 10 años de camino* (pp. 71-82). Dykinson.
- Stake, R. E. (1998). *Investigación con estudio de casos*. Ediciones Morata.
- Tascón Cardona, L., y Juárez Ruíz, E. (2024). RELACIONES DE CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS EN LA ENSEÑANZA

DE LA ESTRUCTURA MULTIPLICATIVA. *UNIÓN - REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA*, 20(70).

<https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/1477>

- Vasco, D., y Climent, N. (2021). The specialised knowledge and beliefs of two university lecturers in linear algebra. En S. Zehetmeier, D. Potari y M. Ribeiro (Eds.), *Professional Development and Knowledge of Mathematics Teachers* (pp. 104-123). Routledge.
- Vasco, D. y Moriel, J. (2022). Conocimiento de los Temas. En J. Carrillo, M. Montes y N. Climent (Eds.). *Investigación sobre el conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): 10 años de camino* (pp. 35-46). Dykinson.
- Zakaryan, D. y Ribeiro, M. (2016). Conocimiento de la enseñanza de los números racionales: una ejemplificación de relaciones. *Zetetiké*, 24(3), 301-321.
<http://dx.doi.org/10.20396/zet.v24i3.8648095>

Anexos

Anexo A: Descriptores de conocimiento

| DOMINIO DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO | | | |
|---|--|---|--|
| MK | | | |
| Subdominio | Categoría | Descriptor General | Preguntas |
| CONOCIMIENTO DE LOS TEMAS. (KoT) | Definiciones, propiedades y fundamentos. | Conoce la definición del concepto de multiplicación y división en el campo numérico de los números naturales. | ¿Qué es una operación de multiplicación? ¿Qué es una operación división? |
| | | Conoce las propiedades de la estructura multiplicativa en el campo numérico de los números naturales. | ¿Cuáles son las propiedades de la operación de multiplicación? ¿Cuáles son las propiedades de la operación de división? ¿Qué relación existe entre las operaciones de multiplicación y división? |
| | | Conoce los tipos de problemas multiplicativos: razón, comparación y combinación. | ¿Qué es una situación problemática? ¿Qué tipo de problemas multiplicativos conoce? ¿Cuáles son sus características? |

| | | | |
|--------------------|-------------------------------|---|---|
| | Fenomenología y aplicaciones. | Conoce diferentes situaciones en las que se puede aplicar los conceptos de multiplicación y división. | ¿En qué situaciones de vida cotidiana los estudiantes pueden aplicar la resolución de problemas multiplicativos? |
| | Registros de representación. | Conoce distintas representaciones que se pueden utilizar para representar los objetos matemáticos de multiplicación y división en el campo numérico de los números naturales. | ¿Qué registros de representación se puede emplear al momento de representar los objetos matemáticos de multiplicación y división en la enseñanza de la estructura multiplicativa a través de la resolución de problemas? |
| | Procedimientos. | Conoce los elementos de los algoritmos de la multiplicación y división y técnicas del cálculo en el campo numérico de los números naturales. | ¿Conoce el algoritmo tradicional de la multiplicación? ¿Cuáles son sus elementos? ¿Conoce el algoritmo tradicional de la división? ¿Cuáles son sus elementos? ¿Cuáles son sus técnicas de cálculo? |
| CONOCIMIENTO DE LA | Conexiones de simplificación. | Conoce la relación de la estructura multiplicativa con contenidos de menor complejidad. | ¿Qué conocimientos previos se articulan con el aprendizaje de la estructura multiplicativa? ¿Cuáles son los conocimientos previos que deben tener los estudiantes para lograr darle solución a los problemas planteados? |

