BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

APRENDIZAJE DE NÚMEROS RACIONALES A TRAVÉS DEL DESARROLLO DE LA INTELIGENCIA ESPACIAL A PARTIR DE REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS

TESIS
PARA OBTENER EL TÍTULO DE
MAESTRA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

PRESENTA
ING. DAFNE AGUILAR TERRONES

DIRECTOR DE TESIS
DR. JOSÉ GABRIEL SÁNCHEZ RUIZ

CO-DIRECTOR DE TESIS
DRA. GLADYS DENISSE SALGADO SUÁREZ

Puebla, Pue.,24Junio2022

BUAP

DR. SEVERINO MUÑOZ AGUIRRE
SECRETARIO DE INVESTIGACIÓN Y
ESTUDIOS DE POSGRADO, FCFM-BUAP
P R E S E N T E:

Por este medio le informo que la C:

LIC. DAFNE AGUILAR TERRONES

Estudiante de la Maestría en Educación Matemática, ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 07 de diciembre de 2021, con la tesis titulada:

"APRENDIZAJE DE NÚMEROS RACIONALES A TRAVÉS DEL DESARROLLO DE LA INTELIGENCIA ESPACIAL A PARTIR DE REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS"

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

A T E N T A M E N T E.
H. Puebla de Z. a 03 de marzo de 2022

DRA. LIDIA AURORA HERNÁNDEZ REBOLLAR
COORDINADORA DE LA MAESTRÍA
EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA.

DRA' LAHR/l'agm'

Facultad
de Ciencias
Físico Matemáticas

Av. San Claudio y 18 Sur, edif. FM1
Ciudad Universitaria, Col. San
Manuel, Puebla, Pue. C.P. 72570
01 (222) 229 55 00 Ext. 7550 y 7552

Agradecimientos

Yo, Dafne Aguilar Terrones con CVU 775079, agradezco a CONACYT por el apoyo brindado en concepto de beca de maestría en el periodo enero 2020 – diciembre 2021.

Agradecimientos

- Agradezco primera e infinitamente a Dios porque él estuvo junto a mí en cada paso de esta gran etapa.
- Agradezco a mis padres y hermanos por sus enseñanzas. Siendo más puntual, agradezco a mi padre Rafael por mostrarme que con incesante lucha, esfuerzo y trabajo el éxito siempre llega. Agradezco a mi madre por ser la serenidad, calma y coherencia emitida en las peores adversidades siempre refugiada en la palabra de Dios. Agradezco a todos y a cada uno de mis hermanos por haber sido grandes pilares para la construcción de este proyecto mediante las distintas perspectivas de crecimiento y experiencias que cada uno posee.
- Agradezco a mi compañero, amigo, confidente y amante, Rafael Lara por siempre apoyarme, sosteniéndome en los momentos tambaleantes, brindándome fuerza para seguir adelante, siempre reconociendo cada esfuerzo y objetivo logrado con alegría y amor incondicional, así como también, agradezco a su amada familia por el eterno apoyo brindado.

"La ciencia llega hasta donde Dios quiere"

Índice

Índice de Tablas

Índice de Figuras

Resumen

A partir de la importancia de los números racionales a lo largo de la historia y también en la actualidad, se decidió desarrollar una investigación en la cual se remarca la envergadura de este concepto dentro del aula. Lograr la convergencia entre La Teoría de los Registros de Representación Semiótica de Raymond Duval y La Teoría de las Inteligencias Múltiples de Howard Gardner fue el objetivo de este proyecto fundamentado en la Ingeniería Didáctica.

Numerosas investigaciones han sido desarrolladas acerca de los Números Racionales en primero de Bachillerato, sin embargo, para este nivel escolar no hacen énfasis en promover la evocación y transformación de imágenes mentales y tampoco en presentar distintas representaciones del concepto como es el caso específico de la representación gráfica, la cual es muy común ser vista en el nivel básico escolar, pero no en el nivel medio superior. La planeación y diseño de la secuencia didáctica creada para la enseñanza del concepto de número racional se dividió en cinco etapas, las cuales, la primera y la última fungieron como *pretest* y *postest* respectivamente con el fin de evaluar los conocimientos previos versus conocimientos adquiridos con los que contaba el estudiante antes de realizar la secuencia didáctica. Las tres etapas restantes evaluaron los aprendizajes esperados presentes en el currículo escolar, así como, las dificultades más comunes encontradas en literatura. Todos los ítems propuestos promovieron la transformación entre los distintos registros de representación semiótica del concepto mediante tratamientos y/o conversiones que generan dieciséis posibles combinaciones entre los cuatro lenguajes. Se observó que el éxito en la evocación de imágenes mentales depende de la representación. Sin embargo, es de suma importancia trabajar con los distintos registros de representación semiótica dentro del aula para que los estudiantes puedan alcanzar la mayor comprensión del concepto, sin descartar el fortalecimiento del álgebra en las bases matemáticas, porque de lo contrario, al presentarse un conflicto semiótico no se logrará el aprendizaje. En la distinta bibliografía investigada fue posible advertir la carencia del registro gráfico en el concepto de número racional en el nivel medio superior por lo que las actividades planteadas sugieren una buena opción de aplicabilidad para continuar con la adquisición del concepto, ya que como se muestra en el análisis de esta investigación, a partir del registro gráfico se obtuvieron buenos resultados,

lo que sugiere que en esta etapa académica deben implementarse más estrategias didácticas como las propuestas.

Abstract

Based on the importance of rational numbers throughout history and today, it was decided to develop an investigation in which the scope of this concept within the classroom is highlighted. Achieving convergence between Raymond Duval's Semiotic Representation Theory of Records and Howard Gardner's Theory of Multiple Intelligences was the objective of this project based on Didactic Engineering. Numerous investigations have been developed using Rational Numbers in the first year of Baccalaureate, however, for this school level they do not emphasize promoting the evocation and transformation of mental images and neither in presenting different representations of the concept as is the specific case of graphic representation, which is very common to be seen in the basic school level, but not in the upper middle level. The planning and design of the didactic sequence created through the concept of rational number was divided into five stages, which, the first and the last, served as pretest and posttest respectively to evaluate the previous knowledge versus the acquired knowledge with which it had the student before carrying out the didactic sequence. The remaining three stages evaluated the expected learning present in the school curriculum, as well as the most common difficulties found in literature. All the proposed items promoted the transformation between the different records of semiotic representation of the concept through treatments and / or conversions that generate sixteen possible combinations between the four languages. It was observed that the success in the evocation of mental images depends on the representation. However, it is extremely important to work with the different records of semiotic representation within the classroom so that students can achieve a greater understanding of the concept, without ruling out the strengthening of algebra in the mathematical bases, because otherwise, when a conflict arises semiotic learning will not be achieved. In the different bibliography investigated we were able to notice the lack of the graphic record in the concept of rational number in the upper middle level, so the proposed activities suggest a good option of applicability to continue with the acquisition of the concept, since as shown. In the analysis of this research, good results were obtained from the

graphic record, which suggests that in this academic stage more didactic strategies such as those proposed should be implemented.

Introducción

El presente trabajo surge a raíz de la situación cotidiana que se vive dentro del aula a nivel bachillerato, al observar en una evaluación diagnóstica que los estudiantes presentaron conflictos cognitivos con respecto al concepto de número racional, el cual, es un tema con el que están familiarizados desde el nivel básico (primaria y secundaria) y vuelve a aparecer en el currículo escolar en el nivel medio superior. Este es el primer tema de primero de bachillerato con el que se enfrentan los estudiantes cuando ingresan a este nivel.

En el primer capítulo de esta tesis, se muestra de acuerdo con la literatura, cómo los números racionales, siguen siendo un tema de alta complejidad y sus niveles de logro apenas si llegan a la comprensión de los conceptos más básicos y elementales (Obando, 2003). El segundo capítulo muestra el planteamiento del problema, así como los objetivos perseguidos tomando en cuenta que, dentro del aula de clase, los docentes nos enfrentamos con diversidad de procesos de aprendizaje por parte de los discentes.

En el tercer capítulo se muestra el marco teórico que se utilizó para desarrollar este proyecto, el cual consistió en la Teoría de las Inteligencias Múltiples de Howard Gardner, quien mencionó que esta teoría fue desarrollada como un enfoque de la cognición humana, es decir, con la aclaración de que la inteligencia no es medible de igual forma para todos porque la forma de aprender entre los individuos es distinta. Gardner (2011), reportó que la inteligencia espacial es la capacidad para formarse un modelo mental de un mundo espacial y poder maniobrar y operar usando este modelo. Por otro lado, Raymond Duval mencionó en su Teoría de Registros de Representación Semiótica que no habrá aprendizaje sin el recurso de varios sistemas semióticos de representación lo que implica la coordinación entre los mismos por parte de los alumnos (Duval, 2017).

Por tal motivo, en el cuarto capítulo se desglosa la planeación y diseño de la secuencia didáctica que buscó permitir al alumno hacer transiciones entre representaciones semióticas potencializando su inteligencia espacial para poder ser utilizada tanto en las asignaturas de su vida escolar, así como en su vida cotidiana. En el capítulo cinco se muestra el análisis de resultados de nuestros sujetos de estudio .

Finalmente se muestran las conclusiones del proyecto.

Capítulo 1

ANTECEDENTES

En este capítulo se presenta la revisión de literatura y los antecedentes históricos, además de las razones principales que motivaron el tema de nuestro trabajo. Se aborda desde la importancia de los números racionales hasta las dificultades presentes en estudiantes de bachillerato, así como el compendio de las diferentes dificultades que presentan los alumnos en esta área de estudio.

1.1 IMPORTANCIA DE LOS NÚMEROS RACIONALES

Dentro de las matemáticas, los números racionales constituyen un campo numérico de gran importancia, tanto desde el punto de vista matemático, como por su utilidad en el procesamiento e interpretación de situaciones de la vida cotidiana (Obando, 2003).

Por ejemplo, los medios de comunicación nos entregan diariamente grandes volúmenes de información que es cuantificada en términos de porcentajes, probabilidades, razones, fracciones, etc. y una buena comprensión de estos números es fundamental para analizarla e interpretarla. Un ejemplo claro, en estos tiempos de pandemia es la distribución de la información matemática a través de canales virtuales para comunicar a la población las características y procesos de la enfermedad. Tal es el caso del reconocido matemático y profesor de lenguajes y sistemas informáticos, Eduardo Sáenz, quien explicó en su página virtual (Derivando), que desde el inicio de la pandemia por COVID-19 el Comité Español de Matemáticas (CEMat) lanzó una iniciativa llamada Acción Matemática contra el Coronavirus, la cual consiste en aplicar matemáticas para la eliminación y/o mitigación de esta enfermedad (Sáenz, 2020). En esta iniciativa, a partir del lenguaje algebraico, se traducen los conocimientos matemáticos de las distintas situaciones que se presentan en esta pandemia. Los números racionales son fundamentales para el análisis e interpretación de este virus. Por ejemplo: la tasa de letalidad, es un indicador de virulencia que se mide en un periodo y área determinados; se define como el porcentaje de personas que mueren a causa de la enfermedad, con respecto a las personas que tienen la enfermedad (Milenio, 2020). La letalidad informa sobre el riesgo de morir por covid-19 en las distintas entidades federativas o en la República Mexicana como se observa en la Figura 1.

$$\text{Tasa de letalidad} = \frac{\text{defunciones}\,*}{\text{casos confirmados}\,*} \times 100$$

Donde: * = datos acumulados

$$TL = \frac{1351}{14677} \times 100 = 9.2\ \%$$

Fecha: 26 de abril 2020

$$TL = \frac{8134}{74560} \text{ X } 100 = 10.9\ \%$$

Fecha: 26 de mayo 2020

Figura 1. Cálculos realizados sobre la tasa de letalidad en el país
con un mes de diferencia. Fuente propia.

En la Figura 2, se muestra una gráfica sobre la tasa de letalidad en el país a partir de los datos acumulados en un periodo del 26 de abril al 26 de mayo del 2020 (DGE, 2020).

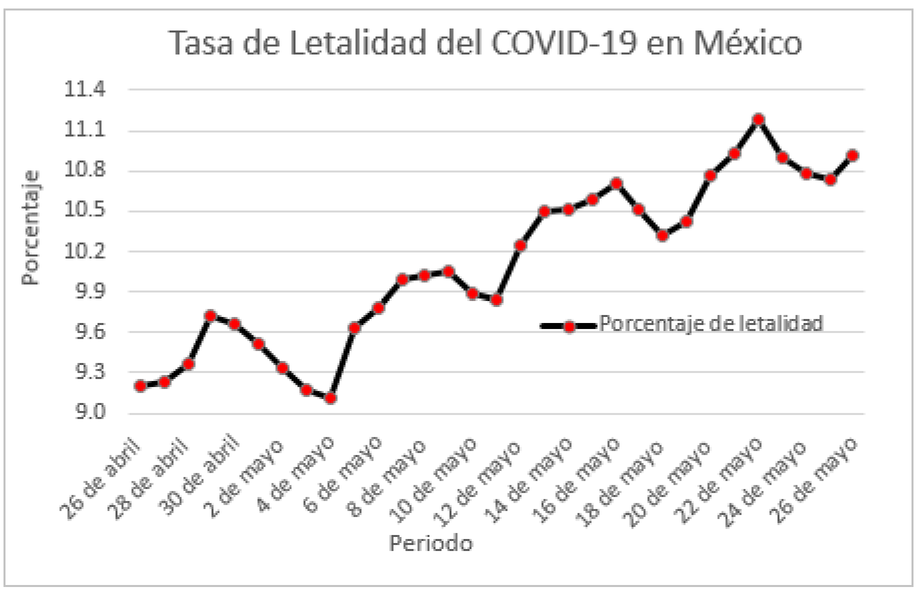


Figura 2. Cálculo de la letalidad en México.
Fuente propia.

Además, los números racionales también forman parte importante en los procesos escolares porque constituyen una base fundamental, no sólo para el estudio de la matemática, sino también para la formación de otras disciplinas como la física, la química, la biología, etc.

En química, los números racionales se pueden emplear en la caracterización de alguna sustancia a través de la densidad, como en el siguiente ejemplo: calcule la densidad de una muestra de cobre de 374.5g si tiene un volumen de 41.8cm^3. La Figura 3 explica el ejemplo (Brown et al., 2009).

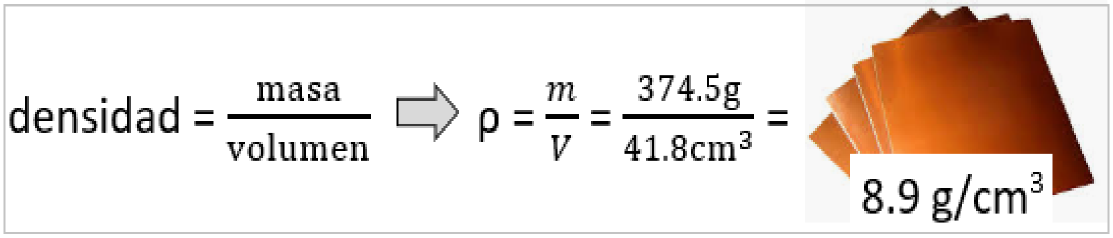


Figura 3. Cálculo para determinar la densidad del cobre.

Fuente propia.

Un número racional es un número real x que puede expresarse en la forma $x = m/n$, donde m y n son enteros y $n \neq 0$. El conjunto de los racionales se denota por Q. Cualquier conjunto o "sistema numérico" con operaciones + y · que obedezcan las propiedades descritas en la Tabla 1 se les denomina *campo* o *cuerpo*. A partir de esto, los números racionales son un campo que además satisfacen los siguientes axiomas (de campo: Tabla 1) mediante el operador suma y el operador multiplicación (Marsden, 1993).

Tabla 1

Propiedades de los números racionales.

Propiedades de números racionales	**Suma Simbólicamente (b, d f ≠ 0)**	**Multiplicación Simbólicamente (b, d f ≠ 0)**
Clausura	$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$	$\frac{a}{b}*\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$
Conmutativa	$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}$	$\frac{a}{b}*\frac{c}{d}=\frac{c}{d}*\frac{a}{b}$
Asociativa	$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}=\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\frac{e}{f}=\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)$	$\frac{a}{b}*\frac{c}{d}*\frac{e}{f}=\left(\frac{a}{b}*\frac{c}{d}\right)*\frac{e}{f}=\frac{a}{b}*(\frac{c}{d}*\frac{e}{f})$

Elemento neutro	$\frac{a}{b} + 0 = \frac{a}{b}$	$\frac{a}{b} * 1 = \frac{a}{b}$
Inverso aditivo	$\frac{a}{b} + \left(-\frac{a}{b}\right) = 0$	------------
Inverso multiplicativo	-------------	$\frac{a}{b} * \frac{b}{a} = \frac{ab}{ba} = 1$
Distributiva	-------------	$\frac{a}{b} * \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \frac{ac}{bd} + \frac{ae}{bf}$

De acuerdo con Obando (2003), a pesar de su marcada importancia y de los grandes esfuerzos en tiempo y dedicación que actualmente se consagran en el currículo de matemáticas para desarrollar los procesos de aprendizaje necesarios en los alumnos, los números racionales siguen siendo un tema de alta complejidad y, por supuesto, sus niveles de logro apenas si llegan a la comprensión de los conceptos más básicos y elementales.

Existe una vasta cantidad de ejemplos que muestran las dificultades, por ejemplo: la fracción se piensa como dos números naturales separados por una “rayita” (vínculo) y no como una relación cuantitativa entre la parte y el todo; o el error común de los alumnos al sumar varias fracciones sumando numeradores y denominadores respectivamente; otro ejemplo se genera en los procesos visuales cuando los estudiantes no aceptan la congruencia geométrica en las partes para garantizar su igualdad, por ejemplo, “cada una de las cuatro regiones triangulares tienen la cuarta parte de la cantidad de superficie de un rectángulo” como se observa en la Figura 4.

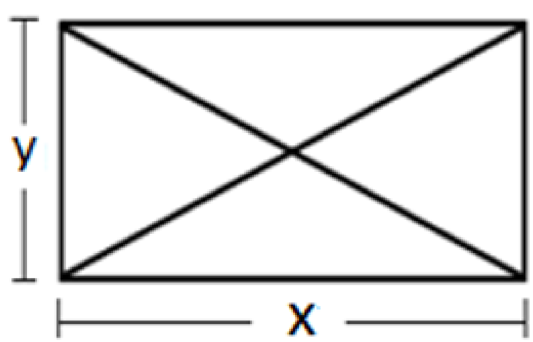


Figura 4. Representación visual de la unidad dividida en cuatro partes.

Fuente propia.

Lo cual, se puede comprobar a través del siguiente ejemplo, en el cual el largo es x, y el ancho es y en el rectángulo. En la Figura 5, el triángulo inferior rojo posee una altura de $(1/2)y$ con una base igual a x. Si sustituimos estos valores en la fórmula para calcular el área del triángulo el resultado será igual a $A= (1/4) x*y$. Por otro lado, el triángulo superior gris tiene una altura de $(1/2)y$ con base igual a x. Sustituyendo los valores en la fórmula del área del triángulo, se tiene que a $A=(1/4) x*y$. Para calcular el área del triángulo color amarillo se toma en cuenta que la base es igual a y, la altura equivale a $(1/2)x$. Sustituyendo estos valores en la misma fórmula, se tiene que $A=(1/4)x*y$.

Finalmente, se calcula el área del triángulo izquierdo verde, tomando en cuenta que la altura es igual a $(1/2)x$ y la base es igual a y. El resultado es igual a $A=(1/4)x*y$. Con esto se observa, que el área de cada uno de los cuatro triángulos es igual y que además la suma de estas cuatro superficies da como resultado el área total del rectángulo donde están contenidos los triángulos.

