BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

RELACIONES ENTRE SUBDOMINIOS DEL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DE DOS PROFESORES DE MATEMÁTICAS SOBRE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ADITIVOS CON ENTEROS

TESIS
PARA OBTENER EL TÍTULO DE
MAESTRA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

PRESENTA
LIC. KEYLLA MARGARITA OTERO VALEGA

DIRECTOR DE TESIS
DRA. ESTELA DE LOURDES JUÁREZ RUIZ

CO-DIRECTOR DE TESIS
DRA. DIANA ZAKARYAN

PUEBLA, PUE. ENERO 2024

DR. SEVERINO MUÑOZ AGUIRRE
SECRETARIO DE INVESTIGACIÓN Y
ESTUDIOS DE POSGRADO, FCFM-BUAP
P R E S E N T E:

Por este medio le informo que la C:

KEYLLA MARGARITA OTERO VALEGA

Estudiante de la Maestría en Educación Matemática, ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 06 de noviembre de 2023, con la tesis titulada:

"RELACIONES ENTRE SUBDOMINIOS DEL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DE DOS PROFESORES DE MATEMÁTICAS SOBRE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ADITIVOS CON ENTEROS"

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

A T E N T A M E N T E.
H. Puebla de Z. a 27 de noviembre de 2023

Lidia A Hdz R.

DRA. LIDIA AURORA HERNÁNDEZ REBOLLAR
COORDINADORA DE LA MAESTRÍA
EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA.

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA · 1578 · FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS - SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y ESTUDIOS DE POSGRADO

DRA´LAHR/l´agm*

Facultad
de Ciencias
Físico Matemáticas

Av. San Claudio y 18 Sur, edif. FM1
Ciudad Universitaria, Col. San
Manuel, Puebla, Pue. C.P. 72570
01 (222) 229 55 00 Ext. 7550 y 7552

Este trabajo de investigación fue realizado gracias al apoyo financiero del Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnología (CONAHCYT), mediante la Beca de Maestría Nacional otorgada durante el periodo enero 2022 a diciembre de 2023. N° de CVU 1179802.

AGRADECIMIENTOS

Primeramente, gracias a Dios, gracias al Padre Todopoderoso por darme la sabiduría, entendimiento y fuerzas, para escribir esta tesis, gracias por no dejarme sola ni un instante, por acompañarme durante toda mi estancia en aquí en este bello país, México, que me recibió con los brazos abiertos, gracias a Dios por permitirme realizar este sueño que aún no termina, por permitirme viajar aquí y por abrirme todas las puertas para lograr llegar hasta aquí, gracias Dios.

Gracias a mi novio, mi compañero de vida, de luchas, de batallas, Ever José Pacheco Muñoz, gracias por estar siempre conmigo, por apoyarme, por animarme a continuar cada día, por creer en mí. Gracias por enseñarme a valorar tantas cosas, gracias por tu paciencia y comprensión, por tus consejos, por tus cuidados cuando me enfermaba, quiero que sepas que eres mi ejemplo, mi modelo a seguir, a quien admiro.

A mis padres, Yesenia y Rafael, les agradezco su confianza en mí y su apoyo incondicional. Gracias mami por tus oraciones y por esas llamadas que siempre me daban fuerzas y me sacaban risas. Gracias papi enseñarme a perseguir mis sueños. A mis hermanos, Rafael, Jesús y Natalia, les agradezco su amor y motivación. Siempre han creído en mí y son mi motor para seguir adelante.

A mis amigas y compañeras colombianas, Dayana, Lorena, Lina, Adriana, Valentina y Alejandra, quienes fueron mi familia aquí en México. Gracias Lina por tu apoyo académico, por tus consejos y comprensión. Gracias Dayana por estar siempre pendiente de mí y por cuidar de mí. Gracias Lorena por enseñarme tantas recetas de cocina y ayudarme a probar nuevas comidas. Gracias Adriana, Valentina y Aleja acompañarme a experimentar nuevas aventuras. Gracias a todas por las risas y los momentos que quedan en mi corazón.

A mi directora de tesis la Dr. Estela le agradezco, su paciencia, comprensión, apoyo y correcciones para poder culminar esta tesis, gracias por estar ahí cada semana resolviéndome cada duda y guiándome en este proceso. Gracias Dr. Diana por sus correcciones y sugerencias durante la elaboración de esta investigación. Gracias Dr. Lidia por sus sugerencias en cada avance de tesis.

A mis profesores de la Maestría les agradezco los conocimientos que me han brindado. Gracias Dr. Estela, Dr. José Antonio, Dr. José Gabriel, Dra. Honorina y Dra. Ruth. Y, por último, quiero agradecer a Abby, por su paciencia, por ayudarme con cada documento y trámite que debía hacer para este proceso de ingreso y permanencia en la Maestría.

ÍNDICE

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE FIGURAS

Resumen

El conocimiento del profesor de matemáticas es sustancial para promover el aprendizaje deseado en sus alumnos. En esta investigación, se estudia el conocimiento especializado del profesor de matemáticas y se establecen relaciones entre subdominios del modelo MTSK que evidencian dos profesores de matemáticas en el diseño de un plan de clases sobre la resolución de problemas aditivos con números enteros. Esta investigación es de corte cualitativa, con un diseño de estudio de caso instrumental de carácter colectivo con una profesora mexicana y un profesor colombiano. Para la recolección de los datos se optó por el diseño de una planeación de clase y una entrevista semiestructurada, y para el análisis de los datos se utilizó la técnica de análisis de contenido. Los resultados han evidenciado relaciones entre el conocimiento que manifiesta la profesora mexicana sobre temas anteriores que deben haber desarrollado los estudiantes tales como la recta numérica, y su utilidad como conexión auxiliar para enseñar la temática de problemas aditivos con números enteros, además, se evidenció la relación entre el conocimiento que tiene la profesora acerca de las dificultades que presentan cuando resuelven problemas aditivos con enteros, y las estrategias heurísticas de resolución de problemas. Por otra parte, respecto a los resultados encontrados en el profesor colombiano, se hallaron relaciones entre definiciones y propiedades que cumple la adición de números enteros y el papel del lenguaje matemático al hacer referencia a estos, además se evidenciaron relaciones al interior del conocimiento de las características de aprendizaje de los estudiantes y cómo este subdominio guarda relación con el conocimiento de los temas. Ambos profesores compartieron la relación KoT y KSM debido a que los dos utilizan auxiliares tales como la recta numérica y los vectores para llevar a cabo procedimientos de resolución de problemas aditivos con enteros. Así como también, la relación KMT y KoT donde utilizaban su conocimiento de estrategias y ejemplos para la construcción de definiciones y propiedades de los números enteros con sus estudiantes.

Palabras clave: Conocimiento especializado del profesor de Matemáticas (MTSK), Relaciones entre subdominios del modelo MTSK, Resolución de problemas, Números enteros, Problemas aditivos.

Abstract

The mathematics teacher's knowledge is substantial to promote the desired learning in their students. In this research, the specialized knowledge of the mathematics teacher is studied, and relationships are established between subdomains of the MTSK model evidenced by two mathematics teachers in the design of a lesson plan on the resolution of additive problems with integers. This is qualitative research, with a collective instrumental case study design with a Mexican teacher and a Colombian teacher. For data collection, a lesson plan and a semi-structured interview were used, and for data analysis, the technique of content analysis was used. The results have shown relationships between the knowledge Mexican teacher about previous topics that students should have developed, such as the number line, and its usefulness as an auxiliary connection to teach the subject of additive problems with integers, and the relationship between the teacher's knowledge about the difficulties they have when solving additive problems with integers, and the heuristic strategies of problem solving. On the other hand, with respect to the results found in the Colombian teacher, relationships were found between definitions and properties of the addition of integers and the role of mathematical language when referring to these, in addition, relationships were evidenced within the knowledge of the learning characteristics of the students and how this subdomain is related to the knowledge of the topics. Both teachers shared the relationship KoT and KSM because they both use auxiliaries such as the number line and vectors to carry out additive problem-solving procedures with integers. As well as the KMT and KoT relationship where they used their knowledge of strategies and examples for constructing definitions and properties of integers with their students.

Keywords: Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK), Relationships between subdomains of the MTSK model, Problem solving, Integers, Additive problems.

Introducción

Tomando en consideración que el conocimiento del profesor de matemáticas es sustancial para promover el aprendizaje deseado en sus estudiantes, en la presente investigación se estudia el conocimiento que ponen en juego en su intención de enseñanza dos profesores de matemáticas en el diseño de una planeación de clase sobre resolución de problemas aditivos con números enteros, debido a que la adición de números enteros es un tema que hace parte del currículo colombiano y mexicano (MEN, 2006; SEP, 2017), y es la resolución de problemas uno de los ejes fundamentales de la actividad matemática (Rojas, 2014).

Para analizar el conocimiento de los profesores se tiene en cuenta el modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK). Este modelo permite analizar el conocimiento que el profesor utiliza en cualquier tarea de la docencia, tales como la preparación de clase, discusión con docentes, enseñanza en el aula o reflexión posterior a esta (Advíncula et al., 2021). Este modelo está conformado por tres dominios: el dominio del conocimiento matemático, el dominio del conocimiento didáctico y el dominio de las creencias y concepciones que tiene el profesor sobre las matemáticas y sobre su enseñanza y aprendizaje, sin embargo, en esta investigación fueron objeto de estudio solo los dominios de conocimiento matemático y didáctico, los cuales a su vez están conformados por subdominios y categorías.

El dominio del conocimiento matemático está conformado por los subdominios conocimiento de los temas, conocimiento de la estructura de la matemática y conocimiento de la practica matemática. El dominio del conocimiento didáctico está conformado por los subdominios conocimiento de la enseñanza de las matemáticas, conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas y el conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas.

Esta investigación se plantea por objetivo establecer relaciones entre subdominios del conocimiento especializado que evidencian dos profesores de matemáticas de educación básica en el diseño de una planeación de clase sobre resolución de problemas aditivos con números enteros, esto teniendo en cuenta la clasificación de relaciones entre subdominios propuesta por Delgado-Rebolledo y Espinoza-Vásquez (2021).

Cabe resaltar que de la revisión de literatura que se realizó durante la presente investigación acerca del modelo MTSK, se pudieron encontrar investigaciones que establecen relaciones entre subdominios. Como lo es el caso de Aguilar-González et al. (2018) quienes plantean cómo establecer relaciones entre conocimiento especializado y concepciones del profesorado de matemáticas; otras investigaciones se enfocaron en estudiar las relaciones entre subdominios del dominio matemático y el didáctico en el nivel secundaria (Escudero-Ávila et al., 2017; Zakaryan y Ribeiro, 2016; Zakaryan et al., 2018). Por último, se han reportado investigaciones que utilizan la planeación de clase como un instrumento de recolección de datos para identificar indicios o evidencias de conocimiento y poder establecer relaciones entre subdominios de conocimiento (Pacheco-Muñoz et al., 2021;2023; Paternina-Borja et al., 2021).

La importancia de establecer relaciones entre subdominios de conocimiento del modelo MTSK radica en que el conocimiento especializado del profesor es de naturaleza dinámica, compleja e integral, además analizar estas relaciones nos permite mejorar la observación de aspectos específicos del conocimiento del profesor y a su vez tener diferentes perspectivas o formas de conocer un contenido matemático para usarlo como objeto de enseñanza y aprendizaje (Escudero-Ávila et al., 2017).

Dentro de los principales hallazgos de esta investigación se resalta la evidencia de relaciones del conocimiento de la práctica matemática con los subdominios del conocimiento de los temas, estándares de aprendizaje y características de aprendizaje, además en el caso de la profesora mexicana se evidenciaron relaciones del subdominio de las características de aprendizaje de las matemáticas con los demás subdominios de conocimiento, y en el caso del profesor colombiano, el subdominio del conocimiento de los temas fue el que evidenció mayor número de relaciones con otros subdominios. En este trabajo de investigación se presentan cuatro capítulos que se describen brevemente a continuación:

En el primer Capítulo, se describe el planteamiento del problema de investigación, se presenta la problemática que hay en la comprensión del objeto matemático, los números enteros, y se resalta la necesidad de estudiar el conocimiento del profesor de matemáticas teniendo en cuenta la resolución de problemas como metodología de enseñanza, asimismo, se plantean la pregunta y objetivo de la investigación. Además, en la justificación se describe la importancia de estudiar relaciones entre subdominios del conocimiento del profesor de matemáticas y de la resolución de problemas aditivos con enteros, así como la pertinencia, relevancia y viabilidad del trabajo de investigación.

En el segundo Capítulo, se presenta una síntesis acerca de los antecedentes del modelo MTSK, y sobre los modelos iniciales del conocimiento del profesor tales como los propuestos por Shulman (1986,1987) y Ball et al. (2008), además, se presenta la definición de conocimiento especializado y de los subdominios de conocimiento del modelo, así como las categorías que conforman los subdominios matemático y didáctico, en adición, se muestra la tipología de relaciones entre estos subdominios de conocimiento (intra-subdominio, intra-dominio e inter-dominio), y se presentan algunos antecedentes que establecen relaciones.

En el tercer Capítulo, se realiza la descripción del paradigma investigación en que se sustenta el trabajo, en este caso el interpretativo, además se justifica su elección desde las perspectivas ontológica, epistemológica, metodológica y axiológica, luego se define el tipo de investigación y el diseño de esta. Además, se describen las características de los informantes, que son dos profesores de educación básica (una profesora mexicana y un profesor colombiano). También, se determinan los métodos o instrumentos de recolección de datos tales como la entrevista semiestructurada y la planeación de clases, por último, el procedimiento llevado a cabo para realizar el análisis de los datos por medio de la triada evidencia-indicio-oportunidad.

En el cuarto Capítulo, se presentan los resultados obtenidos al estudiar el conocimiento de los dos profesores de matemáticas por medio de sus planeaciones de clases y las entrevistas semiestructuradas, asimismo se establecen relaciones entre subdominios del conocimiento especializado que evidencian los profesores y se interpretan estas relaciones según su tipología.

Finalmente, se presentan las conclusiones de la investigación donde se resalta la importancia de utilizar la planeación de clase como un instrumento para indagar en el conocimiento del profesor en su intención de enseñanza, además, gracias a la estrategia de solicitar una planeación de clase basada en la resolución de problemas aditivos, se pudo evidenciar conocimiento de los profesores sobre la resolución de problemas como una práctica matemática y como una estrategia de enseñanza de las matemáticas.

Además, los resultados presentados aportan una perspectiva acerca de cómo utilizarse el conocimiento matemático y didáctico para la enseñanza de la adición de números enteros a través de la resolución de problemas, y de otro modo, también son un aporte a la formación de profesores de matemáticas.

Capítulo 1

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El docente de matemáticas juega un papel relevante en el aula de clases, pues es el encargado de institucionalizar los saberes en sus estudiantes, así mismo, debe identificar posibles errores y dificultades que los estudiantes presentan al aprender un objeto matemático específico para ayudar a superarlos. Lo anterior lo confirman Hobri et al. (2021) al plantear que el profesor debe conocer las dificultades de aprendizaje de los alumnos para promover el aprendizaje deseado.

Por esto, se hace necesario que el profesor posea un conocimiento especializado al enseñar las matemáticas desde un punto de vista didáctico y matemático, donde al hablar de conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK) (por sus siglas en inglés), se hace referencia al conocimiento que solo los docentes deberían conocer con respecto al área que enseñan y también respecto a la manera en la que la matemática puede enseñarse o aprenderse (Sánchez, 2021).

En adición, “el modelo MTSK permite analizar el conocimiento que el profesor pone en juego en cualquier tarea relacionada con la docencia, como la preparación de clases, la discusión con otros docentes, la enseñanza en aula o la reflexión posterior” (Advíncula et al., 2021, p. 192).

Ahora bien, Rojas (2014) afirma que la resolución de problemas hace parte de los ejes principales de la actividad matemática y es fuente y soporte principal del aprendizaje matemático en la educación básica. Sin embargo, algunos estudiantes presentan dificultades cuando se les indica resolver problemas de un tema matemático específico, como lo menciona Socas et al. (2014), el análisis de resultados obtenidos en diversas evaluaciones tanto a nivel nacional como internacional ha puesto de manifiesto que la mayoría de los estudiantes tienen serias dificultades al enfrentarse a la resolución de problemas de Matemáticas.

Por su parte, Becerra et al. (2012) identifican algunas dificultades y errores que presentan los estudiantes, relacionadas con la adición y sustracción de números enteros y afirman que “las dificultades y errores son limitaciones en el aprendizaje que los estudiantes presentan al resolver ciertas tareas matemáticas” (p. 40). Entre ellas resaltan dificultades en la utilización del lenguaje matemático y verbal en situaciones aditivas, en la utilización de la recta numérica, en la interpretación de la sustracción y para darle sentido a un resultado negativo, donde los estudiantes tienden a pensar que siempre el minuendo debe ser mayor que el sustraendo y aseguran que la respuesta a una operación no puede ser negativa. De este modo, podemos afirmar que, los estudiantes presentan dificultades precisamente por la transición que se hace de los números naturales a los números enteros al llegar a la educación secundaria, debido a que tienden a confundir las propiedades de los números naturales con las de los números enteros.

En este sentido, Maca Díaz y Patiño Giraldo (2016) afirman que también algunos docentes poseen dificultades con respecto al concepto de números enteros, y esto se refleja en la profundidad con la que se desarrolla esta temática en el aula y en las estrategias de enseñanza que utilizan. Por esto, el profesor debe utilizar metodologías adecuadas que permitan enseñar la materia y atender la diversidad que se encuentra al interior de esta; además, al momento de preparar clases, los profesores pueden utilizar las necesidades del entorno del estudiante para conseguir que las aplicaciones de los números enteros sean apropiadas y conseguir un acercamiento más atractivo a este conjunto numérico.

En esta misma línea de ideas, Bruno y García (2004) sostienen que los profesores de primaria cuando resuelven problemas aditivos de números enteros tienen dificultades debido a que interpretan los problemas de combinación como de cambio, además, tienen dificultades para interpretar palabras claves de los problemas aritméticos, de este modo, se podría afirmar que tienden a cometer los mismos errores que los niños.

En suma, la importancia del profesor en el aula de clases es sustancial, debido a que él es quien orquesta las dimensiones que incluye en la enseñanza de las matemáticas a través de la resolución de problemas. Por este motivo, el docente debe ser un buen seleccionador de problemas, debe saber escuchar a sus estudiantes, hacer las preguntas adecuadas en los momentos adecuados y saber callar para que sus estudiantes piensen (Lester y Cai, 2016). Por tanto, “los docentes, como parte responsable del desarrollo del currículo escolar de matemáticas, han de ser resolutores competentes de los problemas de matemáticas que emplean en el aula” (Piñeiro, 2019, p. 50).

De forma similar, Chamorro (2003) (como se citó en Nieto y Pflucker, 2020) afirma que, el profesor debe conocer los diversos modelos existentes de resolución de problemas, comprender el significado de la resolución de problemas y, además, tener en cuenta los aspectos cruciales cuando se estudia un problema, tales como la estructura matemática o relacional de la resolución y las características de la formulación del enunciado.

Con respecto a modelos de resolución de problemas, podemos mencionar primeramente la metodología heurística propuesta por Pólya (1945), la cual consiste en cuatro pasos: comprender el problema, concebir un plan, ejecutar el plan y examinar la solución obtenida. Sin embargo, Schoenfeld (1985) considera que al ser la resolución de problemas una estrategia didáctica hay que tener en cuentas algunos factores tales como: recursos, heurísticas particulares, control y sistema de creencias, y propone cuatro fases basadas en la propuesta de Pólya, las cuales son: análisis, exploración, ejecución y comprobación de la solución obtenida.

Es importante resaltar la diferenciación entre un ejercicio y un problema, D'Amore (2006) afirma que se tiene un ejercicio cuando su resolución implica la utilización de reglas y procedimientos ya aprendidos, aunque aún en vías de consolidación, en cambio, se tiene un problema cuando una o más reglas o procedimientos no hacen parte del bagaje cognitivo del resolutor. Por otra parte, Rico (2007) afirma que la competencia de plantear y resolver problemas incluye plantear, formular y definir diferentes tipos de problemas matemáticos (puros, aplicados, de respuesta abierta o cerrados) y resolver diferentes tipos de problemas matemáticos mediante una diversidad de vías. Asimismo, Piñeiro (2019) sostiene que:

> Los conocimientos que atañen directamente a la resolución de problemas, y que deberían formar parte del conocimiento del profesor, tienen que ver con la noción de problema y los aspectos ligados a su resolución (formas de representación, heurísticos, estrategias específicas, ejecución, etc.), así con aspectos ligados al resolutor potencial y los que intervienen en el proceso de su enseñanza. (p. 54)

Finalmente, Nieto y Pflucker (2020) afirman que el dominio en la resolución de problemas no solo beneficia a los docentes, sino también es importante para los estudiantes, debido a que la resolución de problemas permite que los estudiantes desarrollen una relación entre la matemática y su vida, siempre y cuando estos problemas estén ligados con la realidad que los rodea, ayudándolos a comprenderla mejor. Adicionalmente, Carrillo et al. (2019) afirman que la resolución de problemas es una actividad vertebradora del aula de matemáticas; por esto, Carrillo Yañez et al. (2022) mencionan que la resolución de problemas, como metodología en la enseñanza de las matemáticas, es un referente para pensar en el conocimiento que necesita el profesor de matemáticas.

Teniendo en cuenta lo anteriormente mencionado, en esta investigación se hace necesario estudiar el conocimiento especializado que posee el profesor de matemáticas al enseñar la suma y resta con números enteros a través de la resolución de problemas y las relaciones entre sus distintos subdominios de conocimiento, mediante el modelo MTSK. De esta manera, el propósito de esta investigación se centra en responder la siguiente interrogante:

1.1. Pregunta general

¿Qué relaciones entre subdominios del conocimiento especializado evidencian dos profesores de matemáticas de educación básica en el diseño de una planeación de clase sobre resolución de problemas aditivos con números enteros?

1.2. Objetivo general

Establecer relaciones entre subdominios del conocimiento especializado que evidencian dos profesores de matemáticas de educación básica en el diseño de una planeación de clase sobre resolución de problemas aditivos con números enteros.

1.3. Justificación

En un primer momento, es importante resaltar que el modelo MTSK "permite profundizar en el conocimiento especializado del profesor de matemáticas en su acción docente, siendo una herramienta que suministra ideas y sugerencias para en un futuro elaborar propuestas formativas" (Rojas, 2014, p. 64). Por otra parte, la Secretaría de Educación Pública de México (SEP, 2017), en su eje temático "Número, álgebra y variación" contempla el tema de adición y sustracción, donde, como aprendizaje esperado del primer grado de secundaria, los estudiantes deben resolver problemas de suma y resta con números enteros. Asimismo, según el Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN, 2006), al finalizar el séptimo grado, los estudiantes deben ser capaces de justificar procedimientos aritméticos utilizando relaciones y propiedades de las operaciones, así como formular y resolver problemas en situaciones aditivas en diferentes contextos y dominios numéricos.

Debido a esto, se puede afirmar que esta investigación es pertinente, ya que a través de los instrumentos de análisis que se utilizan, se presentan indicadores específicos que permiten analizar el conocimiento especializado del profesor de matemáticas al planear la enseñanza de la suma y resta de números enteros a través de la resolución de problemas, esto gracias a la utilización de las categorías del modelo MTSK propuestas en cada uno de sus subdominios.

En segundo lugar, es importante analizar relaciones entre dominios y subdominios de este modelo, debido a que estas nos permiten mejorar “la observación de aspectos concretos del conocimiento y generar distintas perspectivas o formas de conocer un determinado contenido matemático para usarlo como objeto de enseñanza y aprendizaje, que es precisamente el conocimiento que el profesor debe tener sobre estos objetos" (Escudero-Ávila et al., 2017, p. 90).

Por tanto, esta investigación es relevante, puesto que presenta un aporte investigativo de carácter teórico sobre las relaciones que pueden surgir entre dominios y subdominios del modelo MTSK, en la intención de enseñar un objeto matemático específico a través de la resolución de problemas, y promueve el desarrollo de futuras investigaciones respecto al conocimiento especializado del profesor de matemáticas frente a la resolución de problemas de otros objetos matemáticos, y también el establecimiento de otras posibles relaciones.

1.4. Viabilidad de la investigación

Por último, esta investigación es viable puesto que cuenta con los recursos materiales y humanos para ser llevada a cabo, además, los informantes cuentan con experiencia en el aula, lo que permitirá realizar análisis significativos de los datos. Es importante resaltar, que esta investigación es realizada de acuerdo con las directrices establecidas en el programa de posgrado de la Maestría en Educación Matemática, y el financiamiento del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) de enero 2022 a diciembre de 2023 No. de CVU 1179802.

Capítulo 2

MARCO TEÓRICO

En este capítulo se hará mención del modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas, se presentarán algunas definiciones, conceptos y relaciones encontradas entre los subdominios que hacen parte de este reportadas en la literatura.