| | | | |
|--|-------------------------------|---|---|
| ESTRUCTURA MATEMÁTICA. (KSM) | Conexiones de complejización. | Conoce la relación de la estructura multiplicativa con contenidos de mayor complejidad. | ¿Cuáles son los contenidos para los que la resolución de problemas multiplicativos servirá de base en su aprendizaje? ¿Cuáles son los conocimientos posteriores con los que se articulan con el aprendizaje de la estructura multiplicativa? |
| | Conexiones transversales. | Conoce diferentes elementos o contenidos matemáticos con características en común que se relacionen con la estructura multiplicativa. | ¿Qué elementos matemáticos son transversales o se relacionan en el proceso de enseñanza aprendizaje de la estructura multiplicativa a través de la resolución de problemas? |
| | Conexiones auxiliares. | Conoce conexiones auxiliares o elementos matemáticos útiles para el aprendizaje de las operaciones de multiplicación y división. | ¿Qué elementos u objetos matemáticos son útiles o se relacionan con los conceptos de multiplicación y división? |
| Conocimiento de la practica KPM | La práctica de demostrar. | Conoce los métodos y las formas en las que se pueden realizar demostraciones relacionadas con el tema de interés. | ¿Realiza verificaciones, explicaciones y/o comunicación de demostraciones? ¿Considera importante trabajar la demostración con estudiantes de nivel primaria? |
| | La práctica de definir. | Conoce las características y atributos que deben cumplir las definiciones de los conceptos de multiplicación y división: jerarquía, no circularidad, no | ¿De qué forma define el concepto de multiplicación de números naturales? ¿De qué forma define el concepto de división de números naturales? |

| | | | |
|---|---|--|--|
| | | ambigüedad, no contradicción, equivalencia y elegancia. | ¿Considera importante trabajar la definición con estudiantes de nivel primaria? |
| | La práctica de resolver problemas. | Conoce que una de las formas de producir en matemáticas es a través de la resolución y formulación de problemas. | <p>¿Conoce las estrategias que se utilizan en la resolución de problemas?</p> <p>¿Conoce procesos asociados a la resolución de problemas como forma de producir en matemáticas?</p> <p>¿Conoce diferentes heurísticas que se utilizan en la resolución de problemas?</p> |
| | Conocimiento del papel del lenguaje matemático. | Conoce el papel del lenguaje matemático y el papel de los símbolos en la enseñanza de la multiplicación y división a través de la resolución de problemas. | <p>¿Qué importancia tiene el uso de un lenguaje matemático en la enseñanza de las operaciones de multiplicación y división de números naturales?</p> <p>¿Qué importancia tiene el uso de símbolos en las matemáticas y su aprendizaje?</p> |
| DOMINIO DEL CONOCIMIENTO DIDACTICO DEL CONTENIDO (PCK) | | | |
| Subdominio | Categoría | Descriptor General | Preguntas |

| | | | |
|--|--|--|--|
| <p>CONOCIMIENTO DE LAS CARACTERÍSTICAS DEL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS (KFLM)</p> | <p>Aspectos emocionales del aprendizaje de las matemáticas.</p> | <p>Conoce aspectos emocionales de los estudiantes que pueden influir en el aprendizaje de la estructura multiplicativa y de las matemáticas.</p> | <p>¿Qué aspectos emocionales pueden influir en el aprendizaje de la estructura multiplicativa? ¿Cómo los toma en cuenta en el proceso de enseñanza de la estructura multiplicativa a través de la resolución de problemas?</p> <p>¿Cómo involucra esos aspectos en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la estructura multiplicativa a través de la resolución de problemas?</p> |
| | | <p>Conoce aspectos de la vida cotidiana que tienen influencia en el interés, la motivación y las expectativas en los estudiantes para aprender las operaciones de multiplicación y división.</p> | <p>¿Qué aspectos de la vida cotidiana despiertan el interés, la motivación y las expectativas de los estudiantes al momento de aprender las operaciones de multiplicación y división a través de la resolución de problemas?</p> <p>¿Cómo involucra esos aspectos en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la estructura multiplicativa a través de la resolución de problemas?</p> |
| | <p>Fortalezas y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas.</p> | <p>Conoce las dificultades que pueden presentar los estudiantes al momento del aprendizaje de las operaciones de multiplicación y división.</p> | <p>¿Qué dificultades considera que podrían presentar sus estudiantes al momento de resolver problemas multiplicativos?</p> <p>¿Qué estrategias utilizaría para disminuir esas dificultades?</p> |
| | | <p>Conoce las fortalezas que pueden presentar los estudiantes al momento</p> | <p>¿Qué fortalezas pueden presentar los estudiantes al momento del aprendizaje</p> |