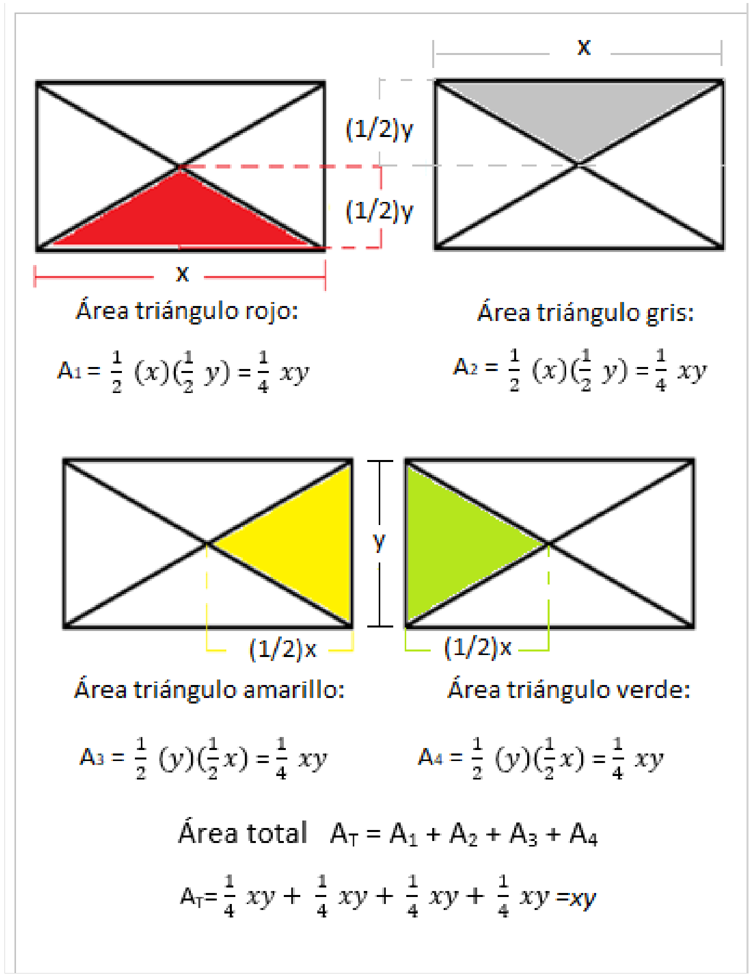


Figura 5. Comprobación de áreas iguales en los cuatro triángulos.

Fuente propia.

El proceso de conceptualizar las fracciones impropias también es difícil en la comprensión para los alumnos (Figura 6): "Si el denominador indica el número de partes en las que se divide la unidad, y el numerador la cantidad de partes que se toman, entonces, ¿cómo poder tomar una cantidad de partes que sea mayor de las que se obtuvieron al dividir la unidad?" (Obando, 2003).

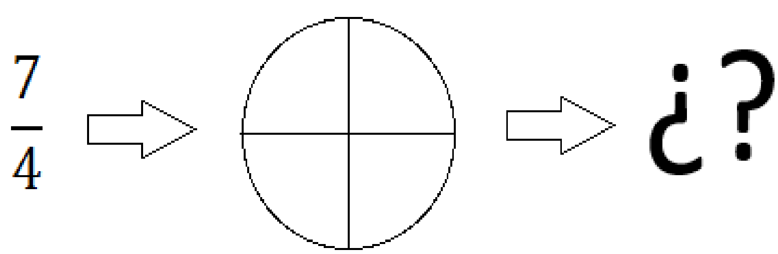


Figura 6. Representación de la dificultad conceptualizada en fracciones impropias.

Fuente propia.

De acuerdo con John (1995), las dificultades generalizadas que muchos estudiantes experimentan con las fracciones pueden atribuirse a la diferencia de las propiedades entre los números racionales y números naturales.

Martínez y López (2001) estudiaron las dificultades que se les presentaron a los alumnos del Nivel Medio Superior (NMS), cuando realizaron procedimientos con fracciones y mostraron que se relacionan con (Cabañas et al., 2004):

- ❖ La traducción del lenguaje matemático al común, debido a que no comunican el significado preciso de los símbolos involucrados en las situaciones planteadas.
- ❖ El algoritmo de la multiplicación en la que se involucran los paréntesis para indicarla, ya que no logran asociarlo a ella.
- ❖ La propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma, que no la aplican.
- ❖ El algoritmo de la suma de fracciones, que, al aplicarlo, utilizan el modelo lineal aditivo, el cual ha quedado muy arraigado en el trabajo con los números naturales.

Estas dificultades están asociadas con la comprensión del concepto de número racional en el uso de fórmulas, simbología, demostración de teoremas y comprensión de conceptos matemáticos; por ejemplo: transformar números decimales finitos y periódicos a fracciones, identificar entre un grupo de números reales (fracciones comunes y mixtas, fraccionarios decimales finitos y periódicos, decimales infinitos y números enteros), cuáles son racionales; establecer relación de orden entre números fraccionarios y representarlos en el segmento de recta numérica (Figura 7), aplicar las propiedades de la suma y de la multiplicación, así como la ley de los signos y de la potenciación en la solución de operaciones aritméticas; solucionar problemas y operaciones aritméticas, identificar en algunos modelos (gráficos, pictográfico, geométrico) las partes de un todo (Cabañas et. al., 2004).

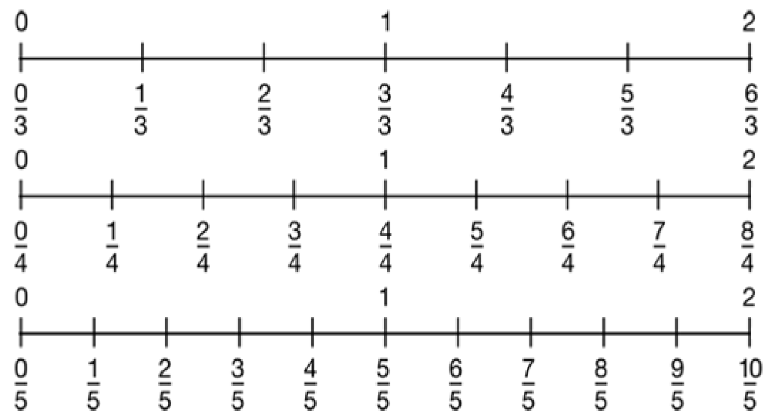


Figura 7. Ordenamiento de fracciones en un segmento de recta numérica.
Fuente: *Math Trailblazers*, 2020.

Una de las principales causas de las dificultades que tienen los estudiantes con las operaciones de números racionales se debe al uso inapropiado de su conocimiento sobre los números naturales, es decir, los resultados muestran porcentajes de éxito menores en tareas donde el conocimiento de los números naturales no es compatible para resolverlas (González-Forte et al., 2019). Numerosos estudios han encontrado que los estudiantes muestran un sesgo al razonar sobre el tamaño de las fracciones y los decimales cuando sus magnitudes no son congruentes con sus características numéricas naturales, por ejemplo, mientras el seis es menor que el siete; un sexto es mayor que un séptimo, además tienen problemas entendiendo que hay un número infinito de números entre dos fracciones o decimales (McMullen et al., 2018).

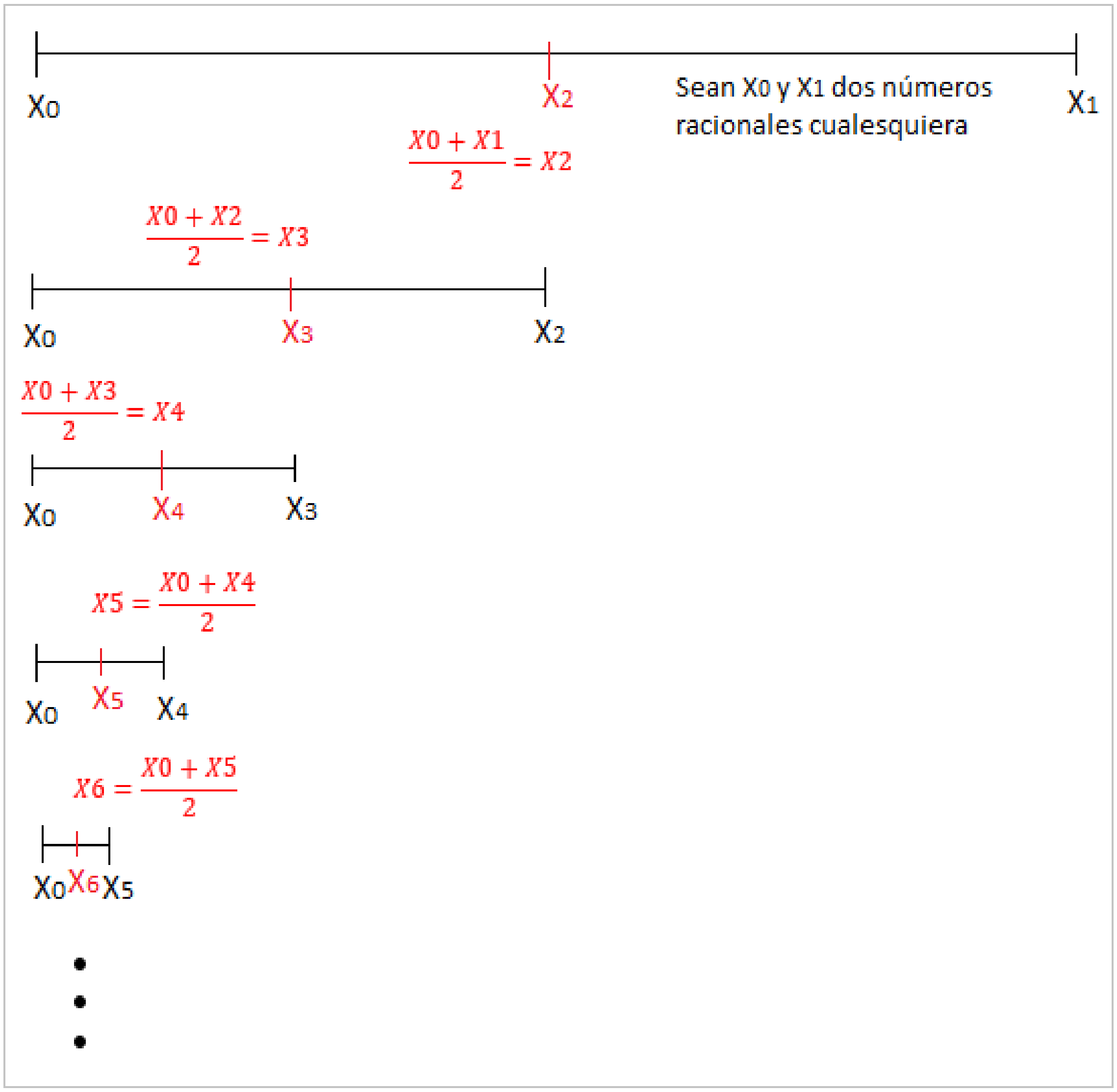


Figura 8. Representación gráfica de un segmento de recta numérica con infinitos números entre dos números racionales. Fuente propia.

En la Figura 8, sean X_0 y X_1, dos números racionales cualesquiera de la recta numérica. Todo segmento tiene infinidad de valores, y lo que se calcule en el subintervalo izquierdo del punto medio inicial, también se puede calcular en el subintervalo derecho, es decir, siempre se puede encontrar un número racional entre dos racionales distintos, por ejemplo, el que corresponde al punto medio. Continuando con el mismo procedimiento, se podrán encontrar infinidad de números racionales, donde X_0 y X_1 pueden ser números muy cercanos o lejanos.

El sesgo numérico natural, es la tendencia a aplicar de manera inapropiada las propiedades de los números naturales a las tareas de números racionales (Van Dooren et al., 2015).

Por otro lado, cuando aprenden aritmética por primera vez con números naturales, muchos alumnos deducen implícitamente que la multiplicación y la suma siempre darán como resultado un mayor valor, mientras que en la división y resta siempre darán lugar a un menor valor (Geary et al., 2017), propiedad que creen que ocurre también con los números racionales. Las dificultades anteriormente mencionadas se resumen en la Tabla 2.

Tabla 2

Clasificación de dificultades estudiantiles con respecto a números racionales.

Tipo de dificultad	Dificultad específica	Autor y Año
Conceptos erróneos	1. La fracción se piensa como dos números naturales separados por una "rayita". 2. Conceptualizar fracciones impropias: ¿por qué el numerador es mayor que el denominador?. 3. Identificar entre un grupo de números reales, cuáles son racionales. 4. Establecer relación de orden entre números fraccionarios y representarlos en la recta numérica. 5. Entender que hay un número infinito de números entre dos fracciones o decimales.	1,2: Obando (2003) 3,4: Cabañas (2004) 5: McMullen et al (2018)
Carente dominio de propiedades	1. En la suma de fracciones, sumar numeradores y denominadores entre sí, es decir, uso del modelo lineal aditivo como algoritmo. 2. Aplicar mal las propiedades de la suma y la multiplicación, así como la ley de los signos y potenciación, en problemas y operaciones aritméticas. 3. Diferencia de los números racionales con respecto a números naturales.	1: Obando (2003); Cabañas (2004). 2: Cabañas (2004) 3: Smith (1995); Van Dooren et al (2015); González-Forte et al (2019); Geary et al (2017)
Dificultad por sus múltiples representaciones	1. No aceptan la congruencia geométrica en las partes para garantizar su igualdad, es decir, dificultad en identificar en modelos las partes de un todo (gráficos, pictográfico, geométrico). 2. Transformar números decimales a fracciones.	1: Obando (2003); Cabañas (2004) 2: Cabañas (2004)
Lenguaje matemático	1. No identifican el uso del paréntesis como algoritmo de la multiplicación. 2. Dificultad en la traducción del lenguaje matemático al común.	1,2: Cabañas (2004)

Con la tabla anteriormente expuesta, se observan las dificultades presentes en los estudiantes con respecto a los números racionales, en donde, estas dificultades se traducen en errores.

El creciente resultado sobre el bajo desempeño escolar generado por factores cognitivos, afectivos y psicológicos han incrementado la urgente necesidad de investigación a escala mundial para resolver las dificultades en el aprendizaje de los números racionales. Para aprovechar todas las potencialidades de los alumnos, así como sus procesos mentales, tales como, la abstracción, síntesis, análisis, cálculo, lógica, visión espacial y memoria, el planteamiento de las clases de matemáticas en la enseñanza, debe hacerse desde la teoría de las inteligencias múltiples (Manuel, 2014).

En los años ochenta, el psicólogo estadounidense Howard Gardner propuso una teoría que supone una gran crítica a la visión tradicional de inteligencia, la cual repercutió en la mejora del sistema educativo. La teoría de las inteligencias múltiples es una propuesta del campo de la psicología cognitiva que rechaza el concepto tradicional de inteligencia y los métodos para medirla (Montoya, 2014). Esta concepción sostiene que los seres humanos han evolucionado para mostrar distintas inteligencias y no para recurrir de diversas maneras a una sola inteligencia flexible (Fernández, 2017). No sólo se trata de transmitir conocimientos académicos, los docentes deben desarrollar la capacidad de aprendizaje del grupo, identificando los procesos metacognitivos del estudiante inmersos en los distintos tipos de inteligencia.

Por otra parte, Díaz-Godino et al (2015), mencionó que el aprendizaje de las matemáticas se ve favorecido con el uso de materiales manipulativos, diversas representaciones, visualizaciones, diagramas. Los números racionales pueden ser enseñados a partir de diferentes representaciones semióticas, sin embargo, las representaciones visuales se caracterizan por ser imágenes portadoras de conocimiento expresadas sin palabras. En el desenvolvimiento en su entorno cotidiano, lo primero que observan los estudiantes son imágenes, por lo tanto, si así se desarrollan diariamente entonces, ¿por qué no impulsar su aprendizaje por medio de imágenes? Y así, ¿por qué no impulsar su aprendizaje mediante la observación y/o evocación de imágenes?

Capítulo 2

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En este capítulo se presenta el planteamiento del problema y los objetivos que se persiguen, Además, mediante la justificación se presentan las razones principales que motivaron el tema de nuestro trabajo.

Frecuentemente en los cursos de matemáticas el tema de la orientación y visualización de espacios y objetos tridimensionales es poco tratado o planteado como actividad recreativa (Gonzato et al., 2011).

Se ha reportado que el éxito en la resolución de problemas en matemáticas está influenciado por factores internos como la inteligencia espacial, donde los alumnos con baja capacidad espacial tienen dificultad en aspectos metacognitivos como conocimiento de estrategia, tareas cognitivas y autoconocimiento (Rimbatmojo et al., 2017). Ciertas investigaciones han demostrado que se deben incorporar materiales concretos (tangibles) a los salones de clases, o se deben introducir clases de dibujo técnico, realizar adaptaciones o reestructuraciones curriculares para que de esta manera se desarrollen las habilidades espaciales de los estudiantes (Andrade-Molina y Cantoral-Uriza, 2013). Muchos investigadores parecen concordar con el hecho que debe existir una buena imaginación y que, es más, a veces resulta indispensable para la resolución (D´Amore, 2006).

Por otra parte, de acuerdo con la teoría de las inteligencias múltiples se menciona que existen diferentes inteligencias que marcan las potencialidades y habilidades de cada persona y por ello la inteligencia no es medible de igual forma para todos los individuos. Estudiantes que poseen mayor capacidad espacial dentro de las aulas generan también un mayor factor de éxito en la resolución de problemas (Rimbatmojo et al., 2017). Como se ha referido en este trabajo, diferentes investigaciones han propuesto alternativas de mejora para la comprensión de números racionales a partir de diferentes tipos de representaciones semióticas sin hacer énfasis en la evocación de imágenes mentales y en algunos casos sin mencionarlas.

Por lo anterior, resulta interesante formular preguntas relacionadas con la posibilidad de resolver algunas de las dificultades en el aprendizaje de los números racionales, a través del uso de las inteligencias múltiples y en particular, mediante el uso de la inteligencia espacial.

A partir de esto se desprende la siguiente pregunta de investigación:

- ¿Cómo el diseño e implementación de estrategias de enseñanza basadas en distintas representaciones semióticas, con los planteamientos de la inteligencia espacial favorece el aprendizaje de los números racionales en estudiantes de primer año de bachillerato?

2.2 Objetivos

2.2.1 Objetivo general

Diseñar e implementar estrategias didácticas siguiendo el currículo escolar para la enseñanza de los números racionales fomentando la evocación y transformación de imágenes mentales haciendo uso de distintas representaciones para disminuir las dificultades presentes en los estudiantes de primero de bachillerato.

2.2.2 Objetivos específicos

- ❖ Realizar, mediante un pretest, un diagnóstico de las dificultades de aprendizaje de los números racionales.
- ❖ Diseñar y aplicar actividades didácticas para la enseñanza de los números racionales utilizando distintas representaciones.
- ❖ Realizar un postest para evaluar el tipo de dificultades de aprendizaje de los números racionales que presentan los alumnos participantes en este estudio posterior a la experiencia de enseñanza basada en distintas representaciones.
- ❖ Identificar el tipo de dificultades en el aprendizaje de los números racionales que se resolvieron mayormente a partir de la aplicación de actividades de enseñanza basadas en distintas representaciones.

