BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

DEMOSTRACIONES VISUALES COMO RECURSO LÚDICO PARA LA ENSEÑANZA DEL TEOREMA DE PITÁGORAS EN ALUMNOS DE SECUNDARIA

PARA OBTENER EL TÍTULO DE
MAESTRO(A) EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

PRESENTA
LIC. JOSEPH XOLOCOTZI VILLALVA

DIRECTOR DE TESIS
DR. JOSIP SLISKO IGNJATOV

CO-DIRECTOR DE TESIS
DR. JOSÉ GABRIEL SÁNCHEZ RUÍZ

PUEBLA, PUE. JUNIO, 2022

DR. SEVERINO MUÑOZ AGUIRRE
SECRETARIO DE INVESTIGACIÓN Y
ESTUDIOS DE POSGRADO, FCFM-BUAP
P R E S E N T E:

Por este medio le informo que el C:

<u>*JOSEPH XOLOCOTZI VILLALVA*</u>

Estudiante de la Maestría en Educación Matemática, ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 03 de junio de 2022, con la tesis titulada:

"DEMOSTRACIONES VISUALES COMO RECURSO LÚDICO PARA LA ENSEÑANZA DEL TEOREMA DE PITÁGORAS EN ALUMNOS DE SECUNDARIA"

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

A T E N T A M E N T E.
H. Puebla de Z. a 07 de junio de 2022

Lidia A. H. R.

DRA. LIDIA AURORA HERNÁNDEZ REBOLLAR
COORDINADORA DE LA MAESTRÍA
EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA.

DRA´LAHR/l´agm*

Facultad
de Ciencias
Físico Matemáticas

Av. San Claudio y 18 Sur, edif. FM1
Ciudad Universitaria, Col. San
Manuel, Puebla, Pue. C.P. 72570
01 (222) 229 55 00 Ext. 7550 y 7552

Agradecimiento al Consejo Nacional de ciencia y Tecnología (CONACYT)

No. De CVU 1028113

Agradezco al consejo por promover la investigación en didáctica de la matemática y depositar su confianza en la presente tesis, que no hubiera sido posible sin su ayuda. Agradezco no sólo por facilitar los recursos materiales para efectuar la investigación, también agradezco el trabajo que realiza para que las personas como yo, interesadas en realizar investigaciones vinculadas con la didáctica, tengan acceso a programas educativos y espacios para conocerse e intercambiar ideas.

Tengo la esperanza de que la investigación logre acercar la exploración científica destinada a favorecer el aprendizaje de la matemática con los profesionales de la educación que día a día dedican sus esfuerzos a ayudar a jóvenes estudiantes. Confió en que cada vez más profesores e investigadores, con la ayuda del CONACYT, dedicaran su tiempo y capacidad en beneficio de la educación del país y las generaciones futuras.

Agradecimientos personales

Agradezco a los doctores Josip Slisko Ignjatov, Gabriel Kantún Montiel y José Gabriel Sánchez Ruiz por la confianza y apoyo y paciencia que me han brindado durante estos años.

Agradezco a los profesores Eric García, Fabiana Arteaga y Elizabeth Olivares por haber dedicado tiempo a escuchar mi propuesta, su disposición para ayudarme y por compartir su experiencia profesional, criterio, ideas y sugerencias a lo largo de la investigación.

Agradezco, a los alumnos que participaron como voluntarios durante las pruebas piloto de las actividades y durante los experimentos de enseñanza, quienes lo hicieron de forma desinteresada y con mejor voluntad de la que yo podría haber deseado. También agradezco a los profesores y directivos de las escuelas donde estas pruebas se llevaron a cabo y las personas que me ayudaron facilitándome un aula, mesas y la toma de evidencias necesarias para la investigación.

Agradezco a la maestra Irene Nayeli Vázquez por acompañarme y ayudarme.

Índice

REUMEN

Las demostraciones visuales son recursos ilustrativos que, aunque no consisten en una demostración formal, contribuyen al entendimiento y expresión de propiedades matemáticas. En la enseñanza del teorema de Pitágoras se suelen implementar este tipo de demostraciones para explorar las propiedades de las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de triángulos rectángulos, partiendo de demostraciones geométricas que diseccionan sus áreas para formar figuras congruentes en los cuadrados de los catetos y el cuadrado de la hipotenusa. Estas actividades favorecen el estudio y aprendizaje del tema basado en juegos como rompecabezas, sin embargo, es necesario investigar cómo este tipo de actividades favorece la forma en que los estudiantes exploran y aprenden el teorema de Pitágoras para implementar estas actividades de la forma más eficiente posible y evitar que se conviertan en sólo un juego que involucra una propiedad matemática.

Este documento presenta la investigación que se ha realizado relacionada con el uso de demostraciones visuales para la enseñanza del teorema de Pitágoras, así como los conceptos relacionados con estrategias de aprendizaje basado en juegos. Continúa explorando secuencias didácticas para la enseñanza del teorema de Pitágoras con la intención de desarrollar un juego que pueda incorporarse en ellas de forma eficiente. Finalmente presenta el análisis de la implementación de una estrategia de enseñanza del teorema de Pitágoras que recurre a juegos como una actividad de aprendizaje.

PALABRAS CLAVE: Aprendizaje basado en juego, demostraciones visuales, teorema de Pitágoras, material didáctico, rompecabezas.

INTRODUCCIÓN

El juego ha sido estudiado desde diferentes puntos de vista y, aunque es difícil definir una conducta tan compleja, todos los estudios aceptan el papel esencial del juego en el desarrollo de la infancia, incluso lo valoran como una forma de explorar diferentes situaciones en la vida adulta. Poco a poco se ha cristalizado una aproximación al "juego" como un tipo especial de actividad (realizada por niños) que encarna su relación con el mundo externo y, aún más importante, con una realidad social con estructuras específicas, y que motiva un sistema especial de acciones (Elkonin, 2005). Posiblemente la propiedad de los juegos que permite explorar aspectos de la realidad es lo que ha llevado a muchas personas a utilizarlos como un medio educativo.

Un ejemplo de esto es el trabajo de *Zoltan Paul Dienes*, quien propuso diferentes formas para enseñar estructuras matemáticas complejas mediante el uso de material manipulable, juegos, historias, y bailes (Sriraman & Lesh, 2007). Los juegos y materiales propuestos por Dienes aún son referencia para profesores, autores de libros de texto y diseñadores de material didáctico. Este tipo de dinámicas se conocen como "*actividades lúdicas*" y forman un elemento fundamental del Aprendizaje Basado en Juegos (ABJ o GBL por sus siglas en ingles "Game-Based Learning"), un método de enseñanza que parte de un contenido como eje central y es complementado con juegos como recurso dentro de las actividades (Torres, Romero, y Salgado, 2019).

Los juegos son actividades propias de los animales y ofrecen una forma distinta de estudiar los contenidos matemáticos que, entre otras cosas, puede favorecer el trabajo en equipo, la creatividad y el gusto por el estudio de las matemáticas (Garaigordobil, 2008). La investigación propone explorar estrategias para enseñar el teorema de Pitágoras mediante juegos, partiendo de rompecabezas basados en demostraciones geométricas del teorema y algunas actividades que permiten explorar e interpretar el teorema de diferentes formas para alcanzar su formalización.

Es común observar, en libros de texto, demostraciones geométricas del teorema de Pitágoras para construir rompecabezas que funcionen como una demostración visual. Las secuencias propuestas en libros de texto responden a los planes y programas de estudio y buscan ofrecer a los estudiantes diferentes formas de experimentar la relación que existe entre los cuadrados construidos sobre los lados de triángulos rectángulos, para posteriormente formalizar el teorema y utilizarlo para resolver problemas matemáticos. Idealmente los juegos diseñados como producto de la investigación deberían poder integrarse a estas secuencias de forma eficiente.

La enseñanza del teorema de Pitágoras ha dado lugar a una gran cantidad de recursos, esto es probablemente causado por la diversidad de demostraciones geométricas y contextos de aplicación del teorema, de entre ellos se destacan trabajos como el de Nelsen (1993), en "*Proofs with out words*" donde proporciona demostraciones del teorema sin recurrir a argumentos formales. Actualmente es posible considerar a demostraciones como las de Nelsen como demostraciones visuales, que emplean imágenes para transmitir información y ejemplificar complejas ideas matemáticas de forma sencilla (Carbajal & Muños, 2019).

En muchos aspectos, los rompecabezas, aunque parten de demostraciones geométricas del teorema de Pitágoras, carecen del lenguaje formal de una demostración y tienen la intención de ayudar en el entendimiento del teorema de Pitágoras. No obstante, es necesario aclarar que no pretenden que los estudiantes acepten la valides del teorema de Pitágoras mediante recursos externos, sino, ser un recurso que permita explorar las relaciones entre las áreas de figuras construidas sobre los lados de triángulos rectángulos.

Balacheff (2000) realizó un estudio donde observa que, aproximaciones de demostraciones para casos particulares o que recurren a la representación gráfica del objeto matemático, pueden contribuir a la validación que ofrecen los estudiantes de afirmaciones matemáticas sin embargo, señala que no es suficiente con la exploración de ejemplos concretos, como es el caso de las demostraciones visuales, y que es crucial que los alumnos adviertan la necesidad de la generalización en los argumentos que utilizan para realizar demostraciones.

Los juegos tienen una estrecha relación con el razonamiento matemático y pueden ayudar a desarrollar habilidades del pensamiento (Bishop, 2008) lo que facilita su huso en la enseñanza de las matemáticas. Por eso es importante realizar investigaciones sobre su diseño, implementación y análisis de los aprendizajes que pueden favorecer, así como de los retos y dificultades que de estos emanen.

Capítulo 1

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La intervención se realizó durante el ciclo escolar 2021-2022, mientras se encontraban vigentes los planes y programas de estudio 2011 publicados por la Secretaria de Educación Pública (SEP), en el que el teorema de Pitágoras se encuentra incluido en el estándar de aprendizaje "*aplica el teorema de Pitágoras y las razones trigonométricas seno, coseno y tangente en la resolución de problemas*" y se divide en dos aprendizajes esperados: "*análisis de las relaciones entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo*" y "*explicitación y uso del teorema de Pitágoras"* (SEP, 2011).

La separación del contenido en dos aprendizajes puede responder a la necesidad de desarrollar dos habilidades. El primer aprendizaje pretende que los estudiantes comprendan el significado del teorema con actividades en las que los alumnos comparen las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de triángulos rectángulos. El segundo aprendizaje radicaría en que los alumnos utilicen el teorema para resolver problemas en diferentes contextos. **Se plante desarrollar e implementar un juego con material manipulable para estudiar estos contenidos**.

Un primer reto para este tipo de investigaciones es señalado por Brousseau (2002), quien propone la teoría de situaciones didácticas para el diseño de escenarios que favorezcan el aprendizaje (incluidos los juegos), y criticó el trabajo de Dienes ya que, en su opinión, confiar en que el alumno aprenderá por medios independientes al esfuerzo del profesor (por ejemplo el uso de material manipulable) conducirá al fracaso, incluso nombra al fenómeno que consiste en la excesiva confianza que algunos profesores muestran en recursos didácticos, tal como juegos, material manipulable o nemotecnias como "*efecto Dienes"*.

Para ejemplificar esta postura, es posible suponer a un profesor que decide utilizar un juego para estudiar patrones numéricos, ¿significa que el alumno que gana ha comprendido el contenido matemático detrás del juego? La respuesta es no, un estudiante puede ganar el juego por suerte o gracias a una estrategia que aún no responde al contenido matemático que se desea explorar. Es necesario que el profesor guíe a los estudiantes en un análisis para que puedan justificar, razonar y argumentar, de modo que perfeccionen el patrón que les permite ganar el juego y concluir las reglas matemáticas que se desea que conozcan.

Entonces, ¿qué lugar tienen los juegos y el material didáctico en el estudio de la didáctica de la matemática?, aunque algunas personas podrían mal interpretarse al efecto Dienes como una forma de desacreditar las estrategias que recurran a juegos y material concreto para la enseñanza de la matemática, esto no es así, en su lugar se debe interpretar como la necesidad de comprender que estos son un medio, entre otros, para explorar la matemática y que los profesores deben elegir, de acuerdo con las características de sus estudiantes, aquellos medios más pertinentes, y aprender a diferenciar entre aprendizajes propios del juego y los aprendizajes matemáticos.

En pocas palabras, es necesario que las investigaciones trasciendan más allá del diseño y análisis de actividades y estrategias, para conseguir observar los aprendizajes y dificultades que se generan con estas. D'Amore (2013), enuncia a esta transición como el cambio entre la didáctica en su estado de arte, centrada en las formas en que se enseña la matemática (*didáctica tipo A*); a la didáctica científica, que se concentra en el análisis de los aprendizajes (*didáctica tipo B*).

Aunque esta transición puede parecer evidente, diseñar estrategias, materiales y realizar adecuaciones a estos para que se ajusten a los alumnos que participan como sujetos de investigación, pueden distraer al investigador del análisis de los aprendizajes ya que necesita controlar muchos de los factores que se encuentran involucrados. Lo que da pie a un segundo problema, y es la posibilidad de que una estrategia que, en condiciones controladas, alcanza muy buenos resultados, no logre hacerlo cuando intenta ser reproducida (Artigue, 2013).

Un ejemplo de particular interés para ejemplificar el problema de reproducir estrategias en diferentes contextos lo ofrece el trabajo expuesto por Rosas, Minnelli, Trejo, y Rodríguez (2018), quienes presentaron rompecabezas basados en disecciones geométricas de demostraciones del teorema de Pitágoras a un grupo de profesores de matemáticas. Su proyecto tenía el propósito de brindar diferentes recursos para la enseñanza del teorema de Pitágoras, por lo que ofrecieron los rompecabezas en diferentes formatos, tanto en papel como archivos de geometría dinámica.

Una sorpresa para el equipo de Rosas y colaboradores fue una renuencia inicial por parte de los profesores a utilizar estos recursos, por lo que fue necesario dedicar tiempo adicional a explicarles las situaciones en las que podrían utilizarlos y las ventajas de hacerlo. Además, aunque los profesores terminaron por aceptar los recursos con agrado y valorarlos de forma positiva, también realizaban cometarios de posibles mejoras y enunciaban escenarios donde no consideraban que les fueran útiles.

Rosas y colaboradores ofrecen una primera explicación para el rechazo inicial de los profesores a los recursos, que radica en la falta de experiencia con ellos. Atribuyen el rechazo a no conocer el software ni las demostraciones que utilizaban, y asumieron que de tener más experiencia habrían aceptado los recursos con mayor facilidad. Sin embargo, existe una segunda explicación, que radica en el desconocimiento del equipo de investigadores respecto a la situación en la que los profesores realizan su tarea educativa.

Si el equipo de Rosas hubiese tenido acceso a información que especifique el contexto en el que cada uno de los profesores laboraba, ellos hubiesen podido realizar las modificaciones en los recursos que presentaron para que se ajustarán a ellos. Es decir, las quejas y observaciones de los profesores podrían surgir de la necesidad de adecuar los recursos a sus contextos, una vez externadas y resueltas sus inquietudes, ellos aceptan los recursos de manera positiva porque han visualizado como podrían adaptarlos de manera efectiva.

De esto se puede concluir que, si se desea diseñar una actividad que pretenda ser reproducida, debería procurarse la participación de profesores y alumnos, quienes serán los usuarios finales de las actividades y materiales. Aunque esto no garantiza que se podrá reproducir de manera eficiente en cualquier contexto, brinda valiosa información relacionada con los ajustes que deben considerarse al pasar de un entorno controlado a una clase real.

Existen trabajos donde se observa que las demostraciones visuales del teorema de Pitágoras son un recurso valioso para la enseñanza, en el que la motivación y el interés de los estudiantes se ven favorecidos por su implementación. Esto hace pensar que implementarlas como un recurso lúdico es una opción adecuada dentro del ABJ. Por otro lado, también es necesario reconocer que el uso de demostraciones visuales como un recurso lúdico conlleva retos y desafíos, y que para favorecer un desarrollo en las habilidades matemáticas de los estudiantes es necesaria la intervención y guía por parte del profesor.

Reconociendo el valor de las actividades y materiales utilizados para enseñar el teorema de Pitágoras mediante juegos y la necesidad de evaluar los aprendizajes y dificultades que generan en los estudiantes, surge la pregunta de investigación:

“¿Cómo implementar un recurso lúdico basado en demostraciones visuales para favorecer el entendimiento del teorema de Pitágoras en alumnos de secundaria?”

1.1 Preguntas de investigación específicas

Con el propósito de orientar la investigación de forma más puntual se consideran las siguientes preguntas especificas:

1. ¿Cuáles son las estrategias para enseñar el teorema de Pitágoras propuestas en libros de texto y por profesores de nivel secundaria?

2. ¿Con qué características debe contar un material didáctico para favorecer el estudio del teorema de Pitágoras a partir de sus demostraciones visuales?

3. ¿Qué beneficios ofrece utilizar demostraciones visuales como un recurso lúdico para la enseñanza del teorema de Pitágoras en los aprendizajes de los estudiantes?

4. ¿Qué posibles dificultades en el aprendizaje de los alumnos debe considerar un profesor de secundaria al implementar demostraciones visuales del teorema de Pitágoras como recurso lúdico?

1.2 OBJETIVO GENERAL

Identificar cómo el uso de demostraciones visuales del teorema de Pitágoras como recurso lúdico favorece la comprensión y justificación de la relación entre las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de triángulos rectángulos propuesta por alumnos de secundaria.

1.3 Objetivos particulares

1. Identificar las estrategias para enseñar el teorema de Pitágoras propuestas en libros de texto y por profesores de nivel secundaria

2. Diseñar, con base en la opinión de alumnos y profesores de secundaria, un recurso que permita implementar una actividad lúdica para explorar la relación de las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo rectángulo.

3. Implementar, en grupos focales de alumnos de secundaria, una actividad lúdica que permita explorar la relación entre las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo rectángulo para examinar los argumentos que ofrecen los alumnos al justificar el teorema de Pitágoras.

4. Analizar los beneficios y las dificultades que presentan los alumnos de secundaria para justificar el teorema de Pitágoras partiendo de demostraciones visuales como recurso lúdico.

1.4 Justificación

La investigación se realiza durante una época marcada por el incremento de recursos digitales y la enseñanza en línea, a distancia y con ayuda de plataformas, acelerada por las medidas diseñadas por la Organización Panamericana de la Salud (OPS) y la Organización Mundial de la Salud (OMS) para mitigar la propagación del virus SARS-CoV2, causante de la enfermedad COVID 19, entre las que se encuentra el cierre de centros educativos (OPS, 2020). Esto ocasionó que, en muchos lugares del mundo, incluyendo a México, la educación a distancia pasara de ser una opción para algunas personas a ser la realidad de la mayoría de los estudiantes.

El 16 de marzo del año 2020, en México se publicó un acuerdo en el diario oficial de la Federación (DOF) donde se decide ampliar la suspensión de clases de primavera como una medida de emergencia y el 28 de abril del mismo año fue necesario emitir indicaciones para continuar con las actividades educativas a distancia (DOF, 2020), esto forzó a estudiantes, profesores y organismos gubernamentales a recurrir a una variedad de recursos para brindar un servicio educativo, entre los que destacaban medios digitales y audiovisuales.

Bajo este panorama, donde se enfatiza una tendencia a actividades a distancia y recursos digitales, surge la pregunta **¿qué papel pueden tener los juegos presenciales y los materiales manipulables dentro de la educación actual?**; para responder esta pregunta es necesario entender que las medidas tomadas para brindar educación a distancia son parte de un protocolo de emergencia, y que las medias de aislamiento resaltaron la necesidad de actividades que permitan interactuar con otras personas, como son los juegos.

Aunque los recursos digitales y las plataformas educativas son herramientas importantes dentro del sistema educativo mexicano, aun no existen las condiciones para migrar a una educación no presencial a nivel nacional. Por ejemplo, durante el ciclo escolar 2019-2020 cerca del 30% de los estudiantes perdieron contacto con sus profesores y se registró una baja importante en los resultados de estudiantes mexicanos en evaluaciones internacionales (García, 2021).

En el año 2021, cuando se decide retomar las actividades educativas presenciales, la SEP señaló la necesidad de regularizar los aprendizajes, reconoció las dificultades del modelo a distancia y la importancia de ofrecer a los estudiantes un espacio donde puedan interactuar y desarrollar habilidades sociales y emocionales (SEP, 2021).

El cierre de centros educativos a raíz de la pandemia de los años 2020 y 2021 permitió identificar muchos retos y limitaciones del sistema educativo, vislumbrar un poco del futuro de la educación y dejó claro que este será producto del esfuerzo combinado de diferentes sectores de la sociedad. Es posible imaginar que en el futuro se integrarán actividades tanto presenciales como a distancia en la mayor parte de los centros educativos y que los juegos tomarán un nuevo valor al fomentar la interacción, el trabajo en equipo y otras habilidades sociales.

El uso de juegos con un propósito educativo, así como la necesidad de aumentar la cantidad de recursos educativos se considera como un elemento importante desde hace bastante tiempo, además, en el artículo 29 de la ley general de la educación se establece que los planes y programas deberán contemplar acciones que fomenten el aprendizaje mediante actividades recreativas (DOF, 2019). Lo que indica que los juegos tienen y seguirán teniendo un papel importante en la educación.

Asimismo, el Fondo de las Naciones Unidas para la Infancia o UNICEF por sus siglas en inglés (*United Nations International Children's Emergency Fund*), ha promovido el uso de juegos en la educación, principalmente en la primera infancia, ya que considera que el juego satisface la necesidad humana básica de expresar la propia imaginación, curiosidad y creatividad, así como desarrollar habilidades de socialización, trabajo en equipo, autodeterminación y solución de problemas (UNICEF, 2018).

Es por esto por lo que parte de la investigación consiste en diseñar una actividad lúdica, que permita a los estudiantes explorar el teorema de Pitágoras a partir de sus demostraciones visuales. Se pretende que tanto la actividad como los materiales necesarios para realizarla puedan ser implementados por muchos profesores para enseñar el teorema de Pitágoras a sus estudiantes. Es necesario aclarar que la investigación se centra en los aprendizajes favorecidos con dicha actividad y no en las habilidades sociales desarrolladas, por lo que sería posible realizar un análisis social como parte de una investigación futura.

Para diseñar la actividad y los materiales se empieza por identificar las estrategias y actividades diseñadas para enseñar el teorema de Pitágoras propuestas en libros de texto, por profesores y por diferentes autores. Reconociendo cuales son los criterios que utilizan los profesores para implementar una actividad en lugar de otra, se espera poder realizar adecuaciones tanto a la actividad diseñada como a los materiales necesarios para implementarla.

Por último, es importante evaluar cuales son los aprendizajes de los estudiantes una vez implementada la actividad. Aunque las demostraciones visuales utilizadas como rompecabezas pueden brindar un apoyo para que los alumnos acepten la veracidad del teorema de Pitágoras, es importante analizar los argumentos que ofrecen para justificarlo, así como los retos que enfrentan.

De acuerdo con los planes y programas 2011, se espera que los estudiantes aprendan a validar sus procedimientos y resultados, es decir, explicarlos y justificarlos con un razonamiento deductivo mediante argumentos a su alcance (SEP, 2011). Aunque no se pretende que los alumnos realicen demostraciones formales, deben establecer estrategias para comprobar la veracidad de una propuesta matemática.

Así mismo, en los planes y programas de estudio del año 2017, la SEP establece como uno de los criterios necesarios para evaluar el progreso de los estudiantes que estos sean capaces transitar de una justificación pragmática de sus resultados a utilizar propiedades matemáticas conocidas en la justificación de sus argumentos (SEP, 2017). Es importante identificar si los estudiantes han logrado comprender el significado de un concepto matemático, y guiarlos para que desarrollen poco a poco la capacidad de justificar sus argumentos.

Recapitulando, se considera que la propuesta de investigación es relevante ya que los juegos y el ABJ seguirán teniendo un papel notable en la educación y, el teorema de Pitágoras, mediante sus demostraciones visuales, brinda una oportunidad para estudiar estas estrategias de enseñanza. Además, la investigación pretende brindar tres aportes principalmente:

Primero: Estudiar las diferentes propuestas planteadas por profesores y en libros de texto para enseñar la demostración del teorema de Pitágoras.

Segundo: Diseñar y desarrollar una actividad lúdica para la enseñanza del teorema de Pitágoras a partir de sus demostraciones visuales.

Tercero: Analizar los argumentos que los estudiantes proporcionan para justificar la relación entre las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de triángulos rectángulos a partir de actividades lúdicas basadas en demostraciones visuales del teorema de Pitágoras.

Capítulo 2

REVISIÓN DE LITERATURA

El teorema de Pitágoras se conoce desde hace mucho tiempo, y se puede interpretar de diferentes formas, pero una de las más conocidas es la siguiente: *"En un triángulo rectángulo, la suma de las áreas de los cuadrados levantados sobre los catetos es igual al área del cuadrado levantado sobre la hipotenusa"*, que generalmente se expresa de forma algebraica como *"*$a^2+b^2=c^2$*"*, una relación clara para aquellos que conocen el teorema, no así para las personas que lo aprenden por primera vez.

En los planes y programas de educación del año 2011, como parte de los aprendizajes esperados del tercer año de educación secundaria, se establece el estándar de aprendizaje "*aplica el teorema de Pitágoras y las razones trigonométricas seno, coseno y tangente en la resolución de problemas*" (SEP, 2011), mientras que en los planes y programas educativos 2017 se indica, también en el tercer año de educación secundaria, el aprendizaje clave *"Formula, justifica y usa el teorema de Pitágoras"* (SEP, 2017). El teorema de Pitágoras es uno de los contenidos más representativos de la asignatura de matemáticas y ha sido objeto de diferentes estudios bajo diferentes enfoques.

2.1 El teorema de Pitágoras y las demostraciones visuales

Desde un punto de vista matemático, las demostraciones tienen un papel importante ya que se elaboran para determinar la veracidad o falsedad de una proposición y, solamente si una persona se encuentra en condiciones de comprender dicha proposición podría elaborar o entender la demostración (D'Amore, 2013). Aun así, en muchas ocasiones, las demostraciones son utilizadas para dar a conocer o explicar dichas proposiciones, por lo que adquieren un valor didáctico adicional a su valor matemático.

Maor (2007), realizó una investigación histórica de como diferentes culturas han estudiado, registrado y comunicado el teorema de Pitágoras. En su investigación, Maor expresa que la utilidad del teorema de Pitágoras ha hecho que diferentes personas desarrollen un método para compartir la relación que existe entre los lados de un triángulo rectángulo. A este conjunto de pruebas que tienen la intención de dar a conocer a otras personas la veracidad del teorema se le puede nombrar como "*las demostraciones del teorema de Pitágoras*".

El teorema de Pitágoras tiene una gran cantidad de demostraciones registradas. Uno de los trabajos más icónicos relacionados con esto es el de Loomis (1940) quien realizó una recopilación de más de 300 demostraciones del teorema de Pitágoras, catalogándolas en cuatro diferentes tipos (algebraicas, geométricas, cuatenionicas y dinámicas) y explicó que no tienen el único propósito de satisfacer la curiosidad matemática, también hizo la compilación con el propósito de brindar un posible recurso para la enseñanza.

Nelsen (1993) realizó una antología de diferentes demostraciones que no recurrían a un formato de demostración formal. En su lugar, utilizaban ilustraciones geométricas (tanto de casos particulares como generales) seguidos de expresiones algebraicas o geométricas sencillas que explicaban propiedades geométricas, como el teorema de Pitágoras, en un libro titulado "*Proofs without words*". En su momento, algunas personas no encontraron un valor matemático en las demostraciones propuestas, ya que una demostración tiene un valor matemático en la medida en que sirve para comprobar que una idea es verdadera o falsa, mientras que las demostraciones de Nelsen cumplían más como ejemplos que como demostraciones.

En ese sentido, Nelsen defendió la contundencia de muchas de las demostraciones, pero reconoció la necesidad de distinguir los casos en los que una demostración particular no es suficiente y es necesario proponer una demostración formal. Es en ese punto donde se empieza a distinguir claramente la doble función que puede tomar una demostración dependiendo de la intención con la que se utiliza y el público al que va dirigida, por un lado, como un proceso matemático y por otro como un recurso didáctico.

Ahora, aquellas demostraciones que son utilizadas con la intención de enseñar un concepto matemático en lugar de probar su veracidad no siempre cumplen con el formato de una demostración formal, están destinadas a un público no experto y recurren a representaciones o esquemas concretos. Por tales motivos no pueden ser consideradas como demostraciones, pero, entonces ¿qué son?; Algunas de estas pueden recibir el nombre de *demostraciones visuales*.

Las demostraciones visuales emplean imágenes, esquemas matemáticos, diagramas y dibujos para transmitir información y sirven para mostrar y ejemplificar complejas ideas matemáticas de forma sencilla (Carbajal y Muños, 2019). Las demostraciones visuales tienen una gran utilidad didáctica, ya que le permiten tanto a profesores como a alumnos expresar una idea y justificar sus razonamientos sin la necesidad de utilizar una demostración formal.

Aunque las demostraciones visuales brindan la posibilidad de introducir a estudiantes en un contenido posiblemente muy complejo de una manera sencilla e incluso entretenida, también es importante lograr que los alumnos identifiquen la necesidad de comprobar la veracidad de los nuevos conceptos que se les han explicado. Una parte importante en el aprendizaje de las matemáticas es que los alumnos sean capaces de formular argumentos y demostraciones, (esto se tratará más profundamente en el apartado 3 de este capítulo).

De cierta forma, las demostraciones visuales transforman el conocimiento formal (un objeto del saber), en un saber para ser enseñado o en un objeto de estudio, a esto se le conoce como *transposición didáctica* (Chevallard, 2005). La transposición didáctica es la transformación que sufre un conocimiento o concepto con el propósito de ser enseñado, ya que debe ajustarse de forma que sea comprensible o que ponga de manifiesto la necesidad de dicho conocimiento. Esta transformación depende de las condiciones y características de los estudiantes y profesores.

En el caso del teorema de Pitágoras, como objeto del saber, la transposición inicia desde su incorporación en los planes y programas de estudio. De esta forma, se puede recurrir a las demostraciones visuales del teorema de Pitágoras como transposición didáctica para desarrollar la capacidad de comprender y justificar la relación que existe entre los lados de un triángulo rectángulo. Por otro lado, para desarrollar la capacidad de resolver problemas mediante dicho teorema, se puede recurrir a problemas de geometría o que intenten reflejar una situación real.

Durante los últimos años, las demostraciones visuales del teorema de Pitágoras se han convertido en una tendencia para introducir a los alumnos de secundaria en el estudio del tema, particularmente a modo de "rompecabezas" que los alumnos deben armar, como se puede apreciar el trabajo de Kolpas (2018) quien publicó un escrito donde ofrece material "manipulativo" para ilustrar el teorema y motivar a los alumnos. Otro trabajo similar es el de Carbajal y Muños (2019), quienes adecuaron una serie de demostraciones visuales con propósitos didácticos.

El uso de demostraciones visuales para representar el teorema de Pitágoras puede tomar diferentes formatos, como material concreto, ilustraciones o archivos de geometría dinámica, pero suele desembocar en un juego que consiste en armar un rompecabezas con piezas obtenidas de los cuadrados de los lados de un triángulo rectángulo. Este tipo de dinámicas Pueden fácilmente ajustarse de modo tal que sea considerada como una actividad de ABJ.

2.2 Aprendizaje Basado en Juegos (ABJ)

Dentro del campo de la enseñanza, se ha promovido al juego como una actividad innata que favorece el desarrollo cognitivo, la interacción, la motivación y el aprendizaje (Tamayo, 2012). Las actividades lúdicas, entendidas como actividades relacionadas con los juegos, son recursos utilizados frecuentemente en las escuelas con propósitos didácticos. Los juegos son una oportunidad de exponer un contenido a los estudiantes de una forma interesante, divertida y diferente, al mismo tiempo que el profesor dirige a los alumnos en torno a los aprendizajes que se desea que desarrollen.

En la actualidad existen diferentes tendencias que favorecen la introducción de juegos en ambientes de aprendizaje. Es necesario comprender que el concepto de *"juego"* puede tomar diferentes significados dependiendo del enfoque bajo el que se esté explorando, como ser una actividad libre y destinada a disfrutar (divertirse), o un contexto regulado por reglas convenidas por los interactuantes, donde se organizan los comportamientos individuales y grupales focalizándose en los medios, y no en los fines (Corbal, 2008).

La incorporación de juegos en diferentes contextos ha hecho necesario establecer definiciones claras respecto a los enfoques que adquieren. Kapp (2012) expone el concepto de "ludificación" ("*gamefication*", o "gamificación" a modo de anglicismo) como la introducción de elementos de disfrute y motivación relacionados con los juegos a aspectos de la vida que no son un juego, mientras que el diseño de "juegos serios" ("*serious games design"*) corresponde al diseño de un juego con la intención especifica de favorecer un aprendizaje. El ABJ, la "ludificación" y el diseño de juegos serios son conceptos diferentes, aunque tienen elementos en común.

Torres, Romero, y Salgado (2019) profundizan en las diferencias entre estos enfoques explicando que el ABJ consiste en la aplicación de elementos de juego en un contexto educativo donde el contenido o módulo de estudio es el elemento transversal que es complementado con actividades lúdicas. Por otro lado, definen a la ludificación como la implementación de elementos de los juegos para motivar una conducta, por ejemplo, dar puntos a los alumnos que terminan una secuencia educativa. Finalmente describe que los juegos serios también tienen la intención de enseñar algo, pero regularmente implican un ambiente inmersivo que simula una situación real, como es un simulador de manejo, un simulador de exámenes o un simulador de física.

Dentro del ABJ, la lúdica es un recurso, entre muchos otros, que forma parte de una estrategia encaminada a que los estudiantes logren un aprendizaje especifico. De esta forma, un profesor puede utilizar juegos para introducir un nuevo concepto, para dirigir la discusión o incluso para realizar una evaluación, al mismo tiempo que emplea otras actividades, como resúmenes o problemas, siempre que la estrategia en general este enfocada en un aprendizaje determinado.

En el campo de la didáctica de la matemática, Brousseau (2002) utiliza juegos para explicar su teoría de situaciones. Mediante diferentes juegos plantea las *situaciones de instrucción*, como aquella donde el profesor explica las reglas de un juego o plantea algún escenario ante los alumnos. Las *situaciones de acción* serían aquellas donde los alumnos siguen las instrucciones. Posteriormente el profesor realiza una pregunta que obligue a los alumnos a reflexionar en torno al contenido matemático que es objeto de estudio, a esto le nombra *situación de formulación*. Finalmente crea una *situación de validación*, donde los alumnos deben discutir y justificar sus procedimientos y conclusiones. Una situación que agrega posteriormente corresponde a la *institucionalización*, donde el profesor realiza una conclusión de la actividad y las reflexiones realizadas por los estudiantes.

Esto permite entender que el ABJ puede ser incorporado de manera eficiente dentro de esta y otras teorías didácticas, no como una condición necesaria, si no como un medio que facilita el estudio de un contenido y que, bien implementada, permite poner de manifiesto una propiedad matemática y dirigir una reflexión, junto a los estudiantes, de modo que sean ellos quienes construyen el concepto matemático que corresponde al aprendizaje esperado.

Zosh (2017) define que un *aprendizaje lúdico* se da cuando las actividades que conducen al aprendizaje corresponden a*:* un *juego libre* (dirigido por los niños), un *juego dirigido* (dirigido por el/los niño(s) y organizado por adultos), o *juegos* (dirigidos o diseñados por adultos, con reglas y objetivos establecidos). En contraposición, no se considera un aprendizaje como lúdico cuando las actividades corresponden a instrucciones directas, diseñadas y dirigidas por adultos.

Lograr que los estudiantes acepten como suya la responsabilidad del aprendizaje es conocido como *devolución* (Brousseau, 2002) y es un elemento clave para asegurar que dicho aprendizaje sea realmente alcanzado, por lo que la motivación y el protagonismo que deben tomar los estudiantes durante los juegos cobran relevancia, facilitando la devolución.

Con estas consideraciones, implementar las demostraciones visuales como un recurso lúdico implica utilizar una estrategia de ABJ donde se pretenda generar un aprendizaje mediante un juego basado en las demostraciones del teorema de Pitágoras, para posteriormente reflexionar en torno a la relación que se establece entre los cuadrados construidos sobre los lados de triángulos, formular premisas y estrategias para comprobarlas y, finalmente, validar las premisas verdaderas y descartar las falsas. De esta forma el contenido sufre diferentes transposiciones didácticas conforme la estrategia de ABJ avanza.

A menudo la trasposición didáctica implica utilizar material didáctico para representar un concepto matemático durante la implementación de los juegos. Podemos considerar a los materiales didácticos como el elemento con el cual los alumnos y el profesor interactúan, ya sea de forma física o digital, para estudiar un tema determinado. En ese sentido, un balón, un libro, un rompecabezas, una serie de diapositivas o un video son materiales didácticos. Cabe resaltar que el uso de material didáctico sólo tiene sentido en la medida en que este favorece el desarrollo de un aprendizaje determinado mediante una actividad específica.

El desarrollo, tanto de herramientas educativas como de material didáctico, concentra su esfuerzo en la forma en que se enseña un tema. Dentro de la didáctica de la matemática, es definida por Bruno D´Amore (2013) cómo "*didáctica A*", caracterizando el aspecto técnico y/o artístico de la enseñanza. Es importante resaltar la necesidad de investigar los aspectos técnicos de la enseñanza, con el propósito de identificar y reducir la mayor cantidad de problemas causados por la implementación de una herramienta educativa o material didáctico, no obstante, el ABJ implica una estrategia más integral que contemple la evaluación de los aprendizajes y las interacciones entre los participantes, no solamente el estudio y desarrollo de juegos o materiales.

Concentrarse en el análisis y desarrollo de materiales didácticos y la estrategia de enseñanza ofrece poca información sobre los aprendizajes de los alumnos, por lo que eventualmente debería estar seguida de más estudios que permitan evaluar de forma efectiva su impacto. Además, Brousseau (2002) acentúa que la presunción de un aprendizaje a partir de del objeto que sirve para su estudio corresponde a un error en la dinámica entre profesor y estudiante, que puede caer en lo que el nombra como: *contrato de ostentación*, (cuando el alumno muestra un resultado, pero el profesor no verifica que ha aprendido). *Deslizamiento didáctico* (cuando el profesor utiliza su propia explicación como prueba de aprendizaje) o el ya mencionado *efecto Dienes*.

El ABJ es una forma de enseñar bastante prometedora, pero se encontraría incompleta si la estrategia no contempla la evaluación de los aprendizajes. Para evitar caer en uno de los errores identificado por Brousseau es necesario conocer los beneficios y retos que el uso de material didáctico plantea para diseñar una evaluación adecuada que permita transitar de la didáctica en su estado de arte o técnica a la didáctica centrada en los aprendizajes.

2.3 Evaluación y expansión discursiva

La evaluación es un proceso de registro de información sobre el estado de los conocimientos de los estudiantes, cuyo propósito es orientar las decisiones en el proceso de enseñanza (SEP, 2011). Evaluar permite distinguir si la situación de aprendizaje está favoreciendo el entendimiento de los estudiantes respecto a un conocimiento especifico o no, y reorientar las actividades o adecuar la estrategia para alcanzar dichos aprendizajes.

La articulación entre la evaluación y la práctica docente con el propósito de obtener información que permita tomar decisiones que conduzcan al cumplimiento de las intenciones educativas se considera como *evaluación formativa* (SEP, 2017). La evaluación del aprendizaje permite identificar la pertinencia y relevancia de las intervenciones didácticas y atender a las dificultades y obstáculos que presenten los estudiantes por lo que es una parte fundamental de la enseñanza y el aprendizaje.

Para establecer el método más pertinente para evaluar los aprendizajes de los estudiantes es importante conocer algunos límites y dificultades que surgen como resultado de la estrategia de enseñanza. En el caso particular de la investigación, corresponde a al uso de demostraciones visuales como recurso lúdico para la enseñanza del teorema de Pitágoras.

Si bien los materiales didácticos pueden ayudar a simplificar complejas ideas matemáticas, Garciadiego (2002), señala que la simplificación de conceptos matemáticos con fines didácticos puede causar confusiones metodológicas que luego se convierten en barreras infranqueables, por lo que es necesario recurrir a conocimientos previos para generar una comprensión profunda de conceptos matemáticos, y explorar distintos recursos para favorecer que los estudiantes exploren a profundidad los conceptos que se han simplificado.

Podemos entonces suponer, la existencia de un momento en el que los estudiantes, con ayuda de algún recurso didáctico, den indicios de haber aprendido, pero en ese momento será importante continuar con la evaluación del aprendizaje, de modo que se puedan integrar más conocimientos previos, explorar más ejemplos y contraejemplos para formar un concepto matemático más completo.

Respecto a las actividades que recurren a materiales que presentan conceptos matemáticos de manera visual, Seguí (2005) observa que el razonamiento visual es un factor estrechamente relacionado con él razonamiento analítico que se utiliza para resolver problemas matemáticos (tanto en algebra y aritmética como en geometría), sin embargo, no todos los alumnos tienen un razonamiento visual bien desarrollado. También, manifiesta inconvenientes de los razonamientos visuales como:

- No son generales, ya que representan una situación concreta;
- Algunos alumnos y profesores pueden considerar que son limitados y prefieran razonamientos más rigurosos;
- Presentan la información de manera global y no secuencial, por lo que algunos alumnos puedan enfrentar problemas para alcanzar conclusiones relevantes.

Etas observaciones sugieren que realizar una representación del teorema de Pitágoras podría no ser suficiente, ya que supone que los alumnos entenderán el concepto y aceptaran como verdadera la premisa, por lo que, con el objetivo de fomentar en los alumnos un pensamiento crítico, es necesario plantear ante ellos alternativas para validarla o refutarla.

Balacheff (2000) plantea que aproximaciones de demostraciones para casos particulares o que recurren a la representación gráfica del objeto matemático, pueden contribuir a la validación que ofrecen los estudiantes de afirmaciones matemáticas sin embargo, señala que no es suficiente con la exploración de ejemplos concretos, como es el caso de las demostraciones visuales, y que es crucial que los alumnos adviertan la necesidad de la generalización en los argumentos que utilizan para realizar demostraciones.

Lograr que los estudiantes validen una idea implica que dialoguen, discutan y confronten sus ideas. Durante estas actividades, donde los estudiantes necesitan confrontar ideas, es necesario hacer entender a los estudiantes que no se trata de competir por tener la razón, sino para comprobar si una idea es verdadera o no; esto representa una habilidad que el profesor debe fomentar en los estudiantes ya que esta actitud no es innata (Brousseau, 2002).

Matemáticamente, las demostraciones cumplen la función de comprobar la veracidad de una propuesta, por lo que solicitar a los estudiantes que propongan una demostración al teorema de Pitágoras podría parecer una alternativa de evaluación que permite comprobar que los alumnos han superado los posibles problemas que plantea la simplificación del contenido matemático mediante una demostración visual. No obstante, es poco probable que los estudiantes propongan de forma natural una demostración formal, y es posible que algunos no sean capaces de hacerlo incluso si se les solicita.

D'Amore (2013) menciona el especial rol que desempeña la habilidad de demostrar en los alumnos, capacidad que debería aumentar conforme los alumnos desarrollan otras habilidades matemáticas, sin embargo, esto no sucede de forma súbita, los alumnos recurren a diferentes tipos de justificaciones por lo que alude a la importancia de fomentar en ellos la "*expansión discursiva*" que consiste en la capacidad de distinguir entre diferentes tipos de discursos y elegir aquel que sea más adecuado con la tarea que enfrentan. Entre los discursos que menciona se encuentran:

- *Argumentación*: cuando empleas muchas afirmaciones que indican un mismo resultado, por lo que tratas de convencer a otros de la veracidad de dicho resultado.
- *Explicación*: cuando empleas diferentes recursos que ilustran un hecho que sabes verdadero de forma que otros puedan entenderlo.
- *Demostración*: cuando empleas un razonamiento lógico para determinar si una afirmación es verdadera o falsa.

Entender que los estudiantes pasan por diferentes tipos de discursos mientras intentan justificar sus razonamientos permite evaluar sus aprendizajes desde diferentes perspectivas. No se trata de imponer un tipo de discurso sobre otro, si no de guiar a los estudiantes mientras desarrollan sus habilidades discursivas y entender que para algunos una demostración visual podría ser suficiente para convencerse de la veracidad del teorema de Pitágoras, mientras que otros podrían requerir de otro tipo de demostraciones.

Durante la estrategia de ABJ se podrían incluir actividades que promuevan ciertos tipos de discursos de modo que sea posible evaluar los aprendizajes de los estudiantes mientras se adaptan a la expansión discursiva, pasando de defender sus resultados mediante explicaciones o argumentaciones a conocer, comprender y utilizar demostraciones matemáticas.

2.4 Antecedentes

Los estudios que se han realizado relacionado al uso de las demostraciones visuales del teorema de Pitágoras como un recurso para la enseñanza son extensos y suelen estar relacionados con las recciones de los alumnos, como es la participación, su aprendizaje o el interés que muestran en el contenido. Algunas investigaciones también están contemplan el diseño y promoción de materiales que se desarrollan a partir de una investigación teórica del teorema de Pitágoras.

Como ejemplo de investigaciones que se centran en el desarrollo de materiales y recursos es posible citar la realizada por Haldane (2011) quien efectuó una recopilación histórica del teorema de Pitágoras y, cómo producto de esta investigación documental, desarrolló una serie de "*gift*" animados, material manipulable para recortar y archivos interactivos que servirían como recurso didácticos para profesores.

Echavarría y Bermúdez (2011), presentan un ejemplo de difusión de materiales ya que diseñaron un taller para profesores donde pretendían compartir rompecabezas basados en demostraciones del teorema de Pitágoras. El propósito era favorecer el aprendizaje de las matemáticas mediante la interacción con un objeto tangible donde los estudiantes pudieran deducir, descubrir, crear conocimiento y desarrollar habilidades mediante una actividad social.

Rosas y colaboradores (2018) también diseñaron un taller en el cual observaron la respuesta de un grupo de profesores ante material manipulativo y digital (mediante el uso de "Geogebra") para elaborar demostraciones visuales del teorema de Pitágoras. Durante el desarrollo de las actividades, se observó cierta renuencia por parte de los profesores ya que las actividades diferían mucho de su modo de trabajo regular, pero al finalizar los profesores consideraron que los recursos digitales y los manipulables les podrían ser de gran utilidad.

En el campo de la aplicación en grupos, o el estudio de situaciones reales, podemos encontrar una investigación realizada por Vargas, Gamboa, y Vargas (2013), quienes implementaron demostraciones visuales del teorema de Pitágoras con ayuda del programa "Geogebra" utilizando el modelo de Van Hiele para desarrollar la secuencia didáctica. Durante la investigación observaron un incremento en el interés de los alumnos respecto al contenido y la mayor motivación para seguir estudiando conforme avanzaba la secuencia didáctica.

Conde-Carmona y Fontalvo-Meléndez, (2019) realizaron una investigación similar a la de Vargas y colaboradores, utilizando el modelo de Van Hiele para desarrollar su secuencia didáctica y el programa "Geogebra" para ilustrar demostraciones del teorema de Pitágoras. Obtuvieron resultados similares en aspectos como interés y motivación y, además, notaron mejoras en el aprendizaje de los alumnos respecto a un grupo de control.

Respecto a los trabajos que estudian las formas en las que se enseña el teorema de Pitágoras podemos nombrar a Grisales et al. (2009), quienes investigan algunos factores que favorecen los aprendizajes significativos en la enseñanza del teorema de Pitágoras y proponen una secuencia de enseñanza que se centraba en su aspecto histórico y las situaciones en las que se aplica.

Hernández (2019) presenta otro ejemplo de investigación enfocada en la enseñanza y aprendizaje del teorema que parte del contenido matemático relacionado y que está destinada a desarrollar habilidades en el uso de la geometría. En su trabajo, Hernández diseña talleres donde los alumnos podrán explorar principios de la geometría en diferentes situaciones entre las cuales paletea disecciones del teorema del teorema de Pitágoras.

Otra investigación, es la de López et al. (2012) quienes desarrollan un proyecto de intervención que contempla favorecer las habilidades de argumentación en estudiantes de secundaria mediante estrategias destinadas a que aprendan el teorema de Pitágoras. Algunos elementos para destacar de este trabajo es el hecho de que contemplan las opiniones de directivos, profesores y estudiantes durante su análisis, además de ajustar una secuencia didáctica de modo que las situaciones de aprendizaje realmente contribuyan con el aprendizaje de un grupo bien definido de estudiantes.

Todas estas investigaciones comparten el uso de rompecabezas basados en demostraciones del teorema de Pitágoras como una herramienta para su enseñanza, mostrando resultados favorables, cada una bajo un enfoque especifico. Lo que hace diferente al trabajo que se presenta en esta tesis es el enfoque lúdico de las actividades y los materiales diseñados para su implementación, así como el análisis de los aprendizajes basado en los diferentes tipos de discursos a los que pueden recurrir los estudiantes.

.

Capítulo 3

MÉTODO

El estudio es, según la clasificación propuesta por Hernández-Sampieri et al. (2010), mixto concurrente y predominantemente cualitativo, (CUAL + cuan). Es principalmente cualitativo, ya que esto permite explorar y describir a mayor profundidad el efecto que tienen la implementación de demostraciones visuales como recurso lúdico en el aprendizaje del teorema de Pitágoras mediante las producciones de argumentos de los alumnos, lo que representa el objetivo del este trabajo, sin embargo, se emplean técnicas cuantitativas para recolectar información proveniente de los alumnos que participen en el estudio.

La intervención se realizará para atender el aprendizaje esperado "análisis de las relaciones entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo" establecido por la secretaria de Educación Pública (SEP) en los planes y programas de estudio del año 2011 (SEP, 2011).

Para el estudio propuesto es necesario diseñar y desarrollar las actividades y los materiales necesarios para implementar demostraciones visuales como un recurso lúdico. Para esto es necesario considerar un marco para el diseño, desarrollo e implementación de secuencias de enseñanza. En principio se consideran a la Ingeniería Didáctica (ID) (Artigue, 2014) o la Investigación Basada en el Diseño (IBD) (Swan, 2014). Ambos casos se estudia el uso de herramientas o secuencias de enseñanza para aplicarlas y, de ser posible, reproducirlas en diferentes contextos, pero son diferentes metodológicamente y fueron creadas en circunstancias distintas.

Ambas comparten la intención de diseñar e implementar estrategias y materiales para mejorar la enseñanza de las matemáticas, y pueden implantarse mediante marcos teóricos más detallados que permiten establecer los pasos de intervención de los investigadores de acuerdo con los objetivos específicos de la investigación (Godino, et al, 2013)

De acuerdo con los métodos empleados necesarios para el logro de los objetivos de la investigación el marco más apropiado es el estudio de lección ("*Lesson study*") el cual es un método de diseño de tareas matemáticas basado en la participación de diferentes profesores. Este marco contempla las siguientes fases: (1) planeación colaborativa de la lección a investigar; (2) observación de la lección a investigar en acción; (3) discusión de la lección a investigar; (4) revisión de la lección (opcional), (5) enseñanza de la nueva versión de la lección; (6) compartir las reflexiones de la nueva versión de la lección (Kieran et al., 2015).

Empleando el marco estudio de lección es posible incorporar la experiencia y conocimientos de varios profesores, así como realizar modificaciones a la estrategia de intervención de acuerdo con las observaciones que se realizan en una primera intervención. Se proponen las siguientes fases:

(1) Planeación colaborativa de la lección a investigar: Comienza con la revisión de libros de texto con el propósito de identificar cuáles son las estrategias más comúnmente planteadas en ellos para la enseñanza del teorema de Pitágoras. Además, se seleccionarán a dos grupos de profesores, con el primer grupo (Grupo A) se desarrollará la actividad lúdica y se recolectará la opinión de sus alumnos mediante una prueba Likert; con el segundo grupo (Grupo B) se explorarán las estrategias que utilizan para enseñar el teorema de Pitágoras y los criterios que utilizan para diseñarlas.

(2) Observación de la lección a investigar en acción: Se implementa una estrategia que contemple los resultados de la planeación colaborativa de la lección en un grupo focal. Con el propósito de evaluar los aprendizajes se recurre a una rubrica durante la implementación, además de grabar la intervención para su análisis posterior.

(3) Discusión de la lección a investigar: recurriendo al video y con ayuda del primer grupo de profesores que participan en el estudio, se analizarán los resultados tomando como base el discurso y los argumentos expuestos por los alumnos. El análisis tiene la intención de identificar la relación entre la lección y los aprendizajes y dificultades de los estudiantes.