| | | | |
|--|---|--|---|
| | | del aprendizaje de las operaciones de multiplicación y división. | de la resolución de problemas multiplicativos? ¿Qué estrategias utiliza para potencializar las fortalezas que presentan los estudiantes en el aprendizaje de la estructura multiplicativa a través de la resolución de problemas? |
| | | Conoce los errores que pueden presentar los estudiantes al momento de aprendizaje de las operaciones de multiplicación y división. | ¿Cuáles son los posibles errores que pueden cometer los estudiantes al momento del aprendizaje de la resolución de problemas multiplicativos? ¿Qué estrategias utilizaría para disminuir esos errores? |
| | Formas de interacción con un contenido matemático | Conoce los procedimientos convencionales o no convencionales que utilizan los estudiantes en el aprendizaje de las operaciones de multiplicación y división. | ¿Conoce los procedimientos convencionales o no convencionales que utilizan los estudiantes al momento del aprendizaje de la resolución de problemas multiplicativos? ¿Cómo los utiliza en la enseñanza de la resolución de problemas multiplicativos? ¿Cuál es la forma en la que crees que tus estudiantes abordarán las tareas? |

| | | | |
|--|---|--|---|
| | | <p>Conoce las estrategias convencionales o no convencionales que utilizan los estudiantes en el aprendizaje de las operaciones de multiplicación y división</p> | <p>¿Conoce las estrategias convencionales o no convencionales que utilizan los estudiantes al momento del aprendizaje a través de la resolución de problemas multiplicativos?</p> <p>¿Cómo las utiliza en el proceso de enseñanza de la resolución de problemas multiplicativos?</p> <p>¿Cuáles son las estrategias convencionales o no convencionales que considera llegarían a utilizar los estudiantes al momento de resolver problemas multiplicativos?</p> |
| | Teorías de aprendizaje de las matemáticas | <p>Conoce teorías formales en Educación Matemática o de la Resolución de Problemas que se puedan utilizar en el diseño de oportunidades para el aprendizaje de las operaciones de multiplicación y división.</p> | <p>¿En el diseño de la planeación tuvo en cuenta alguna teoría de aprendizaje de las matemáticas?</p> <p>¿Por qué le pareció relevante utilizar esa teoría?</p> |
| | | <p>Conoce formas de enseñanza que provengan de la intuición o experiencia y cómo pueden aplicarse en el diseño de oportunidades en el aprendizaje de las operaciones de multiplicación y división.</p> | <p>¿En su planeación de clase utilizó alguna teoría o método personal que potencialice la enseñanza de la estructura multiplicativa a través de la resolución de problemas?</p> |

| | | | |
|--|--|---|--|
| <p>CONOCIMIENTO DE LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS.</p> <p>(KMT)</p> | <p>Teorías de la enseñanza de las matemáticas.</p> | <p>Conoce teorías formales de enseñanza en Educación Matemática que se pueden utilizar en el proceso de enseñanza de las operaciones de multiplicación y división a través de la resolución de problemas.</p> | <p>¿En su planeación de clase tuvo en cuenta alguna teoría de enseñanza de las matemáticas?</p> <p>¿Por qué le pareció relevante utilizar esa teoría?</p> |
| | | <p>Conoce el modelo educativo de la Institución donde labora y lo articula en el proceso de enseñanza de las operaciones de multiplicación y división.</p> | <p>¿Cuál es el modelo educativo de la institución donde labora?</p> <p>¿Cómo utiliza dicho modelo educativo en la enseñanza de la resolución de problemas de tipo multiplicativo?</p> |
| | <p>Recursos de enseñanza materiales y virtuales.</p> | <p>Conoce recursos didácticos tanto virtuales como físicos para la enseñanza de las operaciones de multiplicación y división.</p> | <p>¿Cuáles recursos didácticos, tanto virtuales como físicos utiliza para la enseñanza de la estructura multiplicativa a través de la resolución de problemas?</p> |
| | | <p>Conoce las potencialidades y las limitaciones de los recursos didácticos tanto físicos como virtuales que se utilizan en la enseñanza de las operaciones de multiplicación y división</p> | <p>¿Qué potencialidades o limitaciones pueden llegar a presentar los recursos didácticos que utiliza?</p> |
| | | <p>Conoce la forma en la que influyen los recursos físicos como virtuales en el proceso de enseñanza de estructura multiplicativa.</p> | <p>¿Cómo influyen en sus estudiantes y en su aprendizaje los recursos didácticos que utiliza en la enseñanza de la estructura multiplicativa a través de la resolución de problemas?</p> |