2.3 Justificación

El desarrollo de la inteligencia espacial puede beneficiar a los estudiantes en el aumento de su aprendizaje de los números racionales en el área de las matemáticas, además de mejorar su desempeño en otras disciplinas escolares, porque estos números se encuentran presentes en muchas situaciones de la vida cotidiana, como la pandemia (covid-19) que se está viviendo actualmente, en donde se manejan diversas medidas matemáticas que están en juego día con día para la difusión de la información sobre el proceso de esta enfermedad.

Además, es necesario recalcar que, en la actualidad, con el cotidiano acceso a fuentes tecnológicas es fundamental desarrollar este tipo de inteligencia para que los estudiantes puedan enfrentarse con eficiencia y eficacia al mundo tan competitivo en el que vivimos.

Por lo tanto, es preciso implementar otro tipo de estrategias que cumplan con las necesidades visuoespaciales que los estudiantes requieren para alcanzar el aprendizaje deseado para usar y comprender los números racionales.

Esperamos que este trabajo beneficie, en primera instancia a estudiantes de primero de bachillerato, al menos regionalmente y, que en un futuro se logre tener una mayor difusión para que su alcance sea mayor.

Capítulo 3

MARCO TEÓRICO

Este capítulo es la columna vertebral del presente trabajo, ya que en él se describe el soporte teórico en el que nos basamos para desarrollar la secuencia didáctica, considerando cada una de las teorías previamente mencionadas en el resumen de esta investigación. El marco teórico lo conforman, tres áreas de estudio: los Números Racionales, la Teoría de las Inteligencias múltiples de Howard Gardner y la Teoría de Registros de Representaciones Semióticas (TRRS) de Raymond Duval sustentadas con Ingeniería Didáctica.

3.1 Teoría de las Inteligencias Múltiples

En los años ochenta, el psicólogo Howard Gardner propuso la existencia de ocho criterios distintos, distribuidos en siete tipos de inteligencia, con el fin de mostrar que la inteligencia no era medible de igual forma para todos porque la forma de aprender entre los individuos es distinta. Las inteligencias consistieron en lingüística, lógica-matemática, musical, corporal-cinestésica, espacial, interpersonal e intrapersonal (Figura 9).

Figura 9. Ocho inteligencias propuestas por H. Gardner. Fuente propia.

Inicialmente, su enfoque no se dirigió hacia el salón de clases, sin embargo, ha ejercido una considerable influencia en los círculos educativos (Fernández, 2017).

Casi dos décadas después, la inteligencia naturalista fue añadida a su clasificación, y además, se presentó una definición más refinada de inteligencia; la cual consistió en el potencial biopsicológico para procesar información, es decir, que todos los miembros de la especie poseen el potencial para ejercer un conjunto de facultades intelectuales de las que la especie es capaz y además tiene la característica de activarse en un marco cultural para resolver problemas o crear productos que tienen valor para una cultura (Gardner, 2011).

Este modesto cambio indica que las inteligencias no son algo que se pueda ver o contar, es decir, son potenciales. Se activan o no, en función de los valores de una cultura determinada, de las oportunidades disponibles en esa cultura y de las decisiones tomadas por cada persona y/o su familia, sus enseñantes y otras personas que operan de manera algo independiente el uno del otro (Gardner, 2011).

3.1.1 Inteligencia Espacial

De acuerdo con Fernández (2017), una manera de sentir la médula de la inteligencia espacial es tratar de resolver las tareas diseñadas por investigadores de esa inteligencia (ver Figura 10), porque para muchos, la inteligencia espacial es la “otra inteligencia” porque debiera servir como base de comparación y ser considerada de igual importancia que la “inteligencia lingüística”.

Las inteligencias múltiples han sido estudiadas por mucho tiempo y es así como cientos de investigadores han creado distintas concepciones a partir de ella.

Tal es el caso del reconocido psicólogo Thomas Armstrong que describe a la catalogada Inteligencia Espacial de Howard Gardner como la capacidad de percibir el mundo visuoespacial de manera precisa y de llevar a cabo transformaciones basadas en esas percepciones y, además, aclara que esta inteligencia implica sensibilidad al color, líneas, formas, el espacio y las relaciones entre estos elementos porque incluye la capacidad de visualizar, de representar gráficamente ideas visuales o espaciales, y de orientarse correctamente en una matriz espacial (Armstrong, 2017).

Por otro lado, Gardner engloba a la Inteligencia Espacial como una serie de capacidades que se interrelacionan de manera informal: la habilidad para reconocer instancias del mismo elemento; habilidad para transformar o reconocer una transformación de un elemento en otro; la capacidad de evocar la imaginación mental y luego transformarla; la de producir una semejanza gráfica de información espacial (Fernández, 2017).

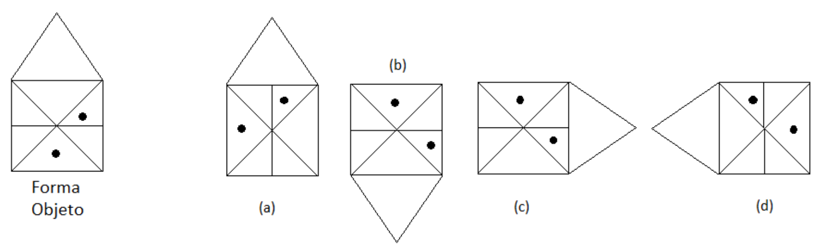


Figura 10. Tareas dadas sobre Inteligencia Espacial. Fuente: Fernández, 2017.

3.2 Semiosis y pensamiento humano

Según Duval (2004) el aprendizaje de la matemática es un campo de estudio propicio para el análisis de actividades cognitivas importantes como la conceptualización, el razonamiento, la resolución de problemas y la comprensión de textos (Oviedo et al., 2012).

La particularidad del aprendizaje de las matemáticas hace que estas actividades cognitivas requieran de la utilización de sistemas de expresión y de representación distintos a los del lenguaje natural o al de las imágenes, tal es el caso de variados sistemas de escritura para los números, notaciones simbólicas para los objetos, escrituras algebraica y lógica que toman el estatus de lenguajes paralelos al lenguaje natural para expresar las relaciones y las operaciones, así como también, figuras geométricas, representaciones en perspectiva, gráficos cartesianos, redes, diagramas, esquemas, etc. (Duval, 2017). El enfoque semiótico en el proceso enseñanza-aprendizaje de las matemáticas nació a raíz de la dificultad sobre la compresión y la necesidad de recurrir a otros tipos de representación que constituyen al lenguaje de la matemática (Cervantes et al., 2017). La Teoría de Registros de Representaciones Semióticas (TRRS) fue creada por Raymond Duval en el año 1999. Esta teoría sostiene que no puede haber comprensión en matemáticas si no se distingue un objeto de su representación. Los registros de representación semiótica constituyen los grados de libertad de los que puede disponer un sujeto para objetivarse él mismo una idea aún confusa, para explorar las informaciones o, simplemente, para comunicarlas a un interlocutor (Duval, 2017). Dichas representaciones se expresan a través de cuatro registros, tales como, lenguaje natural (oral, escrita), numérica (entera, fraccionaria, decimal), figural o gráfica (lineales, planas o espaciales) y alfanumérica (algebraicas) (Godino et al., 2016).

El interés fundamental para los investigadores en didáctica de la matemática es la adquisición del concepto matemático por parte del alumno, lo que se denomina noética; ahora bien, no hay noética sin semiótica, es la semiótica la que determina las condiciones de posibilidad y de ejercicio de la noética (Oviedo et al., 2012). En otras palabras, la semiología es cualquier forma de actividad, conducta o proceso que involucre signos, incluyendo la creación de un significado a partir de señales que se desarrolla en la mente del intérprete; y finaliza con la presencia en su mente del objeto del signo (Masip, 2020), sin embargo, la noesis consiste en un conjunto de actos cognitivos como la aprehensión conceptual o producción de una representación de un objeto (Duval, 2017). No habrá aprendizaje sin el recurso de varios sistemas semióticos de representación lo que implica la coordinación entre los mismos por parte de los alumnos. Los sistemas semióticos deben permitir cumplir las tres actividades cognitivas inherentes a toda representación (Figura 11) (Duval, 2017): En primer lugar, la formación consiste en constituir una marca que sea identificable como una representación de alguna cosa en un sistema determinado. Después, el tratamiento consiste en transformar las representaciones de acuerdo con las únicas reglas propias del sistema, de modo que se obtengan otras representaciones que puedan constituir una ganancia de conocimiento en comparación con las representaciones iniciales. Finalmente, la conversión también es una transformación de las representaciones producidas en un sistema de representaciones hacia otro sistema, de manera tal que éstas últimas permitan explicar otras significaciones relativas a aquello que es representado. La relación entre semiosis y noesis concierne únicamente a los sistemas que permiten estas tres actividades cognitivas de representación y no a todos los sistemas semióticos.

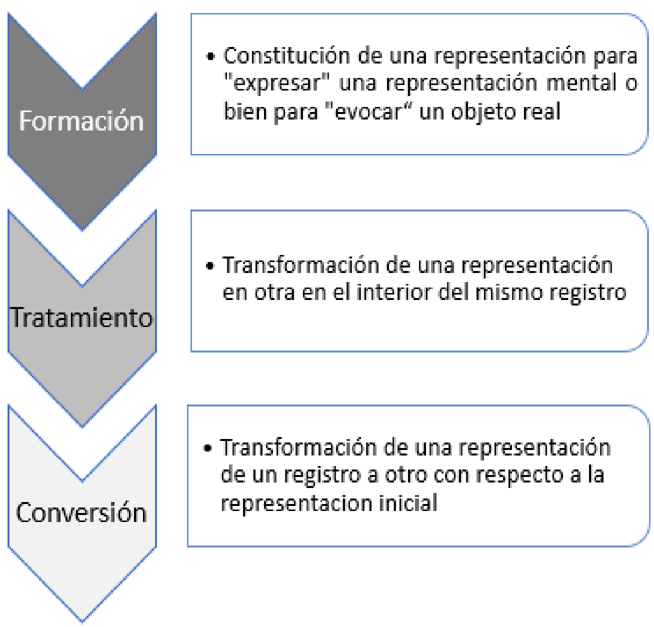


Figura 11. Actividades cognitivas de representación inherentes a la semiosis.

Fuente propia.

Es fundamental la diferenciación de los dos tipos de transformaciones, porque solo al separar las actividades de tratamiento y conversión se puede ver la persistencia de las dificultades relativas a la actividad de conversión porque puede presentar congruencia o no congruencia.

El pasaje de una representación a otra mediante la conversión se hace de manera espontánea cuando ambas representaciones son congruentes, es decir, cuando se cumplen los siguientes tres criterios y, al no cumplirse alguno, no se genera congruencia:

- Correspondencia semántica entre las unidades significantes que se asocian de un registro a otro.
- Univocidad semántica, la cual consiste en que a cada unidad significante del registro de salida le corresponde una única unidad significante en el registro de llegada.
- Conservar el orden, se refiere a una correspondencia entre registros, al organizar las unidades significantes.

El aporte de este análisis para los profesores es la capacidad de identificar en la clase, las causas de las dificultades recurrentes de los estudiantes y ver cuál actividad proponer, no para hacer comprender localmente sino para hacer a cada estudiante intelectualmente autónomo (Duval, 2017).

3.3 Ingeniería Didáctica

En la educación matemática, existe una tradición de investigación que otorga un papel central al diseño de las sesiones de enseñanza y su experimentación en las aulas. La ingeniería didáctica, que surgió a principios de la década de 1980 y se desarrolló continuamente desde entonces, es una forma importante adoptada por esta tradición. En la comunidad educativa, denota principalmente una metodología de investigación basada en el diseño controlado y la experimentación de secuencias de enseñanza y la adopción de un modo interno de validación basado en la comparación entre los análisis a priori y a posteriori de estos. Sin embargo, desde su aparición, la expresión ingeniería didáctica también se ha utilizado para denotar actividades de desarrollo, refiriéndose al diseño y construcción de recursos educativos basados en resultados de investigación y al trabajo de los ingenieros didácticos (Artigue, 2014).

3.3.1 Fases de la Ingeniería Didáctica

Según Artigue et al., (1995), este proceso consta de cuatro fases: la fase 1 de análisis preliminar, la fase 2 de concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas de la ingeniería, la fase 3 de experimentación y finalmente la fase 4 de análisis a posteriori y evaluación.

A continuación se explican cada una de las fases según Pérez (2020):

- ***Fase 1. Análisis preliminar***

Esta fase tiene como objetivo identificar y describir los obstáculos epistemológicos, didácticos y/o cognitivos que se presentan en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Este análisis está constituido por un conjunto de análisis en relación con el objeto matemático, como la enseñanza tradicional, las concepciones del alumno y las dificultades u obstáculos que determinan su evolución. Así mismo, en esta fase se describe el grupo de alumnos con los cuales se experimentará la propuesta didáctica, tal como la edad, género y conocimientos previos sobre el tema.

- ***Fase 2. Concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas***

Esta fase tiene dos objetivos: el primero, concerniente al diseño de las actividades o sesiones de la propuesta didáctica, y el segundo, pertinente al análisis a priori, en el cual se deben considerar los resultados que se esperan de los alumnos, las intervenciones del profesor y, prever y analizar las dificultades que podrían enfrentar durante la resolución de las actividades.

- ***Fase 3. Experimentación***

Esta fase, como su nombre lo dice, se refiere a la puesta en marcha de las actividades diseñadas, a la experimentación misma, en la cual se da la interacción propuesta por el profesor del alumno con el medio, así mismo en esta fase se establece el contrato didáctico y se llevan a cabo los registros de las observaciones realizadas.

- ***Fase 4. Análisis a posteriori y validación***

Esta fase está constituida por el conjunto de datos recogidos durante la experimentación, tal como lo son las producciones de los alumnos hechas dentro o fuera de las sesiones, así como los resultados obtenidos por instrumentos externos a la propuesta didáctica. En tanto a la validación, Artigue et al., (1995) menciona: “que la confrontación de los análisis a priori y a posteriori, fundamentan en esencia la validación de las hipótesis formuladas." (p. 48) esto se da en la comparación entre los comportamientos esperados y los que realmente sucedieron durante la experimentación.

Capítulo 4

DESARROLLO DE LAS ACTIVIDADES DIDÁCTICAS

En este capítulo se muestra el desarrollo de la aplicación, es decir, la fase de experimentación, en donde se aplicó la propuesta didáctica diseñada cuyo objetivo es disminuir las dificultades que presentan los alumnos con respecto al concepto de número racional.

4.1 Método

Para llevar a cabo el cumplimiento satisfactorio del objetivo general, la investigación comprende:

- Diseñar y aplicar un diagnóstico a los estudiantes involucrados en la investigación, que contenga conocimientos previos al tema de números racionales, y a partir de los resultados obtenidos crear estrategias didácticas con el uso de distintas representaciones semióticas que puedan potencializar su inteligencia espacial.

Los informantes fueron un grupo conformado por 14 estudiantes de primero de bachillerato de la escuela Woodcock The British School, ubicada en la junta auxiliar de Momoxpan en el municipio de San Pedro Cholula. El análisis fue de tipo mixto, el cual, implica combinar los enfoques cualitativo y cuantitativo en el mismo estudio. La validación de pretest vs postest, así como la validación de las actividades se realizó mediante el juicio de expertos.

4.2 Planeación de las actividades

Las actividades se planearon y diseñaron a partir del enfoque de la Ingeniería Didáctica para crear una secuencia didáctica que consistió en un conjunto de cinco actividades, de las cuales la primera y la quinta fungieron como pretest y postest de la investigación. A continuación, se presentan detalladamente:

Planeación del tema Conocimientos previos	**Sesión** 1
Aplicación mayo 2021	**Objetivo** Resolver operaciones con números racionales
Ámbito/Transversalidad Pensamiento matemático I / Se vincula con todas las asignaturas.	**Aprendizaje Esperado** El estudiante desarrollará el pensamiento matemático mediante procedimientos numéricos y gráficos en la solución de ejercicios y problemas.

Eje	Actividades	Recursos didácticos	Rasgos de Evaluación	Tiempo
Inicio	Se plantea al alumno un cuestionario introductorio en donde se abordan conocimientos previos de números racionales vistos previamente en secundaria.	Plataforma digital: Cisco Webex	Comprensión de la actividad	5 min
Desarrollo	a) Se le proporciona al alumnado un cuestionario sobre números racionales (que servirá como ***pretest***), el cual se aborda mediante preguntas con diferentes representaciones, verbales (lenguaje escrito), numéricas, alfanuméricas y figurales. Además, el cuestionario cuenta con preguntas dicotómicas (verdadero-falso), opción múltiple y abiertas. b) Una vez contestado el cuestionario, se reenvía al profesor mediante plataforma digital.	Cuestionario virtual formato doc. Plataformas digitales: classroom Cisco Webex,	Enunciados bien formulados o aplicación correcta de las propiedades de números racionales para resolver operaciones.	35 min 5 min
Cierre	En plenaria, se intercambian conclusiones sobre la experiencia.	Plataforma digital: Cisco Webex	Expresar sus criterios.	5 min

Planeación del tema Simplificación de Fracciones y Fracciones Equivalentes	**Sesión** 2
Aplicación mayo 2021	**Objetivo** A partir de una fracción analizada, obtener múltiplos y submúltiplos.
Ámbito/Transversalidad Pensamiento matemático I / Se vincula con todas las asignaturas.	**Aprendizaje Esperado** El estudiante comprenderá las relaciones que se generan entre dos fracciones, utilizando distintas representaciones.

Eje	Actividades	Recursos didácticos	Rasgos de Evaluación	Tiempo
Inicio	Se explica al alumno la actividad a desarrollar mediante una presentación. Además, se muestra un ejemplo de la resolución.	Plataforma digital: Cisco Webex	Comprensión de la actividad	10 min
Desarrollo	La actividad, que consiste en un juego, se divide en dos etapas. *La primera etapa tiene cinco rondas, las cuales consisten en relacionar dos fracciones entre sí dentro de un conjunto de cartas con distintas representaciones. *La segunda actividad es un reforzamiento de la primera actividad, pero el tipo de respuesta generada es de tipo dicotómica y consta de dieciséis ítems.	Cuestionario virtual formato doc. Plataformas digitales: classroom Cisco Webex.	Aplicación correcta de las operaciones aritméticas de multiplicación y división que se encuentran en las cartas con igual numerador y denominador para la obtención de fracciones equivalentes.	25 min 10 min
Cierre	En plenaria, se intercambian conclusiones sobre la experiencia.	Plataforma digital: Cisco Webex	Expresar sus criterios.	5 min

Planeación del tema Propiedades de los números racionales	**Sesión** 3
Periodo mayo 2021	**Objetivo** Aplicar las propiedades de números racionales a partir de diferentes representaciones.
Ámbito/Transversalidad Pensamiento matemático I / Se vincula con todas las asignaturas.	**Aprendizaje Esperado** El estudiante desarrollará el pensamiento espacial para favorecer la resolución de operaciones con números racionales.

Eje	Actividades	Recursos didácticos	Rasgos de Evaluación	Tiempo
Inicio	Se leen al alumno una serie de indicaciones contenidas en una actividad, en la cual, se abordan operaciones de números racionales con distintas representaciones.	Presentación proyectada en la plataforma digital: Cisco Webex	Comprensión de la actividad	5 min
Desarrollo	Se le proporciona al alumnado un conjunto de tarjetas previamente enviadas, que conforman al juego: “Yo tengo - ¿Quién tiene?”. Cada tarjeta está dividida en dos partes. La parte superior menciona la frase: “Yo tengo” y la parte inferior contiene la frase: “¿Quién tiene?”, ambas partes están acompañada de un número racional mostrado en cualquier tipo de representación. En equipo deberán explicar la secuencia que se genera en el juego.	Presentación proyectada en la plataforma digital: Cisco Webex	Enunciados bien formulados o aplicación correcta de las propiedades de números racionales para resolver operaciones.	40 min
Cierre	En plenaria, se reflexiona sobre la experiencia.	Plataforma digital: Cisco Webex	Uso de las palabras clave: propiedades.	5 min

Planeación del tema Situación en contexto: “Sana distancia”	**Sesión** 4
Periodo mayo 2021	**Objetivo** Construir e interpretar situaciones reales que requieren de la utilización de número racional.
Ámbito/Transversalidad Pensamiento matemático I / Se vincula con todas las asignaturas.	**Aprendizaje Esperado** Utiliza el pensamiento espacial para analizar y cuestionar críticamente diversos fenómenos.