(4) Revisión de la lección (opcional): Con base en análisis de la primera intervención se realizaron algunos ajustes a la secuencia, y se preparó una segunda intervención.

(5) Enseñanza de la nueva versión de la lección: se implementará la secuencia con los cambios en un segundo grupo focal. De la misma forma, se utiliza una rubrica durante la intervención y se graba para su posterior análisis.

(6) Compartir las reflexiones de la nueva versión de la lección: se analizan, exponen y discuten los resultados observados en la implementación de la actividad lúdica con ayuda de los profesores que participan en el estudio.

El estudio de lección puede ser utilizado para mejorar tanto el desempeño del profesor que realiza la intervención como de lección que ha sido diseñada. En este caso, de acuerdo con los propósitos y las preguntas de la investigación, el análisis gira entorno a lección diseñada. A continuación, se exponen las consideraciones necesarias para la intervención para responder las preguntas de investigación.

1. ¿Cuáles son las estrategias para enseñar el teorema de Pitágoras propuestas en libros de texto y por profesores de nivel secundaria?

- Como parte del diseño de la lección a investigar, se recurre al análisis de libros de texto y a las entrevistas con profesores de secundaria para responder a esta pregunta.

2. ¿Con qué características debe contar un material didáctico para favorecer el estudio del teorema de Pitágoras a partir de sus demostraciones visuales?

- Como parte del diseño de la lección a investigar, se recurre a las entrevistas con profesores de secundaria y a una encuesta a sus estudiantes para responder esta pregunta.

3. ¿Qué beneficios ofrece utilizar demostraciones visuales como un recurso lúdico para la enseñanza del teorema de Pitágoras en los aprendizajes de los estudiantes?

- Para responder esta pregunta se recurre a la observación de la lección, así como de la nueva lección una vez realizados los cambios que se consideren pertinentes. Esta parte del análisis se centrará en los beneficios que se obtienen respecto a la forma en que los estudiantes entienden y justifican el teorema de Pitágoras.

4. ¿Qué posibles dificultades en el aprendizaje de los alumnos debe considerar un profesor de secundaria al implementar demostraciones visuales del teorema de Pitágoras como recurso lúdico?

- Para responder esta pregunta se recurre a la observación de la lección, así como de la nueva lección una vez realizados los cambios que se consideren pertinentes. Esta parte del análisis se centrará en las dificultades observadas en los estudiantes para realizar una actividad o justificar teorema de Pitágoras.

3.1 Análisis de libros de texto

Este elemento forma parte del diseño colaborativo de la lección y tiene el propósito de identificar las estrategias que se proponen ene ellos para la enseñanza del teorema de Pitágoras. Con esta información se pretende diseñar una secuencia didáctica que permita incorporar una actividad lúdica basada en las demostraciones visuales para la enseñanza del teorema de Pitágoras.

Los libros de texto son objeto de interés para el estudio de la didáctica de la matemática, regularmente desde un enfoque descriptivo, causal o correlacional que, idealmente, conducen a estudios experimentales más complejos (Fan, 2013). Para este estudio se utiliza el análisis de contenido (Fraenkel et. al. 2012) contemplando los siguientes aspectos:

1. Determinar los objetivos. identificar las actividades y estrategias que se proponen ene libros de texto para la enseñanza del teorema de Pitágoras
2. Definir los términos: una vez realizado en análisis de actividades se clasifican de acuerdo con su propósito y la información a la que recurren.
3. Unidad de análisis: como unidad de análisis se establecieron las actividades propuestas.
4. Localizar información: libros de texto aprobados por el Consejo Nacional de Libros de Texto Gratuitos (CONALITEG) y publicados en su página https://www.conaliteg.sep.gob.mx/ bajo los criterios de los planes y programas 2011.
5. Relaciones entre la información: se establecen las relaciones entre las actividades y se desarrolla una estrategia a partir de ellas.
6. Plan de muestreo. Se eligieron de forma aleatoria 20 libros de texto.
7. Fidelidad y valides.
8. Análisis de la información.

Con ayuda de este análisis se propone una secuencia didáctica para la enseñanza del teorema de Pitágoras con ayuda de un grupo de profesores que participaron.

3.2 Entrevistas con primer grupo de profesores (Grupo A)

Este elemento forma parte del diseño colaborativo de la lección y tiene el propósito de diseñar la actividad lúdica a partir de las demostraciones visuales del teorema de Pitágoras. Se procedió con la búsqueda de voluntarios quienes debían cumplir con las siguientes características:

- Tener experiencia como profesor de nivel secundaria

- Haber impartido las clases de “Análisis de las relaciones entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo” y “Explicitación y uso del teorema de Pitágoras” en más de una ocasión.
- Estar en servicio y atendiendo grupos de tercer año de secundaria.
- Tener experiencia implementando juegos y rompecabezas como una herramienta para la enseñanza de la matemática.
- Utilizar demostraciones visuales del teorema de Pitágoras como apoyo para la enseñanza con sus alumnos.

Al realizar la búsqueda de sujetos se encontraron tres voluntarios para participar en la investigación que cumplían con las características descritas.

Para explorar con la mayor profundidad posible las valoraciones de los profesores respecto a la actividad y a los materiales didácticos se eligió una entrevista semi estructurada como instrumento de investigación (Fraenkel et. al. 2012). En dicha entrevista se debía recolectar información como la preparación de los sujetos, contexto en el que trabaja, estrategias que utiliza para enseñar el teorema de Pitágoras, conocimiento del tema, disposición para participar, su impresión general de la propuesta, y las sugerencias que proponen.

La tarea de los profesores consistió en diseñar y valorar una actividad lúdica para la enseñanza del teorema de Pitágoras con el fin de desarrollar una estrategia y/o herramienta a partir de demostraciones visuales, por lo tanto, la entrevista se desarrolló en cuatro momentos:

1. Acercamiento: Consiste en determinar si los sujetos cumplen con las características necesarias para cumplir la tarea y su disposición a participar en la misma.

2. Exploración de actividades: Es un intercambio de ideas y estrategias por parte del entrevistador y el sujeto para la enseñanza del teorema de Pitágoras y el diseño de una actividad prototipo.

3. Implementación de actividad: Una vez recolectada la información se desarrollaron los recursos necesarios para la implementación de la actividad prototipo, y la aplicaron en sus grupos y solicitarían a sus estudiantes que contesten una encuesta tipo Likert (Anexo 1).

4. Retroalimentación del usuario: Los sujetos compartieron su experiencia, describieron posibles mejoras y dieron una impresión general de la reacción que tuvieron sus estudiantes.

El análisis de la información se realizó de acuerdo con el desarrollo de cada etapa de la entrevista, y se clasificaron sus sugerencias relacionadas con el material en cuatro categorías:

• Aquellas relacionadas con las acciones e interacciones llevadas a cabo por profesores y alumnos, a esta tipología le podríamos llamar “dinámica”.

• Aquellas relacionas con el contenido matemático que es objeto de estudio (el teorema de Pitágoras), a esta tipología se le podría llamar “teoría”.

• Aquellas relacionadas con el material didáctico que se utilizó durante las actividades, a esta tipología la podríamos llamar “técnica”.

También se considera la opinión de sus estudiantes mediante una encuesta tipo Likert.

3.3 Entrevista con el segundo grupo de profesores (Grupo B)

Este elemento forma parte del diseño colaborativo de la lección y tiene el propósito de identificar los criterios que los profesores utilizan para diseñar sus estrategias y las actividades que proponen. Por lo que en esta ocasión fue importante que los sujetos tuvieran perfiles y prácticas diferentes con el propósito de obtener un panorama amplio de experiencias, pero todos deben cumplir con las siguientes características:

- Tener experiencia como profesor de nivel secundaria
- Haber impartido las clases de “teorema de Pitágoras”
- Ser o haber sido docente en grupos de tercer año de secundaria.

De la búsqueda y selección de sujetos se obtuvieron tres voluntarios, y con el propósito de mantener coherencia entre la entrevista al primer grupo de profesores se procuró mantener el mismo esquema de entrevista semiestructurada y el análisis se realizó a partir de las categorías de sugerencias obtenido anteriormente, pero con algunas modificaciones. Por ejemplo, la secuencia de la entrevista tuvo las siguientes etapas:

1. Acercamiento: igualmente consiste en determinar si los sujetos cumplen con las características necesarias para cumplir la tarea y su disposición a participar en la misma.

2. Exploración de actividades: En esta ocasión fue un intercambio de ideas y estrategias, principalmente por parte del sujeto, para la enseñanza del teorema de Pitágoras.

3. Se omite cualquier tipo de implementación de actividades, ya que la estrategia desarrollada a partir de estas entrevistas estará subordinada a la desarrollada con el primer grupo de profesores.

4. Retroalimentación: Se compartió con los sujetos el prototipo diseñado con el primer grupo de profesores para escuchar sus opiniones y sugerencias.

En conjunto con las entrevistas del grupo A, estas entrevistas sirvieron para determinar cuatro variables que condicionan la selección de actividades, descritas en el apartado 4.3.

3.4 Primera intervención. Observación de la lección a investigar en acción

Para realizar la observación de la lección a investigar en acción, se procedió a la búsqueda de voluntarios que se encontrarán cursando el nivel de secundaria y que aún no conozcan el teorema de Pitágoras. De esta búsqueda surgieron cuatro voluntarios, dos mujeres y dos hombres, de entre 14 y 15 años, que cursan el tercer año de secundaria en la escuela “Ambrosio Herrera” ubicada en el municipio de Tecali de Herrera.

Los estudiantes viven en la cabecera municipal o en comunidades cercanas como Ahuatepec o la Trinidad Tianguismanalco. El ambiente es semiurbano y la principal actividad económica es el comercio, destacando la producción, distribución y venta de artesanías y muebles fabricados en mármol y ónix. El experimento se realizó en las instalaciones de la escuela secundaria a la que están adscritos, de las 9:30 a las 12:30 horas, en el aula audiovisual donde se les proporciono los materiales necesarios, con un receso de entre las 11:20 a 11:50 horas.

Para realizar el experimento se solicitó autorización de los padres de familia (Anexo 2) para su participación, ya que la lección sería grabada. Se especificó que dicha grabación sería utilizada únicamente con propósitos de investigación, se emplearon medidas de prevención contra el contagio del COVID-19, como monitorear la pureza del aíre, mantener el ambiente ventilado, y el uso de cubrebocas (lo que permitió que cubrieran parcialmente sus rostros).

Con el propósito de asegurar que los estudiantes se encuentren en condiciones de realizar la secuencia se realizó una intervención preliminar con ellos que consistía en clasificar triángulos de acuerdo con sus lados o ángulos, calcular el área de diferentes cuadrados, calcular la medida del lado de diferentes cuadrados a partir de su área mediante raíz cuadrada , comparar figuras con áreas iguales y, expresar el área de diferentes polígonos formados por triángulos y rectángulos mediante expresiones algebraicas (Anexo 3).

Durante la implementación de la lección se recurre a una rubrica de tipo holística para cada una de las actividades (Anexo 4) diseñada por el primer grupo de profesores, quienes participaron en el diseño de la actividad lúdica. Se graba la intervención para realizar un posterior análisis del discurso que realizan los estudiantes durante la secuencia.

Este primer análisis no solo permite determinar si la secuencia efectivamente favorece el aprendizaje del teorema de Pitágoras (al evaluar la forma en que los estudiantes expresan, dialogan y defiendan sus razonamientos), también permite identificar elementos de la secuencia que pueden mejorarse. Una vez concluida la intervención se procedió a un análisis posterior con ayuda del video.

3.5 Segunda intervención. Enseñanza de la nueva versión de la lección

Enseñanza de la nueva versión de la lección Para realizar la observación de la lección una vez realizados los cambios que surgen a raíz del análisis de la primera intervención, se procedió a la búsqueda de voluntarios que se encontrarán cursando el nivel de secundaria en la misma escuela del primer grupo de voluntarios y que aún no conozcan el teorema de Pitágoras. De esta búsqueda surgieron cuatro voluntarios, dos mujeres y dos hombres, de entre 13 y 14 años, que cursan el segundo año de secundaria en la escuela.

Los estudiantes viven en la cabecera municipal o en comunidades cercanas como Ahuatepec o la Trinidad Tianguismanalco. El ambiente es semiurbano y la principal actividad económica es el comercio, destacando la producción, distribución y venta de artesanías y muebles fabricados en mármol y ónix. El experimento se realizó en las instalaciones de la escuela secundaria a la que están adscritos, de las 9:30 a las 12:30 horas, en el aula audiovisual donde se les proporciono los materiales necesarios, con un receso de entre las 11:20 a 11:50 horas.

Para realizar el experimento se solicitó autorización de los padres de familia (Anexo 2) para su participación, ya que la lección sería grabada. Se especificó que dicha grabación sería utilizada únicamente con propósitos de investigación, se emplearon medidas de prevención contra el contagio del COVID-19, como monitorear la pureza del aíre, mantener el ambiente ventilado, y el uso de cubrebocas (lo que permitió que cubrieran parcialmente sus rostros).

Con el propósito de asegurar que los estudiantes se encuentren en condiciones de realizar la secuencia se realizó una intervención preliminar con ellos que consistía en clasificar triángulos de acuerdo con sus lados o ángulos, calcular el área de diferentes cuadrados, calcular la medida del lado de diferentes cuadrados a partir de su área mediante raíz cuadrada , comparar figuras con áreas iguales y, expresar el área de diferentes polígonos formados por triángulos y rectángulos mediante expresiones algebraicas (Anexo 3).

Durante la implementación de la lección se recurre a una rubrica de tipo holística para cada una de las actividades (Anexo 4) diseñada por el primer grupo de profesores, quienes participaron en el diseño de la actividad lúdica. Se graba la intervención para realizar un posterior análisis del discurso que realizan los estudiantes durante la secuencia.

Capítulo 4

RESULTADOS

De manera congruente con la estructura de diseño de tarea seleccionada, los resultados corresponden con cada fase del diseño de la lección. Para este momento se han concluido, por lo que es posible compartir los siguientes resultados:

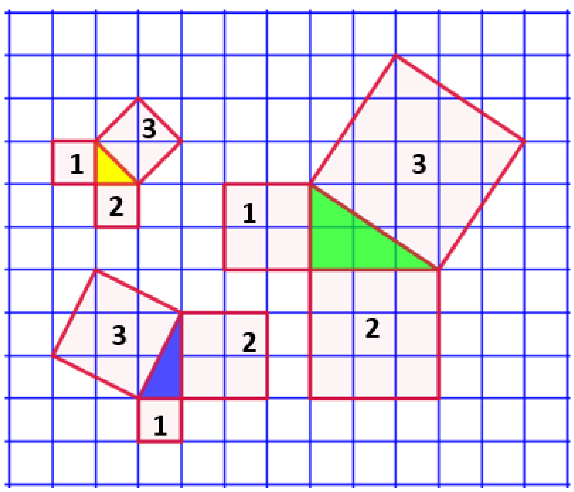
4.3 Revisión de libros de texto

Para el análisis se eligieron aleatoriamente 21 libros de texto autorizados por CONALITEG bajo los planes y programas 2011, vigentes durante la investigación, que dividen el estudio del teorema de Pitágoras en dos partes, la primera corresponde al "*análisis de la relación entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo*" y la segunda a "*hacer explicito el teorema de Pitágoras y usarlo para resolver problemas*". Una vez realizada una primera revisión de los libros seleccionados se procedió a clasificar las actividades propuestas en ellos de acuerdo con la forma en que se presentaba la información relacionada con el teorema (Anexo 5) para analizarlas. A continuación, se describen las actividades más comunes:

1. Información Histórica. Son actividades que presentan a los estudiantes información relacionada con la historia del teorema de Pitágoras, principalmente se encuentran dos tipos de información: **a)** bibliografías de Pitágoras de Samos, así como textos relacionados con su influencia, tienen la intención de que los alumnos conozcan el origen del nombre del teorema y; **b)** Vínculos entre las antiguas civilizaciones y la construcción de triángulos rectángulos, como pueden ser las tablillas babilonias que contenían ternas pitagóricas o las escuadras egipcias, tienen la intención de hacer notar la utilidad que ha tenido el teorema en diferentes épocas.

2.- Comparación de áreas de cuadrados. Estas actividades consisten en calcular el área de figuras (normalmente cuadrados) construidos sobre los lados de un triángulo y registrar los datos ya sea en una tabla o en un cuestionario para después analizar las relaciones que se establecen entre las áreas, y se pueden distinguir dos tipos diferentes: **a)** Con triángulos rectángulos, en este caso la suma de las áreas de los cuadrados que forman el ángulo recto debe ser igual al área del cuadrado que se opone al ángulo recto, y pretende que los alumnos generalicen esta relación de igualdad para todos los triángulos rectángulos y; **b)** Con triángulos no rectángulos, en este caso las suma de las áreas de los cuadrados que formen un ángulo agudo será mayor al área del cuadrado que se opone a ese ángulo, mientras que la suma de las áreas de los cuadrados que forman un ángulo obtuso será menor al cuadrado que se le opone, estas actividades pretenden que los estudiantes reconozcan que la relación de igualdad entre la suma de las áreas de los cuadrados que forman un ángulo y el área de aquel que se construye sobre el lado que se opone es exclusiva de los triángulos rectángulos. Mientras que algunos libros mezclan ambas actividades, en otros se plantean una después de la otra. La Figura 1 pretende representar este tipo de actividades:

Figura 1. Actividad de comparación de áreas de cuadrados construidos sobre los lados de triángulos rectángulos. a) comparación de áreas de cuadrados sobre triángulos rectángulos. b) comparación de áreas de cuadrados sobre triángulos no rectángulos. Adaptación de libros de texto.



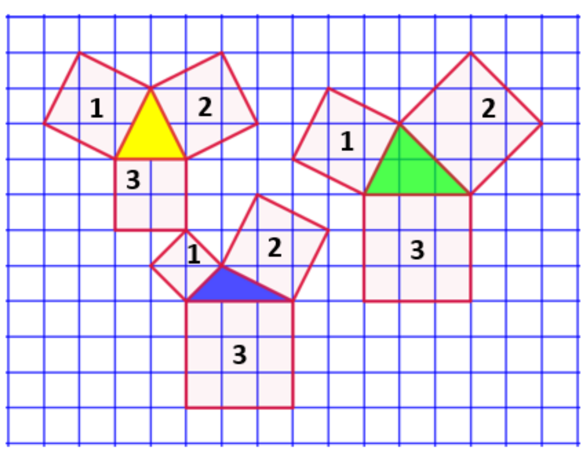
Calcula las áreas de los cuadrados rojos y completa la tabla.

Triángulo	Área 1	Área 2	Área 3	Área 1 + 2
Amarillo				
Verde				
Azul				

¿Qué relación existe entre las áreas de los cuadrados 3 y las sumas de las áreas de los cuadrados 1 y 2?

____

a)



Calcula las áreas de los cuadrados rojos y completa la tabla.

Triángulo	Área 1	Área 2	Área 3	Área 1 + 2
Amarillo				
Verde				
Azul				

¿Se mantiene la misma relación que en la actividad anterior?

____

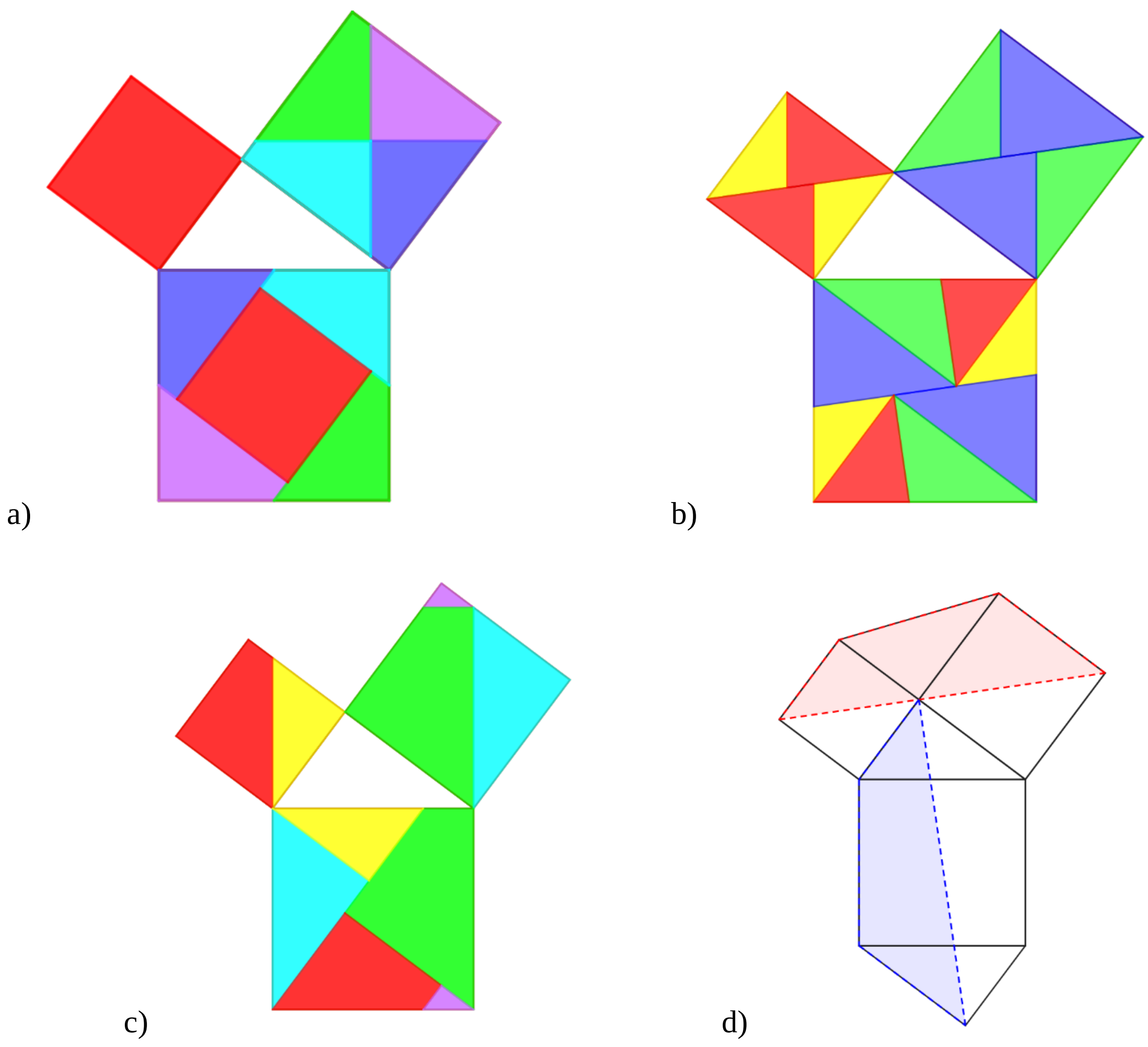
¿Qué característica comparten los triángulos de la actividad anterior que estos triángulos no comparten?

____

b)

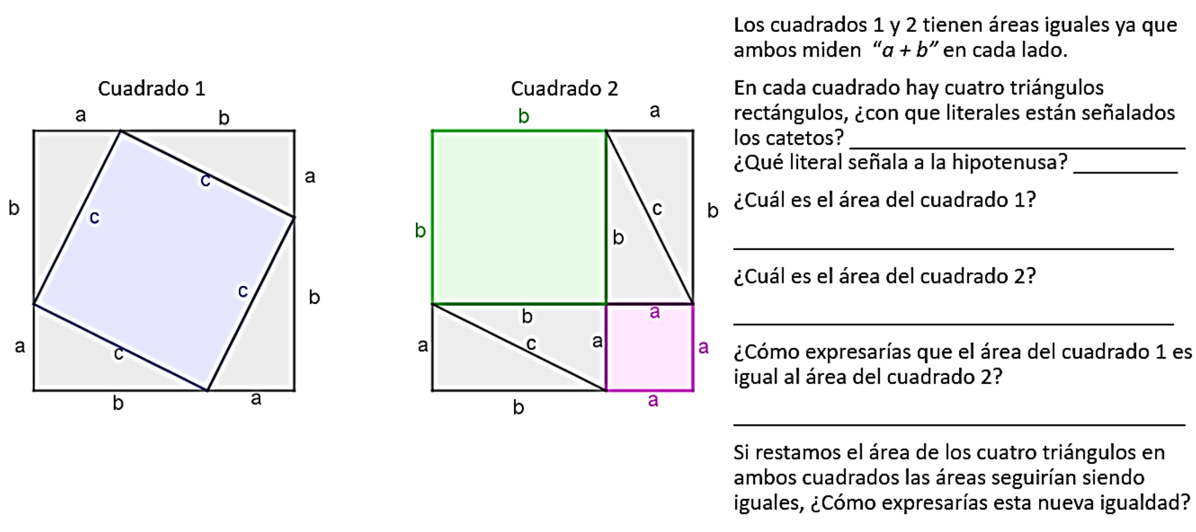
3.- Demostraciones visuales del teorema de Pitágoras. Son actividades que recurren a figuras basadas en demostraciones geométricas del teorema de Pitágoras para que los alumnos comprueben la relación de igualdad entre la suma de las áreas de los cuadrados levantados sobre los catetos y el área del cuadrado levantado sobre la hipotenusa, pero que no constituyen una demostración formal. Generalmente se presenta en forma de rompecabezas con material recortable que los alumnos pueden calcar sobre una hoja o con las instrucciones necesarias para que realicen los trazos de manera independiente a la medida del triángulo. Las demostraciones más implementadas son la de Perigal, Bôttcher, Leonardo da Vinci, Anaricio, y Chou Pei Chin (Figura 2).

Figura 2. Demostraciones visuales del teorema de Pitágoras. a) Disección de Perigal. b) Disección de Bôttcher. c) Disección de Anaricio. d) Disección de Da Vinci. Adaptación de libros de texto.



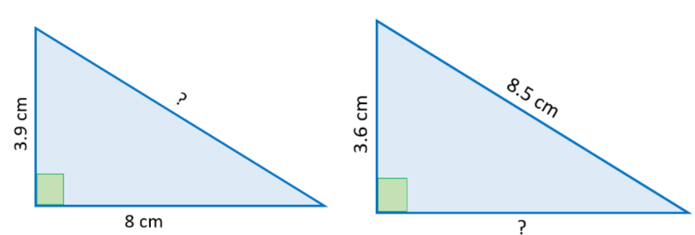
4.- Actividades de formalización. Son las actividades destinadas a transitar de la comparación entre las áreas de los cuadrados levantados sobre los lados de un triángulo rectángulo a la forma algebraica del problema o, en su defecto, a un procedimiento para resolver problemas. En estas actividades suele nombrarse a los lados de un triángulo rectángulo como catetos e hipotenusa y los recursos más implementados son la demostración de *Chou Pei Chin* o una ilustración de un triángulo rectángulo donde se guía al estudiante, mediante preguntas, a formular una generalización del teorema. La Figura 3 pretende ilustrar este tipo de actividades.

Figura 3. Actividad de formalización del teorema de Pitágoras. Adaptado de libros de texto.



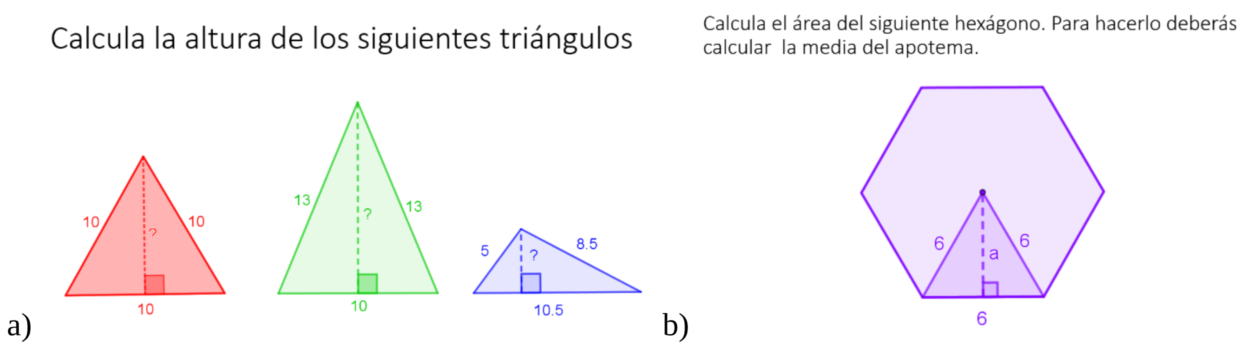
5.- Problemas geométricos. Son actividades que plantean problemas geométricos, regularmente consisten en calcular una longitud faltante en una figura geométrica y recurren a imágenes geométricas que no corresponden a un contexto particular. Entre estas actividades las más comunes son: **a)** <u>Calcular el valor faltante de un lado en un triángulo rectángulo</u>, es el tipo de problema más común y consiste en ofrecer ilustraciones de triángulos rectángulos donde el alumno debe calcular el valor de un cateto o de la hipotenusa a partir de las medidas de los otros dos lados (Figura 4).

Figura 4. Calcular el lado faltante en un triángulo rectángulo. Adaptado de libros de texto.



b) <u>Calcular la altura de Triángulos.</u> En esta actividad se ofrece una serie de triángulos con la medida de sus lados y solicitan calcular su altura o, en algunos casos, su área infiriendo que para hacerlo deberán calcular la altura. Regularmente los estudiantes deberán visualizar el triángulo rectángulo formado, por un lado, la altura y el segmento del lado con el que la altura interseca (Figura 5). En algunos casos se puede calcular la apotema de un polígono regular entendiéndola como la altura de un triángulo isósceles.

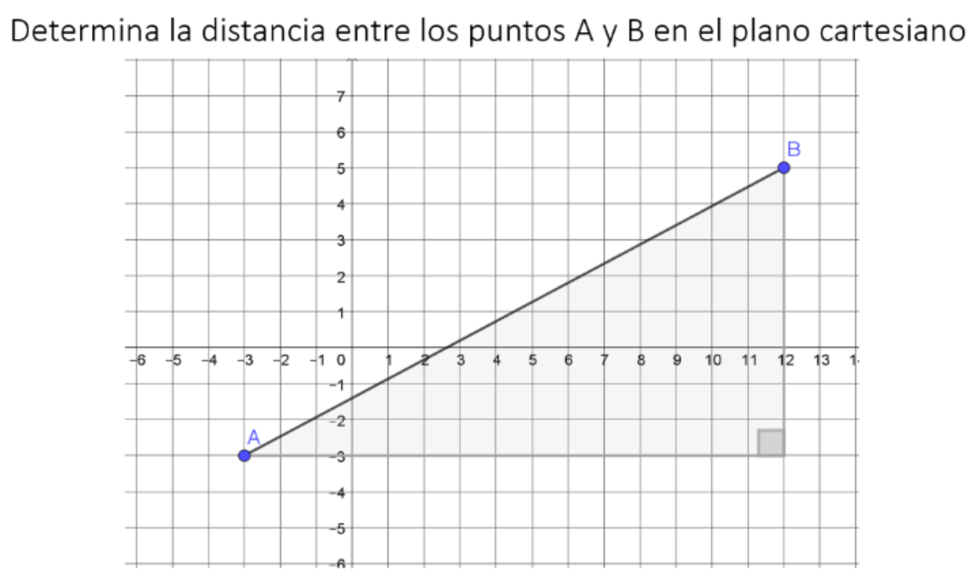
Figura 5. Actividad para calcular la altura de un triángulo. Adaptado de libros de texto.



a) Problema donde los alumnos deberán calcular la altura de diferentes triángulos. b) Problema donde los alumnos deberán calcular una apotema. Elaboración propia.

c) <u>Calcular la distancia entre dos puntos en el plano cartesiano</u>. Se proporciona un plano cartesiano con dos puntos o sus coordenadas y se solicita calcular la distancia entre ellos (Figura 6).

Figura 6. Determinar la distancia entre dos puntos. Adaptado de libros de texto.

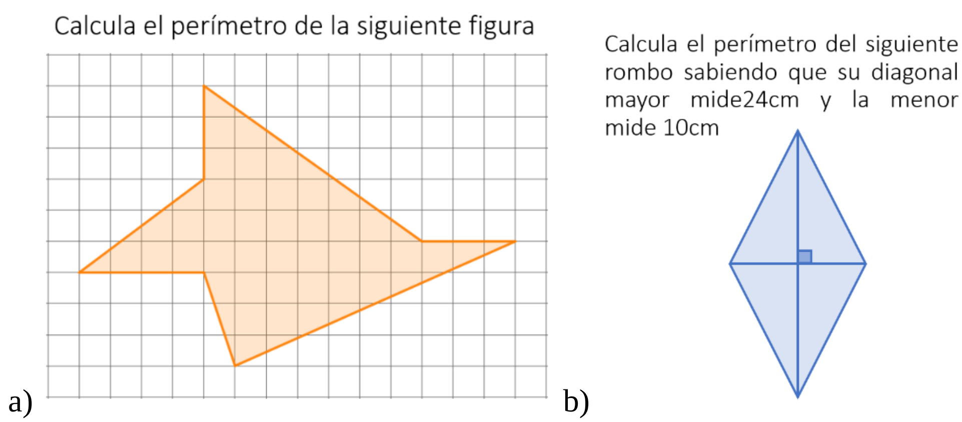


d) Calcular la diagonal de un cuadrado o un rectángulo. Se proporcionan las medidas de los lados de un cuadrado o un rectángulo y se solicita calcular la medida de la diagonal.

e) Determinar si un ángulo es recto. Se proporciona a los estudiantes las medidas de un triángulo y se solicita determinar si el triángulo trazado con esas medias tendría un ángulo recto. Para esto los alumnos deberán comprobar si la suma de los cuadrados de dos lados es igual al tercer cuadrado.

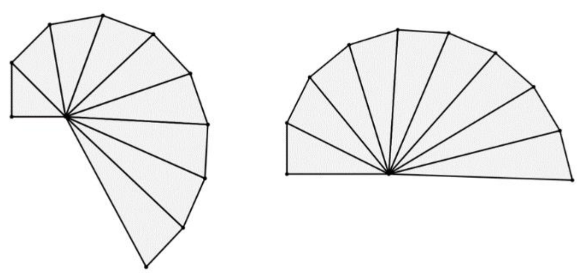
f) Calcular el perímetro de una figura. En estas actividades se les proporciona a los estudiantes figuras con lados rectos, pero sin sus medidas y los estudiantes deben calcular sus medidas y perímetros con base en información presentada en la figura, como puede ser diagonales de un cuadrilátero o una cuadricula que coincide con los vértices de la figura (Figura 7).

Figura 7. Calcular el perímetro de una figura. Adaptado de libros de texto.



g) Espiral pitagórica. Consiste en presentar una figura formada por triángulos rectángulos (o las instrucciones para dibujarla) donde todos los triángulos tienen la misma medida en un cateto y la hipotenusa de un triángulo funciona como el otro cateto en el siguiente triángulo, formando una espiral (Figura 8). Los alumnos deberán calcular la media de la hipotenusa del último triángulo o, de ser posible, la expresión algebraica que permite calcular la hipotenusa para cualquier caso.

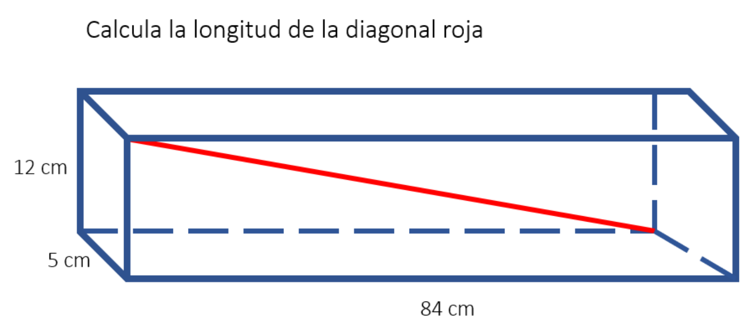
Figura 8. Espiral pitagórica. Adaptado de libros de texto.



h) Trazar cuadriláteros a partir de sus áreas. Se solicita a los alumnos que tracen un cuadrado con un área determinada, donde la base del cuadrado corresponde a la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuya suma de los cuadrados de los catetos es igual al área solicitada.

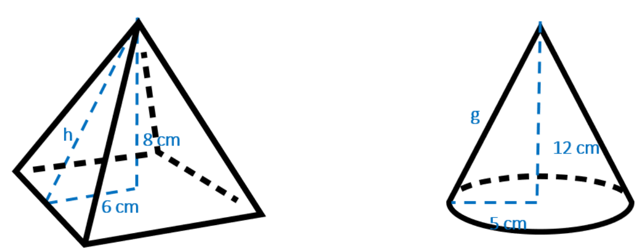
i) Calcular la diagonal de un prisma. Se proporciona la imagen de un prisma ortogonal con medias y se solicita calcular la longitud de una diagonal entre vértices que no comparten caras (Figura 9).

Figura 9. Calcular la diagonal de un prisma. Adaptado de libros de texto.



j) Calcular la medida faltante en una pirámide o cono. En estas actividades se proporciona una imagen de un cono o de una pirámide y se solicita una información particular, por ejemplo, la generatriz de un cono o la altura del triángulo que forma la cara lateral de la pirámide (Figura 10).

Figura 10. Calcular la media faltante en una pirámide o un cono. Adaptado de libros de texto.



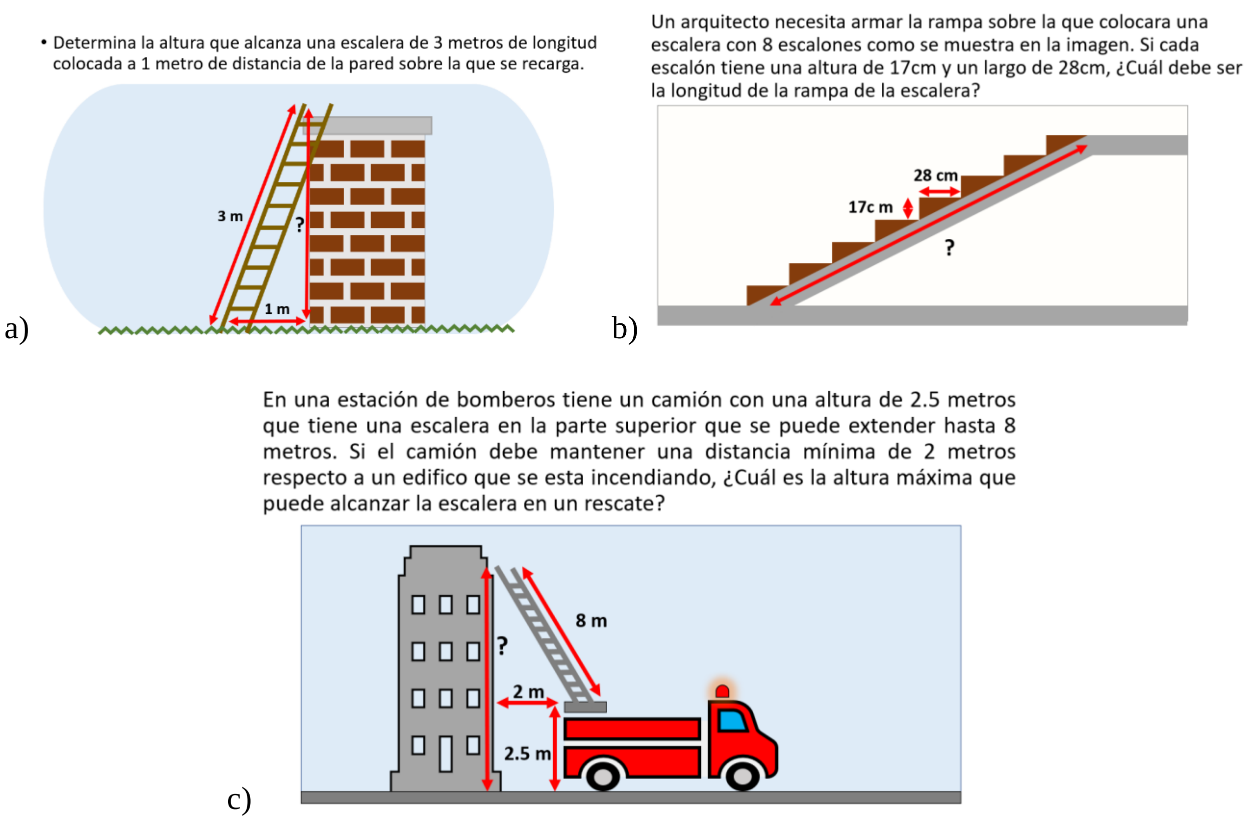
k) Medidas en figuras inscritas. Estos problemas consisten en solicitar la media de una figura geométrica inscrita en otra, por ejemplo, la medida de un lado de un cuadrado inscrito en un círculo con un radio de 10 centímetros, o el área de un hexágono inscrito en un círculo con radio 1m.

Es posible que, en algunos problemas de tipo geométrico, el autor del libro plantee actividades similares con el propósito de ofrecer más oportunidades a los estudiantes para resolverlos o para que profundicen la lógica que sigue ese problema en particular, sin embargo, lo más frecuente es que cada libro ofrezca diferentes tipos de actividades en vez de repeticiones de la misma actividad.

6.- Problemas verbales o problemas de situación. Estos problemas intentan ofrecer un contexto similar a la realidad en el que se pueda recurrir al teorema de Pitágoras para resolver un problema u obtener información relacionada con dicha situación. Suelen recurrir también a ilustraciones que ayuden a comprender el contexto descrito y, entre los problemas más recurrentes, se encuentran:

a) <u>Problemas con escaleras</u>. Son el tipo de problemas más común, y consisten en calcular una medida en un tipo de escalera. Puede corresponder a escaleras de mano, donde podrían calcular la distancia al muro, la longitud de la escalera o la altura que alcanza una vez recargada sobre el muro. Otra opción son las escaleras arquitectónicas, donde los estudiantes deberán calcular la longitud de la rampa si se les proporcionan las medias de la huella y el peralte. También se encuentran casos en los que se incorporan escaleras eléctricas o de bomberos, la Figura 11 ilustra algunos ejemplos.

Figura 11. Problemas con escaleras. Adaptado de libros de texto.

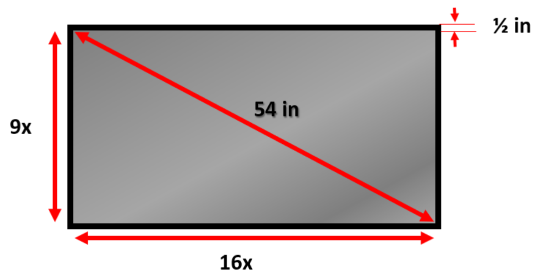


b) <u>Diagonales en objetos rectangulares</u>. Se plantea una situación donde se requiere calcular una diagonal en un objeto rectangular, por ejemplo, un refuerzo de una puerta de acero, o una trabe diagonal en un muro. Luego se proporcionan las medidas del objeto y se solicita calcular la longitud de la diagonal.

c) Calcular la medida de un televisor. Los problemas pueden tener diferente orden, por ejemplo, se ofrecen las medias del espacio donde se desea colocar un televisor y luego se explica que la medida de los televisores se da con respecto a su diagonal, por lo que deberán calcular la media de la diagonal máxima que cabe en ese espacio. Otra opción es explicar que las pantallas suelen tener una proporción de 3/4 en televisores antiguos y de 9/16 en las pantallas más modernas para luego calcular las medias de ancho y alto de un televisor a partir de su diagonal (Figura 12).

Figura 12. Calcularla medida de un televisor. Adaptado de libros de texto.

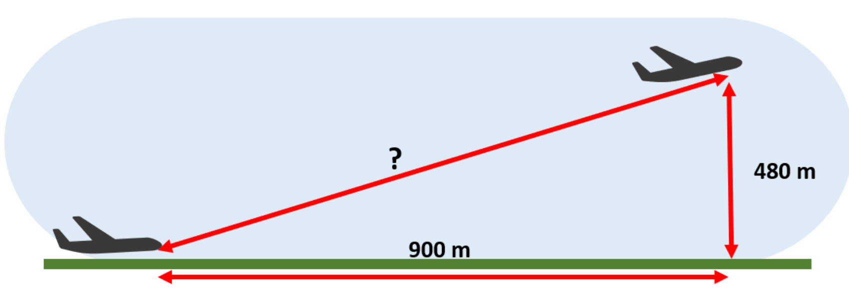
La pantalla de un televisor actual tiene un proporción entre su altura y su anchura de 9 a 16, es decir, si mide 9 unidades de alto, medirá 16 unidades de ancho. Sin embargo la medida de la pantalla se da respecto a su diagonal. Determina el alto y el ancho de un televisor de 54 pulgadas su borde es de ½ pulgada.



d) Distancia recorrida por un objeto en movimiento. Estos problemas describen la ruta que sigue un objeto o una persona en movimiento, por ejemplo, una persona que camina por varias calles, un avión que despega o un automóvil que va de una ciudad a otra. Después se solicita calcular la distancia que existe entre el punto inicial de su recorrido y el punto final (Figura 13).

Figura 13. Problemas con objetos en movimiento. Adaptado de libros de texto.

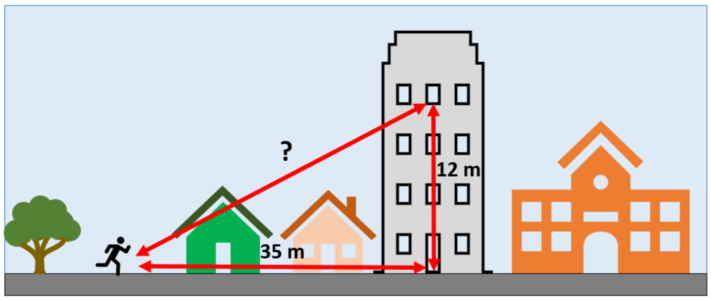
Un avión pequeño ha despegado recorriendo una distancia horizontal de 900 metros y se ha elevado un total de 480 metros. ¿Cuál es la distancia entre el avión antes de empezar su recorrido y su posición actual?



e) Calcular la distancia entre dos objetos. Se establece la posición relativa de dos objetos, por ejemplo, un barco que se acerca a un muelle, una persona que va a un edificio o dos casas en una ciudad. Después se solicita calcular la distancia entre esos dos objetos (Figura 14).

Figura 14. Calcular la distancia entre dos objetos. Adaptado de libros de texto.

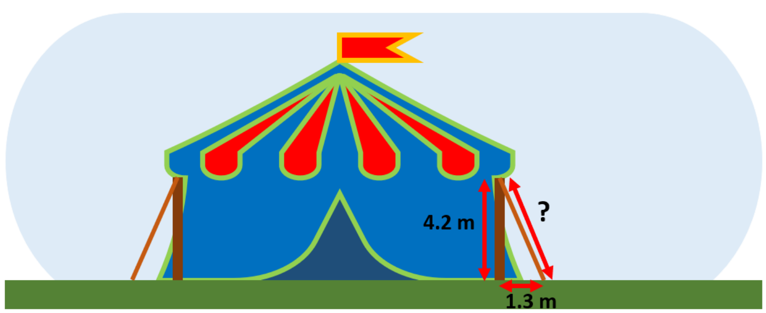
María vive en el último piso de un edificio y José, quien va a visitarla, se encuentra a 35 metros de la entrada de su edificio. Si el piso donde vive maría esta a 12 metros de altura, ¿Cuál es la distancia entre María y José?



f) Cables para sujetar postes o torres. Se plantea la necesidad de sujetar un poste o una torre con cables de forma que se mantenga perpendicular al suelo. Para asegurar que el poste o torre formen un ángulo recto con el piso, los alumnos deben determinar la longitud del cable recurriendo al teorema de Pitágoras (Figura 15).

Figura 15. Problemas con cables para sujetar. Adaptado de libros de texto.

En un circo utilizan postes anclados con cables para sostener la carpa en su sitio. Si los postes sobresalen del suelo 4.2 metros y deben sujetarse con estacas a 1.3 metros de su base, ¿Cuál debe ser la longitud del cable que los sostiene para asegurar que queden perpendiculares al piso?

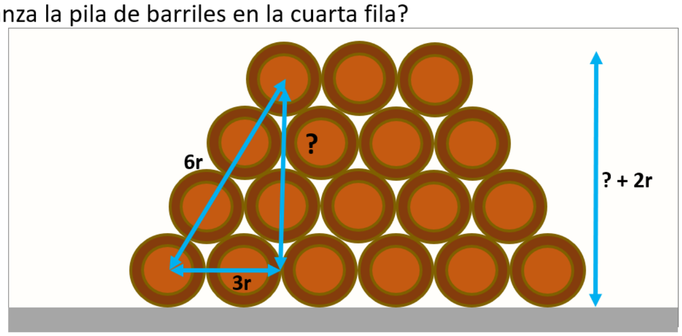


g) Trazar ángulos rectos. Se plantera una situación figurada en la que los alumnos deberían trazar un ángulo recto o verificar que un ángulo es recto. Por ejemplo, se recuerda a los estudiantes las construcciones antiguas, donde se trazaban ángulos rectos utilizando cuerdas con nudos a la misma distancia y se solicita que intenten explicar como lo hacían.

h) <u>Calcular la altura de cilindros apilados</u>. Estos problemas ilustran objetos similares a cilindros, por ejemplo, barriles de vino, botellas o garrafones de agua, que se apilan unos sobre otros y luego se solicita calcular la altura que alcanzan dichos objetos una vez apilados (Figura 16).

Figura 16. Calcular la altura de cilindros apilados.

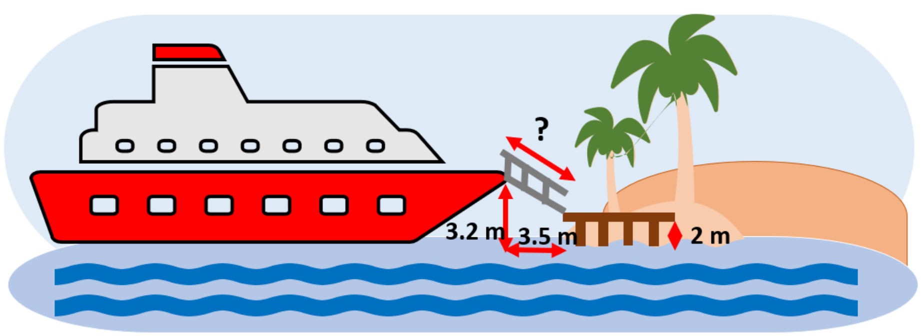
En una almacén de vinos apilan los barriles con un radio de 40 centímetros de forma horizontal de modo que los barriles de la segunda fila encajan entre los barriles de la primere, los barriles de la tercera fila encajan a la mitad de los barriles de la segunda y así sucesivamente. ¿Que altura alcanza la pila de barriles en la cuarta fila?



i) <u>Medidas de una rampa</u>. Estos problemas solicitan a los estudiantes calcular la medida de una rampa que debe subir cierta altura en una distancia determinada (Figura 17).

Figura 17. Medidas de una rampa. Adaptado de libros de texto.

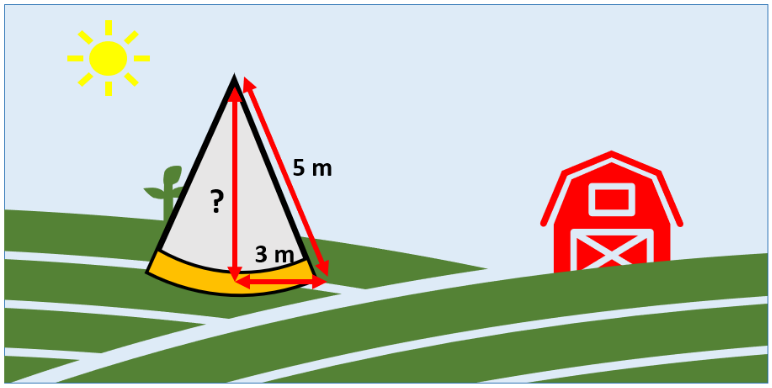
Un barco ancla a 3.5 metros del muelle y su cubierta queda 3.2 metros por encima del nivel del mar. Si el muelle se encuentra a 2 metros por encima del nivel del mar, ¿Cuál debe ser la longitud de la rampa para permitir que los pasajeros desembarquen?



j) <u>Calcular la medida de un silo o una pirámide</u>. Estas situaciones ofrecen las medias de una construcción con forma cónica o piramidal, y luego solicita calcular una media faltante, regularmente la altura, aunque también pueden solicitar el radio del silo o la altura de la acara lateral de una pirámide (Figura 18).

Figura 18. Calcular la altura de un silo o una pirámide. Adaptado de libros de texto.