2.1. Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK)

En primer lugar, gracias a las aportaciones de Shulman (1986), han surgido diferentes investigaciones sobre modelos del conocimiento del profesor; seguidamente, Shulman (1987) estableció siete categorías del conocimiento de un profesor, las cuales son: el conocimiento del contenido, el conocimiento pedagógico general, el conocimiento curricular, el conocimiento didáctico del contenido, el conocimiento sobre los alumnos y sus características, el conocimiento de los contextos educativos y el conocimiento de los fines, propósitos y valores educativos.

Posteriormente, Ball et al. (2008) proponen un refinamiento de estas categorías propuestas por Shulman, y a este nuevo modelo lo llaman Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT), donde articulan su dominio del conocimiento del contenido para la enseñanza y dos de los dominios iniciales de Shulman (1986) los cuales son el conocimiento de la materia y el conocimiento didáctico del contenido. Además, en el conocimiento didáctico del contenido consideran una tercera categoría de Shulman: el conocimiento curricular, y dos subdominios: el conocimiento del contenido y los estudiantes (KCS) y el conocimiento del contenido y la enseñanza (KCT). También, en el conocimiento de la materia incluyen tres subdominios los cuales son: el conocimiento del horizonte matemático, el conocimiento común del contenido (CCK) y el conocimiento especializado del contenido (SCK).

Seguidamente, los integrantes del Seminario de Investigación en Didáctica de la Matemática (SIDM) de la Universidad de Huelva trataron de delimitar los subdominios del MKT por medio de categorías y descriptores, sin embargo, esto no fue posible debido a que se encontraron superposiciones entre los subdominios, de este modo, surge el modelo MTSK para solucionar esta dificultad (Flores-Medrano et al., 2014).

Dicho de esta manera, Carrillo-Yañez et al. (2018) señalan que “este modelo presenta una reconfiguración del conocimiento matemático, una reinterpretación del conocimiento didáctico del contenido y una nueva forma de conceptualizar la noción de especialización" (p. 240). Así, este modelo teórico es utilizado para estudiar de forma analítica, el conocimiento del profesor de matemáticas (Flores et al., 2014).

Es importante resaltar que, se dice que es conocimiento *especializado* debido a que este tipo de conocimiento lo tiene y desarrolla solo el profesor por el hecho de ser profesor, y no se desarrolla en alguna persona que no tenga esta profesión, o dicho de otra manera, es aquel conocimiento que solo le hace sentido al profesor de matemáticas, y que es diferente al conocimiento común que puede desarrollar cualquier otra persona de diferente profesión y puede poseer desde un niño a un adulto (Escudero et al., 2012).

En este sentido, hay que reconocer que garantizar que un docente posee un determinado conocimiento especializado no es una tarea fácil, es por esto, que en algunas investigaciones sobre el modelo MTSK se ha empleado la triada evidencia-indicio-oportunidad, para detenernos a verificar si lo que se postula forma parte realmente del conocimiento del profesor informante y de este modo, no omitir aportes importantes que arrojen los datos (Escudero-Ávila et al., 2015). De este modo, teniendo en cuenta este trabajo, se definen cada uno de los elementos de esta triada de la siguiente manera:

Evidencias de conocimiento: Esta hace referencia a aquellos elementos que nos permiten afirmar que un profesor posee o no un conocimiento determinado.

Indicios de conocimiento: Son las sospechas de la existencia o inexistencia de un conocimiento determinado, en estos se acepta que se requiere de más información para que puedan convertirse en evidencias de conocimiento.

Oportunidades de investigación: Estas son de naturaleza diferente a las evidencias e indicios, las oportunidades son momentos o situaciones presentadas por el profesor o la dinámica de la clase, y sirven para explorar el conocimiento de algún subdominio, aunque este no tenga relación con el subdominio con el cual se identifica la declaración suscitada.

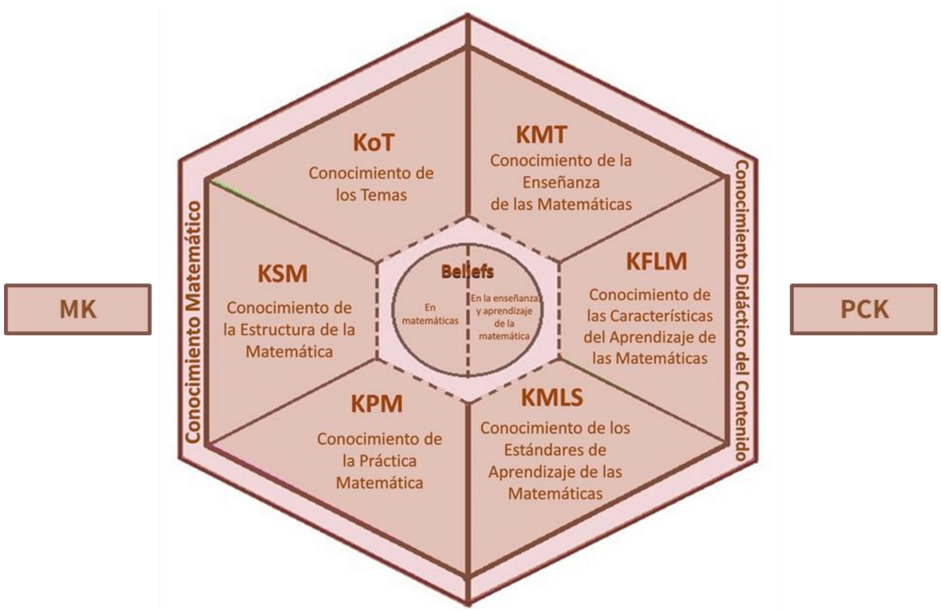
Por último, este modelo está compuesto por tres dominios los cuales son: el Conocimiento Matemático (MK) y el Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK), así mismo, estos dominios se dividen en tres subdominios cada uno, además, en el centro del modelo se incluye un tercer dominio que abarca las creencias y concepciones del profesor sobre las matemáticas, su enseñanza y su aprendizaje, vistos como elementos que le dan sentido a la práctica (Escudero-Ávila et al., 2017). Cabe resaltar, que en esta investigación no se enfatizará en este tercer dominio mencionado, solo se hará énfasis en los dos primeros dominios, es decir, en el MK y el PCK.

2.1.1. Dominios y subdominios del MK y el PCK

En esta sección se definen los dos dominios mencionados anteriormente que serán motivo de estudio en esta investigación (ver Figura 1). De este modo, en el primer dominio llamado Conocimiento Matemático (MK) se encuentran los siguientes subdominios: Conocimiento de los Temas (KoT), Conocimiento de la Estructura de las Matemáticas (KSM) y Conocimiento de la Práctica Matemática (KPM).

Por otro lado, se tiene el segundo dominio llamado Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK), y de este dominio hacen parte los subdominios: Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT), Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM) y Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS) (Nieto y Pflucker, 2020), como se observa en la Figura 1.

Figura 1. Esquema del modelo MTSK



Fuente: Basado en Muñoz-Catalán et al. (2015, p.596)

En cuanto al MK, se puede afirmar que este dominio abarca el conocimiento de las conexiones entre los conceptos, la forma de estructurar las ideas, la razón de los procedimientos, los medios de prueba, las formas de proceder en matemáticas, el conocimiento del lenguaje matemático y su precisión (Carrillo et al., 2013). Describimos brevemente los tres subdominios del MK y sus correspondientes categorías:

Conocimiento de los Temas (KoT): Este subdominio contiene el conocimiento disciplinar que incluye los procedimientos, las definiciones, propiedades y sus fundamentos, la fenomenología y aplicaciones de un contenido y los distintos registros de representación, además se incluyen conexiones intraconceptuales, es decir, aquellas que relacionan conceptos o procesos de un mismo tema (Muñoz-Catalán et al., 2019).

Conocimiento de la Estructura de la Matemática (KSM): Este subdominio considera el conocimiento del profesor sobre las formas en que se conectan elementos matemáticos. Dentro de las categorías de este subdominio se encuentran las conexiones de complejización, donde se conectan dos elementos matemáticos de modo que cuando se trabajan elementos básicos, se sepan las implicaciones que tiene dicho conocimiento sobre otros más avanzados, por el contrario, también se encuentran las conexiones de simplificación de modo que cuando se trabajan elementos avanzados se debe saber las implicaciones que otros elementos más elementales tuvieron sobre dicho conocimiento avanzado (Flores-Medrano, 2022).

Además, en este dominio se consideran las conexiones trasversales, que se dan cuando existen elementos matemáticos presentes de manera trasversal en las matemáticas que se pueden articular, y, por último, se tienen las conexiones auxiliares las cuales son conexiones de utilidad, debido a que son elementos que no forman un mismo objeto, y por ende, no se relacionan los elementos matemáticos por medio de conexiones intraconceptuales, ni tampoco cumplen la relación de temporalidad en términos de complejidad o simplicidad (Flores-Medrano, 2022).

Conocimiento de la Práctica Matemática (KPM): En este subdominio no solo se tiene en cuenta que el profesor conozca resultados matemáticos establecidos (KoT), sino que además se consideran las formas de proceder para llegar a dichos resultados, es decir cómo se explora y genera conocimiento en matemáticas, cómo se establecen relaciones, correspondencias, equivalencias, cómo se argumenta, se razona y se generaliza, así como las características de los elementos del trabajo matemático, tales como una definición o una demostración (Flores-Medrano et al., 2014).

Asimismo, en este subdominio tiene un papel importante el conocimiento de distintos heurísticos en resolución de problemas, que comprenden la estructura lógica en la que se desarrolla la resolución (Muñoz-Catalán et al., 2015).

Con respecto al PCK según Escudero-Ávila et al. (2017), este hace referencia al conocimiento que posee el profesor sobre el contenido matemático tomado como objeto de enseñanza y aprendizaje.

Es importante resaltar que, aunque las siglas de este dominio en inglés signifiquen Pedagogical Content Knowledge, al realizar la traducción al español estas siglas significan Conocimiento Didáctico del Contenido, debido a que en este dominio no se incluyen conocimientos pedagógicos generales aplicados a contextos de actividades matemáticas, sino únicamente a aquellos donde el contenido matemático condiciona la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, es decir, considera a la parte didáctica que surge de la matemática propia como objeto de enseñanza (Carrillo-Yañez et al., 2018; Flores-Medrano et al., 2014). En este dominio se consideran los siguientes tres subdominios y categorías:

Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT): En este subdominio se considera el conocimiento que tiene el profesor de las vías, es decir, los recursos (físicos o digitales) y formas de enseñar matemáticas. Además, se encuentra el conocimiento que posee de diferentes estrategias, técnicas tareas y ejemplos, así como teorías institucionales o personales de enseñanza de las matemáticas (Muñoz-Catalán et al., 2015).

Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM): Este hace referencia al conocimiento que tiene el profesor acerca del contenido matemático como objeto de aprendizaje, es decir el conocimiento de los fenómenos que se producen cuando una persona aprehende un determinado contenido matemático (Zakaryan et al., 2018).

Dentro de las categorías que hacen parte de este subdominio se encuentran las teorías de aprendizaje, las fortalezas y dificultades asociadas a un contenido matemático, las formas de interacción con un contenido matemático asociadas a su aprendizaje, y, por último, los intereses y expectativas de los estudiantes sobre el abordaje de un determinado contenido matemático (Sosa et al., 2015; Zakaryan et al., 2018).

Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS): Este subdominio comprende lo que un profesor conoce del currículo oficial de matemáticas vigente en el país en el que trabaja como docente, y su concreción, en caso de existir, en un territorio concreto. También incluye el conocimiento de los contenidos y capacidades que deben aprenderse o desarrollarse en un curso o un determinado momento, teniendo en cuenta las formas en que deben impartirse o aprenderse dichos contenidos (Zakaryan y Ribeiro, 2016).

En síntesis, el modelo MTSK se compone por dominios de conocimiento y cada uno está dividido en subdominios y estos a su vez se concretan en categorías. Esta estructura analítica se presenta de forma organizada y detallada en la tabla presentada por Delgado-Rebolledo y Espinoza-Vásquez (2021) la cual se muestra a continuación:

Tabla 1. El modelo MTSK: Dominios, subdominios y categorías de conocimiento

Dominios y subdominios		Categorías de conocimiento
Conocimiento Matemático (MK)	Conocimiento de los temas (KoT)	Procedimientos
		Definiciones, propiedades y sus fundamentos
		Registros de representación
		Fenomenología y aplicaciones
	Conocimiento de la estructura matemática (KSM)	Conexiones de complejización
		Conexiones de simplificación
		Conexiones transversales
		Conexiones auxiliares
	Conocimiento de la práctica matemática (KPM)	La práctica de demostrar
		La práctica de definir
		La práctica de resolver problemas
		El papel del lenguaje matemático
Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK)	Conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas (KFLM)	Teorías de aprendizaje de las matemáticas
		Fortalezas y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas
		Formas de interacción con un contenido matemático
		Aspectos emocionales del aprendizaje de las matemáticas
	Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT)	Teorías de enseñanza de las matemáticas
		Recursos de enseñanza
		Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos
	Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS)	Expectativas de aprendizaje
		Nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado
		Secuenciación de temas

Fuente: Delgado-Rebolledo y Espinoza-Vásquez (2021, p.289)

2.2. Relaciones entre subdominios del MTSK

Dentro de la literatura científica, varias investigaciones se han centrado en estudiar el conocimiento del profesor en diferentes niveles educativos, estableciendo relaciones entre los subdominios del conocimiento especializado del profesor de matemáticas (e.g., Delgado-Rebolledo y Espinoza-Vásquez, 2021; Delgado-Rebolledo y Zakaryan, 2020; Pacheco-Muñoz et al., 2021; Paternina-Borja et al., 2021; Zakaryan y Ribeiro, 2016; Zakaryan et al. 2018).

Primeramente, se han identificado relaciones entre subdominios de un mismo dominio, por ejemplo, en el MK, Escudero (2015) afirma que el KSM guarda relación con el KoT, ya que este hace referencia al tipo de conexiones que pueden observarse en las relaciones interconceptuales existentes entre contenidos matemáticos. Además, en el PCK, se han evidenciado relaciones entre el KFLM y el KMT, donde al proponer una tarea para abordar cierto concepto matemático, ha estado involucrado el conocimiento de las dificultades de aprendizaje (Zakaryan et al., 2018).

Asimismo, se han evidenciado relaciones entre subdominios de diferentes dominios, como es la relación del KFLM y el KoT, puesto que la propia definición del KFLM está hecha para reconocer que el conocimiento didáctico es inherente a un determinado contenido matemático. Igualmente, el conocimiento de características matemáticas, de herramientas y estrategias de enseñanza que tiene el profesor (KMT), así como el uso que hace de estos conocimientos puede relacionarse con lo que sabe acerca de las formas de proceder en matemáticas (KPM) (Escudero-Ávila et al., 2017).

Por otro lado, existen relaciones entre conocimientos internos de un mismo subdominio, como es caso del KoT, donde se han logrado evidenciar diversas relaciones respecto al conocimiento de la definición de una función y cómo esta permite determinar procedimientos para validar y construir relaciones funcionales (Espinoza, 2020).

En definitiva, estas relaciones van en concordancia con las establecidas por Delgado-Rebolledo y Espinoza-Vásquez (2021) donde afirman que, debido a la estructuración del MTSK y al carácter integrado del conocimiento, se pueden encontrar investigaciones que evidencian relaciones entre los conocimientos de un mismo subdominio (intra-subdominio), relaciones al interior de un dominio, donde se relacionan dos o más subdominios (intra-dominio) o pueden encontrarse relaciones entre diferentes dominios (inter-dominio).

Capítulo 3

METODOLOGÍA

En este capítulo se hará mención del paradigma adoptado en la presente investigación y sus perspectivas ontológica, epistemológica, metodológica y axiológica, además se definirá el tipo y diseño de investigación utilizado, los informantes, los métodos o instrumentos de recolección de datos y, por último, de describirá el procedimiento de recolección y análisis de los datos.

3.1. Paradigma de la investigación

Antes de dar a conocer el paradigma que será adoptado en la presente investigación es importante definir qué es un paradigma. Para Kuhn (1971), un paradigma es “toda la constelación de creencias, valores, técnicas, etc., que comparten los miembros de una comunidad dada” (p. 13). De forma similar, para Bassey (1999), un paradigma es una red de ideas coherentes sobre la naturaleza del mundo y de las funciones de los investigadores que (aceptadas por una comunidad de científica), condicionan las pautas de razonamiento y sustentan las acciones en la investigación.

Cabe resaltar que, esta investigación tiene como finalidad estudiar el conocimiento especializado del profesor de matemáticas y establecer relaciones entre subdominios del modelo MTSK que evidencian profesores de matemáticas de educación básica al diseñar un plan de clases sobre resolución de problemas aditivos con números enteros, y de este modo, comprender y profundizar en su conocimiento. Dicho de este modo, esta investigación opta por un paradigma interpretativo, debido a que se busca aproximarnos a la comprensión del conocimiento, por medio de la interpretación que realizamos de los datos que se obtienen, lo que nos lleva a elegir el paradigma interpretativo como el más apropiado para esta investigación.

Asimismo, cuando el propósito principal es comprender e interpretar la realidad entonces, se suele hacer uso de métodos y técnicas de naturaleza cualitativa que permitan conocer la realidad en un proceso de indagación, además, hay que tener en cuenta que se construye la propia interpretación del fenómeno a partir de lo que el investigador considera que se pone de manifiesto en las actuaciones del profesor observado (Aguilar-González et al., 2018).

Adicionalmente, la mayoría de las investigaciones en las que se ha desarrollado el modelo MTSK, optan por un paradigma interpretativo, debido a que está vinculado en comprender la naturaleza del conocimiento que pone en juego el profesor, y cómo este se articula con los diferentes componentes de conocimiento (Carrillo et al., 2017).

Como podemos observar, se ha justificado la elección del paradigma interpretativo para el desarrollo de nuestra investigación. Seguidamente, se definirá la perspectiva ontológica, epistemológica, metodológica y axiológica que tiene en cuenta este paradigma.

3.1.1. Perspectiva ontológica

En la presente investigación adoptamos una posición relativista de la realidad, ya que, desde el paradigma interpretativo, la naturaleza de la realidad es concebida como una realidad subjetiva que depende del investigador; además es dinámica, múltiple, holística, construida y divergente (Koetting, 1984; Ricoy Lorenzo, 2006).

3.1.2. Perspectiva epistemológica

Respondiendo a la cuestión epistemológica desde el paradigma interpretativo, en primer lugar, podemos afirmar que el modo en el que se adquiere el conocimiento es ideográfico, debido a que se dan explicaciones en un contexto y en un tiempo dado, además es cualitativo e inductivo (Koetting, 1984). Seguidamente, respecto a la relación entre el investigador y el objeto de investigación, este paradigma considera que hay una dependencia debido a que se afectan mutuamente, ya que las personas se ven afectadas por los procesos que estudian, y, por ende, la relación entre el investigador y el fenómeno social es interactiva (Muñoz-Catalán, 2009).

Por último, la finalidad de la investigación en este paradigma es comprender y describir la realidad educativa por medio del análisis de las percepciones e interpretaciones de los sujetos que intervienen en las situaciones objeto de investigación, aquí es importante resaltar la perspectiva de los participantes, ya que la comprensión profunda de los casos particulares puede ayudar a acceder al simbolismo que configura una realidad educativa concreta (Sánchez, 2013).

3.1.3. Perspectiva metodológica

Respecto a la pregunta metodológica de cómo aproximarnos a la realidad, este paradigma sugiere utilizar diseños de investigación tales como teoría fundamentada, diseños etnográficos, diseños narrativos, diseños fenomenológicos, diseños de investigación-acción y estudios de caso cualitativos (Hernández-Sampieri et al., 2014). En esta investigación se utilizó un diseño de estudio de caso, además se realizó bajo una metodología cualitativa que caracteriza al paradigma interpretativo, ya que busca profundizar en la investigación planteando diseños abiertos y emergentes desde la globalidad y contextualización, utilizando técnicas de recolección de datos tales como la observación participativa, las entrevistas, los diarios y el estudio de caso (Ricoy Lorenzo, 2006). En adición, en el análisis de los datos se podría utilizar el análisis de contenido y la triangulación (Sánchez, 2013).

3.1.4. Perspectiva axiológica

Finalmente, estamos de acuerdo con Koetting (1984) en que este paradigma tiene en cuenta los valores porque estos influyen determinantemente en la solución del problema de investigación, la teoría utilizada, el método y el análisis de los datos.

3.2. Tipo de investigación

Dado que el paradigma adoptado es el interpretativo, el enfoque más adecuado y que adoptamos es el cualitativo, debido a que tal como lo afirman Hernández-Sampieri et al. (2014), "la investigación cualitativa se fundamenta en una perspectiva interpretativa centrada en el entendimiento del significado de las acciones de seres vivos, sobre todo de los humanos y sus instituciones (busca interpretar lo que va captando activamente)" (p. 9). Además, de acuerdo con estos autores, es importante realizar este tipo de investigaciones debido a que proporcionan profundidad a los datos, riqueza interpretativa, contextualización del ambiente o entorno, detalles y experiencias únicas, también nos ayuda a tener un punto de vista "fresco, natural y holístico" de los fenómenos, así como flexibilidad.

3.3. Diseño de la investigación

En un primer momento, es relevante definir qué es un caso, para Stake (1995), "un caso puede ser un alumno, un profesor, un programa educativo, un centro escolar, la unidad formada por el profesor y sus alumnos" (p. 2). Asimismo, el estudio de caso es "el estudio de una singularidad conducido en profundidad en entornos naturales" (Bassey, 1999, p. 47). En suma, el estudio de caso puede considerarse como un diseño de investigación, porque constituye un marco que guía el proceso de aplicación de métodos de investigación (Muñoz-Catalán y Monteiro, 2016).

Por otro lado, un tipo de estudio de caso es el instrumental, este a su vez es pertinente para indagar en los fenómenos que preocupan en la Educación Matemática, además, el estudio de caso instrumental permite lograr una mejor comprensión respecto de un tema determinado o pretende desarrollar una proposición teórica (Muñoz-Catalán, 2021). En adición, dentro de los estudios de caso, Stake (1995) define también los estudios de caso colectivos, donde el foco se encuentra en el estudio de más de una singularidad con el fin de comprender mejor el fenómeno del que forma parte, y al final al dar a conocer los resultados de los casos estudiados, se dan como una articulación de los estudios individuales, identificando los rasgos claves y propios que aportan información relevante sobre el fenómeno estudiado.

Por tanto, en esta investigación se llevará a cabo un estudio de caso colectivo de carácter instrumental con dos profesores de matemáticas de educación básica, uno de Colombia y otro de México, de dos instituciones educativas públicas, los profesores serán los casos, y el fenómeno a estudiar será el conocimiento especializado que evidencian los profesores de matemáticas y sus relaciones, al diseñar un plan de clase sobre problemas aditivos con números enteros.

3.4. Informantes

Los informantes de la presente investigación son dos profesores de matemáticas de educación básica secundaria. El profesor colombiano (en adelante Jorge) es Licenciado en Educación Básica con énfasis en Matemáticas, ha recibido una maestría en Educación Matemática y cuenta con siete años de experiencia en la enseñanza de las matemáticas en educación básica secundaria. Labora en una Institución educativa privada de la ciudad de Cali, Valle del Cauca, la cual se encuentra ubicada en la región pacífica colombiana. La mayoría de la población de este municipio se dedica a las industrias del azúcar, el caucho, los químicos, la fabricación de muebles, el papel y la molinería. El colegio donde trabaja el profesor se encuentra ubicado en la zona urbana de la ciudad, específicamente al sur. En el anualmente se matriculan aproximadamente 200 estudiantes, su modelo educativo es el británico debido a su carácter bilingüe, y el estrato socioeconómico de los estudiantes de la institución es medio alto.

La profesora mexicana (en adelante Leticia) es Licenciada en Matemáticas Aplicadas y ha recibido una maestría en Educación Matemática, cuenta con cinco años de experiencia en la enseñanza de las matemáticas en secundaria y preparatoria. Labora en una escuela privada (particular) del municipio de Apizaco, Tlaxcala, el cual se encuentra ubicado en la región centro norte de México. La mayor parte de su población se dedica al comercio al por menor, a servicios de alojamiento temporal y de preparación de alimentos y bebidas, entre otros servicios, excepto actividades gubernamentales. La escuela se encuentra ubicada en la zona urbana federal del municipio, en los últimos años se han matriculado aproximadamente 230 estudiantes los cuales pertenecen a un nivel socioeconómico medio alto.

3.5. Métodos o instrumentos de recolección de datos

En la presente investigación, para la recolección de los datos se utilizó como instrumento la planeación de clase, la cual debía ser diseñada por cada profesor informante, además, se implementó una entrevista semiestructurada a cada uno de los profesores. A continuación, se describen estos instrumentos de manera detallada.

3.5.1. Plan de clases

En primera instancia, Pacheco-Muñoz et al. (2022) consideran que la planeación de clase es una de las facetas del quehacer docente que permite estudiar, analizar y caracterizar el conocimiento especializado que el docente pone en juego. Del mismo modo, Flores et al. (2013) consideran que analizar la planificación de una clase permite tener una panorámica de posibles aspectos de conocimiento para investigar en alguna otra práctica del profesor.