Eje	Actividades	Recursos didácticos	Rasgos de Evaluación	Tiempo
Inicio	Se lee al alumno una situación en contexto con números racionales, la cual muestra estadísticas actuales ocasionadas por el virus SARS-CoV-2	Plataforma digital: Cisco Webex	Comprensión de la actividad	5 min
Desarrollo	Se realiza la siguiente pregunta, con diferentes supuestos: ❖ ¿Qué debería hacer si me enfermo o alguien de mi hogar se enferma? a) Responsabilidades con las que se cuenta. b) Responsabilidades adquiridas para los que no están enfermos Realizar dos tablas, en la cual se debe representar el número de respuestas, las variables acumuladas y los porcentajes de cada respuesta. El docente facilitará dichas tablas. Realizar dos gráficas de barras, una por cada tabla.	Cuestionario virtual formato doc. Plataformas digitales: classroom Cisco Webex,	Enunciados bien formulados o aplicación correcta de las propiedades de números racionales para resolver operaciones.	40 min
Cierre	El estudiante desarrolla argumentos, y justifica conclusiones.	Plataforma digital: Cisco Webex	Uso de las palabras clave: propiedades.	5 min

Planeación del tema Evaluación y análisis del aprendizaje con números racionales	**Sesión** 5
Aplicación mayo 2021	**Objetivo** Resolver operaciones con números racionales
Ámbito/Transversalidad Pensamiento matemático I / Se vincula con todas las asignaturas.	**Aprendizaje Esperado** El estudiante desarrollará el pensamiento matemático mediante procedimientos numéricos y gráficos en la solución de ejercicios y problemas.

Eje	Actividades	Recursos didácticos	Rasgos de Evaluación	Tiempo
Inicio	Se entrega al alumno un cuestionario en el cual se evalúan sus conocimientos adquiridos en números racionales.	Plataforma digital: Cisco Webex	Comprensión de la actividad	5 min
Desarrollo	a) Se le proporciona al alumnado un cuestionario sobre números racionales (que servirá como ***postest***), el cual se aborda mediante preguntas con diferentes representaciones numéricas, alfanuméricas y figurales. Además, el cuestionario cuenta con preguntas dicotómicas (verdadero-falso), politómicas, opción múltiple, abiertas. b) Una vez contestado el cuestionario, se reenvía al profesor mediante plataforma digital.	Cuestionario virtual formato doc. Plataformas digitales: classroom Cisco Webex,	Enunciados bien formulados o aplicación correcta de las propiedades de números racionales para resolver operaciones.	25 min 5 min
Cierre	En plenaria, se intercambian conclusiones sobre la experiencia.	Plataforma digital: Cisco Webex	Uso de las palabras clave: propiedades.	10 min

4.3 Diseño de actividades

4.3.1 Actividad 1 y 5: Conocimientos previos

Estas actividades se diseñaron para observar cuáles son los conocimientos previos con los que cuenta el estudiante a partir de la recopilación de algunas dificultades mostradas previamente en los antecedentes de este proyecto, así como a partir, de los aprendizajes esperados del currículo escolar. Por tal motivo se consideró como *pretest* de la investigación. Una vez aplicada esta actividad como pretest, posteriormente se aplicará como *postest* para evaluar los conocimientos adquiridos en los estudiantes de primero de bachillerato. Los temas por evaluar son:

- Identificación de números racionales dentro de un grupo de números reales.
- Operaciones con fracciones que cuentan con distintos e iguales denominadores.
- Conversión de fracciones mixtas a fracciones impropias y viceversa.
- Aplicación correcta de las propiedades de números racionales.
- Resolución de problemas con fracciones.
- Simplificación de Fracciones y Fracciones Equivalentes*

*: Este tema no se ve de manera independiente en el currículo escolar, simplemente se encuentra inmerso en los demás.

Pregunta 1

Fue diseñada para evaluar la identificación de números racionales dentro de una serie de números reales mediante distintas representaciones semióticas, utilizando expresiones con las cuales el estudiante está familiarizado. Además, se le pide argumentar su respuesta para indagar cuáles fueron las causas de su elección.

Pregunta 2

Esta pregunta fue diseñada para conocer cómo los estudiantes resuelven las operaciones aritméticas con números racionales. En literatura se ha encontrado, que ellos aplican el modelo lineal aditivo en la suma de fracciones, además, no logran diferenciar a los números racionales de los naturales, porque piensan a la fracción como dos números separados por una “rayita”. Como consecuencia, se proponen ejercicios con denominadores iguales y diferentes. Así como multiplicaciones y divisiones. En ambos casos, se presentan los ejercicios con diferentes signos. En cada pregunta, se proponen cuatro opciones de respuesta, las cuales fueron calculadas con cuatro procedimientos iguales, en donde tres son incorrectos y uno es correcto. Cada respuesta, independientemente de si es correcta o no para cada caso, cumple las mismas características. Esto con el fin de suponer la creación de patrones por parte del estudiante. Los procedimientos planteados para cada respuesta fueron los siguientes:

a) Multiplicar denominadores entre sí y, para calcular el nuevo numerador se resuelven productos cruzados
b) Multiplicar numeradores entre sí para obtener el nuevo numerador y denominadores entre sí para obtener el nuevo denominador
c) Realizar productos cruzados. Para el primer caso, se multiplica el numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda fracción, esto con el fin de obtener como resultado el nuevo numerador. Para el segundo caso, se multiplica el denominador de la primera fracción por el numerador de la segunda, con el fin de obtener el nuevo denominador.
d) Sumar numeradores entre sí y denominadores entre sí.

En el orden anterior fueron propuestas las respuestas a cada pregunta.

Pregunta 3

Esta pregunta fue diseñada de tal manera que el estudiante pueda conceptualizar fracciones impropias, es decir, entender ¿por qué el numerador es mayor que el denominador? y lograr convertirlas a fracciones mixtas, así como también hacerlo de manera inversa. Además, cada una de las respuestas está diseñada de tal manera que cada caso presente los mismos procedimientos correctos e incorrectos conforme a los demás porque se plantea la posibilidad de que el estudiante genere patrones procedimentales en la resolución de los ejercicios.

Pregunta 4

Dentro de las dificultades presentes en estudiantes de bachillerato, se ha encontrado que carecen de dominio en la aplicación de las propiedades de números racionales porque algunos de ellos, no logran diferenciarlas de las propiedades de números naturales. Por tal motivo, se les plantea una serie de ejercicios en los cuales las propiedades están aplicadas tanto correcta como incorrectamente. Finalmente, ellos deberán justificar su respuesta.

Pregunta 5

Fue diseñada a raíz de dos vertientes. La primera fue a causa de la dificultad de aplicar correctamente las propiedades de los números racionales en problemas dados y a partir de ello, observar su proceso de razonamiento. La segunda vertiente, fue a partir del aprendizaje esperado en el currículo escolar, el cual consta en aplicar las operaciones y propiedades de los números racionales en su vida cotidiana. Por tal motivo, se plantea la resolución de problemas acordes a estas razones.

Conclusiones

Este apartado tiene como objetivo que los estudiantes expresen sus conclusiones frente al grupo. Cabe señalar, que el tiempo asignado es de 5 minutos para evitar cualquier explicación del proceso de resolución de la actividad.

4.3.2 Actividad 2
Simplificación y Equivalencia de Fracciones

Esta actividad se diseñó para ayudar a comprender al alumno las relaciones que se generan entre dos números racionales mediante fracciones con igual numerador y denominador utilizando operaciones aritméticas de multiplicación o división entre sí, con el fin de obtener múltiplos o submúltiplos del número racional analizado. El tema por evaluar es:

- Simplificación de Fracciones y Fracciones Equivalentes

La actividad, consiste en un juego que se divide en dos etapas. La primera etapa presenta ejercicios de simplificación de fracciones y fracciones equivalentes y, la segunda etapa consiste en el reforzamiento de la actividad anterior, teniendo el mismo objetivo, pero el tipo de respuesta es dicotómica. El enfoque que se utilizó en el diseño de la actividad completa fue la TRRS de Raymond Duval y la IM de Howard Gardner.

La primera actividad se planteó, mediante un conjunto de instrucciones que hacen hincapié en las distintas representaciones semióticas con las que se enfrentará el estudiante. Para desarrollarla, la herramienta requerida es una figura con fracciones de igual numerador y denominador, las cuales empiezan con el número dos y terminan con el número nueve. De tal manera que se muestran dos filas, una fila con el signo *"por"*, así como el signo *"entre"* en cada una de las fracciones. Antes de comenzar a jugar se presenta un ejemplo numérico para clarificar el procedimiento que debe llevarse a cabo. A partir de los cuatro tipos de representación semiótica, cada ronda del juego fue diseñada con una representación distinta. Y como ronda final, es decir, la quinta ronda, se presentaron los cuatro lenguajes en la misma ronda. El objetivo en las primeras cuatro rondas fue que el estudiante fuera capaz de realizar tratamientos para lograr la transformación de una fracción a otra. En la última ronda, se fomenta el uso de la conversión, es decir, que el estudiante tenga la capacidad de transformar una fracción de un lenguaje a otro.

La etapa dos de la actividad, se diseñó a partir de los cuatro sistemas de representación semiótica, los cuales generan dieciséis posibles transformaciones entre conversiones de un sistema a otro y tratamientos dentro de cada sistema. Cada lenguaje puede sufrir tres tratamientos y una conversión tal y como se muestra en la Figura 12:

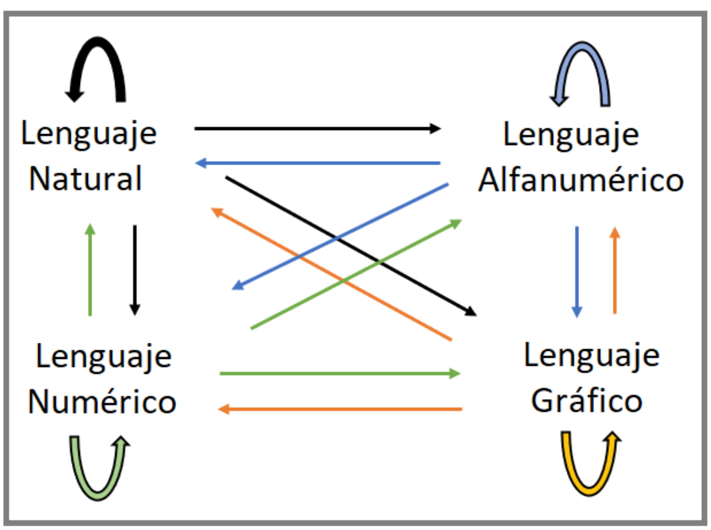


Figura 12. Tratamientos y Conversiones entre Registros de Representación Semiótica.

Fuente Propia

El orden de los ítems fue propuesto por cada lenguaje. De tal manera que estuvieran representados los cuatro reactivos juntos, pertenecientes a cada representación semiótica. Los primeros cuatro ítems muestran el lenguaje natural, los siguientes cuatro, el lenguaje alfanumérico, los siguientes, el lenguaje gráfico y finalmente, los últimos cuatro, el lenguaje numérico.

4.3.3 Actividad 3
Propiedades de los Números Racionales

Esta actividad fue diseñada como un juego con el objetivo de mejorar la comprensión de las propiedades de los números racionales en el estudiante a partir de la visualización espacial y de los distintos registros de representación semiótica. Para desarrollarse, requiere del uso de siete propiedades de los números racionales, las cuales son explicadas mediante el uso de las fracciones que aparecen en cada carta. En el diseño, cada carta muestra conversiones y tratamientos entre números racionales. Además, se fomentó el papel vívido de la imaginación en la resolución de ejercicios, tal y como lo comenta Gardner en su libro *Estructuras de la Mente*.

También se le presenta a los estudiantes el resto de las propiedades en una tabla, las cuales no fueron utilizadas en el juego. A partir de esto, se les plantea la pregunta de ¿Por qué no fueron incluidas estas propiedades? Esto con el fin, de que ellos reforzaran su razonamiento sobre la aplicación de las propiedades en las cartas anteriores.

4.3.4 Actividad 4
Situación en Contexto

Esta actividad, fue diseñada a partir del enfoque que tiene el currículo escolar de primero de bachillerato de los distintos conceptos que se encuentran en el contenido. El currículo plantea, el sustentar soluciones a problemáticas contextuales con el fin de crear multidisciplinariedad entre los saberes. Además, el currículo hace hincapié en que en gran medida los medios de comunicación construyen y divulgan ese conocimiento entre la sociedad. A partir de esto, con la pandemia en la que estamos inmersos, se decidió crear una situación en contexto

relacionada con el virus que nos aqueja con el fin de concientizar a los estudiantes la problemática de enfermarse.
Por tal motivo, se les planteó que analizaran los quehaceres del hogar que diariamente realizan versus los que harían si alguien en su hogar se enfermara. Esta situación se desarrolla en una tabla de frecuencias con ayuda de los números racionales.

Cabe señalar, que, en esta actividad las frecuencias no reciben ese nombre, aunque por definición lo son, porque al ser, los números racionales el primer tema con el que se enfrentan los estudiantes en primero de bachillerato, aún no cuentan con el conocimiento de las medidas de tendencia central porque ese tema se ve posteriormente dentro del mismo semestre.

De acuerdo con Gardner, la inteligencia espacial comprende una amplia cantidad de actividades relacionadas de manera informal, tal es el caso de evocar la imaginación mental y luego transformarla o la habilidad para transformar o reconocer una transformación de un elemento en otro o, la de producir una semejanza gráfica de información espacial.

Por tal motivo, se planteó el hecho de que los estudiantes visualizaran las actividades realizadas en el hogar diariamente a partir de la situación mostrada, obteniendo como resultado en la tabla, la utilización de los números racionales. A su vez, ellos requieren de distintos registros de representación semiótica para lograrlo. Mientras que el lenguaje natural se utiliza en la comunicación cotidiana como se observa en la situación en contexto, en el discurso en el aula se requiere, además, otros registros de representación semiótica como el lenguaje numérico para poder llenar la tabla y el lenguaje gráfico para recopilar los datos en una tabulación.

4.4 Validación

Las actividades fueron evaluadas por juicio de expertos, los cuales cuentan con amplia experiencia en Educación Matemática con terminal en Inteligencias Múltiples, así como enfoque principal en Inteligencia Espacial. Los tres jueces dieron sus respectivos puntos de vista para el mejoramiento del proyecto y las correcciones fueron realizadas.

Capítulo 5

ANÁLISIS

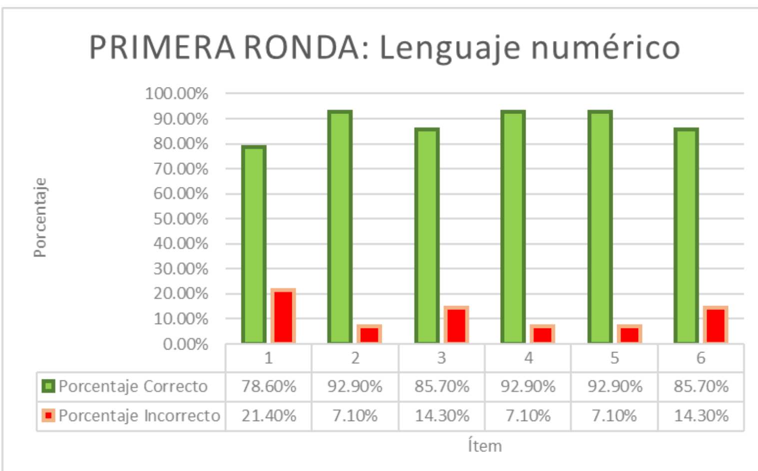
En este capítulo se muestra la aplicación de la propuesta, la cual nos permitió recoger la información respecto al desempeño, dificultades y logros de los alumnos en cada una de las sesiones que se llevaron a cabo.

5.1 *<u>Actividad 2</u>: Simplificación de Fracciones y Fracciones Equivalentes*

Los resultados de la actividad dos fueron analizados de acuerdo con cada etapa aplicada.

➔ **PRIMERA ETAPA DEL JUEGO**

Los resultados se muestran en el conjunto de Figuras 13-17 en donde cada una de ellas describe los porcentajes obtenidos por cada una de las rondas. En la primera ronda del juego los estudiantes no presentaron mayores dificultades en la relación de números racionales de manera numérica. En los ítems uno y tres, los cuales forman la relación correcta hay porcentajes bajos en comparación con los demás casos y se atribuye a una posible falla en el cálculo mental de ellos porque son los casos en los que los denominadores son los números más grandes de toda la ronda (ver Figura 13).



	1	2	3	4	5	6
Porcentaje Correcto	78.60%	92.90%	85.70%	92.90%	92.90%	85.70%
Porcentaje Incorrecto	21.40%	7.10%	14.30%	7.10%	7.10%	14.30%

Figura 13. Porcentajes obtenidos en la primera ronda del juego.

Con respecto a la ronda en la cual se desarrolló el lenguaje verbal, los estudiantes disminuyeron los porcentajes correctos en todos y cada uno de los ítems, por lo que es posible atribuir que presentan dificultad en evocar y transformar las imágenes mentales de los números racionales con el lenguaje verbal, es decir, no están familiarizados con el uso de este lenguaje en la asignatura de matemáticas (ver Figura 14).

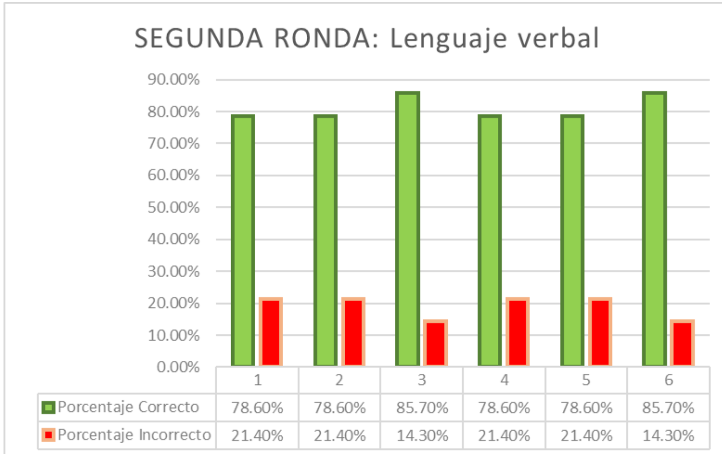


Figura 14. Porcentajes obtenidos en la segunda ronda del juego.

En los ítems aplicados en lenguaje gráfico, se observó que hubo una mayor cantidad de estudiantes que pudieron relacionar los pares de cartas. Los porcentajes correctos se atribuyen a la habilidad que tuvieron para transformar imágenes mentales. Esta fue la ronda en la que se obtuvo un mayor porcentaje de respuestas correctas (ver Figura 15).