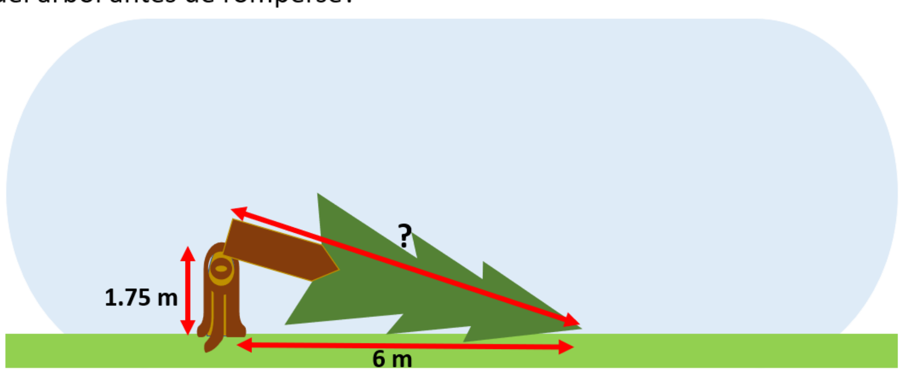
En una granja utilizan un silo con forma cónica para guardar grano. El radio del silo es de 3m y la cara lateral tiene una longitud de 5 metros. ¿Cuánto mide la altura del silo?



k) <u>Calcular la altura de un objeto roto</u>. Estas actividades plantean una situación en la que un objeto alto, como un árbol o un poste, se ha roto y luego solicita calcular la altura inicial del objeto a partir de la distancia que existe entre su base con el punto en el que toca el suelo y la altura de la parte de dicho objeto que aún permanece perpendicular al piso (Figura 19).

Figura 20. Calcular la altura de un objeto roto. Adaptado de libros de texto.

Un árbol se ha roto formando un triángulo rectángulo con las dos partes de su tronco y el suelo. El árbol se rompió a 1.75 metros de su base y la copa toca el suelo a 6 metros de la misma. ¿Cuál era la altura del árbol antes de romperse?



l) <u>Calcular la distancia al horizonte</u>. Este tipo de actividad parte con la explicación de como la línea visual constituye una línea tangente al planeta tierra que forma un ángulo recto con el horizonte. Luego plantea calcular la distancia máxima que una persona puede ver, ya sea desde la orilla del mar o desde una construcción alta sin nada que interrumpa su línea visual (Figura 20).

Figura 20. Calcular la distancia al horizonte. Adaptado de libros de texto.

El planeta tierra es un objeto casi esférico, por lo que la línea que se dibuja entre la visual de una persona y el horizonte que alcanza a ver es una línea tangente. Esta tangente forma un ángulo recto en el punto del horizonte entre la línea visual y el radio de la tierra, que es aproximadamente 6, 371 km. Determina la distancia máxima que una persona puede alcanzar a ver si se encuentra en una torre de 500 metros de altura suponiendo que nada se interpone frente a ella.

m) Calcular el área de superficies. Estos problemas plantean una situación en la que se requiere calcular el área de una superficie cuadrada levantada sobre un lado de un triángulo rectángulo. Por ejemplo, calcular el área de una habitación que no mantiene la perpendicularidad con otras dos, o calcular la cantidad de árboles que se puede plantar en un terreno cuadrado que se encuentra al lado de un terreno con forma de triángulo rectángulo.

De este análisis se puede observar una distinción entre las actividades, por un lado, las destinadas a entender y el significado del teorema de Pitágoras suelen ser concisas y bastante similares entre ellas. Por otro lado, las actividades destinadas a que los alumnos aprendan a resolver problemas mediante el teorema de Pitágoras son diversas y van de problemas muy sencillos, hasta problemas más complejos que implican diferentes conocimientos matemáticos tanto geométricos como algebraicos. Esto sugiere que la mayoría de los autores pretenden ofrecer un catálogo de problemas lo más diverso posible, posiblemente con la intención de lograr que los estudiantes sean capaces de resolver cualquier problema relacionado con el teorema de Pitágoras en el futuro.

Otro elemento para considerar es la secuencia, que es bastante similar en la mayoría de los libros. Esta secuencia inicia con una actividad diseñada para que los alumnos adviertan la relación definida por el teorema de Pitágoras, ya sea mediante una demostración visual, información histórica o un problema verbal que implica calcular superficies. Después plantean actividades para comparar las áreas de los cuadrados levantados sobre los lados de un triángulo rectángulo, seguido de actividades de formalización y, finalmente, problemas geométricos y luego verbales.

Si bien las actividades propuestas en libros de texto pueden ser una ventana a lo que sucede en los salones de clase, siguen siendo actividades potencialmente implementadas, por lo que no ofrece una certeza completa de que, en efecto, sean estas las actividades que realmente se implementan. Para confirmar que tipo de actividades se realizan en el salón de clases y los motivos por los que un profesor decide recurrir a una en vez de otra es necesario entrevistar a los profesores, lo que corresponde la siguiente etapa del diseño de la lección.

4.2 Actividades propuestas por profesores.

Realizar entrevistas a los profesores de secundaria permite conocer con un mayor grado de certeza cuáles son las actividades elegidas para la enseñanza del teorema de Pitágoras, así como las condiciones e intenciones bajo las que son implementadas. Se entrevistó a 6 profesores (anexo 6 al 11) con esta intención, a continuación, se presentan los resultados del análisis de las entrevistas relacionado con las actividades implementadas por profesores.

En general los profesores suelen introducir a los estudiantes mediante anécdotas o situaciones que permitan ilustrar el teorema de Pitágoras. Por ejemplo, puede ser una anécdota de carácter casual o vinculadas con la historia del teorema, como en los siguientes ejemplos:

"…inicio con una anécdota, … explico como el tema que vamos a estudiar les va a ayudar a resolver diferentes situaciones…"

"Inicio contándoles u poco de la historia de Pitágoras, quien fue, en que época vivió…"

Una actividad interesante para presentar a los estudiantes el teorema de Pitágoras de forma no convencional es mediante una canción titulada "*El rock de Pitágoras*", (una canción de la década de 1960 compuesta a partir del teorema) seguida de preguntas de reflexión:

"comparto una canción que se llama 'El rock de Pitágoras', … es una canción cortita y a algunos les gusta, aunque no a todos, depende del grupo. Incluso algunos llegan a corregirla ya que no siempre es precisa, pero bueno eso es una muestra de que aprendieron."

Otra actividad corresponde a las demostraciones visuales, o demostraciones realizadas con lenguaje algebraico. Estas demostraciones pueden tener diferentes propósitos, por ejemplo, pasar de la relación entre las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo rectángulo a le expresión algebraica del teorema, como en el siguiente ejemplo:

“*Yo utilizo una demostración china, en la que tiene un cuadrado con cuatro triángulos rectángulos, y si los acomodas de una forma forman los cuadrados de los catetos, de otra forma el cuadrado de la hipotenusa, …, me facilita pasar del lenguaje verbal a la expresión algebraica*”

Además, pueden usar demostraciones visuales con la intención de presentar a los alumnos la relación del teorema de Pitágoras como un juego o una competencia, seguida de una explicación del teorema de Pitágoras o actividades de reflexión, como en el siguiente ejemplo.

“*Yo utilizo unos rompecabezas, son demostraciones del teorema de Pitágoras, los imprimo en hojas de papel, … y hago una especie de competencia donde gana el primer equipo que arma los cuatro*”

Para que los alumnos justifiquen que la relación de igualdad entre los cuadrados de los lados de un triángulo rectángulo se cumple en todos los triángulos rectángulos también pueden utilizar las demostraciones visuales. Para esto recurren a representaciones que permitan variar las formas o medidas de casos particulares, ya sea mediante un software de geometría dinámica, geoplanos o ilustrando diferentes ejemplos:

“*Implemento la herramienta de GeoGebra, …, les planteo a los alumnos un triángulo rectángulo con los cuadrados de sus lados y los alumnos los redimensionan, entonces pueden ver que la medida de las áreas se hace más grande o más pequeñas, pero la relación de igualdad se mantiene.”*

“Hago demostraciones con los alumnos, pero con figuras diferentes, por ejemplo, en lugar de utilizar cuadrados, planteo triángulos equiláteros o semicírculos”

“También les pido que hagan un dibujo, que ilustre el teorema, y utilizando dibujos o el geoplano, que encuentren la relación”

Otros ejemplos de demostraciones visuales son objetos dinámicos como es el siguiente cas:

“*Una demostración visual donde construían con los cuadrados de sus lados y rellenaban con agua o arena los cuadrados de los catetos y cuando le daban vuelta ya podían ver como cubría el cuadrado de la hipotenusa*.”

También pueden recurrir a aproximaciones más directas del teorema de Pitágoras con una ilustración y preguntas sencillas seguidas de una explicación:

“*Bueno, empiezo planteando un rectángulo al cual partimos con una diagonal y les pregunto ¿Qué tipo de triángulo se forma?, … creo la necesidad de establecer una relación, luego les explico que existe el teorema de Pitágoras*”

Cuando los profesores consideran que sus estudiantes han comprendido el teorema implementan problemas geométricos o problemas verbales con la intención de que desarrollen la capacidad de resolverlos recurriendo al teorema de Pitágoras. También pueden intentar incorporar diferentes elementos, como son el contexto particular de los estudiantes o aprendizajes previos que puedan vincularse al estudio del teorema de Pitágoras:

“Intento implementar problemas que los pongan en contexto, por ejemplo, problemas de triangulación, siempre que las condiciones lo permitan.”

“Los problemas que más planteo son de longitudes, …, calcular la longitud de una escalera, o si dos personas hacen un recorrido donde la trayectoria forma un triángulo rectángulo”

“he visto que también puedo aprovechar para repasar raíz cuadrada …, si el área del cuadrado no tiene raíz les pido que lo factoricen, también les pido que calculen las medidas de diagonales y los problemas típicos de la escalera”

No existe consenso en el orden en que se implementan los problemas geométricos o verbales. Mientras unos profesores parten con problemas verbales con la intención de contextualizar la utilidad del teorema para después profundizar en aspectos más abstractos, otros parten de problemas geométricos para simplificar el contenido y después recurren a problemas verbales que agreguen información y contexto. Aun así, todos parecen reconocer la utilidad de ambos tipos de problemas y los utilizan en función de su propósito didáctico y las necesidades y características de sus estudiantes:

“Lo que propongo al principio son ejercicios, con triángulos donde queremos calcular la medida de un lado, una vez que ya conocen el teorema les propongo diferentes problemas”

“Procuro, generalmente, iniciar con problemas donde puedan ver su utilidad, contextualizados, y una vez que eso queda claro puedo continuar con la parte algorítmica o de razonamiento geométrico.”

Cabe mencionar que durante las entrevistas fue posible identificar que las actividades varían dependiendo de la situación en la que deben ser implementadas. Por ejemplo, las actividades que los profesores pueden realizar en la modalidad presencial son distintas a aquellas que implementan durante el cierre de los centros educativos:

"ya sabiendo cómo reaccionan ellos, pueden salir al patio para calcular algunas alturas, o algunas distancias."

"He pensado en partir de los medios digitales ya existentes, GeoGebra, Khan Academy, plataformas de ese estilo"

Algo interesante de este análisis es que los profesores con más años de experiencia o que han trabajado en diferentes contextos, suelen tener una variedad de actividades más extensa que los profesores con pocos años de experiencia. Esto, de acuerdo con los comentarios emitidos por los sujetos entrevistados, parece ocurrir a casusa de la necesidad de diseñar ajustes a los contenidos de forma que sean congruentes con las características y necesidades de los alumnos a los que les imparten clases.

Respecto al contenido estudiado, los profesores parecen mantener una secuencia de actividades similares, pero recurriendo a actividades diferentes. De manera general inician la secuencia con un caso particular del teorema de Pitágoras donde se parte de un triángulo rectángulo sobre cuyos lados se construyen cuadrados; a continuación, los alumnos exploran la relación entre las áreas de dichos cuadrados, de los que se debería desprender la relación entre los lados; continúan con actividades orientadas a la generalización de dichas relaciones, por ejemplo con lenguaje algebraico o la comparación de diferentes triángulos; finalmente concluyen con ejercicios o problemas que impliquen utilizar el teorema de Pitágoras. Cabe destacar que, aunque la estructura general parece similar, cada profesor coloca un énfasis especial en uno u otro punto.

Respecto a los elementos técnicos, en esta ocasión los profesores manifestaron considerarlos como un criterio para la selección de actividades, realizando adecuaciones o eliminando actividades dependiendo de si cuentan o no con un recurso u otro.

Al comparar las actividades de que los profesores efectúan, es posible afirmar que muchas de las actividades propuestas en libros son implementadas, sin embargo, también es posible asumir que eso no sucede siempre ni para todos los alumnos y que esto depende de los criterios de cada profesor.

4.3 Criterios de selección para implementar una actividad.

Durante las entrevistas, con la intención de comprender como mejorar tanto el material como las actividades lúdicas que parten de demostraciones visuales, fue necesario observar los diferentes criterios a los que recurren profesores para la selección de las actividades que deciden implementar con un grupo de estudiantes. Durante este análisis se determinó que, más que las características propias de las actividades, los profesores analizan la forma en la que estas propiciarían las interacciones en sus grupos, con base en algunas "*variables*".

La primera variable que consideran son sus **estudiantes**, llegando a considerar diferentes características de ellos. Por ejemplo, los conocimientos previos que los alumnos deben tener para estudiar un contenido en comparación con los conocimientos y nivel de dominio que realmente tienen. Los siguientes diálogos los ofrecen profesores cuando explican el inicio de sus secuencias:

"Para ese momento hemos estudiado diferentes propiedades de los triángulos"

"…era una escuela con un nivel no muy alto… en secundaria no estaban muy bien así que tuvimos que repasar muchos contenidos"

Otra característica es la interacción que los estudiantes tienen como grupo, ya sea para ajustar la actividad de modo que todos sean capaces de hacerla o realizar adecuaciones para que algunos realicen una actividad mientras que otros realizan una actividad diferente, como se observa en los siguientes diálogos:

"…tengo que revisar los ejercicios, que tengan soluciones correctas, que los métodos sean adecuados, pero siempre depende del grupo"

"…no puedo hacer todo con todos, elijo la actividad que mejor encaja con la forma de trabajo del grupo."

"Siempre vamos a encontrar chicos para los que nuestras propuestas sean de las mejores, pero no para todos. Por eso es importante tener variedad de actividades."

La forma de actuar de los estudiantes también es considera para tomar decisiones, antes, durante y después de implementar una actividad. El primer dialogo que se muestra a continuación lo ofrece una profesora para explicar cómo organizo a su grupo para una actividad, mientras que el segundo lo ofrece un profesor para explicar su forma de actuar durante la misma actividad:

"Considero que es muy importante conocer bien a los alumnos antes de implementar la actividad"

"…se pusieron muy tensos porque no lo podían resolver. Entonces fue ahí cuando se les fue ayudando..."

Otros ejemplos de la forma en que consideran las acciones de sus estudiantes son para modificar las actividades de modo que reduzcan una conducta o dificultad. En los siguientes ejemplos, el primero corresponde a una profesora que observo que para una alumna las demostraciones visuales no eran prueba suficiente de la veracidad del teorema de Pitágoras, por lo que propone ofrecer una unidad de medida dentro de las demostraciones; el segundo corresponde a una profesora que sugería eliminar la numeración de las pruebas para evitar que los alumnos copiaran los resultados de sus compañeros:

"Creo que puede ayudar a alumnos que tengan la misma inquietud que mi alumna"

"…algunos escuchan a los otros equipos y dicen: 'entonces sólo se puede en el primero'."

Si los profesores tienen conocimiento de alguno de los intereses de sus estudiantes puede, incluso, proponer problemas que correspondan a dichos intereses. El siguiente dialogo lo ofrece un profesor después de explicar un problema surgido de una duda de sus estudiantes respecto al área de un balón de futbol:

"como tal la verdad, no procuro repetir problemas, prefiero que se ajusten con los intereses de los alumnos."

La segunda variable que sirve como criterio para la selección de actividades es el **contexto**. Por ejemplo, los siguientes diálogos los ofrece un profesor que trabaja en una comunidad donde el crimen ha aumentado en los últimos años y muchos estudiantes optan por preparatorias que se encuentran fuera de la comunidad. El primero lo ofrece mientras explica que cita principios éticos propuestos por Pitágoras y el segundo para explicar porque integra un tipo de problema:

"Inicio contándoles un poco de la historia de Pitágoras … principios o frases que en muchas ocasiones considero les pueden ayudar, o se ajustan a su contexto"

"…les pido que lo factoricen, ya que eso les sirve para su examen de la prepa…"

Además, consideran los recursos a su alcance en el contexto especifico que les proporciona su escuela. Los siguientes cuatro diálogos pueden ilustrarlo; el primero lo ofrece un profesor cuando explica cómo ha modificado una actividad en una escuela con aula de cómputo a otra que no tiene; el segundo y tercero lo ofrece un profesor para contemplar el libro de texto en sus secuencias, así como las instalaciones y personal dentro de su escuela y; el cuarto lo ofrece una profesora para explicar cómo ha reaccionado al cierre de las escuelas y el trabajo a distancia:

"…en la otra escuela, que era rural, tenía un aula de cómputo y podía proporcionarles a los alumnos una computadora para cada quien, y en esta escuela lo proyecto y los alumnos utilizan, todos, la misma computadora"

"en caso de que lleven un libro de texto sigo la secuencia del libro de texto…"

"Este año como estaban remodelando la escuela, pues les pedí que les preguntaran a los albañiles cómo hacen para determinar que las paredes queden a escuadra, … no siempre van a tener a la mano un albañil o alguien así."

"La consideración fue partir de lo que ya tenemos … el modo de trabajo a distancia puede ser un factor."

La tercera variable es **la conveniencia de una actividad**, es decir, si la actividad facilita el aprendizaje o la motivación en los estudiantes. Los diálogos siguientes enseñan como los profesores seleccionan una actividad ya que les facilita la enseñanza del contenido mediante un modelo. El primero explica porque recurre a una demostración del teorema de Pitágoras; el segundo explica porque utiliza GeoGebra; el tercero y cuarto ilustran que la intención de los profesores es facilitar el aprendizaje:

"Yo lo utilizo porque me facilita pasar del lenguaje verbal a la expresión algebraica del teorema"

"…implemento la herramienta GeoGebra, principalmente porque me permite experimentarlo de forma visual"

“La resolución de ejercicios y de problemas fue más sencilla, ya que entendieron… yo percibo que sí entendieron”

“Primero quiero que conozcan el teorema y sepan utilizarlo para después resolver problemas recurriendo a él.”

Vinculado con la pertinencia didáctica encontramos la decisión de incorporar actividades con la intención de llamar la atención de los estudiantes o motivarlos a aprender, como se muestra en los siguientes diálogos. El primero corresponde a la explicación de un profesor relacionada con la selección de problemas ya que considera que los problemas contextualizados son más llamativos; la segunda corresponde a la observación de una profesora respecto a un juego con rompecabezas pitagóricos:

“*Procuro, generalmente, iniciar con problemas donde puedan ver su utilidad, contextualizados”*

“Claro, la verdad es que para los alumnos ese tipo de actividades les llama la atención.”

La cuarta variable es la **experiencia y personalidad del profesor**. La personalidad se refiere al modo de pensar, expresarse, a las actitudes e intereses de una persona (Psicoactiva, 2022). Es importante considerarla ya que algunas decisiones en la forma en que se implementa una actividad corresponden a un criterio personal.

Por otro lado, la experiencia corresponde a la trayectoria profesional que han tenido los profesores, como esta les ha permitido interactuar con diferentes estudiantes de modo que puedan reconocer dificultades de aprendizaje, así como las estrategias que han implementado para ayudarlos a superarlas. El primer dialogo que se presenta a continuación corresponde a la justificación que da un profesor para incorporar ejercicios con el geoplano durante sus secuencias para la enseñanza del teorema de Pitágoras, mientras que el segundo y e l tercero corresponden a las observaciones que realiza un profesor que ha trabajado en diferentes niveles educativos y como esto le permite identificar como los niveles educativos básicos influyen en el desempeño de los estudiantes en niveles superiores:

“Con la experiencia he visto que experimentar con objetos físicos tangibles les ayuda a entender”

“También intento hacer mucho énfasis en que no se casen con la fórmula… ya que mantener la fórmula les puede causar problemas cuando intentan resolver problemas donde les presentan literales diferentes.”

“...me di cuenta (de) que la forma en la que ellos operan depende mucho de la forma en que lo vieron en niveles inferiores…”

Estos ejemplos indican que la selección de actividades, así como el manejo de los recursos necesarios para su aplicación, constituye una acción muy compleja, influida por diferentes variables. Comprender estos criterios ayuda a entender que, aunque la actividad lúdica y el material didáctico diseñado cumplan con las características idóneas para la situación de un profesor, podrían no hacerlo para otro.

4.4 Diseño de la actividad.

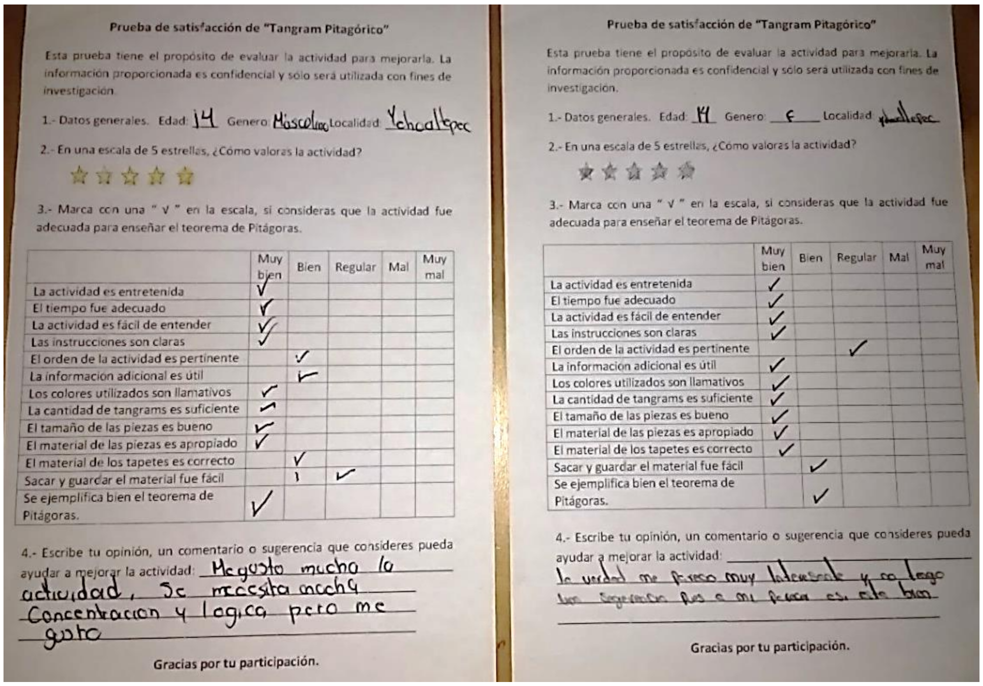
La intención es incorporar un juego que facilite el aprendizaje del teorema de Pitágoras a partir de sus demostraciones visuales. Para ello se parte de las actividades propuestas en libros de texto y por profesores, con lo que se realizaron unos primeros prototipos con los que se consultó al grupo A de profesores para incorporar mejoras (Figura 21). Cuando se consideró que la actividad era apta para ser implementada en grupos los profesores la utilizaron con sus estudiantes con la intención de conocer realmente cuales problemas podrían surgir durante la actividad que estuvieran vinculados con el material didáctico.

Figura 21. Prototipos de rompecabezas pitagóricos. a) Primer prototipo. b) Cuarto prototipo, implementado con los alumnos del grupo A de profesores.

a)  b) 

Se les realizó una encuesta voluntaria de satisfacción a 89 estudiantes de estos grupos, esto ayudaría a determinar los elementos que deberían mejorar. La escala Likert estaba diseñada contemplando las mejoras que se podrían realizar en los materiales y en la actividad lúdica, por lo que no se incluyen elementos que no pudieran mejorarse dentro del tiempo que duraría la investigación. La encuesta incluía datos de identificación, incorporaba una escala de estrellas para valorar la actividad en general (similar a la que utilizan algunas “aplicaciones” de celular), seguida de una escala Likert que enlistaba algunos elementos relacionados con el material, finalmente un espacio de opinión abierta que le permitía a los estudiantes hacer sugerencias (Figura 22).

Figura 22. Encuesta de satisfacción contestada.



Prueba de satisfacción de "Tangram Pitagórico"

Esta prueba tiene el propósito de evaluar la actividad para mejorarla. La información proporcionada es confidencial y sólo será utilizada con fines de investigación.

1.- Datos generales. Edad: 14 Genero: Masculino Localidad: Ychcaltepec

2.- En una escala de 5 estrellas, ¿Cómo valoras la actividad?

3.- Marca con una " √ " en la escala, si consideras que la actividad fue adecuada para enseñar el teorema de Pitágoras.

	Muy bien	Bien	Regular	Mal	Muy mal
La actividad es entretenida	√				
El tiempo fue adecuado	√				
La actividad es fácil de entender	√				
Las instrucciones son claras	√				
El orden de la actividad es pertinente		√			
La información adicional es útil		√			
Los colores utilizados son llamativos	√				
La cantidad de tangrams es suficiente	√				
El tamaño de las piezas es bueno	√				
El material de las piezas es apropiado	√				
El material de los tapetes es correcto		√			
Sacar y guardar el material fue fácil			√		
Se ejemplifica bien el teorema de Pitágoras.	√				

4.- Escribe tu opinión, un comentario o sugerencia que consideres pueda ayudar a mejorar la actividad: Me gusto mucho la actividad, se necesita mucha concentracion y logica pero me gusto

Gracias por tu participación.

Prueba de satisfacción de "Tangram Pitagórico"

Esta prueba tiene el propósito de evaluar la actividad para mejorarla. La información proporcionada es confidencial y sólo será utilizada con fines de investigación.

1.- Datos generales. Edad: 14 Genero: F Localidad: [illegible]

2.- En una escala de 5 estrellas, ¿Cómo valoras la actividad?

3.- Marca con una " √ " en la escala, si consideras que la actividad fue adecuada para enseñar el teorema de Pitágoras.

	Muy bien	Bien	Regular	Mal	Muy mal
La actividad es entretenida	√				
El tiempo fue adecuado	√				
La actividad es fácil de entender	√				
Las instrucciones son claras	√				
El orden de la actividad es pertinente			√		
La información adicional es útil	√				
Los colores utilizados son llamativos	√				
La cantidad de tangrams es suficiente	√				
El tamaño de las piezas es bueno	√				
El material de las piezas es apropiado	√				
El material de los tapetes es correcto	√				
Sacar y guardar el material fue fácil		√			
Se ejemplifica bien el teorema de Pitágoras.		√			

4.- Escribe tu opinión, un comentario o sugerencia que consideres pueda ayudar a mejorar la actividad: la verdad me parecio muy interesante y no tengo una sugerencia pues a mi parecer esta bien

Gracias por tu participación.

Tanto en la valoración general, establecida con la escala de estrellas, como en la valoración de los aspectos particulares, los estudiantes ofrecieron una valoración mayormente positiva (Figura 23). Sin embargo, los dos aspectos con la valoración más baja son la forma en que se guardan los rompecabezas y que tan fácil de entender es la actividad. Por otro lado, en la sección de opinión abierta, la mayoría de los comentarios eran positivos, pero sugerían cambar la forma de guardar las piezas o simplificar la explicación de la actividad para hacer más dinámica la clase; cambiar algunos materiales por otros más resistentes; cambiar colores, incorporar música o dar premios para hacer la actividad más atractiva; también comentaban que la actividad mejoraba su habilidad para armar rompecabezas (Figura 24).

Figura 23. Resultados de la escala Likert.

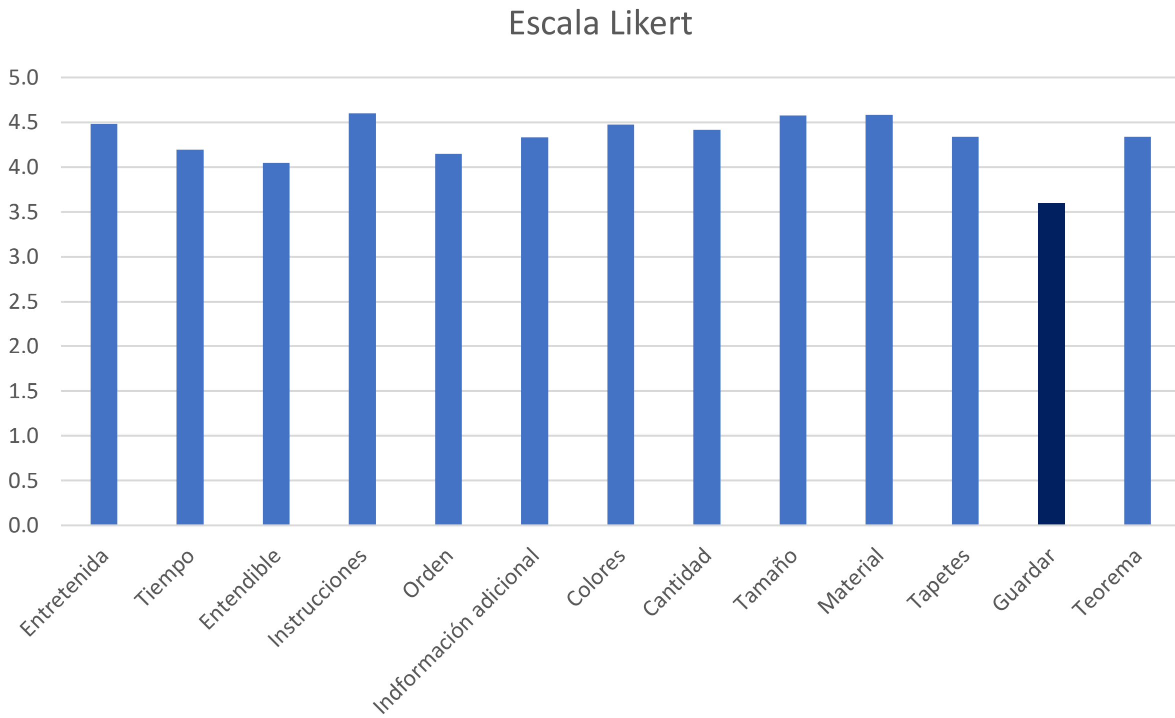


Figura 24. Porcentaje de opiniones en la encuesta.

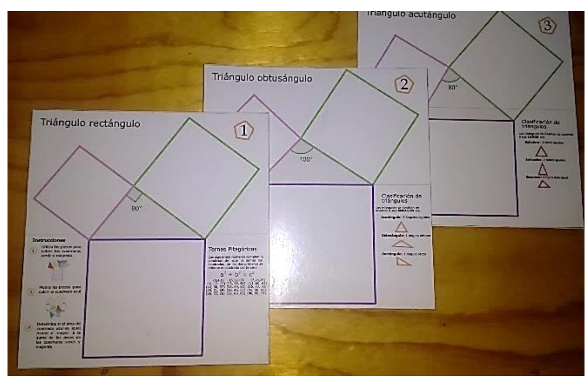
Los profesores apreciaron que la actividad era interesante y entretenida, por lo que los alumnos se emocionaban al participar. Los cambios que sugirieron para mejorar la dinámica fueron: cambiar las bolsas en las que se entregaban los rompecabezas por cajas de madera para agilizar la entrega y guardado; incorporar ilustraciones para explicar la actividad; separar las plantillas de las piezas para no perder tiempo al intercambiarlas. Estos cambios permitirían dedicar más tiempo al juego y la reflexión en torno al teorema de Pitágoras y no a la organización del juego.

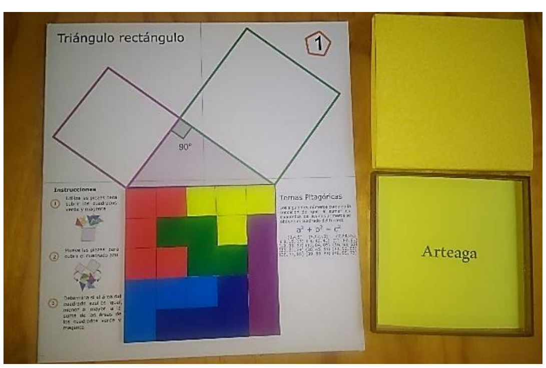
También observaron que el juego ayudaba a entender el contenido ya que lo ilustraba muy bien. Las mejoras propuestas relacionadas con la teoría matemática que permite entender el teorema de Pitágoras fueron: utilizar plantillas con triángulos rectángulos, acutángulos y obtusángulos para permitir que los estudiantes observen las diferencias en cada caso; incorporar una escala de media a través de tetraminos o pentaminos en un rompecabezas.

Valoraron de forma positiva el material didáctico desde un punto de vista técnico, sin embargo, sugirieron cambiar el material de las plantillas por uno más resistente y la caja para transportarlo por una de plástico que facilite su manipulación. La figura 25 ilustra los resultados.

Figura 25. Material didáctico. a) rompecabezas en sus cajas. b) Plantillas para rompecabezas. c) Rompecabezas a base tetraminos y pentaminos. d) Material en su caja para ser transportado.

a) 

b) 

c) 

d) 

Tanto las entrevistas como el análisis de libros sirvieron para el diseño de la secuencia didáctica (Anexo 12) que tras su primera implementación fue modificada para ajustarse a las observaciones (Anexo 13). A continuación, se muestra los resultados obtenidos tras el análisis de las lecciones.

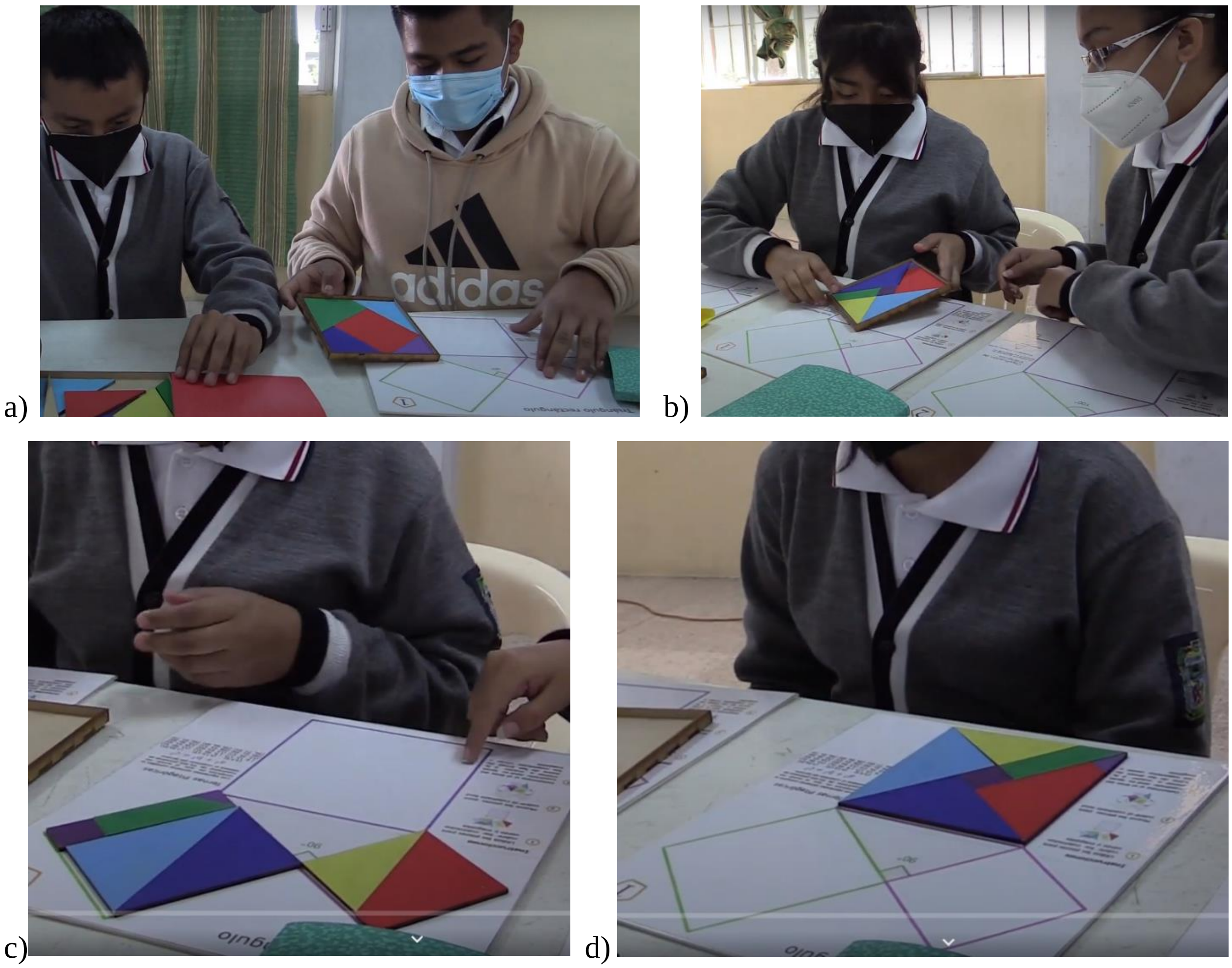
4.5 Análisis de la primera intervención

Para la primera intervención se seleccionó a un grupo de voluntarios de alumnos que cursaban el tercer año de secundaria con quienes se realizó una secuencia previa para asegurar que pudieran realizar las actividades durante la intervención. Fue necesario grabar el experimento para su análisis y transcripción (Anexo 14). La secuencia tuvo una duración de aproximadamente dos horas y se llevó a cabo en el aula audiovisual de la escuela secundaria “Ambrosio Herrera” en el municipio de Tecali de Herrera en el estado de Puebla, México.

Se dispusieron dos mesas, cada una con siete rompecabezas guardados en cajas de colores y tres plantillas para armarlos (correspondientes a triángulos rectángulos, acutángulo y obtusángulos), juego geométrico, hojas blancas y cuadriculadas, lápices, sacapuntas, goma y calculadora (Figura 26), también se utilizó un proyector para dar las indicaciones a los estudiantes. Los estudiantes se colocaron en equipos de dos integrantes, dos hombres contra dos mujeres, y el profesor explico las reglas de un juego, el cual consiste en una competencia para ver qué equipo lograba armar más rompecabezas en la plantilla “1”, una vez dadas las instrucciones los equipos procedieron a elegir sus rompecabezas y a armarlos, primero formando los cuadrados de los catetos y luego los cuadrados de la hipotenusa (Figura 27).

Figura 26. Ambiente donde se realizó la intervención

Figura 27. Armar rompecabezas en la plantilla 1. a) el equipo de niños elige un rompecabezas para armar. b) el equipo de niñas elige un rompecabezas. c) Rompecabezas sobre los cuadrados de los catetos. d) rompecabezas sobre le cuadrado de la hipotenusa.



La intención de la actividad es que los alumnos comparen las áreas de los cuadrados levantados sobre los lados de triángulos utilizando los rompecabezas. Se pretende que los estudiantes sean capaces de establecer que la suma de las áreas de dos cuadrados es igual al área del tercer cuadrado en el triángulo rectángulo, pero esto no implica que entiendan todavía el teorema de Pitágoras, tampoco se pretende validarlo únicamente con los rompecabezas, ya que se pretende explorar como esta actividad permite que sean los estudiantes quienes lo validen mediante estrategias propias.

Cada vez que un equipo logra terminar de armar los rompecabezas según las instrucciones se les preguntaba si la suma de las áreas de los cuadrados verde y magenta (correspondientes a los catetos) era igual, mayor o menor al área del cuadrado azul (correspondiente a la hipotenusa). Durante el experimento, cada vez que se les pregunto a los equipos determinaron que la suma de los dos primeros era igual al tercer cuadrado. Una vez establecida la relación de igualdad los equipos debían guardar su rompecabezas para elegir otro y continuar con el juego. Una vez que se agotó el tiempo se procedió a compartir las conclusiones de la primera actividad:

"P: Ahora vamos a compartir, la pregunta es ¿qué pasaba cuando juntaban las áreas de los dos cuadrados de arriba, el verde y el magenta, para formar el cuadrado Azul?

E1: Se sumaban

P: Se sumaban, muy bien, y ¿Cómo eran respecto al área del cuadrado azul?, ¿eran más grandes?, ¿más chicos?

E1: eran más grandes

E4: Eran iguales

P: eran iguales, ¿verdad?

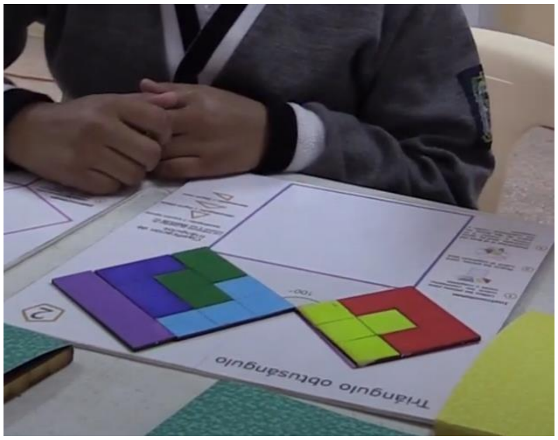
E4: cuando se sumaban las áreas

P: Muy bien, ternemos que, en este primer tablero, al sumar las áreas de los dos cuadrados de arriba nos daba un área igual a la del tercer cuadrado."

Durante la actividad el equipo de varones tiene más problemas para organizarse, mientras que el equipo de niñas logra armar más rompecabezas y gana el juego. En esta etapa de la intervención los estudiantes tienen problemas para establecer la relación de tricotomía ya que, el cuadrado correspondiente a la hipotenusa es mayor que cada uno de los otros cuadrados, sin embargo, observan que la suma de ambos sí es igual al área del cuadrado más grande.

Se continúa con la siguiente actividad, donde los estudiantes deberán comparar las áreas de cuadrados construidos sobre los lados de triángulos obtusángulos y acutángulos utilizando los rompecabezas. Las plantillas mantienen el mismo esquema de colores con la diferencia de que el ángulo que debería ser recto cambia por un ángulo de 100° en una y 80° en la otra. Además, ganarán puntos adicionales al establecer la comparación entre las áreas (Figura 28 y Figura 29).

Figura 28. Armar rompecabezas en la plantilla 2. a) rompecabezas sobre los cuadrados verde y magenta. b) rompecabezas armado sobre cuadrado azul.

a) 

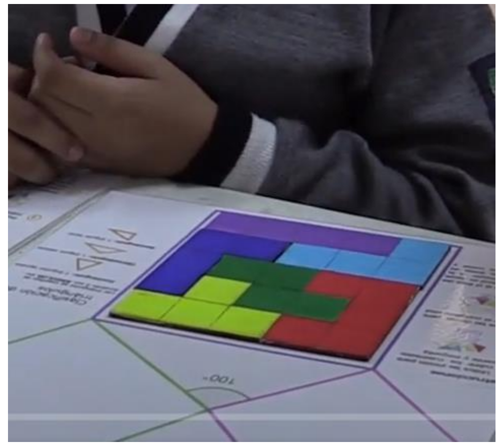
b) 

Figura 29. Rompecabezas armado sobre plantilla 3. a) rompecabezas armado sobre los cuadrados verde y magenta. b) Rompecabezas armado sobre el cuadrado azul.

a) 

b) 

Para este momento los estudiantes han descubierto que los rompecabezas se encuentran resueltos dentro de las cajas e intentan aprovecharlo para ganar el juego. Este no debe ser considerado como un problema ya que responde a una estrategia propia del juego, que de cualquier forma requiere de memoria y pensamiento creativo. El aprendizaje matemático corresponde a la comparación de áreas, por lo que el profesor debería concentrarse en que no copien ese resultado.

Se pretende que los alumnos establezcan que la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados más pequeños es menor al área del tercer cuadrado en el caso del triángulo obtusángulo y mayor en el caso del triángulo acutángulo. Una vez que termina el tiempo designado para la actividad se procede a compartir las conclusiones de cada equipo.

“P: ¿Qué pasaba con el cuadrado del número dos?, ¿cómo era el cuadrado azul respecto a la suma de las áreas de los otros dos cuadrados?

E3: Más chico

E1: Más chico

P: En la figura número dos cómo era el cuadrado azul con respecto a los otros dos

E4: Más grande

E2: Más grande

P: Más grande ¿verdad?, ¿y en la figura número 3?

E2: Más chico

P: Más chico. Entonces en la figura 1 eran iguales ¿verdad?, en la figura 2 más grande y en la figura 3 es más chico. ¿Qué cambia en cada uno de esos triángulos?

E1: Su área

…

P: ¿En qué casos podríamos pensar que la suma de las áreas de los cuadrados de arriba es igual al área del cuadrado de abajo?, ¿En el tres?

E1: No, en el 1

P: En el 1, ¿Qué tiene de especial el 1?

E2: Es igual

P: Es igual, muy bien, y ¿cómo es el ángulo en el 1?

E2: De 90 grados

P: Es de 90 grados, ¿cómo se llaman los ángulos de 90 grados?

E1: Rectos

P: Entonces es un ángulo recto, entonces, ¿será que siempre que el ángulo sea recto podrán mover dos cuadritos para formar el otro, el tercero?

E1: ¿cómo?

P: A ver, ¿en qué caso el área era igual?

E2: En el 1

P: ¿En qué casos es mayor?

E2: En el 2

P: ¿Cómo es el ángulo en el dos?

E2: De 100 grados

P: De 100 grados, ¿en qué casos es menor?

E2: En el 3, de 80 grados"

Al analizar los diálogos se observa que cumplen con lo esperado y logran establecer que la suma de los cuadrados verde y magenta es menor al área del cuadrado azul en el triángulo obtusángulo y mayor en el acutángulo, pero tienen problemas para incorporar definiciones matemáticas por lo que recurren a la numeración de las plantillas. Además, aunque el profesor podría utilizar este momento para afirmar la veracidad del teorema de Pitágoras, es preciso hacer explícita la necesidad en los estudiantes de que establezcan una estrategia de generalización.

Para ello, la siguiente actividad consiste en preguntarles si consideren que es posible construir rompecabezas que cumplan la relación de igualdad con cualquier triangulo rectángulo. Se espera que los estudiantes tengan ideas contrapuestas o que no sepan contestar, ya que en pocas ocasiones se ven en la necesidad de ser ellos quienes validen un conocimiento matemático. Aun así, deben ser capaces de idear una estrategia para probar que la relación de igualdad es verdadera para cualquier triángulo rectángulo o falsa en algunos casos.

"P: En este sí, ¿pero en este no? ¿Están de acuerdo los cuatro? En este sí se puede, pero en este no, los dos son triángulos rectángulos, consideran que en este si se puede, pero en este no, o, ¿alguien tiene otra idea?

E3: Si los dos son rectángulos en los dos se podría

P: Si los dos son rectángulos en los dos se podría, ¿usted considera que si los dos son rectángulos en los dos se podría?

E4: Sí

P: Usted considera que en este sí, pero en este no, bueno, en realidad no lo podemos determinar todavía, para eso sería la siguiente actividad, ¿cómo podrían comprobar esta idea?, ¿cómo podrían comprobar que el cuadrado que se forma aquí más el cuadrado que se forma aquí, si los sumaran, tendrían la misma área que el cuadrado que se forma aquí?

E2: Con la fórmula

P: ¿Con fórmula?

E1: Midiéndolo

P: ¿Midiéndolo?, bueno, con estos van a medir, tendrían que dibujar otros para poder medirlos. Ah, y ¿cómo comprobarían que no miden lo mismo?

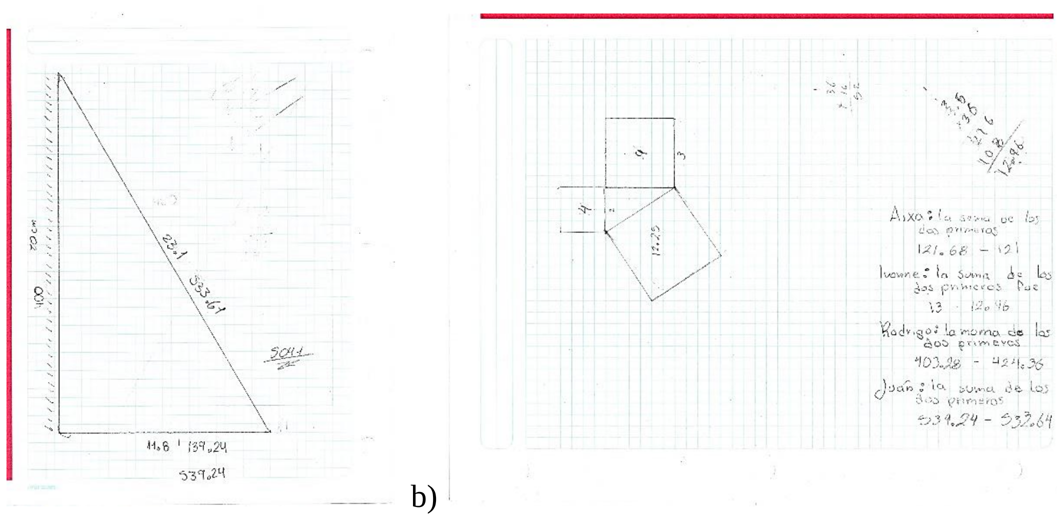
E2: Igual

P: ¿Igual midiéndolos? Bueno, pues vamos a hacer la siguiente actividad…"

En este momento se ha creado un debate entre los alumnos que consideran que la propiedad de igualdad se cumple para todo triángulo rectángulo y aquellos creen que no, además plantean como estrategia la idea de medir los lados de diferentes triángulos rectángulos para probarlo.

Se propone que sean los mismos alumnos quienes dibujen los triángulos rectángulos sobre hojas cuadriculadas para luego medirlos (Figura 30). Se conocía de antemano la posibilidad de que los estudiantes dibujaran triángulos en los que la medida de un lado corresponde a un número irracional, pero se asumió que la diferencia entre las medias de las áreas no sería suficiente para invalidar la relación de igualdad que encontraron previamente.

Figura 30. Triángulos dibujados por los estudiantes



a) b)

Todos los dibujos y medias hechas por los estudiantes les ofrecen información que muestra que al sumar los cuadrados de los catetos el resultado es diferente al cuadrado de la hipotenusa. Además, los estudiantes argumentan que aun si las diferencias son pequeñas, eso significa que no son iguales. Para poder continuar con la secuencia el profesor se ve obligado a explicar que las diferencias se deben a imprecisiones en las medidas.

"E1: En el lado izquierdo mide 20, el lado de abajo 11.8

P: A, lo está viendo así, muy bien, ¿y el tercero?

E1: 23.1

P: 23.1. ¿Cuánto mediría el área de cada uno? ¿el de abajo por ejemplo?

E1: 539.24

P: 500?, muy bien, ah, la suma mide eso.

E1: Sí la suma mide 539.24

P: Muy bien, ahora, ¿Cuál es el área del tercero'

E1: 533.61

P: En uno tenemos 539 y el otro 533. También estuvo bastante cerca a pesar de ser medidas tan grandes

E1: Por 6

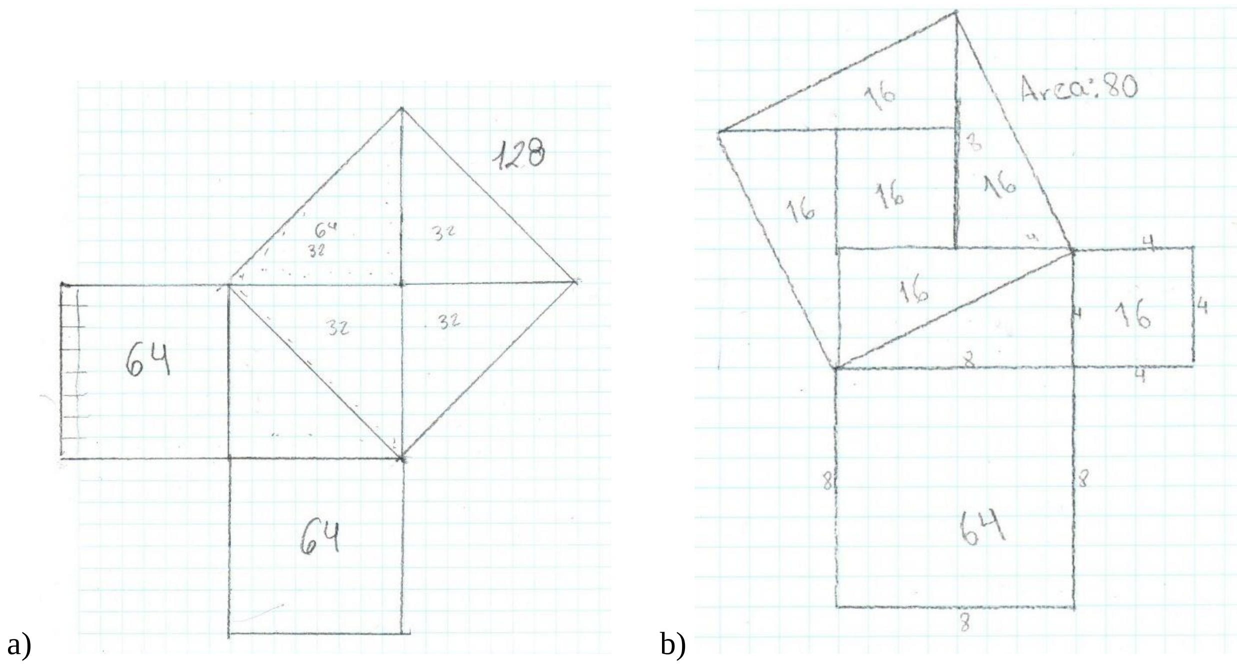
P: Aja, no estuvo tan lejos, estuvo muy cerca, ahora la discusión es ¿consideran que como la diferencia es tan pequeñita son iguales?