Adicionalmente, Pacheco-Muñoz et al. (2022) afirman que la planeación de clase es un instrumento clave que puede ayudar a identificar indicios de conocimiento del profesor de matemáticas, y de este modo, convertirlos en evidencias de conocimiento mediante preguntas de profundización llevadas a cabo en una entrevista. Entre algunas investigaciones que han considerado este instrumento de recolección de datos se encuentran las realizadas por Pacheco-Muñoz et al. (2021, 2022, 2023), Paternina-Borja et al. (2021) y Paternina-Borja y Juárez-Ruiz (2023).

Dicho de esta manera, se le solicitó a los profesores en primer lugar, el diseño de una planeación de clases sobre resolución de problemas aditivos con números enteros, con la finalidad de identificar indicios de conocimiento, evidencias de conocimiento y oportunidades de investigación para estudiar el conocimiento especializado que emplean en su intención de enseñar este tema. Se les sugiere a los profesores, además, que utilicen el formato de plan de clases propuesto por el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2017), teniendo en cuenta las fases y momentos descritos en este: primero, se encuentra la fase de inicio que incluye el momento de exploración, luego la fase de desarrollo que incluye los momentos de estructuración y práctica-ejecución y, por último, la fase de cierre, que incluye los momentos de transferencia y valoración (evaluación formativa). Sin embargo, se les permite adecuarlos a sus intereses. Cabe resaltar que la profesora mexicana planificó cinco sesiones de 50 minutos y el profesor colombiano planificó 10 horas de clases, el número de sesiones planificadas se dejó a criterio de los informantes.

3.5.2. Entrevista

La entrevista es una reunión que permite conversar e intercambiar información entre dos o más personas (el entrevistador y el/los entrevistado/s), a través de preguntas y respuestas se logra una comunicación y la construcción conjunta de significados referentes a un tema (Janesick, 1998). Por tanto, en segunda instancia, se realizó una entrevista semiestructurada a los profesores, constituida por preguntas abiertas basadas en los indicios de conocimiento identificados en los planes de clases diseñados por las informantes, teniendo en cuenta cada categoría de los subdominios MK y PCK del modelo.

El propósito de la entrevista fue indagar en el conocimiento de los profesores para confirmar los indicios de conocimiento en evidencias de conocimiento, además de aprovechar las oportunidades de investigación que surgieron durante la entrevista.

Las entrevistas fueron realizadas por videoconferencias vía Zoom, y cada una tuvo una duración de una hora y media. Cabe destacar que, las entrevistas semiestructuradas se basaron en una guía de preguntas o asuntos y estas permitieron al entrevistador introducir preguntas adicionales con el fin de precisar conceptos y obtener más información (Hernández-Sampieri et al., 2014).

3.6. Procedimiento de análisis de los datos

Además de las preguntas planteadas surgieron también descriptores para cada categoría, teniendo en cuenta la temática de problemas aditivos con números enteros, que nos sirvieron para el análisis de la entrevista. Luego, se transcribieron las grabaciones de las entrevistas realizadas a los profesores para su análisis, considerando la diferencia entre indicio y evidencia de conocimiento, este análisis se llevó a cabo por medio de la técnica de análisis de contenido, la cual es una técnica de interpretación de textos que se basa en la descomposición y clasificación de éstos, donde los textos de interés pueden ser: transcripciones de entrevistas, protocolos de observación, notas de campos, artículos de diarios y revistas, etcétera (Marradi et al., 2007).

Dicho de este modo, la técnica utilizada para el análisis de los datos obtenidos permitió la descomposición y análisis de las respuestas obtenidas por los profesores, y de este modo poder identificar el conocimiento evidenciado por ellas y establecer relaciones entre subdominios del conocimiento especializado que movilizaron las informantes, las relaciones encontradas se clasificaron teniendo en cuenta la propuesta de Delgado-Rebolledo y Espinoza-Vásquez (2021).

Teniendo en cuenta que el fenómeno a estudiar es el conocimiento especializado de los profesores, es importante definir qué implica una relación entre fenómenos, para Spencer et al. (2014) este tipo de relación implica la identificación de asociaciones entre distintos fenómenos dentro de los datos. Del mismo modo, estos autores afirman que un fenómeno puede estar relacionado con otro como parte de una interacción, y la relación entre los fenómenos será de tipo *funcional*. También pueden darse relaciones *estructurales,* en el sentido en que un fenómeno fomenta o inhibe a otro. Además, pueden encontrarse relaciones *contextuales,* en el sentido de que un fenómeno puede servir de marco a otro. Por último, un fenómeno puede preceder a otro, y este tipo de relación la denominan los autores como relación *secuencial*.

Ahora bien, en el marco de las investigaciones del modelo MTSK autores han definido lo que se considera como evidencia de relación entre subdominios de conocimiento, algunos consideran que para afirmar que dos (o más) subdominios de conocimiento están relacionados en un episodio, se deben identificar indicios o evidencias que ayuden a interpretar qué conocimiento ha manifestado el profesor y, con dicha identificación, se establece la relación (Flores-Medrano, 2015; Aguilar-González et al., 2018).

En adición, Aguilar-González et al. (2019) afirman que en un mismo episodio se pueden identificar evidencias o indicios de dos o más subdominios de conocimiento, los cuales se complementan, estableciendo de este modo relaciones entre subdominios. Por otro lado, Delgado-Rebolledo y Espinoza-Vásquez (2021) afirman que también se podría considerar que existen relaciones entre los subdominios cuando dependen unos de otros, se sustentan, complementan, asocian o potencian.

Adicionalmente, Delgado-Rebolledo y Zakaryan (2020) afirman que se tiene evidencia de relaciones cuando se identifica un subdominio que sustenta o condiciona la aparición de uno o más subdominios. Del mismo modo, Pacheco-Muñoz et al. (2023) llamaron a este tipo de relaciones "relaciones direccionales" afirmando además que la categoría del subdominio que toma el punto de partida tendría el rol de condicionador y la categoría del subdominio que toma el punto de llegada tomaría el rol de movilizado, en el cual podrían tomar una o más categorías en un argumento especifico. Este tipo de relaciones podría ser de tipo estructural según lo planteado por Spencer et al. (2014), puesto que en este caso los conocimiento fomentan o condicionan la existencia de otros conocimientos.

Teniendo en cuenta lo anteriormente mencionado, en esta investigación se entenderá que se tiene una evidencia de relación cuando se identifiquen dos o más subdominios de conocimiento en mismo episodio de clase, argumento específico o fragmento de entrevista en los cuales los subdominios se asocien, complementen, sustenten, condicionen, direccionen, potencien, fomenten inhiben, dependan unos de otros, sirvan de marco unos de otro o precedan unos a otros.

Capítulo 4

RESULTADOS Y ANÁLISIS

En este apartado, se presentan los resultados encontrados al estudiar el conocimiento evidenciado por los profesores en el diseño de su planeación de clases sobre resolución de problemas aditivos con números enteros, y la entrevista semiestructurada realizada a partir de los indicios y evidencias de conocimiento que emergieron en el diseño de la planeación, realizando la triangulación de los datos.

4.1. Resultados y análisis profesora mexicana

Los siguientes resultados se presentan teniendo en cuenta la etapa diagnóstica y la etapa de acciones dentro del aula de la planeación de clase, en la primera etapa la profesora enuncia los temas, aprendizajes esperados, conocimientos previos, competencias, indicadores de desempeño, metodología de aprendizaje y el perfil de sus estudiantes. En la segunda etapa, se presentan los resultados teniendo en cuenta las fases de inicio, desarrollo y cierre del diseño. En la fase de inicio incluye el momento de exploración, donde se plantean actividades introductorias. Luego, en la fase de desarrollo incluye el momento de estructuración, aquí la profesora define y ejemplifica conceptos de la temática; también se incluye el momento de práctica-ejecución donde la profesora plantea una secuencia de actividades que van aumentando su grado de dificultad. Por último, en la fase de cierre, se incluye el momento de transferencia, la profesora plantea realizar actividades en grupo para compartir ideas de los problemas propuestos.

Ahora bien, en la etapa diagnóstica, en su planeación de clases, la profesora estableció los conocimientos previos necesarios para abordar esta temática (ver Figura 2). Estos conocimientos previos se tomaron como un indicio para profundizar en el conocimiento de la profesora.

Figura 2. Conocimientos previos necesarios

Conocimientos previos necesarios:	Tipos de números, positivos, negativos, etc. Manejo y representación de números en la recta

Fuente: Diseño de la planeación de la informante mexicana

De este modo, en la entrevista se le preguntó a la profesora ¿Estos conocimientos previos lo debieron haber desarrollado los estudiantes en el grado anterior, es decir, en 6º de primaria?, ¿o se dieron en ese curso de primero de secundaria, pero antes de ese tema?, Leticia respondió:

> *Leticia: En este apartado estoy considerando los conocimientos previos que ellos deberían tener o por lo menos tener noción. En sección secundaria, lo que es primeros grados me he percatado que hay algunos estudiantes obviamente que ingresan a primero de secundaria que ya vieron esos temas y otros obviamente que los tienen que reforzar. Se entendería que tendría que ser algo que vieron en 6º de primaria. Entonces como que siento que es lo mínimo necesario para poder introducirlos a este contenido. (Leticia, Extracto de la entrevista, 4 de mayo de 2022).*

En este fragmento de entrevista, se observa que Leticia tiene conocimiento sobre los conocimientos previos que el estudiante debe poseer para avanzar en el estudio de la resolución de problemas con número enteros, además, se evidencia conocimiento sobre la profundidad con la que espera que sea abordada la temática, con relación al ciclo escolar que se está trabajando. Dicho de este modo, se evidencia la relación entre el conocimiento de temas anteriores que debe haber aprendido el estudiante en sexto grado y que necesita para introducirse al nuevo contenido (*Secuenciación de temas, KMLS)* y el nivel esperado de desarrollo mínimo para introducirlos a este contenido *(Nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado, KMLS)*. Así, podemos observar que se encuentra una relación intra-subdominio, debido a que se relacionan dos categorías de un mismo subdominio, que en este caso es el KMLS.

Tabla 2. Descriptores y categorías evidenciadas del KMLS.

Subdominio	KMLS	
Categorías	Secuenciación de temas	Nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado
Descriptores	Conoce los temas matemáticos previos tales como tipos de números y manejo de la recta numérica que el estudiante debe haber desarrollado en sexto grado para abordar la resolución de problemas aditivos con números enteros.	Conoce el grado de profundidad que deben desarrollar los estudiantes sobre el concepto de números enteros y su representación en sexto de primaria.

Seguidamente, se le preguntó a la profesora ¿Cómo le aportarían estos conocimientos previos al objeto matemático que se va a trabajar, que en este caso es la resolución de problemas aditivos con números enteros?, Leticia respondió:

Leticia: Conocer los números es algo fundamental, los estudiantes en lo que es primaria van formalizando el manejo de números y llega el momento en donde empiezan a distinguir que tenemos números positivos, negativos y que se pueden hacer las operaciones básicas entre estos tipos de números y su combinación, más allá de lo que ellos conocían, de cinco más dos, por ejemplo, sino que ya empezamos a hacer la combinación con negativos. Como esto resulta difícil, es claro que ellos necesitan como visualizar este movimiento y uno de los auxiliares de las herramientas o estrategias para la enseñanza de este tema, pues es justamente la recta numérica, dado pues el sentido de la operación. Entonces, por ejemplo, ven solo suma de números o restas de números, que en primaria los ven, digamos marcados muy independientes. Es decir, en su momento no combinan -5+9 o 5-9 pero ya cuando ingresamos a secundaria los podemos conjuntar para la enseñanza. (Leticia, Extracto de la entrevista, 4 de mayo de 2022)

De este fragmento de entrevista, se puede evidenciar el conocimiento que Leticia tiene sobre los temas que debieron haber aprendido sus estudiantes desde la primaria hasta llegar a grado séptimo. Además, se evidencia la conexión que realiza la profesora del tema con la recta numérica, la cual le permitirá visualizar mejor las operaciones a realizar. Por otra parte, la profesora conoce dificultades que presentan los estudiantes al ingresar a secundaria. De esta manera se evidencia la relación entre el conocimiento sobre la secuenciación de diversos contenidos matemáticos, del mismo curso y de cursos anteriores *(Secuenciación de temas, KMLS)* y la conexión con la recta numérica para el desarrollo del tema *(Conexiones auxiliares, KSM)*, además la profesora tiene en cuenta las dificultades que presentan los estudiantes cuando combinan operaciones básicas con negativos *(Fortalezas y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, KFLM)*. Luego, se observa una relación intra-dominio entre categorías de subdominios del PCK, y una relación inter-dominio, entre estas categorías y una categoría de un subdominio del MK.

Tabla 3. Descriptores y categorías evidenciadas del KMLS, KSM y KFLM.

Subdominios	KMLS	KSM	KFLM
Categorías	Secuenciación de temas	Conexiones auxiliares	Fortalezas y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas
Descriptores	Conoce temas anteriores que deben haber desarrollado los estudiantes tales como tipos de números para el estudio de problemas aditivos con números enteros.	Conoce la recta numérica como un auxiliar para visualizar el movimiento de la suma y resta de números enteros.	Conoce la dificultad que presentan los estudiantes en la combinación de operaciones básicas con números negativos en la resolución de problemas aditivos con enteros.

Seguidamente en la etapa diagnóstica, la profesora en el diseño de su planeación de clase plantea unas competencias específicas del contenido a trabajar (ver Figura 3). Estas competencias se tomaron como un indicio para profundizar en el conocimiento de la profesora.

Figura 3. Competencias específicas de contenido

Competencias específicas de contenido	1. Analiza situaciones para construir el significado de valor absoluto y números simétricos. 2. Resuelve problemas de suma de números enteros con y sin apoyo de la recta numérica. 3. Formaliza la suma y resta con números enteros positivos y negativos. 4. Comprende que la suma y la resta son operaciones inversas 5. Aplicación y solución de problemas

Fuente: Diseño de la planeación de la informante mexicana

De este modo, en la entrevista se le preguntó a la profesora ¿Estas competencias específicas cómo le aportarían a su planeación o cómo le aportarían a usted al momento de implementar la temática en la clase?, Leticia respondió:

> *Leticia: Estas competencias específicas también vienen de apoyo en el plan y programa de estudio de secundaria de México. Sin embargo, nosotros como docentes hacemos la planeación, podemos hacer ajustes, por ejemplo en el apartado dos (Resuelve problemas de suma de números enteros con o sin apoyo de la recta numérica), creo que es con el que yo iniciaría, entonces, ahí hago el cambio, lo pondría como punto número uno, porque de esa manera el alumno visualmente empieza a introducir estas operaciones y como bien dice, primero con y luego sin, para irlos soltando, y que vayan mejorando sus habilidades, formalizar (la) suma y (la) resta con números enteros positivos, creo que está bien después de estos temas, porque ya nos vamos a ejercicios e incluso cálculo mental, y, por último, comprende que la suma y la resta, son operaciones inversas. Por ejemplo, en el caso de las propiedades formales de la matemática, muchas veces esto los estudiantes igual no lo logran comprender como tal, que súmale el inverso aditivo, entonces estas palabras pues a veces cuestan trabajo y entonces como que sería una competencia específica, que sería una de las últimas. Y el punto cinco, aplicación y solución de problemas, se consolida como la parte final, sin embargo, pues en la educación de México, ya se ha estado proponiendo que estos problemas se trabajen como detonantes desde inicio de clase. (Leticia, Extracto de la entrevista, 4 de mayo de 2022).*

De este fragmento de entrevista, se puede evidenciar el conocimiento que Leticia tiene sobre las competencias matemáticas que el estudiante debe desarrollar. Asimismo, evidencia conocimiento acerca de la forma como el estudiante desarrolla estas competencias y las dificultades que puede presentar al desarrollarlas. Así, se evidencia una relación entre las competencias matemáticas específicas que el estudiante debe desarrollar *(Expectativas de aprendizaje, KMLS)*, la forma como utiliza la recta numérica en la resolución de problemas aditivos con enteros *(Formas de interacción con un contenido matemático, KFLM)* y las dificultades que pueden presentar los estudiantes con el lenguaje matemático al resolver estos problemas *(Fortalezas y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, KFLM)*. Así, se observa una relación intra-subdominio entre categorías del KFLM y una relación intra-dominio entre categorías de subdominios del PCK.

Tabla 4. Descriptores y categorías evidenciadas del KMLS y KFLM.

Subdominios	KMLS	KFLM	
Categorías	Expectativas de aprendizaje	Fortalezas y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas	Formas de interacción con un contenido matemático
Descriptores	Conoce las competencias matemáticas específicas que el estudiante debe desarrollar para la resolución de problemas aditivos con números enteros.	Conoce las dificultades que pueden presentar los estudiantes con el lenguaje matemático al resolver problemas aditivos con números enteros.	Conoce la forma como el estudiante utiliza la recta numérica en la resolución de problemas aditivos con números enteros.

Luego, la profesora en el diseño de su planeación de clases plantea la metodología de aprendizaje a utilizar (ver Figura 4). Esta metodología se tomó como un indicio para profundizar en el conocimiento de la profesora.

Figura 4. Metodología de aprendizaje

Metodología de aprendizaje	Aprendizaje basado en problemas Comunidad virtual de aprendizaje Gamificación Modelo Heurístico e inductivo

Fuente: Diseño de la planeación de la informante mexicana

De este modo, en la entrevista se le preguntó a la profesora: el aprendizaje basado en problemas, ¿De qué manera le aporta también al desarrollo de su clase?, Leticia respondió:

> *Leticia: Considero que justamente esta metodología nos ayuda porque es netamente problemas, problemas de contexto, cotidianos al alumno, cercano, que él tenga que buscar y deba tener la intención de resolver, para su bien común por decirlo. Y pues algo importante de esta metodología considero es la aplicación que ellos ven porque muchas veces es como de, bueno, son operaciones, son cuentas, pero ellos quieren ver como la parte práctica ¿no? Entonces, cuando se les da un reto de un problema de su entorno, un problema en este caso por decir real, pues ellos se ven más involucrados, se ven más dinámicos, se ven más en esa intención de pues del aprendizaje. En el caso de que, muchas veces en el libro de texto nos enfrentamos a problemas, pero muchas veces los problemas están desfasados ¿no? que muchas veces los estudiantes dicen bueno, es ilógico que suceda esto. (Leticia, Extracto de la entrevista, 4 de mayo de 2022).*

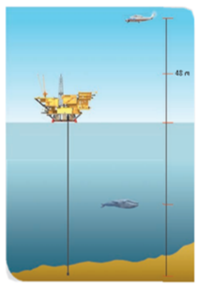
De la planeación de clase y de este fragmento de entrevista, se puede evidenciar el conocimiento que Leticia tiene sobre el aprendizaje basado en problemas como estrategia de enseñanza. Además, evidencia conocimiento acerca de aspectos que despiertan el interés en sus estudiantes y las limitaciones que pueden presentar los recursos físicos que utiliza para la enseñanza, como los libros de texto. Dicho de este modo, se evidencia una relación entre el aprendizaje basado en problemas como una estrategia de enseñanza *(Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos, KMT)*, su potencialidad para despertar el interés y motivación en los estudiantes *(Aspectos emocionales del aprendizaje de las matemáticas, KFLM)* y las limitaciones que presentan recursos físicos tales como el libro de texto donde se pueden tomar estos problemas *(Recursos de enseñanza, KMT)*. Por tanto, se evidencia una relación intra-subdominio entre categorías del subdominio KMT y una relación intra-dominio entre categorías de subdominios del PCK.

Tabla 5. Descriptores y categorías evidenciadas del KMT y KFLM.

Subdominios	KMT		KFLM
Categorías	Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos	Recursos de enseñanza	Aspectos emocionales del aprendizaje de las matemáticas
Descriptores	Conoce y utiliza el aprendizaje basado en problemas como una estrategia de enseñanza para la resolución de problemas aditivos con números enteros.	Conoce el libro de texto como recurso físico de enseñanza y las limitaciones que pueden tener sobre los tipos de problemas relacionados con la adición de números enteros.	Conoce la potencialidad del aprendizaje basado en problemas para despertar el interés y motivación de los estudiantes en la resolución de problemas aditivos con números enteros.

Continuando con el análisis, en la segunda etapa de acciones dentro del aula, la profesora Leticia, en el momento de exploración de la fase de inicio propone una actividad introductoria para conocer los conocimientos que tienen sus estudiantes antes de abordar la temática e identificar posibles dificultades (ver Figura 5). La actividad fue tomada por la profesora del libro de texto de Bosch et al. (2018, p. 42).

Figura 5. Momento de exploración en la fase de inicio

Fase	Momento	Actividades	Recursos y materiales	Tiempo
Inicio	Exploración	Se toma de referencia la actividad introductoria propuesta en libro de texto y se discute de manera grupal, lo que permite al docente conocer cómo cada estudiante comprende y aborda el problema, y las dificultades que puedan presentarse. El problema es el siguiente: **1.** Lee la situación y haz lo que se pide. Una compañía petrolera instaló una plataforma para la extracción de crudo a 48 m sobre el nivel del mar, y el yacimiento se ubica a 150 m bajo el nivel del mar. **a)** Señala en la figura 1.7 las distancias antes mencionadas.  **Figura 1.7** **b)** En la imagen se observa un helicóptero y una ballena. ¿Cuál de ellos se encuentra a una distancia de +100 m del nivel del mar? ______ **c)** ¿Cuál se encuentra a −80 m? ______ **d)** Dibuja en la imagen un buzo que esté aproximadamente a -20 m del nivel del mar. **e)** Dibuja en la imagen un submarino que esté aproximadamente a −100 m del nivel del mar. **f)** Dibuja en la imagen un ave que esté aproximadamente a +75 m del nivel del mar. **g)** De la distancia entre el helicóptero y la plataforma y la distancia entre el submarino y la plataforma, ¿cuál de las dos es mayor? **h)** ¿Qué distancia es mayor, la distancia entre el ave y la plataforma o la distancia entre la plataforma y la ballena? ______ En grupo comparen y validen sus resultados.	Libro de texto Libreta	20 minutos

Fuente: Diseño de la planeación de la informante

De esta manera, se le pregunta a la profesora: ¿Cómo cree usted que ellos abordarían esta actividad? Leticia respondió:

> *Leticia: Si, hay algunos puntos donde considero que sería o genera este ejercicio o estos incisos ciertas dudas. Por ejemplo, a la hora que pide dibujar, (ellos podrían preguntarse) ¿sobre qué? O ¿a partir de dónde inicio mi dibujo?, es mejor de momento decir, obvio para algunos, que es sobre mano que inicia, sube. Pero muchas veces eso causa conflicto. Pensar que ya hacia abajo hay que darle un sentido negativo, por decir, o hacia la parte superior, o también problemas de este estilo que se ven marcados. Es pues justamente la comprensión del problema, o sea, ¿qué me pide como tal realizar?, ¿una aproximación?, ¿determinar una escala? por decirlo (Leticia, Extracto de la entrevista, 4 de mayo de 2022).*

De este fragmento de entrevista, se puede evidenciar el conocimiento que tiene la profesora sobre las posibles dificultades que pueden presentar sus estudiantes al abordar el problema planteado en la fase introductoria de la clase. Del mismo modo, la profesora evidencia que al enfrentar un problema del estilo que se ha señalado, se hace necesario la comprensión del problema, y se presenta una oportunidad de investigación para ahondar en el conocimiento de la práctica de resolver problemas. Así que se le pregunta ¿Cree usted que existe algún método o procedimiento específico para solucionar o resolver problemas matemáticos? ¿Conoce usted algún método?, Leticia responde:

Leticia: Pues yo tomaría de referencia tal cual lo que sugiere Pólya, que son los cuatro pasos, O sea, en todo momento, en cualquier problema matemático o no matemático, pues tenemos que primero comprender el problema, ya sea la operación, incluso la operación tal cual, denotada como de menos cinco, más menos ocho, o sea ¿Qué me estás pidiendo? Debo comprender qué debo hacer, entonces, ya que lo comprendiste, pues entonces nos vamos al paso dos, diseña tu plan, o sea, qué vas a hacer, entonces, ya que pensaste, no pues tengo que hacer una ley de signos, o tengo que hacer mi recta, o tengo que hacer algo, entonces pues ya vamos al paso tres, pues aplícalo, ejecútalo y el último, cuatro, verifica, haz un análisis, regresa a hacer una introspección y decir si es coherente, si tiene sentido, ¿estoy bien?, no, pues redirecciona y otra vez. Entonces, yo creo que en general para este contenido como para cualquier otro, nos focalizamos ahí, en comprender el problema, que dentro de mi experiencia docente es uno de los puntos importantes que hay que reforzar en los estudiantes (Leticia, Extracto de la entrevista, 4 de mayo de 2022).