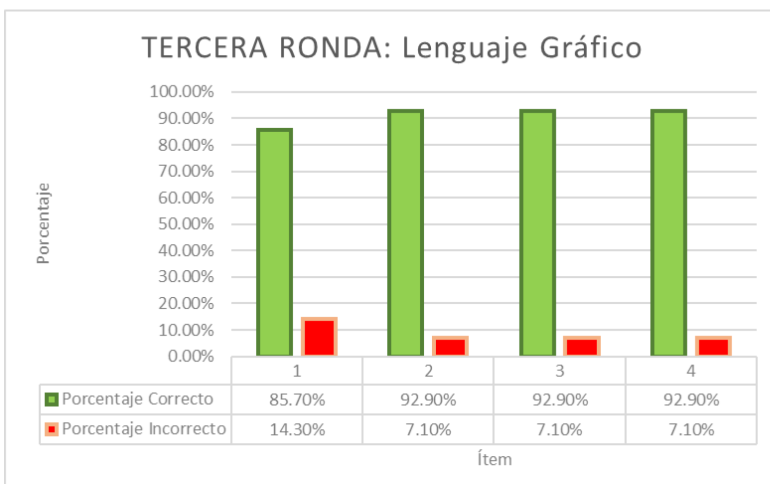


Figura 15. Porcentajes obtenidos en la tercera ronda del juego.

El lenguaje algebraico presentó la mayor dificultad de resolución para los estudiantes, se puede atribuir a la carencia del dominio algebraico, es decir, los estudiantes presentan dificultades con la aplicación correcta del álgebra (ver Figura 16).

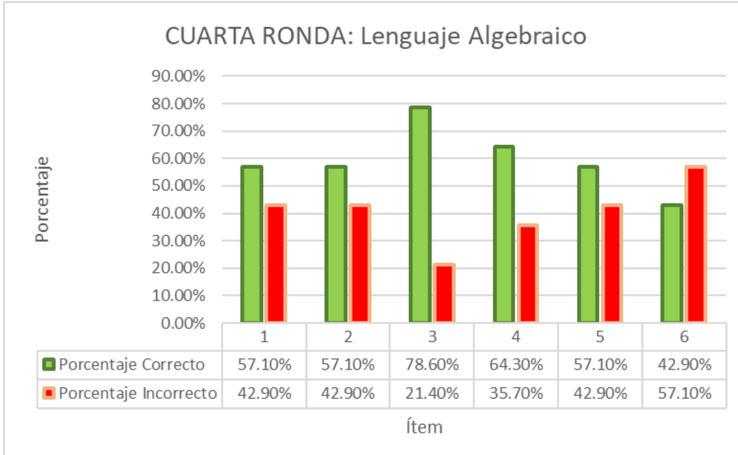


Figura 16. Porcentajes obtenidos en la cuarta ronda del juego.

En la Figura 17 se observa que en el ítem número tres, los estudiantes no presentaron dificultad a pesar de encontrarse con la pregunta en el lenguaje verbal.

Eso se atribuye a que el número racional plasmado en la carta utiliza números pequeños, los cuales el estudiante está familiarizado con ellos en este tipo de lenguaje también.

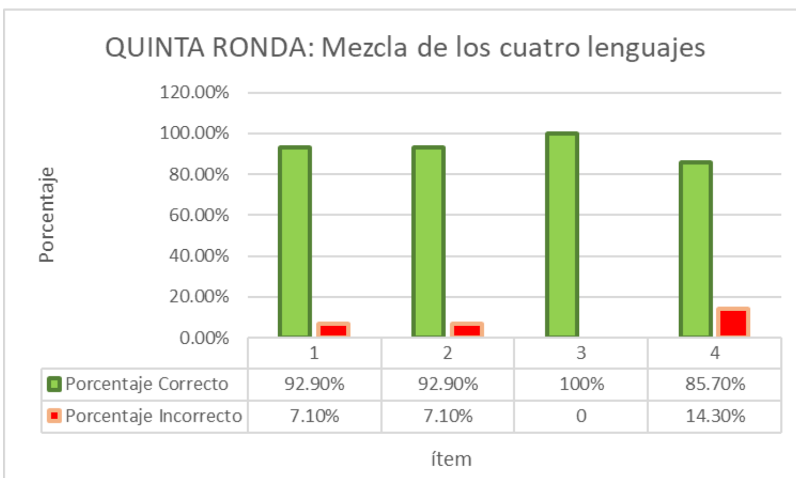


Figura 17. Porcentajes obtenidos en la quinta ronda del juego.

➔ SEGUNDA ETAPA DEL JUEGO

Se presentan los resultados obtenidos en la etapa dos. A partir del planteamiento de dieciséis ítems mostrados en los cuatro lenguajes, es decir, cuatro ítems por representación semiótica, en los cuales se requirieron tratamientos y conversiones entre registros se observa lo siguiente: Los ítems uno y dos no se muestran porque son los ejemplos resueltos. Los ítems con porcentajes menores al setenta por ciento de respuestas correctas (ítems cinco, siete y ocho) pertenecen a preguntas dadas en lenguaje algebraico en las cuales, las soluciones mostradas se encuentran en los distintos registros de representación exceptuando al registro gráfico y estos resultados se atribuyen a la carencia de conocimiento algebraico para llegar a una solución correcta. El sexto ítem también se encuentra expresado en el lenguaje algebraico y la solución mostrada se encuentra en el lenguaje gráfico y, como se observa obtuvo un porcentaje alto, podemos concluir que la representación gráfica ayudó a la correcta resolución de la pregunta. El noveno ítem sufrió una conversión del lenguaje gráfico al lenguaje numérico y también obtuvo un porcentaje alto en respuestas correctas y se atribuye a que los estudiantes no presentan dificultad en el lenguaje gráfico y ya están familiarizados con el lenguaje numérico en la asignatura de matemáticas. El ítem número doce y su solución se encuentra expresado en el lenguaje gráfico obteniendo un porcentaje del noventa y dos por ciento, lo cual nos lleva a concluir que los estudiantes presentan habilidad de transformación de imágenes dentro del mismo registro de representación. El catorceavo ítem se encuentra dado en el lenguaje numérico con solución en el lenguaje verbal y se atribuye el porcentaje alto de respuestas correctas a que la fracción dada cuenta con números pequeños (Figura 18).

Ítem	Porcentaje Correcto	Porcentaje Incorrecto
1	-	-
2	-	-
3	78.6%	21.4%
4	78.6%	21.4%
5	50%	50%
6	92.9%	7.1%
7	35.7%	64.3%
8	64.3%	35.7%
9	92.9%	7.1%
10	71.4%	28.6%
11	71.4%	28.6%
12	92.9%	7.1%
13	85.7%	14.3%
14	92.9%	7.1%
15	85.7%	14.3%
16	78.6%	21.4%

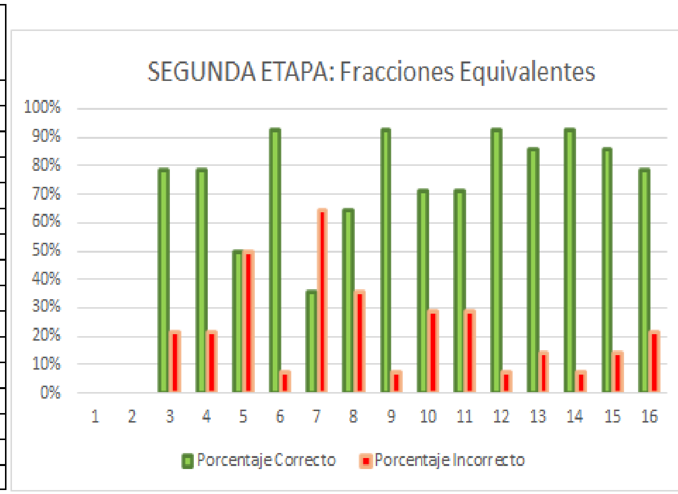


Figura 18. Porcentajes obtenidos en la segunda etapa del juego.

Los ítems anteriormente mostrados se agruparon de acuerdo con el porcentaje de respuestas correctas. Además, se clasificó cada porcentaje de acuerdo con la adquisición del concepto de número racional. Finalmente se muestra en la Tabla 3 en qué registro se encuentra cada intervalo.

Tabla 3

Porcentaje de respuestas correctas en términos de la representación semiótica trabajada.

Porcentaje de respuestas correctas	*Clasificación de acuerdo con el aprendizaje obtenido*	*Registro de Representación del Ítem*
0-50%	Carente	Lenguaje algebraico
51-70%	Bajo	Lenguaje algebraico
71-90%	Regular	Lenguaje verbal, Lenguaje gráfico, Lenguaje numérico
91-100%	Bueno	Lenguaje gráfico, Lenguaje numérico

De las dos etapas aplicadas, con treinta y nueve ítems sólo tres de ellos obtuvieron un porcentaje igual o menor al cincuenta por ciento en respuestas correctas, lo que nos llevó a concluir que la secuencia didáctica planteada nos ayudó a incrementar el aprendizaje del concepto de número racional en esta actividad. También pudimos observar que el éxito en la evocación de imágenes mentales depende de la representación. Sin embargo, es de suma importancia trabajar con los distintos registros de representación semiótica dentro del aula para que los estudiantes puedan alcanzar la mayor adquisición de conocimiento con el concepto de número racional, sin descartar el fortalecimiento del álgebra en las bases matemáticas de los estudiantes, porque de lo contrario, nos seguiremos enfrentando a dificultades algebraicas que impiden el aprendizaje en el registro algebraico que forma parte de uno de los cuatro registros de representación semiótica y al presentarse un conflicto semiótico no se logrará la adquisición del concepto.

5.2 Actividad 3: Propiedades de los Números Racionales

Esta actividad se desenvolvió de manera dividida, es decir, se formaron tres equipos con el grupo de catorce estudiantes, de los cuales, tanto el equipo uno como el dos, se crearon de cinco estudiantes cada uno y el equipo número tres de cuatro estudiantes. Cada equipo desarrolló el juego donde se evaluaron los criterios de acuerdo con la lista de cotejo que se encuentra en el anexo número cuatro. Cabe señalar, que la actividad fue evaluada de manera grupal, aunque en cada caso se hacen algunas observaciones sobre el desempeño individual de los estudiantes.

❖ Resultados del Equipo 1

Este equipo estuvo integrado por cinco estudiantes. Los criterios evaluados se muestran en la Tabla 4.

Tabla 4

Compendio de resultados del primer equipo

Categoría	Criterios de Evaluación	Incorrecto (0)	Correcto (1)
Comprensión Correcta de los Conceptos Matemáticos	1.- Definición correcta de fracción	______	✓
	2. Definición correcta de fracción impropia	X	______
	3.- Identificación de números racionales	______	✓
	4. Identificación de relación de orden	X	______
Dominio de propiedades	1. Adición de fracciones	X	______
	2. Aplicación correcta de las propiedades de la multiplicación, así como la ley de los signos y potenciación	______	✓
	3. Diferenciar los números racionales con respecto a números naturales.	______	✓
Comprensión por múltiples representaciones	1. Comprensión en la congruencia geométrica	X	______
Lenguaje matemático	1. Uso del paréntesis como algoritmo de la multiplicación.	______	✓
	2.Traducción del lenguaje matemático al común.	X	______
TOTAL			**5**

Este equipo presentó muchas dificultades para desarrollar la actividad. Aunque la participación de los estudiantes fue de manera aleatoria, cada uno de ellos tomaba mucho tiempo para contestar y, en varias ocasiones ninguno quería participar por lo que tuve que asignar un orden para que ellos contestaran.

❖ Resultados del Equipo 2

Este equipo se conformó por cinco estudiantes. Los criterios evaluados se muestran en la Tabla 5.

Tabla 5

Compendio de resultados del segundo equipo

Categoría	Criterios de Evaluación	Incorrecto (0)	Correcto (1)
Comprensión Correcta de los Conceptos Matemáticos	1.- Definición correcta de fracción	———	✓
	2. Definición correcta de fracción impropia	———	✓
	3.- Identificación de números racionales	———	✓
	4. Identificación de relación de orden	———	✓
Dominio de propiedades	1. Adición de fracciones	———	✓
	2. Aplicación correcta de las propiedades de la multiplicación, así como la ley de los signos y potenciación	———	✓
	3. Diferenciar los números racionales con respecto a números naturales.	———	✓
Comprensión por múltiples representaciones	1. Comprensión en la congruencia geométrica	———	✓
Lenguaje matemático	1. Uso del paréntesis como algoritmo de la multiplicación.	———	✓
	2.Traducción del lenguaje matemático al común.	———	✓
TOTAL			10

Este equipo desarrolló la actividad de manera fluida, sin errores y con un orden aleatorio en participaciones. Todos y cada uno de ellos sabían que responder, cubrieron con cada una de las categorías a evaluar.

❖ Resultados del Equipo 3

Este equipo se conformó por cinco estudiantes. Los criterios evaluados se muestran a continuación (Tabla 6).

Tabla 6

Compendio de resultados del tercer equipo

Categoría	Criterios de Evaluación	Incorrecto (0)	Correcto (1)
Comprensión Correcta de los Conceptos Matemáticos	1.- Definición correcta de fracción	———	✓
	2. Definición correcta de fracción impropia	———	✓
	3.- Identificación de números racionales	———	✓
	4. Identificación de relación de orden	———	✓
Dominio de propiedades	1. Adición de fracciones	———	✓
	2. Aplicación correcta de las propiedades de la multiplicación, así como la ley de los signos y potenciación	———	✓
	3. Diferenciar los números racionales con respecto a números naturales.	———	✓
Comprensión por múltiples representaciones	1. Comprensión en la congruencia geométrica	———	✓
Lenguaje matemático	1. Uso del paréntesis como algoritmo de la multiplicación.	———	✓
	2.Traducción del lenguaje matemático al común.	———	✓
TOTAL			10

El equipo número tres, tardó más tiempo en desarrollar la actividad. Sin embargo, lo hizo de manera clara y coherente. Cada uno de ellos entendió en qué consistía la actividad.

5.3 <u>Actividad 4</u>: Situación en Contexto

Esta actividad fue evaluada de manera grupal para asemejar el cómo se plantea con el currículo escolar a partir de otras situaciones en contexto. Se generó una lista de cotejo (Tabla 7), la cual es similar a la de la actividad anterior, pero se descartaron algunas categorías que no se encuentran dentro de los rubros a evaluar. Los resultados son los siguientes:

Tabla 7

Resultados de la evaluación grupal de la situación en contexto

Categoría	Criterios de Evaluación	Incorrecto (0)	Correcto (1)
Comprensión Correcta de los Conceptos Matemáticos	1. Identificación de números racionales	-------	✔
Dominio de propiedades	1. Adición de fracciones	-------	✔
	2. Aplicación correcta de las propiedades de la multiplicación, así como la ley de los signos y potenciación	-------	✔
	3. Diferenciar los números racionales con respecto a números naturales.	-------	✔
Lenguaje matemático	1.Traducción del lenguaje matemático al común	-------	✔
Total			**5**

Al mostrar fluidez en el desarrollo de la actividad, el grupo obtuvo un puntaje de cinco unidades. Cabe señalar, que la participación de los estudiantes fue aleatoria.

5.4 Actividad 1 vs Actividad 5: Conocimientos Previos vs Conocimientos Adquiridos

La primera actividad fue planeada, diseñada y aplicada como *pretest* con el fin de evaluar los conocimientos previos con los que cuentan los estudiantes de primero de bachillerato con respecto al concepto de número racional. La última actividad fungió como *postest*, el cual consistió en evaluar los conocimientos adquiridos por parte de los estudiantes.

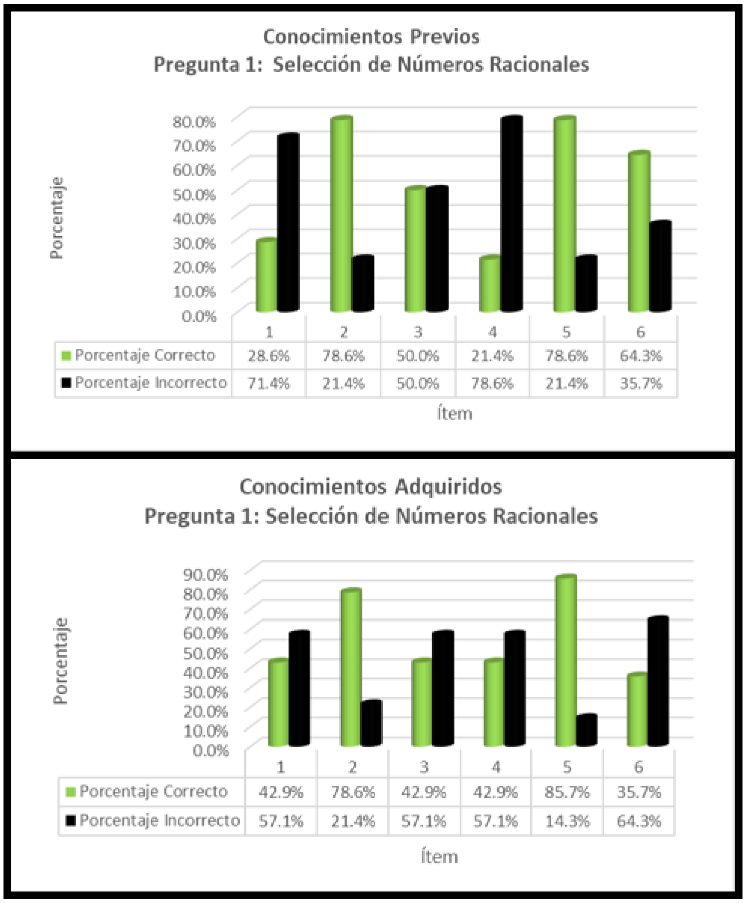


Figura 19. Resultados de la pregunta uno sobre la selección de números racionales.

En la Figura 19 se observa que tres ítems (dos, cinco y seis) tuvieron un resultado superior al cincuenta por ciento y dos ítems (uno y cuatro) obtuvieron un resultado por debajo del mismo porcentaje. De los cuales los ítems dos y cuatro son los únicos números que no son racionales de la serie y fueron los dos porcentajes correctos más altos de la pregunta uno. El porcentaje de respuestas correctas más bajo fue el ítem número cuatro el cual fue representado con números decimales. A partir de lo anterior podemos corroborar junto con la tabla de dificultades recopiladas, que la transformación de números decimales a fracciones es una dificultad generada por una de las múltiples representaciones del concepto de número racional. En la parte inferior de la Figura 19, los porcentajes de respuestas correctas de tres ítems aumentaron y el de un ítem quedó igual. Sin embargo, el porcentaje de los ítems número tres y seis disminuyeron por lo que se atribuye a una posible confusión en la lectura de la imagen ya que tanto la fracción a analizar como el resto de ella están coloreadas y en alguna de las actividades de la secuencia didáctica sólo una parte de las figuras estaba coloreada. Para el caso del sexto ítem, la disminución del porcentaje se atribuye a la diferente manera de expresar a las fracciones mixtas, porque en la secuencia didáctica se representaron como: entero-espacio-numerador-vínculo-denominador, por ejemplo: $6\ \frac{1}{2}$. Sin embargo, en estas actividades, las fracciones mixtas se escribieron como: entero-espacio-numerador-diagonal-demominador, por ejemplo: 6 1/2. Lo que pudo haber originado una confusión en la lectura numérica por parte de los estudiantes.