| | | | |
|--|---|--|--|
| | Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos. | <p>Conoce y aplica diferentes estrategias y técnicas en el proceso de enseñanza de las operaciones de multiplicación y división a través de la resolución de problemas</p> | <p>¿Qué estrategias utiliza para la enseñanza de la resolución de problemas multiplicativos?</p> <p>¿Qué técnicas utiliza para la enseñanza de la resolución de problemas multiplicativos?</p> <p>¿Por qué considera importante utilizar dichas estrategias y técnicas?</p> |
| | | <p>Conoce tareas matemáticas en la enseñanza de las operaciones de multiplicación y división que potencializan el aprendizaje de los estudiantes.</p> | <p>¿Qué tipo de tareas implementa en la enseñanza de la estructura multiplicativa a través de la resolución de problemas?</p> <p>¿Los problemas planteados les permitirán a los estudiantes construir nuevos conocimientos o solo aplicarán conocimientos adquiridos?</p> <p>¿Consideras que esos problemas son interesantes para tus estudiantes? ¿Por qué?</p> <p>¿Qué le hizo decidirse por esas situaciones problemas?</p> |

| | | | |
|---|--|---|--|
| | | <p>Conoce ejemplos y contraejemplos que pueda utilizar en la enseñanza de las operaciones de multiplicación y división, así como sus posibles limitaciones y obstáculos.</p> | <p>¿Qué ejemplos y contraejemplos utiliza para la enseñanza de la resolución de problemas multiplicativos?</p> <p>¿Qué limitaciones u obstáculos pueden presentar esos ejemplos y contraejemplos que utiliza en la enseñanza de la resolución de problemas multiplicativos?</p> |
| <p>CONOCIMIENTO DE LOS ESTANDARES DEL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS. (KMLS)</p> | <p>Resultados de aprendizajes esperados.</p> | <p>Conoce los estándares básicos de competencias en matemáticas que deben alcanzar los estudiantes en el proceso de aprendizaje de las operaciones de multiplicación y división y todo lo relacionado con documentos de política pública.</p> | <p>¿Qué documentos de política pública tuvo en cuenta para realizar la planeación de clase?</p> <p>¿En qué estándares básicos de competencias matemáticas se apoyó para su planeación de clase sobre la resolución de problemas multiplicativos?</p> |
| | <p>Nivel esperado del desarrollo conceptual o procedimental.</p> | <p>Conoce los contenidos matemáticos curriculares y el nivel de desarrollo procedimental y conceptual que deben alcanzar los estudiantes en la enseñanza de la Educación Primaria.</p> | <p>¿Qué contenidos del pensamiento numérico se enseñan en la educación primaria?</p> <p>¿Qué grado de complejidad deben alcanzar los estudiantes sobre la resolución de problemas multiplicativos?</p> <p>¿Considera que la resolución de problemas multiplicativos es un concepto fundamental en la educación primaria?</p> |
| | | <p>Conoce la secuenciación de los temas con respecto a las operaciones de</p> | <p>¿Qué secuencia sigue la resolución de problemas multiplicativos en la</p> |

| | | | |
|--|---------------------|--|---|
| | Secuencia de temas. | multiplicación y división, teniendo en cuenta los temas anteriores y posteriores y los conocimientos, habilidades y competencias necesarias para las tareas matemáticas. | enseñanza de la educación primaria y como se articulan con la educación secundaria? |
|--|---------------------|--|---|

Anexo B Planeación de clase Propuesta por Julia

PROPUESTA BÁSICA DE FORMATO PARA PLAN DE AULA

DESARROLLO DE ACTIVIDADES DE CLASE, UNIDAD O SECUENCIA PARA EL LOGRO DE METAS DE APRENDIZAJE

(El orden en que se desarrollen estas etapas este sujeto a las decisiones didácticas del docente).

| | | |
|---|---|--------------------------|
| PROFESOR (A): Julia | ÁREA: MATEMÁTICAS. | FECHA: 24/04/2022 |
| PERIODO: | COLEGIO: Baháí Simmons | LUGAR: Jamundí |
| REFERENTES DE CALIDAD | | |
| ESTÁNDARES BÁSICOS DE COMPETENCIAS. | DERECHOS BASICOS DE APRENDIZAJE (DBA). | |
| <ul style="list-style-type: none"> • Resuelvo y formulo problemas cuya estrategia de solución requiera de las relaciones y propiedades de los números naturales y sus operaciones. • Identifico en el contexto de una situación, la necesidad de un cálculo exacto o aproximado y lo razonable de los resultados obtenidos. | <ul style="list-style-type: none"> • Puede estimar el resultado de un cálculo sin necesidad de calcularlo con exactitud. • Resuelve problemas que involucran sumas, restas, multiplicaciones y divisiones con números naturales. • Resuelve problemas de proporcionalidad directa. | |
| ESTRUCTURA DIDÁCTICA | | |
| NOMBRE DE LA ACTIVIDAD: | | |