E1: Aunque sea una diferencia pequeña son diferentes

P: ¿Consideran eso?, ¿los cuatro? Bueno aquí voy a tener que hacer una intervención, lo que sucede es que esa diferencia tan pequeña es causada por los instrumentos de medición. Si yo tuviera un instrumento más preciso esa diferencia se iría reduciendo, es decir, lejos de hacerse más grande se iría reduciendo hasta ser igual 0. Por eso en los triángulos más grandes se notaba más la diferencia y en el caso de sus compañeras la diferencia era más chica."

Con la intención de solucionar este problema se había previsto solicitar a los alumnos trazar otros triángulos, esta vez dibujando los cuadrados sobre cada uno de sus lados para luego calcular sus áreas dividiendo el cuadrado que se levanta sobre el lado más grande en triángulos y cuadrados (Figura 31). Esto debería permitir a los estudiantes calcular de manera exacta el área de cada cuadrado y elimina los errores causados por medidas imprecisas.

Figura 31. Triángulos dibujados con cuadrados sobre sus lados.



En esta ocasión las sumas de los cuadrados de los catetos son iguales al cuadrado de la hipotenusa, por lo que el profesor vuelve a intentar realizar una conclusión de la actividad.

"P: a usted ¿le dio lo mismo?, ¿cuánto fue?

E4: la suma de los dos primeros fue 89 y el otro salió también 89

P: Muy bien, usted todavía no termina, pero bueno, vamos a dejarlo porque ya es hora de receso, y a usted, ¿le salió lo mismo? ¿cuánto le salió la suma de dos?

E1: 64

P: 64 es de 1, ¿Cuánto fue la suma?

E1: 128

P: Y ¿cuánto fue el área del tercer cuadrado?

E1: 128

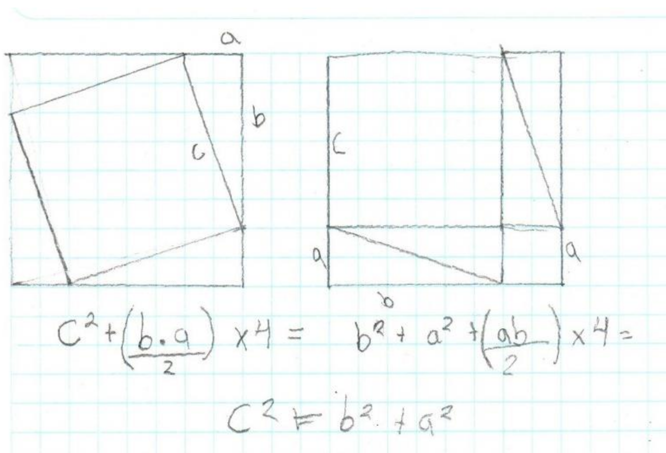
P: 128, muy bien, ¿comprueban su idea original? ¿siguen creyendo que pueden salir diferentes? O ¿creen que siempre que sea rectángulo siempre va a ser igual?

ES: Siempre va a ser igual

P: Muy bien dejen sus hojitas, van a salir a receso ya horita regresamos."

En esta ocasión los alumnos están de acuerdo en que la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa, por lo que el profesor continúa explicando que esta propiedad se conoce como "el teorema de Pitágoras", que el nombre de los lados de un triángulo rectángulo corresponde a "cateto" si es uno de los lados que forma el ángulo recto, o "hipotenusa", si es el lado que se opone. Explica también, que existen diferentes demostraciones de esta propiedad y los guía para realizar una demostración geométrica (Figura 32).

Figura 32. Demostración geométrica realizada por los estudiantes.



Aun cuando la secuencia podría terminar en este momento, es interesante conocer si los estudiantes son capaces de utilizar esta propiedad para calcular la media de un lado de un triángulo rectángulo, por lo que el profesor presenta un triángulo rectángulo con catetos de 3.9cm y 8cm, y solicita a los estudiantes que calculen la medida de la hipotenusa.

"P: este es el reto ya sabemos que la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa, el cuadrado de este nace el cuadrado de este me debería dar el cuadrado de este otro ¿cómo podrían calcular la medida del lado faltante utilizando esta propiedad ¿podemos hacerlo?, ¿cómo se les ocurre?, ¿cómo podemos hacerlo?

E1: podríamos completar el lado

P: ¿cómo es completar el lado?

E1: por ejemplo, sí lo tenemos así, podríamos unirlos para formar un rectángulo (mientras une 2 escuadras)

P: un cuadrado

E1: bueno un rectángulo un cuadrado lo que sea"

Los estudiantes aún no son capaces de recurrir al teorema de Pitágoras para resolver un problema. Para guiarlos el profesor les pregunta por las áreas de los cuadrados de los catetos para que calculen el área del cuadrado de la hipotenusa.

P: sabemos entonces que el cuadrado de este es 64 y de este 15.21, ¿sabemos cuánto va a medir el área de este cuadrado? (señalando la hipotenusa)

E1: lo mismo

P: ¿cuánto sería?

E2: los juntamos ¿no?

E1: sería sumándolas

P: muy bien háganlo, ¿cuánto da?

E1: 79.21

P: el área de este cuadrado, ¿con eso podemos calcular la medida de este lado?

…

E1: da 16, sería entre 8

P: ¿por qué entre 8?

E1: porque si se multiplica por sí mismo se tienen que dividir entre sí mismo

…

P: Entonces buscamos un número que multiplicado por sí mismo nos de esta área que este 79.21, ¿Sí o no?, ¿qué operación se utiliza para eso? Piénselo, es algo que se estudia en secundaria, ¿Con qué operación buscamos un número que multiplicado por sí mismo nos da un resultado?

E2: raíz cuadrada

P: con raíz cuadrada, entonces buscamos la raíz cuadrada de 79. 21, ¿lo pueden hacer en su calculadora?

E4: 89

P: 89, raíz cuadrada de 79.21 ¿89?

E2: Es 8.9"

Los estudiantes logran establecer, con ayuda, una estrategia para calcular la longitud de la hipotenusa, en la que suman los cuadrados de los catetos para establecer el área del cuadrado de la hipotenusa y después calculan la raíza cuadrada para determinar la longitud del lado. Para comprobar que son capaces de hacerlo por su cuenta el profesor presenta otro triángulo rectángulo, cuya hipotenusa mide 8.5 cm y un cateto mide 3.6 cm, ahora deben calcular la medida de un cateto.

P: muy bien, antes, ustedes ¿ya terminaron? es que tenía otro procedimiento, bueno, ¿ahora que hicieron?

E1: Igual multiplicamos el cateto de 3.6 por 3.6 da 12.36 y el de arriba 8.5 por 8.5, 72.25, es lo mismo, pero ahora restamos, salió 59.29, ya a ese le sacamos raíz, y fue 7.7

P: muy bien, entonces este cateto mide 7.7, ¿porque lo restaron?

E4: porque para sacar la hipotenusa sumamos los 2 catetos, como ya tenemos la hipotenusa le restamos para sacar el otro cateto

En esta ocasión los estudiantes logran establecer una estrategia completa por su cuenta, además son capaces de justificar el motivo por el cual esta debe ser distinta de la anterior.

Considerando los resultados de esta primera intervención fue necesario realiza dos ajuste para la segunda intervención: El primero radica en cambiar la actividad en la que los alumnos dibujan sus propios triángulos rectángulos por una donde se les proporcionan triángulos impresos para asegurar que las medias puedan ser precisas; el segundo surge de observar la facilidad con la que logran establecer una estrategia para calcular un lado de un triángulo rectángulo y pretende incorporar un problema verbal que se puede resolver recurriendo al teorema de Pitágoras para observar si también son capaces de resolver un problema más complicado (Anexo 13).

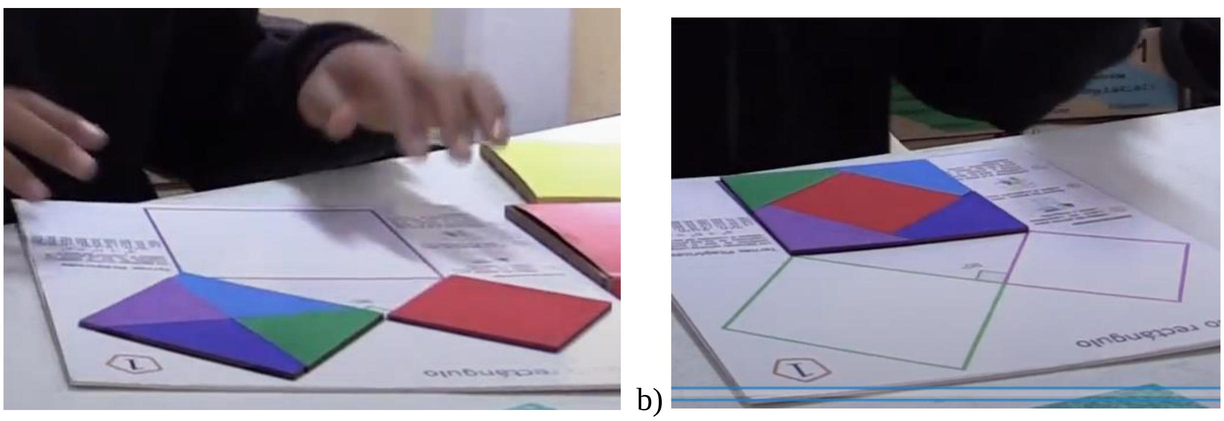
4.6 Análisis de la segunda intervención

Para la segunda intervención se seleccionó a un grupo de voluntarios de alumnos que cursaban el segundo año de secundaria con quienes se realizó una secuencia previa para asegurar que pudieran realizar las actividades durante la intervención. Fue necesario grabar el experimento para su análisis y transcripción (Anexo 15). Se repite la misma disposición que en la intervención anterior, de dos mesas con los materiales y dos equipos, uno de niños y otro de niñas (Figura 33).

Figura 33. Ambiente de la segunda intervención.

El profesor vuelve a explicar las reglas del juego que consiste en armar los rompecabezas, primero sobre los cuadrados verde y magenta en la plantilla 1 y luego sobre el cuadrado azul. Se espera que los estudiantes también sean capaces de determinar que al sumar las áreas de los primeros dos el resultado es igual al área del tercer cuadrado. Ambos equipos logran ir armando rompecabezas (Figura 34). Cada vez que terminan el profesor les pregunta por la relación entre las áreas de los cuadrados y los alumnos determinan que la suma de los dos primeros es igual al tercero.

Figura 34. Rompecabezas armados en la plantilla 1 en la segunda intervención.



a) b)

Una vez concluido el tiempo se procedió a las conclusiones.

"P: Ahora, la pregunta que viene es cuando ustedes formaron los cuadrados, bueno, el área del cuadrado magenta y el área del cuadrado verde y la utilizaron para formar el área del cuadrado azul ¿cómo fue el cuadrado azul? ¿de la misma área que los otros dos? O sea, ¿al juntarlos se vio la misma área? ¿fue más grande o más chiquito?

E1: Fue más grande ¿no? Porque al juntarlo este se supone que se ve un área más pequeña y en esta se ve un área un poquito más grande que ese, entonces, al juntarlos se hace un área más grande

P: Muy bien, y ¿la suma era igual al azul? ¿mayor o menor? O sea, al juntar las dos áreas, la magenta y la verde en el cuadrado azul ¿el cuadrado azul tuvo la misma área que los otros dos juntos? ¿más o menos?

E1: Son de la misma"

Logran establecer la relación de igualdad por lo que es posible continuar con la actividad. También se puede observar que, igual que en el experimento anterior, el equipo de mujeres se organizó de manera más eficiente que el de hombres durante el juego. También, ambos equipos notaron que los rompecabezas vienen armados e intentaron utilizar esto para ganar el juego.

La siguiente actividad corresponde a armar los rompecabezas sobre las plantillas 2 y 3, se espera que determinen que la suma de las áreas de los cuadrados verde y magenta es menor al cuadrado azul en la plantilla 2 y mayor en la plantilla 3. Ambos equipos logran armar sus rompecabezas (Figura 35) y se procede con las conclusiones.

Figura 35. Rompecabezas armados sobre las plantillas 2 y 3.

a)  b) 

“P: Ahora vamos a hacer lo siguiente, vamos a hacer la comparación entre las áreas de los cuadrados ¿está bien? ¿en qué casos el área del cuadrado es igual a la suma de las áreas de los cuadrados verde y magenta? ¿En qué casos?

E1: en la uno

P: En la plantilla uno ¿Qué características tenía la plantilla uno? O sea ¿qué cambia entre una plantilla y otra? ¿Qué tipo de triángulo era el triángulo de la plantilla uno?

E1 y e4: Triángulo rectángulo

P: Un triángulo rectángulo ¿verdad? Entonces cuando este ángulo fue de 90° al unir este cuadrado con este da este ¿sí? ¿En qué casos el cuadrado azul fue mayor?

E1: En el tres

P: ¿En el 3? ¿El cuadrado azul fue mayor en el 3?

E4: No, en el 2

E3: Si, fue en el 2

P: ¿En el 2? ¿por qué en el 2? ¿En cuál? a ver vuelvo a repetir la pregunta. ¿En qué casos el área del cuadrado azul fue mayor a la suma de estos 2?

E1 y E2: En el 2

P: En el 2. A ver ¿cómo saben que era mayor?

E1 y E2: Porque sobraban espacios”

Nuevamente, los equipos logran establecer las relaciones entre las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de los triángulos dependiendo de si es rectángulos, obtusángulo o acutángulo. Además, recurren a sus observaciones como un argumento para validar sus afirmaciones. En esta ocasión incorporan un poco más el lenguaje matemático, sin embargo, aún recurren a la numeración de las plantillas en vez del nombre de los triángulos.

Igual que en la intervención anterior, se decide crear la necesidad de que los estudiantes generalicen la relación de igualdad entre las áreas de los cuadrados para todo triángulo rectángulo, por lo que se les pregunta por su opinión respecto a si se cumpliría en todo triángulo rectángulo.

“P: De 90 grados, es un triángulo rectángulo. Muy bien, ahora la pregunta es ¿ustedes creen que esa relación de igualdad sucede en todos los triángulos rectángulos o sólo en ese?

E3: En todos

P: ¿En todos? ¿o solo en ese? Porque ya vimos, si fueron de 100 grados no funciona, si es de 80 grados no funciona. Cuando fue de 90 si funcionó. Ahora, ¿siempre que el ángulo sea de 90 grados va a funcionar? O ¿solamente en ese triángulo en particular?

Todos: Siempre que es de 90

P: ¿Sólo en ese o siempre?

E4: No siempre…

P: Muy bien, justamente todavía no sabemos, podría ser que siempre o sólo en ese. Bueno, ahorita vamos a guardar, denme un segundito. Ahora, la pregunta es ¿Cómo podríamos comprobar si siempre sucede o solamente en ese caso en particular?”

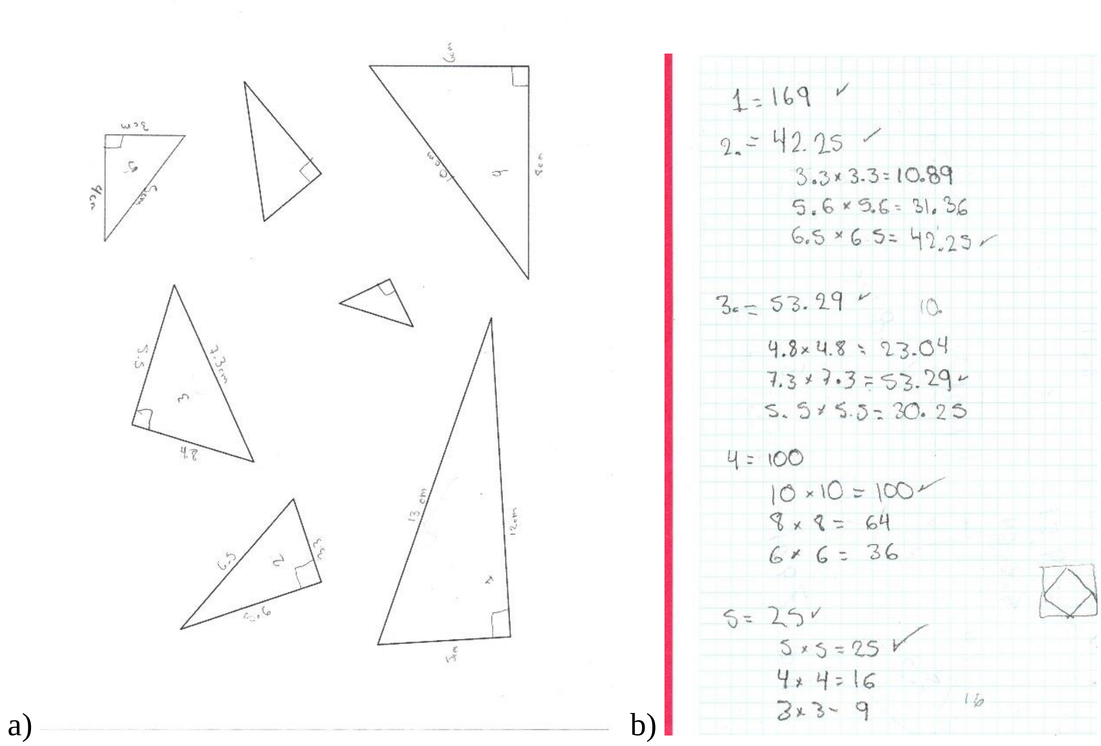
Existe la duda, ahora se procede a establecer una estrategia para comprobar sus ideas. Para hacerlo se les muestran diferentes triángulos rectángulos y se les pregunta como comprobarían si en esos también se cumple la relación de igualdad o no.

“P: Tampoco, muy bien entonces la pregunta es ¿cómo podrían comprobar si funciona o no? Porque dicen bueno, este es un ejemplo particular, porque quiero que exploremos si funciona en este caso, en la plantilla 1 o si funciona en cualquier triángulo rectángulo

E1: Primero se supone que, para ver, primero tenemos que ver los dos cuadros de hasta arriba, entonces para sacar el área total, primero tendrías que sacar el área total de éste, el área de estos y ver si al sumar estas dos áreas, te da esto.”

Se plantea la idea de calcular las áreas de los cuadrados en diferentes triángulos, que es una de las estrategias que se esperaba que plantearan. Para evitar que suceda un error causado por la imprecisión de las medidas se recurre a una hoja con triángulos rectángulos impresos con lados proporcionales a diferentes ternas pitagóricas, esto debería permitir que los estudiantes calculen las áreas de los cuadrados con precisión. Se explica a los estudiantes que deberán calcular las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados para después compararlas (Figura 36).

Figura 36. Cálculo de áreas de cuadrados construidos sobre los lados de diferentes triángulos rectángulos. a) triángulos rectángulos. b) Operaciones.



"P: antes de continuar ¿cómo supieron cuáles tenían que sumar para conseguir el tercero? A ver, primero, ¿en todos los casos les salió? ¿en todos los casos la suma de dos cuadrados fue igual al tercero?

E4: Si

P: ¿en todos los casos?

E4: si

P: ¿cómo supieron cuáles debían sumar para conseguir el tercer lado?

E1: Sumar los menores para saber si el área alcanza al mayor

P: Muy bien, siempre sumaron los lados menores, los cuadrados de los lados menores para ver si les daba el cuadrado del lado más grande. A ver ¿en cada caso ¿dónde se encontraba el lado más grande?

E1: El más grande en…

P: Bueno ¿Dónde se encontraba el lado más pequeño?

E1: El lado más pequeño era la base y la altura

P: La base y la altura, por llamarlos de alguna forma ¿no? Eran los lados que formaban

E1: áreas más pequeñas

P: Áreas más pequeñas por llamarlos de alguna forma. bueno y el lado más grande era el otro ¿verdad? el abarcaba… ¿cómo era el lado más grande? es que no les puedo decir, perdón. O sea ¿qué características tenía el lado más grande en cada caso?

E1: un ángulo agudo

P: muy bien era que no formaban un ángulo recto ¿verdad? ese lado formaba ángulos agudos y los otros 2 que eran más pequeños eran los que formaban

E1: el ángulo recto

P: el ángulo recto ¿sí queda claro?

E1: sí

P: Muy bien, entonces así es como podría determinarlo: Ahora ¿Comprobaron su idea original? ¿comprobamos que siempre sucede? O ¿sólo en algunos casos?

E1 y E4: que siempre sucede"

En esta ocasión los estudiantes logran comprobar que la relación de igualdad se cumple en todos los triángulos, además logran explicar el procedimiento que utilizaron para comprobarlo. Nuevamente el profesor explica que esta propiedad se conoce como "el teorema de Pitágoras", que el nombre de los lados de un triángulo rectángulo corresponde a "cateto" si es uno de los lados que forma el ángulo recto, o "hipotenusa", si es el lado que se opone. Explica también, que existen diferentes demostraciones de esta propiedad y los guía para realizar una demostración geométrica.

Al terminar la explicación del teorema y para determinar si los estudiantes son capaces de recurrir al teorema de Pitágoras para calcular la longitud de un lado de un triángulo rectángulo, el profesor plantea un problema donde deben calcular la hipotenusa de un triángulo rectángulo con catetos de longitud 8cm y 3.5cm.

“P: ¿Cómo calcularían la medida de este lado? Esta es la parte interesante ¿cómo calcularían la medida de este lado?

E1: sacando el cuadrado de los catetos

P: Pondrían el cuadrado de los catetos ¿y luego?

E1: luego nos sumaríamos para sacar el ángulo…

P: Bien, lo sumarían y obtendrían

E1: el cuadrado de la hipotenusa

P: El cuadrado de la hipotenusa ¿y luego para conseguir el lado?

E1: lo dividimos entre 2

P: ¿porque entre 2?

E1: Porque, ehmm, no, sería entre 4.

P: ¿Porque entre cuatro?

E1: Porque cuatro sería la suma de sus cuatro lados ¿no?

P: A ver, les parece si lo intentan y ahorita me explican cómo lo hicieron. Es una buena forma, inténtenlo, por favor.

…

E1: Sería primero el resultado de la suma de los lados de estos catetos

P: Sumaste los cuadrados de los catetos

E1: Entonces lo sumé y esto me dio 79.21

P: Muy bien

E1: Entonces busqué un número que multiplicado por sí mismo, me diera más o menos el mismo resultado, entonces 8 por 8 da 64. Entonces, esos 64 se los resté a 79.21 que me dio 15.21 y a esos les busqué la mitad, entonces si teníamos 8 que era esto, entonces a esto le busqué la mitad que *me había dado 7. Entonces 8.7 por 8.7 no alcanzaba, entonces le sumé 1, 8.8 por 8.8 tampoco alcanzaba, entonces puse 8.9 por 8.9 lo que me dio 79.21."*

En esta ocasión los estudiantes son capaces de plantear una estrategia para calcular el valor del lado faltante recurriendo al teorema de Pitágoras, pero tienen problemas para incorporar el concepto de raíz cuadrada en su estrategia por lo que el profesor lo sugiere. La secuencia continúa solicitando a los estudiantes que calculen la longitud de un cateto en un triángulo rectángulo con una hipotenusa de 8.5cm de longitud y un cateto de 3.6 cm de longitud.

"P: Muy bien, bueno, vamos a hacer el siguiente… ahora este ¿Cuánto mide el tercer lado? Es diferente ¿verdad? Ahora mide 3.6. ¿Qué lado nos está pidiendo ahora?

E1: El cateto.

P: Muy bien, inténtenlo

E1: 7.7

P: Les ganaron, háganlo de todos modos. Muy bien explíquenme cómo le hicieron

E1: Primero sumamos el cuadrado de… después sacamos el área de la hipotenusa que da 72.25 y a esto le restamos 12.96 quedaría 59.29 y a 59.29 sacamos la raíz cuadrada de 7.7

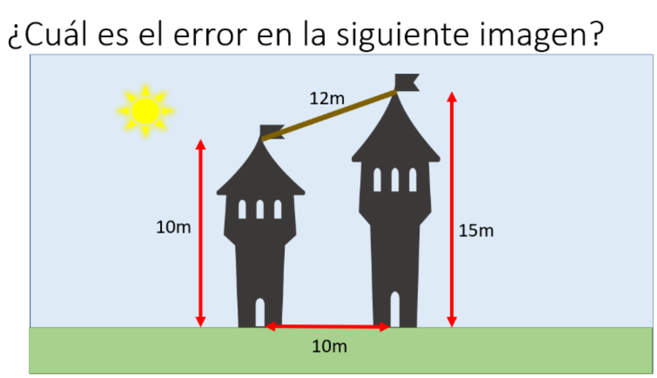
P: ¿por qué lo restaron?

E1: Porque para sacar el área de… digamos que ya tenemos esto, entonces esto más esto, tiene que dar esto"

Los estudiantes son capaces de resolver el problema con relativa facilidad, además explican su razonamiento recurriendo al teorema de Pitágoras. Pero aún tienen problemas para incorporar el lenguaje matemático en sus justificaciones, por lo que recurren a señalar las ilustraciones en lugar de llamar a cada lado por su nombre.

El profesor recapitula los conceptos que se han estudiado, y para concluir la secuencia, y con base en los resultados de la intervención anterior, se implementa un problema que consiste en observar el error en una imagen (Figura 37).

Figura 37. Problema de las dos torres.



El error consiste en que se puede calcular la distancia entre las dos cúspides de las torres se puede calcular mediante el teorema de Pitágoras en 11.18m, mientras que la imagen señala una separación de 12m. El problema incorpora un contexto poco familiar, el triángulo rectángulo no se encuentra de manera explícita en la ilustración, además las medidas de los catetos deben calcularse a partir de información adicional planteada en la imagen, por lo que el problema constituye un reto difícil de resolver para los estudiantes.

P: Es el más difícil, justo, justo. ¿Cuál es el error en esta imagen?

E1: Que no hay hipotesuma

P: Hipotenusa, ¿aquí cuál sería la hipotenusa? ¿aquí hay un triángulo rectángulo? Si hay ¿Dónde estaría?

Todos: Si hay

P: ¿Si hay? ¿Dónde estaría?

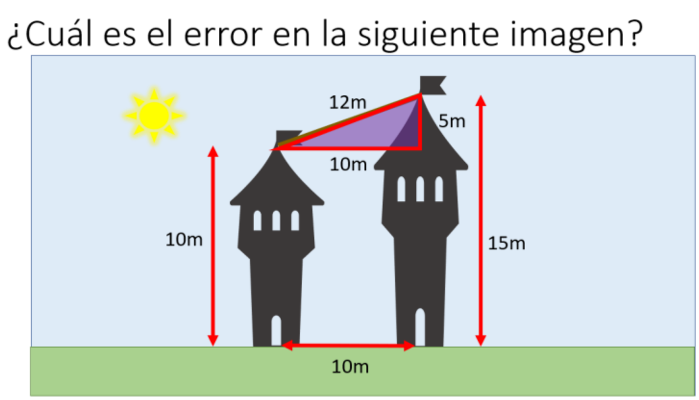
E2: En medio de…

P: Podrían señalarlo tal vez ¿Ustedes ya no encontraron? ¿no?

E1: ¿Hay dos ángulos rectos? ¿no?

Los estudiantes no parecen ser capaces de establecer una estrategia que los conduzca a la respuesta, por lo que el profesor agrega una imagen auxiliar a la ilustración (Figura 38).

Figura 38. Problema de las dos torres con triángulo rectángulo.



"P: Les voy a dar un rato más ¿cuál es el error aquí?

E4: Acá si multiplicamos 12 por 12 serían 144 y 10 por 10 serían 100 y 5 por 5 25 y se supone que los lados de 10 por 10 y 5 por 5 se suman y dan el resultado de arriba, o sea 12 por 12, 144, pero son 125 sumando los dos lados, nos sobran 19.

P: Muy bien, exacto. Esta figura no puede existir porque este cuadrado tiene 25 y este 100, para que existiera el cuadrado que está aquí ¿cuánto debería medir?

E4: 144

P: Es lo que mide ¿pero ¿cuánto debería medir?

E4: 125''

Los estudiantes logran establecer el error mediante el teorema de Pitágoras, pero fue necesario hacer explicito como debían utilizarlo, para que después ellos realizarán los cálculos que les permite determinar que la medida de la cuerda que une ambas torres no debería medir 12m.

Las observaciones finales se realizan en el capítulo 5.

Capítulo 5.

Conclusiones

El uso de demostraciones visuales del teorema de Pitágoras como recurso lúdico favorece la comprensión de los alumnos de secundaria respecto a la relación que existe entre las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de triángulos rectángulos (planteada en el teorema de Pitágoras), ya que ofrece una representación con la cual los alumnos pueden interactuar. Las demostraciones visuales del teorema simplifican el concepto matemático y presentarlas mediante una actividad lúdica permite que sean los alumnos quienes interactúen de manera directa con la propiedad matemática, incluso si no cuentan con el conocimiento necesario para entender una demostración formal.

Este juego también favorece el desarrollo de las capacidades de los estudiantes para justificación sus razonamientos y procedimientos, ya que pueden recurrir a sus observaciones sobre el material didáctico como un argumento dentro su discurso. Presentar las demostraciones visuales como un juego permite devolver a los estudiantes la responsabilidad de establecer las relaciones de igualdad (o tricotómicas) entre las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de diferentes triángulos, lo que supone que los estudiantes consideren las conclusiones como propias.

Respecto a qué beneficios ofrece utilizar demostraciones visuales como un recurso lúdico para la enseñanza del teorema de Pitágoras en los aprendizajes de los estudiantes se observa, en primer lugar, que los alumnos pueden recurrir a observaciones simples y un lenguaje familiar para entender el teorema. Esto sirve para dotar de significado a las justificaciones generales, algebraicas y al lenguaje matemático relacionado con el teorema de Pitágoras.

Otro beneficio es la posibilidad de que los alumnos planteen estrategias propias para validar una aseveración matemática. Si bien, los profesores podrían implementar los juegos con rompecabezas pitagóricos como una forma de validación externa del teorema, es aún más interesante permitir que los estudiantes se cuestiones sobre la veracidad de la premisa y que establezcan estrategias propias para confirmarla o refutarla. Es poco probable que los estudiantes ofrezcan de manera espontánea una demostración formal como alternativa a la demostración visual, en su lugar se debe esperarse una argumentación que recurra a acumular ejemplos de casos concretos en sus justificaciones; esto también contribuye a desarrollar su creatividad y habilidad discursiva.

También permite que los alumnos experimenten el estudio de las matemáticas de una forma diferente a la habitual, esto genera disposición y entusiasmo por realizar las actividades (durante y después del juego), lo que se puede traducir en motivación para aprender. No se pretende incorporar juegos durante toda la secuencia, precisamente porque lo que hace especial implementar un juego es que no siempre pueden realizarlo, pero es importante reconocer que el uso de juegos no sólo propicia la interacción entre personas, también puede ayudar a mejorar la percepción que los estudiantes tienen de las matemáticas y de ellos mismos como usuarios de estas.

Respecto a qué posibles dificultades en el aprendizaje de los alumnos debe considerar un profesor de secundaria al implementar demostraciones visuales del teorema de Pitágoras como recurso lúdico, se pudo observar que, aunque los estudiantes resuelvan los rompecabezas y establezcan relaciones de igualdad (o tricotomía) entre las áreas de los cuadrados, el profesor no debe asumir que los estudiantes comprendan y dominen el teorema de Pitágoras. Aunque el juego facilita la comprensión del teorema, el profesor debe guiar a los estudiantes para que logren establecer una comprensión real del teorema, asumir que el juego es garantía de aprendizaje corresponde a caer en el ya mencionado efecto Dienes.

Otro posible problema para considerar es la selección inadecuada de estrategias de validación, como se observó durante la primera intervención, en la que se permitió que los estudiantes dibujasen sus propios triángulos rectángulos para verificar el teorema de Pitágoras. Esto causo imprecisiones que contradecían al teorema, por lo que fue necesario implementar una actividad diferente. Este error podría llegar a constituir un obstáculo que después no podría ser superado por los estudiantes; como alternativa se sugiere recurrir a ternas pitagóricas, proporcionar triángulos ya dibujados, pedirles que tracen triángulos específicos que sean más fáciles de medir, dibujar los cuadrados sobre los lados de triángulos rectángulos para luego calcular sus áreas, en el último de los casos, recurrir a una validación por parte del profesor.

También cabe resaltar que los estudiantes tuvieron dificultades para incorporar el lenguaje matemático a sus argumentos durante el juego, y que lo hicieron sólo cuando el profesor lo solicitaba. Es recomendable que los profesores se mantengan atentos a la forma en que los estudiantes incorporan las expresiones matemáticas que van necesitando con la intención de que puedan corregirlos y guiarlos en el uso adecuado del lenguaje matemático, ya que, incluso si los materiales utilizan el lenguaje matemático de manera correcta, esto no implica que los estudiantes sen capaces de entenderlos y utilizarlos con fluides en su discurso.

Respecto a las características con las que debe contar un material didáctico para favorecer el estudio del teorema de Pitágoras a partir de sus demostraciones visuales, se encontró que estas dependerán de diferentes variables, como son los gustos de los estudiantes, sus conocimientos previos, el contexto de la escuela, los recursos materiales de los que se dispone o, la experiencia del profesor, entre otros. Es posible que incluso existan variables que no pudieron ser identificadas durante esta investigación. De esta forma, no es posible determinar cuáles son las características que establecen que un material es idóneo para cualquier tipo de situación, y que la pertinencia de los materiales es algo que solamente el profesor encargado de la enseñanza puede determinar.

Sin embargo, se puede determinar algunos elementos que pueden ayudar a que un material sea seleccionado por un profesor para ser implementado como un recurso lúdico. Estos son, que sean divertidos y llamativos, que permitan organizar al grupo rápidamente, que ofrezcan información relevante relacionada con el tema, que sean resistentes, fáciles de transportar o de fácil acceso para ellos y sus estudiantes.

Incluso si un material está bien diseñado, esto no garantiza que sea pertinente para cualquier situación, por lo que es importante que los profesores conozcan diferentes materiales y actividades, de forma que puedan adaptarse a las necesidades de sus grupos. La actividad y material didáctico diseñado como parte de esta investigación puede ser parte de un amplio repertorio que este a disposición de los profesores.

Respecto a cuáles son las estrategias para enseñar el teorema de Pitágoras propuestas en libros de texto y por profesores de nivel secundaria, encontramos que estas se dividen en dos categorías principales: las diseñadas para favorecer el entendimiento del teorema de Pitágoras y; las diseñadas para desarrollar la capacidad de resolver problemas recurriendo al teorema de Pitágoras.

Las primeras pueden ser demostraciones visuales o rompecabezas pitagóricos, cuestionarios que ayuden analizar el teorema, tablas de comparación de las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de triángulos, entre otros. Mientras que los segundos corresponden a problemas de tipo geométrico o problemas contextualizados que, regularmente, intentan abarcar una gama lo más diversa posible de situaciones en las que se pueda recurrir al teorema de Pitágoras para resolverlas. Es interesante como la variedad de problemas contextualizados dan lugar a problemas prácticos, como calcular la longitud de una rampa, otros absolutamente interesantes, como calcular la distancia al horizonte y algunos otros que simplemente no tienen sentido.

Cabe señalar que la investigación, en términos generales, logro completarse ya que se cumplieron el objetivo de implementar una actividad lúdica que permite comprender el teorema de Pitágoras, así como los objetivos particulares que corresponden a:

1. Identificar las estrategias para enseñar el teorema de Pitágoras propuestas en libros de texto y por profesores de nivel secundaria. Con base en esta información se diseño una secuencia didáctica para enseñar el teorema de Pitágoras, además de formar un registro al que puedan recurrir profesores y autores de libros de texto para comparar con los futuros planes y programas.

2. Diseñar, con base en la opinión de alumnos y profesores de secundaria, una actividad lúdica para explorar el teorema de Pitágoras. Incorporar la opinión de profesores y alumnos permite suponer que la actividad tiene posibilidades de ser replicada en grupos reales con resultados positivos, por lo que es posible iniciar una campaña de difusión de la actividad y los materiales didácticos.

3. Implementar una actividad lúdica, en grupos focales de alumnos de secundaria, que permita explorar el teorema de Pitágoras para examinar los argumentos que ofrecen los alumnos. Esto permitió observar que los estudiantes son capaces de establecer estrategias para justificar el teorema a partir de ella, y es posible suponer que este resultado se puede replicar en grupos reales.

4. Analizar las dificultades que presentan los alumnos de secundaria para demostrar el teorema de Pitágoras. Esto permite elaborar una serie de consideraciones que los profesores que den incorporar esta actividad de forma que puedan decidir si es pertinente para sus alumnos o no.

No obstante, aún existen posibles investigaciones que pueden realizarse que pueden vincularse con la presente. Por mencionar algunos, este estudio podría vincularse con investigaciones destinadas a analizar problemas geométricos o verbales empleados en la enseñanza del teorema de Pitágoras, como pueden ser análisis de problemas auténticos. Otro tipo de investigaciones podrían ser aquellas que analicen la habilidad de los profesores para seleccionar actividades. También podría servir para continuar con investigaciones destinadas a diseñar material didáctico o actividades lúdicas que recurran a rompecabezas para la enseñanza de las matemáticas.

Otras investigaciones podrían ser aquellas que utilicen la secuencia didáctica, la actividad lúdica o el material didáctico que se diseñó en esta investigación. La actividad podría implementarse en grupos grandes de secundaria para realizar un estudio de tipo cuantitativo o; con estudiantes de bachiller que tengan dificultades para entender el teorema de Pitágoras, o que confundan la fórmula del área de un triángulo con el teorema de Pitágoras para luego analizar si existe mejoras en su comprensión del tema. También se podría implementar con la intención de comprender la ley de cosenos en bachiller.

También podrían incorporarse variantes de la secuencia diseñada, por ejemplo, implementar primero actividades de formalización del teorema de Pitágoras, luego problemas y finalmente actividades para explorar las áreas de cuadrados construidos sobre los lados de triángulos rectángulos, u otras variantes en diferentes grupos con la intención de realizar un análisis cuantitativo para determinar la secuencia más adecuada. También es posible continuar con el análisis del orden de los problemas, es decir, si es más conveniente incorporar primero problemas verbales, problemas geométricos o ir alternando entre unos y otros.

El juego también puede implementarse como parte de una estrategia de ABJ destinada al análisis del desarrollo de habilidades sociales en alumnos de secundaría a partir de juegos, ya sea en la asignatura de matemáticas o en diferentes asignaturas. Sería posible establecer diferentes grupos en los que se implementen juegos durante un periodo prolongado de tiempo para comparar con otro grupo control donde no se implementen juegos para comparar si efectivamente se han desarrollado más habilidades sociales.

Finalmente se pueden considerar las investigaciones destinadas a analizar los modelos mentales que los alumnos forman respecto al teorema de Pitágoras o el discurso que utilizan los estudiantes para justificar sus procedimientos. Estas investigaciones podrían corresponder a análisis comparativos entre diferencias estrategias, en las que el profesor puede implementar el juego y solicitar a los estudiantes que validen el teorema, implementar el juego y utilizarlo como una validación externa, utilizar una demostración visual (no como juego) y solicitar a los estudiantes que validen el teorema o, utilizar la demostración visual (no como juego) y utilizarla como una validación externa.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Artigue, M. (2014). Didactic Engineering in Mathematics Education. In *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp 159–162) Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8

Brousseau, G. (2002). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Mathematics Education Library. Kluwer Academic Publishers.

Carbajal, A.; Muños, J. (2019). *Demostraciones Visuales en Matemáticas, Ver para creer*. Miradas matemáticas. Catarata.

Chevallard, Y. (2005). *La trasposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado*. Aique. ISBN 950-701-380-6

Conde-Carmona, R. J., y Fontalvo-Meléndez, A. A. (2019). Didáctica del teorema de Pitágoras mediada por las TIC: el caso de una clase de Matemáticas. *Trilogía Ciencia Tecnología Sociedad*, *11*(21), [255–281]. https://doi.org/10.22430/21457778.1187

Corbal, Patricio (2008). *Contextualizando el juego*. IX Congreso Argentino de Antropología Social. Facultad de Humanidades y Ciencias Sociales - Universidad Nacional de Misiones, Posadas.

D´Amore, B. (2013a). Capítulo 1. Introducción a la didáctica de la matemática. *Didáctica de la matemática*, (pp 33-72) Nueva Editorial Iztaccihuatl.

D´Amore, B. (2013b). Capítulo 11. Intuición y demostración. *Didáctica de la matemática*, (pp 333-365) Nueva Editorial Iztaccihuatl.

DOF, (2019) DECRETO por el que se expide la Ley General de Educación y se abroga la Ley General de la Infraestructura Física Educativa.

DOF, (2020) ACUERDO número 12/06/20 por el que se establecen diversas disposiciones para evaluar el ciclo escolar 2019-2020 y cumplir con los planes y programas de estudio de Educación Básica (preescolar, primaria y secundaria), Normal y demás para la formación de maestros de Educación Básica aplicables a toda la República, al igual que aquellos planes y programas de estudio del tipo Medio Superior que la Secretaría de Educación Pública haya emitido, en beneficio de los educandos.

Echavarría, C.; Bermúdez, C. (2011). El teorema de Pitágoras en la escuela. En García, Gloria (Ed.), Memorias del 12° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa (pp. 560-564). Armenia: Gaia.

Fan, L. (2013). *Textbook research as scientific research: Towards a common ground on issues and methods of research on mathematics textbooks*. ZDM Mathematics Education, 45(5), 765–777.

Fraenkel, J. R., Wallen, N. E., & Hyun, H. H. (2012). “Content Analysis” in *How to design and evaluate research In education* (8th ed.). Mc Graw HIll.

García, P. (2021). *Educación en pandemia: los riesgos de las clases a distancia*, Instituto Mexicano para la Competitividad A. C.

Garciadiego, A. (2002). El teorema de Pitágoras como paradigma de la enseñanza de la geometría plana: simplificar no siempre simplifica. *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática*, *5*, [251–270] http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33505302

Godino, J. D., Batanero, C., Contreras, Á., Estepa, A., Lacasta, E., & Wilhelmi, M. (2013). La ingeniería didáctica como investigación basada en el diseño. Versión ampliada en español de la comunicación presentada en el CERME, 8.

Grisales, J., Montes, D., Torres, I., (2009). *El teorema de Pitágoras como un aprendizaje significativo*. [Licenciatura] Universidad de Antioquia. En http://hdl.handle.net/123456789/936

Haldane, P. (2011). *El Teorema de Pitágoras construcción de Algunos Recursos Didácticos*. [Licenciatura] Universidad Nacional de Colombia.

Hernández, C. (2019). *Teorema de Pitágoras, pretexto y contexto para la enseñanza de la Geometría*. [Maestría]. Universidad Nacional de Colombia. En https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/76854

Hernández-Sampieri, R. et al. (2010) Capítulo 17. Los métodos mixtos en Metodología de la investigación, (pp. 544-599). McGraw Hill

Herreros, D., & Sanz, M. T. (2020). Estadística en educación primaria a través del Aprendizaje Basado en Juegos. *Matemáticas, Educación y Sociedad*, *3*(1), 33-47

Kapp, K. (2012). *The Gamification of Learning and Instruction: game Based Methods and Strategies for Training and Education*. ASTD Pfiefer.

Kieran, C. et al. (2015) Chapter 2. Frameworks and Principles for Task Design, in Task Design. *Mathematics Education an ICMI study 22*, (pp 19-81) Springer, ISSN 2215-1745

Kolpas, S. (2018). *The Pythagorean Theorem, Eight Classic Proofs.* Glendale Community College. Pearson.

Loomis, E. (1940). *The Pythagorean Proposition.* Classics in Mathematics Education. The National Council of Teachers of Mathematics.

López, Y., Botero, L., Valencia, A., Rivera, L., y García, M., (2012) *Proyecto de aula: la argumentación en el aprendizaje del teorema de Pitágoras*. [Licenciatura]. Universidad de Antioquia. En http://hdl.handle.net/10495/22813

Maor. E. (2007). *The Pythagorean theorem a 4,000-year history*. Princeton University.

Nelsen, R. B. (1993). *Proofs without words, Exercises in visual thinking.* Classroom resources materials/number 1. The mathematical association of America.

OPS, (2020). *Consideraciones sobre medidas de distanciamiento social y medidas relacionadas con los viajes en el contexto de la respuesta a la pandemia de covid-19*, https://iris.paho.org/handle/10665.2/52448

Psicoactiva, (2022). *Diccionario de términos psicológicos*, consultado el 21 de abril del 2022 en https://www.psicoactiva.com/biblioteca-de-psicologia/diccionario-de-psicologia/#letra_p

Rosas, J. G., Minnelli, E., Trejo, O., & Rodríguez Muñoz, C. (2018). Concepciones de los profesores al usar material concreto y herramientas tecnológicas para explicar el teorema de Pitágoras. In R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 1439–1444). Comité Latinoamericano de Matemática educativa.

Seguí, V. M. (2005). Razonamiento visual y matemáticas. *Sigma: revista de matemáticas,* ISSN 1131-7787, 27, (pp 109-116) https://www.researchgate.net/publication/28258475

SEP (2011) *Programas de estudio 2011. Guía para el Maestro. Educación Básica Secundaria. Matemáticas*.

SEP, (2017). *Aprendizajes clave para la educación integral. Matemáticas. Educación secundaria. Plan y programas de estudio, orientaciones didácticas y sugerencias de evaluación.*

SEP (2021). *Estrategia Nacional para el Regreso Seguro a las Escuelas de Educación Básica Versión 2.0*

Swan, M. (2014). Design Research in Mathematics Education. In *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 148–152). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8

Tamayo, C.A. (2012). *El juego: un pretexto para el aprendizaje de las matemáticas.* Instituto Salesiano Pedro Justo Berrío.

Torres, A., Romero, L. M. y Salgado, J.P. (2019). *Juegos y sociedad: desde la interacción a la inmersión para el cambio social*. McGraw Hill.

UNICEF. (2018). *Aprendizaje a través del juego: Reforzar el aprendizaje a través del juego en los programas de educación en la primera infancia*. Recuperado de: https://www.unicef.org/sites/default/files/2019- 01/UNICEF-Lego-Foundation-Aprendizaje-a-traves-del-juego.pdf

Vargas, G., Gamboa, R., y Vargas, H. (2013). La enseñanza del Teorema de Pitágoras: Una experiencia en el Aula con el uso de GeoGebra, según el Modelo de Van Hiele. *Uniciencia*, *27*(1), [95–118]. www.revistas.una.ac.cr/uniciencia

Zosh, Jenifer N. et al. (2017) Learning through play: a review of the evidence. Fundación LEGO

Anexos

Anexo 1. Encuesta de satisfacción tipo Likert aplicada a los estudiantes del primer grupo de profesores.

Prueba de satisfacción de "Tangram Pitagórico"

Esta prueba tiene el propósito de evaluar la actividad para mejorarla. La información proporcionada es confidencial y sólo será utilizada con fines de investigación.

1.- Datos generales. Edad: ____ Genero: _____ Localidad: __________

2.- En una escala de 5 estrellas, ¿Cómo valoras la actividad?

3.- Marca con una " √ " en la casilla si consideras que la actividad fue adecuad para enseñar el teorema de Pitágoras.

	Muy bien	Bien	Regular	Mal	Muy mal
La actividad es entretenida					
El tiempo fue adecuado					
La actividad es fácil de entender					
Las instrucciones son claras					
El orden de la actividad es pertinente					
La información adicional es útil					
Los colores utilizados son llamativos					
El tamaño de las piezas es bueno					
El material de las piezas es apropiado					
El material de los tapetes es correcto					
Sacar y guardar el material fue fácil					
Se ejemplifica bien el teorema de Pitágoras					

4.- Escribe tu opinión, un comentario o sugerencia que consideres pueda ayudar a mejorar la actividad: ____________________________________

____

____

_ ____

Gracias por tu participación

Anexo 2. Carta de permiso para participar en el experimento.

Tecali de Herrera a _______________ de 2021

Asunto: Carta de permiso

Sr(a). Padre de familia.

Me dirijo a usted para solicitar su permiso para que su hijo(a) ________________________ ____________________, participe en la actividad de matemáticas "demostraciones visuales como recurso de enseñanza" que se realizará el día **_______________ de 9:00 a 13:00** en las instalaciones de la escuela **secundaria "Ambrosio Herrera"** ubicada en av. 3 Oriente 201, Tecali de Herrera.

Durante la actividad se seguirá todo el tiempo el protocolo de higiene y seguridad necesario para mitigar la propagación del virus SARS-COV2, por lo que su hijo(a) deberá asistir con el uniforme de diario, con cubrebocas y lavarse las manos constantemente. El aula será monitoreada de forma permanente para asegurar una buena ventilación y la pureza del aire.

Se tomarán evidencias audiovisuales de su participación con el propósito de realizar un análisis de los resultados. La identidad de los participantes será completamente confidencial y los resultados se utilizarán exclusivamente con propósitos de investigación.

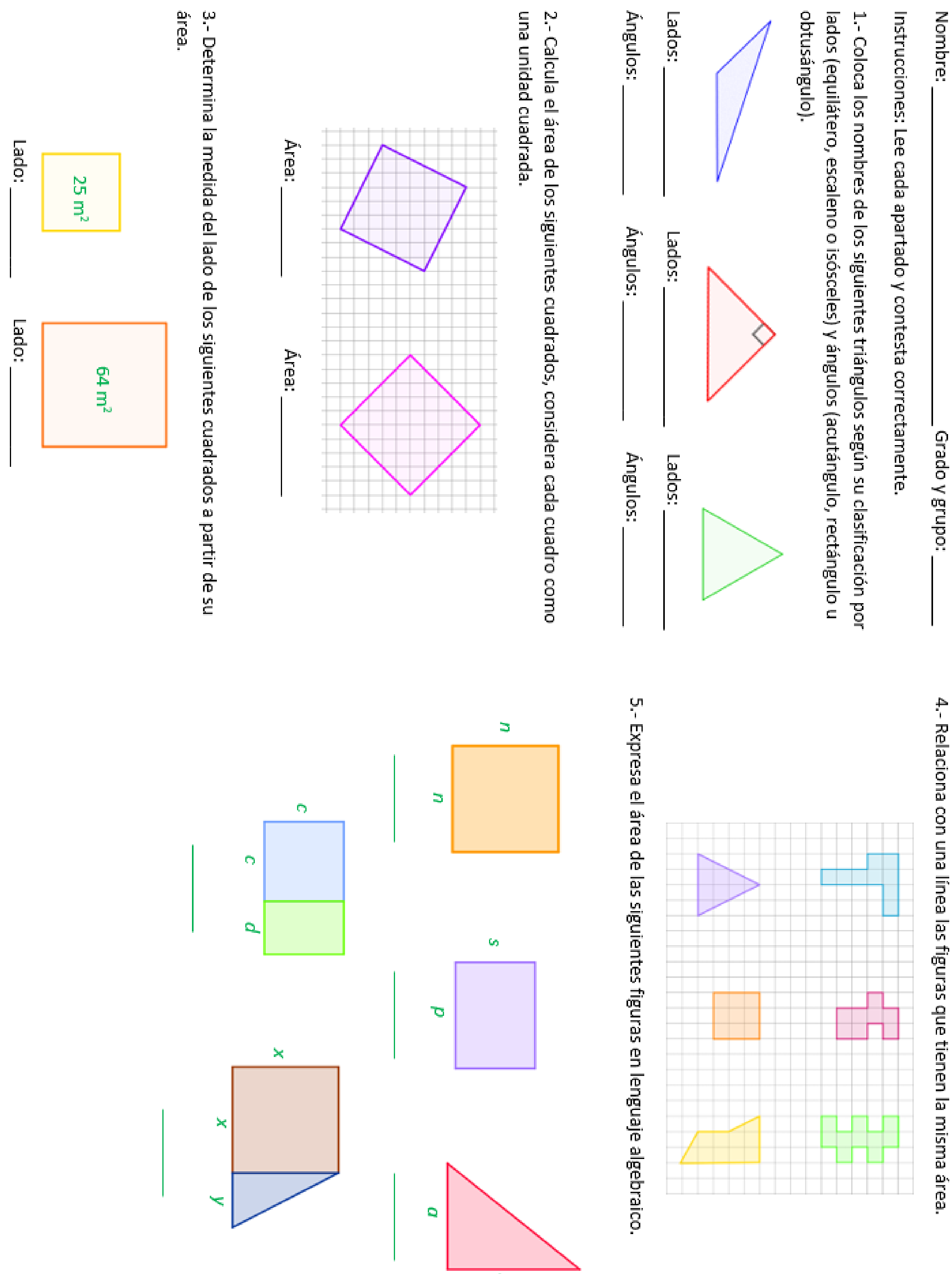
Espero tenga a bien autorizar la participación de su hijo(a), le agradezco su atención y me despido.