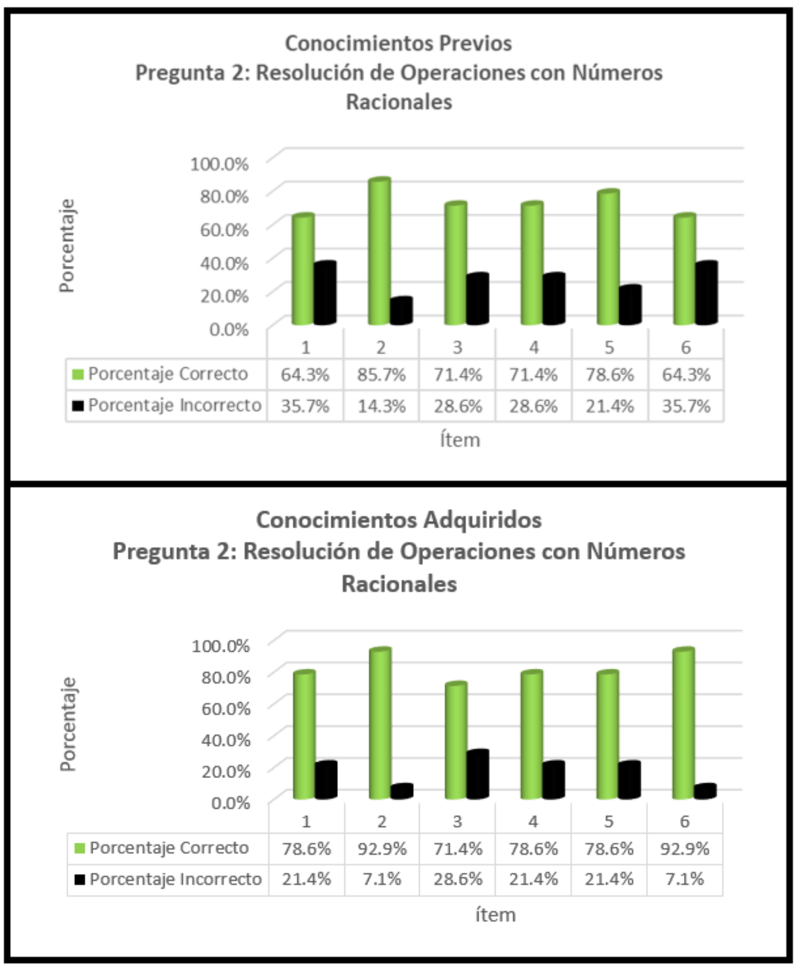


Figura 20. Porcentajes correctos e incorrectos sobre las operaciones de Números Racionales.

La Figura 20, es el resultado de operar con distintos números racionales. Los porcentajes correctos en cada uno de los ítems es superior al cincuenta por ciento. Cabe señalar, que los dos ítems con _menor porcentaje_ (uno y seis) aunque fueron dados con operaciones de suma y multiplicación respectivamente, _ambos casos presentaron iguales denominadores_. La Figura 20 parte inferior, muestra el aumento de porcentajes de respuestas correctas en cuatro de seis ítems, en los casos restantes (ítems tres y cinco) _el porcentaje fue el mismo_ y en ambos casos las fracciones _tenían diferente denominador_.

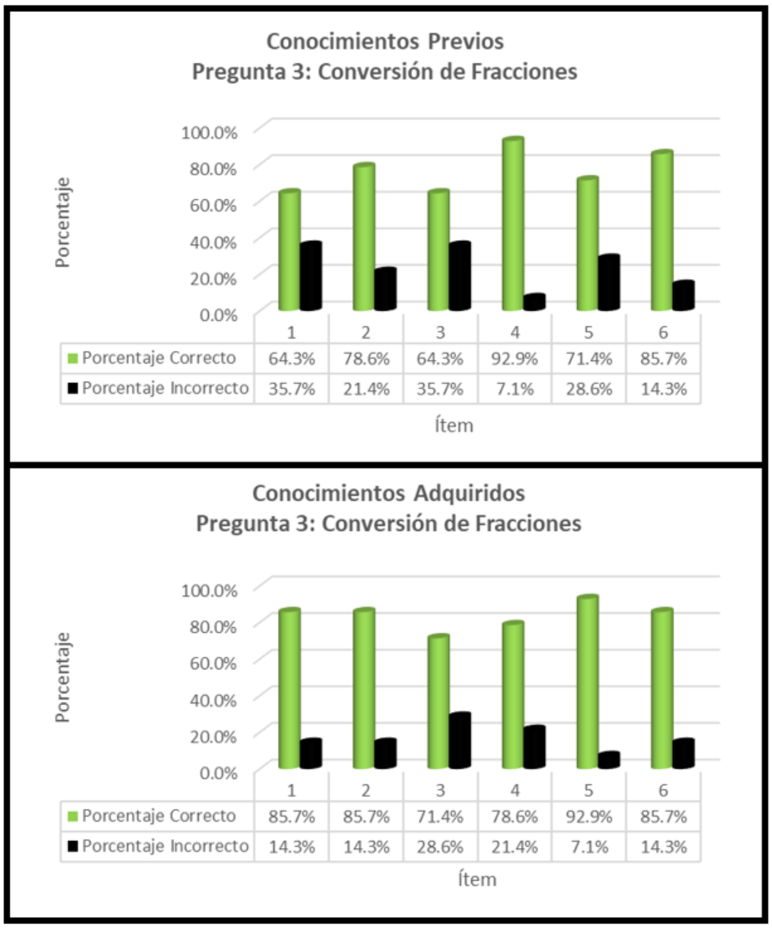


Figura 21. Resultados de las conversiones de Fracciones Mixtas a Impropias y viceversa.

En la parte superior de la Figura 21, la conversión de fracciones fue un tema en el cual todos los estudiantes obtuvieron un porcentaje superior al cincuenta por ciento. Los porcentajes de los ítems uno y tres fueron inferiores con respecto al dos. Los porcentajes de respuestas correctas del cinco y seis fueron inferiores con respecto al cuatro. La parte inferior de la

Figura 21 muestra un aumento en el porcentaje de respuestas correctas en cuatro de los seis ítems, en el sexto ítem el porcentaje es el mismo y en el cuarto ítem el resultado de respuestas correctas disminuyó en 14.3 puntos porcentuales. Cabe señalar que todas las respuestas presentaron un patrón procedimental por cada tres ítems.

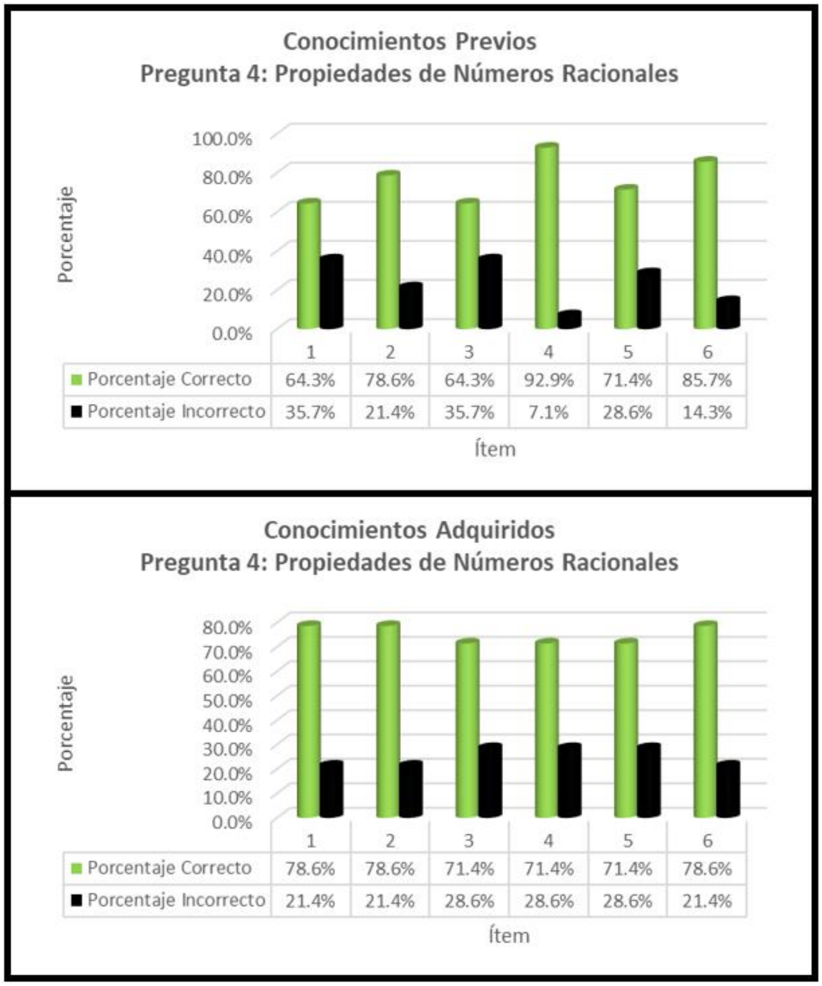


Figura 22. Porcentajes correctos e incorrectos sobre Propiedades de los Números Racionales.

Los resultados de la parte inferior de la Figura 22 muestran un crecimiento en comparación con la gráfica de conocimientos previos a excepción de los ítems dos y cinco los cuales presentan la misma magnitud porcentual. Los ítems cuatro y seis tuvieron un decaimiento porcentual los que nos lleva a inferir que los estudiantes tuvieron confusión con la multiplicación entre recíprocos y con respecto al algoritmo del paréntesis como multiplicación, el cual es una dificultad que hallamos previamente en literatura para el desarrollo de este proyecto.

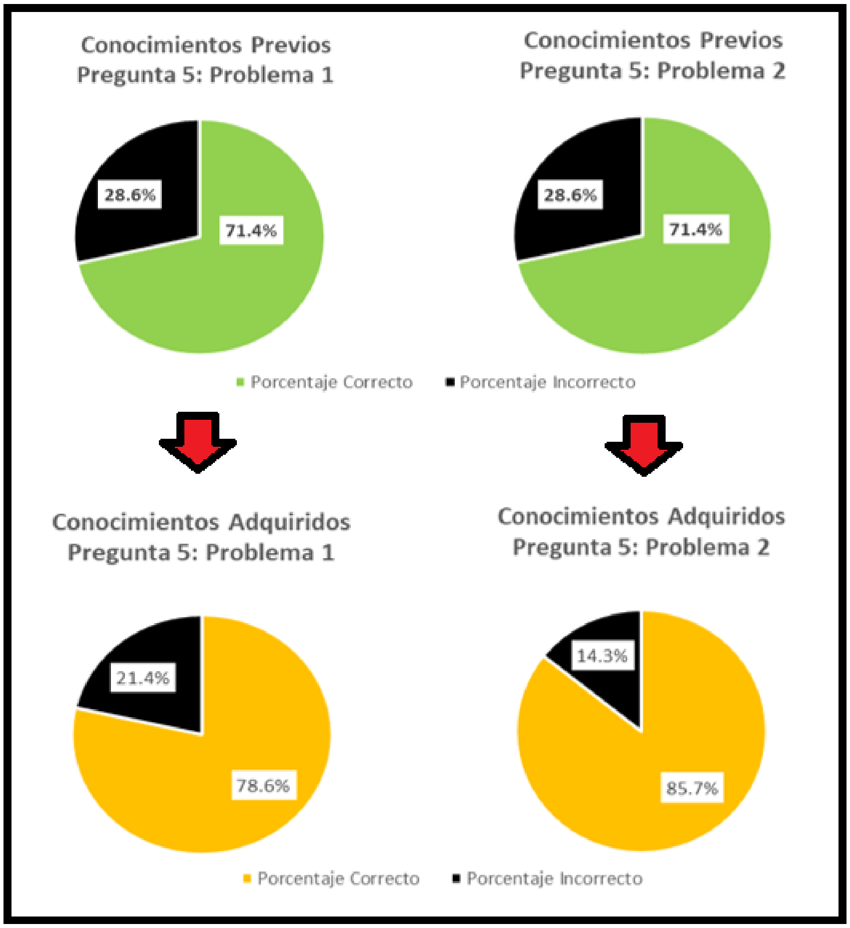


Figura 23. Comparación de resultados de los problemas 1 y 2.

La Figura 23 representa la comparación de los resultados obtenidos a partir de dos problemas de aplicación dados, los cuales, muestran que los estudiantes están familiarizados con ambos contextos presentados, tanto el estudiante que apoya al gasto familiar como la madre que hornea un pastel para su hija. Más de la mitad de los estudiantes lograron analizar e interpretar numéricamente la situación planteada. Además, hubo un crecimiento porcentual en ambos casos, lo que infiere una comprensión mejor del concepto de número racional.

CONCLUSIONES

En este capítulo enunciaremos las conclusiones obtenidas con respecto a los objetivos propuestos, así mismo se brindarán algunas recomendaciones para futuras líneas de investigación a raíz de los resultados obtenidos y descritos en el capítulo anterior.

En relación con el primer objetivo específico:

- *Realizar, mediante un pretest, un diagnóstico de las dificultades de aprendizaje de los números racionales.*

Este objetivo se cumplió al realizar la aplicación del instrumento *"Conocimientos Previos"* (Véase Anexo 1) el cual nos permitió observar las dificultades presentes en los estudiantes de primer año de bachillerato. Además, pudimos corroborar que nuestros sujetos de estudio presentaron ciertas dificultades encontradas previamente en literatura, de las cuales, todas ellas se encuentran dentro de las cuatro categorías que clasificamos en el estado del arte.

En relación con el segundo objetivo específico:

- *Diseñar y aplicar actividades didácticas para la enseñanza de los números racionales utilizando distintas representaciones.*

Este objetivo se cumplió al diseñar cada una de las actividades de la secuencia didáctica bajo el marco teórico de la IM de Howard Gardner y TRRS de Raymond Duval, las cuales nos permitieron justificar el uso de las estrategias didácticas para orientar al alumno al tránsito entre cada una de ellas aumentando el nivel de dificultad en cada paso, con el fin de reducir las dificultades que presentaron los alumnos con respecto al concepto de número racional, el cual, cabe señalar, es un concepto con el que están familiarizados desde el nivel básico escolar.

En relación con el tercer objetivo específico:

- *Realizar un postest para evaluar el tipo de dificultades de aprendizaje de los números racionales que presentan los alumnos participantes en este estudio posterior a la experiencia de enseñanza basada en distintas representaciones.*

Este objetivo se cumplió y nos permitió hacer un análisis de contraste entre los conocimientos previos versus conocimientos adquiridos de la secuencia didáctica. Durante la fase de experimentación hubo porcentajes de respuestas correctas que aumentaron, disminuyeron o se igualaron entre el pretest y postest. Nos pudimos percatar que los estudiantes presentaron grandes dificultades en álgebra. Si esta situación se corrigiera, los resultados mejorarían notoriamente porque los porcentajes de respuestas correctas más bajos de toda la secuencia didáctica aplicada fueron los ítems dados en lenguaje algebraico. Es decir, los estudiantes no pudieron realizar las transformaciones pertinentes a partir de este lenguaje o no pudieron llegar a él a partir de otros lenguajes.

En relación con el cuarto objetivo específico:

- *Identificar el tipo de dificultades en el aprendizaje de los números racionales que se resolvieron mayormente a partir de la aplicación de actividades de enseñanza basadas en distintas representaciones.*

Este objetivo se cumplió porque pudimos concluir que los estudiantes aun presentan dificultades con respecto a las propiedades de los números racionales, específicamente algunos de ellos siguieron utilizando el modelo lineal aditivo para sumar fracciones entre sí, es decir, numerador más numerador y denominador más denominador. Además, continuaron presentando dificultades con respecto a la identificación del paréntesis como algoritmo de la multiplicación lo que nos lleva a inferir que aún tienen incrustada la simbología de la cruz (x) para realizar multiplicaciones. Es necesario recordar que el tema de números racionales es el primer tema con el que se enfrentan los estudiantes en esta nueva etapa escolar y por tal motivo aun no desincrustan la simbología anterior para operar con multiplicaciones.

Por lo que de manera general y bajo la perspectiva de nuestro objetivo general:

- Implementar estrategias didácticas siguiendo el currículo escolar para la enseñanza de los números racionales fomentando la evocación y transformación de imágenes mentales haciendo uso de distintas representaciones para disminuir las dificultades presentes en los estudiantes de primero de bachillerato.

Podemos concluir que los resultados obtenidos y mostrados anteriormente, nos dan pauta para creer que nuestra propuesta didáctica tiende a disminuir las dificultades que presentan los estudiantes de primero de bachillerato con respecto al concepto de número racional, llevando a cabo no sólo la evocación de imágenes mentales sino también la transformación de ellas aterrizadas en los cuatros registros de representación semiótica.

También inferimos que el diseño de estrategias didácticas con respecto al marco teórico favoreció la transición entre registros de representación.

Se recomienda a la comunidad docente, tomar en cuenta las dificultades presentes en sus estudiantes, identificadas a partir de una evaluación diagnóstica, tomando en cuenta que la inteligencia no es medible de igual forma para todos los estudiantes y por tal motivo entender que no todos ellos aprenden de la manera. Por tal motivo, se sugiere la implementación de distintas representaciones semióticas dentro del aula y con respecto al concepto de numero racional.

Se espera que en futuras investigaciones se pueda replicar la propuesta para observar si existen similitudes en las dificultades y principalmente darnos cuentas si hay una disminución de estas. Además, se espera también la implementación de dos actividades más, una focalizando el lenguaje algebraico ya que fue el lenguaje con el que más dificultades tuvieron los estudiantes y otra actividad en donde se focalice el lenguaje gráfico porque, aunque fue el registro de representación que obtuvo los mayores porcentajes de respuestas correctas, es el lenguaje que NO aparece en las actividades planteadas en el currículo escolar de la Secretaría de Educación Pública (SEP).

Referencias

Andrade-Molina, M., & Cantoral-Uriza, R. (2013). Aspectos socioepistemológicos en el análisis y el rediseño del discurso matemático escolar. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 26*, 1123–1132.

Armstrong, T.(Segunda Edición). (2017). *Inteligencias múltiples en el aula*, *Guía práctica para educadores.* España: PAIDÓS Educación.

Artigue M. (2014) Didactic Engineering in Mathematics Education. In: S. Lerman (eds) Encyclopedia of Mathematics Education. Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_44

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., Gómez, P. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. Bogotá: Grupo editorial Iberoamericano.

Brown, T., LeMay, E., Bursten, B., & Murphy, C. (2009). *Química la ciencia central* (11a ed.). Pearson, Prentice Hall.

Cabañas, M. G. (2004). *Situaciones didácticas en la comprensión del concepto de número racional en alumnos de nivel medio superior*. Reportes de Investigaciones Terminadas, 181-187.

Cervantes, J. A., Ordoñez, J. S., García, M. D. S., & Hernández-Moreno, A. (2017). *Teoría de registros de representaciones semiótica.* Universidad Autónoma de Guerrero, Abril.

DGE, Dirección General de Epidemiología. (2020). [Archivo de video]. https://coronavirus.gob.mx/informacion-accesible/

D´Amore, B. (Primera Edición). (2006). *Didáctica de la Matemática*. Estado de México, México: Neisa.

Duval, R. (Segunda Edición). (2017). *Semiosis y Pensamiento Humano*, *Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales.* Cali, Colombia: Programa Editorial Universidad del Valle.

Fernández, S. (2017). *Estructuras de la mente*, *la teoría de las inteligencias múltiples*, *Howard Gardner.* (Tercera Edición). Ciudad de México, México: P. y P. Sección de Obras de Psicología FCE.

Gardner, H. (2011). La inteligencia reformulada. *Las inteligencias múltiples en el siglo XXI* (G. Sánchez (ed.); Primera Ed). PAIDÓS, Espasa Libros.