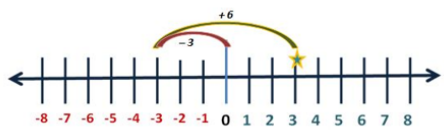
En este fragmento de entrevista, la profesora evidencia conocimiento de los cuatro pasos planteados por Pólya para resolver problemas, y confirma nuevamente la dificultad que presentan los estudiantes al comprender los problemas matemáticos. En consecuencia, se evidencia la relación entre el conocimiento de estrategias heurísticas de resolución de problemas *(La práctica de resolver problemas, KPM)* y el conocimiento de las dificultades de aprendizaje de los estudiantes *(Fortalezas y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, KFLM).* Por consiguiente, se evidencia una relación inter-dominio, es decir, entre categorías de un subdominio del PCK y un subdominio del MK.

Tabla 6. Descriptores y categorías evidenciadas del KFLM y KPM.

Subdominios	KPM	KFLM
Categorías	La práctica de resolver problemas	Fortalezas y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas
Descriptores	Conoce el modelo de resolución de problemas de Pólya y heurísticas de resolución de problemas tales como introducir un elemento auxiliar como la recta numérica.	Conoce las dificultades que pueden presentar las estudiantes asociadas a la comprensión de problema aditivos con enteros, tales como qué me pide como tal realizar, una aproximación, determinar una escala.

Siguiendo en la etapa de acciones dentro del aula, la profesora en una parte del momento de estructuración de la fase de desarrollo define y ejemplifica conceptos relacionados con el tema (ver Figura 6). Esta parte de definición y ejemplificación se tomó como un indicio de conocimiento para profundizar en la entrevista.

Figura 6. Momento de estructuración en la fase de desarrollo

Desarrollo	Estructuración	El docente define y ejemplifica conceptos básicos relacionados con el tema que se está abordando. Además, los estudiantes pueden ser partícipes de dicha construcción de contenido bajo los conocimientos previos que posean. Por ejemplo: Los números enteros están conformados por los números positivos (naturales), sus opuestos (negativos) y el cero. Los números enteros representan "enteramente" su valor. Y estos pueden visualizarse y representarse en la recta numérica como:  Posterior a la representación de números en la recta, el docente introducirá las operaciones (suma y resta) con este tipo de números y su representación en la recta como herramienta de apoyo, por ejemplo, a la operación -3 + 6 = 3  	Libro de texto Libreta PDF adicionales, referencias externas	30 minutos

Fuente: Diseño de la planeación de la informante

Por lo tanto, se le pregunta a la profesora: Cuando da este concepto de números enteros, ¿qué tiene en cuenta o qué cree usted que debe tener en cuenta al momento de dar esta definición en la clase?

> *Leticia: Este concepto en particular se trata de deducirlo y pensar en conjunto. Es decir, ¿qué significaría algo entero? Entonces, empiezan a hacer sus propuestas, una persona, un coche ¿o sea algo que tenga únicamente un sentido en la parte entera? pues esto ya a manera de a lo mejor introducción, con estos ejemplos entonces podemos llevar o en este caso al docente a la definición del concepto de número entero. Cuando ya tenemos enteros se puede preguntar, okey enteros por decir una silla, un carro o tres camas, ¿pero positivos únicamente en el sentido positivo? ¿O también tenemos sentidos negativos? Ahora ya no con tal ejemplo, pero sí que haga notar que ya hay digamos dos tipos de números positivos, negativos. ¿Y qué pasa con el cero? ¿El cero? Se les lleva a decir, no tiene un signo específico. Es el elemento neutro, el que hace la partición en la recta. Entonces son como complementos o especificaciones adicionales a la definición. (Leticia, Extracto de la entrevista, 4 de mayo de 2022).*

De este fragmento de entrevista, se puede evidenciar el conocimiento que tiene la profesora sobre la definición del conjunto de los números enteros y acerca de la propiedad del elemento neutro de la suma en los enteros, además tiene conocimiento acerca de estrategias para la construcción de definiciones en conjunto. De este modo, se evidencia una relación entre la estrategia de enseñanza en el aula *(Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos, KMT)* y su utilidad para la construcción de definiciones e identificación de propiedades en el aula de clases *(Definiciones, propiedades y sus fundamentos, KoT)*. Así, se observa una relación inter-dominio, entre una categoría de un subdominio del PCK y una categoría de un subdominio del MK.

Tabla 7. Descriptores y categorías evidenciadas del KMT y KoT.

Subdominios	KMT	KoT	
Categorías	Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos	Definiciones, propiedades y sus fundamentos	
Descriptores	Conoce estrategias de enseñanza para la construcción de la definición del conjunto de los números enteros.	Conoce la definición del conjunto de los números enteros.	Conoce la propiedad del elemento neutro de la suma en los números enteros.

Adicionalmente, se le pregunta a la profesora: Esta parte de ejemplificación, ¿cómo le aporta a la estructuración del tema o por qué es importante esta parte?, Leticia respondió:

Leticia: Considero que justamente la estructuración es la parte donde podemos ir profundizando, debemos iniciar con la definición de conceptos, con la mayor formalización posible de algunos contenidos que se requieren. Entonces, una vez que se definen estos contenidos, pues también llevarlos como bien dice ejemplificados. O sea, si hablamos de un número negativo, ¿dónde está ubicado ese número negativo?, ¿qué significa ese número negativo? Si hablamos del positivo, pues lo mismo, si hablamos de una suma, pues entonces ya empezamos a ver en la recta qué significa una suma, un movimiento derecho de dos momentos donde se está adicionando por decirlo así. Entonces pues se define el concepto y se ejemplifica para que ellos lo vean y después puedan aplicarlo. Me he percatado que esto permite que se avance un poquito en el aprendizaje, porque si ellos ven un caso pueden empezar a hacerlo por si solos, realizando todos los casos posibles. Suma de positivos con positivos, negativos con negativos, combinados y de los demás. (Leticia, Extracto de la entrevista, 4 de mayo de 2022).

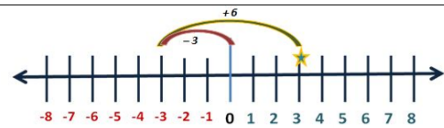
De este fragmento de entrevista, se puede evidenciar el conocimiento que tiene la profesora acerca de la potencialidad del ejemplo como medio para resaltar la adición de números enteros con la utilización de la recta numérica y, además, se evidencia su conocimiento acerca de la utilidad de la recta numérica como un auxiliar para desarrollar la temática. Por ende, se evidencia una relación entre la forma como utiliza la profesora la recta numérica como un auxiliar *(Conexiones auxiliares, KSM)* para ejemplificar la temática para que los estudiantes puedan producir sentido y significado *(Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos, KMT)*. Así, se evidencia una relación inter-dominio entre una categoría de un subdominio del MK y una categoría de un subdominio del PCK.

Tabla 8. Descriptores y categorías evidenciadas del KMT y KSM.

Subdominios	KMT	KSM
Categorías	Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos	Conexiones auxiliares
Descriptores	Conoce la potencialidad del ejemplo como medio para resaltar la adición de números enteros con la utilización de la recta numérica.	Conoce y utiliza la recta numérica como un contenido auxiliar para desarrollar la adición con números enteros.

Del mismo modo, la profesora en una parte de la estructuración de la fase de desarrollo propuso realizar una reflexión con los estudiantes sobre el sentido de sumar y restar, y analizarlas como operaciones inversas (ver figura 7). Esta reflexión se tomó como un indicio de conocimiento para profundizar en la entrevista, la imagen utilizada en la planeación fue tomada por la profesora de Garfias (2011).

Figura 7. Momento de estructuración en la fase de desarrollo

Desarrollo	Estructuración	 Se hará énfasis en hacer la reflexión con los estudiantes del sentido de sumar y restar, y estas como operaciones inversas. De manera análoga, se definen además conceptos relacionados tales como: Números simétricos, valor absoluto, orden de los números, comparación de números, etc.	Libro de texto Libreta PDF adicionales, referencias externas	30 minutos

Fuente: Diseño de la planeación de la informante

Por lo tanto, se le pregunta a la profesora ¿Qué propósito tiene en ese momento que los estudiantes hagan esa reflexión?, Leticia respondió:

> *Leticia: Bueno, es claro que se está trabajando con la recta numérica en este punto y pues dentro de esos ejemplos que se pueden poner. Pues digamos los sencillos, los iniciales, para ellos pensar en un tres más seis, y entonces se hace el movimiento, o sea un sentido de suma que está pasando pues tres movimientos a la derecha. Ahora, hacemos una resta, eh, por decir el caso también sencillo, donde el primer número es mayor que el segundo, de seis menos tres. Entonces nos vamos a seis unidades son positivas, nos movemos derecha y luego pide restar en sentido negativo, regresamos de izquierda, entonces ya a través de la recta se le va tratando de demostrar que las operaciones tienen digamos una cierta dirección para la operación y en este caso ponerles ejemplos como con los mismos números, pero con signos simétricos, puede ayudarles a generar esta reflexión de operaciones inversas. Un caso particular, a lo mejor todavía no formalizado, pero sí de a ver qué pasa si decimos cinco menos cinco, cinco positivo y luego menos cinco, este negativo, ¿Qué sucede? Pues me mueve derecha, me regresa. Entonces al final de cuentas es algo inverso. (Leticia, Extracto de la entrevista, 4 de mayo de 2022).*

De este fragmento de entrevista, se puede evidenciar el conocimiento que tiene la profesora sobre los procesos y algoritmos a realizar en operaciones aditivas con números enteros, con el apoyo de la recta numérica *(Procedimientos, KoT)*, y conoce la definición de números simétricos y propiedades de números inversos, así como la relación entre el conocimiento práctico del trabajo matemático, las definiciones y propiedades que permiten definir el objeto matemático a estudiar *(Definiciones, propiedades y fundamentos, KoT)*, evidenciando una relación intra-subdominio entre categorías del KoT. En adición, se evidencia nuevamente el uso de la recta para el desarrollo del tema *(Conexiones auxiliares, KSM).* En consecuencia, se evidencia en primera instancia una relación intra-subdominio entre categorías del KoT y se observa la relación intra-dominio que surge en el dominio MK, debido a que se relacionan dos categorías del KoT con una categoría del KSM.

Tabla 9. Descriptores y categorías evidenciadas del KoT y KSM.

Subdominios	KoT		KSM
Categorías	Procedimientos	Definiciones, propiedades y fundamentos	Conexiones auxiliares
Descriptores	Conoce procedimientos involucrados en la resolución de problemas aditivos con números enteros relacionados con movimientos en la recta numérica.	Conoce definiciones y propiedades que cumplen la suma y resta de números enteros.	Conoce elementos matemáticos de temas anteriores tales como la recta numérica que sirven como conexiones auxiliares en el desarrollo de problemas aditivos con números enteros.

En adición, la profesora en el momento de práctica-Ejecución de la fase de desarrollo propone una secuencia de actividades que consta de cuatro partes, la última hace alusión a la solución de problemas aplicados acerca de elevadores (ver Figura 8). Este momento se tomó como un indicio de conocimiento para profundizar en la entrevista.

Figura 8. Momento de Práctica-Ejecución en la fase de desarrollo

Desarrollo	Practica-Ejecución	4. Solución de problemas aplicados 2. Resuelve los ejercicios. a) El elevador de un edificio se ubicaba en la planta baja cuando lo llaman al −6, de donde subió al 2. Posteriormente subió 4 pisos y luego 3 más, bajó 8 pisos y subió 1. ¿En qué piso se encuentra ahora el elevador? Indica una operación que describa sus movimientos. b) Un elevador sube al piso 10 desde la planta baja, y enseguida baja 13 pisos. ¿En qué piso se encuentra? Indica una operación que describa sus movimientos. Compara tu resultado con el del inciso anterior y explica los resultados.	Libro de texto Libreta Recta numérica Herramientas digitales	30 minutos

Fuente: Diseño de la planeación de la informante

Así, se le pregunta a la profesora ¿Cómo qué procedimientos convencionales o no convencionales identificó usted que pronto usaban sus estudiantes al tratar de resolver estos problemas?, Leticia respondió:

Leticia: Por ejemplo, en este problema del elevador. Pues incluso si a ellos les sirve dicen hago mi dibujito, o trato de imaginarme el problema, porque muchas veces me ha pasado que a la hora de leerlo dicen, si lo veo en otra persona como que no lo siento, pero si yo me pongo en el rol de soy yo, a lo mejor como que ya le encuentran más sentido, debo 10 pesos y voy a pagar ocho, ¿ya pagué?, ¿ya terminé mi deuda? o ¿no he completado mi deuda?, ¿cuánto me falta pagar? Entonces, como que ya se ven más en el rol inmerso de ellos estar ahí y decir: bueno sí tiene sentido, he acabado de pagar, todavía me falta o si me sobró. Entonces, yo creo que ya en la aplicación podemos, a lo mejor regresar, les digo a los chicos pues si es necesario, o sea, si ya se comprendió la operación, pero no sabemos cómo hacerla, la escribimos y pues nos regresamos a lo inicial, hazme la recta okey, otros no pues yo hago mi elevador, mi dibujo, lo que corresponda el problema y pues empiezo a ver, pues subió, ahora bajó el elevador, ahora voy a volver a subir, entonces en dónde quedé. Y en la tercera estrategia puede ser eso, ponte en el rol del problema, okey si tú estás ahí y pasa esto, ¿entonces a que llegas? ¿Cuál sería tu conclusión? (Leticia, Extracto de la entrevista, 4 de mayo de 2022).

De este fragmento de entrevista, se puede evidenciar el conocimiento que tiene la profesora acerca de las estrategias que utilizan sus estudiantes para resolver problemas aditivos con enteros, tales como hacer un dibujo, imaginarse el problema o colocarse en el rol del problema. Asimismo, evidencia conocimiento acerca de situaciones del contexto donde se aplica la temática, tales como la deuda y el pago. Dicho de este modo, se evidencia una relación entre el conocimiento que tiene la profesora acerca de situaciones donde se aplica la temática *(Fenomenología y aplicaciones, KoT)* y su conocimiento acerca de las estrategias que utilizan los estudiantes para resolver estas situaciones *(Formas de interacción con un contenido matemático, KFLM).* Por ende, se evidencia una relación inter-dominio, entre una categoría del MK y una categoría del PCK.

Tabla 10. Descriptores y categorías evidenciadas del KoT y KFLM.

Subdominios	KoT	KFLM
Categorías	Fenomenología y aplicaciones	Formas de interacción con un contenido matemático
Descriptores	Conoce situaciones cotidianas tales como las deudas donde se puede aplicar la resolución de problemas aditivos con números enteros.	Conoce estrategias tales como ponerse en el rol, imaginarse el problema y realizar un dibujo que utilizan los estudiantes, al momento de resolver problemas aditivos con números enteros.

Por último, en la etapa de acciones dentro del aula, la profesora, en una parte del momento de valoración en la fase de cierre, propone realizar una evaluación sobre operaciones de números enteros con signo y la resolución de problemas aplicados (ver Figura 9). Esta evaluación se tomó como un indicio de conocimiento para profundizar en la entrevista.

Figura 9. Momento de valoración en la fase de cierre

Cierre	Valoración (Evaluación formativa)	Evaluación concreta en hojas físicas a operaciones de números enteros con signo y resolución de problemas aplicados	Hojas blancas (examen)	80 minutos

Fuente: Diseño de la planeación de la profesora Leticia

De ahí que, a la profesora se le pregunte respecto a los problemas aplicados ¿Usted los toma del libro o los propone? Leticia respondió:

Leticia: En su mayoría lo tomo del libro y a lo mejor ahí sí los adapto. Lo que podría hacer es pues cambiar algunos datos, pues obviamente para que sea un problema nuevo y o el contexto también se puede cambiar, o sea que sea cercano y no tan lejano al estudiante y ya si bien existe la pauta por ahí de crear alguno pues se crea, pero en su mayoría si se toman de libro con adaptación. Por ejemplo, nos hemos enfrentado a problemas donde nos dice un refrigerador tiene variaciones de temperatura y cuando vemos está en 30 grados, o sea, ¿un refrigerador calienta?, o sea como que no tiene sentido [...] Luego ellos mismos dicen pues como que no tiene sentido, ¿no? Por ejemplo, algo que a todos nos queda, yo tenía 20 pesos, pero perdí, no sé ocho, cuánto me queda, o yo debía 50 pesos y pagué 26, ¿cuánto debo? ¿Ya lo cubrí? O sea, contextos súper básicos, sencillos, en los que estamos inmersos y que ellos lo ven aplicados. (Leticia, Extracto de la entrevista, 4 de mayo de 2022).

En este fragmento de entrevista, se evidencia conocimiento sobre las limitaciones de los recursos físicos, como en este caso lo es el libro de texto, y además tiene en cuenta el contexto más cercano de los estudiantes al momento de formular los problemas que deben desarrollar los estudiantes. En este sentido se evidencia la relación entre el recurso didáctico utilizado *(Recursos de enseñanza, KMT)* y las situaciones del contexto donde se aplica la temática *(Fenomenología y aplicaciones, KoT).* Por tal motivo, se evidencia la relación inter-dominio entre una categoría del subdominio PCK y una categoría del subdominio MK.

Tabla 11. Descriptores y categorías evidenciadas del KMT y KoT

Subdominios	KMT	KoT
Categorías	Recursos de enseñanza	Fenomenología y aplicaciones
Descriptores	Conoce las limitaciones de los recursos materiales en este caso el libro de texto que utiliza para la enseñanza de la resolución de problemas aditivos con números enteros.	Conoce situaciones cotidianas tales como las deudas y las temperaturas donde se puede aplicar la resolución de problemas aditivos con números enteros.

4.2. Resultados y análisis profesor colombiano

Los siguientes resultados se presentan teniendo en cuenta la estructura de planeación de clase utilizada por el profesor. El maestro utilizó un formato de planeación de clase institucional, planeó tres semanas de clase, y en cada semana plantea una secuencia de actividades de apertura o introducción, desarrollo y evaluación o cierre. Además, plasma los objetivos de aprendizaje en cada semana planeada, los temas a desarrollar, desempeños, indicadores desempeño y estándares internacionales a trabajar (ver Figura 10). Estos estándares planteados se tomaron como un indicio para profundizar en el conocimiento del profesor.

Figura 10. Estándares internacionales y desempeños

ESTÁNDAR NACIONAL	DESEMPEÑOS
N. A	- Resolver y problematizar situaciones utilizando las características de todo el sistema numérico en contextos cotidianos.
ESTÁNDAR INTERNACIONAL	
1) Formulo y resuelvo problemas en situaciones aditivas y multiplicativas, en diferentes contextos y dominios numéricos. 2) Resuelvo y formulo problemas cuya solución requiere la potenciación o el establecimiento. 3) Justifico la elección de métodos e instrumentos de cálculo en la resolución de problemas. 4) Reconozco los argumentos combinatorios como herramientas para interpretar diferentes situaciones de cálculo.	

Fuente: Diseño de la planeación del informante colombiano

De este modo, enfocándonos en el primer estándar, se le preguntó al profesor: Respecto a los dominios numéricos, ¿me podría mencionar a qué otros dominios numéricos se puede extender la resolución de problemas aditivos? ¿y cómo le aporta este tema de resolución de problemas aditivos con enteros al desarrollo de temas posteriores?, Jorge respondió:

Jorge: Si tenemos en cuenta estas características de los números enteros, pueden ampliarse para todo el conjunto de los números reales. Entonces nosotros podemos ir desarrollando esta habilidad y desempeños, y demás cosas que queremos desarrollar en los estudiantes, no solamente es para que se queden en resolución de problemas aditivos o multiplicativos como es el caso, sino que también puedan ampliarlo a situaciones mucho más elevadas, como lo es por ejemplo, de funciones, porque en funciones pues obviamente tenemos que manejar, hay algunas propiedades de los números naturales y enteros que se manejan en funciones, en derivadas, integrales, en límites. Cuando estamos trabajando con límites, pues también estamos viendo un poco de eso. Y obviamente son para grados superiores, no para sexto grado de primaria ni séptimo. (Jorge, Extracto de la entrevista, 29 de abril de 2023).

En este fragmento de entrevista, se observa que Jorge tiene conocimiento acerca de temas posteriores que sirven como conexión para el conjunto numérico que se está trabajando en este caso los números enteros, sin embargo, el profesor tiene en cuenta que estos temas no son adecuados para el curso que está enseñando (séptimo grado), sino que deben enseñarse en grados superiores. De este modo, se evidencia una relación entre el conocimiento de temas que sirven como conexión (*Conexiones de complejización y conexiones trasversales, KSM)* y el nivel de desarrollo conceptual que espera que alcancen los estudiantes en séptimo grado *(Nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado, KMLS)*. Así, podemos observar en primera instancia una relación intra-subdominio entre categorías del KSM y, además, se evidencia una relación inter-dominio, entre categorías del dominio MK y una categoría del dominio PCK.

Tabla 12. Descriptores y categorías evidenciadas del KSM y KMLS.

Subdominios	KSM		KMLS
Categorías	Conexiones transversales	Conexiones de complejización	Nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado
Descriptores	Conoce que las características de los números enteros se pueden ampliar al conjunto de los números reales.	Conoce temas posteriores tales como funciones, derivadas, integrales y límites que sirven como conexión para la resolución de problemas aditivos con enteros.	Conoce el grado de profundidad de contenidos matemáticos que se enseñan en grados superiores tales como funciones, derivadas, integrales y límites.

Seguidamente, enfocándonos en el tercer estándar (Justifico la elección de métodos e instrumentos de cálculo en la resolución de problemas), se le preguntó al profesor: Aquí mencionas instrumentos de cálculo en la resolución de problemas. ¿Qué instrumentos de cálculo utilizan los estudiantes cuando resuelven problemas aditivos con enteros?, Jorge respondió:

> *Jorge: Normalmente empezaban a utilizar lo que viene siendo el ábaco. El ábaco, a pesar de que, okey, se enseña en los primeros grados, hay estudiantes que todavía conservan, ya de manera digital o de manera física, el ábaco y les sirve bastante. Cuando empiezan a ver toda esa parte de los números negativos, les gusta mantener las cosas tangibles y de colores, por ejemplo, tienen cubitos de colores azules y rojos, donde los rojos significan los números positivos y los azules los negativos, y empiezan a hacer todo este tipo de operaciones. Cuando tengo dos conjuntos o dos grupos de cubitos azules y ambos son negativos, entonces los sumo porque no los puedo restar, no los puedo contraponer unos con otros y miro cuántos me quedan, entonces pues adicionar. (Jorge, Extracto de la entrevista, 29 de abril de 2023).*

En este fragmento de entrevista, se puede evidenciar que el profesor tiene conocimiento acerca de instrumentos y objetos que utilizan sus estudiantes cuando resuelven problemas aditivos con enteros, y que además despiertan su interés. Asimismo, conoce estrategias de resolución de problemas que emplean sus estudiantes cuando utilizan estos objetos. Dicho de esta manera, se observa una relación entre los instrumentos y estrategias que utilizan los estudiantes *(Formas de interacción con un contenido matemático, KFLM)* y cómo estos despiertan su interés y motivación al resolver problemas *(Aspectos emocionales del aprendizaje de las matemáticas, KFLM)*. Por ende, se evidencia una relación intra-subdominio entre categorías del subdominio KFLM.

Tabla 13. Descriptores y categorías evidenciadas del KFLM.

Subdominio	KFLM		
Categorías	Formas de interacción con un contenido matemático		Aspectos emocionales del aprendizaje de las matemáticas
Descriptores	Conoce instrumentos que utilizan los estudiantes tales como el ábaco cuando resuelven problemas aditivos con enteros	Conoce estrategias que utilizan los estudiantes tales como la de asignar un color a los números positivos y a los números negativos para la resolución de problemas aditivos con enteros.	Conoce elementos que despiertan el interés en los estudiantes tales como los cubos de colores que ayudan al estudiante a resolver problemas aditivos con enteros.

Adicionalmente, el profesor plantea que trabajará temas como la adición, sustracción y las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva en su planeación (ver Figura 11). Estos temas se tomaron como indicios para profundizar en el conocimiento del profesor.