| | | |
|--|---|-----------------------------|
| TEMAS Y SUBTEMAS: | Uso de las relaciones de tipo multiplicativo. | |
| APRENDIZAJES ESPERADOS: | Se espera que los estudiantes resuelvan situaciones que implican la multiplicación y la división con el fin de determinar la aplicación en situaciones cotidianas. Para esta actividad, se evalúa el análisis que los estudiantes hicieron con respecto a las situaciones y las estrategias de resolución que plantean. | |
| OBJETIVOS DE LA CLASE: | <ul style="list-style-type: none"> • Identificar estructuras de comparación y producto de medidas en problemas de tipo multiplicativo. • Establecer estrategias para la resolución de problemas de tipo multiplicativo. | |
| DESEMPEÑOS: | Propone estrategias para encontrar solución a situaciones problemas que involucran la multiplicación y la división. | |
| | RUTA DE APRENDIZAJE. | |
| MOMENTOS (En cada uno de los siguientes puntos se le solicita ser lo mas detallado y claro posible, incluir evidencia de cada una de las | ACTIVIDAD | TIEMPO (Opcional) |

| | | |
|--|---|--|
| <p>actividades o tareas que se propongan).</p> | | |
| <p>INICIO.</p> | <p>Se muestra la historia de un sujeto que está comprando una cantidad de panes para repartirlos entre su familia, él compra 30 panes y en su familia, contándolo a él son 6 personas, además debe tomar tres buses donde el pasaje cuesta cada uno \$1750. Al final se deben hacer las preguntas.</p> <ul style="list-style-type: none"> • ¿Cuántos panes le corresponden a cada familiar? ¿Cómo lo podemos determinar? • ¿Cuánto dinero gastó en el transporte, si cada uno de los tres pasajes costó \$1.750? y ¿qué debo hacer para saberlo? <p>Posteriormente, los estudiantes discutirán posibles formas de solucionar las situaciones.</p>  | |
| <p>DESARROLLO.</p> | <p>El docente muestra un recurso interactivo por medio del cual se resuelven situaciones problemas que implican multiplicación y división.</p> | |

En el recurso interactivo se muestra a un chef que está preparando macarrones para sus invitados que son 540, al finalizar de cocinar se da cuenta que 12 Kg de macarrones alcanza para 180 platos. Se hace la siguiente pregunta:

1. ¿Para cuántos platos alcanzaría si preparara 36 Kg de macarrones?
540 platos



Siguiendo el recurso interactivo, se muestran problemas donde el estudiante deba utilizar la multiplicación o la división para resolverlos.

2. ¿Cuántas hojas se deben repartir por igual a 54 niños si hay 486 hojas?
Respuesta: 9
3. Si Camilo empacó 35 kg de dulces en una bolsa. ¿Cuántos kg de dulces empacará en 8 bolsas? Respuesta: 280
4. ¿Cuántas bolsas se necesitan para empacar 8640 canicas, si en cada bolsa caben 96 canicas? Respuesta: 90
5. ¿Cuánto habría que pagar por 9 kg de galletas, si cada kilogramo vale 3.900 pesos? Respuesta: 35.100

CIERRE.

Finalmente se deja una tarea, en la que se encuentran con ejercicios donde deben utilizar la multiplicación o la división para determinar la solución.

| | |
|---|--|
| <p>MATERIALES Y RECURSOS UTILIZADOS (FISICOS Y DIGITALES).</p> | <p>Recurso interactivo viajando a casa https://contenidosparaaprender.colombiaaprende.edu.co/G_5/M/M_G05_U01_L03/M_G05_U01_L03_01_01.html Recurso interactivo cocinando con Arturo. https://www.colombiaaprende.edu.co/sites/default/files/files_public/contenidosaprender/G_5/M/M_G05_U01_L03/M_G05_U01_L03_03_02.html# Tv, internet, marcadores, tablero y computador.</p> |
| <p>CONOCIMIENTOS PREVIOS.</p> | <p>Sumas y restas.</p> |