Geary, D., Berch, D., Ochsendorf, R., & Mann, K. (2017). *Acquisition of complex arithme- tic skills and higher-order mathematics concepts*. https://books.google.com.mx/books?id=m8LSDQAAQBAJ&printsec=frontcover&hl=es&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false

Godino, J. D., Giacomone, B., Wilhelmi, M. R., Blanco, T. F., y Contreras, Á. (2015). Configuraciones de prácticas, objetos y procesos imbricadas en la visualización espacial y el razonamiento diagramático. *ResearchGate: Departamneto de Didáctica de la Matemática, 1-21.*

González-Forte, J. M., Fernández-Verdú, C., & Llinares, S. (2019). El fenómeno natural number bias: un estudio sobre los razonamientos de los estudiantes en la multiplicación de números racionales. *Quadrante*, *28*(2), 32–52.

Gonzato, M., Fernández Blanco, T., & Diaz Godino, J. (2011). Tareas para el desarrollo de habilidades de visualización y orientación espacial. *Números: Revista de Didáctica de Las Matemáticas*, *77*, 99–117.

Manuel, M. (2014). *Uso de las inteligencias múltiples en clases de matemáticas*. Universidad de La Rioja.

Marsden, J. E., Hoffman, M. J., Palmas, Ó. A., & Cuesta, J. A. Segunda Edición. (1993). *Análisis Clásiso Elemental.* Nueva York. Estados Unidos de América: S. A. Addison-Wesley Iberoamericana.

Masip, V. (2020). *Espanhol EAD.* Semiosispragmatica Semiótica, Filosofía y Comunicación. https://www.youtube.com/watch?v=BS_Cl1bHCQ&list=PLlsfx6fSleqgJXKNwjnhvVpKs2L4Lcr6z

Math Trailblazers. (n.d.). Unit 2: Fractions.

http://mtb4dev.kendallhunt.com/grade5/unit02/lesson8/unitcontent2.jsp

McMullen, J., Van Hoof, J., Degrande, T., Verschaffel, L., & Van Dooren, W. (2018). Profiles of rational number knowledge in Finnish and Flemish students – A multigroup latent class analysis. *Learning and Individual Differences*, *66*, 70–77. https://doi.org/10.1016/j.lindif.2018.02.005

Milenio. (2020). *¿Cuál es la diferencia entre letalidad y mortalidad por covid-19?* [Archivo de video]. Youtube. https://youtu.be/ZwxBdLZUI7I

Montoya, J. (2014). *Relación entre creatividad e inteligencias múltiples con competencias matemáticas en estudiantes de bachillerato* [Universidad Internacional de La Rioja].

Obando, G. (2003). La enseñanza de los números racionales a partir de la relación parte-todo. *Revista EMA*, *8*(2), 157–182.

Oviedo, L. M., Kanashiro, A. M., Bnzaquen, M., & Gorrochategui, M. (2012). Los registros semióticos de representación en matemática. *Aula Universitaria*, 13, 29–36. https://doi.org/10.14409/au.v1i13.4112

Pérez, M. (2020). La transición del lenguaje numérico al algebraico en secundaria. Una Propuesta Didáctica [Tesis de Maestría, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla]. Repositorio Institucional-Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.

Rimbatmojo, S., Kusmayadi, T. A., & Riyadi, R. (2017). Metacognition difficulty of students with visual-spatial intelligence during solving open-ended problem. *Journal of Physics: Conference Series*, *895*(1). https://doi.org/10.1088/1742-6596/895/1/012034

Sáenz, E. Derivando. (2020). *Matemáticas contra la COVID-19* [Archivo de video]. Youtube. https://www.youtube.com/watch?v=UMyTxT4BLOw&list=LLcViCFiVyp19rCtTz_hfvTA&index=4&t=1s

Van Dooren, W., Lehtinen, E., & Verschaffel, L. (2015). Unraveling the gap between natural and rational numbers. *Learning and Instruction*, *37*, 1–4. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2015.01.001

Anexo 1

ACTIVIDADES 1/5

Conocimientos previos/Conocimientos Adquiridos

Objetivo: Resolver operaciones con números racionales.

Instrucciones: Cada una de las preguntas deben ser resueltas con procedimientos o explicaciones completas, según sea el caso.

1. Marca con una (✓) el número que sea racional y con una (X) el que no sea de la siguiente serie de números.

treinta doceavos	4^2		0.333 ...	(x)(1)	$6\frac{1}{7}$

2. Resuelve las siguientes operaciones y selecciona la respuesta correcta.

$a)\ \frac{2}{3}+\frac{7}{3}=$	*3*	$d)\ \frac{13}{4}\ \div -\frac{5}{4}=$	*2*
	14/9		*-65/16*
	2/7		*-13/5*
	9/6		*1*
$b)\ -\frac{1}{8}+\frac{4}{5}=$	*27/40*	e) $\frac{6}{2}\ \div\ \frac{2}{5}=$	*17/5*
	-1/10		*6/5*
	-5/32		*15/2*
	3/13		*8/7*
$c)(\frac{6}{9})\ (-\frac{2}{11})=$	*16/33*	f) $(\frac{1}{7})\ (\frac{5}{7})=$	*6/7*
	-4/33		*5/49*
	-11/3		*1/5*
	4/20		*6/14*

3. Realiza la conversión de las siguientes seis fracciones. Tres de fracciones mixtas a fracciones impropias y viceversa. Posteriormente selecciona la respuesta correcta y subráyala.

1) $3\frac{1}{2}$	2) $1\frac{11}{7}$	3) $8\frac{9}{5}$	4) $\frac{5}{4}$	5) $\frac{19}{6}$	6) $\frac{8}{3}$
a) 4/2	a) 18/7	a) 49/5	a) $1\frac{5}{4}$	a) $1\frac{9}{6}$	a) $2\frac{2}{3}$
b) 7/2	b) 12/7	b) 13/5	b) $4\frac{1}{5}$	b) $6\frac{1}{9}$	b) $3\frac{1}{8}$
c) 5/2	c) 8/7	c) 17/5	c) $1\frac{1}{4}$	c) $3\frac{1}{6}$	c) $1\frac{8}{3}$

4. Responde verdadero o falso según corresponda en cada una de las siguientes expresiones.

Expresión	**Verdadero o Falso**	**Expresión**	**Verdadero o Falso**
a) $\frac{4}{7}+\frac{5}{9}=\frac{28+45}{63}=\frac{73}{63}$		d) $(\frac{11}{9})(\frac{9}{11})=9$	
b) $\frac{3}{5}+\frac{10}{4}=\frac{10}{4}+\frac{3}{5}$		En este inciso, responde considerando si la expresión es igual a las dos opciones señaladas con el punto. e) $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}+\frac{1}{6}=$ • $(\frac{2}{3}+\frac{4}{5})+\frac{1}{6}$ • $\frac{2}{3}+(\frac{4}{5}+\frac{1}{6})$	
c) $(\frac{9}{4})(\frac{2}{7})=\frac{18}{28}$		f) $\frac{3}{2}+\left(-\frac{3}{2}\right)=0$	

5. Resuelve los siguientes problemas.

a) Jorge trabaja en un taller de carpintería todas las tardes después del colegio para apoyar con el gasto familiar. Él talla cinco colibríes a la semana trabajando de lunes a viernes. En los dos primeros días ha tallado 5/2 y en el tercer día 3/6 del total. ¿Cuántos colibríes debe tallar Jorge en el tiempo restante para cubrir con la cuota semanal?

b) Para el cumpleaños de María, su mamá decidió hornear un pastel para cuarenta comensales, de los cuales sólo comieron diez. ¿Qué fracción del pastel no fue repartida?

Reflexiones

En plenaria, se intercambian conclusiones sobre la experiencia.

Anexo 2

ACTIVIDAD 2

Simplificación de Fracciones
y
Fracciones Equivalentes

Objetivo: Relacionar dos fracciones entre sí, mediante multiplicaciones o divisiones para la obtención de múltiplos y submúltiplos.

Instrucciones: La actividad, que consiste en un juego, se divide en dos etapas. La primera etapa tiene cinco rondas, las cuales consisten en relacionar dos fracciones entre sí dentro de un conjunto de cartas con distintas representaciones (lenguaje natural, numérico, gráfico y alfanumérico). Además, se requiere del uso de la figura que contiene multiplicaciones y divisiones de distintas fracciones con numeradores y denominadores iguales.

La actividad comienza cuando el primer jugador selecciona alguna carta de la primera ronda y con ayuda de alguna fracción que se encuentre dentro de la figura, el jugador, operará esa carta con la seleccionada inicialmente. La operación se multiplica o divide (según sea el caso) numerador por numerador y denominador por denominador. El resultado obtenido de esa operación debe estar contenido dentro del conjunto de cartas de esa primera ronda. El procedimiento se repite en cada una de las rondas restantes.

Observación:

- Las cartas que indican una división, NO se refieren al procedimiento de división de fracciones.
- <u>Cada jugador debe argumentar el procedimiento que utilizó para calcular la respuesta.</u>

$x\ \frac{2}{2}$	$x\ \frac{3}{3}$	$x\ \frac{4}{4}$	$x\ \frac{5}{5}$	$x\ \frac{6}{6}$	$x\ \frac{7}{7}$	$x\ \frac{8}{8}$	$x\ \frac{9}{9}$
$\div\ \frac{2}{2}$	$\div\ \frac{3}{3}$	$\div\ \frac{4}{4}$	$\div\ \frac{5}{5}$	$\div\ \frac{6}{6}$	$\div\ \frac{7}{7}$	$\div\ \frac{8}{8}$	$\div\ \frac{9}{9}$

Se muestra un ejemplo antes de comenzar el juego.

Ejemplo

“En esta ronda, las cartas son las siguientes. ¿Cuáles relacionarías y por qué?”

$\boxed{\frac{45}{105}}$ $\boxed{\frac{12}{16}}$ $\boxed{\frac{21}{7}}$ $\boxed{\frac{3}{4}}$ $\boxed{\frac{147}{49}}$ $\boxed{\frac{3}{7}}$

La carta igual a $\frac{12}{16}$ se relaciona con la carta igual a $\frac{3}{4}$ porque a partir de la operación "$\div \frac{4}{4}$" mostrada en la tabla anterior se divide numerador entre numerador y denominador entre denominador, es decir, 12 entre 4 y 16 entre 4. Sin embargo, se pueden relacionar estas dos fracciones de manera contraria, es decir, la carta igual a $\frac{3}{4}$ se relaciona con la carta igual a $\frac{12}{16}$ porque a partir de la operación "$x\ \frac{4}{4}$" se multiplica numerador por numerador y denominador por denominador.

Por otro lado, la carta igual a $\frac{21}{7}$ se relaciona con la carta igual a $\frac{147}{49}$ porque a partir de la operación "$x \frac{7}{7}$", se multiplica numerador por numerador y denominador por denominador. Esa misma relación se puede obtener de manera contraria, porque la carta igual a $\frac{147}{49}$ se divide por la carta "$\div \frac{7}{7}$" y da como resultado $\frac{21}{7}$.

También puede existir el caso en el que se necesita la aplicación de dos o más cartas propuestas de la tabla para generar una sola relación entre cartas de una misma ronda, por ejemplo, la carta igual a $\frac{45}{105}$ se relaciona con la carta igual a $\frac{3}{7}$ porque a partir de la operación "$\div \frac{5}{5}$", se obtiene la fracción igual a $\frac{9}{21}$ y, aun así, puede generar otra relación mediante la carta igual a "$\div \frac{3}{3}$". Finalmente, esa misma relación se puede obtener de manera contraria porque la carta igual a $\frac{3}{7}$ se puede multiplicar por la carta "$x \frac{3}{3}$" y posteriormente, multiplicar por la carta "$x \frac{5}{5}$", teniendo como resultado $\frac{45}{105}$.

$$\frac{12}{16} \div \frac{4}{4} = \frac{3}{4} \qquad \frac{3}{4}\ x\ \frac{4}{4} = \frac{12}{16} \qquad \frac{21}{7}\ x\ \frac{7}{7} = \frac{147}{49} \qquad \frac{147}{49} \div \frac{7}{7} = \frac{21}{7}$$

$$\frac{45}{105} \div \frac{5}{5} = \frac{9}{21} \div \frac{3}{3} = \frac{3}{7} \qquad \frac{3}{7}\ x\ \frac{3}{3} = \frac{9}{21}\ x\ \frac{5}{5} = \frac{45}{105}$$

¡Que comience el juego!: Primera Etapa

Primera Ronda

En esta ronda, las cartas son las siguientes. ¿Cuáles relacionarías? Justifica tu respuesta.

$\frac{12}{54}$	$\frac{8}{24}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{9}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{2}$

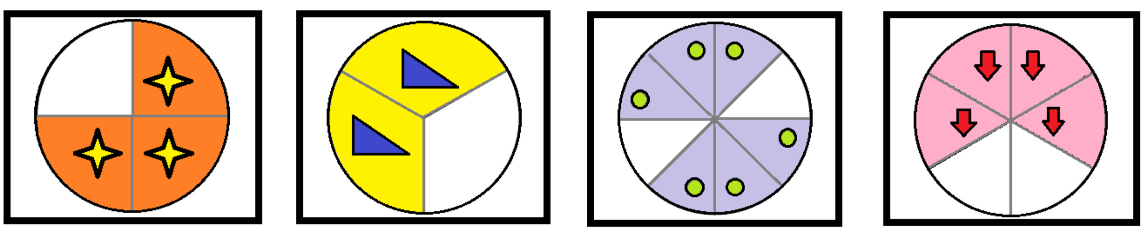
Segunda Ronda

En esta ronda, las cartas son las siguientes. ¿Cuáles relacionarías? Justifica tu respuesta.

un medio	un octavo	cuatro octavos	tres quintos	seis décimos	dos dieciseisavos

Tercera Ronda

En esta ronda, las cartas son las siguientes. ¿Cuáles relacionarías? Justifica tu respuesta.



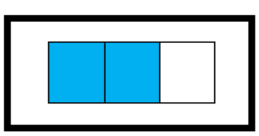
Cuarta Ronda

En esta ronda, las cartas son las siguientes. ¿Cuáles relacionarías? Justifica tu respuesta.

$x = \frac{6}{2}$	$3x = \frac{1}{2}$	$4x = 12$	$x = \frac{6}{4}$	$x = \frac{2}{12}$	$2x = 3$

Quinta Ronda

En esta ronda, las cartas son las siguientes. ¿Cuáles relacionarías? Justifica tu respuesta.

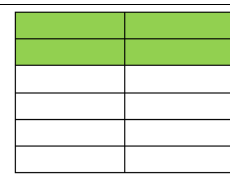
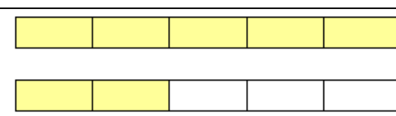


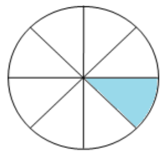
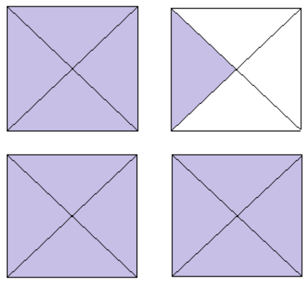
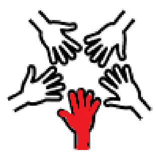
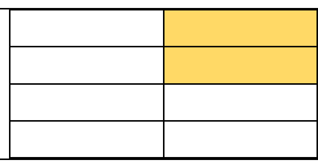
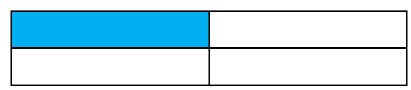
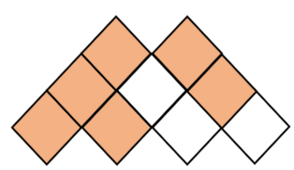
$6x = 4$	un séptimo	$\frac{3}{21}$

A las fracciones que relacionaste ente sí mediante distintas operaciones se les llama ***fracciones equivalentes***, es decir, son fracciones que representan la misma cantidad, aunque el numerador y denominador sean diferentes. El proceso que realizaste en cada una de las rondas para encontrar la relación entre un par de fracciones a través de la operación de *división*, con fracciones de iguales numeradores y denominadores, se le denomina ***simplificación.***

¡Que comience el juego!: Segunda Etapa

Indicaciones: En la columna llamada: ES EQUIVALENTE escribe (SI) si consideras que las fracciones son equivalentes, o (NO) si consideras que no lo son. Observa los dos primeros ejemplos.

	¿Esta expresión…	**ES EQUIVALENTE**	**…a esta?**
1	Un medio	NO	Tres octavos
2	Dos quintos	SÍ	$\frac{10}{25}$
3	Un tercio		
4	Once novenos		$x = \frac{9}{11}$
5	$3a + 2 = a - 7$		$a = -\frac{18}{4}$
6	$y = \frac{18}{15}$		
7	$4w = 1$		$\frac{2}{16}$
8	$3x + 7 + x = x - 4$		Menos treinta y tres novenos

9			$\frac{1}{9}$
10			$24m = 24$
11			Seis treintavos
12			
13	$\frac{5}{7}$		$\frac{7}{5}$
14	$\frac{15}{2}$		treinta y dos cuartos
15	$\frac{24}{6}$		2f + 5 = 4f – 7
16	$\frac{2}{3}$		

En esta actividad mostramos los tipos de representación de las fracciones, por ejemplo: en forma verbal, gráfica, alfanumérica (con números y letras) y numérica. Cabe señalar, que ustedes pueden realizar transformaciones entre distintas representaciones, como lo acaban de hacer.

Anexo 3

ACTIVIDAD 3

Propiedades de los Números Racionales

Objetivo: Aplicar las propiedades de números racionales para resolver operaciones, a partir de distintas representaciones.

Instrucciones: Se le proporciona a cada estudiante un conjunto de cartas previamente enviadas, que conforman al juego: “Yo tengo - ¿Quién tiene?”. Las cartas no presentan orden alguno y todos los alumnos cuentan con la misma cantidad. Cada tarjeta está dividida en dos partes. La parte superior menciona la frase: “Yo tengo” y la parte inferior: “¿Quién tiene?”, ambas partes están acompañadas de un número racional mostrado en cualquier tipo de representación (lenguaje natural, gráfico, alfanumérico o numérico). El juego puede iniciar con cualquier carta. El juego comienza cuando el primer jugador realiza la afirmación que se encuentra en la parte superior de la carta: “Yo tengo” junto con el número racional propuesto. Posteriormente el mismo jugador, realiza la pregunta que se encuentra en la parte inferior de la carta: “¿Quién tiene?” junto con el resultado de las operaciones o equivalencias propuestas. La continuidad del juego se genera cuando el segundo jugador responde a la pregunta del primer jugador con: “Yo tengo” y el procedimiento se repite con cada una de las cartas, generando una continuidad entre ellas. El juego termina hasta que aparece la carta: ¡Yo tengo 0!

Observaciones:

- Todos los resultados deberán ser calculados hasta su fracción irreducible. En el caso de encontrase una fracción reducible en la actividad, debe ser simplificada antes de operarse.
- En las cartas donde aparezcan imágenes, se debe tomar en cuenta el área coloreada.
- Cualquier jugador puede responder a cada pregunta, no hay un orden en turnos para los jugadores. En el caso, que un jugador no conozca la respuesta, entonces otro jugador deberá responderla. Sin embargo, cada carta la debe responder un jugador diferente.
- No todas las cartas se utilizan en el juego*.
- <u>Cada jugador debe argumentar el procedimiento que utilizó para calcular la respuesta.</u>

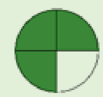
¡Qué comience el juego!

Yo tengo

¿Quién tiene esa cantidad más $(\frac{1}{3} + \frac{1}{2})$?

Yo tengo
$30x = 28$

¿Quién tiene esa cantidad por



?