Figura 11. Temas, indicadores de desempeño y secuencia de actividades

TEMAS	INDICADORES DE DESEMPEÑO	SECUENCIAS DE ACTIVIDADES SIGNIFICATIVAS (Actividades de apertura, actividades de desarrollo y actividades de evaluación)	TIEMPO	RECURSOS
Unidad 8 - Adición - Sustracción - Propiedad conmutativa - Propiedad asociativa - Propiedad distributiva	Elegir *un ejemplo* y comprobar si satisface o no determinados criterios matemáticos.	**INICIO DEL AÑO ACADÉMICO: 2022-2023** **Objetivo de aprendizaje:** Elegir *un ejemplo* y comprobar si satisface o no determinados criterios matemáticos. **Números enteros** - **7Ni.01** Estimar, sumar y restar números enteros, reconociendo generalizaciones. **AICLE :(4Cs)**	2 horas	Cuaderno

Fuente: Diseño de la planeación del informante colombiano

Por tanto, se le preguntó al profesor: ¿Me podrías decir en qué consisten estas propiedades y cómo se relacionan con la adición de números enteros?, Jorge respondió:

Jorge: Al hablar de adición es necesario hablar también de una sustracción, porque sabemos que la operación opuesta a la adición, ¿qué es?, la sustracción, es súper importante. Hay unas propiedades de los números enteros, en específico cuando se trabaja la adición, que es la conmutativa. Es decir, que no me importa el orden si yo tengo dos números, dos sumandos, el orden de los sumandos no me va a alterar el resultado. 2 más 3 es lo mismo que 3 más 2. Es importante que los estudiantes tengan en cuenta eso. ¿Por qué? Porque cuando estamos trabajando con números positivos y negativos, los estudiantes suelen decir: voy a empezar a tomar este con este. Entonces empiezan a conmutar, es decir, vamos a suponer una línea de tres números. 2 menos 5 más dos números más, $2-5+3-2$. *Entonces yo conmuto el -5 con el 3. Entonces ya me quedaría 2 más 3, que es 5, y el -5 y el -2, que los puedo sumar también, y me daría un -7. Entonces los estudiantes pueden empezar a jugar con esas cosas para que les quede mucho más asequibles. Y lo mismo es con la propiedad asociativa, que ya justamente, como el ejemplo que acabé de anunciar, los estudiantes pueden agrupar dos grupos 2 con 3 y -5 con -2. (Jorge, Extracto de la entrevista, 29 de abril de 2023).*

En este fragmento de entrevista, se observa que Jorge tiene conocimiento sobre la propiedad inversa de la adición, las propiedades conmutativa y asociativa, además conoce procedimientos que llevan a cabo los estudiantes cuando resuelven problemas aditivos con enteros. Por ende, podemos observar una relación entre las propiedades de la adición de enteros *(Definiciones, propiedades y sus fundamentos, KoT)* y cómo las utilizan los estudiantes cuando realizan procedimientos *(Formas de interacción con un contenido matemático, KFLM)*. Así, se evidencia una relación inter-dominio entre categorías de un subdominio del MK y una categoría de un subdominio del PCK.

Tabla 14. Descriptores y categorías evidenciadas del KoT y KFLM.

Subdominios	KoT	KFLM
Categorías	Definiciones, propiedades y sus fundamentos	Formas de interacción con un contenido matemático
Descriptores	Conoce las propiedades inversa, conmutativa y asociativa de la adición de números enteros.	Conoce que los estudiantes cuando resuelven problemas aditivos con enteros conmutan términos semejantes.

Seguidamente, el profesor continúa explicando la propiedad distributiva:

Jorge: La propiedad distributiva se podría dar en algunos casos que tengamos que resolver con problemas que involucren la multiplicación en algún caso, pero que necesiten más que todo o el foco central sea la adición. ¿Por qué? Porque a veces cuando las sumas son reiteradas, los estudiantes dicen: a pesar de que es una suma, a mí me parece mucho más sencilla hacer una multiplicación. Tengo tres 2, pues hago una multiplicación. O unos diez 100, no sé. No se ponen a contar uno por uno, sino que asocian eso y lo hacen una multiplicación. (Jorge, Extracto de la entrevista, 29 de abril de 2023).

De este fragmento de entrevista, podemos afirmar que Jorge tiene conocimiento sobre la propiedad distributiva y conoce procedimientos que llevan a cabo los estudiantes cuando resuelven problemas aditivos con enteros. Dicho de esta manera se observa una relación entre el conocimiento de propiedades de los enteros *(Propiedades, KoT)* y el conocimiento de las formas como sus estudiantes resuelven problemas *(Formas de interacción del estudiante con el contenido, KFLM)*. Así, se evidencia una relación inter-dominio entre una categoría de un subdominio del MK y una categoría de un subdominio del PCK.

Tabla 15. Descriptores y categorías evidenciadas del KoT y KFLM.

Subdominios	KoT	KFLM
Categorías	Definiciones, propiedades y sus fundamentos	Formas de interacción con un contenido matemático
Descriptores	Conoce la propiedad distributiva que cumple la multiplicación con enteros y su utilidad para la resolución de problemas aditivos con enteros.	Conoce que los estudiantes cuando resuelven problemas aditivos con enteros utilizan la multiplicación cuando desarrollan la propiedad distributiva.

En esta misma línea, se le pregunta al profesor: ¿hay alguna otra propiedad que cumpla la adición de los números enteros? ¿O algunas otras propiedades?, Jorge respondió:

Jorge: El número neutro, la suma de enteros con cero da como resultado el mismo número. Algo muy importante, que el cero es el neutro de la adición. Ahora dirán, ¿pero eso también aplica a la multiplicación? Pues no, pues el neutro de la multiplicación no es el cero, es el uno. Entonces, que la suma de dos enteros negativos siempre va a dar un resultado negativo menor. Esta parte es como bastante curiosa cuando estamos trabajando estas operaciones. ¿Cómo es posible que los estudiantes digan, yo sumo un -5, retomando el ejemplo anterior, -5 y -2, y me va a dar un número más pequeño? No, ese es un número más grande. No, venga. Es que, si usted tiene en cuenta el número, si es el número como tal, sin tener en cuenta el símbolo, sí se ve más grande, es decir, representa un número más grande, un valor más grande. Pero por tener el negativo me está asociando a que es un número que es mucho más pequeño. Entonces ahí es donde se empieza a trazar y se le muestra a los estudiantes la recta numérica y diciéndole vea usted parte de ella, desde aquí se ve. Si usted va hacia la derecha, va a tener mucha más plata. Pero si usted parte hacia la izquierda, asociémoslo con las ganancias. Usted va a tener muchas más deudas, pérdidas. ¿y usted prefiere deber -100 o prefiere deber -2? Pues el -2 ¿por qué? Porque -100 es un número mucho más pequeño en cuanto a la adquisición o al cuanto al tener. Y ya conocemos las otras reglas que dos números enteros positivos, pues me va a dar un número entero positivo mucho más grande (Jorge, Extracto de la entrevista, 29 de abril de 2023).

En este fragmento de entrevista, se observa que Jorge tiene conocimiento sobre la propiedad del elemento neutro de la adición y de la multiplicación, además conoce las leyes de los signos de adición de números enteros, conoce el uso de símbolos para asociar a cantidades negativas y conoce aplicaciones tales como las deudas y ganancias donde se ve involucrada la resolución de problemas aditivos con enteros. Así, se evidencia una relación entre su conocimiento del elemento neutro y leyes de signos *(Definiciones, propiedades y fundamentos, KoT),* su conocimiento acerca del uso de símbolos *(El papel del lenguaje matemático, KPM)* y su conocimiento acerca de las deudas y ganancias *(Fenomenología y aplicaciones, KoT)*. De este modo, se observa en primera instancia una relación intra-subdominio en el KoT, y además se observa una relación intra-dominio entre categorías de subdominios del dominio MK.

Tabla 16. Descriptores y categorías evidenciadas del KoT y KPM.

Subdominios	KoT			KPM
Categorías	Definiciones, propiedades y fundamentos		Fenomenología y aplicaciones	El papel del lenguaje matemático
Descriptores	Conoce la propiedad del elemento neutro de la adición y de la multiplicación con enteros.	Conoce las leyes de los signos de adición con enteros.	Conoce situaciones cotidianas tales como las deudas y ganancias asociadas a la resolución de problemas aditivos con enteros.	Conoce el uso de símbolos para asociar a cantidades negativas.

Seguidamente, el profesor continúa añadiendo otras definiciones:

Jorge: El valor absoluto, cuando estamos trabajando con números enteros positivos, independientemente si un número es negativo, cero o uno, siempre me va a dar el positivo y en el caso de cero, pues que no es ni positivo ni negativo, cero. Igual. Y que el valor absoluto a mí me está representando es una distancia. A ver, ten en cuenta eso, tómelo como una distancia, no como una cantidad como tal, sino como un trayecto. Usted bajó cinco pisos, pero bajó cinco pisos, una distancia de, supongamos, cinco metros. Y si ya es que estoy no recorrí nada. No, si lo recorriste. Solamente que la distancia se contara como positiva. (Jorge, Extracto de la entrevista, 29 de abril de 2023).

De este fragmento de entrevista, se puede afirmar que Jorge tiene conocimiento acerca de la definición de valor absoluto y conoce ejemplos que utiliza como analogías para explicar la definición de valor absoluto. De este modo, se evidencia una relación entre su conocimiento acerca de la definición de valor absoluto (*Definiciones, propiedades y sus fundamentos, KoT)* y cómo lo ejemplifica en el aula de clase *(Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos, KMT)*. Así, se observa una relación inter-dominio entre una categoría del MK y una categoría del PCK.

Tabla 17. Descriptores y categorías evidenciadas del KoT y KMT.

Subdominios	KoT	KMT
Categorías	Definiciones, propiedades y sus fundamentos	Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos
Descriptores	Conoce y utiliza la definición de valor absoluto para el desarrollo de la adición con enteros.	Conoce y utiliza analogías para explicar la definición de valor absoluto.

Por otra parte, el profesor en su planeación plasma que utilizará la metodología AICLE "Aprendizaje Integrado de Contenidos y Lenguas Extranjeras" (ver Figura 12). Esta metodología se tomó como un indicio para indagar en el conocimiento del profesor.

Figura 12. Metodología AICLE

AICLE :(4Cs)

CONTENIDOS:
COGNICIÓN: Comparar y contrastar, analizar, memorizar, ilustrar.
COMUNICACIÓN:

Lenguaje de:

adición, total, suma, resta, diferencia, estimación, negativo, positivo, cero

Lenguaje para

Una estimación de la respuesta es ...
La suma de los números ... y ... es ...
La diferencia entre los números ... y ... es ...

Fuente: Diseño de la planeación del informante colombiano

De este modo, se le preguntó al profesor: Esta metodología, ¿cómo le aporta el desarrollo de este contenido específico que trabaja en su planeación?, Jorge respondió:

Jorge: Mira que no solamente lo veo como necesario en el inglés, sino en el español. Cuando los estudiantes están aprendiendo el español, me gustaría que se pudiera manejar una metodología, no la misma, pero si una metodología similar. Es decir, a ver, cuando usted está planeando, mire cuáles son los contenidos que va a trabajar, cuáles son los aspectos cognitivos que necesita desarrollar, cómo debería comunicarse el estudiante en este mismo idioma, el matemático, cuál es el lenguaje de, de las matemáticas como tal, qué es una adición, qué es una sustracción, qué es un factor, qué es un sumando. Todo el lenguaje matemático que el estudiante necesita. Obviamente no se le va a facilitar todo de una (vez) sino especifico. Y el lenguaje para, cómo yo debo decir o expresarme cuando estoy resolviendo un problema matemático o estoy leyendo una expresión matemática. Como lo estábamos haciendo ahora, el orden de los sumandos no me altera el resultado. Cuando hablamos de productos, el orden de los factores no me altera el producto. Digamos que después de ese igual, cuando es suma es el resultado, cuando es multiplicación viene siendo el producto, cuando es una división es el cociente. Entonces, todo este lenguaje el estudiante lo necesita, 2 + 5, esos símbolos de esas características que se presentan van incluidas ahí. Entonces, que el estudiante aprenda, ah okey este símbolo es el más, ah, pero eso es básico, eso lo tienen que saber, sí, pero, hay expresiones mucho más grandes, por ejemplo, cuando tú lees por comprensión un conjunto matemático que dices que x pertenece a los números reales, tal que x está entre tal y tal número. (Jorge, Extracto de la entrevista, 29 de abril de 2023).

De este fragmento de entrevista, se evidencia el conocimiento del profesor acerca de la propiedad conmutativa de adición y multiplicación con enteros, así mismo destaca su conocimiento acerca del lenguaje que se debe utilizar para operaciones tales como la división, y el uso de símbolos como el (+) y ∈ para usarlos en la lectura de conjuntos por comprensión. Dicho de este modo, se evidencia una relación entre el conocimiento de la propiedad conmutativa *(Definiciones,* *propiedades y sus fundamentos, KoT)* y sobre el lenguaje y el uso de símbolos en matemáticas *(El papel del lenguaje matemático, KPM)*. Así, se observa una relación intra-dominio en el MK.

Tabla 18. Descriptores y categorías evidenciadas del KoT y KPM.

Subdominios	KoT	KPM		
Categorías	Definiciones, propiedades y sus fundamentos	El papel del lenguaje matemático		
Descriptores	Conoce la propiedad conmutativa de la adición y multiplicación de enteros.	Conoce términos para referirse a la propiedad conmutativa de la adición y de la multiplicación con enteros.	Conoce términos para referirse a lo que está después del signo igual en la adición, multiplicación y división.	Conoce el uso del símbolo (+) y ∈ en la lectura de conjuntos por comprensión.

Adicionalmente, el profesor en su planeación plasma un indicador de desempeño relacionado con el orden de las operaciones (Ver Figura 13). Este indicador se tomó como indicio para indagar en el conocimiento del profesor.

Figura 13. Indicador de desempeño 7Ni02

- 7Ni.02
Comprender que los paréntesis, los índices positivos y las operaciones siguen un orden determinado.

Fuente: Diseño de la planeación del informante colombiano

Por tanto, se le preguntó al profesor: En los indicadores de desempeño, en este menciona comprender que los paréntesis, los índices positivos y las operaciones siguen un orden determinado. ¿Cuál es ese orden que siguen las operaciones? Jorge respondió:

> *Jorge: Bueno, aquí no estamos enseñando únicamente adición, pero podemos generalizarlo. Entonces, podemos hablar de raíces, potencias, divisiones, multiplicaciones, sumas y restas. A ese orden hago referencia. Pero cuando estamos hablando de símbolos como tal, esos símbolos primero son los corchetes, luego los paréntesis. A ese orden hago referencia. Orden de las operaciones y orden de resolver los símbolos (Jorge, Extracto de la entrevista, 29 de abril de 2023).*

De este fragmento de entrevista, se puede evidenciar el conocimiento que tiene el profesor sobre el orden en que se realizan las operaciones, y además menciona el orden de resolver símbolos, por ende, se presenta una oportunidad de investigación para ahondar en el conocimiento de la práctica matemática. De este modo, se le preguntó al profesor: ¿Considera que existe algún procedimiento para resolver sumas y restas con números enteros o alguno que utilice? Jorge responde:

> *Jorge:* *Si a mí me preguntan cómo tú resuelves o cómo te sientes cómodo resolviendo problemas aditivos o cualquier problema, debería primero, leer el problema o escuchar el problema o visualizar el problema. Depende de cómo se me presente, si es verbal, si es un audio, si está escrito, si es gráfico. Entonces, leer el problema. Identificar los datos que se nos están dando. Pero antes de identificar los datos es mirar qué quieren, qué me están preguntando. Entonces, ¿qué me están preguntando? ¿A qué debo darle respuesta? Después, mirar ahora sí los datos que necesito, y posteriormente de esos datos que necesito, ahora buscar un método que me permita solucionar ese problema. Entonces, ya comprendí, ya sé que me están preguntando, ya tengo algunos datos, [ahora], qué otros datos no tengo, pero que son necesarios, pero que hacen parte de mis conocimientos previos, los utilizo y ya empiezo a desarrollar el método que mejor me parezca, ya sea gráfico o el método que quieras hacerlo o que te ayude mejor a la situación. Depende de la situación, ya tú utilizarás un método de resolución de problemas. (Jorge, Extracto de la entrevista, 29 de abril de 2023).*

En este fragmento de entrevista, el profesor evidencia conocimiento del uso de un gráfico como método para resolver una situación, y afirma que el método que utilice para resolver un problema dependerá del registro en el que este sea presentado. En consecuencia, se evidencia una relación entre el conocimiento de estrategias heurísticas de resolución de problemas *(La práctica de resolver problemas, KPM)* y el conocimiento de registros como el verbal y el gráfico *(Registros de representación, KoT).* Por consiguiente, se evidencia una relación intra-dominio, es decir entre categorías de un mismo subdominio, en este caso del MK.

Tabla 19. Descriptores y categorías evidenciadas del KoT y KPM.

Subdominios	KoT	KPM
Categorías	Registros de representación	La práctica de resolver problemas
Descriptores	Conoce los registros de representación verbal y gráfico en la resolución de problemas aditivos con enteros.	Conoce estrategias heurísticas de resolución de problemas tales como utilizar un gráfico que se puede emplear en problemas aditivos con números enteros.

Por otra parte, en el desarrollo de la clase el profesor plantea que se haga una introducción antes de iniciar con las actividades (Ver Figura 14). Esta introducción se tomó como indicio para indagar en el conocimiento del profesor.

Figura 14. Introducción a la temática

> **Introducción:**
>
> Como momento inicial, se hacen preguntas para que los alumnos recuerden sus conocimientos previos en matemáticas, identificando que es un número positivo, el número negativo y el número cero. se introduce el nuevo vocabulario necesario para esta clase.

Fuente: Diseño de la planeación del informante colombiano

Por tanto, se le preguntó al profesor: Aquí en la introducción, tú mencionas que el estudiante debe recordar sus conocimientos previos, identificando qué es número positivo, qué es un número negativo y el cero. ¿Estos conocimientos previos los debieron haber desarrollado en cursos anteriores o en el mismo curso, pero antes del tema? Jorge respondió:

Jorge: Como tú sabes los niños empiezan a realizar sumas y restas desde muy temprana edad, desde los cursos desde preescolar, incluso yo di en preescolar, y desde preescolar ya se les empieza a enseñar esto . Ah ok, que la resta tiene otra connotación al número negativo, sí, es decir, lo ven como la operación, a este le quito este, pero empezar a recordar cada una de estas cositas es importante, por ejemplo, el símbolo, ah el símbolo de este es positivo, ah quiere decir que este es negativo, que se quita. Entonces, cada uno de estos conocimientos es importante traerlos a colación. Tu no aprendes algo simplemente por aprenderlo, sino que en matemáticas lo vas a necesitar posteriormente. (Jorge, Extracto de la entrevista, 29 de abril de 2023).

De este fragmento de entrevista, se puede evidenciar el conocimiento que tiene el profesor sobre temas como las sumas y restas que se dan desde preescolar y afirma que estos le servirán para grados posteriores, además conoce el uso del símbolo $(-)$ para asociar a la resta en preescolar y para asociarlo a los números negativos en secundaria. De este modo, se evidencia una relación entre el conocimiento de temas anteriores que deben haber desarrollado los estudiantes *(Secuenciación de temas)* y el conocimiento de uso de símbolos en matemáticas *(El papel del lenguaje matemático)*. Así, se evidencia una relación inter-dominio entre una categoría de un subdominio del MK y una categoría de un subdominio del PCK.

Tabla 20. Descriptores y categorías evidenciadas del KMLS y KPM.

Subdominios	KMLS	KPM
Categorías	Secuenciación de temas	El papel del lenguaje matemático
Descriptores	Conoce que los estudiantes desde preescolar comienzan a realizar sumas y restas que servirán posteriormente para el estudio de problemas aditivos con números enteros.	Conoce el uso del símbolo (-) en preescolar utilizado para asociar la resta y en secundaria para asociar a cantidades negativas.

Luego, en su planeación el profesor plasma la actividad a realizar (Ver Figura 15). Esta actividad introducción se tomó como indicio para indagar en el conocimiento del profesor.

Figura 15. Actividad de generalización

Actividad:
En este momento se planteará al alumno la siguiente pregunta:

¿Si se suma un número entero siempre se obtiene un número mayor?

Los alumnos demostrarán que están **especializados (TWM.01)** cuando elijan ejemplos de números enteros y comprueben si la respuesta es mayor al sumarlos a otro número, para ayudarles a responder a la pregunta anterior.

Utilizando el 5 como ejemplo, los alumnos pueden plantearse:
- *¿Qué es 5 + 5?*
- *¿Qué es 0 + 5?*
- *¿Qué es -5 + 5?*

Utilizando el -5 como ejemplo, los alumnos pueden plantearse:
- *¿Qué es 5 + -5?*
- *¿Qué es 0 + -5?*
- *¿Qué es -5 + -5?*

A continuación, pida a los alumnos que expliquen su respuesta a la pregunta original y que hagan una generalización sobre la suma de números enteros positivos y negativos.

Los alumnos demostrarán que están **generalizando (TWM.02)** cuando expliquen lo que han observado. Por ejemplo:

Al sumar un número entero positivo, la respuesta siempre será mayor.
Al sumar un número entero negativo, la respuesta siempre será menor.

Fuente: Diseño de la planeación del informante colombiano

Por ende, se le preguntó al profesor: Tú mencionas que los estudiantes al final deben generalizar lo que han observado. ¿Qué fortalezas o dificultades pueden presentar los estudiantes al demostrar esta generalización? Jorge respondió:

> *Jorge: A veces pueden no llegar a generalizar, sino quedarse con algunos ejemplos puntuales o específicos, considerar que son casos particulares y no generalizarlos, o pueden llegar a crear una concepción errónea que es para los primeros, por ejemplo, yo presento algunos problemas ahí, pero si tú miras no superan el cinco. Pueden llegar a pensar que son para los primeros 10 números negativos o los primeros diez números positivos, pueden llegar a tener ese tipo de concepciones erróneas. Entonces, se buscará a partir de otros ejemplos y de la discusión en clase buscando que se generalice. Si ellos logran generalizar o establecer estas reglas, podría ser un avance bastante significativo, bastante provechoso al momento de solucionar problemas. Saber que cuando no tengo nada, pues obviamente me va a dar el mismo resultado, o cuando tengo dos números negativos, pues puedo tener un número más pequeño, negativo. (Jorge, Extracto de la entrevista, 29 de abril de 2023).*

De este fragmento de entrevista, se puede evidenciar el conocimiento que tiene el profesor sobre la dificultad de quedarse con algunos ejemplos puntuales o específicos y considerar que son casos particulares y no generalizarlos, además tiene conocimiento sobre la potencialidad del ejemplo para ayudar a sus estudiantes a generalizar, y tiene conocimiento de que la suma de dos números enteros negativos siempre da como resultado un número negativo menor que los números dados. Así, se evidencia una relación entre el conocimiento de dificultades que pueden tener sus estudiantes *(Fortalezas y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, KFLM),* reglas de la adición de números enteros *(Definiciones propiedades y fundamentos, KoT),* y ejemplos para la enseñanza del tema *(Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos, KMT).* Así, se evidencia una relación intra-dominio entre categorías de subdominios del PCK y una relación inter-dominio entre dos subdominios del PCK y uno del MK.

Tabla 21. Descriptores y categorías evidenciadas del KFLM, KMT y KoT.

Subdominios	KFLM	KMT	KoT
Categorías	Fortalezas y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas	Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos	Definiciones, propiedades y fundamentos
Descriptores	Conoce la dificultad que presentan algunos estudiantes para generalizar reglas de la adición de enteros.	Conoce la potencialidad del ejemplo como medio para resaltar la adición de números enteros, y ayudar a los estudiantes a llegar a generaciones de las reglas de la adición con números enteros.	Conoce reglas de la adición de números enteros tales como que la suma de dos números enteros negativos siempre da como resultado un número negativo menor que los números dados.

Seguidamente, se le pregunta al profesor: ¿Por qué consideras que es importante plantear estos ejemplos? Jorge respondió:

Jorge: Porque a pesar de que a veces el conocimiento está, los estudiantes lo tienen, no logran evocarlo o expresarlo de una manera correcta o por sí solos, sin ningún tipo de motivación o estímulo no logran expresar esos conocimientos. Entonces, a partir de esos ejemplos, llevándolo uno a uno, paso a paso, que el estudiante dé cuenta de cada una de las propiedades y o reglas, pueda establecer y decir, si yo junto esto y esto, que yo sé, yo podría asumir esto. Y que evoquen lo que están asumiendo para poder decir, si es correcto sus generalizaciones o son concepciones erróneas. (Jorge, Extracto de la entrevista, 29 de abril de 2023).

De este fragmento de entrevista, se puede evidenciar el conocimiento que tiene el profesor acerca de los estímulos que se deben realizar en los estudiantes en el aula de clase para que lleguen a generalizar situaciones y conoce, además, que, a través de casos particulares, él puede ayudar a los estudiantes a identificar reglas y propiedades y que, de este modo, puedan lograr estas generalizaciones. Dicho de este modo, se puede evidenciar una relación entre el conocimiento de aspectos que despiertan la motivación en el estudiante *(Aspectos emocionales del aprendizaje de las matemáticas, KFLM)* y conocimiento de que el trabajo con casos particulares genera ideas para la generalización *(La práctica de demostrar, KPM)*. Por consiguiente, se evidencia una relación inter-dominio entre una categoría de subdominio del PCK y una categoría de un subdominio del MK.

Tabla 22. Descriptores y categorías evidenciadas del KFLM y KPM

Subdominios	KFLM	KPM
Categorías	Aspectos emocionales del aprendizaje de las matemáticas	La práctica de demostrar
Descriptores	Conoce aspectos que despiertan la motivación en sus estudiantes al momento de realizar generalizaciones de propiedades de la adición de enteros.	Conoce que el trabajo con casos particulares genera ideas para la generalización de propiedades de la adición de enteros.