Anexo C Planeación de clase Propuesta por Alan

| NOMBRE DEL DOCENTE: ALAN | ÁREA: MATEMÁTICAS | FECHA: Marzo | GRADO: Tercero |
|---|---|--|---|
| NIVEL: PRIMARIA | PERÍODO ACADÉMICO: Segundo y tercero. | PAÍS: COLOMBIA | TIEMPO TOTAL ESTIMADO EN HORAS: 6.75 |
| Estándares de aprendizaje | | Desempeños | |
| <ol style="list-style-type: none"> 1) Describo, comparo y cuantifico situaciones con números, en diferentes contextos y con distintas representaciones. 2) Utilizo representaciones principales concretas y pictóricas para explicar el valor de posición en el sistema de numeración decimal. 3) Reconozco las propiedades de los números (ser par, ser impar, etc.) y las relaciones entre ellos (ser mayor que, ser menor que, ser múltiplo de, ser divisible por, etc.) 4) Resuelvo y formulo problemas en situaciones aditivas de descomposición y transformación. 5) Utilizo diferentes estrategias de cálculo (especialmente cálculo mental) y estimación para resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas. 6) Identifico regularidades y propiedades de los números utilizando diferentes herramientas de cálculo (calculadora, ábaco, bloques múltiples). | | <p>Resuelve situaciones problemáticas en las que utilice diferentes estrategias para calcular el resultado de multiplicaciones o repartos equitativos.</p> | |

Indicadores de desempeño

Características de pensar y trabajar en matemáticas

Especialización

Números naturales

- Comprender las propiedades conmutativas y asociativas de la suma y usarlas para simplificar los cálculos.
- Reconocer complementos de 100 y complementos de múltiplos de 10 o de 100 (hasta 1000).

Generalización

- Estimar, sumar y restar números naturales de hasta tres cifras (reagrupación de unidades o decenas).
- Comprender y explicar la relación entre multiplicación y división.

Convencimiento

- Comprender y explicar las propiedades conmutativa y distributiva de la multiplicación y utilizarlas para simplificar los cálculos.
- Conocer las tablas de multiplicar del 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 y 10.
- Estimar y multiplicar números naturales mayores que 100 por 2, 3, 4 y 5

Crítico

- Estimar y dividir números naturales mayores que 100 por 2, 3, 4 y 5.
- Reconocer los múltiplos de 2, 5 y 10 (hasta 1000).

| Temas | SECUENCIAS DE ACTIVIDADES SIGNIFICATIVAS (Actividades de apertura, actividades de desarrollo y actividades de evaluación) | Tiempo | Recursos |
|--|--|----------------------|--|
| Unidad 3.6 Multiplicación y división | <p style="text-align: center;">INICIO DEL CURSO ACADÉMICO: 2022-2023</p> <p style="text-align: center;">Semana N° 22: lunes 13 de marzo - viernes 17 de marzo /2023</p> <p style="text-align: center;">OBJETIVO DE APRENDIZAJE:</p> <p>Especialización</p> <ul style="list-style-type: none"> • Al final de la clase los alumnos serán capaces de: • Comprender y explicar la relación entre multiplicación y división. <p>Crítica</p> <ul style="list-style-type: none"> • Comparar y evaluar ideas matemáticas, representaciones o soluciones para identificar ventajas e inconvenientes. <p>CONTENIDOS: Multiplicación y división</p> <p>COGNICIÓN: Comparar y contrastar, analizar, memorizar, ilustrar.</p> <p>COMUNICACIÓN:</p> <p>lenguaje de:</p> <p>Multiplicación</p> <p>Factor</p> <p>Multiplicando</p> <p>Multiplicador</p> <p>Producto o múltiplo</p> | 2 horas y 15 minutos | Internet Computador Video beam Cuaderno sólo-matemáticas.com |

División

lenguaje para

El producto es...

El múltiplo es...

4 multiplicado por 3 es igual a 12.

el cociente es...

12 dividido 4 es igual a 3...

Multiplication and its Components

$$\begin{array}{r} 6 \\ \times 3 \\ \hline 18 \end{array}$$

6 → *Multiplicand* The number to be multiplied is called multiplicand.
x 3 → *Multiplier* The number with which we multiply is called multiplier.
18 → *Product or Multiple* The result obtained is called product or multiple.

$$\begin{array}{ccc} \text{dividend} & \text{divisor} & \text{quotient} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 20 & \div & 4 = 5 \\ \uparrow & \uparrow & \\ & \text{division sign} & \text{equals} \end{array}$$

Calentamiento:

En un momento inicial, realizaremos un repaso de las tablas de multiplicar con situaciones de la vida cotidiana. El estudiante podrá dar su respuesta y decir si su compañero da una respuesta incorrecta o hay un error en su proceso.