Profesor que dirige la actividad	Vo. Bo.
________________________________	________________________________
Prof. Joseph Xolocotzi Villalva	Director Alberto Vidal Gutiérrez

Autorizo que mi hijo(a) participe en la actividad

____

Anexo 3. Secuencias previas realizada con grupos focales.


Nombre: ____________ Grado y grupo: ______

Instrucciones: Lee cada apartado y contesta correctamente.

1.- Coloca los nombres de los siguientes triángulos según su clasificación por lados (equilátero, escaleno o isósceles) y ángulos (acutángulo, rectángulo u obtusángulo).

Lados: ______ Lados: ______ Lados: ______

Ángulos: ______ Ángulos: ______ Ángulos: ______

2.- Calcula el área de los siguientes cuadrados, considera cada cuadro como una unidad cuadrada.

Área: ______ Área: ______

3.- Determina la medida del lado de los siguientes cuadrados a partir de su área.

$25\ m^2$ Lado: ______

$64\ m^2$ Lado: ______

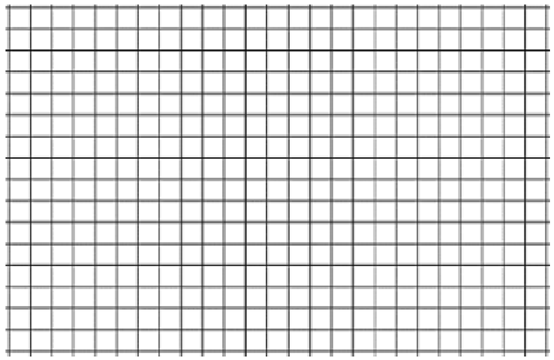
4.- Relaciona con una línea las figuras que tienen la misma área.

5.- Expresa el área de las siguientes figuras en lenguaje algebraico.

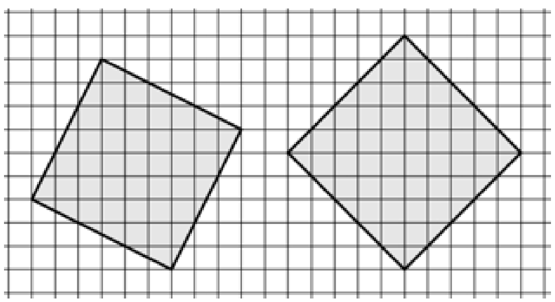
Nombre: ______________________________________ Fecha: _________

1.- Dibuja los siguientes triángulos en la cuadricula:

- Un triángulo rectángulo con dos lados de 10 unidades.
- Un triángulo obtusángulo con un lado de 4 unidades.
- Un triángulo rectángulo con un lado de 4 y otro de 7 unidades.



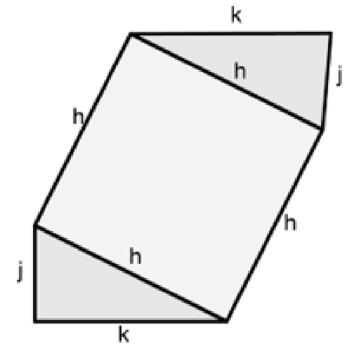
2.- Calcula las medidas de las áreas de los siguientes cuadrados:

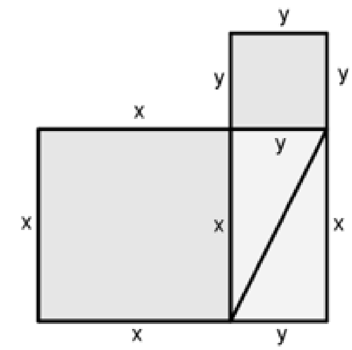


3.- Calcula la media de los lados de los siguientes cuadrados:

___________________ ___________________

4.- Expresa el área de las siguientes figuras:





Anexo 4. Rubrica de evaluación para la lección a implementar.

Elemento por evaluar	Nivel de desempeño			Tipo de discurso
	I	II	III	
Compara las áreas de cuadrados levantados sobre los lados triángulos utilizando rompecabezas.	No logra establecer relaciones (de igualdad, mayor que o menor que) entre la suma de las áreas de dos cuadrados y el área del tercer cuadrado.	Recurre a elementos de la representación (como el tipo de rompecabezas, los colores, el número de piezas, u otros.) para justificar las relaciones entre las áreas de los cuadrados.	Establece que la suma de las áreas de dos cuadrados es igual al área del tercer cuadrado en el triángulo rectángulo, menor en el obtusángulo y mayor en el acutángulo.	
Propone formas de probar que la relación de igualdad entre la suma de los cuadrados de los catetos y el cuadrado de la hipotenusa es verdadera para cualquier triángulo rectángulo	No propone ninguna forma para comprobar que su conclusión es verdadera o para descartarla como falsa	Infiere que la relación de igualdad es verdadera en todos los triángulos rectángulos ya que es verdadera para el ejemplo del rompecabezas.	Propone construir diferentes triángulos rectángulos para corroborar que la relación de igualdad siempre es verdadera ya sea calculando sus áreas o dibujando nuevos rompecabezas.	
Recurre a diferentes triángulos rectángulos para comprobar la relación de igualdad entre la suma de las áreas de los cuadrados de los lados que forman el ángulo recto y el área del cuadrado del lado opuesto al ángulo recto.	Utiliza las medidas de los lados para realizar las comparaciones o presenta dificultades para calcular las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo rectángulo a partir de sus medidas.	Calcula las áreas, pero no establece una relación entre las áreas que ha calculado y la generalización de la relación de igualdad entre las áreas de cuadrados construidos sobre los lados de triángulos rectángulos	Calcula las áreas y determina que en todos los ejemplos la suma de las áreas de los lados que forman el ángulo recto es igual al área del cuadrado del tercer lado.	
Calcula la longitud de la hipotenusa a partir de la longitud de los catetos.	No logra establecer una relación entre el teorema de Pitágoras y calcular la medida de la hipotenusa a partir de los catetos.	Utiliza el teorema de Pitágoras para realizar un algoritmo incompleto, por ejemplo, calcular el área de los cuadrados.	Deduce que la longitud de la hipotenusa es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los catetos.	
Calcula la longitud de un cateto a partir de la longitud de la hipotenusa y el otro cateto.	No consigue establecer una relación entre el teorema de Pitágoras y calcular la medida de un cateto a partir de la hipotenusa y el otro cateto.	Utiliza el teorema de Pitágoras para realizar un algoritmo incompleto, por ejemplo, calcular el área de los cuadrados o calcular la longitud del cateto como la raíz de la suma de los otros dos cuadrados.	Deduce que la longitud de un cateto es igual a la raíz cuadrada de la diferencia entre el cuadrado de la hipotenusa y el cuadrado del otro cateto.	

Anexo 5. Tabla de libros autorizados por CONALITEG analizados.

Título del libro	Referencia Histórica	Demostración visual	Comparación de áreas de cuadrados	Formalización	Problemas geométricos	Problemas verbales
Matemáticas, habilidades y competencias. Secundaria 3; Ángeles editores	Egipcios	Áreas con cuadriculas; Perigal, Comparación con polígonos semejantes	Triángulos rectángulos, Triángulos acutángulos rectángulos y obtusángulos	Chou Pei Ching, Triángulos semejantes	Calcular el lado faltante; Calcular la altura de triángulos; Calcular el perímetro de polígonos; Calcular la distancia entre dos puntos	Calcular la distancia entre objetos; Problemas con escaleras.; Calcular la diagonal de un objeto rectangular.; Calcular las medidas de un televisor.
Trabajo en Proceso, Matemáticas 3, secundaria; Editorial Oxford	Pitágoras	Triángulos isósceles; Áreas con cuadriculas; Comparación con polígonos semejantes	Ternas pitagóricas	Chou Pei Ching. Bhaskara Triángulos semejantes.	Lado faltante.; Diagonal de cuadriláteros.; Altura de un triángulo; Trazar un cuadrado a partir de área.; Calcular las diagonales de un prisma	La longitud de cables para sujetar una torre
Matemáticas 3, serie explora; Editorial castillo	No	Triángulos isósceles; Perigal; Chou Pei Chin.; Comparación con polígonos semejantes	Triángulos acutángulos, rectángulos y obtusángulos	A partir de un triángulo rectángulo con lados iguales a "a, b y c" solicita establecer la igualdad entre sus áreas.	Trazar un cuadrado a partir de área.; Espiral pitagórica.; Calcular la diagonal de un cuadrilátero; Calcular la altura de un triángulo.	Calcular el área de una superficie.; Problemas con escaleras.; Cables para sujetar postes o torres.; Calcular la altura de un objeto roto.; Calcular la

						distancia de un objeto en movimiento.; Calcular la diagonal de un objeto rectangular.; Calcular la distancia entre dos objetos
Conecta Estrategias, Matemáticas 3; Ediciones SM	No	Áreas con cuadriculas; Perigal.; Comparación con polígonos semejantes	Triángulos rectángulos , Ternas pitagóricas	Chou Pei Ching, Establece la relación para calcular la medida de un lado a partir de la forma algebraica del teorema	Lado faltante.; Diagonal de un cuadrilátero. ; Calcular la altura de un triángulo.; Figuras inscritas	Calcular la distancia entre dos objetos.; Problemas con escaleras; Calcular el área de una superficie
Matemáticas 3, todos juntos; Editorial Santillana	No	Bôttcher	Triángulos rectángulos , Triángulos acutángulos rectángulos y obtusángulos	Bashkara.	Lado faltante.; Calcular la altura de triángulo.; Figuras inscritas.; Calcular diagonal en cuadriláteros	Problemas con escaleras
Matemáticas 3; Editorial Trillas	No	Perigal (*Después de la formalización); Comparación con polígonos semejantes	Ternas pitagóricas	Chou Pei Ching,	Trazar cuadriláteros; Determinar sí un ángulo es recto).; Calcular la altura de un triángulo para; Calcular la diagonal de prismas.; Calcular la	(inicia con uno). Calcular la diagonal de un objeto rectangular.; Calcular la distancia entre dos objetos.;.

					altura de un triángulo.; Calcular la altura de un cono y una pirámide.; Calcular el perímetro de polígonos.; Calcular la distancia entre puntos en un plano cartesiano	
Matemáticas 3, secundaria, serie Aqua; Editorial Esfinge	No	Comparación con polígonos semejantes	Triángulos rectángulos , Triángulos acutángulos rectángulos y obtusángulos	Chou Pei Chin, Bashkara	Lado faltante.; Espiral pitagórica.; Calcular la diagonal de un cuadrilátero	Calcular la diagonal de un objeto rectangular.; Cable que sujeta un poste o una torre
Convive con las matemáticas 3; Editorial Méndez Cortés	Pitágoras , Diofanto, Egipcios	Leonardo DaVinvci; Perigal; Comparación con polígonos semejantes	No	Mediante la ilustración de ternas Pitagóricas	Lado faltante.; Espiral pitagórica.; Distancia entre dos puntos	Calcular la distancia entre dos objetos; calcular la altura de un silo.; Problemas con escaleras.; Medidas de un televisor.; Distancia entre dos objetos.; Distancia recorrida por un objeto en movimiento.
Matemáticas 3, serie Terra; Editorial Esfinge	*Mención de culturas de oriente	Perigal; Chou Pei Chin; Triángulos isósceles;	Triángulos rectángulos (*con geometría dinámica),	A partir de un triángulo rectángulo con lados iguales a "a,	Lado faltante.; Calcular la altura de triángulos.;	Calcular la distancia entre dos objetos.; Cables para

		Comparación con polígonos semejantes	Triángulos acutángulos rectángulos y obtusángul os	b y c" solicita establecer la igualdad entre sus áreas.	Figuras inscritas.; Trazar un cuadrilátero. ; Calcular el perímetro de un polígono.	sujetar un poste o una torre.
Matemáticas 3. Estrategias del pensamiento; Grupo editorial Patria	No	Triángulos isósceles.; Anaricio	Triángulos rectángulos	Chou Pei Chin.;	Calcular la medida de un lado faltante.; Calcular la diagonal de un cuadrilátero. ; Calcular la diagonal de un prisma	Calcular la diagonal de un objeto rectangular.; Cables para sujetar postes o torres.; Calcular la medida de rampas.; Calcular la distancia entre objetos.
Fortalezco mis competencias matemáticas 3; Ediciones SM	Babilonio s	Perigal,	Triángulos rectángulos , Triángulos acutángulos rectángulos y obtusángul os	Comparació n de tipos de triángulos según sus ángulos donde si el triángulo es rectángulo a2+b2=c2, si es acutángulo a2+b2>c2, si es obtusángulo a2+b2<c2.; Bashkara	Calcular la altura de un triángulo.; Figuras inscritas.; Distancia entre puntos	Distancia entre dos objetos.; Cable para sujetar un poste o torre.; Problemas con escaleras.
Retos Matemáticos 3; Ediciones SM	Pitágoras	no	Triángulos rectángulos , Triángulos acutángulos rectángulos y	comparació n de tipos de triángulos según sus ángulos donde si el triángulo es	Valor de un lado faltante	Cable que sujetan una torre o un poste.; Calcular diagonal de objetos rectangulare

			obtusángul os	rectángulo a2+b2=c2, si es acutángulo a2+b2>c2, si es obtusángulo a2+b2<c2.; Explicación del libro.; Chou Pei Chin		s.; Calcular la medida de un televisor.; Calcular el área de una superficie
Matemáticas 3; Editorial Terracota	No	Triángulos isósceles; Áreas con cuadriculas;	Triángulos acutángulos rectángulos y obtusángul os	Chou Pei Chin	Valor de un lado faltante.	Calcula la distancia entre dos objetos.; Calcular la diagonal de un objeto rectangular.; Problema con escalera.; Calcular el área de una superficie.; Calcular medidas de una rampa.; Calcular una longitud en un objeto determinado
Matemáticas 3; Editorial Correo del maestro	No	Chou Pei Chin; Perigal	Triángulos rectángulos ,	Chou Pei Chin	Trazar cuadriláteros.; Calcular un lado faltante.; Figuras inscritas.; Calcular la altura de un triángulo.;	Problema de la escalera.; Distancia de un objeto en movimiento.; Cable que sujeta un poste o una torre.
Matemáticas 3, desafíos matemáticos; Terracota	Pitágoras *Galileo (altura de	Euclides	Triángulos rectángulos	Euclides, Triángulos semejantes	Calcular el valor faltante.; Calcular la altura de un	Distancia entre dos objetos.; Calcular la diagonal de

	montaña s lunares)				triángulo.; Calcular el perímetro de un polígono.	un objeto rectangular.; problemas con escaleras.
Matemáticas 3, serie fundamental; Editorial Castillo	No	Chou Pei Chin.; Triángulos isósceles	Triángulos rectángulos , Triángulos acutángulos rectángulos y obtusángul os	Chou Pei Chin	Calcular el perímetro de polígonos.; Determinar si un ángulo es recto.; Calcular lado faltante.; Figuras inscritas.; Calcular la altura de triángulos	Calcular el área de una superficie.; Calcular la diagonal de un objeto rectangular.; Problemas con escaleras.; Distancia entre dos objetos.; Medida de un objeto particular.
Matemáticas 3, serie enlaces; Editorial Castillo	Pitágoras	Tangram; Perigal (x2).; Áreas con cuadriculas	Triángulos acutángulos rectángulos y obtusángul os	Chou Pei Chin	Trazar cuadriláteros.; Lado faltante.; Figuras inscritas	Distancia entre dos objetos.; Problemas con escaleras
Matemáticas 3, Santillana Horizontes; Editorial Terracota	Pitágoras	Áreas con cuadriculas; Perigal; Bôttcher, Anaricio	No	Chou Pei Chin	Lado faltante.; Diagonal de un cuadrado.; Espiral Pitagórica	Calcular la distancia al horizonte.; Calcular la diagonal de un objeto rectangular.; Calcular distancia de un objeto en movimiento.; Medidas de rampa.; Problemas de la escalera.; Medidas de un televisor.;
Jaque Mate, matemáticas 3;	No	Áreas con cuadriculas;	Triángulos rectángulos ,	Chou Pei Chin, Bhaskara,	Calcular el área del cuadrado	Altura de cilindros apilados.;

Editorial Larousse		Triángulos isósceles; Perigal; Anaricio; Comparación con polígonos semejantes	Triángulos acutángulos rectángulos y obtusángulos	ilustrando la relación con un triángulo rectángulo	faltante.; calcular la diagonal de un cubo	Medidas de rampas.; Problemas con escaleras.; Longitud de un objeto especifico.; Altura de un silo o pirámide
Matemáticas 3, secundaria; Editorial Ríos de tinta	Pitágoras, Egipcios, Antigua China	Áreas con cuadriculas; Tangram; Perigal (*con GeoGebra después de la formalización)	No	Chou Pei Chin	Trazar cuadriláteros.; Lado faltante.; Diagonal de un cuadrilátero.	Problema de la escalera.; Calcular las medidas de un televisor.; Calcular la distancia entre dos objetos.;
Matemáticas, tercer grado. Volumen 1; SEP (libro para telesecundaria)	No	Anaricio; Perigal	Triángulos rectángulos	Chou Pei Ching.	Lado faltante.;	Trazar ángulos rectos.

Anexo 6. **Entrevista profesor 1**

1.- Acercamiento

[esta entrevista se realizó después la primera etapa de entrevistas al sujeto 2]

[El sujeto de intervención fue quien contactó al entrevistador antes de la entrevista]

Hola, de hecho, quería preguntarte si podrías ayudarme con una investigación, es de cómo se utilizan rompecabezas para enseñar el teorema de Pitágoras. Me acuerdo de que das clases en tercero de secundaria y eres buena con las actividades lúdicas y el desarrollo de materiales.

Pues sí, te puedo ver el sábado después de una conferencia a la que voy a ir por la mañana.

Qué bueno, muchas gracias, se trataría de que me comentes como enseñas tú el tema del teorema de Pitágoras y me des tu opinión de una actividad que estoy desarrollando.

2.- Exploración de actividades

Qué bueno que pudiste, te comento que quiero estudiar cómo se utilizan las demostraciones visuales para enseñar el teorema de Pitágoras. De hecho, traigo una muestra aquí (el entrevistador saca un rompecabezas para mostrarlo a la entrevistada).

Que interesante, yo inicio este tema con una anécdota, en la que un padre y su hijo van caminando por la calle y se encuentran con un albañil, y el hijo le dice al padre que esa es una persona poco instruida, y el padre le responde “Bueno, él sabe construir una casa, tú, ¿Qué sabes hacer?”. Después les explico como el tema que vamos a estudiar les va a ayudar a resolver diferentes situaciones, como construir una casa o calcular distancias. Creo que es importante que los alumnos sepan que el tema que van a estudiar es de utilidad, pero también aprovecho para enseñarles que hay que ser humildes y respetar a los demás.

Qué bueno, ¿también utilizas rompecabezas para enseñar el teorema?

Sí, pero yo utilizo una demostración china, en la que tienen un cuadrado con cuatro triángulos rectángulos, y si los acomodan de una manera se forman el cuadrado los catetos y de otra se forma el cuadrado de la hipotenusa. Ya con esa demostración nombramos los lados de los triángulos, vemos que son triángulos rectángulos, les colocamos un valor a, b y c, y les puedo explicar que “a” cuadrada más “b” cuadrada es igual a “c” cuadrada ya que ocupan la misma área.

También pensé en utilizar esa actividad, pero era más difícil proporcionar niveles de dificultad y siento que hay demostraciones visuales más explicitas.

Yo lo utilizo porque me facilita pasar del lenguaje verbal a la expresión algebraica del teorema. Tal vez yo utilizaría una demostración como esta (señalando el rompecabezas que tenía el entrevistador) para enseñárselos a mis alumnos por primera vez, y así entiendan de forma explícita el teorema, que la suma de las áreas de los cuadrados de los catetos es igual al área de la hipotenusa, y después utilizaría la demostración china para enseñarles la expresión algebraica.

Tienes razón, es todo un proceso pasar de la demostración a la expresión algebraica, pero tal vez no pueda estudiar parte.

Y tú, ¿cómo utilizas esa actividad?

Yo reúno a los alumnos en equipos de 4 integrantes y les explico que tienen que armar los cuadrados de los catetos primero, luego, utilizando las mismas piezas, tienen que armar el cuadrado de la hipotenusa.

Después comparo los cuadrados de los lados de triángulos que no son rectángulos, y se ve que en los triángulos obtusángulos la suma de las áreas de los cuadrados de los lados más pequeños es menor que el área del cuadrado del lado más grande y en los acutángulos la suma de los cuadrados más pequeños es mayor al cuadrado de lado más grande. Luego les explico que esa es la relación de igualdad sólo se da cuando el triángulo es rectángulo.

¿Los alumnos entienden las instrucciones? Parece algo complicado y creo que algunos alumnos podrían no entender.

Sí, yo también he pensado eso, planteé esta actividad con un grupo pequeño y si vi que les entregaba el material y no entendían que hacer, tuve que explicarles varias veces. Creo que podría agregarle unas instrucciones para que a los alumnos les quede más claro. Lo ideal sería que ya al entregarle el material las instrucciones sean tan claras que los alumnos puedan trabajar por su cuenta, ¿qué opinas de esa idea?

Sí, podríamos hacer las instrucciones de una vez, ya luego podrías imprimirlas en un espacio vacío del material. ¿Cómo iniciarías?, ¿qué tienen que hacer los alumnos?, ¿qué tendría que hacer el maestro?

Tendría que pensar bien en las instrucciones para que sean claras, en este momento creo que no podría escribirlas.

Algunos rompecabezas parecen muy complejos, incluso para el profesor, ¿todos los alumnos son capaces de resolver los rompecabezas?

La mayor parte sí, este material sólo lo aplique en un grupo pequeño, pero uno más sencillo lo he aplicado varias veces en grupos grandes y la mayoría logra resolver al menos un rompecabezas, ya luego pueden intercambiar para resolver rompecabezas más difíciles. El más complejo es uno de ocho piezas sin ningún ángulo recto. Ese no todos lo pueden resolver, pero para algunos alumnos es un reto y prefieren hacerlo en vez de uno más sencillo.

Entonces, ¿están organizados por nivel de dificultad?

Sí, los más fáciles tienen 5 piezas, y van creciendo a 6, 7 y 8 piezas. Los alumnos pueden elegir en qué nivel empiezan y luego intercambiar. Por eso elegí este formato, paro poder ofrecer una gama de rompecabezas distintos.

Y, ¿cómo haces para que los alumnos entiendan la parte de comparar áreas de triángulos que no son rectángulos? Es decir, esta actividad es para que los alumnos vean de forma explícita la demostración del teorema de Pitágoras, pero ¿cómo comparas las áreas de los cuadrados en los otros triángulos?

Depende, en ocasiones tienen que confiar mí y en las medidas que les doy, pero si tengo proyector, utilizo GeoGebra para mostrar cómo cambian las áreas según la medida de los ángulos.

¿Por qué no utilizas esta misma actividad? Mira, puedes utilizar los cuadrados de los catetos y utilizas tres triángulos diferentes, uno rectángulo, otro acutángulo y otro obtusángulo, y así al momento en que los alumnos arman los cuadrados pueden comprobar que la igualdad sólo se cumple en el triángulo rectángulo.

Sí, es una buena solución, ya tenía la idea de comparar las áreas de acuerdo con los tipos de triángulos según sus áreas, pero no había conceptualizado esta idea que me propones, es muy buena, pero tengo que revisar las medias de los triángulos con los cuadrados de sus lados para hacer el diseño. Dime, ¿utilizarías esta actividad en tus grupos?

Sí, pero en este momento no estamos estudiando el teorema de Pitágoras, Yo creo que, en un par de semanas, o incluso un mes podría ser.

Esta perfecto, así me da tiempo de hacer algunos de los cambios que me sugeriste.

3.- Implementación. Grupos de aproximadamente 38 alumnos, Puebla

4.- Retroalimentación

¿Cuál fue tu impresión general de la actividad?

En general está muy bien, pero si encontré cosas que se pueden mejorar. Por ejemplo, a la hora de guardar el material si les costaba, tan solo el hecho de que los tapetitos entraban en sus bolsitas si los acomodabas de una forma, pero de otra no, y si les tocaba guardar uno de los rompecabezas difíciles también se tardaban más. Armar los rompecabezas dentro de la bolsita era complicado y algunos alumnos desde el inicio, se les ocurrió tomar una foto, yo creo previniendo que luego lo tenían que guardar, eso me ayudo porque ya no tuve que ir a todos los equipos a ayudarles.

Entiendo, guardar el material sí es complicado, ¿se te ocurre cómo podríamos arreglar ese problema?

La idea de agregar una imagen está bien, pero creo que si requiere de una caja que se abra completa para poder guardar las piezas con mayor facilidad. Además, los tapetitos podrían ser cuadrados, de modo que entren de cualquier forma que los alumnos los guarden.

¿Tienes más observaciones?

Sí, considero que es muy importante conocer bien a los alumnos antes de implementar la actividad, ya que así se pueden asignar los rompecabezas de acuerdo con el nivel de dificultad que cada uno tiene. Por ejemplo, a los alumnos más adelantados les puedo asignar un rompecabezas difícil, y a los alumnos no tan adelantados se les asignan rompecabezas más sencillos. Lo otro es que algunos rompecabezas eran bastante sencillos y los alumnos que tenían rompecabezas más complicados sentían un poco de ansiedad al ver que otros equipos ya habían resuelto los suyos. Pero en general se mostraban interesados por resolver la actividad.

¿Cómo reaccionaron los alumnos a la actividad?

Desde el momento en que saque el material y les explique cómo tenían que trabajar se interesaron, en ese sentido si fue entretenida para ellos. Después comparamos las áreas de los cuadrados de los lados de triángulos rectángulos, acutángulos y obtusángulos.

¿El tiempo fue adecuado?

Organice la actividad en días en los que impartía dos horas en el grupo. En ese sentido me dio tiempo de implementar la actividad, pero si hubiera aplicada la actividad en una sola hora no habría podido terminar la actividad.

¿Para los alumnos fue fácil de entender?

Les explique que tenían que hacer, pero algunos alumnos al leer las instrucciones se confundían. Por ejemplo, algunos alumnos querían armar los tres cuadrados al mismo tiempo, y sentían que les faltaban piezas. La instrucción decía: “utilizando las mismas piezas, arma el cuadrado del lado más grande” pero ellos no entendieron que tenían que desarmar los cuadrados de los catetos, sino que necesitaban otro juego de piezas iguales para armar el tercer cuadrado. No se me ha ocurrido una forma de cambiar esa instrucción para evitar esa confusión.

Tendría que pensar cómo resolverlo, tal vez una imagen. Alguna mejora que tengas respecto a los materiales, ¿la cantidad de rompecabezas?, ¿colores?, ¿tamaño?, ¿el material del que están hechos?

La cantidad de rompecabezas estuvo bien, pero ¿por qué no utilizaste pentaminos o tetraminos en tus demostraciones? (como en el juego de Tetris)

Bueno, utilice demostraciones más relacionadas con cuestiones geométricas, seccionando los cuadrados con paralelas, tangentes, puntos medios. ¿Por qué?

Es que una alumna, bastante adelantada, cuando quiso determinar si las medidas de las áreas de los catetos sumaban lo mismo que el área del cuadrado de la hipotenusa midió los lados de los cuadrados. Cuando le explique que bastaba con compararlas utilizando las piezas ya que si el cuadrado estaba formado por las mismas piezas entonces debían tener áreas iguales no le pareció suficiente. Se que armar un nuevo rompecabezas con otro sistema puede ser complicado, pero creo que podría ayudar a alumnos que tengan la misma inquietud que mi alumna ya que pueden darles una noción de las medidas del rompecabezas.

Es una buena idea, voy a intentar hacer el diseño. ¿Qué otro elemento deberíamos mejorar?

Las piezas podrían ser un poco más gruesas. Se me ocurre de unos 6mm, sé que se pueden hacer de esa medida. También los tapetes sobre los que se arman los rompecabezas podrían ser de un material plastificado, de papel se ensucian bastante y se doblan un poco ya que sobresale del borde de algunas bancas de los alumnos.

Bueno, son bastantes mejoras, intentaré realizarlas, y ojalá puedas aplicar la actividad el siguiente siclo escolar. Muchas gracias.

Anexo 7. Entrevista profesor 2

1.- Acercamiento

Hola, ¿cómo estás?, ¿sigues trabajando en la escuela “x”?

Hola, bien, sí, estoy atendiendo terceros, ya van tres años seguidos que me toca. Tú, ¿qué tal?, ¿cómo te tratan en tu escuela?

Bien, bien, los niños son tranquilos y el ambiente es relajado, … (se dio una conversación personal, donde se trataron temas no relacionados con la investigación).

Oye, quería comentarte, quiero hacer una investigación, es de cómo se enseña el teorema de Pitágoras, y quería preguntarte si te gustaría ser parte de mis sujetos de investigación.

Mmm, sí, pero ¿de qué trata? O ¿qué tendría que hacer yo?

Pues, sería por etapas, lo primero es desarrollar la actividad, en eso me tendrías que ayudar, luego la implementaríamos y ya checaríamos los resultados, ¿cómo ves?

Ya, pues va, yo utilizo unos rompecabezas y he visto que también puedo aprovechar para repasar raíz cuadrada, está bien.

Gracias, de hecho, esta perfecto, ya que justamente me interesa estudiar el uso de rompecabezas, ¿qué te parece si nos vemos un día con más tiempo y checamos?

Sí, de hecho, yo quería invertir más en un material para eso, ya que el año pasado utilice unos de papel y a los alumnos les costaba trabajo, pues las piezas se doblaban o se sobreponían, o se caían y este año quería hacerlos de un material mejor, cartón o madera.
Pues me vas diciendo, para que también me prepare.

Muchas gracias, tu opinión me va a ayudar mucho… (la conversación continua con otros temas)

2.- Exploración de actividades

[Esta entrevista se realizó de forma posterior a la primera etapa de entrevista de otro el sujeto (Fabi)]

[En esta etapa se presentó un tercer sujeto, que en un principio solo observaba la entrevista, pero al concluir se ofreció para formar parte de los sujetos de investigación]

¿Cómo inicias el tema del teorema de Pitágoras con tus alumnos?

Pues yo inicio contándoles un poco de la historia de Pitágoras, quien fue, en que época vivió, algunos de sus principios o frases, que en muchas ocasiones considero les pueden ayudar, o se ajustan a su contexto, como “educar a los niños para no castigar a los adultos”, entre otras, y ¿tú?

Pues también inicio con una historia de Pitágoras, ya que tuvo muchas ideas revolucionarias para su época, como la planificación familiar o la trato entre personas. También creo que esas cosas llegan a ser de mucha utilidad para los alumnos. ¿Qué otras actividades utilizas para enseñar el teorema de Pitágoras?

Pues yo utilizó unos rompecabezas, son demostraciones del teorema de Pitágoras, los imprimo en una hoja de papel, cuatro triángulos rectángulos, cada uno con los cuadrados de los catetos dibujados ya con los segmentos para que los alumnos los corten y los armen para formar el cuadrado de la hipotenusa. Formo equipos de 4 alumnos, para que cada uno arme uno, y hago una especie de competencia donde gana el primer equipo que arma los cuatro cuadrados de las hipotenusas.
Cuando la mayoría ya terminó ya les explico los nombres de los lados (catetos e hipotenusa), que las áreas de los cuadrados de los catetos suman el área de la hipotenusa y luego continuo con ejercicios.
Por ejemplo, si el área del cuadrado no tiene raíz les pido que lo factoricen, ya que eso les sirve para su examen de la prepa, también les pido que calculen medias de diagonales o los problemas típicos de la escalera, etc.

Yo también utilizo rompecabezas, de hecho, mandé a hacer estos en MDF, como me comentaste que querías hacer rompecabezas de un material más duradero, mande a cortarlos en laser y los coloree, también hice estos como "tapetitos", para que los niños puedan armar los cuadrados de los catetos y de la hipotenusa, y una amiga me recomendó hacer otros dos, uno con ángulos agudos, y otro con un ángulo obtuso, así los alumnos pueden ver que si el triángulo es obtusángulo las áreas de los cuadrados más pequeños no es suficiente para completar el más grande y si es acutángulo la suma de los cuadrados de los lados más chiquitos se pasa, es mayor al área del cuadrado más grande.

Y tú ¿cómo implementas esa actividad?

Igual, armo equipos de cuatro integrantes y a cada equipo le entrego un rompecabezas, cuando van terminando los pueden intercambiar con otro equipo, por ejemplo, hay unos que son más fáciles, pero algunos alumnos prefieren rompecabezas más difíciles, entonces yo los clasifico en fácil, medio y difícil, así ellos eligen cual prefieren. Arman primero el rectángulo, ven que sí queda, luego el obtusángulo y el acutángulo y ya pueden concluir que sólo cuando el triángulo es rectángulo se cumple la igualdad, y ya explico que eso es el teorema de Pitágoras.

Oh, pero se ve algo tardado, ¿todos los alumnos logran terminar?

La mayoría sí, pero si veo que un equipo está muy atorado le voy ayudando, por ejemplo, pongo una pieza, o les explico cómo lo pueden resolver. Pasa que los equipos que tienen uno de los más difíciles se tardan más o no pueden, pero casi siempre la mayoría logra terminar. ¿cómo ves?, ¿crees que te sean útiles? ¿los aplicarías en tus grupos?

Sí, la verdad creo que sería interesante para los chicos, pero ¿vas a necesitar información de mi grupo? ¿qué actividades necesito hacer luego de implementar el rompecabezas?

Pues sólo necesitaría que tus alumnos contesten una encuesta también, puede ser de forma aleatoria o voluntaria, el resto del contexto sólo generalidades, nada especifico, sólo es para validar la opinión de los alumnos respecto a la actividad. En cuanto a las actividades lo ideal sería que puedas implementar las actividades que haces normalmente, así también validamos que es útil para tus actividades, ya que es todo un proceso pasar del teorema a la resolución de problemas, sería bueno también hacer el estudio de todo ese proceso, pero no estoy seguro de que nos dé tiempo.

Ya que la implementes pues me retroalimentarías de cómo mejorar la actividad, si los materiales, la dinámica o incluso de la caja, ya que cada elemento debe favorecer el trabajo del profesor o facilitarlo, que bueno, no es que sea más fácil pues de cualquier modo tienes que atender dudas, ayudar a los niños, ósea, no es más fácil, pero debe potenciar tu capacidad para explicar el tema. Bueno, necesito la retroalimentación ya que la perspectiva antes de aplicar una actividad y después puede cambiar, se ven los errores, los cambios y cosas que a veces no se pueden anticipar.

Va, gracias, puedo aplicar la actividad esta semana, o la semana que viene a más tardar, te hablo cuando termine y nos ponemos de acuerdo.

Sí, y gracias a ti.

3.- Implementación, 3 grupos de aproximadamente 32 alumnos, Yehualtepec

4.- Retroalimentación

¿Cómo viste la actividad así en general?

Estuvo muy interesante y me gustó. Los niños al principio se mostraron asombrados, si les llamó la atención al principio. Iba notando que cuando se aplicó algunos se pusieron muy tensos porque no lo podía resolver. Entonces fue ahí cuando se les fue ayudando y poniendo alguna que otra pieza para que se les facilitara el trabajo, pero sí hubo algunos niños que se mostraban algo tensos. Los que lo iban resolviendo muy fácil se iban emocionando. De hecho, como lo vi el tangram, las piezas estaban fácil, medio y difícil. Entonces lo que hice fue un pequeño concurso y como iban terminado iban pasando por el otro tangram. Entonces ellos fueron los que se emocionaron más, los que podían. Y, aun así, los que les costaba trabajo, lo que me gustó es que no se rindieron. No dijeron "ay, qué difícil, ya no lo hago", sino que lo iban resolviendo, pero en sí, sólo fue un equipo el que no terminó. O sea, de seis equipos en un grupo, sólo fue un equipo el que no terminó y a nivel de tercer grado sólo un equipo no terminó.

¿Cómo te sentiste de tiempo? ¿Te faltó? ¿Te sobro?

En una hora siento que es muy poco. No me da bien tiempo. En un grupo que tengo las dos horas seguidas, o sea, si fue suficiente. Incluso, el primer tangram que son de cinco piezas nada más nos fuimos más con la explicación de si se podían hacer en los tres, en el triángulo rectángulo, en el obtusángulo y en el acutángulo, fue ahí más. También en el segundo, también ahí se demostró que no se podía; entonces ya con los otros dos sabían que no se iba a poder.

¿Crees que fue fácil para entender al final? ¿sí pudieron concluir que esto es una propiedad que funciona en los ángulos rectos y con los otros no? ¿si fue fácil?

Sí fue fácil porque hacer la demostración si fue fácil. En el primero (en el de cinco piezas) íbamos todos y les pedí que acomodaran y reacomodaran, ya después se sacó el segundo tablero y acomodaron las piezas, pero vieron que sobraba espacio por así decirlo, mucho espacio y ya en el tercer tablero al acomodar las piezas faltaba espacio.

Entonces el reto fue armarlo por primera vez, fue donde se les complicó ¿te ayudaron las instrucciones que venían en el paquetito o de todos modos tuviste que ir equipo por equipo?

Sí fueron de ayuda. Primero di las indicaciones, fuimos leyendo las instrucciones, lo hice de forma general. Ya después ellos mismos iban leyendo las instrucciones cuando no recordaban algún aspecto por así decirlo.

El orden de las actividades ¿también influyó? ¿o lo sentiste muy desorganizado?

Yo ya llevaba una idea de cómo aplicarla la primera vez con el grupo, hay que estar sobre ellos. La primera vez se me dificultó a mí, no fueron ellos. Siento que fue de mi parte que en un principio no se entendió, hubo preguntas, siempre hay preguntas; pero siento que fui yo, que no fueron mis niños, ni fue el material. En un principio no sabía cuántos rompecabezas pitagóricos había (de los fáciles, de los intermedios y de los difíciles). Entonces cuando terminó ya supe cuántos había de cada uno, ya supe cómo organizarlo, me di la idea y sí funcionó.

¿Si te fue útil la información adicional? También puede ser que esa información sea decorativa, pero está vinculada al tema

La verdad no la utilicé, la clasificación de los triángulos. No la utilicé, tal vez por el tiempo.
Yo pensé que podría ser para una segunda clase o tercera clase.

¿Cómo viste los colores? Porque para mí podría ser una variable irrelevante, pero resulta que sí.

A mí sí se me hicieron llamativos. Nada más que hay una niña que es muy creativa, utiliza en su portada de su libreta, sus apuntes, colorcitos, pues sus papás también le han de dar el material porque no son colores sencillitos. Entonces ella dice "¿por qué este colorcito no puede ser más de los vivos?" y cosas así, pero fue una niña. Pero en general al grupo y a mí si nos convencieron, porque no son colores pasteles, ni así.

¿La cantidad de rompecabezas fue suficiente? En diversidad, y si fueron suficientes, preferirías más, menos.

Yo siento que faltaban más, de cantidad, de diversidad está bien, tener de difícil a fácil, eso está bien; pero de cantidad hacían falta más, para tener equipos de máximo tres, ya que todos querían mover las piezas. Incluso lo ideal sería que cada uno tuviese uno para trabajar, pero bueno, un rompecabezas para tres creo que funciona muy bien.

Sí, además si es difícil recoger el material, tener un rompecabezas para cada uno podría ser todavía más difícil, u otra opción es que cada uno construya su propio rompecabezas, que así viene en muchos libros de texto.

Sí, pero también puede ser que no les queda y están más expuestos a errores, y se requiere de más tiempo, llevar el material está bien así son de mejor calidad. De diversidad es suficiente, pero de cantidad, aunque si da bien para trabajar, podrían ser equipos más pequeños.

El tamaño de las piezas, ¿estuvo bien?

Sí, porque cabe bien en sus bancas, al principio creí que no iban a poder trabajar en sus bancas, y pensé en pedir la biblioteca para tener más espacio, pero sí pudieron, así que creo que es una buena medida ya que son manejables.

El material, ¿estuvo bien? Ves que era tipo madera

Yo creo que sí, no se doblaba como el papel, y si se podía manejar.

El material de los tapetitos ¿era adecuado? ¿se les doblo? ¿lo rompieron?

Se les doblo, algunos son un poco descuidados, entonces ese material (papel) sí era un poco frágil.

Ya, bueno, ahora respecto a sacar y guardar el material, que en las encuestas se ve que es un problema ¿cómo lo sentiste? ¿fue fácil o difícil?

Pues guardar el material si les resulto difícil, tan solo con los tapetitos, si no los guardaban de una forma entraban, pero de la otra no, entonces entregaban sin haberlo guardado bien, y tenía que pedirles que lo hicieran bien, o explicarles, entonces lo sacaban y tenían que volverlo a armar, y se complicaba más si el rompecabezas era de los difíciles, entonces se perdía más tiempo y tenía que estar pendiente.

Y ¿cómo lo resolviste?

Pues me lo tenían que entregar bien, de otra forma yo tardaría mucho arreglándolo, entonces les pedí que lo hicieran bien, y ya algunos de sus compañeros que entregaban también ayudaron.

Oh, que bien, y ¿lograron alcanzar la conclusión?, es decir, que la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa, o, ¿falto tiempo? ¿fue más difícil?

Sí, sí llegaron a la conclusión, de hecho, la resolución de ejercicios y de problemas es más sencilla, ya que entendieron que es algo que sólo se da en triángulos rectángulos y entienden que la fórmula de a cuadrada más b cuadrada es iguala c cuadrada viene de las áreas de los cuadrados, que la suma de los cuadrados de los catetos debe ser igual al cuadrado de la hipotenusa, yo percibo que sí entendieron.

Que bueno, pues faltan dos cosas, la primera, ¿cómo mejorarías la actividad? De modo general, ¿encontraste algún cambio para hacer?

Bueno, para empezar la actividad es dinámica, los niños se entusiasmaron, pero podría mejorar el cómo dárselo, las bolsitas de plástico no son adecuadas, tal vez una caja donde no se muevan tanto, o quepan mejor. Eso ayudaría mucho a la hora de entregar y principalmente a la hora de guardar. Siento que esa sería la mejora, todo lo demás está bien.

Ahora, lo último, en este tiempo que llevas trabajando con ellos el teorema de Pitágoras, ¿observaste una nueva problemática que surgiera con el uso de los rompecabezas?

No, todo lo contrario, hacer ejercicios, resolver problemas, ellos tienen una idea más clara de que tienen que hacer. Tal vez a mí me falto, teniendo el cuadrado de la hipotenusa, quitar piezas para formar los cuadrados de los catetos, es decir, el corolario del teorema, ya que me enfoque más en la parte de la suma, y creo que habría sido interesante explorar la parte de la resta con los rompecabezas. Eso es todo.

Que interesante, no se me había ocurrido, pero creo que es una buena idea. Pues esa fue la última pregunta de la entrevista. Muchas gracias.

ANEXO 8. Entrevista profesor 3

[El sujeto se presentó de forma voluntaria junto con el sujeto 2 ya que son esposos. Ambos son licenciados en educación con especialidad en matemáticas, son profesores de matemáticas e imparte en 3° de secundaria y se ofreció como voluntario a concluir la fase 2 de la entrevista con el sujeto 2 por lo que no aplico la fase de acercamiento]

¿Qué te pareció la actividad? Tus primeras impresiones

Les pareció interesante, en primera porque les causó curiosidad la cajita, estaban a la expectativa.

A ellos les gustan mucho los tangram y eso fue lo que les emocionó más, a la mayoría les gustó.

¿Alguno que dijera que “este material, qué feo”?

Sólo un equipo que no pudo armar el que traía puros triángulos porque no traían ángulo recto y se desesperaron, pero al otro equipo que les tocó si lo pudieron hacer, sólo que uno de los integrantes del equipo no quería trabajar muy bien

En cuestión del tiempo ¿cómo lo viste? ¿Adecuado? ¿Te faltó, te sobró?

No me faltó tiempo porque todos llegaron a escribir sus conclusiones de los tres triángulos

¿Para los niños fue fácil de entender la actividad? ¿Sacaron rápido sus conclusiones o fue un salto muy grande?

Sí fue fácil que lo entendieran

¿Cómo viste las instrucciones?

Las instrucciones si son útiles, pero en mi escuela, los alumnos no leen las instrucciones. Entonces, en algunos equipos sí tuve que decirles nuevamente lo que tenían que hacer porque ellos no leyeron.

En cuanto al orden de la actividad ¿lo viste pertinente? O ¿fue demasiado desordenado?

Si es un buen orden, pero pienso que los paquetes podrían no estar numerados para que pudieran empezar con el acutángulo, luego con el obtusángulo y ya después ellos concluir que se ve eso en el rectángulo y no que digan “en el primero sí y en los otros no” porque algunos escuchan a los otros equipos y dicen “entonces sólo se puede el 1”

La información en los costados ¿te llegó a ser útil? ¿La omitiste? ¿No te dio tiempo usarla?

Si me llegó a ser útil porque, aunque ya habíamos visto que era un triángulo rectángulo y obtusángulo, ahí la pudieron observar, nada más que la letra podría ser más grande para que les llame más.

Los colores ¿cómo los catalogarías? ¿Podrían mejorar un poco? ¿Cómo los mejorarías?

Sí fueron adecuados porque son llamativos, nada más en el color naranja con el rojo se parecen un poco, nada más.

En cuestión de diversidad y cantidad ¿fueron suficientes tangram para el grupo?

Sí fueron suficientes porque sólo tengo 28 alumnos, llegaron menos, todavía me sobró uno y trabajaron por parejas. Entonces sí fueron suficientes.

En cuanto el tamaño de las piezas ¿cómo lo considerarías? ¿Fue pertinente?

Sí, porque cabía en su butaca.

¿El material fue bueno? ¿Si te sirvió que fuera así como rígido?

Sí, porque no se doblaba y ellos podían acomodarlo bien, no se les movía tanto.

El material del tapetito ¿cómo lo viste? ¿Fue bueno, estaba mal, podría mejorar?

Sí podría mejorar, pienso que podría ser en lona para que se doblen y no les pase nada ni se manchen ni nada, porque si les costaba un poquito volverlo a doblar y cuando los desdoblaban también no le encontraban manera de extenderlo.

¿Cómo viste el proceso de sacar y meter el material? ¿Fue demasiado difícil? ¿Fue fácil?

Sí fue difícil para los niños porque para meter de una manera la hoja, las hojitas ya no cerraba la bolsita y de otra manera sí. Entonces hubo algunos que no les había tocado el rompecabezas difícil, pero no lo pudieron armar para meterlo en la bolsita, entonces se desesperaron y no me lo entregaron a tiempo, me lo entregaron después y me lo entregaron desarmado, pero nada más fue un equipo porque todos los demás sí lo pudieron meter. Fue en lo que más opinaron de meter el material les costó más.

¿Cómo crees que podría mejorarse esa parte para que sea más fácil?

Con una tablita donde se puedan insertar y no se muevan

Por ejemplo, tener una imagen de como armarlo ¿no sería de ayuda?

No, porque se les daría una pista

No, porque ya lo están devolviendo

Ah ¿para entregar? Tal vez sí

De todos modos, serían dos cuestiones a analizar y en un segundo momento tal vez te las presente y ya me dicen cuál de las dos sería más fácil.

¿Consideras que se ejemplificó bien el teorema? ¿Llegaron a las conclusiones bien?

Como ya lo había trabajado sí les había costado mucho entender porque en el libro sólo se suponía cómo sería el cuadrado del lado más grande si fuera un obtusángulo y acutángulo. Entonces ahí si lo pudieron observar y como ya tenían ese concepto un poco vago pudieron concluir bien y ya como que comprobaron el teorema de Pitágoras.

¿Cuál sería una opinión o sugerencia de si lo pudiese mejorar de una forma?

Tal vez que no tuvieran números y tal vez que no tuvieran nombres para que entonces con las características que vienen ahí a un ladito ellos pudieran decir qué tipo de triángulo armaron y ya concluir con el nombre.

Tú ya habías trabajado con el teorema ¿viste que surgiera algún problema al trabajar con el material que antes no se presentaba? ¿Generó un nuevo problema trabajar con el material?

No, al contrario, fue más fácil poder obtener la medida de los catetos porque se les hacia un poco más fácil primero sacar nada más la de la hipotenusa y ya después se les facilitó más.

Por el momento sería todo, muchas gracias.

ANEXO 9. Entrevista profesor 4

La primera parte es información general, esto es para que quede registrado que en la muestra hay profesores con diferentes perfiles. ¿Cuánto años tienen?

Ya tengo 52 años

¿En qué tipo de contextos ha trabajado?

Al principio en área rural, una técnica agropecuaria en Atlixco, en un área marginada donde los chicos tenían la idea de terminar la secundaria e ir a trabajar a estados unidos, luego, durante un par de años, luego como apoyo técnico pedagógico, y actualmente trabajo en una escuela secundaria técnica en sanctórum que es un contexto semiurbano, que es muy diferente, la mayoría de los papás son obreros de Volkswagen, pero mucho no tienen más que preparatoria, aun así los chicos tienen más interés en estudiar, quieres ser obreros, comerciantes, servicios de transporte, bueno, más o menos el 50% ya tienen actividades adicionales (trabajo) y aunque la región es catalogado como de alta marginación, el contexto es un poco mejor y tal vez un problema es también la drogadicción que hemos llegado a encontrar, y un poco el factor económico.

¿Cuánto tiempo ha trabajado en el sistema público?

12 años, previamente a eso trabaje en el área de cómputo que es mi preparación y eso me ha hecho prepararme en el área de educación.

Muchas gracias, eso me indica que conoce diferentes contextos y experiencia enfrentando diferentes retos. Continuamos explorando como estudia el teorema de Pitágoras, por ejemplo, ¿cómo introduce el tema?

Bueno para ese momento hemos estudiado diferentes propiedades de los triángulos, la verdad me gusta explicarles que tienen diferentes aplicaciones, en la industria, y les interesa mi área, el área de cómputo, por ejemplo en el diseño de videojuegos, donde el estudio de las figuras y los triángulos es básico, o como loas tarjetas gráficas miden su velocidad dependiendo de la cantidad de triángulos que pueden graficar, o les llevo ejemplos para que entiendan que no es un tema que se quede sin utilizar, y ya después hacemos ejercicios, a veces más sencillos, esto es para motivarlos.

Ya al entrar en el tema de la trigonometría les comparto una canción que se llama “el rock de Pitágoras”, es una estrategia para que lo recuerden, lo utilizo prácticamente con todos mis alumnos, ¿lo has escuchado?

No, la verdad no lo conocía

Si gustas, te lo comparto, aquí lo tengo (comparte el tema de “el rock de Pitágoras” de los hooligans) Es una canción cortita, y a algunos les gusta, aunque no a todos, depende del grupo. Incluso algunos alumnos llegan a corregirla ya que no siempre es precisa, pero bueno esa es una muestra de que aprendieron.

Posteriormente ya entramos a hablar de que el teorema se aplica en triángulos rectángulos, no en cualquier tipo de triángulos, y utilizo el geoplano, afortunadamente la escuela cuenta con el material, les pido que construyan diferentes triángulos, los clasificamos y luego nos concentramos en el triángulo rectángulo, definimos sus partes y les pido que anoten las observaciones. Es útil pues sale de la forma común de presentar el discurso, que alguna vez utilice, pero con la experiencia he visto que experimentar con objetos físicos tangibles les ayuda a entender. También las notas que hacen son como ellos la entiendan, no les dicto pues es más fácil que ellos se entiendan cuando necesitan escribirlo. También les pido que hagan un dibujo, que ilustre el teorema, y utilizando dibujos o el geoplano les pido que encuentren la relación de la canción, o que hagan un dibujo en el patio, depende de cómo se comporte el grupo.