Más adelante, se le pregunta al profesor: ¿qué procedimientos llevan a cabo los estudiantes para lograr esta generalización? Jorge respondió:

Jorge: Primero, siento que es el descubrimiento. Normalmente yo siempre les pongo […] una situación problema , que [el estudiante] trate de resolverla con los conocimientos que tenga y posteriormente, mirar es que te falta esto. O si tú sabes esto, vas a poder llegar a la respuesta. Entonces el estudiante comprende. Y luego empezar a proporcionarle ejercicios que él se sienta ya cómodo con el concepto matemático, que empieza a comprenderlo. No necesariamente que haya una comprensión total del concepto, porque sabemos que existen muchas propiedades y demás, pero que empiecen a crear pequeñas generalidades, que a través del tiempo y de su proceso académico va a poder llegar a una comprensión del concepto matemático o una aproximación a la comprensión de este. Mira que la idea con la actividad era en pro de eso. Okey, entonces usted empieza a desarrollar estas cosas, y después, mire es que a usted le faltan algunos conocimientos. ¿Podemos asumir esto y esto? ¿será verdad o no será verdad?, o que los mismos estudiantes lleguen a esas generalidades y después se les presente de manera formal. Como cuando uno trabaja con la teoría de situaciones didácticas, que posteriormente a desarrollar todas las actividades ¿qué me dice esta?, vamos a hacer la institucionalización de los saberes. (Jorge, Extracto de la entrevista, 29 de abril de 2023).

En este fragmento de entrevista el profesor evidencia conocimiento de teorías de enseñanza de las matemáticas y las utiliza en el aula de clase, y conoce el nivel de comprensión que deben alcanzar sus estudiantes sobre los números enteros. Por esta razón, se evidencia una relación entre el conocimiento de la teoría de las situaciones didácticas *(Teorías de enseñanza de las matemáticas, KMT)* y el conocimiento del nivel de compresión del concepto matemático que se trabaja *(Nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado, KMLS)*. De ahí que, se evidencia una relación intra-dominio entre categorías de dos subdominios del PCK.

Tabla 23. Descriptores y categorías evidenciadas del KMT y KFLM.

Subdominios	KMT	KMLS
Categorías	Teorías de enseñanza de las matemáticas	Nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado
Descriptores	Conoce la teoría de las situaciones didácticas y la utiliza para la enseñanza de problemas aditivos con enteros.	Conoce el grado de comprensión de la adición de enteros que deben llegar a tener los estudiantes en grado 7°.

Al final de la primera semana, el profesor plantea explicar las reglas de la adición de enteros (Ver Figura 16). Esta explicación se tomó como un indicio para indagar en su conocimiento.

Figura 16. Cierre de la primera semana

Cierre:

Por último, se explican a los alumnos las reglas de la suma de números enteros, que son las siguientes:

- La suma de un número entero y su inverso aditivo es 0.
- La suma de dos enteros positivos siempre da como resultado un valor positivo mayor que ambos enteros.
- La suma de dos números enteros negativos siempre da como resultado un número negativo menor que los números dados.
- La suma de un número positivo con un número negativo se realiza hallando la diferencia entre el valor absoluto de ambos números. Entonces, el signo con el número mayor se agrega a la suma.
- La suma de números enteros con 0 da como resultado el mismo número.

Las reglas para la suma de números enteros pueden comprenderse con ayuda de la tabla que se ofrece a continuación.

Integer's Sign	Answer Sign	Operation	Example
⊕ + ⊕	+	Add	4 + 6 = 10
⊕ + ⊖	+	Subtract	16 + (-7) = 9
⊕ + ⊖	-	Subtract	5 + (-11) = -6
⊖ + ⊖	-	Add	(-3) + (-4) = -7

Fuente: Diseño de la planeación del informante colombiano

Por esto, se le preguntó al profesor: ¿los estudiantes presentan algunas fortalezas o dificultades cuando aprenden estas reglas? Jorge respondió:

Jorge: Dificultades en el tratar de entender que dos números negativos siempre te va a dar un número negativo más pequeño. Eso es un dolor de cabeza para los estudiantes. Empezar a entender eso es como decirle, olvide y deje de generalizar lo que usted ya aprendió a lo largo de su formación, cuando trabajaba con números naturales. Y abra su mente a algo mucho más grande. Y es cuando ellos empiezan a ver números enteros, es cuando se empieza a mostrar un nuevo mundo que para ellos era desconocido. Entonces, un gran obstáculo, porque no es una dificultad, es un gran obstáculo que los estudiantes tienen es poder comprender los números negativos, me va a dar un número negativo mucho más pequeño. Entender esa parte del infinito negativo. Los positivos pues van y vengan, porque ya venían desarrollándolos, ya tienen más confianza. Pero cuando se introducen el conjunto de los números negativos, ya genera un caos total. (Jorge, Extracto de la entrevista, 29 de abril de 2023).

De este fragmento de entrevista, se puede evidenciar el conocimiento que tiene el profesor sobre dificultades que tienen los estudiantes en la compresión de propiedades de los enteros y para entender el infinito negativo, debido a que trabajaban anteriormente con propiedades de la adición de naturales. Por tal razón, se evidencia una relación entre el conocimiento de dificultades con los números negativos *(Fortalezas y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, KFLM)* y el conocimiento de temas anteriores como los números naturales que sirven como conexión para el estudio de los números enteros *(Conexiones de simplificación, KSM)*. Por consiguiente, se observa una relación inter-dominio entre una categoría de un subdominio del PCK y una categoría de un subdominio del MK.

Tabla 24. Descriptores y categorías evidenciadas del KFLM y KSM

Subdominios	KFLM	KSM
Categorías	Fortalezas y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas	Conexiones de simplificación
Descriptores	Conoce dificultades en la comprensión de propiedades del conjunto de los números negativos y del concepto de infinito negativo.	Conoce temas anteriores como los números naturales que sirven como conexión para el estudio de los números enteros.

Luego, para la segunda semana el profesor plantea nuevamente que se haga una introducción antes de iniciar con las actividades (Ver Figura 17).

Figura 17. Introducción a la temática

Introducción:

Como primer momento, se retoma la actividad inicial de la semana pasada y se realizan preguntas para poner a prueba los conocimientos previos y/o adquiridos. Con esta información se inicia la explicación de una nueva transformación al plano cartesiano.

Fuente: Diseño de la planeación del informante colombiano

Esta introducción se tomó como indicio para indagar en el conocimiento del profesor. Por tanto, se le preguntó al profesor: ¿por qué hablas aquí acerca de una nueva transformación al plano cartesiano? Jorge respondió:

> *Jorge: Lo que se quiere decir es que, okey, a ver, estamos trabajando la línea de los números naturales del cero al infinito, pero se está transformando en un plano cartesiano, hay una transformación al plano cartesiano. Es decir, que a la derecha números positivos, que a la izquierda números negativos, que hacia arriba números positivos y que hacia abajo números negativos. ¿Cómo lo podemos explicar? Hacia la derecha tú avanzas, hacia la izquierda tú retrocedes. Hacia arriba tú subes, hacia abajo tú, pues obviamente valga la redundancia, pues bajas. (Jorge, Extracto de la entrevista, 29 de abril de 2023).*

De este fragmento de entrevista, se puede evidenciar el conocimiento que tiene el profesor sobre la representación de temas anteriores tales como los números naturales en una semirrecta y de los números enteros en un plano cartesiano, además conoce ejemplos que utiliza como analogías para explicar la ubicación de los números enteros en el plano cartesiano. Dicho de este modo, se evidencia una relación entre el conocimiento de temas anteriores que debe desarrollar el estudiante para la resolución de problemas aditivos con enteros *(Secuenciación de temas, KMLS)* y el conocimiento de analogías para explicar estos temas anteriores *(Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos, KMT).* Por esto, se evidencia una relación intra-dominio entre categorías de dos subdominios del PCK.

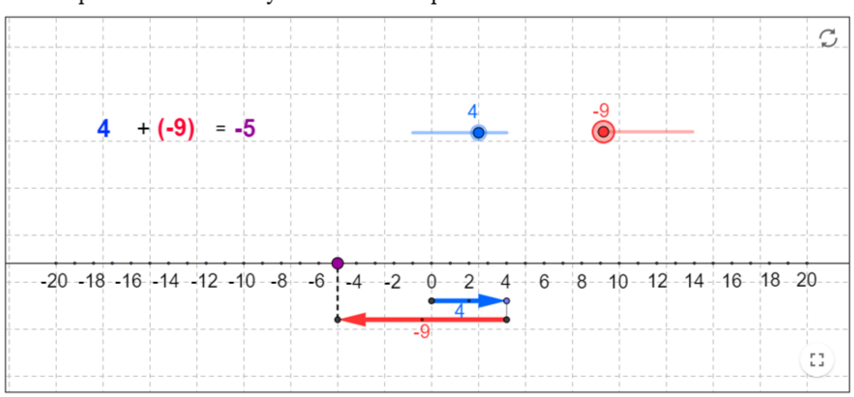
Tabla 25. Descriptores y categorías evidenciadas del KMLS y KMT.

Subdominios	KMLS	KMT
Categorías	Secuenciación de temas	Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos
Descriptores	Conoce temas anteriores a los números enteros tales como los números naturales y como se representan este conjunto en una semirrecta	Conoce y utiliza analogías para explicar la representación de los números enteros en el plano cartesiano.

Seguidamente, el profesor en la segunda semana plantea una actividad después de la introducción (Ver Figura 18), esta actividad se tomó como indicio para indagar en el conocimiento del profesor.

Figura 18. Actividad en GeoGebra

Actividad:
Para practicar la parte operativa de los alumnos, se les proponen diferentes ejercicios. Los alumnos podrán contestarlos y verificar sus respuestas utilizando el software GeoGebra.



https://www.geogebra.org/m/W822ra3a

Fuente: Diseño de la planeación del informante colombiano

De manera que se le preguntó al profesor: En la actividad utilizas el software GeoGebra, ¿Cómo le aporta el software al aprendizaje de la adición de números enteros? Jorge respondió:

> *Jorge:* *Justamente es eso. La línea azul, si tú ves, corre hacia los positivos. Entonces, el estudiante puede representar sus cantidades de los números positivos hacia la derecha . Pero cuando tenemos un número negativo, partimos desde la posición donde quedó el número positivo ¿hacia qué lado?, hacia la izquierda. Y miramos cuántas unidades yo debo de regresar. Los números positivos me dicen usted avance hacia la derecha, los números negativos me dicen venga vamos hacia la izquierda. Entonces, nos retrocedemos, empezamos a quitar ciertas unidades. Y ya básicamente es desarrollando la parte visual de las matemáticas. Es decir, ahora, 4 más -9. Y los estudiantes hacen un tipo de razonamiento por decirles, vea, solamente hemos visto como que la parte matemática y que debe ser así, miremos ahora la parte gráfica. Entonces le mostramos la parte gráfica y ya tiene mucho más sentido para los estudiantes. (Jorge, Extracto de la entrevista, 29 de abril de 2023).*

De este fragmento de entrevista, se puede evidenciar el conocimiento que tiene el profesor sobre recursos como GeoGebra y su utilidad para explicar la adición de números enteros de forma gráfica, y el procedimiento que se lleva a cabo en la recta numérica. Por lo tanto, se evidencia una relación entre el conocimiento de software y sus potencialidades *(Recursos de enseñanza, KMT)*, el conocimiento de cómo operar enteros *(Procedimientos, KoT)* por medio la representación gráfica *(Registros de representación, KoT)*. Por consiguiente, se observa una relación intra-dominio en un subdominio del KoT y una relación inter-dominio de este subdominio con uno del PCK.

Tabla 26. Descriptores y categorías evidenciadas del KoT y KMT.

Subdominios	KoT		KMT
Categorías	Registros de representación	Procedimientos	Recursos de enseñanza
Descriptores	Conoce el registro de representación gráfico en la resolución de problemas aditivos con enteros.	Conoce procedimientos involucrados en la resolución de problemas aditivos con números enteros relacionados con movimientos en la recta numérica.	Conoce el software GeoGebra y sus potencialidades y lo utiliza para la enseñanza de adición con números enteros.

En tercer lugar, en la semana el profesor plantea resolver algunos problemas de adición de números enteros (Ver Figura 19).

Figura 19. Problemas de adición de enteros

Posteriormente, se le presentan algunos problemas simples de adición de números enteros como los siguientes:

- Jorge le debe a su amiga Juana 3 $. Si le pide prestados otros 6 $, ¿cuánto le deberá en total?
- Un equipo de fútbol pierde 5 yardas en una jugada y luego pierde 8 yardas en la jugada siguiente. ¿Cuántas yardas perdieron en las dos jugadas?
  ¿Cómo se representa una pérdida de 5 yardas?
  ¿Cómo se representa una pérdida de 8 yardas?
- En 2002, Tiger Woods ganó el Torneo Masters. Sus resultados fueron 2, 3, 6 y 1 en cuatro rondas. ¿Cuál fue su puntuación final?

Fuente: Diseño de la planeación del informante colombiano

Estos problemas se tomaron como indicio para indagar en el conocimiento del profesor. Así, se le preguntó al profesor: Aquí tú planteas unos problemas que hacen parte del fútbol americano, ¿qué estrategia utilizan los estudiantes para resolver estos problemas? Jorge respondió:

Jorge: A mí me encanta jugar. Primero, antes de hacer la tarea, jugamos. Por estar inmersos en todo este contexto del bilingüismo, es muy importante que ellos conozcan la cultura americana y la cultura británica. Entonces, para nosotros, en nuestro país, en nuestro contexto, es el fútbol, el soccer. Pero en el contexto británico, la idea es que se desarrollen y vayan y conozcan el fútbol americano. Entonces, gracias a Dios, la institución es bastante grande, tiene bastantes espacios, y nosotros lo que hacemos es una práctica. Empezamos a jugar entre todos, conociendo el juego y demás, para después plantearles este tipo de situaciones. Si fulanito corrió tantas yardas, pero le quitaron la jugada y perdió tantas yardas, ¿qué cuántas yardas hubo de avance con respecto a la inicial? Son preguntas que si tú lo ves son problemas, son similares a las que estamos utilizando en el plano cartesiano, únicamente que ya es más vivencial. (Jorge, Extracto de la entrevista, 29 de abril de 2023).

En este fragmento de entrevista, se puede evidenciar el conocimiento que tiene el profesor sobre el juego como una estrategia para la enseñanza de problemas aditivos con sus estudiantes y el conocimiento del fútbol americano y su aplicación en la temática teniendo en cuenta el contexto en el que se pueden desenvolver los estudiantes. Así, observamos una relación entre el conocimiento de situaciones de aplicación *(Fenomenología y aplicaciones, KoT)* y las formas en cómo puede enseñarse a resolver estas *(Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos, KMT).* Dicho de esta forma se evidencia una relación inter-dominio entre una categoría de un subdominio del PCK y una del MK.

Tabla 27. Descriptores y categorías evidenciadas del KoT y KMT.

Subdominios	KoT	KMT
Categorías	Fenomenología y aplicaciones	Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos
Descriptores	Conoce y utiliza situaciones problemas del contexto de los estudiantes tales como el fútbol americano al que se puede aplicar la resolución de problemas aditivos con enteros.	Conoce y utiliza el juego como una estrategia para la enseñanza de problemas aditivos con enteros.

Finalmente, para la tercera semana el profesor plantea nuevamente que se haga una introducción antes de iniciar con las actividades (Ver Figura 20).

Figura 20. Introducción a la temática

Introducción:
En este momento, se retomarán algunas preguntas realizadas en clases anteriores para intentar reconstruir el concepto. Los alumnos podrán hablar sobre el concepto trabajado en clase y dar algunos ejemplos de este.
Después, se les guiará con preguntas para introducirles en la resolución de problemas.

Fuente: Diseño de la planeación del informante colombiano

Esta introducción se tomó como indicio para indagar en el conocimiento del profesor. Por tanto, se le preguntó al profesor: Usted menciona que después se les guiará con preguntas para introducirle en la resolución de problemas. ¿Cómo usted relaciona las preguntas con la introducción de los estudiantes a la resolución de problemas? Jorge respondió:

> *Jorge: Mira que nosotros anteriormente ya habíamos trabajado algunos problemas. Entonces, yo le pregunto a los estudiantes, ¿qué es lo importante al momento de resolver un problema? Entonces, los estudiantes empiecen a decir, profesor, es importante tener en cuenta los datos, pero llega otro y dice, pero es que, ¿cómo vas a sacar los datos si no sabes ni siquiera qué te preguntan? A veces hay datos de más. Sí, empezamos a hacer esas preguntas que guíen, okey, es importante tener esto y esto. El estudiante dice, pero, por ejemplo, es importante sacar los datos y de una operar y puede llegar otro y decir, no, profesor, para mí es mucho más importante primero hacer como que el esquema del problema, dibujarlo para poderlo entender. Sí, es guiando a esos estudiantes a que digan, okey, y que evoquen esos métodos que utilizan. Que el método de uno puede ayudar y complementar el método del otro (Jorge, Extracto de la entrevista, 29 de abril de 2023).*

En este fragmento de entrevista, se evidencia el conocimiento que tiene el profesor sobre la utilidad de las preguntas orientadoras para la resolución de problemas aditivos con enteros y se evidencia el conocimiento de las formas cómo sus estudiantes resuelven problemas aditivos con enteros. Por ende, se evidencia una relación entre el conocimiento de preguntas orientadoras para la enseñanza *(Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos, KMT)* y el conocimiento de estrategias de resolución de problemas de sus estudiantes *(Formas de interacción con un contenido matemático, KFLM)*. De tal manera, se evidencia una relación intra-dominio entre categorías de subdominios del PCK.

Tabla 28. Descriptores y categorías evidenciadas del KMT y KFLM

Subdominios	KMT	KFLM
Categorías	Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos	Formas de interacción con un contenido matemático
Descriptores	Conoce y utiliza preguntas orientadoras para guiar a los estudiantes en la resolución de problemas aditivos con enteros.	Conoce estrategias que utilizan sus estudiantes tales como sacar los datos y operar, hacer esquemas y dibujos para resolver problemas aditivos con enteros.

Por último, en la tercera semana el profesor plantea la resolución de problemas (Ver Figura 21). Estos problemas se tomaron como indicio para indagar en el conocimiento del profesor.

Figura 21. Resolución de problemas

Actividad:
En este punto se les presenta a los alumnos algunos problemas que deben resolver y deben explicar su proceso de solución.

Problema 1.
Un submarino comienza a 135 pies bajo el nivel del mar. Se sumerge 239 pies antes de elevarse 307 pies. Representar la profundidad actual del submarino como un número entero.

Fuente: Diseño de la planeación del informante colombiano

De manera que, se le preguntó al profesor: Aquí en los problemas que planteas ¿cómo resolverías tú el problema 1? Jorge respondió:

Jorge: Yo primero haría el dibujo gráfico. Dibujaría primero el nivel del mar y luego ubicaría el submarino a esos 135 pies […] ¿Cómo lo resolvería yo? Haría el dibujito, ubicaría el submarino a los 135 pies, luego dice que se sumerge tantos y luego lo hago con vectores. Entonces, un vector hacia abajo, los primeros, luego otro hacia abajo y después el que va hacia arriba, pero uniendo la punta del vector con la otra operación que se desea hacer. Y ya calculamos a qué distancia se encuentra realmente el submarino del nivel del mar, gráficamente. Matemáticamente, podría resolverlo así. Tendríamos menos tantos pies, menos otros tantos pies, más tantos pies hacia arriba. Ya con la simbología. (Jorge, Extracto de la entrevista, 29 de abril de 2023).

En este fragmento de entrevista, se puede evidenciar el conocimiento que tiene el profesor sobre procedimientos que se llevan a cabo al resolver un problema de adición con enteros, heurísticas para resolver este problema tal como utilizar un gráfico y conoce además elementos auxiliares tales como los vectores que le sirven para la resolución de estos problemas. Por tanto, se evidencia una relación entre el conocimiento de cómo se resuelve el problema planteado *(Procedimientos, KoT),* estrategias heurísticas de resolución de problemas *(La práctica de resolver problemas, KPM)* y el conocimiento de los vectores *(Conexiones auxiliares, KSM).* De esta forma, se evidencia una relación intra-dominio entre categorías del dominio MK.

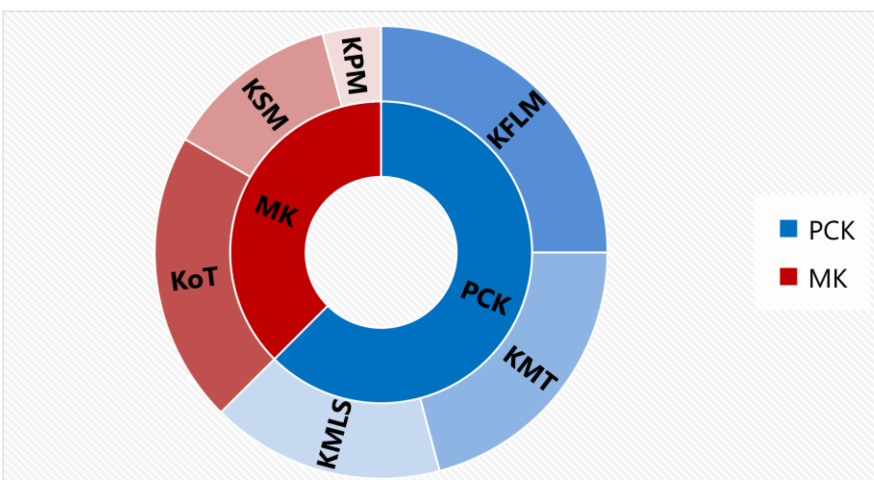
Tabla 29. Descriptores y categorías evidenciadas del KoT y KSM.

Subdominios	KoT	KPM	KSM
Categorías	Procedimientos	La práctica de resolver problemas	Conexiones auxiliares
Descriptores	Conoce procedimientos involucrados en la resolución de problemas aditivos con números enteros relacionados con movimientos en un eje vertical.	Conoce la estrategia heurística de utilizar un gráfico para resolver un problema aditivo con enteros.	Conoce y utiliza vectores como un elemento auxiliar para la resolución de problemas aditivos con enteros.

4.3. Interpretación de las relaciones encontradas

En primera instancia, los resultados de esta investigación dejan en evidencia el conocimiento especializado que emplean dos profesores de matemáticas en el diseño de una planeación de clase sobre resolución de problemas aditivos con números enteros y cómo este conocimiento se relaciona con otros conocimientos. Por un lado, la profesora mexicana evidenció su conocimiento didáctico sobre: Secuenciación de temas (2), Nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado (1), Expectativas de aprendizaje (1) (KMLS); Fortalezas y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas (3), Formas de interacción con un contenido matemático (2), Aspectos emocionales en el aprendizaje de las matemáticas (1) (KFLM); Estrategias, técnicas tareas y ejemplos (3), Recursos de enseñanza (2) (KMT). Además, evidenció su conocimiento matemático sobre: Conexiones auxiliares (3) (KSM); Definiciones, propiedades y fundamentos (2), Fenomenología y aplicaciones (2), Procedimientos (1) (KoT); y La práctica de resolver problemas (KPM); los números colocados al final de cada categoría evidenciada indican en cuántas relaciones está presente dicha categoría. De este modo, podemos notar que el dominio que más evidenció la profesora mexicana fue el dominio del conocimiento didáctico del contenido (ver Figura 22). Además, el subdominio que más se evidenció fue el subdominio del conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas (KFLM), el cual guardó relaciones con los demás subdominios de conocimiento, así como también evidenció relaciones intra-subdominio.

Figura 22. Conocimiento evidenciado por la profesora mexicana

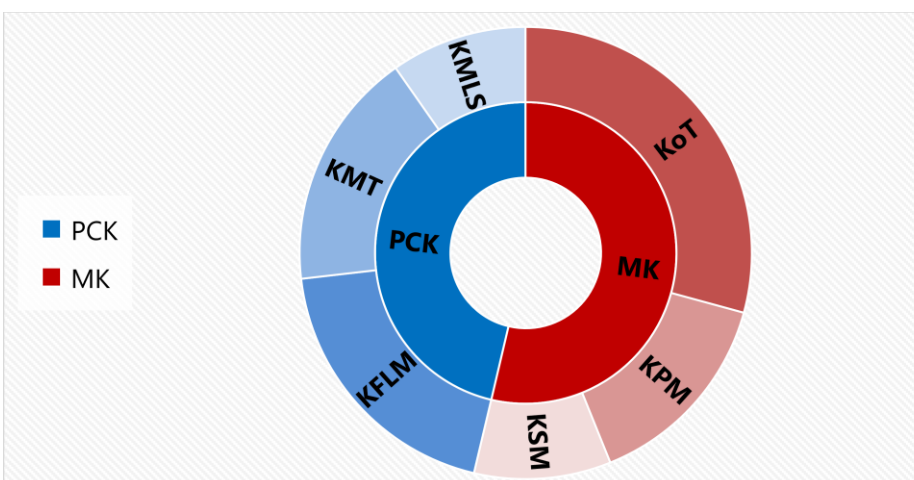


Fuente: Elaboración propia

La Figura 22 muestra a través de tonalidades azul y rojo la frecuencia en que aparece cada subdominio en las diferentes relaciones observadas en el conocimiento de la profesora mexicana, los subdominios del MK están representados con colores de tonalidad roja de mayor a menor intensidad dependiendo de la frecuencia en que aparecieron, siendo el color más fuerte el subdominio que evidenció mayor número de relaciones, y siendo el subdominio de color más bajo aquel que evidenció menor número de relaciones; asimismo el dominio PCK está representado por tonalidades azules.