Actividades:

Muestre a los alumnos esta matriz:

| | | | | | | | | |
|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | |
| | | | | | | | | |
| | | | | | | | | |

Pida a los alumnos que escriban expresiones de multiplicación y división para describir este rectángulo. Por ejemplo, $3 \times 9 = 27$, $27 = 9 \times 3$ o $27 \div 3 = 9$, $27 \div 9 = 3$

Pregunte a los alumnos:

¿Qué notas acerca de las expresiones numéricas?

Dé a los estudiantes otras matrices y pídale que escriban oraciones de multiplicación y división para describirlas.

| | | | |
|--|--|--|--|
| | <p>Hay algunos ejercicios como los siguientes:</p> <p>https://www.math-only-math.com/relationship-between-multiplication-and-division.html</p> <p>Resumen:</p> <p>Por último, se proponen otros ejercicios y actividades en los que los alumnos pueden establecer relaciones entre multiplicaciones y divisiones. Se proponen ejercicios similares a la actividad donde se presentan grupos de elementos y se crean frases que expresan multiplicaciones y divisiones.</p> <p>Semana N° 23: lunes 20 de marzo - viernes 24 de marzo /2023</p> <p>OBJETIVO DE APRENDIZAJE:</p> <p>Comprender y explicar las propiedades conmutativa y distributiva de la multiplicación y utilizarlas para simplificar los cálculos.</p> <p>Convencer</p> <ul style="list-style-type: none"> • Presentar pruebas para justificar o rebatir una idea o solución matemática. <p>CONTENIDOS: Multiplicación y división</p> <p>COGNICIÓN: Comparar y contrastar, analizar, memorizar, ilustrar.</p> <p>COMUNICACIÓN:</p> <p>Lenguaje de:</p> <p>Multiplicación</p> <p>Factor</p> <p>Multiplicando</p> | | |
|--|--|--|--|

Multiplicador

Producto o múltiplo

División

Lenguaje para

56 dividido 8 es igual a 7, significa 8 multiplicado 7 es igual a 56.

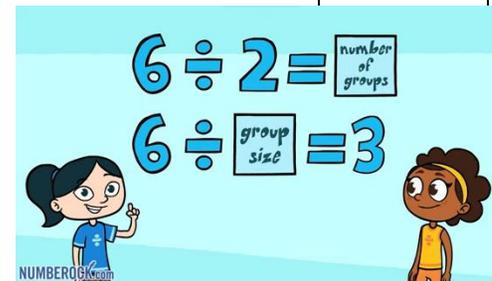
12 multiplicado 2 es igual a 24 significa que 24 dividido 12 es igual a 2

Desarrollo:

En un momento inicial, el profesor conversará con los alumnos sobre el tema aprendido en la última semana: Multiplicación y división de naturales. Con esa información, el profesor hará un repaso de los temas y presentará dos vídeos sobre la multiplicación, la división y su relación.

Video 1. <https://youtu.be/gzFbUZ8VjEg>
<https://youtu.be/oF2fITujB4c>

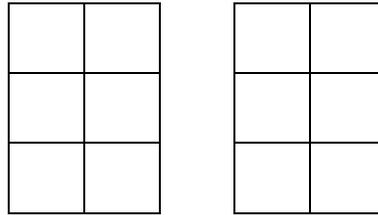
Video 2.



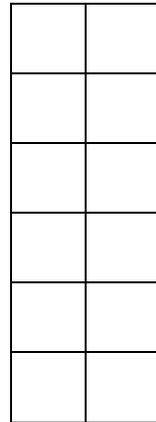
Actividad:

Internet

Esta matriz son dos rectángulos de 3×2 que es lo mismo que $6 + 6 = 12$



Esta matriz es el único rectángulo de $6 \times 2 = 12$:



$3 \times 4 = 6 \times 2$ ¿Verdadero o falso?