Cuando ellos construyen los cuadrados de los lados de diferentes triángulos pueden observar que el teorema, cuando es un triángulo rectángulo, siempre es cierto. Una vez que ellos lo han experimentado ya dejamos la parte más lúdica y empezamos con la parte formal, obtenemos la expresión formal, la expresión algebraica y luego ellos necesitan utilizar conocimiento algebraico para calcular los lados de un triángulo rectángulo.

Cuando terminamos esa parte intentamos resolver problemas, ya que en algunas ocasiones las propuestas solo contienen formas o triángulos que no tienen un contexto, yo intento implementar problemas que los pongan en contexto, por ejemplo, problemas de triangulación, siempre en condiciones que lo permitan, como calcular la posición de alguien con antenas de celulares, entro otros. Y dependiendo de cómo reaccionan los chicos puedes ir variando, ya sabiendo cómo reaccionan ellos pueden salir al patio para calcular algunas alturas, o distancias, y combino ejercicios, por ejemplo dividiendo un terreno en triángulos, y les gusta, incluso puedo introducir una especie de competencia para que calculen medidas del patio, en esas ocasiones su atención se centra en el juego y el teorema es más un auxiliar para ganar, obviamente tengo que revisar sus ejercicios, que tengan soluciones correctas, que los métodos sean adecuados, pero siempre depende del grupo, algunos les gusta salir al patio, a otros no les gusta asolearse y se quedan en el salón con los geoplanos.

Otro ejercicio es el de "geopardí", en el tengo los problemas clasificados por el nivel de dificultad, ellos eligen y según los puntos que quieran ganar, o si prefieren asegurar una respuesta correcta.

Bueno profe, la verdad que ha abarcado bastantes aspectos del tema, solo antes de continuar, quisiera preguntarle de las demostraciones, entiendo que es más del tipo deductiva, para que alcancen una generalización les permite explorar diferentes triángulos para que concluyan que siempre que el triángulo es rectángulo se cumple el teorema de Pitágoras

Bueno, para esos casos implemento la herramienta de GeoGebra, principalmente porque me permite experimentarlo de forma visual, les planteo a los alumnos un triángulo rectángulo con los cuadrados de sus lados y los alumnos lo redimensionan, entonces pueden ver que la medida de las áreas se hace más grande o más pequeña, pero la relación de igualdad se mantiene, le permito a los alumnos moverlo con un ratón inalámbrico, curiosidades de la vida, en la otra escuela, que era rural, tenía un aula de cómputo y podía proporcionarle a los alumnos una computadora para cada quien y en esta escuela lo proyecto y los alumnos utilizan todos la misma computadora

También si se presta lo hago con alumnos demostraciones, pero con figuras diferentes, por ejemplo, en lugar de utilizar cuadrados, planteo triángulos equiláteros o semicírculos, para ver si la relación se mantiene y sí lo hace. Es una forma en que los alumnos pueden comprobar que la relación que establece el teorema de Pitágoras es verdadera.

Me parece muy bien, ya, por último, bueno sí me permite, quería mostrarle la propuesta que yo quiero estudiar, son demostraciones visuales (empieza a proyectar un archivo de GeoGebra) esta es la demostración de Perigal, aquí está en GeoGebra para que sea más fácil compartir y lo que hago es que esta misma demostración en físico a modo de rompecabezas se lo doy a los alumnos y tienen que mover las piezas para comprobar la igualdad del área de los cuadrados. ¿Usted qué opina de este tipo de actividades?

Pues me parece muy bien, es una buena propuesta, lo que te puedo decir es que siempre vamos a encontrar chicos para los que nuestras propuestas sean de las mejoras, pero no para todos. Por eso es importante tener variedad de actividades, esta actividad me parece excelente, pero sería necesario crear variaciones de forma que puedas elegir aquella que mejor se ajuste a la mayoría del grupo, por eso yo tengo una variedad de actividades, no pretende hacer todo con todos, elijo la actividad que mejor encaje con la forma de trabajo del grupo.

Sí claro, muchas gracias, y por último de acuerdo con la pandemia, que es un contexto que estamos enfrentando actualmente, y aunque podemos tener esperanza en que va a terminar pronto, no es posible saberlo, bueno, usted ha pensado en alguna forma de enseñar el tema, ya que bueno, las actividades que me comparte funcionan muy bien en el modo presencial, pero en una modalidad semipresencial o de grupo dividido o en otros modos pues tendrían que cambiar, usted ¿Ha pensado en los cambios que haría?

Bueno, he estado observando, ya que bajo el programa de educación a distancia que se está proponiendo es con clases por televisión y aunque muchos de los contenidos y materiales que han propuesto me parecen de muy buena calidad, ya que han utilizado material de telesecundaria, pero si me gustaría conocer un poco más, ya que me gustaría llevarlos como una situación a-didáctica, y para eso necesito analizar los materiales que se proponen, y plantear estrategias que les permitan hacerlas en casa con ayuda de sus padres o hermanos, de modo que entiendan que es importante aprender, aunque no he determinado bien todos los cambios. Cuando tengamos acceso a los repositorios que se van a transmitir ya podré hacer las adaptaciones, a mí me gustaría hacer reuniones en zoom o meet, pero ya explorando aproximadamente el 20% no tiene acceso. Otra forma seria una guía visual, como una especie de comic, son las ideas que tendría hasta ahora.

Bueno, muchas gracias, la verdad me ha aportado muchas ideas, y bueno, quería preguntarle si le gustaría probar el material, aunque no es lo más importante es necesario saber que este material e adecuado, y tal vez para eso habría que implementarlo, no estoy muy seguro de que se pueda este año, pero si existiera la posibilidad, usted me ayudaría probándolo.

Sí claro, voy a trabajar con tercero y con mucho gusto te ayudo.

Eso sería todo, muchas gracias

ANEXO 10. Entrevista a profesor 5

Hola, la primera parte de la entrevista son datos de identificación, nombre, edad, eso me sirven para determinar que elegía a una muestra variada y evitar sesgos de opinión.

"N", 3 años como docente en servicio 1.5 años en nivel básico y he trabajado en nivel superior y nivel medio superior, matemático de profesión y actualmente estudio la maestría en educación matemática.

Bueno, me interesa saber cómo han sido los contextos en los que has trabajado, también es interesante que has trabajado en nivel medio superior y nivel superior, ya que en nivel preparatorio o equivalente se retoma el teorema de Pitágoras cuando ven trigonometría y eso y en el nivel superior dependiendo de la carrera se ve de nuevo o no según lo necesiten. Entonces me interesa saber cómo han sido tus experiencias en esos trabajos.

Empecé en una escuela privada en nivel básico, era una escuela con un nivel no muy alto. En esa escuela también impartí clase en nivel bachillerato, donde tenían problemas por lo mismo de que en secundaría no estaban muy bien así que tuvimos que repasar muchos contenidos, particularmente el teorema de Pitágoras.

En cuanto a nivel superior impartí clases para las carreras de física, matemática y actuaría, y bueno, ahí no hubo necesidad de repasarlo. Incluso cuando di la materia de cálculo, pero cuando impartí el curso de geometría sintética se ve el tema y discutimos las distintas demostraciones, tanto la de Euclides como las geométricas. Fue interesante ya que eran alumnos de tercer semestre por lo que el nivel de formalidad no era tan alto, pero sí mantenían una estructura, un tanto similar al nivel preparatoria.

En la escuela donde trabajo actualmente es una escuela con un nivel más alto, recibí a los grupos con un buen nivel, y en aquellos grupos donde ya lo habían estudiado no fue necesario repasarlo, y en aquellos donde era un tema nuevo pude implementar las actividades que normalmente utilizo.

En caso de que lleven un libro de texto sigo la secuencia del libro de texto, pero de ser posible prefiero empezar con la parte geométrica o manipulable y no con el teorema ya en concreto. Por ejemplo, tomo una figura y empiezo a formar cuadrado alrededor, o les planteo un problema y ellos son los que tienen que ilustrar la situación, luego discutimos las características con las que cumplen os triángulos, en qué casos son triángulos rectángulos y en qué casos no y cuál es la relación se puede cumplir en esos cuadrados cuando el triángulo es rectángulo y las desigualdades que se dan cuando no lo es. Después me gusta trabajar un poco con GeoGebra, que manipule, que cambien las medidas que observen diferentes casos y al final ya pueden llegar a la conclusión de que es una relación que siempre se cumple.

En cuanto a las demostraciones, no doy como tal una demostración formal en nivel básico, pero en cursos de licenciatura si se ve, pero nunca me ha tocado que los alumnos la pidan, se quedan (conformes) con las demostraciones geométricas, o con colorear cuadrados en una cuadricula, o con la demostración en GeoGebra. En una ocasión si me toco colaborar en una demostración visual donde construían un triángulo con los cuadrados de sus lados y rellenaban con agua o arena los cuadrados de los catetos y cuando le daban vuelta ya podían ver como cubría el e cuadrado de la hipotenusa.

Gracias a algunos ejercicios de la olimpiada de matemáticas se vio la necesidad de demostrar que la relación de igualdad se daba con cualquier conjunto de figuras semejantes, y que siempre que fueran figuras semejantes construidas sobre los lados de triángulos rectángulos se cumple la igualdad entre la suma de las áreas.

También intento hacer mucho énfasis en que no se casen con la fórmula de $a^2+b^2 = c^2$, por ejemplo, si necesitan pronunciar el teorema procuro que lo hagan con sus condiciones, “en cualquier triángulo rectángulo la suma de las áreas de los cuadrados de los catetos es igual al área del cuadrado de la hipotenusa” ya que mantener la fórmula les puede causar problemas cuando intentan resolver problemas donde les presentan literales diferentes.

Esa es una observación interesante, ya que en una actividad yo planeaba introducir una especie de figura para dirigir a los alumnos en el sentido de que escribieran la fórmula, pero tienes razón, no debe ser producto de un recurso nemotécnico, tienen que ser producto de un razonamiento.

Hay alguna actividad que a ti te guste implementar cuando estudian el teorema de Pitágoras

Este año, por tiempo, inicie planteando diferentes triángulos y ellos tenían que calcular la medida de un lado, cateto o hipotenusa. Que este año como estaban remodelando la escuela, pues les pedí que le preguntaran a los albañiles s como hacen para determinar que las paredes queden a escuadro, entre otras cosas, pero es una situación específica, no siempre van a tener a la mano un albañil o alguien así.

Procuro, generalmente, iniciar con problemas donde puedan ver su utilidad, contextualizados, y una vez que eso queda claro puedo continuar con la parte algorítmica o de razonamiento geométrico, pero eso ya es regularmente lo último. La verdad encuentro difícil encontrar problemas contextualizados, y muchos o tienen sentido o se refieren a los mismos problemas de siempre, como el de la escalera. En cuanto que tipo de problemas prefiero son los no rutinarios, aquellos que no ofrecen el método de solución de manera evidente, eso cuando lo estudian por primera vez en secundaria.

En cuanto a como lo retomo en bachiller, simplemente planteo problemas donde lo puedan utilizar o ejercicios algorítmicos, ya que si observo que no los pueden resolver ya lo explico, pero en esos casos me concentro en la parte procedimental.

Muy bien, me da un poco de curiosidad, que tipo de contenidos exploras cuando te centras en la parte algorítmica, yo entiendo que pones la figura y pides la medida de un lado, el área de un cuadrado o el área del triángulo, o planteas expresiones algebraicas, entonces, ¿Qué tipo de aprendizajes exploras?

Cuando impartí clases en nivel licenciatura, incluso para el área de matemática, me di cuenta que les cuesta trabajo seguir procedimientos, o interpretar ecuaciones, y cuando llegue al nivel bachillerato me di cuenta que la forma en la que ellos operan depende mucho de la forma en que lo vieron en niveles inferiores, donde tienen que aprender a identificar qué es lo que representa cada variable, entonces eso es lo que busco, interpretación matemática. Por otro lado, cuando quiero que entiendan el teorema parto de problemas contextualizados.

Muy bien, de los problemas que prefieres mencionas que sean no rutinarios y contextualizados, es decir valoras más este tipo de problemas sobre aquellos que son “rutinarios” o no contextualizados, ¿podrías dar un ejemplo?

Por poner un ejemplo, un problema que surgió fue cuando un alumno de primero me pidió calcular algunas medidas de un balón que estaba formado por pentágonos y hexágonos, y observando el problema le pedí a los alumnos de tercero que calcularan el área, obviamente con los de primero no podía, pero cuando lo propuse en tercero y a lo utilizaron para calcular alturas y apotemas, entonces son problemas de ese tipo. Como tal la verdad no procuro repetir problemas, prefiero que se ajusten con los intereses de los alumnos.

Muy bien, la siguiente pregunta es si has considerado alguna adecuación para enfrentar el contexto en el que estamos, es decir con las medidas de distanciamiento, ya que en realidad no sabemos cuál va a ser el modo de trabajo durante este ciclo escolar.

Sí, he pensado en partir de los medios digitales ya existentes, GeoGebra, Khan Academy, plataformas de ese estilo, y con el libro de texto, ya que tiene su propia plataforma digital. Ahora, necesito ir viendo como responden los chicos, ver si a que actividades reaccionan mejor y ya con eso ir haciendo adecuaciones.

Muy bien, otra pregunta es respecto a la actividad que yo estoy diseñando, son rompecabezas basados en demostraciones del teorema de Pitágoras por disección, donde los alumnos tienen que armar las piezas para formar los cuadrados de los catetos y el cuadrado de la hipotenusa, se supone que contribuyen a generar un mayor significado ya que presentan una imagen con la que pueden relacionar el teorema, son llamativos y presentan el teorema en forma de problema. Lo presento ya hecho como una forma de optimizar tiempos, ya que en ocasiones si los alumnos son quienes las construyen pueden salir mal o dependen de su habilidad en el uso de un instrumento, pero bueno, cuál es tu impresión de este tipo de actividades.

Se ve interesante, adecuada, pero me genera duda el hecho de que los colores puedan predisponer a los alumnos.

Muy bien, he revisado el tema de los colores y no parece ser tan significativo, es decir, es un factor importante, pero no parece generar ningún efecto en el aprendizaje. Entonces, si pudieras implementar esta actividad, es decir se adecua a tu forma de trabajo y al grupo donde impartas el tema, estarías dispuesto a aplicarla.

Sí, tendría que checar si los alumnos y dependiendo de eso, claro.

Bueno, eso sería todo, muchas gracias por tu tiempo y por apoyarme con esto.

ANEXO 11. Entrevista a profesor 6

Hola, la primera parte es para que quede registrado que la muestra de profesores está integrada por diferentes perfiles, ¿entonces quería preguntarte cuantos años tienes? ¿Cuántos años de servicio tienes? ¿en qué tipo de escuelas has trabajado?

Soy Ingeniero bioquímico. He trabajado por tres años en una escuela particular, pequeña, en Momoxpan,

¿Como es el contexto?

Pues es una escuela muy inclusiva, tenemos niños muy tranquilos y otros con problemas de aprendizaje, por ejemplo, hay alumnos con TDH o hiperactivos, es una escuela inclusiva.

Y en cuestión de recursos, ¿son de escasos recurso?, ¿tienen acceso a diferentes materiales?

Algunos alumnos no son de muchos recursos, pero si les pides material, una libreta o algo así, sí lo consiguen.

Muy bien, pues muchas gracias, esto es para evitar que mi muestra este sesgada al entrevistar solo a un tipo de profesor o evitar algún tipo de contexto. ¿Has trabajado en tercero de secundaria? ¿has podido enseñar el teorema de Pitágoras?

Sí, por dos años consecutivos he dado clase en tercero y sí he impartido el teorema de Pitágoras

¿qué actividades utilizas para introducirlos?

Bueno empiezo planteando un rectángulo al cual partimos con una diagonal y les pregunto, qué tipo de triángulo se forma, les planteo luego si conozco los dos lados del rectángulo pero necesito saber la medida del lado del tercer lado, aquel que se forma con la diagonal, con eso creo la necesidad de establecer una relación, luego les explico que existe el teorema de Pitágoras, propuesto por un filósofo y matemático de ese nombre, Pitágoras, y que lo utilizaba para calcular medidas o trazar ángulos rectos cuando no se contaba con una escuadra. Este teorema nos sirve para calcular los lados de un triángulo rectángulo, les explico que el teorema sólo se utiliza en triángulos rectángulos, que el nombre de los lados que forman el ángulo recto en un triángulo rectángulo es cateto y que el lado que se opone y es el lado más largo se llama hipotenusa.

Una vez que conocen eso aprovecho el triángulo que dibujamos al principio, le asigno medidas, regularmente las de 3 y 4 para los catetos y la hipotenusa de 5 y ese ya es el primer ejercicio que hacemos. Antes de introducir la fórmula $a^2 + b^2 = c^2$, dibujo sobre los lados del triángulo unos cuadrados, los cuadrados de los catetos y el cuadrad de la hipotenusa, y calculamos sus áreas, por ejemplo, dividiendo los cuadrados con una cuadricula, en ese primer ejemplo los cuadrados tienen áreas de 9 16 y 25, y si sumas 9 y 16 el resultado es 25, eso es lo que representa que la suma de los cuadrados de los catetos es igual a la hipotenusa. Con eso les explico el teorema de Pitágoras.

Muy bien, esa es la introducción, y mientras estudian el teorema, ¿Qué tipo de actividades prefieres implementar?

Los que propongo al principio son ejercicios, con triángulos donde queremos calcular la media de un lado, una vez que ya conocen el teorema les propongo diferentes problemas, por ejemplo, calcular la longitud de la una escalera, o la distancia entre dos puntos, pero primero quiero que conozcan el teorema y sepan utilizarlo para después resolver problemas recurriendo a él.

Muy bien, y en cuanto a demostraciones, ¿Cuáles prefieres utilizar? O ¿prefieres no utilizar demostraciones?

Bueno la demostración que utilizo es dibujar un cuadrado con lados iguales a "a+b" y dibujo un cuadrado en diagonal inscrito en el primer cuadrado con sus vértices en el punto donde los segmentos a y b se tocan. Al calcular el área del cuadrado multiplicando sus lados tenemos $a^2 + 2ab + b^2$ y si lo calculamos con las figuras que lo forman tendríamos c2 más cuatro triángulos de base a y altura b (4(ab)2=2ab) por lo que al restar los cuatro triángulos en ambas expresiones tenemos que $a^2+b^2=c^2$.

Muchas gracias, bueno, y en cuanto a los problemas, ¿qué tipo de problemas prefieres implementar?

Los problemas que más implemento son de longitudes, como decía calcular la longitud de una escalera, o si dos personas que hacen un recorrido donde la trayectoria forma un triángulo rectángulo calcular la distancia entre ellos, o de acuerdo con un punto de referencia que forma un ángulo recto entre dos personas o lugares, igual determinar la distancia entre ellos a al punto de referencia, dependiendo.

Muy bien, la siguiente pregunta es referente a la pandemia, ya que no sabemos cómo se va a trabajar, que, aunque es probable que sigamos a distancia, no sabemos qué va a pasar. Bueno, has tenido una consideración para trabajar así.

Bueno, la consideración fue partir de lo que ya tenemos, entonces yo partí de la explicación que hago regularmente y en un archivo de Word con imágenes intenté explicarles a los jóvenes, describí los pasos que se necesitan para demostrar el teorema y como pueden resolver un problema con él. Pero claro, sigo buscando diferentes formas de involucrarlos, por ejemplo, juegos o software.

Qué bueno, aprovechando quería compartirte la actividad que yo implemento, son rompecabezas, originalmente los tengo como material manipulable y las implementaba como un juego, pensaba que el aprendizaje sería más profundo y duradero ya que la actividad es interesante y desafiante, los tengo clasificados por niveles de dificulta, este es de los primeros, (empieza a compartir un archivo de GeoGebra) es una demostración propuesta por Perigal en el siglo XIX, y los alumnos tiene que mover las piezas. Quería saber cuál es tu opinión general de este tipo de actividades.

Es una actividad interesante, mi primera impresión es la de un tangram con el que he trabajado en grupos de secundaría, pero no lo he implementado para demostrar el teorema de Pitágoras, además me parece interesante ya que también trabajas el mismo concepto de las áreas de cuadriláteros, pero en lugar de buscar sus áreas con medidas lo haces con las piezas que forman las figuras.

Sí, en una entrevista anterior, una de las profesoras que me ayudaron a desarrollar el material me comento que una de sus alumnas no consideraba suficiente el simplemente ordenar las piezas y quería medir los cuadrados, para eso la maestra me sugirió utilizar piezas de Tetris en la demostración, esto para ofrecerle a los estudiantes una escala de medida en caso de que no se conformen con haber formado las figuras.

Ahora, si tuviéramos la oportunidad de implementar la actividad me gustaría preguntarte si es que, si existiera la posibilidad de implementar este tipo de actividades, ¿a ti te gustaría participar?

Sí, claro, la verdad es que para los alumnos este tipo de actividades les llama la atención. Me parece interesante y de utilidad para los estudiantes.

Muy bien, ahora esto es parte del material, pero existe un proceso para pasar de una demostración visual a la expresión algebraica, ¿Cómo conduce este proceso?

Bueno, cuando yo implemento esta actividad les pido a ellos que intenten buscar una relación entre las medidas de los catetos y la medida de la hipotenusa, y ellos empiezan proponiendo que sumar, multiplicar van explorando y cuando dibujo los cuadrados ya pueden ver que esa relación se cumple, pero de omento con esta demostración que propones, tendría que analizar cuál sería el mejor proceso, además que también el modo de trabajo a distancia puede ser un factor.

Claro, es difícil implementar una actividad, y siempre existe diferencia entre cuando se aplica por primera vez y luego uno va conociendo los problemas, también depende los grupos. Po ejemplo en esta actividad se puede complementar ampliando el ángulo del triángulo a más de 90° o reducirlo, de modo que los alumnos vean que la relación de igualdad solo se cumple cuando el triángulo es rectángulo, y para solucionar el problema de la distancia podría implementarse con GeoGebra en línea o haciendo los rompecabezas en tamaño carta y que ellos lo impriman en sus casas. Bueno, aún es pronto para decidir, pero te agradezco mucho que me compartas tu experiencia y tu opinión.

No hay problema, para cualquier cosa en la que pueda ayudar cuenta conmigo.

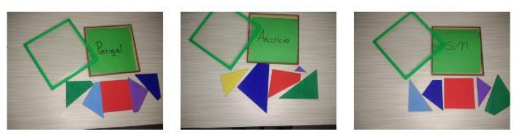
Anexo 12. Secuencia de lección “Teorema de Pitágoras con demostraciones visuales como actividad lúdica 1”

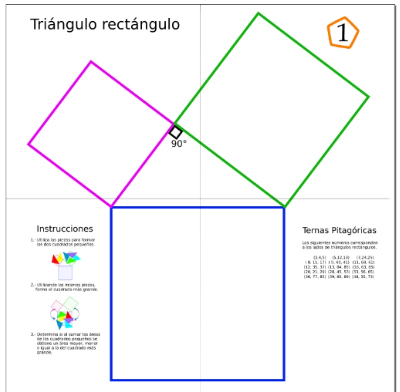
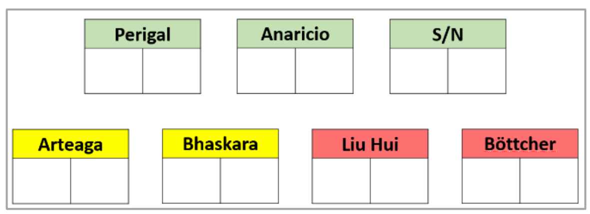
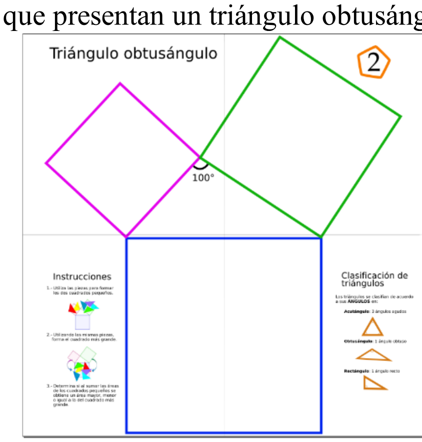
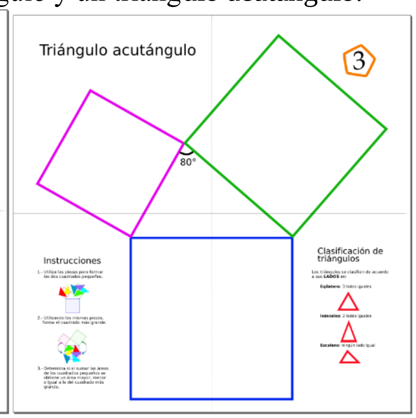
Propósito de la sesión: que los estudiantes exploren mediante actividades lúdicas y material manipulable la relación entre las áreas de los cuadrados que se levantan sobre los lados de diferentes triángulos para que establezcan las condiciones necesarias para que la suma de las áreas de dos de los cuadrados sea igual al área del tercer cuadrado.

Tiempo estimado: 3:00 hrs. **Participantes:** de 4 a 6 estudiantes de secundaria.

Recursos: Aula dispuesta para hacer un trabajo en equipos de 3 integrantes, pizarrón y proyector (o laminas para presentar ilustraciones), juego geométrico, hojas cuadriculadas, juego de rompecabezas pitagóricos (piezas de rompecabezas, cajas para guardar, plantillas para armar, carteles con el nombre de quien propuso las demostraciones, fichas de colores).

Previo al inicio de la actividad se les explicará a los alumnos que realizarán un juego con el propósito de explorar una propiedad matemática, y que es importante que mantengan el espacio de trabajo ordenado, se laven las manos y utilicen cubrebocas, así como que deberán cuidar y guardar los materiales que se utilicen durante la clase.

Intención	Consigna
Actividad 1 Que los alumnos comparen las áreas de los cuadrados de los catetos de un triángulo rectángulo respecto al área del cuadrado de su hipotenusa.	El profesor organizará al grupo en dos equipos (parejas o equipos de 3 integrantes según la cantidad de sujetos que participan en la sesión), y les proporcionará los rompecabezas con las plantillas para que los armen.  Los rompecabezas están clasificados según su dificultad en verdes, amarillos y rojos. Cada quipo elije un rompecabezas y pueden cambiarlo cuando lo terminen o si no pueden resolverlo.   Utilizando la plantilla “1”, cada equipo deberá armar las piezas para formar los cuadrados magenta y verde. Posteriormente utilizarán las mismas piezas para formar el cuadrado azul.

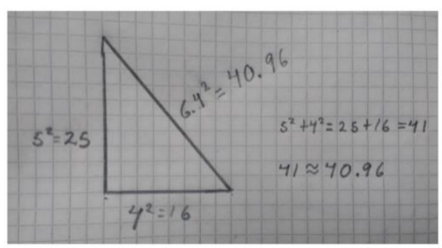
	 Si el rompecabezas está clasificado como verde reciben una ficha equivalente a 3 puntos, si es amarillo reciben una ficha de 4 puntos y si es rojo reciben 5 puntos. Gana el equipo que junta más puntos después de 30 minutos. El profesor puede registrar los rompecabezas que han resuelto con ayuda de las fichas con nombres de cada rompecabezas.  = 3  = 4  = 5  Al concluir deberán determinar si la suma de las áreas de los cuadrados verde y magenta es igual, menor o mayor al área del cuadrado azul.
Actividad 2 Que los alumnos comparen las áreas de los cuadrados levantados sobre los lados de triángulos obtusángulos y acutángulos	Los alumnos deberán repetir la consigna anterior utilizando las plantillas “2” y “3” que presentan un triángulo obtusángulo y un triángulo acutángulo.   En esta ocasión reciben una ficha azul equivalente a 2 puntos cuando arman los cuadrados verde y magenta, y otra ficha azul cuando determinan si la suma de las áreas de estos cuadrados es mayor, menor o igual al área del cuadrado azul en cada plantilla.  =2

<table>
<tr>
<td></td>
<td>Gana el equipo que más puntos acumula después de 30 minutos. Al finalizar los equipos deberán guardar sus rompecabezas en las cajas para devolverlos al profesor.
Si tienen problemas para armarlos pueden observar el reverso de la hoja con el nombre del rompecabezas donde encontrarán una imagen con el rompecabezas armado.
</td>
</tr>
<tr>
<td>Actividad 3

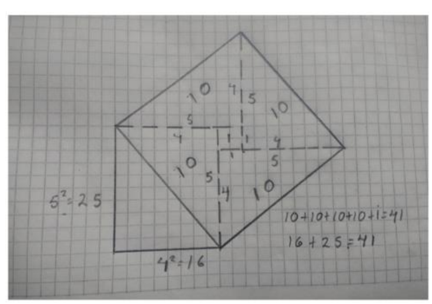
Establecer que la relación de igualdad entre el área del cuadrado de la hipotenusa y la suma de los cuadrados de los catetos es verdadera siempre que el triángulo sea rectángulo</td>
<td>El profesor preguntará:
“¿Creen que la relación de igualdad entre las áreas de los cuadrados se cumplirá en cualquier triángulo <u>rectángulo</u> o solamente en el que se ilustra en la plantilla 1?”

Para que los alumnos contesten esta pregunta cada equipo deberá construir con ayuda de su juego geométrico y las hojas cuadriculadas, varios triángulos rectángulos con diferentes medidas para observar si la relación se cumple en todos ellos o no.

Para calcular el área de los cuadrados pueden medir los lados y elevarlos al cuadrado. En este caso podrían tener pequeñas diferencias causadas por el grado de exactitud de las medidas que toman.

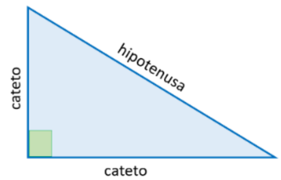


Si es necesario, para conseguir una medida exacta pueden construir el cuadrado que se levanta sobre los lados en diagonal, dividirlo en triángulos y rectángulos y calcular sus áreas.

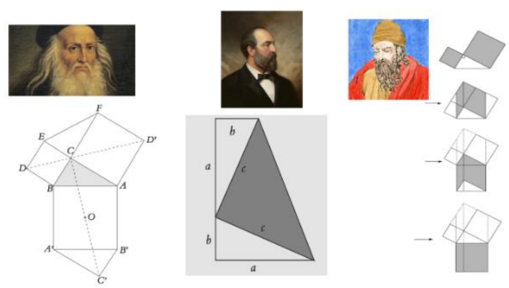

</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>Cuando cada equipo tenga sus respectivos triángulos compartirán sus observaciones y concluirán una respuesta para la pregunta que formuló el profesor al inicio de la actividad.</td></tr>
<tr><td>Actividad 4

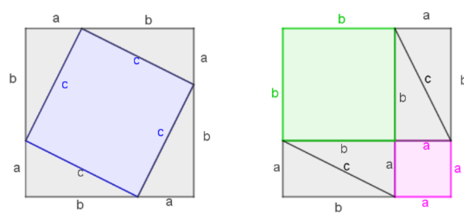
Que los alumnos establecer la expresión algebraica del teorema de Pitágoras</td><td>El profesor explicará al grupo que:
1. Han estado estudiando el teorema de Pitágoras, los lados que forman el ángulo recto en un triángulo rectángulo, se conocen como catetos y el lado que se opone es la hipotenusa y,



2. Existen diferentes formas de demostrar que la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa



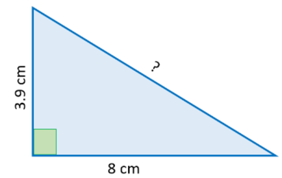
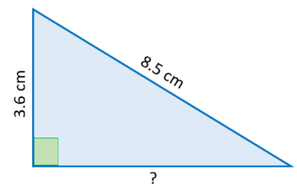
Para establecer la expresión algebraica del teorema de Pitágoras el profesor presentará una ilustración como la que se muestra y solicitará a cada equipo calcular el área de cada cuadrado según la información que se ofrece.



Dado que $2ab + c^2 = a^2 + 2ab + b^2$, al restar 2ab en ambos miembros de la igualdad es posible decir que:
$$\mathbf{c^2 = a^2 + b^2},$$
Esto es justamente la relación que han estado estudiando y se puede leer como:

“el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos”.</td></tr>
<tr><td>Actividad 5

Que los alumnos utilicen la expresión algebraica del</td><td>El profesor presentará a los alumnos un triángulo rectángulo con las medidas de sus catetos y les pedirá que calculen la medida de la hipotenusa.</td></tr>
</table>

teorema de Pitágoras (**c**^{2} = **a**^{2} + **b**^{2}) para calcular el lado faltante de un triángulo rectángulo.	 Para orientar a los alumnos, el profesor puede realizar las siguientes preguntas: 1. ¿Cuál debe ser la relación entre los lados de un triángulo rectángulo? 2. ¿Cuánto miden las áreas de los cuadrados de los catetos? 3. ¿Cuál debe ser la medida del área de cuadrado de la hipotenusa? 4. Una vez que conoces la medida del cuadrado de la hipotenusa, ¿Cómo puedes calcular la medida de la hipotenusa? Es posible repetir un par de ejercicios similares para confirmar que los alumnos desarrollan un procedimiento para calcular la medida de la hipotenusa conociendo la medida de los catetos. El profesor presentará a los alumnos un triángulo rectángulo con las medidas de un cateto y la hipotenusa y les pedirá que calculen la medida del cateto faltante.  Para orientar a los alumnos, el profesor puede realizar las siguientes preguntas: 1. ¿Cuánto mide el área del cuadrado del cateto? 2. ¿Cuánto mide el área del cuadrado de la hipotenusa? 3. ¿Cuánto debería medir el área del cuadrado del cateto faltante? 4. Una vez que conoces la medida del cuadrado de ese cateto, ¿Cómo puedes calcular la medida del cateto? Es posible repetir un par de ejercicios similares para confirmar que los alumnos desarrollan un procedimiento para calcular la medida de la de un cateto, conociendo la medida de la hipotenusa y el otro cateto.
Actividad 6 Evaluar si las actividades han contribuido a que los estudiantes resuelvan ejercicios que impliquen el teorema de Pitágoras	Después de un periodo de tiempo, no menor a un día y no mayor a una semana, el profesor le proporcionará a cada alumno una prueba con el propósito de evaluar su capacidad para resolver ejercicios que impliquen utilizar el teorema de Pitágoras y les pedirá que las contesten de forma individual.

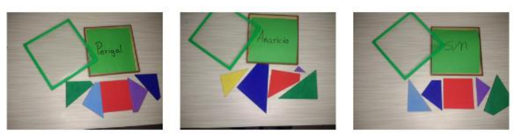
Anexo 13. Secuencia de lección “Teorema de Pitágoras con demostraciones visuales como actividad lúdica 2”

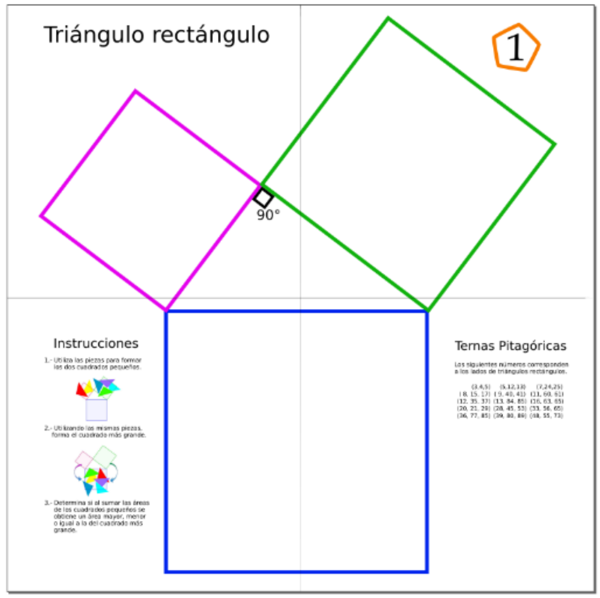
Propósito de la sesión: que los estudiantes exploren mediante actividades lúdicas y material manipulable la relación entre las áreas de los cuadrados que se levantan sobre los lados de diferentes triángulos para que establezcan las condiciones necesarias para que la suma de las áreas de dos de los cuadrados sea igual al área del tercer cuadrado.

Tiempo estimado: 3:00 hrs. **Participantes:** de 4 a 6 estudiantes de secundaria.

Recursos: Aula dispuesta para hacer un trabajo en equipos de 3 integrantes, pizarrón y proyector (o laminas para presentar ilustraciones), juego geométrico, hojas cuadriculadas, juego de rompecabezas pitagóricos (piezas de rompecabezas, cajas para guardar, plantillas para armar, carteles con el nombre de quien propuso las demostraciones, fichas de colores).

Previo al inicio de la actividad se les explicará a los alumnos que realizarán un juego con el propósito de explorar una propiedad matemática, y que es importante que mantengan el espacio de trabajo ordenado, se laven las manos y utilicen cubrebocas, así como que deberán cuidar y guardar los materiales que se utilicen durante la clase.

Intención	Consigna
Actividad 1 Que los alumnos comparen las áreas de los cuadrados de los catetos de un triángulo rectángulo respecto al área del cuadrado de su hipotenusa.	El profesor organizará al grupo en dos equipos (parejas o equipos de 3 integrantes según la cantidad de sujetos que participan en la sesión), y les proporcionará los rompecabezas con las plantillas para que los armen.  Los rompecabezas están clasificados según su dificultad en verdes, amarillos y rojos. Cada quipo elije un rompecabezas y pueden cambiarlo cuando lo terminen o si no pueden resolverlo.   Utilizando la plantilla “1”, cada equipo deberá armar las piezas para formar los cuadrados magenta y verde. Posteriormente utilizarán las mismas piezas para formar el cuadrado azul.

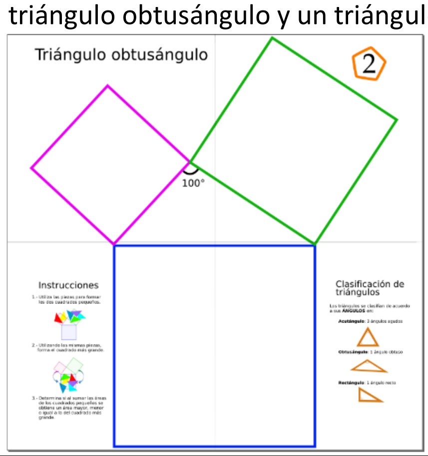
<table>
<tr>
<td></td>
<td>


Si el rompecabezas está clasificado como verde reciben una ficha equivalente a 3 puntos, si es amarillo reciben una ficha de 4 puntos y si es rojo reciben 5 puntos. Gana el equipo que junta más puntos después de 30 minutos. El profesor puede registrar los rompecabezas que han resuelto con ayuda de las fichas con nombres de cada rompecabezas.

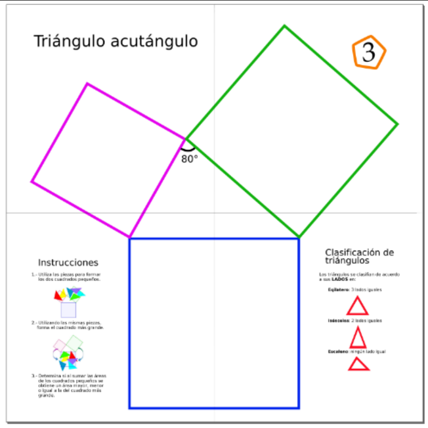
<table>
<tr><td colspan="2">Perigal</td><td colspan="2">Anaricio</td><td colspan="2">S/N</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
<table>
<tr><td colspan="2">Arteaga</td><td colspan="2">Bhaskara</td><td colspan="2">Liu Hui</td><td colspan="2">Böttcher</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Al concluir deberán determinar si la suma de las áreas de los cuadrados verde y magenta es igual, menor o mayor al área del cuadrado azul.
</td>
</tr>
<tr>
<td>
Actividad 2

Que los alumnos comparen las áreas de los cuadrados levantados sobre los lados de triángulos obtusángulos y acutángulos
</td>
<td>
Los alumnos deberán repetir la consigna anterior utilizando las plantillas “2” y “3” que presentan un triángulo obtusángulo y un triángulo acutángulo.



</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td>


En esta ocasión reciben una ficha azul equivalente a 2 puntos cuando arman los cuadrados verde y magenta, y otra ficha azul cuando determinan si la suma de las áreas de estos cuadrados es mayor, menor o igual al área del cuadrado azul en cada plantilla.

 =2

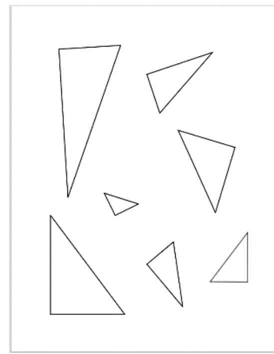
Gana el equipo que más puntos acumula después de 30 minutos. Al finalizar los equipos deberán guardar sus rompecabezas en las cajas para devolverlos al profesor.
Si tienen problemas para armarlos pueden observar el reverso de la hoja con el nombre del rompecabezas donde encontrarán una imagen con el rompecabezas armado.


</td>
</tr>
<tr>
<td>
Actividad 3

Establecer que la relación de igualdad entre el área del cuadrado de la hipotenusa y la suma de los cuadrados de los catetos es verdadera siempre que el triángulo sea rectángulo
</td>
<td>
El profesor preguntará:
“¿Creen que la relación de igualdad entre las áreas de los cuadrados se cumplirá en cualquier triángulo <u>rectángulo</u> o solamente en el que se ilustra en la plantilla 1?”

Se espera que los alumnos propongan utilizar diferentes triángulos rectángulos para comprobar si la relación de igualdad entre la suma de las áreas de los cuadrados que se levantan sobre los lados que forman el ángulo recto y el área del cuadrado levantado sobre la hipotenusa es verdadera siempre o sólo en algunos casos.

Para evitar que los alumnos realicen la representación de un triángulo rectángulo en donde no sea posible calcular la media exacta de la longitud de uno de los lados (ya sea por la imprecisión del dibujo o a que la media corresponda a un número irracional) el profesor proporcionará una hoja con triángulos rectángulos dibujados a partir de ternas pitagóricas.
</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td>


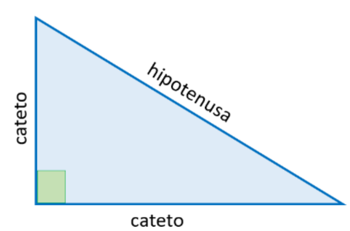
Los alumnos deberán medir los lados y calcular la medida de las áreas de los cuadrados a partir de ellas para después compararlas. El profesor podrá orientar la actividad con preguntas como:

- ¿Cómo saben si el triángulo que esta dibujado es realmente un triángulo rectángulo?
- ¿Cómo pueden calcular el área de los cuadrados que se levantarían sobre los lados de esos triángulos?
- ¿Cómo pueden saber qué áreas deben sumar para comparar con el tercer cuadrado?

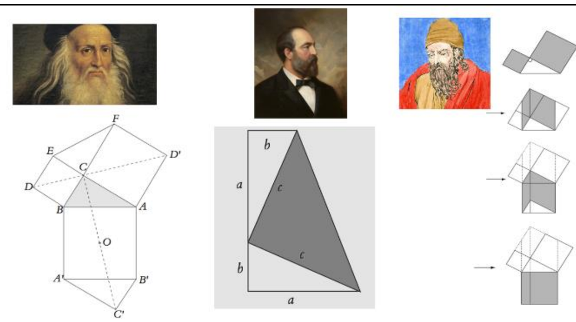
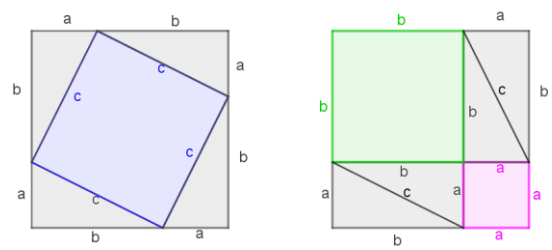
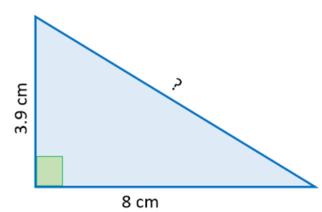
Cuando cada alumno haya comparado las áreas de los cuadrados sus observaciones y concluirán una respuesta para la pregunta que formuló el profesor al inicio de la actividad.
</td>
</tr>
<tr>
<td>

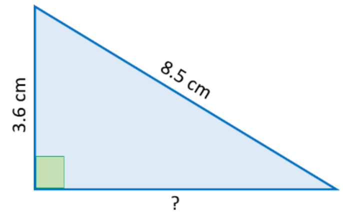
Actividad 4

Que los alumnos establecer la expresión algebraica del teorema de Pitágoras
</td>
<td>
El profesor explicará al grupo que:
1. Han estado estudiando el teorema de Pitágoras, los lados que forman el ángulo recto en un triángulo rectángulo, se conocen como catetos y el lado que se opone es la hipotenusa y,

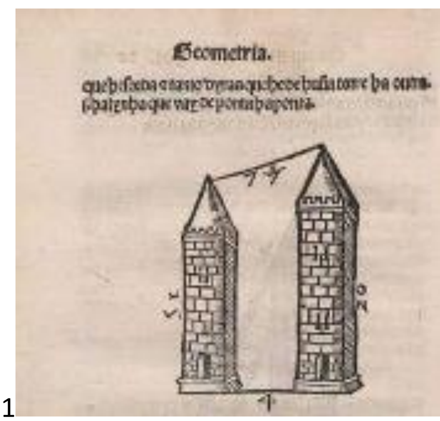


2. Existen diferentes formas de demostrar que la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa
</td>
</tr>
</table>

	 Para establecer la expresión algebraica del teorema de Pitágoras el profesor presentará una ilustración como la que se muestra y solicitará a cada equipo calcular el área de cada cuadrado según la información que se ofrece.  Dado que $2ab + c^2 = a^2 + 2ab + b^2$, al restar 2ab en ambos miembros de la igualdad es posible decir que: $\mathbf{c^2 = a^2 + b^2}$, Esto es justamente la relación que han estado estudiando y se puede leer como: ***"el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos".***
Actividad 5 Que los alumnos utilicen la expresión algebraica del teorema de Pitágoras ($\mathbf{c^2 = a^2 + b^2}$) para calcular el lado faltante de un triángulo rectángulo.	El profesor presentará a los alumnos un triángulo rectángulo con las medidas de sus catetos y les pedirá que calculen la medida de la hipotenusa.  Para orientar a los alumnos, el profesor puede realizar las siguientes preguntas: 5. ¿Cuál debe ser la relación entre los lados de un triángulo rectángulo? 6. ¿Cuánto miden las áreas de los cuadrados de los catetos? 7. ¿Cuál debe ser la medida del área de cuadrado de la hipotenusa? 8. Una vez que conoces la medida del cuadrado de la hipotenusa, ¿Cómo puedes calcular la medida de la hipotenusa? Es posible repetir un par de ejercicios similares para confirmar que los alumnos desarrollan un procedimiento para calcular la medida de la hipotenusa conociendo la medida de los catetos.

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
El profesor presentará a los alumnos un triángulo rectángulo con las medidas de un cateto y la hipotenusa y les pedirá que calculen la medida del cateto faltante.


Para orientar a los alumnos, el profesor puede realizar las siguientes preguntas:
5. ¿Cuánto mide el área del cuadrado del cateto?
6. ¿Cuánto mide el área del cuadrado de la hipotenusa?
7. ¿Cuánto debería medir el área del cuadrado del cateto faltante?
8. Una vez que conoces la medida del cuadrado de ese cateto, ¿Cómo puedes calcular la medida del cateto?
Al concluir los ejercicios el profesor recapitulará las conclusiones a las que se han llegado, el nombre de los lados de un triángulo, el teorema de Pitágoras y las estrategias para calcular distancias recurriendo a él.
</td>
</tr>
<tr>
<td>
Actividad 6

Evaluar si las actividades han contribuido a que los estudiantes resuelvan problemas que impliquen utilizar el teorema de Pitágoras
</td>
<td>
El profesor solicitara a los estudiantes que encuentren el error en la siguiente imagen:
[1] 

En ella se muestran dos torres cuyos centros se encuentran separados por 4m, un tiene una altura de 20m y la otra una altura de 15m, las cimas de ambas torres están unidas por una cuerda de 7m.

El reto consiste en percibir que, si la separación horizontal entre las cúspides es de 4m y la diferencia de alturas es de 5m, la suma de sus cuadros es 41m^2 (16m^2 + 25m^2) por lo que la distancia real entre ambas cúspides es menor a 7m, cuyo cuadrado es igual a 49m2.

De ser necesario el profesor realizara trazos adicionales sobre el dibujo para hacer notar el triángulo rectángulo formado por la cuerda, la distancia entre las torres y la diferencia de alturas. Incluso, de ser necesario, hará notar los cuadrados que se levantan sobre los lados de este
</td>
</tr>
</table>

Anexo 14. Transcripción de la primera intervención.

La primera intervención también se puede observar en el enlace: https://www.youtube.com/watch?v=H74il6_3LXc

P: Esto es un experimento, no estoy evaluándolos a ustedes, estoy evaluando la actividad, entonces siéntanse cómodos. Vamos a empezar con la presentación.

En sus mesas tienen el material completo, en sus mesas tienen tres tapetitos por llamarlos de alguna forma, cada tapetito tiene una figura y cada figura tiene un tipo de triángulo. Bien, ¿qué tipo de triángulo es el primero?

E1: Rectangular

P: Rectángulo, bueno, tienen los nombres escritos, ¿ya vieron?, ¿qué tipo de triángulo es el segundo?

E3: Acutángulo

P: Acutángulo, muy bien, y ¿el tercero?

E2: Obtusángulo

P: Obtusángulo, muy bien

E1: No, El segundo es obtusángulo

P: ¿Y el tercero?

E3: Acutángulo

P: Bueno, ahora, vamos a estudiar algunas de las propiedades de estas figuras cuando se construyen cuadrados sobre sus lados. Antes de empezar, ¿alguien sabe cómo calcular la medida del tercer lado? (muestra un triángulo rectángulo con las medidas DE LOS CATETOS)

(los alumnos dudan y mueven la cabeza negativamente hasta que uno se anima a responder)

E1: Sí

P: ¿Cómo lo haría?

E1: Bueno, sumaría la medid de los dos lados que tenemos

Muy bien, sumaría la medid de los dos lados y así obtendría la medida del tercer lado, ¿alguien más tiene otra forma?

E3: No, la verdad no se me ocurre como

P: Muy bien, pues este es un acertijo que espero al terminar la clase puedan resolver. Vamos a iniciar con la actividad. En cada tapetito tienen las instrucciones, ¿ya las vieron? Lo que vamos a hacer es que los rompecabezas que tienen enfrente los van a armar primero en el tapetito 1, vana a sacar las piezas y van a formar los cuadrados verde y magenta, ¿los pueden identificar? ¿por favor señálenlos?

(Los alumnos los señalan)

P: Exacto, y el magenta, ¿ya lo vieron? ¿cuál sería?, Primero va el verde y el magenta, ese es azul, (mientras que un alumno señala el cuadrado azul) el magenta es el otro. Con esas mismas piezas deben poder armar los dos. Después esas mismas piezas las van a mover para armar el cuadrado azul. Finalmente van a comparar las áreas, es decir si son iguales, si quedo más grande o más chico.

¿Por qué vienen de diferentes colores?, bueno, es que cada rompecabezas es diferente y tiene diferente nivel de dificultad. Los verdes son los más sencillos, los amarillos son más difíciles y los rojos son los más difíciles. Bueno esto es una especie de juego y va a ganar el equipo que más puntos acumule. Si ustedes arman un rompecabezas azul, digo verde, les voy a dar 3 puntos, si arman uno amarillo les voy a dar 4 puntos y si arman uno rojo les voy a dar 5 puntos, al final gana el equipo que más puntos acumule.

E2: ¿podemos combinar rompecabezas y tapetitos?

P: No los pueden combinar, vallan uno a la vez, los rompecabezas no son compatibles, vallan uno a la vez y van a ir eligiendo cuál quieren, es parte del juego, tienen que elegir que rompecabezas más les conviene. Empezamos con el tapetito 1, tienen 20 minutos y gana el equipo que más puntos acumule en esos 20 minutos.

E1: ¿Qué pasa si empezamos con este y luego queremos armar este? (señalando dos rompecabezas diferentes)

Ah, esperen, vamos a empezar juntos, si se dan por vencidos y no saben cómo armarlo, pueden poner las piezas dentro de su cajita, encima del estuche y lo regresan a su lugar, si quieren pueden cambiarlos, tal vez les cueste volver a guardarlo. También si ya terminaron uno, guardan las piezas en su cajita, dentro del estuche y lo cambian por el siguiente, ¿si queda claro?

ES: Sí

P: ¿Dudas o preguntas? Vamos a empezar, tienen 20 minutos, empiecen por abrirlos.