Por otro lado, el profesor colombiano evidenció su conocimiento didáctico sobre: Secuenciación de temas (2), Nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado (2) (KMLS); Fortalezas y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas (2), Formas de interacción con un contenido matemático (4), Aspectos emocionales en el aprendizaje de las matemáticas (2) (KFLM); Estrategias, técnicas tareas y ejemplos (5), Recursos de enseñanza (1), Teorías de enseñanza (1) (KMT). Asimismo, evidenció su conocimiento matemático sobre: Conexiones de complejización (1), Conexiones de simplificación (1), Conexiones auxiliares (1), Conexiones transversales (1) (KSM); Definiciones, propiedades y fundamentos (6), Fenomenología y aplicaciones (2), Procedimientos (2), Registros de representación (2) (KoT); La práctica de demostrar (1), La práctica de resolver problemas (2), y El papel del lenguaje matemático (3) (KPM). De esta forma, podemos notar que ambos dominios se evidenciaron casi igualmente (ver Figura 23), sin embargo, el subdominio que guardó mayor número de relaciones ya fuese con otros subdominios o consigo mismo fue el subdominio del conocimiento de los temas (KoT).

Figura 23. Conocimiento evidenciado por el profesor colombiano

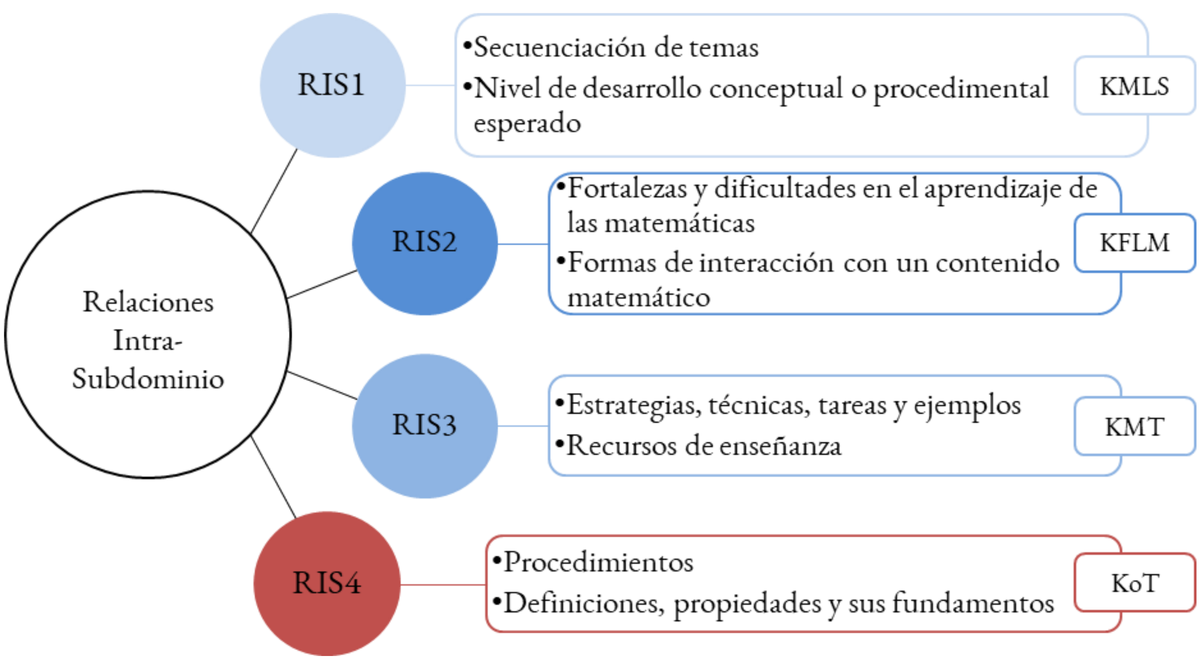


Fuente: Elaboración propia

4.3.1. Relaciones intra-subdominio

Primeramente, en lo que respecta al conocimiento de los profesores se pudieron encontrar relaciones entre categorías de un mismo subdominio. En el conocimiento de Leticia se evidenciaron relaciones intra-subdominio en el KMLS con las categorías de secuenciación de temas y nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado (RIS1). De ahora en adelante se utilizará la sigla "RIS" para referirnos a "relaciones intra-subdominio", además esta irá seguida de un número que servirá para enumerar las relaciones. También, se identificó una relación al interior del KFLM con las categorías de fortalezas y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas y la categoría de formas de interacción con un contenido matemático (RIS2), luego, se identificó la relación en el KMT de Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos con la categoría de Recursos de enseñanza (RIS3), y, por último, se evidenció, la relación en el subdominio KoT entre las categorías procedimientos y Definiciones, propiedades y sus fundamentos (RIS4). Podemos notar que no se evidenciaron relaciones al interior de los subdominios KPM y KSM (ver Figura 24). Cabe resaltar que, para la elaboración de los gráficos correspondientes a las relaciones encontradas en el conocimiento de la profesora mexicana se utilizaron los colores correspondientes a cada subdominio de la Figura 22.

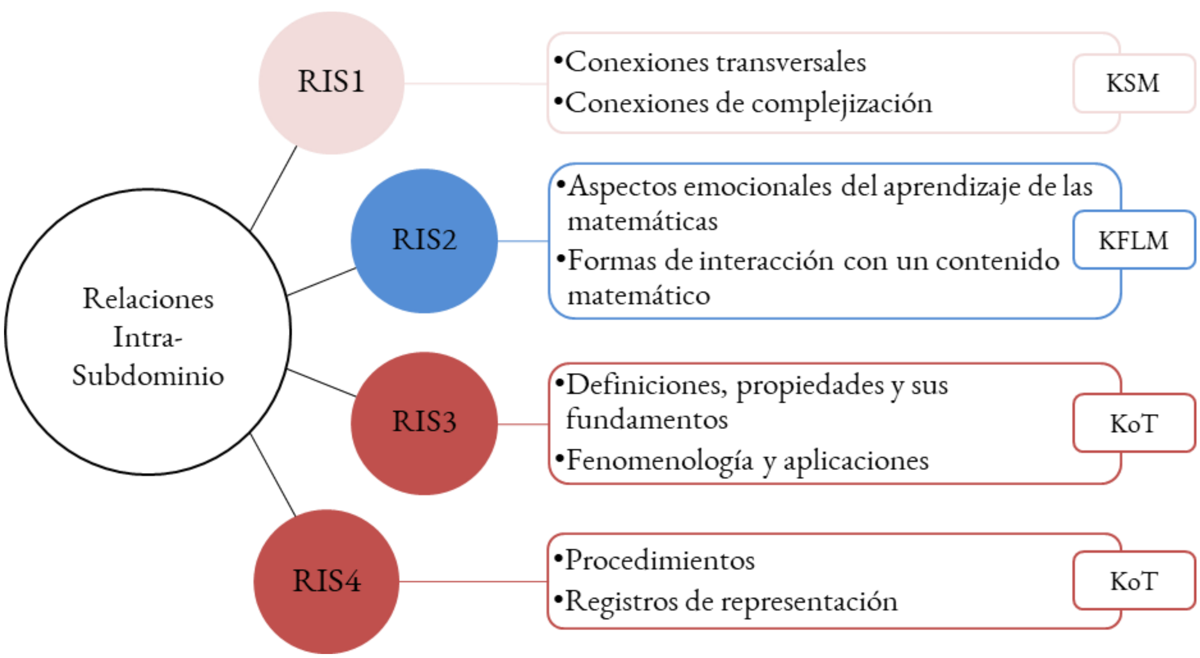
Figura 24. Relaciones intra-subdominio en el conocimiento de la profesora mexicana



Fuente: Elaboración propia

En el conocimiento de Jorge se evidenciaron relaciones intra-subdominio en el KSM con las categorías Conexiones transversales y Conexiones de complejización (RIS1), además, se identificó una relación al interior del KFLM con las categorías de Aspectos emocionales del aprendizaje de las matemáticas y la categoría de Formas de interacción con un contenido matemático (RIS2). Luego, se identificaron dos relaciones en el KoT, la primera, donde se relacionaron las categorías de Definiciones, propiedades y sus fundamentos y Fenomenología y aplicaciones (RIS3), y la segunda, donde se relacionaron las categorías Procedimientos y Registros de representación (RIS4). Ahora bien, nótese que no se evidenciaron relaciones al interior de los subdominios KMLS, KMT y KPM (ver Figura 24). Cabe resaltar que, para la elaboración de los gráficos correspondientes a las relaciones encontradas en el conocimiento del profesora colombiano se utilizaron los colores correspondientes a cada subdominio de la Figura 23.

Figura 25. Relaciones intra-subdominio en el conocimiento del profesor colombiano



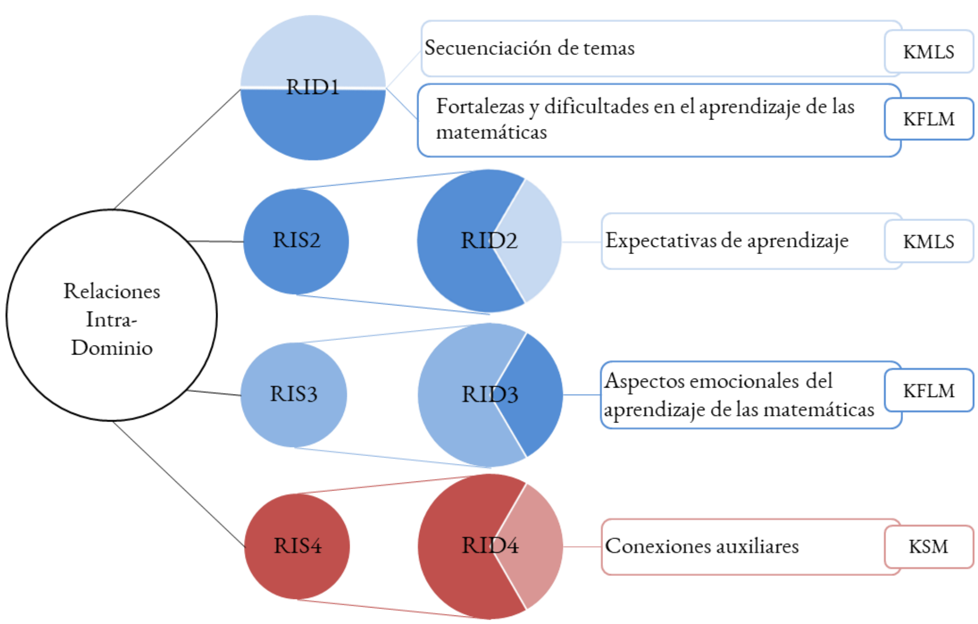
Fuente: Elaboración propia

Podemos notar que, en el caso de Leticia predominaron las relaciones intra-subdominio en el dominio PCK, sin embargo, en el caso de Jorge resaltaron este tipo de relaciones en el dominio MK, en el caso de ambos profesores no surgieron relaciones al interior del subdominio KPM, y aunque ambos evidencian relaciones al interior de los subdominios KFLM y KoT no comparten las relaciones entre categorías de estos dominios.

4.3.2. Relaciones intra-dominio

En lo que respecta al conocimiento de los profesores también se pudieron encontrar relaciones entre categorías de subdominios de un mismo dominio. En el conocimiento de Leticia, se evidenciaron relaciones intra-dominio que involucran algunas relaciones intra-subdominio antes mencionadas (ver Figura 24). Sin embargo, se encontró una relación que no involucra una relación intra-subdominio, como es el caso de la relación entre la categoría Secuenciación de temas del KMLS y la categoría Fortalezas y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas del KFLM, a esta relación la llamaremos RID1, de ahora en adelante se utilizará la sigla "RID" para referirnos a "relaciones intra-dominio", además esta irá seguida de un número el cual servirá para enumerar las relaciones. Ahora bien, tenemos las relaciones intra-dominio que están conformadas además por una relación intra-subdominio, las cuales son: la RIS2 (relación entre categorías del KFLM) que se relaciona con la categoría Expectativas de aprendizaje del KMLS, formando la RID2. También tenemos la RIS3 (relación entre categorías del KMT) que se relaciona con la categoría Aspectos emocionales del aprendizaje de las matemáticas del KFLM, formando la RID3. En tercer lugar, tenemos la RIS4 (relación entre categorías del KoT) la cual se relaciona con la categoría Conexiones auxiliares del KSM, formando la RID4. No obstante, no se evidenciaron relaciones intra-dominio que involucraran el subdominio KPM (ver Figura 26).

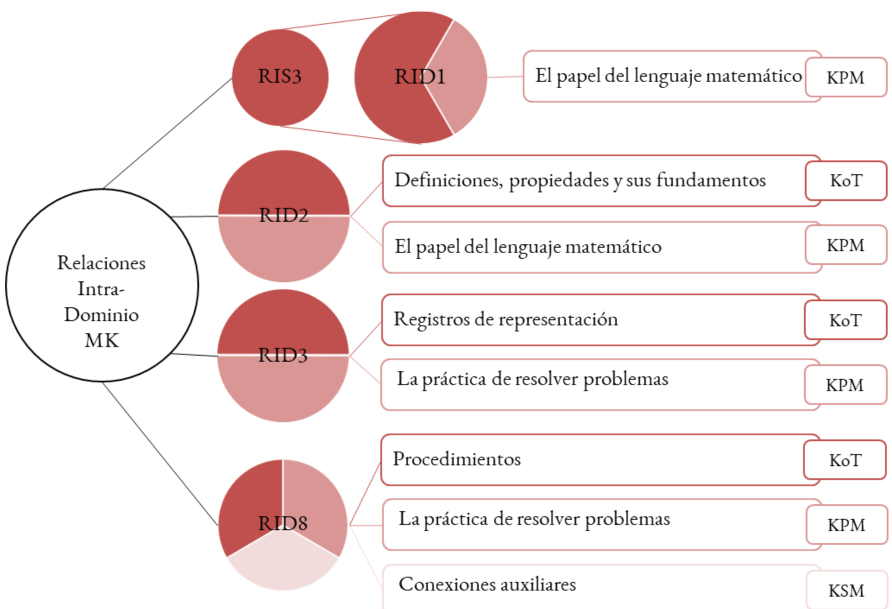
Figura 26. Relaciones intra-dominio en el conocimiento de la profesora mexicana



Fuente: Elaboración propia

En el conocimiento de Jorge se evidenciaron relaciones intra-dominio en el MK y PCK con los diferentes subdominios. En el caso del MK se evidenciaron tres relaciones entre el KoT y el KPM, primeramente, se encontró una relación que involucraba la relación intra-subdominio RIS3 (ver Figura 25). Estas categorías del KoT se relacionaron con la categoría El papel del lenguaje matemático del KPM, formando la RID1. También se relacionó la categoría Definiciones, propiedades y sus fundamentos del KoT con la categoría El papel del lenguaje matemático del KPM (RID2). Además, se tuvo la relación entre las categorías Registros de representación del KoT y La práctica de resolver problemas del KPM (RID3). Por último, se tiene la RID8 que involucra las categorías Procedimientos del KoT, La práctica de resolver problemas del KPM y Conexiones auxiliares del KSM (ver Figura 27). Cabe notar, que la enumeración de las relaciones es consecuente con el orden en que aparecen las relaciones en el transcurso de la entrevista realizada.

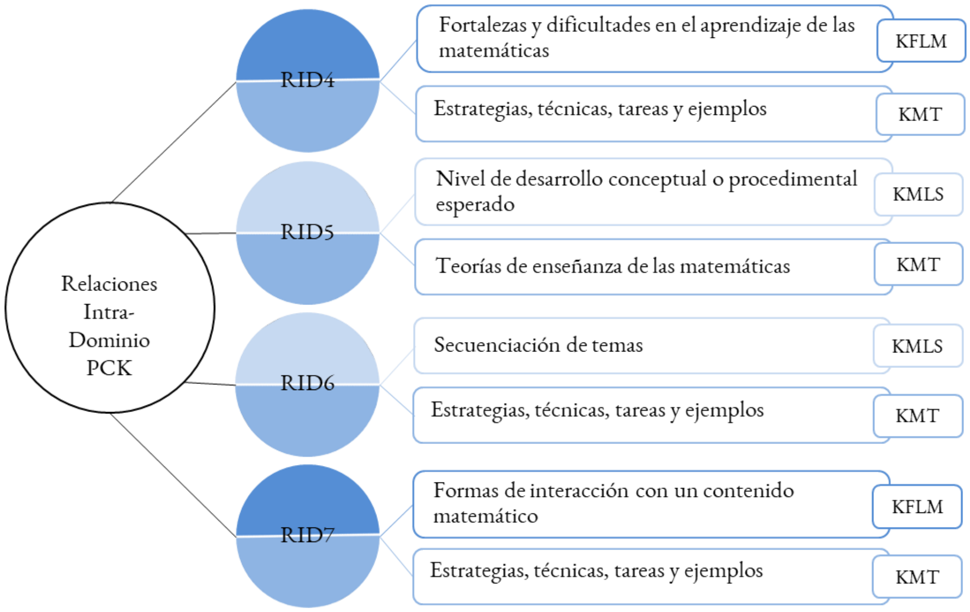
Figura 27. Relaciones intra-dominio en el conocimiento matemático del profesor colombiano



Fuente: Elaboración propia

Por otro lado, en el PCK, se evidenciaron relaciones entre el KMT con los subdominios KFLM y KMLS. Inicialmente, se relacionaron las categorías Fortalezas y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas del KFLM y Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos del KMT (RID4). Luego, se tiene la relación entre el Nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado del KMLS y las Teorías de enseñanza de las matemáticas del KMT (RID5). De forma similar, se tiene la relación entre las categorías Secuenciación de temas del KMLS y Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos del KMT (RID6). Posteriormente, se tiene la RID7 que involucra las categorías Formas de interacción con un contenido matemático del KFLM y Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos del KMT (ver Figura 28).

Figura 28. Relaciones intra-dominio en el conocimiento didáctico del profesor colombiano



Fuente: Elaboración propia

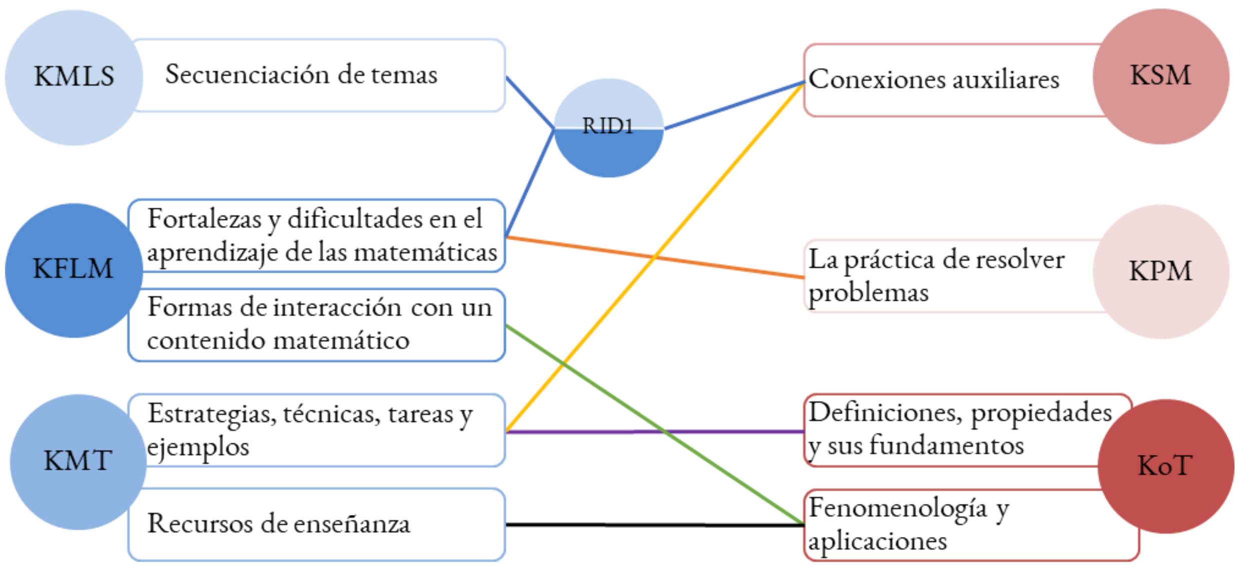
Podemos notar que, en el caso de Leticia predominaron las relaciones intra-dominio en el dominio PCK, debido a que algunas estaban conformadas por relaciones intra-subdominio anteriores, en el MK surgió la relación entre KSM y KoT, pero no surgió el KPM. En el caso de Jorge surgieron relaciones intra-dominio entre los diferentes subdominios de cada dominio, por un lado, en el MK el subdominio KoT se relacionó con el KPM en tres relaciones distintas y se relacionó una vez con el subdominio KSM, por otro lado, en el PCK el KMT evidenció dos relaciones con el KMLS y dos relaciones con el KFLM. Es importante resaltar que, los profesores comparten una relación intra-dominio un poco similar, la cual es la RID4 de Leticia y la RID8 de Jorge, sin embargo, en esta relación Leticia evidencia además la categoría de Definiciones, propiedades y sus fundamentos.

4.3.3. Relaciones inter-dominio

Finalmente, en el conocimiento de los profesores se pudieron encontrar además relaciones entre categorías de subdominios de diferentes dominios. En el conocimiento de Leticia, se encontró una relación que involucraba la relación intra-dominio RID1 (ver Figura 26). Estas categorías del

KMLS y KFLM se relacionaron con la categoría Conexiones auxiliares del KSM. Del mismo modo, categorías del KFLM tales como Fortalezas y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas y Formas de interacción con un contenido matemático se relacionaron con las categorías La práctica de resolver problemas del KPM y Fenomenología y aplicaciones del KoT respectivamente. Además, se encontraron relaciones entre el KMT y KoT, donde se relacionaron la categoría de Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos con la categoría Definiciones, propiedades y sus fundamentos, y luego, se relacionaron las categorías Recursos de enseñanza y Fenomenología y aplicaciones (ver Figura 29). Se observa que, no surgieron relaciones entre el KMLS con el KPM y KoT, y entre el KMT con el KPM. Siendo el KFLM el único subdominio que se relacionó con todos los demás subdominios de conocimiento en el caso de la profesora Leticia.

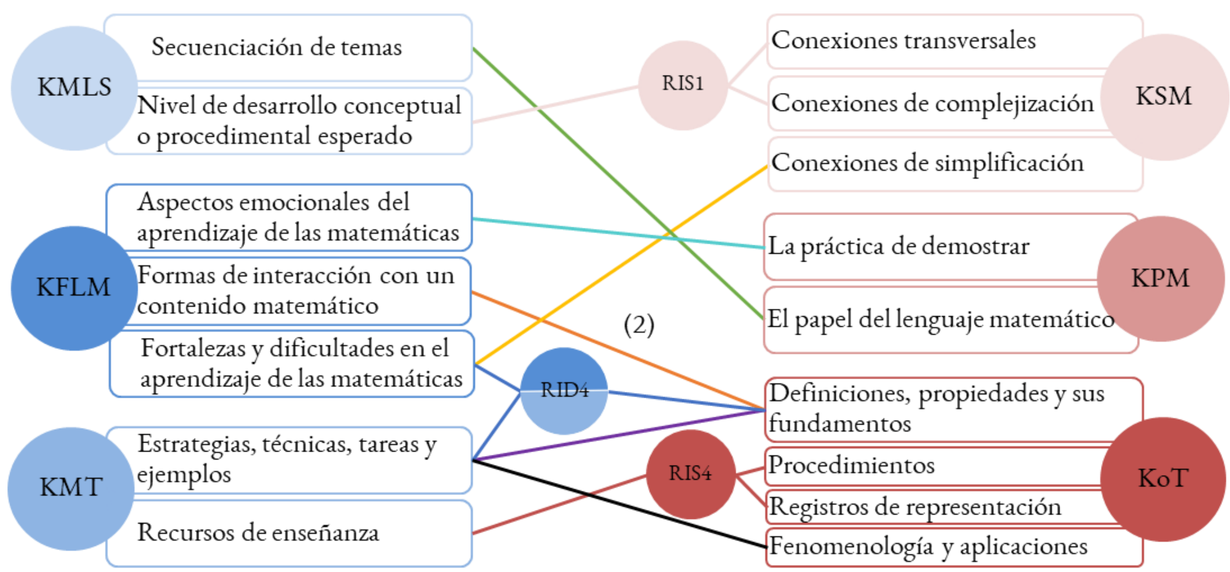
Figura 29. Relaciones inter-dominio en el conocimiento de la profesora mexicana



Fuente: Elaboración propia

En el conocimiento de Jorge, se encontraron relaciones inter-dominio que involucraban relaciones intra-subdominio y relaciones que involucraban relaciones intra-dominio. Primero, se tiene la RIS1 (ver Figura 25) la cual se relaciona con la categoría del KMLS Nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado. Luego, se tiene la RIS4 (ver Figura 25) la cual se relaciona con la categoría Recursos de enseñanza del KMT. Seguido, tenemos la RID4 (ver Figura 28) la cual se relaciona con la categoría Definiciones, propiedades y sus fundamentos del KoT. Por otro lado, la categoría Secuenciación de temas del KMLS se relaciona con la categoría El papel del lenguaje matemático del KPM. En adición, la categoría Aspectos emocionales en el aprendizaje de las matemáticas del KFLM se relaciona con la categoría La práctica de demostrar del KPM. También, se evidenció la relación entre la categoría Fortalezas y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas del KFLM y la categoría Conexiones de simplificación del KSM. Por su parte la categoría Definiciones, propiedades y sus fundamentos del KoT también se relaciona dos veces con las categoría Formas de interacción con un contenido matemático del KFLM (por esto se coloca (2) sobre la línea naranja en el gráfico para simbolizar que la relación se presenta dos veces) y además se relaciona con la categoría Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos del KMT. Por último, se relaciona la categoría Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos del KMT con la categoría Fenomenología y aplicaciones del KoT (ver Figura 30). Se observa que, no surgieron relaciones entre el KMLS con el KoT, y entre el KMT con el KSM y KPM . Siendo el KoT y el KPM los subdominios que se relacionaron con la mayoría de los otros subdominios, en el caso del profesor Jorge.