Rescapitulación:

2 horas y
15 minutos

Internet
Computador
Video beam
Cuaderno
Bloque

| | | | |
|--|--|--|--|
| | <p>En un momento final, se preguntará a los alumnos sobre lo que han aprendido en clase. También se les pedirá que expliquen la ley conmutativa con sus propias palabras.</p> <p>Semana n° 24: lunes 27 de marzo - viernes 31 de marzo /2023</p> <p>OBJETIVO DE APRENDIZAJE:</p> <p>Conocer las tablas de multiplicar del 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 y 10.</p> <p>Crítica</p> <p>Comparar y evaluar ideas, representaciones o soluciones matemáticas para identificar ventajas y desventajas.</p> <p>Al final de la clase los alumnos serán capaces de: comprender y explicar la relación entre multiplicación y división.</p> <p>CONTENIDOS: Multiplicación y división</p> <p>COGNICIÓN: Comparar y contrastar, analizar, memorizar, ilustrar.</p> <p>COMMUNICACIÓN</p> <p>Lenguaje de:</p> <p>Multiplicación</p> <p>Factor</p> <p>Multiplicando</p> <p>Multiplicador</p> <p>Producto o múltiplo</p> <p>División</p> <p>Lenguaje para:</p> | | |
|--|--|--|--|

56 dividido 8 es igual a 7 significa 8 multiplicado 7 es igual a 56.

12 multiplicado 2 es igual a 24 significa que 24 dividido 12 es igual a 2.

Calentamiento:

En un momento inicial, el profesor realizará una actividad de repaso. En esta actividad los alumnos dirán cuáles son los conceptos aprendidos en clase. También hablarán sobre los problemas presentados en clase y sus respuestas.

Actividad:

Se presentan los siguientes problemas a los alumnos:

Problema 1.

Tienes cuatro bolsas de cinco canicas. ¿Cuántas canicas tienes en total?



- Pero ¿qué pasaría si otro amigo también quisiera canicas?

Ahora, esto significa que necesitamos tener cinco grupos.

Problema 2.

Si tienes 12 trozos de chocolate que quieres repartir entre tres personas.

- *¿Cuántos trozos puede tomar cada persona?*

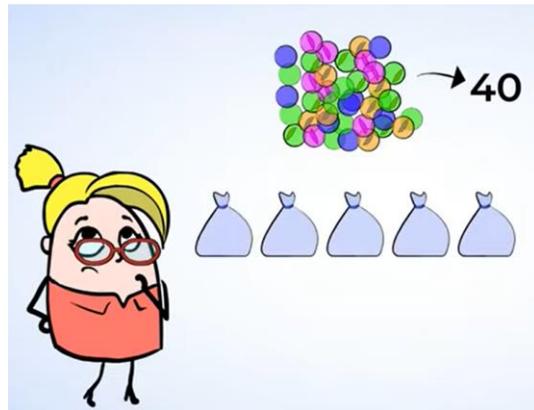


- - Ahora, hay cuatro personas que quieren compartir los doce trozos. ¿Cuántas trozos puede tener cada persona?

Problema 3.

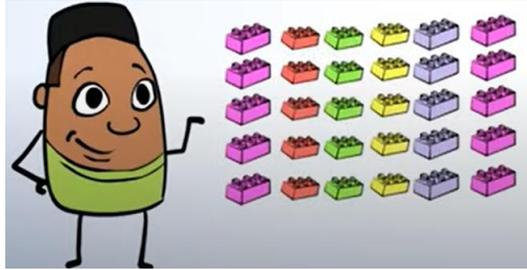
Hay 40 canicas, y tienes que ponerlas equitativamente en cinco bolsas.

¿Cuántas canicas habrá en cada bolsa?



Problema 4.

Hay treinta bloques en un montón. Cinco niños quieren utilizarlos para construir una torre. Si el montón se divide en partes iguales, ¿cuántos bloques puede coger cada niño?



Para dar solución a este problema, en el aula el profesor formará 3 grupos de cinco alumnos en cada grupo. Los alumnos resolverán este problema utilizando bloques reales.

Problema 5.

Dentro de unos días es el cumpleaños de Nico y está preparando unas bolsas de regalos para sus amigos. Vamos a ayudarlo a saber cuántas pegatinas debe colocar en las bolsas de regalo. Tiene 80 pegatinas para poner en 20 bolsas de regalo. ¿Cuántas pegatinas recibirá cada invitado a la fiesta?

Todas las respuestas de los problemas se presentarán como una relación entre multiplicación y división.

Recapitulación:

En un momento final, el profesor preguntará a los alumnos sobre lo que han aprendido durante la clase. Pero lo más importante, preguntará a los alumnos sola relación entre la multiplicación y la división.