E2: Podemos cambiar el tapetito

Deben usar el tapetito 1 primero.

(Los alumnos empiezan a sacar los rompecabezas y cambian entre uno y otro)

P: Cuando vallan terminando me avisan para que les de su fichita.

(Los alumnos dialogan sobre como acomodar las piezas para formar los cuadrados verde y magenta, un equipo llama al profesor para mostrarle que han terminado el primer rompecabezas)

P: Muy bien, ya terminaron los primeros, ahora tienen que mover esas piezas al otro cuadrado y comparar si cubre todo el espacio, si les sobra o si les falta.

(el profesor observa que un equipo tiene problemas para armar su rompecabezas siguiendo las instrucciones)

P: Tiene que armar tanto el verde como el magenta con esas piezas.

(El equipo reacomoda las piezas y logran armar los cuadrados verde y magenta))

Muy bien, ahora tienen que armar el otro cuadrado

E2: Chance los mantenemos igual

P: Bueno, probablemente los tengan que desarmar, pero Inténtenlo

(el equipo de niñas termina de armar un rompecabezas sobre el cuadrado azul y le piden al profesor que revise su resultado)

P: Muy bien, y ahora la pregunta es, al armar los dos cuadrados sobre el tercero, las áreas ¿son iguales?, ¿es más chica? o ¿es más grande?

E4: Son iguales

P: Muy bien, esta son sus primeros 5 puntos y anoto que ya lo resolvieron, este se llama Bhashkara. Pasan sus piezas a la cajita y pueden empezar con otro.

(El equipo de niños también termina de armar el tercer cuadrado y le piden al profesor que revise)

P: Muy bien, ahora la pregunta es, al juntar las piezas sobre ese cuadrado, ¿son iguales?, ¿es más grande?, o ¿es más chico?

E1: Es más grande

P: ¿Es más grande?

E1: Sí, por decir si esta tiene un área de 25 y esta tiene un área de 2, esta otra es más grande (mientras señala los cuadrados)

P: Entonces, este, ¿qué área tendría?

E1: 27, bueno, es un ejemplo

P: Bueno, al juntarlas les dio esta área. Estos son sus primeros 5 puntos, y anoto que ya lo hicieron, este se llama Bashkara. Guarden las piezas e intenten con el siguiente a ver si les da tiempo.

E2: En el siguiente tapetito

P: No, en el mismo tapetito, pero con un rompecabezas diferente

(al guardar el rompecabezas los alumnos se dan cuenta de que venía armado justo como resolvieron el rompecabezas)

(El profesor noto que el equipo de las niñas tiene problemas para armar su rompecabezas)

P: Ese tiene piezas pintadas de los dos lados, es porque para armarlo podrían necesitar darles la vuelta

E2: Profe, ¿tenemos que armar todas las figuras?

(un alumno del equipo de niños pregunta si deben armar todas las figuras al notar que pueden mantener los rompecabezas armados como están para encontrar la solución en el tercer cuadrado)

P: Sí, sí, de echo ese es el reto.

(El equipo de niñas terminar de armar los primeros dos cuadrados y el profesor se acerca para revisar)

P: Muy bien, ya terminaron los primeros dos, ahora muevan las piezas para comparar con el tercer cuadrado y vemos si sucede lo mismo que con el otro.

(el equipo de niños decide cambiar de rompecabezas al no lograr armarlo. Mientras, el equipo de niñas termina de armar el tercer cuadrado del segundo rompecabezas y el profesor se acerca para revisar.)

P: Muy bien, ahora la pregunta es, al juntar las dos áreas de los cuadrados que armaron primero, el cuadrado azul ¿tiene la misma área, es mayor o menor?

(el equipo duda y revisa si cubrieron el área del cuadrado azul completamente.)

E4: Tiene la misma

P: Muy bien, aquí están sus otros 5 puntos, pueden guardarlo e intentar armar otro, chance todavía les da tiempo, quedan 5 minutos.

E2: ¿el otro es con las piezas que sobran? (El primer equipo pregunta cuando termina de armar uno de los cuadrados, pero no ha terminado el otro, y el profesor les responde que sí)

E1: Chance es igual que el otro, mira sí, ya quedo profe

Muy bien, ahora, ¿creen poder armar el otro?

E1: Sí, te acuerdas (le dice un compañero a otro pensando en poder armar el rompecabezas justo como venía en su caja mientras empiezan a mover las piezas)

E1: Ya está profe (duda) tal vez era al revés, bueno se entiende la idea

P: Se entiende, pero aún no queda

E1: Bueno, ¿cómo era?, así era, bueno.

(el equipo de las niñas termina su rompecabezas)

P: Ya terminaron, bueno tienen otra fichita, ahora de 3 puntos, y aún tienen 2 minutos, van muy rápido. Lo anoto, este es de Anaricio. Si quieren pueden guardarlo y quizás les dé tiempo de terminar otro.

(Los equipos continúan armando rompecabezas, los niños presentan dificultades para armar el suyo mientras que el equipo de las niñas termina de armar otro rompecabezas)

P: Muy bien, ya terminaron, este es “sin nombre” y aquí tienen su fichita.

(El profesor ayuda al equipo de los niños a armar su rompecabezas para poder concluir la actividad)

P: Muy bien, estos van así, igual que estos, ya lo tenían así, ¿recuerdan?, lo que sucede es que las esquinas se forman con las uniones por eso no les quedaba. Les doy la fichita de este, guárdenlo y, en el primer experimento ¡Ganaron las niñas!

(Los dos equipos ríen)

P: Ahora vamos a compartir, la pregunta es ¿qué pasaba cuando juntaban las áreas de los dos cuadrados de arriba, el verde y el magenta, para formar el cuadrado Azul?

E1: Se sumaban

P: Se sumaban, muy bien, y ¿Cómo eran respecto al área del cuadrado azul?, ¿eran más grandes?, ¿más chicos?

E1: eran más grandes

E4: Eran iguales

P: eran iguales, ¿verdad?

E4: cuando se sumaban las áreas

P: Muy bien, ternemos que, en este primer tablero, al sumar las áreas de los dos cuadrados de arriba nos daba un área igual a la del tercer cuadrado. Vamos a repetir lo anterior, les voy a separar los puntos para la siguiente actividad, de todos modos, se los dejo aquí y vamos ahora a la segunda competencia, por decirlo de alguna forma. Esta la van a hacer con los tableros 2 y 3, y la dinámica es la misma, va a armar los cuadrados de arriba y luego van a mover las piezas para armar el cuadrado de abajo; pero en esta ocasión va a haber una adición, cuando ustedes determinen si los dos cuadrados de arriba, al sumarse dan un área igual, mayor o menor, les voy a dar una ficha azul que vale dos puntos, ¿está bien?, ¿queda claro?

ES: Sí

P: Muy bien, pues vamos a empezar recuerden que pueden usar los dos tableros, pueden ir cambiando de rompecabezas, y pueden incluso repetir los rompecabezas que ya hicieron, ¿sale?, pues empezamos, tienen 20 minutos.

E1: ¿Igual tenemos que formar el de abajo?

P: Aja, igual tienen que intentar formar el de abajo

(ambos equipos inician la actividad)

P: Recuerden, primero son los dos de arriba y luego el de abajo, ¿ya los tienen?

E4: Sí

P: Bueno, en los de arriba coincidieron, ahora muévanlos para intentar formar el de abajo.

E1: Ya

P: Bueno, entonces, ¿esas dos deberían formar el cuadrado del otro lado?

E1: Sí (mientras acomoda las piezas para mostrarle al profesor)

P: Ahora deben mover las piezas para intentar formar el cuadrado de abajo.

E1: ¿Te acuerdas? (preguntándole a su compañero), bueno, aquí falta imaginación, ¿tiene que quedar exactamente?

P: Sí

(Lo equipos siguen intentando formar el tercer cuadrado)

P: Tienen que formar un cuadrado, pero lo importante es que lo comparen, dos puntos cuando ya hicieron la comparación.

E2: Bueno este es más grande

P: Bueno, aquí tienen dos puntos, los vamos a separar, al final vamos a sumar y hacer el global de puntos.

E1: Pero además tenemos que seguir armando este

P: Si quieren, o pueden pasar al siguiente, acuérdense, por armarlos van a ser 4 puntos, por hacer la comparación 2.

E1: Pues ármalo, porque vamos perdiendo.

(el equipo de las niñas termina su actividad)

P: Ya lo terminaron

E3: Sí, y aquí quedó más chico

P: Muy bien, estas dos son más chivas, ¿verdad? y esta sería más grande

E3: Sí

P: Muy bien, aquí tienen 4 por haberlo resuelto y dos por hacer la comparación y este se llama Arteaga. Vuelvan a guardarlo, pueden cambiar (de rompecabezas)

(el profesor se dirige al equipo de niños que desea cambiar de rompecabezas)

P: Acuérdense que son dos puntos por la comparación, pueden tomar el otro tapetito y compararlo también. Ya tenían como eran los primeros dos. (los alumnos acomodan las piezas para comparar l0os cuadrados de los lados más pequeños). Aún sin no lo arman pueden comparar las áreas, ¿cómo es esa?

E1: Esta es más chica

P: Muy bien, aquí tienen dos puntos por comparar las áreas

E1: Ahora ármenlas

P: Pueden armarlas o pueden pasar al siguiente rompecabezas, si quieren armarlo con la misma medida pueden usar la cajita, bueno si esa es su intención.

E3: Sí (los alumnos utilizan la caja para armar el rompecabezas)

P: Ese se llamaba Arteaga y tiene la comparación en los dos, lo anoto

(Ambos equipos continúan armando sus rompecabezas y las niñas terminan de armar los cuadrados pequeños)

P: Muy bien, ya tienen esos. En el anterior no hicieron la comparación en la otra, ¿verdad?

E3: Aún no hacemos ninguna comparación en esa.

P: Ah, pueden usar las dos al mismo tiempo.

(Las niñas terminan de armar el tercer cuadrado)

P: Muy bien, ya lo armaron, son 5 por armarlo,

E3: Es menor

P: Estas sumadas tienen un área menor y esta es mayor, ¿quieren hacer la comparación con el otro de una vez?, recuerden son dos puntos por hacer la comparación, aquí tienen dos de esta comparación, y faltaría esta otra

(Los equipos continúan armando sus rompecabezas y el profesor anuncia que solo quedan 5 minutos más)

E4: El 1 ya no se puede, ¿Verdad?

P: No, porque ese ya lo terminamos, estamos ahora comparando 2 y 3.

(El equipo de los niños termina de armar los dos primeros cuadrados con un rompecabezas diferente y le muestran al profesor)

P: Muy bien, ahora compárenlo con el de abajo

E1: Bueno, el chiste es que es más chico (cuando termina de armar el tercer cuadrado)

P: Muy bien, ese es más chico, aquí tienen tres puntos por armarlo y dos por hacer la comparación. Y ¿cómo será con este?, ósea, este azul ¿será más grande o más chico?

E1: Más grande, porque es lo mismo, si lo pasamos y si aquí lo armamos (y acomodan las piezas sobre la ora plantilla). Denos otros puntitos, ¿no profe?

P: No, porque son 3 por armarlo y dos por cada comparación

E1: Yo pensé que eran por armarlo en este y por armarlo en este ya serían aparte

P: No, es por armarlo, porque ya lo armaste, entonces este fue de Perigal

(el equipo de las niñas termina otro rompecabezas)

P: Muy bien, ya terminaron, son cuatro puntos por armarlo y dos por hacer la comparación. ¿Quieren hacer la comparación con el otro de una vez?, ¿cómo sería?

E3: Sería más grande

P: Esa suma es más grande que el otro, ¿verdad?, ya tiene los dos

(el equipo de los niños realiza la comparación utilizando otro rompecabezas y le muestran al profesor)

P: Dos por hacer la comparación, ¿quieren hacer la comparación con el otro de una vez?

E1: Tráetelo

P: ¿Cómo es ahí?

E2: Es más pequeño que los otros

P: Muy bien, son otros dos puntitos por la comparación

(La actividad concluye y se procede a buscar sus conclusiones)

P: ¿Qué pasaba con el cuadrado del número dos?, ¿cómo era el cuadrado azul respecto a la suma de las áreas de los otros dos cuadrados?

E3: Más chico

E1: Más chico

P: En la figura número dos cómo era el cuadrado azul con respecto a los otros dos

E4: Más grande

E2: Más grande

P: Más grande ¿verdad?, ¿y en la figura número 3?

E2: Más chico

P: Más chico. Entonces en la figura 1 eran iguales ¿verdad?, en la figura 2 más grande y en la figura 3 es más chico. ¿Qué cambia en cada uno de esos triángulos?

E1: Su área

P: Su área, ¿verdad?, ¿Qué otra cosa cambia?

E1: Su forma

P: Su forma, ¿Qué parte de su forma?, cambia su forma

E1: Sus lados

P: ¿Sus lados son diferentes?

E2: No

P: ¿Cuáles lados son diferentes?

E4: El área

P: el área, ¿cuál área es diferente?

E4: La del cuadrado azul

P: Las áreas azules van cambiando, ¿verdad?, muy bien

ES: Sí

P: Entonces los lados también van cambiando, ¿qué lados van cambiando?

E3: Los ángulos

P: Los ángulos, ¿cómo van cambiando los ángulos?, ¿cómo es el primero?, ¿cómo es el segundo? Y ¿cómo es el tercero?

E1: Va disminuyendo de 20

P: ¿Va disminuyendo?

E1: O va sumando

P: ¿Todos están de acuerdo? ¿Va sumando?

E1: Del tres al dos

P: ¿Cuánto mide en la primera figura? En el tapetito 1

ES: 90 grados

P: 90 grados, ¿en la segunda?

ES: 100 grados

P: 100 grados, ¿qué cambio?

E1: 10 grados

P: 10 grados, ¿más chico o más grande?

ES más grande

P: Y en la figura 3, ¿cuánto mide el ángulo?

ES: 80 grados

P: ¿Es más chico o más grande el ángulo?

E: Más chico

P: ¿En qué casos podríamos pensar que la suma de las áreas de los cuadrados de arriba es igual al área del cuadrado de abajo?, ¿En el tres?

E1: No, en el 1

P: En el 1, ¿Qué tiene de especial el 1?

E2: Es igual

P: Es igual, muy bien, y ¿cómo es el ángulo en el 1?

E2: De 90 grados

P: Es de 90 grados, ¿cómo se llaman los ángulos de 90 grados?

E1: Rectos

P: Entonces es un ángulo recto, entonces, ¿será que siempre que el ángulo sea recto podrán mover dos cuadritos para formar el otro, el tercero?

E1: ¿cómo?

P: A ver, ¿en qué caso el área era igual?

E2: En el 1

P: ¿En qué casos es mayor?

E2: En el 2

P: ¿Cómo es el ángulo en el dos?

E2: De 100 grados

P: De 100 grados, ¿en qué casos es menor?

E2: En el 3, de 80 grados

P: En el 3, con 80 grados, em, esta es la clave para guardarlos, vamos a dejarlo por el momento porque me interesa continuar con la discusión. Esta sería la pregunta: ¿Creen que la relación de igualdad entre las áreas de los cuadrados se cumpla en cualquier triángulo con un ángulo recto?

E1 y E2: Sí

P: Sí, o ¿creen que solamente en ese triángulo en especial?, ¿En todos los que tengan un ángulo recto? ¿O solamente en ese en especial?

ES: En todos

P: Muy bien ahora, vamos a trabajar ahora como grupo por decirlo de alguna forma, ya no vamos a competir, puedes sumar sus puntos recuerden cuanto valen. ¿Cuánto? (Los alumnos suman sus puntos), 36 contra 25, bueno en el global también ganaron las niñas. Vamos a dejar por un momento el juego y vamos a trabajar como grupo.

P: Ahora, los cuatro consideran que esto de desarmar los cuadrados de dos lados para formar el tercero va a funcionar siempre que el ángulo sea recto, la pregunta es ¿Por qué creen eso?

E1: porque terminan en esquina

E4: Porque tiene la misma medida

P: ¿Alguna otra idea? Porque terminan en esquina, porque tiene la misma medida, ¿alguna otra idea?

E2: Porque las piezas encajan

P: Ahora, eso es en la plantilla que yo les di, pero la pregunta es: ¿qué pasaría si fuera otro triángulo rectángulo?, ¿podríamos igual recortar de alguna forma los cuadrados que se formen arriba? Bueno, en este caso son los cuadrados que arman el ángulo recto, ¿ya se fijaron?, ¿podríamos recortar esos cuadrados para formar el cuadrado que se opone al ángulo recto?

E1 y E2: No

P: Ustedes creen que no se podría, ¿ustedes que creen? ¿que se podría o que no se podría? Si fuera otro triángulo, pero se mantuviera el ángulo recto.

E1: ¿Cómo? Es que ya no entendí

P: Bueno, voy a intentar hacer una ilustración, un dibujo, para explicarles, ¿me podrían prestar una de las escuadras? 1, cualquiera. (Los alumnos le prestan una escuadra al profesor)

P: Muy bien, este es un triángulo rectángulo, ¿verdad? ¿dónde está el ángulo recto? (los alumnos lo señalan), Si lo giro sigue siendo un ángulo recto y si lo giro sigue siendo un ángulo recto. Ahora, si construyo un cuadrado sobre este lado con esta media de lado y construyera un cuadrado sobre este otro lado ¿podría recortarlos, de alguna de las formas que tiene o de alguna otra, para formar el cuadrado que este sobre este lado?

E1: No

P: ¿No?, ósea, que me quede igual la medida

E1: Juntándolos ambos

P: Aja, estos dos los junto y formo el cuadrado de aquí

E1: Depende, depende de la medida, ¿no?

P: depende de la medida

ES: Sí, dependería de la medida

E1: Por ejemplo, si uno mide 10 y el otro 5

P: ¿Sí este mide 10 y este 5? (los alumnos apuntan otros lados) a, este mide 10 y este 5 podría dar la medida. Bueno en los de 80 grados se hace más chico este lado, si es de 100 grados este y hace más grande, ahora, lo que necesitamos investigar es, puedo tomar la otra escuadra, si en todos los triángulos que tengan un ángulo recto se cumple esta condición o no. Ustedes consideran que por ejemplo en este (señalando la otra escuadra) si construyeran un cuadrado acá y otro cuadrado acá, ¿podría recortarlos para formar un cuadrado que tenga esta medida?

E2: En ese sí

P: En este sí, ¿pero en este no? ¿Están de acuerdo los cuatro? En este sí se puede, pero en este no, los dos son triángulos rectángulos, consideran que en este si se puede, pero en este no, o, ¿alguien tiene otra idea?

E3: Si los dos son rectángulos en los dos se podría

P: Si los dos son rectángulos en los dos se podría, ¿usted considera que si los dos son rectángulos en los dos se podría?

E4: Sí

P: Usted considera que en este sí, pero en este no, bueno, en realidad no lo podemos determinar todavía, para eso sería la siguiente actividad, ¿cómo podrían comprobar esta idea?, ¿cómo podrían comprobar que el cuadrado que se forma aquí más el cuadrado que se forma aquí, si los sumaran, tendrían la misma área que el cuadrado que se forma aquí?

E2: Con la fórmula

P: ¿Con fórmula?

E1: Midiéndolo

P: ¿Midiéndolo?, bueno, con estos van a medir, tendrían que dibujar otros para poder medirlos. Ah, y ¿cómo comprobarían que no miden lo mismo?

E2: Igual

P: ¿Igual midiéndolos? Bueno, pues vamos a hacer la siguiente actividad, ¿queda clara la idea? Vamos a tomar diferentes triángulos rectángulos y vamos a medir para saber si los cuadrados de sus lados son iguale so no. Ideas para probar su respuesta, esta es la idea, desde el experimento venia pensado que probablemente esa sería su idea. Van a construir triángulos rectángulos en esas hojas cuadriculadas, pueden poner los tapetitos a un lado, limpien su espacio y la consigna sería esta, construir diferentes triángulos rectángulos y van a comparar las áreas de los cuadrados, una forma es dibujando el cuadrado y sus compañeros habían propuesto medir los lados, ¿no?; Si miden los cuadrados como podrían calcular la medida del área del cuadrado?

E1: Lado por lado

P: Lado por lado, ósea, lo elevan al cuadrado. También tiene calculadoras n sus escritorios por si acaso salen números inexactos. Bueno vamos a dedicarle a esto un tiempo y vamos a ver si logran comprobar si siempre sucede o solamente en algunos casos, ¿si queda claro?

ES: Sí

P: Ustedes pueden decidir las medidas, como ustedes quieran hacerlo. Si necesitan una regla por si necesitan medir lados muy grandes.

(Los alumnos dedican un tiempo a trazar y medir los lados de triángulos rectángulos)

E4: ¿Tenemos que dibujar los rompecabezas?

P: No, no es necesario, basta con medirlos y si tienen la misma área debería existir una forma de cortarlos para formarlos. Si tiene medidas diferentes pues no hay forma. Una opción es el tangram, lo importante es que comparen las áreas

(algunos alumnos copian las figuras de las plantillas)

P: no es necesario que copien la figura, lo importante es calcular el área de los cuadrados que se forma, sumarlo, y comparar eso con el otro cuadrado, ¿si queda claro?

P: ¿Ya tiene sus ejemplos?, ¿cuánto miden?

E1: 23.1

P: Ahora tiene que determinar cuánto mediría el cuadrado, ¿cuánto mediría el cuadrado?, ¿cuánto midió el lado?, bueno, con esa media deberías calcular el área del cuadrado

E1: El lado mide 20

P: si el lado mide 20, ¿cuál sería el área del cuadrado?

E1: 20 por 20

P: Muy bien, ¿cuánto es 20 por 20?

E1: A ver, no me acuerdo (hace la operación) 400.

P: Muy bien, 400, este cuadrado mide 400, ¿cuánto mediría el cuadrado de este?

(Los alumnos continúan al calculando las áreas de los cuadrados, pero tiene problemas para medir y para realizar las operaciones)

P: ¿Ya terminaron su figura?

E4: Ya, pero no sé si lo hice bien

P: Aquí ¿lo mediste en cuadritos o en centímetros?

E4: En cuadritos, a ya

P: Si quisieras medirlo en cuadritos, cada cuadrito mide 5 milímetros, o si quisiera hacer el otro en centímetros también saldría.

E4: Ya

P: ¿Cuánto salió? ¿Cuánto median?

E4: 3.5

P: A ver, Entre 3.5 y 3.6, verdad, y eso fue lo que multiplicaste, ¿podrías revisar esta? 3.5 por 3.6 ¿Ya terminaron ustedes?

E1: Ya profe

P: ¿Aquí cuanto fue?

E1: 139.24.

P: Al elevarlo al cuadrado, ¿y aquí 400?

E1: Sí. Y aquí 536.61 igual al elevar el lado al cuadrado

E2: Igual aquí salió más pequeña

E1: A mí también me salió un área más pequeña

P: ¿Aquí sumaste 400 más 139?

E1: ¿Por qué?

P: Ah, porque la comparación de la suma de estos dos con esta

E2: entonces yo estoy bien

P: ¿Cuánto salió en esta área?

E2: 201.64 y el otro 403.28

P: Muy bien y aquí fue lo mismo, es isósceles, ¿no?

E2: Sí

P: Y salió …

E2: 403.28

P: ¿Y en este otro?

E2: 424.36

P: ¿Podríamos hacer de nuevo estas operaciones?

(El estudiante repite las operaciones y obtiene los mismos resultados)

P: Sí cambia bastante

E1: Entonces estos los sumo

P: Así es, tienes que sumarlos

E1: Sale 534.24

P: ¿Y el otro cuanto era?

E1: 536.61

(También las otras estudiantes terminan la actividad)

P: Son iguales la suma de estos dos con este

E4: No, no por 4 centésimas

P: No por cuatro centésimas, y usted ¿ya termino el suyo?

E3: Ya

P: 7.8 y este también mide 7.8

E3: Y el otro lado es de 11 al cuadrado 121, y los cuadrados de los otros da 60.84

P: da 60.84, y si sumaras las áreas de este y este, ¿nos daría el área de este también?

E3: Me paso por 68 decimas

P: ¿Por cuánto? 68 decimas

(La actividad concluye y pasan a las conclusiones)

P: Vamos a poner esto en contexto, voy a utilizar uno de estos para ilustrar, ¿está bien? Tenemos dos lados que son los que forman el ángulo recto, ¿verdad? y el tercero, el que se opone es normalmente el más grande. En su cuadrado, ¿Cuánto median los lados? (dos estudiantes dan su respuesta)

P: Esperen, vamos partes, primero su compañera

E3: 7.8 y 11

P: El área de cuanto fue, entonces, primero de los Chiquitos, por llamarlos de alguna forma, ¿cuánto fue?

E3: 60.84 y 60.84

P: 60.84 y el otro era igual de 60.84, y al sumarlo ¿cuánto fue?, ¿podríamos anotarlo? Para irlos comparando los 4, en una hojita, porque a mí se me va a olvidar. Suma de los dos primeros, ¿Cuánto fue?

E3: 121.68

P: Anotamos eso, 121.68, ¿fueron iguales?

E1: Por decimales no, está cerca pero no son iguales

P: Esta muy cerca, muy muy cerca, pero por decimales no. Si gustan anotamos el siguiente, igual cuanto midieron de lado estos dos

E4: 3 y 4

P: ¿Y el tercer lado?

E4: 3.6

P: ¿Los dos primeros lados midieron 3 y 4 y el otro 3.6?

E4: No, 3 y 2, y cuatro es el área

P: A ya entendí, entonces cuatro es el área de un cuadrado, ¿y cuánto mide el área del cuadrado del otro?

E4: 9

P: Entonces la suma ¿cuánto es?

E4: 13

P: Bueno marcaríamos de nuevo, la suma de los dos primeros fue 13. (se da un tiempo para que los alumnos registren) ¿Cuánto midió el área del tercero?

E4: 12.96

P: Bueno, pues anotamos, eso. Si una midió 13 y el otro 12.96, ¿son iguales?

E1: No, por cuatro decimas

P: Por 4 centésimas

E1: Bueno sí, por cuatro centésimas

P: Bueno no son iguales, pero igual están muy cerca, casi casi tiene la misma media. Ahora el siguiente, empezamos ¿cuánto midieron los lados que formaban el ángulo recto?

E2: 14.2

P: ¿Los dos fueron iguales?

E2: Sí, los dos miden lo mismo

P: Muy bien, ahora, ¿cuánto mide el tercero? el que se opone

E2: Ah, ya 20.6

P: 20.6, ahora, ¿cuánto media el área de 1?

E2: 201.6

P: ¿Y al sumarlos?

E2: 403.2

P: Muy bien, esa sería la medida de la suma de estos dos, la anotamos 403.28, muy bien, y ¿cuánto nos dio el área del otro?

E2: 424.36

P: Entonces uno fue de 403 y el otro de 424

E2: En este y en este fue de 201.6, 403 total y el cuadro grandotote fue 424.36

P: Muy bien, ahora, no sé si notan, como se hizo más grande se nota más la diferencia. Ahora en el último

E1: En el lado izquierdo mide 20, el lado de abajo 11.8

P: A, lo está viendo así, muy bien, ¿y el tercero?

E1: 23.1

P: 23.1. ¿Cuánto mediría el área de cada uno? ¿el de abajo por ejemplo?

E1: 539.24

P: 500?, muy bien, ah, la suma mide eso.

E1: Sí la suma mide 539.24

P: Muy bien, ahora, ¿Cuál es el área del tercero’

E1: 533.61

P: En uno tenemos 539 y el otro 533. También estuvo bastante cerca a pesar de ser medidas tan grandes

E1: Por 6

P: Aja, no estuvo tan lejos, estuvo muy cerca, ahora la discusión es ¿consideran que como la diferencia es tan pequeñita son iguales?

E1: Aunque sea una diferencia pequeña son diferentes

P: ¿Consideran eso?, ¿los cuatro? Bueno aquí voy a tener que hacer una intervención, lo que sucede es que esa diferencia tan pequeña es causada por los instrumentos de medición. Si yo tuviera un instrumento más preciso esa diferencia se iría reduciendo, es decir, lejos de hacerse más grande se iría reduciendo hasta ser igual 0. Por eso en los triángulos más grandes se notaba más la diferencia y en el caso de sus compañeras la diferencia era más chica.

E1: Entonces en los más chicos sería casi nula

P: Así es, ahora tendríamos que pasar a la siguiente actividad, en la que vamos a construir

E1: Un tangram

P: Pues más o menos, vamos a construir un cuadrado, vamos a empezar con el cuadrado más grande para comprobar esto, les repito, no es algo que se acostumbre, regularmente la idea debe salir de los estudiantes, pero en este caso es algo interesante que todos encontraron una diferencia a la hora de medir. Lo que vamos a hacer es construir un cuadrado que este en diagonal, por ponerlo de alguna forma tendrían que hacer un triángulo y el cuadrado que se levanta sobre él, más o menos como lo hizo su compañera, ¿podrías mostrarlo? (la estudiante muestra su diagrama), más o menos así, ¿ya vieron?, pueden utilizar la cuadricula para formar los lados que van a formar el ángulo recto y los unen para formar el último cuadrado, ¿sale?, entonces vamos a hacerlo, cada quien tome una hoja nueva y pasen las hojas anteriores a un lado, aquí por favor, cada quien trace un triángulo rectángulo como el que hizo su compañera y que puedan dibujar los cuadrado y van a dibujar el cuadrado que se forma en el tercer lado, el que no está sobre la cuadricula, el que está en diagonal por decirlo de alguna forma. Pueden hacerlo con la escuadra o utilizando la misma cuadricula, ese va a ser el primer reto.

(Los alumnos empiezan a trazas sus figuras y el profesor los ayuda para que dibujen las figuras con ayuda de la cuadricula)

E1: este mide 8

P: 8, entonces ¿son iguales?, entonces puedes mover así 8 y 8, 8 y 8 y quedan igual y forman un cuadrad, como si fuera un rombo digamos

(El profesor procede a ayudar a otra estudiante)

P: Y aquí avanzo 1, 2, …8, entonces son 8 hacia arriba, e igual del otro lado, ¿si queda claro?; Muy bien, aquí avanzamos 5, entonces avanzamos 5 de este lado, y aquí avanzamos 8; 1, 2, 3, … 8, a mira justo ahí. Entonces ahí lo marcas.

E1: ¿Así profe?

P: ándale. Bueno este ejercicio ya lo hicimos, bueno, ustedes ya lo conocen. Este, y vamos a comparándolo ahora sin un instrumento de media, si no por lógica, por decirlo de alguna forma

E1: ¿Cómo profe? ¿Así?

P: Y haces lo mismo en este

(Un estudiante dibuja un triángulo igual a una de las piezas del rompecabezas, pero no logro trazar los cuadrados que se construyen sobre sus lados)

P: Ah, ya, es que usted está copiando este, pero lo que vamos a hacer es construir un cuadrado sobre este, a ver si cabe, porque es muy grande tu figura, no sé si podrías hacer uno más chiquito.

E2: ¿cómo este? (mientras muestra otra pieza de los rompecabezas)

P: Sí, pero no forzosamente ese, puede ser cualquiera, por ejemplo, su compañero hizo un triángulo con dos lados iguales, o puede tener todos diferentes, usando de referencia la cuadricula, y luego vas a calcular.

(Los demás estudiantes van terminando sus actividades)

P: Ya calculaste

E1: Ya todos, profe

P: ah, y, ¿cuánto te salió?

E1: 128

P: 128, y si sumas las áreas de estos dos ¿cuánto te salió?

E1: 128

P: ¿fue igual la suma de estos dos y esta?

E1: Sí

P: Ahora sí, en lugar de medirlo lo hicimos con lógica por decirlo de alguna forma y salió igual, a su compañera también le salió igual, vamos a esperar a que terminen sus dos compañeros.

(El profesor ayuda a terminar el último trazo)

P: ¿Cuántos avanza así?

E2: 10

P: Entonces avanza 10 así, y ¿cuántos avanza en esta dirección?

E2: 13

P: Entonces avanza 13 en esta dirección, mira, justo ahí, márcalo, no, ahí, ahí, eso, ya quedo, ahora haces lo mismo para trazar los otros lados y los unes con tu regla, ¿sale?

E2: Sí, (hace los trazos) ¿así?

P: Bueno, si nos quedó bien van a quedar ángulos rectos, si nos quedó mal no van a salir, a ver, aquí no es recto, nos equivocamos en alguna parte, (otro estudiante termina). ¿A ti ya te quedó?

E4: Ya

P: Muy bien, vamos a detenernos tantito, para comparar los resultados de sus compañeros, en tu cuadrado, ¿la suma de dos te dio el tercero? ¿cuánto fue?

E3: Sumando los dos cuadrados fue 80, y el área del otro también fue 80,

P: a usted ¿le dio lo mismo?, ¿cuánto fue?

E4: la suma de los dos primeros fue 89 y el otro salió también 89

P: Muy bien, usted todavía no termina, pero bueno, vamos a dejarlo porque ya es hora de receso, y a usted, ¿le salió lo mismo? ¿cuánto le salió la suma de dos?

E1: 64

P: 64 es de 1, ¿Cuánto fue la suma?

E1: 128

P: Y ¿cuánto fue el área del tercer cuadrado?

E1: 128

P: 128, muy bien, ¿comprueban su idea original? ¿siguen creyendo que pueden salir diferentes? O ¿creen que siempre que sea rectángulo siempre va a ser igual?

ES: Siempre va a ser igual

P: Muy bien dejen sus hojitas, van a salir a receso ya horita regresamos.

(Los alumnos salen a receso y regresan para continuar con la secuencia)

P: Muy bien, vamos a recapitular, estábamos comparando las áreas de los cuadrados que se forman sobre los lados de triángulos rectángulos, ¿verdad?, ¿qué pasaba cuando sumábamos las áreas de los dos cuadrados que forman el ángulo recto?

E1: Tiene que dar el de abajo

P: Tiene que dar el de abajo, bueno, el que se opone, porque si lo giro puede quedar arriba, o puede quedar de este lado, no forzosamente va a estar abajo, ¿verdad?; Bueno, entonces a esta relación, es una relación ya muy conocida, y es el teorema de Pitágoras. Este es el teorema de Pitágoras, que establece que al sumar los cuadrados de dos lados nos va a dar el área del cuadrado del tercero, muy bien, como tienen esta cualidad, es decir es una peculiaridad muy particular de los triángulos rectángulos se le ha dado un nombre. A los lados que forman el cuadrado se les conoce como catetos, mientras que al lado que se le opone, es decir esta del otro lado, se le conoce como

E1: Cateto opuesto

P: hipotenusa. Por ejemplo, en este triángulo, ¿de qué color son los catetos?

E3: Rosa y verde

E1: Y azul

P: ¿El azul es un cateto?

E4: No, verde y rosa

E2: Sí, verde y rosa

P: Muy bien, verde y rosa. ¿Cómo se llama el que es azul?

E2: Hipotenusa

P: Es la hipotenusa, ¿verdad?, ahora lo voy a hacer con esta, tenemos esta escuadra, y es un triángulo rectángulo ¿verdad?, ¿este cómo se llamaría?

ES: Hipotenusa

P: ¿Y este?

E4: Cateto

P: ¿Y este?

E2: Cateto

P: Entonces estos son los catetos y esta es la hipotenusa, este, tantito por favor, me pasarían la otra escuadra por favor, muchas gracias. En esta escuadra, este lado, ¿Cómo se llamaría?

E1: Hipotenusa

P: Hipotenusa, ¿este?

Es: Cateto

P: Cateto, y ¿este?

ES: cateto

P: ¿si queda claro?

ES: Sí

P: Entonces, a tener esta relación se designaron nombres especiales a estos lados, y funciona solamente en los triángulos rectángulos, ¿si queda claro?

ES: Sí

P: Ahora, existen muchas propuestas para demostrar, es decir es una propiedad matemática que se conoce desde hace mucho tiempo, mucho tiempo, y como tal ha tenido a muchas personas que la han investigado. Aquí tenemos tres ejemplos, uno es Leonardo da Vinci, el investigo esta propiedad, otro es de un presidente de los estados unidos, Garfield, también la investigo y otro es Euclides, que es un matemático de la antigüedad, pero se conocía desde antes de ellos. Incluso las demostraciones que yo les puse en los rompecabezas que les di están basados en las investigaciones de otros matemáticos. Nosotros vamos a hacer otra de las demostraciones, la demostración algebraica.

Ahora, vamos a comparar estos dos cuadrados, en cada uno de ellos podemos observar triángulos rectángulos, ¿ya los vieron?

E1: Sí

P: Aquí tenemos un triángulo rectángulo, otro, otro y el cuarto está aquí. En el otro trace los diagonales para que se para que se identificaran también, se apreciaran, los ven. Vamos a comparar las áreas de cada figura y al final comprobar de forma algebraica que al sumar los cuadrados de los catetos obtenemos el cuadrado de la hipotenusa. Para eso debemos distinguirlos, este lado considerando a este triángulo rectángulo cómo se llamaría

ES: hipotenusa

P: hipotenusa verdad, ¿y este otro?

E2: cateto

P: cateto verdad, y este

E2: cateto también

P: muy bien vamos a ver ahora en este otro este lado, considerando a este triángulo rectángulo, ¿cómo se llamaría?

E2: cateto

P: ¿y este?

E2: cateto

P: ¿y este otro?

E2: hipotenusa

P: dudas o preguntas hasta aquí, muy bien, vamos a comparar los cuadrados por completo. este que tenemos aquí está formado por las distancias a más B y este otro también está formado por a más B. ¿Son el mismo cuadrado entonces? ¿tienen la misma medida?

E1: Sí

P: Sí, entonces si tienen la misma medida del lado, ¿cómo son sus áreas?

E1: rectangulares

P: bueno, son rectangulares, pero ¿cómo son sus áreas?

E2: ¿iguales?

P: muy bien las áreas de estos cuadrados son iguales. ahora vamos a expresar las áreas de estos cuadrados sumando sus partes. Entonces por favor, van a anotar cómo se calcularía el área de este cuadrado, el azul, ¿cómo se calcularía?, su lado y de

E1: a, Ah no, c, ¿no?

P: mide c, entonces, ¿Cómo expresaríamos el área de este cuadrado?

E1: c cuadrada

P: C cuadrada, entonces tomen una hoja y anótenlo por favor, los cuatro

E3: ¿también el cuadrado?

P: si quieren pueden hacer el dibujo, pero no es necesario, por cuestiones de tiempo no se los voy a pedir, pero vamos a seguir utilizándolo. Entonces teníamos que este cuadrado es

E1: c al cuadrado, o c por c

P: c al cuadrado, bueno es más corto, pero sí podría ser c por c. Muy bien vamos a marcar ahora este triángulo, ¿ya lo vieron?, ¿cuál sería su área?

E2: ¿a por B sobre 2?

P: a por B sobre 2, ¿y cuántas veces se repite este triángulo?

E1: cuatro

P: cuatro veces, entonces, ¿cómo expresaríamos eso?

E2: a por B al cuadrado sobre 2

P: ¿Por qué al cuadrado? ¿se están multiplicando por sí misma para ser al cuadrado?

E1: sí,

P: B se está multiplicando por sí misma

E2: no

P: no verdad, entonces ¿cómo sería?

E1: a por B

P: ¿cuántas veces?

E2: cuatro

P: Muy bien, ¿cómo quedaría entonces?, ¿Cómo se expresaría el área de este triángulo que está cuatro veces?

E3: AB por cuatro

P: ab por cuatro,

E1: podríamos utilizar paréntesis para indicar que todo se está multiplicando por cuatro

P: bueno, podríamos utilizar paréntesis, pero, eso sería si fueran rectángulos nada más sería AB, pero como son triángulos, ¿cómo quedaría?

E3: base por altura sobre 2

P: sobre 2, ¿verdad? Entonces sería AB sobre 2 y eso lo van a multiplicar por cuatro, entonces el área sería c al cuadrado más…

E2: AB sobre 2 por cuatro

P: ese es el área de este, vamos ahora a expresar el área de este otro. ¿Cómo se expresaría el área de este cuadrado?

E1: ¿qué le traes?

E2: B

E4: sería B al cuadrado

P: B al cuadrado, entonces anotamos y, ¿cómo expresaríamos el área de este otro cuadrado?

E4: a al cuadrado

P: muy bien, sería más a al cuadrado. B al cuadrado más a al cuadrado. ahora hacemos lo mismo con este triangulo ¿cómo quedaría?

E1: AB sobre 2

P: pero son cuatro

E1: AB sobre dos por cuatro

P: lo anotamos. ahora la conclusión a la que queremos llegar, ¿ya tienen todos, esta parte?, La conclusión sería que el cuadrado de la hipotenusa, aquí ¿cuál es la hipotenusa?

E1: la esquina

P: ¿cuál esquina?, ¿esta esquina? O ¿esta esquina?

E2: no, esa

P: muy bien, ¿cómo expresamos el cuadrado de la hipotenusa? ya lo teníamos

E3: c al cuadrado

P: c al cuadrado, mmm, podría ser cualquier letra, ¿verdad? pero en este ejemplo es c. c al cuadrado, queremos expresar que es igual a la suma de los cuadrados de los catetos, en este triángulo, ¿ya lo vieron? es el mismo que acá, pero tenemos volteada, ¿cuáles son los catetos?

E1: los opuestos

P: ¿cómo se llamaban?, aquí la hipotenusa se llama c,

E2: A y B

P: Entonces ¿cómo sería el cuadrado de un cateto? digamos B

E1: B cuadrada

P: ¿y del otro?

E2: a cuadrada

P: a lo que queremos llegar es que c al cuadrado es igual al cuadrado más B al cuadrado, eso es a lo que queremos llegar, que es la suma de los cuadrados de los catetos. ya tenemos las áreas de los cuadrados completos, (muestra las expresiones con el proyector) creo que no se alcanza a ver y lo expresé de otra forma mejor lo quito. Decíamos que era c al cuadrado más…

E1: más AB sobre 2 por cuatro

P: Muy bien, esto es igual a, ¿cómo era el área de este?

E2: B al cuadrado más A al cuadrado más AB sobre 2 por cuatro, P: ahora necesitamos expresar solamente los cuadrados de los catetos y la hipotenusa, ¿qué sigue para que nos quede la expresión que el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos? Ya tienen la expresión, ¿qué tenemos que hacer para que coincidan? (nadie contesta)

P: tal vez deba escribirla para que todos la vean, denme un segundo, voy por un plumón y le escribo en una hoja, ¿cuál era la expresión del primero?

E1: c cuadrada más AB sobre 2 por cuatro

P: ¿y el área del otro?

E1: B cuadrada más a cuadrada más AB sobre 2 por cuatro

P: ya no me alcanzó el espacio, disculpen

E1: se entiende

P: pero queremos expresar que el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos, ¿qué le está sobrando?

E1: AB por cuatro

P: bueno, AB sobre 2 por cuatro. ahora si sí yo lo elimino de este lado, ¿qué debo hacer del otro?

E1: igual, eliminarlo

P: ¿cómo quedaría aquí abajo?

E1: c cuadrada es igual a B cuadrada mas A cuadrada

P: esa es la expresión del teorema de Pitágoras a la que queríamos llegar. ¿Es sencilla la demostración? ¿se entiende? ¿podría anotarlo?, podría ser cualquier conjunto de letras, esta expresión representa que el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos. ahora sí este es el reto ya sabemos que la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa, el cuadrado de este nace el cuadrado de este me debería dar el cuadrado de este otro ¿cómo podrían calcular la medida del lado faltante utilizando esta propiedad ¿podemos hacerlo?, ¿cómo se les ocurre?, ¿cómo podemos hacerlo?

E1: podríamos completar el lado

P: ¿cómo es completar el lado?

E1: por ejemplo, sí lo tenemos así, podríamos unirlos para formar un rectángulo (mientras une 2 escuadras)

P: un cuadrado

E1: bueno un rectángulo un cuadrado lo que sea

P: muy bien, ¿cómo seguiría eso? (el estudiante se ríe de forma incomoda), ¿no? ¿Alguna otra idea? sabemos la medida del cuadrado de este lado ¿cuánto sería?

E1: 64

P: esta si la podemos calcular, ¿verdad?

E2: Sí

P: ¿Sabemos el área del cuadrado de este lado?, ¿Cuánto sería? las 2 mesas tienen su calculadora

E1: 3.9 por 3.9, 15.21

P: sabemos entonces que el cuadrado de este es 64 y de este 15.21, ¿sabemos cuánto va a medir el área de este cuadrado? (señalando la hipotenusa)

E1: lo mismo

P: ¿cuánto sería?

E2: los juntamos ¿no?

E1: sería sumándolas

P: muy bien háganlo, ¿cuánto da?

E1: 79.21

P: el área de este cuadrado, ¿con eso podemos calcular la medida de este lado?

E1: sí porque se está dividiendo entre 2

P: ¿se está dividiendo entre 2?

E4: entre cuatro

P: ¿entre cuatro? ¿porque entre 2? o ¿porque entre cuatro?

E1: según yo es entre 2 porque es un rectángulo cuadrado

P: es un cuadrado

E1: bien y queremos buscar esa (señalando al lado) entonces debería ser de la suma de arriba y abajo entre 2 porque es la mitad

P: Ah, este lado me diría la mitad, por ejemplo, aquí, este lado mide 8, y el cuadrado

E1: 64

P: 64, se divide a la mitad 64 para calcular 8, ¿no?

(los estudiantes dudan)

P: ¿qué se hace para calcular la medida del lado?

E4: entre cuatro

P: ¿entre cuatro? se divide 64 entre cuatro y nos da 8, a ver háganlo, vayan comprobando ¿sí o no?

E3: ¿64 entre cuatro? No

E1: da 16, sería entre 8

P: ¿por qué entre 8?

E1: porque si se multiplica por sí mismo se tienen que dividir entre sí mismo

P: así es, si multiplicamos 8 por 8 tendríamos que dividirlo entre 8, aquí igual verdad, el área de este cuadrado sería 3.9 por 3.9 y ¿entre cuánto tendríamos que dividirlo para que nos dé 3.9

Es: 3.9

P: Entonces buscamos un número que multiplicado por sí mismo nos de esta área que este 79.21, ¿Sí o no?, ¿qué operación se utiliza para eso? Piénselo, es algo que se estudia en secundaria, ¿Con qué operación buscamos un número que multiplicado por sí mismo nos da un resultado?

E2: raíz cuadrada

P: con raíz cuadrada, entonces buscamos la raíz cuadrada de 79. 21, ¿lo pueden hacer en su calculadora?

E4: 89

P: 89, raíz cuadrada de 79.21 ¿89?

E2: Es 8.9

P: 8.9, bueno ya tiene más sentido. ¿sí queda claro cómo se calcularía el lado de un triángulo?

ES: sí

P: a ver si es cierto, ahora ¿cómo se calcularía este? ¿se parece al otro? ¿Qué cambió?

E1: el lado

P: ahora nos están pidiendo otro lado, antes nos pedían, ¿cual nos pedían?

E4: la hipotenusa

P: ¿cuál nos piden ahora?

E4: un cateto

P: en cateta, ¿cómo lo calcularíamos ahora?, a ver, inténtenlo. Pueden trabajar en parejas si quieren, o solos, ¿cómo lo harían?, ¿cómo calcularían el lado que falta?, Sabemos cuánto va a medir el cuadrado de acá y cuánto va a medir el cuadro de acá, ¿cómo calcularían el cuadrado de aquí?

(Los estudiantes realizan sus procedimientos)

P: ¿quieren compartir sus procedimientos y los vamos comparando?

E1: sí, bueno, sería lo mismo, que sacamos raíz cuadrada de 3.6 por 3.6, da 12.36,

P: al sacar raíz cuadrada o al multiplicar

E1: al multiplicar

P: muy bien, está sacando el cuadrado de este, ¿y luego?

E1: del otro es igual, 8.5 por 8.5 y nos da 72.25

P: ese es el cuadrado más grande ¿verdad?

E1: ajá, se juntan, o se suman entre los 2 ida 85.21

P: muy bien

E1: y de eso se saca raíz cuadrada

P: ¿y cuánto da?

E1: 9.23

P: muy bien eso quiere decir que ese lado es más grande que este (señalando primero cateto y luego la hipotenusa), ¿eso sucede?

E1: sí, creo que sí

P: muy bien, por ejemplo, aquí en este, que es de 90°, ¿cuál era el cuadrado más grande?

E1: el de abajo

P: el trabajo, que es el que se opone al ángulo de 90°, es decir, no puede haber un lado más grande porque al ángulo más grande se le opone el lado más grande, sí este ya mide 90° no puede haber un ángulo más grande, entonces, algo salió mal, repitamos, usted, ¿qué fue lo que hizo?

E1: calcule los cuadrados

P: muy bien, cálculo del cuadrado de este que es…

E1: 12.36

P: ¿y cómo se llama?

E1: cateto

P: muy bien, tenemos que la suma de los cuadrados de los catetos da como resultado el cuadrado de la hipotenusa, después calculo este, ¿cuánto dio?

E2: 72.25

P: muy bien, ¿Y cómo se llama este lado?

E2: hipotenusa

P: entonces siguió sumará el cuadrado de este y el cuadrado de este me tendría que dar

E1: 72.25

P: ¿ustedes como lo están haciendo?

E4: pues yo sé que el cuadrado de 3.6 y de 8.5 y restare del área la medida del cuadrado de 3.6 el de 8.5 para tener el cuadrado del otro cateto

P: muy bien háganlo y vamos a comparar esa es otra forma

(los alumnos realizan las operaciones)

E1: ya profe

P: muy bien, antes, ustedes ¿ya terminaron? es que tenía otro procedimiento, bueno, ¿ahora que hicieron?

E1: Igual multiplicamos el cateto de 3.6 por 3.6 da 12.36 y el de arriba 8.5 por 8.5, 72.25, es lo mismo, pero ahora restamos, salió 59.29, ya a ese le sacamos raíz, y fue 7.7

P: muy bien, entonces este cateto mide 7.7, ¿porque lo restaron?

E4: porque para sacar la hipotenusa sumamos los 2 catetos, como ya tenemos la hipotenusa le restamos para sacar el otro cateto

P: Ah muy bien, restaron este cateto de la hipotenusa para saber cuánto debía medir este cuadrado ¿verdad?

ES: Sí

P: entonces, ¿quedó claro el tema?

E1: sí

P: pues, muchas gracias, ahí termina el experimento

Anexo 15. Transcripción de la segunda intervención.

La segunda intervención también se puede encontrar en el enlace:
https://www.youtube.com/watch?v=l1U5namrP9c

Joseph Xolocotzi Villalva: Este es un experimento, les repito. No los estoy evaluando a ustedes, yo lo que estoy evaluando es la actividad. Antes de iniciar, la primera pregunta es si ¿alguno de ustedes podría calcular la medida del tercer lado? Tenemos un triángulo rectángulo. Ya vieron, este símbolo indica que es rectángulo, sabemos un lado y sabemos la medida del otro lado, ¿podrían calcular la medida del tercer lado?

E1: No, porque no tenemos el área del triángulo.

Joseph Xolocotzi Villalva: No, no hace falta. No porque no tengamos el área ¿Alguien tiene otra? O ¿ninguno puede calcularla? ... ¿No? Bueno… Pues esto es, por decirlo de alguna forma un acertijo que espero logren resolver durante la actividad ¿está bien? O sea, lo que se espera es que precisamente sepan resolverlo para que después de la actividad lo intentemos. Muy bien, lo que tienen en material enfrente de ustedes son rompecabezas y tapetitos por llamarlo de alguna forma. Tienen tres tapetitos ¿verdad? Cada tapetito tiene ciertas figuras, ya las identificaron me imagino y en cada figura vienen triángulos, son diferentes triángulos ¿verdad? Entonces, ¿qué tipo de triángulo es el que está en el tapetito número 1?

E1: ¿Rectángulo?

E2: Rectángulo.

Joseph Xolocotzi Villalva: Muy bien, es un triángulo rectángulo. Entonces ahí viene el nombre escrito. Entonces ¿qué tipo de triángulo aparece en el tapetito número 2?

E3: ¿Obtuso?

Joseph Xolocotzi Villalva: Obtuso u obtusángulo ¿verdad? O sea, vienen el nombre escrito precisamente porque son definiciones y ¿qué tipo de triángulo es el que viene en el tercer tapetito? ¿cómo? ¿en el tercer tapetito, cómo se llama?

E1: Escaleno

E3: ¿Escaleno?

E1: ¿Escaleno?

Joseph Xolocotzi Villalva: Es un triángulo escaleno, pero ¿de acuerdo a sus ángulos?

E3: ¿Acutángulo?