Figura 30. Relaciones inter-dominio en el conocimiento del profesor colombiano



Fuente: Elaboración propia

Podemos notar que, en ambos profesores, la mayor cantidad de relaciones fueron inter-dominio, aunque en ninguno de ellos surgió la relación KMT y KPM. Es de suma importancia mencionar que los profesores compartieron la relación inter-dominio KMT y KoT, la cual está simbolizada con una línea morada en las Figuras 29 y 30, lo que indica que ambos profesores utilizan diferentes estrategias, ejemplos o analogías para la enseñanza y construcción de definiciones, propiedades y reglas de la adición de los números enteros.

Conclusiones

En esta investigación pudimos observar las diferentes relaciones que pueden surgir entre conocimientos del modelo MTSK en el diseño de una planeación de clase sobre resolución de problemas aditivos con números enteros, desde dos perspectivas diferentes. En este caso, notamos que, aunque los dos profesores contaban con una formación de maestría en educación matemática, en el caso de la profesora mexicana, que contaba además con una licenciatura en matemáticas, esta dejó ver mayormente su conocimiento didáctico y relaciones al interior de este dominio con el dominio matemático, esto puede deberse a su formación de posgrado.

Por su parte, el profesor colombiano dejó ver ambos conocimientos, tanto el matemático como el didáctico, y evidenció mayor número de relaciones entre conocimientos, esto puede deberse a los años de experiencia laborando como docente, además, otro factor que influyó en la diferencia de relaciones fue la cantidad de semanas planificadas, pues la profesora mexicana planificó una semana de clase, en cambio, el profesor colombiano planificó tres semanas. En adición, un factor que también influyó en las diferencias de relaciones entre categorías de subdominios presentadas fue el contexto en el que se desenvuelven los profesores, en este caso el contexto mexicano y el colombiano respectivamente, además de la cantidad de estudiantes que atiende cada profesor, así como los currículos que rigen a cada país y los estándares que toma en cuenta la institución en la que laboran. Sin embargo, en ambos casos se presentaron mayormente relaciones inter-dominio lo que indica que el conocimiento didáctico del profesor de matemáticas es inherente a su conocimiento matemático, es decir, que el profesor de matemáticas utiliza su conocimiento de estándares, de la enseñanza y del aprendizaje para poder llevar a la práctica matemática todos estos temas y además establecer conexiones entre ellos.

Por otro lado, notamos también que ambos profesores compartieron la relación intra-dominio KoT y KSM (procedimientos; conexiones auxiliares), debido a que ambos profesores utilizan auxiliares tales como la recta numérica y los vectores para llevar a cabo procedimientos de resolución de problemas aditivos con enteros. Además, compartieron la relación inter-dominio KMT y KoT (Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos; Definiciones, propiedades y sus fundamentos) donde utilizaron su conocimiento de estrategias y ejemplos para la construcción de definiciones y propiedades de los números enteros con sus estudiantes. Adicionalmente, los profesores coincidieron en evidenciar algunas relaciones entre subdominios, aunque en estas relaciones no se evidenciaron las mismas categorías de conocimiento en los profesores, tales relaciones fueron: relaciones al interior del KFLM y KoT, relaciones intra-dominio entre el KFLM y KMT, relaciones inter-dominio entre el KFLM y KPM; KFLM y KoT; y entre el KMT y KoT.

Cabe resaltar que, algunas relaciones no se presentaron en ninguno de los dos profesores, tales como relaciones intra-subdominio en el KPM, y relaciones inter-dominio entre el KMLS y KoT; y entre el KMT y KPM. Además, aunque el profesor colombiano mostró variedad de relaciones intra-dominio en el MK y el PCK, no evidenció la relación KFLM y KMLS la cual si fue evidenciada por la profesora mexicana.

Respecto a las categorías de los subdominios del modelo MTSK, no se encontró evidencia de relación de las categorías Teorías de enseñanza de las matemáticas (KFLM) y La práctica de definir (KPM). Un aspecto a considerar fue el surgimiento de relaciones entre el subdominio KPM con los subdominios KMLS, KFLM, KoT y KSM, debido a que se encuentra poco documentado el estudio de relaciones con este subdominio. Cabe resaltar que, ambos profesores evidenciaron otros conocimientos especializados, pero solo se tuvieron en cuenta aquellos conocimientos que evidenciaron una relación entre categorías de conocimiento. No obstante, en ambos profesores se evidenció conocimiento de los diferentes subdominios del modelo.

En lo que respecta al tema de resolución de problemas aditivos con números enteros, los resultados de esta investigación permitirán dotar al profesor de matemática de diferentes conocimientos relacionados con la enseñanza, el aprendizaje y los estándares de aprendizaje de las matemáticas y su utilidad para llevar los conocimientos matemáticos al aula de clase; la variedad de relaciones permite ver los diferentes aspectos que se deben tener en cuenta para la planificación de este tema, siendo un instrumento que puede servir para que los profesores de matemáticas ayuden a sus estudiantes a superar dificultades con la resolución de problemas y con la adición de números enteros (Becerra et al., 2012; Socas et al., 2014). Así como también dotarlo de estrategias, recursos de enseñanza, teorías, formas de despertar el interés en sus estudiantes, temas que sirven como conexión para la enseñanza del tema, propiedades, definiciones y formas de proceder en matemáticas.

En cuanto a los instrumentos de recolección de datos utilizados en esta investigación, la planeación de clase fue un instrumento óptimo y propicio para estudiar el conocimiento que el profesor pone en juego en su intención de enseñanza, puesto que permitió identificar indicios y oportunidades de investigación que luego se indagaron en la entrevista semiestructurada. Aunque se han reportados trabajos que utilizan la planeación de clase como instrumento de recolección de datos en el modelo MTSK, este estudio aporta una perspectiva acerca de cómo puede utilizarse el conocimiento matemático y didáctico para la enseñanza de la adición de números enteros a través de la resolución de problemas, el cual aún no ha sido reportado en la literatura científica.

Asimismo, la entrevista semiestructurada fue un instrumento idóneo para indagar en los subdominios de conocimiento de los profesores, basados en los indicios de conocimiento y en las oportunidades de investigación plasmados en la planeación de clase o durante la entrevista. Es decir, por un lado, se pudieron convertir estos indicios en evidencias de conocimiento y, por otro lado, las oportunidades sirvieron para indagar en conocimientos específicos tales como el de la práctica matemática.

Adicionalmente, gracias a la estrategia de solicitar una planeación de clase de este objeto aritmético (números enteros) basada en la resolución de problemas aditivos, se pudo evidenciar conocimiento de los profesores sobre la resolución de problemas como una práctica matemática y como una estrategia de enseñanza de las matemáticas. Además, se pudo indagar en las heurísticas que utilizan los profesores cuando llevan a cabo procedimientos de resolución de problemas.

Por último, se invita a la comunidad de educación matemática a desarrollar investigaciones que utilicen la planeación de clases como un instrumento para estudiar el conocimiento especializado del profesor de matemáticas, frente a la resolución de problemas de otros objetos matemáticos específicos. También al establecimiento de las diferentes relaciones que puedan surgir entre los subdominios del modelo MTSK, con la finalidad de entender mejor el modelo y poder observar aspectos concretos del conocimiento, es decir, cómo se dan las relaciones en el caso de la resolución de problemas de objetos matemáticos específicos sean aritméticos, algebraicos geométricos, estadísticos, etc. Debido a que estos, nos permitirán generar distintas perspectivas o formas de conocer los contenidos matemáticos para saber usarlos como objeto de enseñanza-aprendizaje (Escudero-Ávila et al., 2017). Además, también sean un aporte a la formación de profesores de matemáticas, y que los profesores en formación adquieran estos conocimientos y desarrollen estas relaciones.

Referencias

Advíncula, E., Beteta, M., León, J., Torres, I. y Montes, M. (2021). El conocimiento matemático del profesor acerca de la parábola: diseño de un instrumento para investigación. *Uniciencia, 35*(1), 190-209. https://doi.org/10.15359/ru.35-1.12

Aguilar-González, A., Muñoz-Catalán, C., Carrillo-Yáñez, J. y Rodríguez-Muñiz, J. L. (2018). ¿Cómo establecer relaciones entre conocimiento especializado y concepciones del profesorado de matemáticas? *PNA, 13*(1), 41-61. https://doi.org/10.30827/pna.v13i1.7944

Aguilar-González, A., Muñoz-Catalán & C., Carrillo, J. (2019). An Example of connections between the mathematics teacher's conceptions and specialised knowledge. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 15*(2), 1–15. https://doi.org/10.29333/ejmste/101598

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389–407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Bassey, M. (1999). *Case Study reserarch in educational setting*. Open University Press.

Becerra, O. J., Buitrago, M. R., Calderón, S. C., Gómez, R. A., Cañadas, M. C. y Gómez, P. (2012). Adición y sustracción de números enteros. En P. Gómez. (Ed.), *Diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas matemáticas en MAD 1* (pp. 19-75). Universidad de los Andes. http://funes.uniandes.edu.co/1890/

Bosh, C., Meda, A. y Gómez, C. (2018). *Matemáticas 1. Infinita Secundaria.* Ediciones Castillo.

Bruno, A. y García, J. A. (2004). Futuros profesores de primaria y secundaria clasifican problemas aditivos con números negativos. *RELIME, 7*(1), 25-48. http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33570102

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C., y Muñoz-Catalán, M.C. (2013). Determining Specialised Knowledge for Mathematics Teaching. En B. Ubuz, C. Haser, y M.A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the CERME 8* (pp. 2985-2994). ERME.

Carrillo, J., Montes, M., Contreras, L. C. y Climent, N. (2017). El conocimiento del profesor desde una perspectiva basada en su especialización: MTSK. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, (22), 185-205. https://doi.org/10.4000/adsc.756

Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, Á., Ribeiro, M., y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236–253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Carrillo Yañez, J., Climent Rodríguez, N., Montes Navarro , M. y Muñoz-Catalán, M. C. (2022). Una trayectoria de investigación sobre el conocimiento del profesor de matemáticas: del grupo SIDM a la Red Iberoamericana MTSK. *Revista Venezolana De Investigación En Educación Matemática*, *2*(2), e202204. https://doi.org/10.54541/reviem.v2i2.41

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., & Montes, M. (2019). Mathematics teachers' specialised knowledge in managing problem-solving classroom tasks. En P. Felmer, P. Liljedahl & B. Koichu (Eds.), P*roblem Solving in Mathematics Instruction and Teacher Professional Development* (pp. 297–316). Springer

Chamorro, M. (2003). *Didáctica de las matemáticas para primaria*. Pearson Educación.

D'Amore, B. (2006). *Didáctica de la Matemática* (A. Balderas, Trad.). Cooperativa Editorial Magisterio. (Obra original publicada en 1999)

Delgado-Rebolledo, R. y Espinoza-Vásquez., G. (2021). ¿Cómo se relacionan los subdominios del conocimiento especializado del profesor de Matemáticas? En J. G. Moriel-Junior (Ed.), *Anais do V Congreso Iberoamericano sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas* (pp. 288-295). Congresseme.

Delgado-Rebolledo, R., & Zakaryan, D. (2020). Relationships between the knowledge of practices in mathematics and the pedagogical content knowledge of a mathematics lecturer. *International Journal of Science and Mathematics Education, 18*(3), 567-587. https://doi.org/10.1007/s10763-019-09977-0

Escudero, D.I., Flores, E., y Carrillo, J. (2012). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas. *Actas del XV EIME*, 35-42. Cinvestav.

Escudero, D. (2015). *Una caracterización del conocimiento didáctico del contenido como parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas de secundaria*. [Tesis doctoral, Universidad de Huelva]. Biblioteca Universitaria Huelva. http://hdl.handle.net/10272/11456

Escudero-Ávila, D., Gomes, J., Muñoz-Catalán, M.C., Flores-Medrano, E., Flores, P., Rojas, N., Aguilar, A. (2015). Aportaciones metodológicas de investigaciones con MTSK. En J. Carrillo, L.C. Contreras y M. Montes (Eds.), Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. *Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 60-68). SGSE.

Escudero-Ávila, D., Vasco, D. y Aguilar-González, A. (2017). Relaciones entre los dominios y subdominios del conocimiento especializado del profesor de matemáticas. Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas. (Ed.), *VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática* (pp. 83-91). FESPM. http://funes.uniandes.edu.co/19810/

Espinoza, G. (2020). *Caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas de educación media sobre el concepto de función*. [Tesis doctoral, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso]. Sistema de Biblioteca PUCV. http://opac.pucv.cl/pucv_txt/txt-0000/UCB0313_01.pdf

Flores, E., Escudero, D. I., y Aguilar, A. (2013). Oportunidades que brindan algunos escenarios para mostrar evidencias del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 275-282). SEIEM. https://www.seiem.es/pub/actas/index.shtml

Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Montes, M., Aguilar, Á. y Carrillo, J. (2014). Nuestra modelación del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, el MTSK. En Á. Aguilar, E. Carmona, J. Carrillo, L. C. Contreras, N. Climent, D. Escudero-Ávila, E. Flores-Medrano, P. Flores, J. L. Huitrado, M. Montes, M. Muñoz-Catalán, N. Rojas, L. Sosa, D. Vasco y D. Zakaryan (Eds.), *Un marco teórico para el Conocimiento especializado del Profesor de Matemáticas* (1st ed., pp. 71–93). Universidad de Huelva. https://doi.org/10.13140/2.1.3107.4246

Flores-Medrano, E. (2015). *Una profundización en la conceptualización de elementos del modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK)* [Tesis doctoral, Universidad de Huelva, España]. Repositorio Institucional de la Universidad de Huelva. http://hdl.handle.net/10272/11503

Flores-Medrano, E. (2022). Conocimiento de la estructura de las matemáticas. En J. Carrillo-Yañez, M. A. Montes-Navarro y N. Climent-Rodríguez. (Eds.). *Investigación sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): 10 años de camino* (pp. 47-55). Dykinson, S. L.

Garfias, L. (2011, 11 de julio). *Operación de números con signos.* Spanish GED 365. https://www.spanishged365.com/operacion-de-numeros-con-signos/

Hernández-Sampieri, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2014). *Metodología de la Investigación* (6ta ed.). McGraw-Hill Interamericana.

Hobri, H., Susanto, H. A., Hidayati, A., Susanto, S. y Warli, W. (2021). Exploring thinking process of students with mathematics learning disability in solving arithmetic problems. *International Journal of Education in Mathematics, Science, and Technology (IJEMST), 9*(3), 498-513. https://doi.org/10.46328/ijemst.1684

Janesick, V. J. (1998). *Stretching: Exercises for qualitative researchers*. SAGE.

Koetting, J. R. (1984). *Foundations of naturalistic inquiry: developing a theory base for understanding individual interpretations of reality*. Association for Educational Communications and Technology.

Kuhn, T. S. (1971). *La estructura de las revoluciones científicas*. (A, Contín, Trad., 1.ª ed.). Fondo de Cultura Económica. (Trabajo original publicado en 1962).

Lester, F. K. y Cai, J. (2016). Can mathematical problem solving be taught? Preliminary answers from 30 years of Research. En P. Felmer, E. Pehkonen y J. Kilpatrick. (Eds.), *Posing and solving mathematical problems* (pp. 117-135). Springer.

Maca Díaz, A. J. y Patiño Giraldo, L. E. (2016). La enseñanza de los números enteros un asunto sin resolver en las aulas. *Plumilla Educativa, 17*(1), 194-210. https://doi.org/10.30554/plumillaedu.17.1756.2016

Marradi, A., Archenti, N. y Piovani, J. (2007). *Metodología de las ciencias sociales*. Emecé.

Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas.* MEN.

Ministerio de Educación Nacional. (MEN, 2017). *Instructivo insumo de apoyo plan de aula*. https://mececdf.files.wordpress.com/2017/06/anexo-1-instructivo-insumo-de-apoyo-plan-de-aula.pdf

Muñoz-Catalán, M. C. (2009). *El desarrollo profesional en un entorno colaborativo centrado en la enseñanza de las matemáticas: el caso de una maestra novel* [Tesis doctoral, Universidad de Huelva]. Repositorio Institucional de la Universidad de Huelva. http://hdl.handle.net/10272/2949

Muñoz-Catalán, M. C., Contreras, L. C., Carrillo, J., Rojas, N., Montes, M. Á., y Climent, N. (2015). Conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): un modelo analítico para el estudio del conocimiento del profesor de matemáticas. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 18* (3), 589-605. https://gaceta.rsme.es/abrir.php?id=1294

Muñoz-Catalán, M. C. y Monteiro, R. (2016). Afrontando la controversia: Discusión sobre la naturaleza de los elementos metodológicos en la investigación en Educación. *OMNIA. Revista Interdisciplinar de Ciências e Artes*, *4*, 23-30. http://hdl.handle.net/11441/49766

Muñoz-Catalán, C., Joglar, N., Ramírez, M., Escudero, A.M., Aguilar, A. y Ribeiro, M. (2019). El conocimiento especializado del profesor de infantil desde el aula de matemáticas. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández y M. T. González (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: formación, práctica de aula, conocimiento y competencia profesional* (pp. 63-84). Ediciones Universidad Salamanca.

Muñoz-Catalán, M. C. (2021). Reflexiones para una fundamentación del estudio de caso como diseño metodológico en Educación Matemática. En P.D. Diago, D.F. Yáñez, M.T. González-Astudillo, y D. Carrillo. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 65 – 80). Valencia: SEIEM.

Nieto, A. y Pflucker, K. (2020). *Conocimiento Especializado de los profesores de matemática para la enseñanza de problemas de adición y sustracción* [Tesis de pregrado, Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas]. Repositorio Académico UPC. http://hdl.handle.net/10757/653838

Pacheco-Muñoz, E., Juárez-Ruiz, E. y Flores-Medrano, E. (2021). Relaciones entre subdominios del conocimiento especializado del profesor de matemáticas en la localización en el plano cartesiano. En J. G. Moriel-Junior (Ed.), *Anais do V Congreso Iberoamericano sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas* (pp. 121-128). Congresseme.

Pacheco-Muñoz, E., Juárez-Ruiz, E. y Flores-Medrano, E. (2022). Conocimiento didáctico del contenido en la enseñanza de la localización en el plano cartesiano. *Investigación e Innovación en Matemática Educativa IIME, 7,* 1-20. https://doi.org/10.46618/iime.143

Pacheco-Muñoz, E., Juárez-Ruiz, E., y Flores-Medrano, E. (2023). Relaciones direccionales intra-dominio del conocimiento especializado del profesor de matemáticas sobre localización en el plano. *Avances de Investigación en Educación Matemática (AIEM),(*24), 57-74. https://doi.org/10.35763/aiem24.4360

Paternina-Borja, O., Juárez-Ruiz, E. y Zakaryan, D. (2021). Conocimiento especializado de un profesor de matemáticas: caracterización de relaciones en tema de simetrías. En J. G. Moriel-Junior (Ed.), *Anais do V Congreso Iberoamericano sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas* (pp. 296-303). Congresseme.

Paternina-Borja, O., y Juárez-Ruiz, E. (2023). Planeación de clase para enseñar simetrías: escenario para caracterizar el conocimiento didáctico de una profesora de matemáticas. *Revista LASALLISTA de Investigación, 20*(1), 67-82. https://doi.org/10.22507/rli.v20n1a5

Piñeiro, J. (2019). *Conocimiento profesional de maestros en formación inicial sobre resolución de problemas en matemáticas* [Tesis doctoral, Universidad de Granada]. DIGIBUG. http://hdl.handle.net/10481/57450

Pólya, G. (1945). *How to solve it?* (1ra ed.). Trillas.

Rico, L. (2007). La competencia matemática en PISA. *PNA, 1*(2), 47-66. http://hdl.handle.net/10481/4703

Ricoy Lorenzo, C. (2006). Contribución sobre los paradigmas de investigación. *Educação, 31*(1), 11-22. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=117117257002

Rojas, N. (2014). *Caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas: Un estudio de caso* [Tesis doctoral, Universidad de Granada]. DIGIBUG. http://hdl.handle.net/10481/35199

Sánchez, J. (2021). *¿Cómo impacta el conocimiento que tiene un profesor acerca de la teoría APOE sobre su conocimiento especializado?* [Tesis de maestría, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla]. Secretaría de Investigación y estudios de Posgrado BUAP.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving.* Academic Press.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14. https://doi.org/10.3102%2F0013189X015002004

Shulman, L.S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of new reform. *Harvard Educational Review*, *57*(1), 1-22. https://doi.org/10.17763/haer.57.1.j463w79r56455411

Socas, M. M., Hernández, J., y Palarea, M. M. (2014). Dificultades en la resolución de problemas de Matemáticas de estudiantes para Profesor de Educación Primaria y Secundaria. En J. L. González, J. A. Fernández-Plaza, E. Castro-Rodríguez, M. T. Sánchez-Compaña, C. Fernández, J. L. Lupiáñez y L. Puig. (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de las Matemáticas y Educación Matemática - 2014* (pp. 145-154). Departamento de Didáctica de las Matemáticas, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales y SEIEM. http://funes.uniandes.edu.co/5355/

Sosa, L., Flores-Medrano, E. y Carrillo, J. (2015) Conocimiento del profesor acerca de las características de aprendizaje del álgebra en bachillerato. *Enseñanza de las Ciencias*, *33*(2), 173-189. http://dx.doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1522

Spencer, L., Ritchie, J., O'Connor, W., Morell, G., y Ormston, R. (2014). Analysis in practice. En J. Ritchie, J. Lewis, C. McNaughton Nicholls y R. Ormston. (Eds.), *Qualitative Research Practice. A guide for social science students & researchers* (2nd ed., pp. 376-433). SAGE.

Stake, R. (1995). *The art of case study research.* Sage.

Zakaryan, D. y Ribeiro, M. (2016). Conocimiento de la enseñanza de los números racionales: una ejemplificación de relaciones. *Zetetiké*, *24*(3), 301-321. http://dx.doi.org/10.20396/zet.v24i3.8648095

Zakaryan, D., Estrella, S., Espinoza-Vásquez, G., Morales, S., Olfos, R., Flores-Medrano, E. y Carrillo J. (2018). Relaciones entre el conocimiento de la enseñanza y el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas: caso de una profesora de secundaria. *Enseñanza de las ciencias*, *36*(2), 105-123. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2260

Anexos

Anexo 1: Planeación de clase de resolución de problemas aditivos con números enteros de la profesora mexicana

https://drive.google.com/file/d/1dZSyCq42pm-rLy2rPjqgk2cfRAhRqh91/view?usp=sharing

Anexo 2: Planeación de clase de resolución de problemas aditivos con números enteros del profesor colombiano

https://drive.google.com/file/d/1ym3i-WNe1SpClVnjG6oQ1ewlW1o5OotB/view?usp=sharing

Anexo 3: Cuestionario aplicado a la profesora mexicana en la entrevista semiestructurada

https://drive.google.com/file/d/1gNF_lEhzys5lcpFLTPufbNzTxl6oFbIx/view?usp=sharing

Anexo 4: Cuestionario aplicado al profesor colombiano en la entrevista semiestructurada

https://drive.google.com/file/d/1OucS3BXZ5QpOcUDQteb0uhKhLF5t6_mR/view?usp=sharing

Anexo 5: Transcripción de la entrevista semiestructurada de la profesora mexicana

https://drive.google.com/file/d/1jWpd00WYMmcVp2_uxBvfWQNuaW9C5sP/view?usp=sharing

Anexo 6: Transcripción de la entrevista semiestructurada del profesor colombiano

https://drive.google.com/file/d/1kVJyUY6LDF6gvtS0lmHTq2LG41KG6ipv/view?usp=sharing

Anexo 7: Indicadores generales y específicos de las categorías de los subdominios del modelo MTSK sobre la resolución de problemas aditivos con números enteros.

https://drive.google.com/file/d/1WIC6r56Ig2AM1GLotuWzJCZ0yWMIpyi4/view?usp=sharing