Joseph Xolocotzi Villalva: Acutángulo. Muy bien, entonces la actividad la vamos a hacer primero en el primer tapetito ¿está bien? Entonces, si gustan pueden acomodar los otros dos, pueden ponerlos a un lado para que no les estorben y vamos a hacer primero el primer tapetito. Aquí vienen las instrucciones, yo me imagino ya las notaron, ya las leyeron, y dice: utiliza las piezas para cubrir los cuadrados verde y magenta ¿si se nota cuáles son el verde y magenta?

E3: SI

Joseph Xolocotzi Villalva: Muy bien, verde y magenta ¿verdad? Después van a mover las piezas para cubrir el cuadrado azul. O sea, primero van a cubrir estas dos piezas y después las van a mover para cubrir el cuadrado azul que está abajo. Cada uno es un rompecabezas diferente, ahí vienen las piezas que van a utilizar ¿si queda claro? Entonces ¿por qué vienen de diferentes colores? Por el número de piezas por decirlo de alguna forma. Los verdes tienen menos piezas, los amarillos tienen más piezas y los rojos son los que más piezas tienen. Entonces, pues eso significa que podrían tardar menos tiempo en armar uno u otro. SI ustedes arman uno verde, yo les voy a dar una ficha verde de tres puntos, ¿si queda claro?, si arman una ficha amarilla, yo les voy a dar una ficha amarilla que va a valer cuatro puntos y si arman uno rojo les voy a dar una fichita roja que vale cinco puntos y gana el equipo que más puntos acumule ¿si queda claro? Entonces es parte de la actividad decidir que tipos de rompecabezas son los que van a elegir para ganar más puntos. Muy bien, ¿dudas o preguntas hasta aquí?

E3: No

Joseph Xolocotzi Villalva: Muy bien, van a tener 20 minutos y pueden empezar. Así que empiecen a elegir qué rompecabezas quieren… una cosa más, vayan de uno a la vez, no saquen dos. Uno a la vez porque si no las piezas se mezclan y luego es más difícil guardarlo.

***Empiezan a armar los rompecabezas

Joseph Xolocotzi Villalva: En ese se le puede dar la vuelta a algunas piezas, están pintadas de los dos lados, entonces se les puede dar vuelta.

E3: Ya

E4: Ya está

Joseph Xolocotzi Villalva: Muy bien, ya armaron estos dos y cubre bien el espacio, a ver, ahora tienen que mover estas piezas para intentar formar el cuadrado azul.

***Equipo de mujeres arma rompecabezas

Joseph Xolocotzi Villalva: Este, yo les diría, estas guárdenlas mientras, o sea armen uno a la vez.

***Equipo de hombres arma rompecabezas

***Equipo de mujeres arma rompecabezas

Joseph Xolocotzi Villalva: Igual si quieren cambiar de rompecabezas, pueden ponerlas dentro de la cajita y toman otro. Parte del juego es… pongan las piezas dentro de la cajita y luego la acomodan

***Equipo de hombres arma rompecabezas

Joseph Xolocotzi Villalva: Pero primero van estas dos si no qué chiste. Primero tienen que armar estos dos y luego pasar todo para allá, si no qué chiste.

***Equipo de hombres arma rompecabezas

***Equipo de mujeres arma rompecabezas

***Equipo de hombres arma rompecabezas

Joseph Xolocotzi Villalva: No, no no, los dos deben estar armados

E2: ¿Cómo? ¿Cómo estaban armados aquí los tenemos que pasar aquí?

Joseph Xolocotzi Villalva: No, cambian, o sea estos pueden girar y así, entonces quedan, lo tienen que reconfigurar. Muy bien, ahí está.

E3: ¿Ya lo quito de acá?

Joseph Xolocotzi Villalva: SI, ya lo pueden quitar, claro

Joseph Xolocotzi Villalva: Muévanlas, muévanlas. Empiecen…

***Equipo de mujeres arma rompecabezas

Muy bien, ahora la pregunta es cuando unieron estas áreas de estos dos cuadrados ¿el área que salió aquí es igual, mayor o menor?

E1: Es igual ¿no? Porque aquí si juntamos los dos da la misma área por decirlo así del cuadrado azul.

Joseph Xolocotzi Villalva: Muy bien, entonces estos son tus primeros cinco puntos, guarden esto aquí y les da tiempo todavía hacer otro.

E2: ¿Así como está?

Joseph Xolocotzi Villalva: Pues sí

***Equipo de hombres arma rompecabezas

E3: Que si podemos guardar las piezas

Joseph Xolocotzi Villalva: Si pueden guardar las piezas

Joseph Xolocotzi Villalva: Están ganando, pero todavía tienen 10 minutos, o sea, van a hacer la mitad del tiempo

Joseph Xolocotzi Villalva: Entonces tienen que irlas girando ¿no?

E3: Este va acá, hmmm

Joseph Xolocotzi Villalva: Tienen más piezas intenten acomodarlas

Igual si quieren pueden cambiar de rompecabezas, si dicen, bueno este no, cambiamos, ya nada más les faltaría armar este, si cambian de rompecabezas, nada más les faltaría armar este, ya nada más lo ponen en su cajita, lo pasan a un lado y toman el siguiente para que no se mezclen las piezas.

E3: ¿Podemos destaparlo?

Joseph Xolocotzi Villalva: ¿Cuál quieren destapar?

E3: El amarillo

Joseph Xolocotzi Villalva: Son diferentes todos

E3: No

E4: Qué difícil

Joseph Xolocotzi Villalva: Si quieren pueden cambiarlos luego

E3: Tiene puro cuadrito

E3: ¿SI lo volvemos a cambiar ya nada más sería este o volveríamos a empezar?

Joseph Xolocotzi Villalva: No, ya nada más sería el tercero, pues ya hicieron los otros. Revisen si quieren un de este o uno de verde, o sea es parte de la estrategia porque al final lo importante es que armen.

***Interacción entre e3 y e4

Joseph Xolocotzi Villalva: Es parte de la estrategia, lo que importa más es que…

E4: ¿primero este o nada más este?

Joseph Xolocotzi Villalva: Primero tienen que armar estos dos, sí, primero son estos dos, sino qué chiste

Gírenlas si quieren.

***Equipo de mujeres arman rompecabezas

Joseph Xolocotzi Villalva: Aquí tienen otra pieza

E1: Ya profe

Joseph Xolocotzi Villalva: Muy bien, ya tienen esto, ahora muevan las piezas para pasarlo para allá

***Equipo de hombres arman rompecabezas

Joseph Xolocotzi Villalva: Ya quedó, sale, ya tienen estos, ahora tienen que mover las piezas para allá

***Equipo de hombres arma rompecabezas

Joseph Xolocotzi Villalva: Muy bien, ahora la pregunta es cuando sumaron estas áreas y sumaron en el cuadrado azul, el área que salió fue ¿igual, mayor o menor?

E4: igual, si de estas dos a esta

Joseph Xolocotzi Villalva: Muy bien, aquí tienen sus primeros tres puntos, guarden éstas y hagan el siguiente. Todavía les da tiempo, todavía tienen. A ver si alguno de los dos acaba.

Joseph Xolocotzi Villalva: Ah, no, no, en el mismo tapetito, en el mismo arman otro rompecabezas, sale.

¿Son muchas piezas, ¿verdad?

E4: Ya está

Joseph Xolocotzi Villalva: Muy bien, ya tienen estos dos, ahora guarden las piezas para armar el otro

***Equipo de hombres arman rompecabezas

Joseph Xolocotzi Villalva: Creo que las piezas pueden girar en este

E3: Ohhh

Joseph Xolocotzi Villalva: O sea, es más fácil por esto. Tienen que verlo, no quiere decir que forzosamente tengan que girarlo.

***Equipo de mujeres

Joseph Xolocotzi Villalva: Ahora, cuando movieron estas piezas para formar este, el área que se formó fue ¿igual a estas, mayor o menor?

E1: Igual

Joseph Xolocotzi Villalva: Igual, bueno, estos son sus siguientes cuatro puntos, yo creo guárdenlo, ya queda poquito tiempo, voy pasando para la otra mesa a ver si ya terminaron y si no, terminamos la primera parte de la actividad.

Muy bien, vamos a detener la primera parte aquí, si gustan nos detenemos tantito. Nada más es para hacer una conclusión, este es el intermedio digamos. Parte de la estrategia es lo de elegir rompecabezas, tal vez era mejor elegir un rompecabezas más sencillo que enfocarse en uno muy difícil. Ahora, la pregunta que viene es cuando ustedes formaron los cuadrados, bueno, el área del cuadrado magenta y el área del cuadrado verde y la utilizaron para formar el área del cuadrado azul ¿cómo fue el cuadrado azul? ¿de la misma área que los otros dos? O sea, ¿al juntarlos se vio la misma área? ¿fue más grande o más chiquito?

E1: Fue más grande ¿no? Porque al juntarlo este se supone que se ve un área más pequeña y en esta se ve un área un poquito más grande que ese, entonces, al juntarlos se hace un área más grande

Joseph Xolocotzi Villalva: Muy bien, y ¿la suma era igual al azul? ¿mayor o menor? O sea, al juntar las dos áreas, la magenta y la verde en el cuadrado azul ¿el cuadrado azul tuvo la misma área que los otros dos juntos? ¿más o menos?

E1: Son de la misma

Joseph Xolocotzi Villalva: La misma área, muy bien, entonces, ahora vamos a repetir la actividad, pero con los tapetitos dos y tres ¿si queda claro? O sea, igual, van a volver a armar y les voy a volver a dar puntos por cada rompecabezas que vayan armando. Pueden repetir rompecabezas que ya armaron ¿sale? Entonces, el dos y el tres al mismo tiempo. Igual. Entonces, pasen ahora al tapetito dos y tres por favor. Muy bien, a ver, esperen, vamos a empezar todos juntos porque si no se nos descompone esto. Muy bien, van a hacer lo mismo, primero van a forma los cuadrados verde y magenta, luego mueven las piezas para formar los cuadrados azules y van a volver a comparar las áreas ¿si queda claro?

Entonces voy a repetir, igual, si se cansan de uno y quieren cambiarlo, nada más ponen las piezas en su cajita, en el estuche y lo cambian, sale. Y voy a agregar ahora la ficha azul. Cuando ustedes terminen de hacer la comparación, le voy a dar al equipo una fichita azul equivalente a dos puntos ¿queda claro? Bueno ¿dudas o preguntas? Ahora sí podemos empezar.

***Equipo de mujeres

E2: Ya

Joseph Xolocotzi Villalva: Muy bien, este salió ¿no? Se cubren las mismas áreas. Ahora vas a mover las piezas para intentar formar éste.

***Equipo de hombres

Joseph Xolocotzi Villalva: En este vienen pintadas algunas piezas de los dos lados, eso quiere decir que no podría ser que tengan que….

Joseph Xolocotzi Villalva: Muy bien, ya terminaron estos dos. Ahora tienes que mover las piezas para intentar formar este y al final comparamos las áreas. Acuérdate, pueden girar, o sea que podrían estar así o así, gírenlo.

Joseph Xolocotzi Villalva: SI tienen problemas para armarlos, pueden usar la cajita donde venía

E4: Ah, sí es cierto

***Equipo de mujeres

Joseph Xolocotzi Villalva: Si tienes problemas para armarlos, puedes usar la cajita donde venía

E1: Ya no me acuerdo como era

E2: Yo tampoco

E1: Ya profe, aquí ya quedaron

Joseph Xolocotzi Villalva: Muy bien, ahora igual, aquí se quedaron, aquí son iguales. Ahora mueve estas piezas para compararlo con esta área. Igual si tienes problemas puedes usar la cajita.

***Equipo de hombres

Joseph Xolocotzi Villalva: Casi, casi, gíralas, gíralas, porque si no…

E3: Ahí está

Joseph Xolocotzi Villalva: Acuérdate, es que tienes que irlas girando… Ya terminaste esta, ahora usa las piezas para intentar formar el cuadrado de abajo.

Ustedes eligieron este.

***Equipo de mujeres

E2: Maestro, pero queda muy chiquito

Joseph Xolocotzi Villalva: Muy bien, ahora esa es la pregunta, a ver, primero que nada, ya lo armaste, aquí están tu ficha. Muy bien, ahora, cuando tu tomaste estas áreas, las áreas de estos dos y la pasaste aquí, el cuadrado azul fue ¿mayor a la suma de estas áreas? ¿igual o menor?

E2: Mayor

Joseph Xolocotzi Villalva: Fue mayor. Muy bien, aquí hay dos puntos por hacer la comparación, muy bien, así es, ahora, puedes pasar al siguiente.

***Equipo de hombres

Joseph Xolocotzi Villalva: No, esos los tienes que volver a armar porque es el rompecabezas, ¿sale? Cuando vuelvas a armar este que ya habías hecho, ya nada más haces este.

E4; Ya está profe, ya está

Joseph Xolocotzi Villalva: Muy bien, ahora usa las piezas para formar un cuadrado sobre este- Igual acuérdate, si no, puedes utilizar la cajita.

***Equipo de hombres arma rompecabezas

Joseph Xolocotzi Villalva: Igual acuérdense, si tienen problemas para eso está la cajita…

Muevan estas, gírala

***Equipo de mujeres

E1: Ya

Joseph Xolocotzi Villalva: Muy bien, aquí el área del cuadrado azul es ¿más grande que la suma de estos? ¿igual o menor?

E1: Es menor

Joseph Xolocotzi Villalva: Es menor, muy bien, entonces este es del… equipo juntos y otros dos por hacer la comparación. Si quieren guarden esos e intenten hacer otro.

E2: Con otras piezas

Joseph Xolocotzi Villalva: Con otro rompecabezas, lo pueden hacer las dos.

***Equipo de hombres

Joseph Xolocotzi Villalva: Ah es que después de terminar van a comparar las áreas

E4: ahh

Joseph Xolocotzi Villalva: O sea podría ser mayor podría ser menor podría ser igual

Así es si sobra espacio podría ser mayor si no sobra espacio podría ser igual

***Equipo de mujeres

Joseph Xolocotzi Villalva: Ah sí, es que ese es el más difícil

***Equipo de hombres

Joseph Xolocotzi Villalva: Muy bien tienes 2 juntos para hacer la comparación

E4: Le falta

Joseph Xolocotzi Villalva: A ver ayúdalo

E4: si es así

Joseph Xolocotzi Villalva: Aquí están los otros dos puntos, muy bien ahora cuando tomamos estos 2 en este el área es ¿mayor, igual o menor?

E4: Es menor

Joseph Xolocotzi Villalva: A ver ¿cuál es menor?

E4: Está

Joseph Xolocotzi Villalva: A ver esta es la suma de estos 2 ¿ésta es menor que la azul?

E4: No, estos son menores que éste. Este es mayor.

E4: y ahora ¿Te ayudo?

Joseph Xolocotzi Villalva: Sí, es un trabajo en equipo

E1 y E2: Ya profe

Joseph Xolocotzi Villalva: Ah muy bien ya lo solucionaron las 2, ahora hay que pasarlo al azul y hay que hacer la misma comparación ¿sale?

***Equipo de hombres

Joseph Xolocotzi Villalva: Ahora hay que pasarlo al cuadro azul para compararlo

Joseph Xolocotzi Villalva: Otros y otros puntos.

Joseph Xolocotzi Villalva: Yo creo que vamos a detenernos aquí. Bueno, primero guarden las piezas. Bueno dejamos tantito a las piezas y ahorita las guardamos. Ahorita denme un segundito, pónganlos a un lado y muy bien. Ahora vamos a hacer lo siguiente, vamos a hacer la comparación entre las áreas de los cuadrados ¿está bien? ¿en qué casos el área del cuadrado es igual a la suma de las áreas de los cuadrados verde y magenta? ¿En qué casos?

E1: en la uno

Joseph Xolocotzi Villalva: En la plantilla uno ¿Qué características tenía la plantilla uno? O sea ¿qué cambia entre una plantilla y otra? ¿Qué tipo de triángulo era el triángulo de la plantilla uno?

E1 y e4: Triángulo rectángulo

Joseph Xolocotzi Villalva: Un triángulo rectángulo ¿verdad? Entonces cuando este ángulo fue de 90° al unir este cuadrado con este da este ¿sí? ¿En qué casos el cuadrado azul fue mayor?

E1: En el tres

Joseph Xolocotzi Villalva: ¿En el 3? ¿El cuadrado azul fue mayor en el 3?

E4: No, en el 2

E3: Si, fue en el 2

Joseph Xolocotzi Villalva: ¿En el 2? ¿porque en el 2? ¿En cuál? a ver vuelvo a repetir la pregunta. ¿En qué casos el área del cuadrado azul fue mayor a la suma de estos 2?

E1 y E2: En el 2

Joseph Xolocotzi Villalva: En el 2. A ver ¿cómo saben que era mayor?

E1 y E2: Porque sobraban espacios

Joseph Xolocotzi Villalva: Porque sobraba espacio, muy bien y ¿en qué casos el área del cuadrado azul fue menor?

Todos: En el tres

Joseph Xolocotzi Villalva: En el 3. Muy bien, ahora, entonces ¿en cuál fue el único en el que fueron iguales?

Todos: En el 1.

Joseph Xolocotzi Villalva: ¿qué característica tenía la plantilla 1? ¿cómo era la figura ahí? O sea, ¿en qué son diferentes las tres plantillas?

E3: En los triángulos

E1: En los ángulos

Joseph Xolocotzi Villalva: En los ángulos de los triángulos, ¿verdad? ¿cómo era el ángulo de la plantilla 1?

E1: De 90 grados

Joseph Xolocotzi Villalva: De 90 grados, es un triángulo rectángulo. Muy bien, ahora la pregunta es ¿ustedes creen que esa relación de igualdad sucede en todos los triángulos rectángulos o sólo en ese?

E3: En todos

Joseph Xolocotzi Villalva: ¿En todos? ¿o solo en ese? Porque ya vimos, si fueron de 100 grados no funciona, si es de 80 grados no funciona. Cuando fue de 90 si funcionó. Ahora, ¿siempre que el ángulo sea de 90 grados va a funcionar? O ¿solamente en ese triángulo en particular?

Todos: Siempre que es de 90

Joseph Xolocotzi Villalva: ¿Sólo en ese o siempre?

E4: No siempre…

Joseph Xolocotzi Villalva: Muy bien, justamente todavía no sabemos, podría ser que siempre o sólo en ese. Bueno, ahorita vamos a guardar, denme un segundito. Ahora, la pregunta es ¿Cómo podríamos comprobar si siempre sucede o solamente en ese caso en particular? ¿Cómo podríamos hacerlo?

E2: Porque…

Joseph Xolocotzi Villalva: Vuelvo a repetir, la pregunta original es esta ¿creen que la relación de igualdad entre las áreas de los cuadrados se cumplirá en cualquier triángulo rectángulo o sólo en el de la plantilla 1? ¿siempre? o ¿solo en ese?

E3: Sólo en el de plantilla 1

Joseph Xolocotzi Villalva: Bien, algunos dicen que siempre y otros que solo en la plantilla 1. Ahora ¿cómo podríamos comprobar que sucede siempre o solamente en ese caso en particular?

E3: Checando de más

Joseph Xolocotzi Villalva: Checando de más ¿cómo sería eso?

E2: Haciendo las demás figuras

Joseph Xolocotzi Villalva: Haciendo otras figuras ¿Qué tipo de figuras tendrían que ser para comprobar que funciona siempre en un triángulo rectángulo? ¿Qué tipo de figuras tendrían que hacer?

E2: Que encajen

Joseph Xolocotzi Villalva: Que encajen… a ver, la pregunta es esta ¿creen que va a funcionar en todos los triángulos rectángulos? Voy a hacer el dibujito, porque si no, tal vez esto no se entienda. Ohm, tomo la plantilla 1 porque es importante que se entienda. Este es un triángulo rectángulo, esta escuadra también es un triángulo rectángulo, ¿verdad? Porque tiene un ángulo recto. ¿Ahí está, entonces si yo hiciera lo mismo de calcular el área del cuadrado que está aquí, sería esto lo mismo a las áreas de los cuadrados de este lado y este lado?

E1: No

Joseph Xolocotzi Villalva: ¿No o sí? Bueno esa es la pregunta, bueno intuitivamente decimos no. Funciona en la plantilla 1 y ya quedó, ahí, en este si funcionó, pero en este todavía no sabemos ¿verdad? O sea, podría ser que sí, podría ser que no ¿si queda claro esto? Igual aquí tenemos otro triángulo rectángulo diferente, disculpen, lo tomo, aquí tenemos otro triángulo rectángulo diferente, aquí tiene un ángulo recto. Ahora, podríamos hacer lo mismo, podríamos dibujarle a este su cuadrado, a este su cuadrado y comparar si las áreas de este cuadrado y este cuadrado suman lo mismo que aquí ¿creen que aquí si funcionase, que sucedería lo mismo o aquí tampoco?

E1: Tampoco

Joseph Xolocotzi Villalva: Tampoco, muy bien entonces la pregunta es ¿cómo podrían comprobar si funciona o no? Porque dicen bueno, este es un ejemplo particular, porque quiero que exploremos si funciona en este caso, en la plantilla 1 o si funciona en cualquier triángulo rectángulo

E1: Primero se supone que, para ver, primero tenemos que ver los dos cuadros de hasta arriba, entonces para sacar el área total, primero tendrías que sacar el área total de éste, el área de estos y ver si al sumar estas dos áreas, te da esto.

Joseph Xolocotzi Villalva: Muy bien, podrían hacer eso ¿verdad? Podrían tomar otro triángulo, por ejemplo, este y calcular las áreas ¿verdad? Entonces ¿si queda clara esta idea? Bueno, ahora antes de hacerlo, les voy a pedir que guardemos los rompecabezas. Esta es la plantilla, por favor, si los pueden guardar antes de que hagamos la siguiente actividad.

***Los alumnos guardan el rompecabezas siguiendo la plantilla

Joseph Xolocotzi Villalva: Lo único es que estoy viendo que las figuras vienen al revés algunas por la foto.

Joseph Xolocotzi Villalva: Bien, ya guardamos las piezas, ya las contamos. Ahora, vamos a retomar la idea de su compañera, para determinar si en todo triángulo rectángulo, esa igualdad de la suma del área de los dos cuadrados es igual al área del tercer cuadrado ¿si queda claro? Para eso yo traje aquí las hojitas ya con triángulos dibujados. SI gustan pasen los rompecabezas y los tapetitos a un lado. Es uno para cada uno si quieren. Muy bien, ahora la idea de su compañera era

E1: Sacar el área del cuadrado grande y sumar las dos áreas de los cuadrados chiquitos y compararlo con el área del cuadrado grande para ver si sobra o falta.

Joseph Xolocotzi Villalva: Muy bien, esta es su platilla, la compañera dice, vamos a calcular el área de estos cuadrados. O sea, el área que se levantaría de un cuadrado de este lado o de este, luego calculamos el área del cuadrado que se levanta sobre estos dos y si al sumar las dos áreas más pequeñas, nos da el área más grande, significa que sí se cumple ¿verdad? Entonces para hacerlo, antes tendría que preguntarles ¿cómo sabemos que los triángulos que les di son rectángulos?

E1: Porque tienen un área de 90 grados

Joseph Xolocotzi Villalva: ¿Tienen un área de 90 grados?

E4: Tienen ángulo recto

Joseph Xolocotzi Villalva: Tiene ángulo recto ¿Podrían marcar cuál es el ángulo recto en cada triángulo por favor? Ahí tienen lápices.

***Todos marcan los ángulos rectos

E3: ¿los podemos voltear?

Joseph Xolocotzi Villalva: Si, porque precisamente están girados ¿verdad? Tienen que marcar el ángulo recto

¿Este es un ángulo recto?

Muy bien, voy viendo ¿cómo calcularían las áreas que se levantan sobre esos cuadrados?

E4: Dibujándolos

Joseph Xolocotzi Villalva: ¿los dibujarían? ¿Cómo los dibujarían?

E1: Armándolos

Joseph Xolocotzi Villalva: ¿Armándolos?

E1: Armar el cuadrado sobre los triángulos, sacar el área y ver

Joseph Xolocotzi Villalva: Pues podría ser, pero, bueno, si los dibujamos podríamos tardar un poquito más ¿no?

E4: Imaginarlos

Joseph Xolocotzi Villalva: Podríamos imaginarlos

E1: Podríamos sacar el área de todo y al sumarlo sacar la suma total del cuadrado.

Joseph Xolocotzi Villalva: ¿Cómo? No le entiendo

E1: Si estos tienen áreas de 45, 20 y 10, entonces al sumarlos dan el total de la figura

Joseph Xolocotzi Villalva: Ah muy bien, estos ya son triángulos diferentes, esto ya no es rompecabezas, estos son triángulos independientes. ¿Todos son triángulos rectángulos primero?

E1: Si

Joseph Xolocotzi Villalva: SI, bueno, vamos a comparar de nuevo aquí, voy a usar de nuevo este ejemplo, vamos a comparar las áreas de los cuadrados que se levantan sobre dos de sus lados con el área del tercer lado ¿sale?

Y ahora la pregunta es ¿cómo calcularían el área de este cuadrado por ejemplo sin dibujarlo? Ahora sí que nada más imaginando ¿cómo sería?

E1: Se suman sus lados

Joseph Xolocotzi Villalva: ¿Se suman sus lados?

E1: Se multiplican

E4: Base por altura

Joseph Xolocotzi Villalva: Bueno, base por altura. ¿Pero cuánto va a medir la altura aquí? O sea, digamos, si este mide, por ejemplo, 10 cm de base ¿Cuánto mediría de altura?

E4: 10

Joseph Xolocotzi Villalva: Muy bien, 10 porque es un cuadrado, y si midiera 20 la base ¿cuánto mediría la altura?

Todos: 20

Joseph Xolocotzi Villalva: Entonces ¿cómo calcularían su área? Voy a poner otra medida para ejemplificar, si este midiera 30, ¿cuánto mediría su área?

E1: 30 por 30, muy bien. Ahora, en esos ¿cómo podrían conseguir sus medidas?

E1: Midiéndolas con centímetros

Joseph Xolocotzi Villalva: Pues midiéndolas con centímetros, o sea, bueno ¿si queda claro? Entonces ahora tomarían el juego geométrico y me darían los lados. Tienen hojas a los lados, ahí van a calcular las medidas de las áreas de los cuadrados.

¿si queda clara la indicación?

E4: si

Joseph Xolocotzi Villalva: Sale, ¿usted también la entiende?

E3: si

Joseph Xolocotzi Villalva: Sale, empiecen. No es necesario que midan de todos, elijan de algunos porque si no vamos a tardar mucho ¿verdad? Yo creo que con que calculen el área de los cuadrados de tres o cuatro triángulos es más que suficiente. Luego vamos a compararlos

***Todos calculan las medidas y áreas

Joseph Xolocotzi Villalva: SI gustan pueden irlos midiendo e irles anotando sus medidas

E4: Este de acá tiene 2 cm y este tiene 2.5 cm y este tiene 3 cm

Joseph Xolocotzi Villalva: Muy bien, hagan esas operaciones aquí. Si, por favor.

Aquí hay una calculadora si tienes problemas, bueno, si quieren, si no quieren no.

¿No sale? El punto decimal va aquí

Joseph Xolocotzi Villalva: Estas calculando el área del triángulo

E1: Si

Joseph Xolocotzi Villalva: ¿pero estamos calculando el área del triángulo? O ¿el área del cuadrado que se forma aquí?

E1: AH

Joseph Xolocotzi Villalva: Sale, es lo difícil, es lo que tienen que imaginar. Imaginemos que hay un cuadrado aquí ¿cuál sería su área? Primero ¿cuál es su base?

E1: 12 cm

Joseph Xolocotzi Villalva: Entonces de aquí sería 12 y ¿cuál sería la altura de ese cuadrado?

E1: ¿5?

Joseph Xolocotzi Villalva: ¿Por qué 5? Porque es del triángulo ¿verdad? Pero no estamos buscando del triángulo, estamos buscando del cuadrado, del cuadrado que se forma aquí. Entonces, aquí tendrías que proyectar, no es necesario dibujarlo, imagina cuánto mediría este lado del cuadrado. SI este lado mide 12 y tus trazas un cuadrado ¿cuánto tendría que medir?

E1: 12

Joseph Xolocotzi Villalva: 12 también, entonces tienes que multiplicar 12 por 12. Aquí tienes una calculadora

E1: 144

Joseph Xolocotzi Villalva: 144, entonces este tiene un área de 144, si quieres puedes anotarlo aquí o anotarlo aquí. Ahora harías lo mismo con este ¿cuánto mediría el otro lado del cuadrado?

E1: 5

Joseph Xolocotzi Villalva: Muy bien ¿cuánto mediría el área?

E1: *Hace cuentas de dos lados* son 169

Joseph Xolocotzi Villalva: Muy bien, ahora vamos a comparar el más grande con los dos más chicos. Los cuadrados de aquí y de aquí ¿son menores que este o son mayores? ¿cuál es el cuadrado más grande? Ah bien, ¿entonces este cuadrado y este cuadrado suman lo mismo que este?

***Equipo de hombres

E4: Sumamos esta área con esta área y nos da 141

Joseph Xolocotzi Villalva: Muy bien, en este si salió, en este y en la plantilla 1. Ahora háganlo con otro.

***Equipo de hombres saca las medidas de los cuadrados

E3: Ora

Joseph Xolocotzi Villalva: Yo no sé

E4: Es que aquí se debe multiplicar 13x13

Joseph Xolocotzi Villalva: Exacto

E4: Y luego 5x5 y lo que te salga lo sumas con el de 13 x13

E3: Aquí con este

E4: No, sumas 5x5 más 13 x13 y lo que te salga lo comparas con 12x12

E3: Ah, sí, sí, si

***Equipo de mujeres

E1: En el primero si salió

Joseph Xolocotzi Villalva: ¿si salió? Bueno, en este si salió, pero digamos, el cuarto es este que hicimos

E4: Entonces en ¿el de este lado se suma con el de este otro lado para que salga este?

Joseph Xolocotzi Villalva: SI

E4: Entonces pues sí da porque 54 más … son…

Joseph Xolocotzi Villalva: Si salió, en este también salió, su compañero está haciendo el tercero. En este 5x5 25. Ajá, sí.

***Equipo de hombres saca medidas

Joseph Xolocotzi Villalva: ¿25? Háganlo con la calculadora.

E1: Ya acabamos ¿ahora qué vamos a hacer?

Joseph Xolocotzi Villalva: Yo creo que con eso está bien, ya nada más esperamos que sus compañeros vayan terminando.

E4: SI salió

Joseph Xolocotzi Villalva: Ya salió, o sea en estos tres ya salió, bueno, vamos a dejar con eso.

Cuatro, cinco, seis, siete y ya tenemos, digamos ocho casos contando el de la plantilla 1. Ahora, antes de continuar ¿cómo supieron cuáles tenían que sumar para conseguir el tercero? A ver, primero, ¿en todos los casos les salió? ¿en todos los casos la suma de dos cuadrados fue igual al tercero?

E4: Si

Joseph Xolocotzi Villalva: ¿en todos los casos?

E4: si

Joseph Xolocotzi Villalva: ¿cómo supieron cuáles debían sumar para conseguir el tercer lado?

E1: Sumar los menores para saber si el área alcanza al mayor

Joseph Xolocotzi Villalva: Muy bien, siempre sumaron los lados menores, los cuadrados de los lados menores para ver si les daba el cuadrado del lado más grande. A ver ¿en cada caso ¿dónde se encontraba el lado más grande?

E1: El más grande en…

Joseph Xolocotzi Villalva: Bueno ¿Dónde se encontraba el lado más pequeño?

E1: El lado más pequeño era la base y la altura

Joseph Xolocotzi Villalva: La base y la altura, por llamarlos de alguna forma ¿no? Eran los lados que formaban

E1: áreas más pequeñas

Joseph Xolocotzi Villalva: Áreas más pequeñas por llamarlos de alguna forma. bueno y el lado más grande era el otro ¿verdad? el abarcaba… ¿cómo era el lado más grande? es que no les puedo decir, perdón. O sea ¿qué características tenía el lado más grande en cada caso?

E1: un ángulo agudo

Joseph Xolocotzi Villalva: muy bien era que no formaban un ángulo recto ¿verdad? ese lado formaba ángulos agudos y los otros 2 que eran más pequeños eran los que formaban

E1: el ángulo recto

Joseph Xolocotzi Villalva: el ángulo recto ¿sí queda claro?

E1: sí

Joseph Xolocotzi Villalva: Muy bien, entonces así es como podría determinarlo: Ahora ¿Comprobamos su idea original? ¿comprobamos que siempre sucede? O ¿sólo en algunos casos?

E1 y E4: que siempre sucede

Joseph Xolocotzi Villalva: Que siempre sucede ¿verdad? No solamente en este rompecabezas sino en cualquier triángulo rectángulo que la suma de 2 cuadrados es igual al área del tercer cuadrado, sale ¿dudas o preguntas hasta aquí?

Todos: no

Joseph Xolocotzi Villalva: ¿No? Bueno esto es lo que se conoce como el Teorema de Pitágoras y toda esta actividad tiene que ver con este teorema ¿sale? Es una cualidad muy particular de los triángulos rectángulos que sí suman los lados de los cuadrados del ángulo recto les va a dar el cuadrado del tercer lado. Como es una cualidad muy particular se les ha dado un nombre, muy bien, a los lados que forman el ángulo recto se les llama catetos y al lado que se opone al ángulo recto es la hipotenusa que es el lado más grande ¿sí queda claro?

Entonces éstos son los nombres los catetos forman el ángulo recto y la hipotenusa es el lado que se opone. Muy bien, ahora, han existido varias personas que han hecho las demostraciones de este teorema. De hecho, en los rompecabezas no sé si se fijaron que al fondo venían nombres. Entonces esos nombres son de personas que han propuesto justamente esas demostraciones esas figuritas.

También tenemos por ejemplo a Leonardo Da Vinci con su propia demostración, un presidente de los Estados Unidos que se apellidaba Garfield. Otro matemático que se llamaba Euclides, o sea ha habido a lo largo de la historia muchas personas que han hecho esa demostración y yo las utilicé para hacerles un juego. Vamos a ver ahora vamos a utilizar la demostración algebraica, más que nada es para ver si esto ya queda como concluso y podemos ver si ya queda claro el tema. Lo primero que vamos a hacer es determinar si estos 2 cuadrados son iguales, fíjense este tiene el lado B más A ¿ya vieron? y éste tiene el lado B más A igual este tiene el lado A más B y este tiene lado A más B ¿son iguales estos 2 cuadrados?

Todos: si

Joseph Xolocotzi Villalva: ¿Sí verdad? nada más están divididos de forma diferente. Entonces podemos observar en cada cuadrado triángulos rectángulos ¿ya vieron?

Todos: SI

Joseph Xolocotzi Villalva: ¿Cuántos triángulos rectángulos tenemos de ese lado?

Todos: cuatro

Joseph Xolocotzi Villalva: Cuatro ¿y cuántos triángulos rectángulos tenemos de este lado?

Todos: cuatro

Joseph Xolocotzi Villalva: Cuatro también ¿verdad? Bueno, vamos a calcular las áreas de ambas figuras. Es un ejercicio que ya han hecho antes con expresiones algebraicas, entonces empezamos con este, aquí yo les puse letras, pero podrían haber sido cualquiera, podrían haber sido x, y o z, m, n o p, o sea, podría haber sido cualquiera. Aquí utilizamos a, b y c. Entonces ¿cuál es el cuadrado de este lado? Ah muy bien, antes en este triángulo ¿cuáles son los catetos? ¿qué nombre tienen aquí?

E1: el A y el B

Joseph Xolocotzi Villalva: ¿cuál es la hipotenusa?

E4: La c

Joseph Xolocotzi Villalva: La c. Aquí igual en este triangulo ¿cuáles son los catetos?

Todos: el A y el B

Joseph Xolocotzi Villalva: ¿cuál es la hipotenusa?

E4: La c

Joseph Xolocotzi Villalva: La c. Muy bien, entonces vamos a determinar cómo haríamos el cuadrado de la hipotenusa. C es la hipotenusa. Este sería el cuadrado de la hipotenusa. ¿cómo expresaríamos el cuadrado de la hipotenusa?

E1: C al cuadrado

Joseph Xolocotzi Villalva: Muy bien, lo voy a anotar, C al cuadrado, muy bien. C al cuadrado y ahora ¿cómo calcularíamos el área de estos cuatro triangulitos? ¿cómo quedarían expresados?

E1: A por B sobre 2

Joseph Xolocotzi Villalva: Muy bien y ¿cuántas veces están?

Todos: cuatro

Joseph Xolocotzi Villalva: Cuatro. Entonces voy a poner cuatro veces A por B sobre 2. ¿Y cómo decimos que están unidos?

E1: porque dice cuatro

Joseph Xolocotzi Villalva: ¿pero con qué operación?

Todos: con una suma

Joseph Xolocotzi Villalva: Con una suma, muy bien, entonces C cuadrado más cuatro veces A por B sobre 2, ¿verdad? Entonces este es el área de éste ¿no? Ahora vamos a calcular el área de este otro, decíamos esto es un cateto ¿no? B ¿Cuál es el área del cuadrado de este cateto B?

Todos: B al cuadrado

Joseph Xolocotzi Villalva: Muy bien, entonces aquí voy a decir primero B al cuadrado ¿Cuál es el cuadrado del otro?

E1: A al cuadrado

Joseph Xolocotzi Villalva: A al cuadrado. Muy bien voy a poner una vez más y ¿cuál es el cuadrado de este triangulito?

Todos: A por B sobre 2

Joseph Xolocotzi Villalva: ¿y cuántas veces tenemos en triangulito?

Todos: 3…no… cuatro

Joseph Xolocotzi Villalva: Cuatro muy bien, entonces tenemos lo mismo ¿no? cuatro A por B sobre 2. Ahora lo interesante de esta demostración es ¿cómo quedaría la expresión si yo quito los cuatro triángulos? Quito este, quito este, quito este y quito este.

Todos: C al cuadrado

Joseph Xolocotzi Villalva: C al cuadrado. Ahora sí quité triángulos de este lado tengo que quitarlos también de aquí. Quito este, quito este, quito este, quito este ¿Cómo quedaría?

Todos: B al cuadrado más A al cuadrado

Joseph Xolocotzi Villalva: B al cuadrado más A al cuadrado. Y ésta es la expresión algebraica del teorema de Pitágoras. C al cuadrado es igual a A al cuadrado más B al cuadrado ¿si queda claro? Esto se puede interpretar así "el cuadrado de la hipotenusa (C al cuadrado) es igual a la suma de los cuadrados de los catetos ¿sí queda claro? Aquí uso C, pero puede haber usado cualquier otra letra x, y o z. Por cuestiones fáciles de abecedario, digamos, a, b y c. Entonces C al cuadrado es igual a A al cuadrado más B al cuadrado. ¿dudas o preguntas? ¿queda claro esto? bueno a ver si sí es cierto ¿Cómo calcularían la medida de este lado? Esta es la parte interesante ¿cómo calcularían la medida de este lado?

E1: sacando el cuadrado de los catetos

Joseph Xolocotzi Villalva: Pondrían el cuadrado de los catetos ¿y luego?

E1: luego nos sumaríamos para sacar el ángulo…

Joseph Xolocotzi Villalva: Bien, lo sumarían y obtendrían

E1: el cuadrado de la hipotenusa

Joseph Xolocotzi Villalva: El cuadrado de la hipotenusa ¿y luego para conseguir el lado?

E1: lo dividimos entre 2

Joseph Xolocotzi Villalva: ¿porque entre 2?

E1: Porque, ehmm, no, sería entre 4.

Joseph Xolocotzi Villalva: ¿Porque entre cuatro?

E1: Porque cuatro sería la suma de sus cuatro lados ¿no?

Joseph Xolocotzi Villalva: A ver, les parece si lo intentan y ahorita me explican cómo lo hicieron. Es una buena forma, inténtenlo, por favor.

***Alumnos hacen el cálculo

Joseph Xolocotzi Villalva: ¿Todavía no? Si quieren pueden tomar otra hojita para que no se confundan

E3: ¿así sale?

Joseph Xolocotzi Villalva: ¿Cómo le hicieron?

¿8 por 3.9? ¿Por qué fue así? A ver, decía que vamos a usar el teorema de Pitágoras ¿está bien? Decíamos que el cuadrado de los catetos…

***Equipo de hombres interactúa

Joseph Xolocotzi Villalva: Ah, muy bien, habíamos visto…

E1: Ya lo encontré, profe

Joseph Xolocotzi Villalva: ¿Ya? Ah, muy bien, habíamos visto que el cuadrado de este cateto más este cateto nos debe dar el cuadrado de este cateto.

***Equipo de mujeres interactúa

E1: Sería primero el resultado de la suma de los lados de estos catetos

Joseph Xolocotzi Villalva: Sumaste los cuadrados de los catetos

E1: Entonces lo sumé y esto me dio 79.21

Joseph Xolocotzi Villalva: Muy bien

E1: Entonces busqué un número que multiplicado por sí mismo, me diera más o menos el mismo resultado, entonces 8 por 8 da 64. Entonces, esos 64 se los resté a 79.21 que me dio 15.21 y a esos les busqué la mitad, entonces si teníamos 8 que era esto, entonces a esto le busqué la mitad que me había dado 7. Entonces 8.7 por 8.7 no alcanzaba, entonces le sumé 1, 8.8 por 8.8 tampoco alcanzaba, entonces puse 8.9 por 8.9 lo que me dio 79.21.

Joseph Xolocotzi Villalva: Y te salió exacto

E1: SI

Joseph Xolocotzi Villalva: Ah muy bien

E1: Entonces el lado que no sabemos sería 8.9

Joseph Xolocotzi Villalva: Muy bien, y ¿por qué no usaron la raíz cuadrada? A ver 79 ¿si saben cómo sacar la raíz cuadrada con esto? Es este símbolo ¿ya vieron?

E1: AH si, entonces una respuesta más corta sería, si al sumar estos dos, entonces buscamos la raíz cuadrada que dio 79.21 que sería 8.9

***E4 explica su procedimiento

Joseph Xolocotzi Villalva: Muy bien, vamos a sacar esto ¿Cuánto les dio? ¿a este equipo cuánto les dio?

E3: 8.9

Joseph Xolocotzi Villalva: ¿y a este?

E1: 8.9

Joseph Xolocotzi Villalva: ¿Cómo lo hicieron?

E3: Sacamos la raíz cuadrada

Joseph Xolocotzi Villalva: ¿Entonces cómo lo hicieron ustedes?

E1: Primero lo que le dije, sumar a los lados, las áreas de los catetos.

Joseph Xolocotzi Villalva: ¿Cómo calcularon el área de los catetos?

E1: Multiplicando 3.9 por 3.9, 8 por 8 son 64, entonces al sumarlos da un resultado de 79.21. Entonces si sacamos la raíz cuadrada de 79.21 nos va a dar un resultado de 8.9 que era el lado que no sabíamos

Joseph Xolocotzi Villalva: Muy bien, bueno, vamos a hacer el siguiente… ahora este ¿Cuánto mide el tercer lado? Es diferente ¿verdad? Ahora mide 3.6. ¿Qué lado nos está pidiendo ahora?

E1: El cateto.

Joseph Xolocotzi Villalva: Muy bien, inténtenlo

E1: 7.7

Joseph Xolocotzi Villalva: Les ganaron, háganlo de todos modos. Muy bien explíquenme cómo le hicieron

E1: Primero sumamos el cuadrado de… después sacamos el área de la hipotenusa que da 72.25 y a esto le restamos 12.96 quedaría 59.29 y a 59.29 sacamos la raíz cuadrada de 7.7

Joseph Xolocotzi Villalva: ¿por qué lo restaron?

E1: Porque para sacar el área de… digamos que ya tenemos esto, entonces esto más esto, tiene que dar esto.

Joseph Xolocotzi Villalva: Muy bien, entonces si la suma de esto te da esto, entonces la diferencia de esto, te tienen que dar esto, ah muy bien ¿si quedó claro entonces?

***Equipo de hombres explica su procedimiento

Joseph Xolocotzi Villalva: ¿y porqué restaste ahora? ¿No? Bueno, a ver, este.

Bueno, entonces ¿aquí cuál fue la medida?

E1: 7.7

Joseph Xolocotzi Villalva: 7.7. Entonces ¿cómo lo hicieron ustedes?

E3: multiplicamos 8.5 por 8.5

Joseph Xolocotzi Villalva: Muy bien, eso es el área de…

E3: Salió 72.25 y luego 3.6 por 3.6 y salió 12.46 y después de ahí lo restamos 72.25 menos 12.46, el resultado es 59.29 y su raíz cuadrada es 7.7

Joseph Xolocotzi Villalva: Muy bien ¿por qué se resta?

E1: Porque si teníamos el área de los catetos la suma tenía que dar el ese, la hipotesuma

Joseph Xolocotzi Villalva: La hipotenusa

E1: Entonces si queremos saber el área del cateto que no conocemos debemos restar el área del cateto que tenemos a la hipotesuma

Joseph Xolocotzi Villalva: La hipotenusa

E1: Nos daría el área del cateto

Joseph Xolocotzi Villalva: Muy bien, vamos a ver conclusiones, este, bueno, primero ¿en qué tipo de triángulos funciona el teorema de Pitágoras?

E1: En los triángulos rectángulos

Joseph Xolocotzi Villalva: Rectángulos, y ¿es verdadero para todos los rectángulos?

Todos: Sí

Joseph Xolocotzi Villalva: Bueno, es la primera conclusión: El teorema de Pitágoras es verdadero para todo triángulo rectángulo y sólo para los triángulos rectángulos. ¿cómo se llaman los lados que forman el ángulo recto?

E2: Catetos

Joseph Xolocotzi Villalva: Catetos, muy bien, entonces los lados que forman el ángulo recto de un triángulo rectángulo son los catetos. ¿Cómo se llama el lado que se opone?

Todos: Hipotenusa

Joseph Xolocotzi Villalva: El lado que se pone en un triángulo rectángulo a un ángulo recto es la hipotenusa. Muy bien ¿qué es lo que dice el teorema de Pitágoras? ¿Cuál es esta propiedad la que estuvimos estudiando durante este día? ¿Qué es lo que dice? ¿qué es lo que compara?

E1: Las áreas

Joseph Xolocotzi Villalva: Las áreas, y bueno lo hicimos cuando hicimos estas ¿sale? ¿Qué es lo que significa esto?

E1: El área del triángulo

Joseph Xolocotzi Villalva: el área de…

E1: del cuadrado

Joseph Xolocotzi Villalva: del cuadrado del…

E2: De la hipotenusa

Joseph Xolocotzi Villalva: Muy bien, el área del cuadrado de la hipotenusa es igual a

Todos: B al cuadrado más A al cuadrado

Joseph Xolocotzi Villalva: ¿pero ¿qué significa esto?

E1: es un cateto

Joseph Xolocotzi Villalva: Es un cateto ¿verdad? Y este es el cuadrado, entonces es el cuadrado de un cateto

Todos: Más el cuadrado del otro cateto

Joseph Xolocotzi Villalva: Más el cuadrado del otro cateto ¿si queda claro? Entonces eso es lo que es el Teorema de Pitágoras. En todo triángulo rectángulo la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa. Vamos a hacer un último acertijo ¿Cuál es el error en esta imagen?

E3: Que está más chiquita una torre.

Joseph Xolocotzi Villalva: Bueno, sé que el dibujito no podría ser muy exacto, pero es un problema de las medidas. Tenemos una torre, bueno, esto es un problema de la edad media y plantea que hay 2 Torres separadas por 10 m ¿sale? Una torre mide 10 m y la otra torre mide 15 m. Una es más alta que la otra, en su cúspide están Unidos por una cuerda que mide 12 m, ¿Cuál es el error en esa imagen? porque así viene era una…

E1: Es el cruce de su banderita porque está abajo, mide 10 metros abajo, entonces se pasaron por dos centímetros arriba.

E4: Pero, aun así, de un lado mide 15 y del otro mide 10 y sólo tiene 12 metros…

Joseph Xolocotzi Villalva: Así es, mediría 10 si fueran de la misma altura, pero para que una sea más alta, debe ser más larga. Entonces ¿Cuál es el error en esta imagen? Ya es el último

E3: Es el más difícil

Joseph Xolocotzi Villalva: Es el más difícil, justo, justo. ¿Cuál es el error en esta imagen?

E1: Que no hay hipotesuma

Joseph Xolocotzi Villalva: Hipotenusa, ¿aquí cuál sería la hipotenusa? ¿aquí hay un triángulo rectángulo? Si hay ¿Dónde estaría?

Todos: Si hay

Joseph Xolocotzi Villalva: ¿Si hay? ¿Dónde estaría?

E2: En medio de…

Joseph Xolocotzi Villalva: Podrían señalarlo tal vez ¿Ustedes ya no encontraron? ¿no?

E1: ¿Hay dos ángulos rectos? ¿no?

Joseph Xolocotzi Villalva: Muy bien, hay un ángulo recto

E1: Ese es el error que hay dos ángulos rectos…

Joseph Xolocotzi Villalva: Bueno, pero sí podría haber. ¿Hay un triángulo rectángulo?

E1: SI

E3: No

E2: Hay isósceles

E1: Si, hay uno

Joseph Xolocotzi Villalva: ¿si hay o no hay? Muy bien, aquí hay un ángulo recto ¿todavía no encuentran el error?

Todos: No

Joseph Xolocotzi Villalva: A ver si esta imagen les ayuda.

Todos: Ahh

Joseph Xolocotzi Villalva: ¿Ya vieron? Porque para que la altura sea correcta debe haber un ángulo recto ¿Pueden encontrar el error ahora? ¿Todavía no? ¿cuánto mediría por ejemplo… ¿si es un triángulo rectángulo primero que nada?

E1: Si

Joseph Xolocotzi Villalva: ¿Cuánto mediría? ¿cuáles son los catetos?

E3: el de abajo y el de altura

Joseph Xolocotzi Villalva: ¿y la hipotenusa?

E3: el de 12

Joseph Xolocotzi Villalva: El de 12 ¿no? La cuerda. Sale ¿Ahora ya pueden ver el error? ¿todavía no? ¿cuánto mediría un cateto este o este?

E3: ¿Tres?

Joseph Xolocotzi Villalva: ¿Por qué tres?

E1: Porque para sacar la medida del cateto… olvídelo

Joseph Xolocotzi Villalva: ¿Cuál es la diferencia entre esta altura y esta? ¿Cuál es la diferencia entre esta torre y está en lo alto?

E3: porque una es más grande que la otra

Joseph Xolocotzi Villalva: ¿por cuánto?

Todos: Por 5 m

Joseph Xolocotzi Villalva: muy bien ¿cuánto mediría esta distancia?

E3: ¿5 m'

Joseph Xolocotzi Villalva: 5 metros ¿Cuánto mediría la distancia de aquí de esta cúspide a esta?

E3: 10

Joseph Xolocotzi Villalva: ¿Por qué 10?

E4: porque es la distancia de abajo

Joseph Xolocotzi Villalva: Bueno entonces este mide 10 y esta mide 5 ¿ya pueden encontrar el error?

E2: No

Joseph Xolocotzi Villalva: muy bien ¿qué es lo que nos dice el Teorema de Pitágoras?

E1: Que no es un triángulo rectángulo porque por eso no podemos sacar…un ángulo recto

Joseph Xolocotzi Villalva: Muy bien, aquí hay un ángulo recto ¿está muy difícil? Bueno, en el teorema de Pitágoras, bueno voy a volverlo a hacer, digamos, esta así ¿no? El Teorema de Pitágoras nos dice así, este cuadrado más este cuadrado nos debe dar este cuadrado, o sea, la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.

E1: Ah, si no hay catetos

Joseph Xolocotzi Villalva: No hay catetos ¿no? ¿todavía no?

E1: No

Joseph Xolocotzi Villalva: Les voy a dar un rato más ¿cuál es el error aquí?

E4: Acá si multiplicamos 12 por 12 serían 144 y 10 por 10 serían 100 y 5 por 5 25 y se supone que los lados de 10 por 10 y 5 por 5 se suman y dan el resultado de arriba, o sea 12 por 12, 144, pero son 125 sumando los dos lados, nos sobran 19.

Joseph Xolocotzi Villalva: Muy bien, exacto. Esta figura no puede existir porque este cuadrado tiene 25 y este 100, para que existiera el cuadrado que está aquí ¿cuánto debería medir?

E4: 144

Joseph Xolocotzi Villalva: Es lo que mide ¿pero ¿cuánto debería medir?

E4: 125

Joseph Xolocotzi Villalva: 125 ¿verdad? Entonces como no son iguales, esto quiere decir que esta figura en realidad no se puede formar ¿si queda claro?

Todos: Si

Joseph Xolocotzi Villalva: Entonces ése era el error. Muy bien, eso sería todo, muchas gracias, fue bastante pesado.