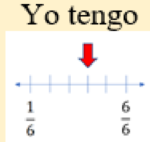
Yo tengo
siete décimos

¿Quién tiene esa cantidad por $(\frac{1}{3} * \frac{4}{2})$?

Yo tengo
$\frac{7}{15}$

¿Quién tiene esa cantidad más tres quinceavos ?

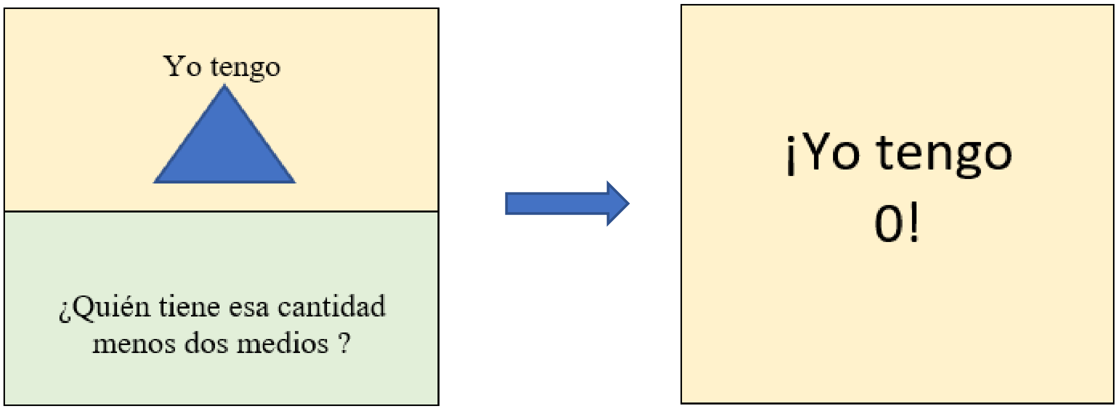
Yo tengo



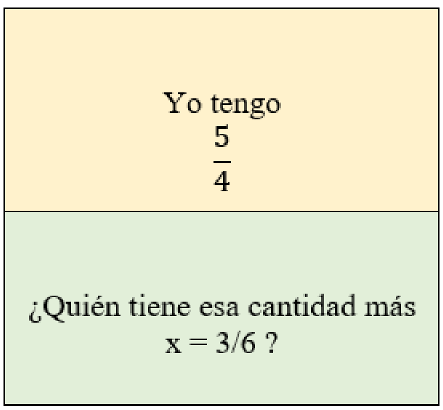
¿Quién tiene esa cantidad por $(\frac{1}{7} + 2\frac{1}{4})$?

Yo tengo
sesenta y siete cuarenta y dozavos

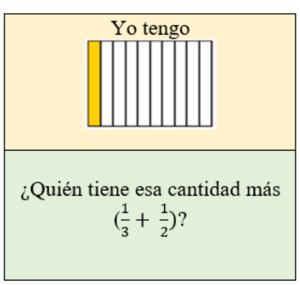
¿Quién tiene esa cantidad por $(\frac{42}{67})$?

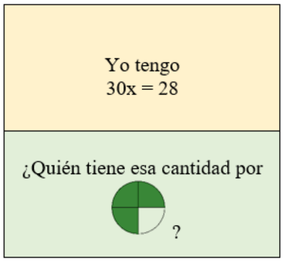
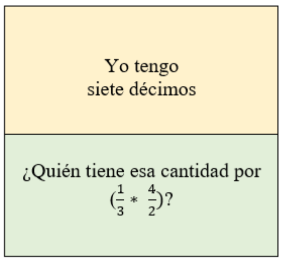
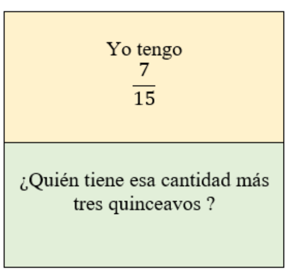


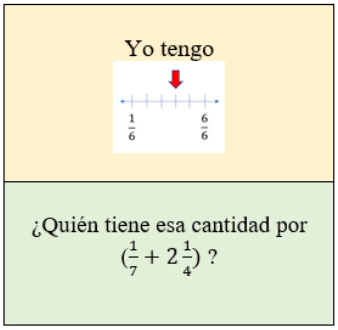
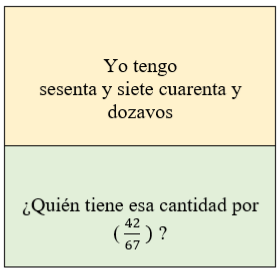
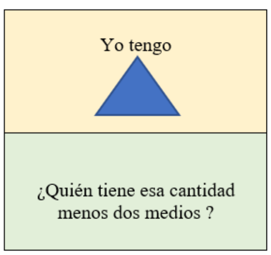
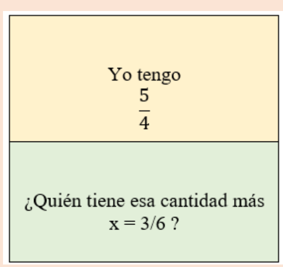
*Las siguientes dos cartas, sólo aumentan al juego, complejidad, es decir, *<u>NO se utilizan</u>*.



El juego previamente efectuado, requirió la aplicación de las propiedades de números racionales para poder ser jugado. El uso de las propiedades se realizó de la siguiente manera:

Carta	Propiedad	Argumentación
	Asociativa para la suma	$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\begin{cases}=\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\frac{e}{f}\\=\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)\end{cases}$ Esta propiedad agrupa dos fracciones y el resultado de la suma entre ellas, es sumado a la tercera. Hay dos formas de hacerlo. $\frac{1}{10}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\begin{cases}=\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\\=\frac{1}{10}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)\end{cases}$

Carta	Propiedad	Argumentación
	Definición de producto en los números racionales	$\frac{a}{b}*\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$ Esta propiedad multiplica numeradores entre sí y denominadores entre sí. $\frac{14}{15}*\frac{3}{4}=\frac{42}{60}$ *Nota: En la actividad, el resultado fue simplificado a 7/10
	Asociativa para la multiplicación	$\frac{a}{b}*\frac{c}{d}*\frac{e}{f}\begin{cases}=\left(\frac{a}{b}*\frac{c}{d}\right)*\frac{e}{f}\\ =\frac{a}{b}*\left(\frac{c}{d}*\frac{e}{f}\right)\end{cases}$ Esta propiedad agrupa dos fracciones y el resultado de la multiplicación entre ellas, se multiplica con la tercera. Hay dos formas de hacerlo. $\frac{7}{10}*\frac{1}{3}*\frac{4}{2}\begin{cases}=\left(\frac{7}{10}*\frac{1}{3}\right)*\frac{4}{2}\\ =\frac{7}{10}*\left(\frac{1}{3}*\frac{4}{2}\right)\end{cases}$ *Nota: En la actividad, la fracción 4/2 fue simplificada a 2 antes de operarse.
	Definición de suma para números racionales	$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$ Esta propiedad multiplica denominadores entre sí. Además, realiza productos cruzados para obtener los numeradores, es decir, multiplica el numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda fracción y multiplica el denominador de la primera fracción por el numerador de la segunda fracción. $\frac{7}{15}+\frac{3}{15}=\frac{105+45}{225}=\frac{150}{225}=\frac{30}{45}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$ Por otro lado, al contar con <u>fracciones que tienen el mismo denominador,</u> se suman los numeradores entre sí y se reescribe el mismo denominador. $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}\rightarrow\frac{7}{15}+\frac{3}{15}=\frac{7+3}{15}=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$ Con esto se observa que puedes obtener el mismo resultado por cualquiera de los dos procedimientos.

<table>
<tr><th>Carta</th><th>Propiedad</th><th>Argumentación</th></tr>
<tr><td>
</td><td>Distributiva</td><td>$$\frac{a}{b} * \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \frac{ac}{bd} + \frac{ae}{bf}$$
Esta propiedad multiplica la primera fracción tanto por la segunda como por la tercera y el resultado de ambas, es sumado entre sí.
$$\frac{2}{3} * \left(\frac{1}{7} + \frac{9}{4}\right) = \frac{2 * 1}{3 * 7} + \frac{2 * 9}{3 * 4}$$
*Nota: En la actividad, en la recta numérica la fracción 4/6 fue simplificada a 2/3 antes de operarse.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Inverso multiplicativo</td><td>$$\frac{a}{b} * \frac{b}{a} = \frac{ab}{ba} = 1$$
Con esta propiedad, se multiplican numeradores y denominadores entre sí. La fracción resultante se simplifica y el resultado genera la unidad, es decir, el número uno.
$$\frac{67}{42} * \frac{42}{67} = \frac{67 * 42}{42 * 67} = 1$$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Inverso aditivo</td><td>$$\frac{a}{b} + \left(-\frac{a}{b}\right) = 0$$
Esta propiedad suma fracciones con igual numerador y denominador, pero con signos contrarios. El resultado producido es igual a cero.
$$\frac{2}{2} + \left(-\frac{2}{2}\right) = 0$$
*Nota: En la actividad, El entero se convirtió a 2/2. Además, esta fracción, así como -2/2 pudieron simplificarse a 1 antes de operarse.</td></tr>
<tr><td>

(No se utilizan en el juego)*</td><td>Definición de suma para números racionales</td><td>$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$
Esta propiedad multiplica denominadores entre sí. Posteriormente se multiplica el numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda y a su vez, se multiplica el denominador de la primera fracción por el numerador de la segunda. Cada uno de los resultados es sumado entre sí.
$$\frac{5}{4} + \frac{3}{6} = \frac{(5 * 6) + (4 * 3)}{24}$$
*Nota: En la actividad, la fracción 3/6 fue simplificada a 1/2.</td></tr>
</table>

Carta	Propiedad	Argumentación
 (No se utilizan en el juego)*	Definición de producto en los números racionales	$\frac{a}{b} * \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ Esta propiedad multiplica numeradores entre sí y denominadores entre sí. $\frac{1}{7} * \frac{2}{4} = \frac{2}{28}$ *Nota: En la actividad, la fracción 2/4, así como el resultado de 2/28, pudieron simplificarse.

También existen otras propiedades como:

Propiedades de números racionales	**Suma Simbólicamente (b, d f ≠ 0)**	**Ejemplo**	**Multiplicación Simbólicamente (b, d f ≠ 0)**	**Ejemplo**
Conmutativa	$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$	$\frac{5}{3} + \frac{2}{8} = \frac{2}{8} + \frac{5}{3}$	$\frac{a}{b} * \frac{c}{d} = \frac{c}{d} * \frac{a}{b}$	$\frac{1}{3} * \frac{7}{5} = \frac{7}{5} * \frac{1}{3}$
Elemento neutro	$\frac{a}{b} + 0 = \frac{a}{b}$	$\frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$	$\frac{a}{b} * 1 = \frac{a}{b}$	$\frac{3}{4} * 1 = \frac{3}{4}$

En plenaria contesta lo que se pide:

❖ ¿Estás propiedades se pudieron incluir en el juego de las cartas? ¿Por qué?

Posible respuesta:

Sí se pudieron anexar. En el juego se habrían realizado pasos intermedios sin modificar la secuencia del juego. Tendrían la función de un comodín, el cual consiste en representar la misma cantidad sin alterar la secuencia del juego.

Anexo 4

Actividad 3

Lista de Cotejo

Categoría	Criterios de Evaluación	Incorrecto (0)	Correcto (1)
Comprensión Correcta de los Conceptos Matemáticos	1.- Definición correcta de fracción	La fracción se piensa como dos números naturales separados por una "rayita" (vínculo).	Comprenden que un número racional puede expresarse en la forma: $x = m/n$, donde m y n son enteros y $n \neq 0$
	2. Definición correcta de fracción impropia	El estudiante se pregunta: ¿Cómo poder tomar una cantidad de partes que sea mayor de las que se obtuvieron al dividir la unidad?	Las fracciones impropias expresan a un número mayor que la unidad.
	3.- Identificación de números racionales	Dificultad para identificar las diferentes formas de expresión de los números racionales.	Identificación de fracciones comunes y mixtas, fraccionarios decimales finitos y periódicos, decimales infinitos y números enteros
	4. Identificación de relación de orden	Dificultad en identificar los números racionales de manera ordenada en el segmento de recta numérica	Identificación entre distintos números fraccionarios y representarlos en el segmento de recta numérica de manera ordenada.
Dominio de propiedades	1. Adición de fracciones	Sumar numeradores y denominadores entre sí	Sumar fracciones utilizando las propiedades
	2. Aplicación correcta de las propiedades de la multiplicación, así como la ley de los signos y potenciación	No aplica correctamente las propiedades de la multiplicación, así como la ley de los signos y potenciación, en problemas y operaciones aritméticas.	Aplicación de manera correcta de las propiedades de la multiplicación, así como la ley de los signos y potenciación, en operaciones aritméticas y problemas
	3. Diferenciar los números racionales con respecto a números naturales.	Aplicar de manera inapropiada las propiedades de los números naturales a las tareas de números racionales.	Analiza a la fracción como una relación cuantitativa entre la parte y el todo

Comprensión por múltiples representaciones	1. Comprensión en la congruencia geométrica	Dificultad en identificar en modelos las partes de un todo (gráficos, pictográficos, geométricos).	Acepta la congruencia en las partes para garantizar su igualdad.
Lenguaje matemático	1. Uso del paréntesis como algoritmo de la multiplicación.	No se asocia al paréntesis con el algoritmo de la multiplicación	Identificación del paréntesis como algoritmo de la multiplicación.
	2.Traducción del lenguaje matemático al común	No se comunica el significado preciso de los símbolos involucrados en las situaciones planteadas.	Realiza correctamente la transformación entre las distintas representaciones semióticas.

Anexo 5

ACTIVIDAD 4

Situación en contexto

Objetivo: Considerar números racionales para analizar y cuestionar críticamente diversos fenómenos.
Instrucciones: A partir de la situación en contexto presentada, realiza lo que se pide.

SANA DISTANCIA

Dionicio, el papá de una estudiante de bachillerato tiene diabetes e hipertensión. Además, es un reconocido matemático que analiza la probabilidad y estadística de diferentes eventos. Él, leía con detenimiento la siguiente noticia: "El SARS-Cov-2 es un virus que apareció en China y después se extendió a todos los continentes del mundo provocando una pandemia". Consternado por la covid-19, (enfermedad originada en el año 2019 y producida a causa de este virus) le explica a su hija la importancia de contar con una sana distancia. Además, le muestra algunas estadísticas obtenidas el 25 febrero del 2021, sobre las consecuencias que ha dejado esta enfermedad. De acuerdo con la Dirección General de Epidemiología (DGE, 2021) hay 2,060,908 casos confirmados y 182, 815 defunciones, producto de distintas enfermedades como:
Hipertensión (45.32%), Diabetes (37.54%), Obesidad (22.22%) y Tabaquismo (7.63%).

Por tal motivo, quiere concientizar a Perla, su hija, sobre las consecuencias de esta enfermedad, realizando una tabla que muestra el incremento de las actividades que tendría que realizar diariamente si alguien en su hogar enfermara.

Actividad	*Actividades realizadas por Perla*	*Actividades Si alguien en mi hogar enfermara*
1. Limpiar recámara	✓	✓
2. Alimentar mascotas	✓	✓
3. Sacar la basura	✓	✓
4. Cocinar para todos en el hogar	---	✓
5. Limpiar toda la casa	---	---
6. Lavar los trastes	---	✓
7. Comprar la despensa en el Supermercado/Mercado	---	---
Total	3	5

Nota: <u>Dionicio, el padre de Perla no registró todas las actividades realizadas diariamente en el hogar. Además, no sólo ella las realizará.</u>

1. En plenaria, contesta lo que se pide:
❖ ¿Tienes algún familiar que presente alguna de estas enfermedades?
2. Realiza lo que se pide:
❖ Calcula numéricamente las actividades realizadas diariamente en el hogar.
❖ Realiza dos tablas, en la cual se debe representar el número de respuestas, las variables acumuladas, los porcentajes de cada respuesta, etc. El docente facilitará dichas tablas.
❖ Realiza dos gráficas de barras, una por cada tabla.
3. En plenaria, reflexiona sobre los resultados y finalmente responde con base en las gráficas:
❖ ¿Tú vida adquiriría más responsabilidades si alguien en el hogar enfermara por covid-19?

Se adjuntan las tablas.

Número de actividades realizadas diariamente en el hogar	*Número de respuestas*	*Número de respuestas que pertenecen al total*	*Acumulado del número de respuestas del total*	*Parte decimal del entero de datos*	*Acumulado de la parte decimal del entero de datos*	*Porcentaje del número de respuestas*	*Acumulado del porcentaje del número de respuestas*
De 1 a 5							
De 6 a 10							
De 11 a 15							
De 16 a 20							

Número de actividades Realizadas diariamente en el hogar MÁS las actividades añadidas	*Número de respuestas*	*Número de respuestas que pertenecen al total*	*Acumulado del número de respuestas del total*	*Parte decimal del entero de datos*	*Acumulado de la parte decimal del entero de datos*	*Porcentaje del número de respuestas*	*Acumulado del porcentaje del número de respuestas*
De 1 a 5							
De 6 a 10							
De 11 a 15							
De 16 a 20							

Anexo 6

Actividad 4

Lista de Cotejo

Categoría	Criterios de Evaluación	Incorrecto (0)	Correcto (1)
Comprensión Correcta de los Conceptos Matemáticos	1.- Identificación de números racionales	Dificultad para identificar las diferentes formas de expresión de los números racionales.	Identificación de fracciones comunes y mixtas, fraccionarios decimales finitos y periódicos, decimales infinitos y números enteros
Dominio de propiedades	1. Adición de fracciones	Sumar numeradores y denominadores entre sí	Sumar fracciones utilizando las propiedades
	2. Aplicación correcta de las propiedades de la multiplicación, así como la ley de los signos y potenciación	No aplica correctamente las propiedades de la multiplicación, así como la ley de los signos y potenciación, en problemas y operaciones aritméticas.	Aplicación de manera correcta de las propiedades de la multiplicación, así como la ley de los signos y potenciación, en operaciones aritméticas y problemas
	3. Diferenciar los números racionales con respecto a números naturales.	Aplicar de manera inapropiada las propiedades de los números naturales a las tareas de números racionales.	Analiza a la fracción como una relación cuantitativa entre la parte y el todo
Lenguaje matemático	1.Traducción del lenguaje matemático al común	No se comunica el significado preciso de los símbolos involucrados en las situaciones planteadas.	Realiza correctamente la transformación entre las distintas representaciones semióticas.

Anexo 7

FORMATO DE VALIDACIÓN

I. DATOS GENERALES

1.1 Nombre completo del experto: ____

1.2 Cargo e institución donde labora: ____

1.3 Especialidad del Experto: ____

1.4 Tiempo de Experiencia laboral: ____

1.5 Nombre del Instrumento Motivo de la Evaluación: _________________________________

1.6 Autor del instrumento: __Dafne Aguilar Terrones________________________________

II. ASPECTOS DE VALIDACIÓN

Indicadores	**Criterios**	**Deficiente 0-20%**	**Regular 21-40%**	**Bueno 41-60%**	**Muy Bueno 61-80%**	**Excelente 81-100%**
1.Claridad	Está formulado con lenguaje apropiado					
2.Objetividad	Está expresado en conductas observables					
3.Actualidad	Es acorde a los aportes recientes en la disciplina de estudio					
4.Organización	Hay una organización lógica					
5.Suficiencia	Comprende los aspectos de cantidad y calidad					
6.Intencionalidad	Adecuado para valorar aspectos del sistema de evaluación y desarrollo de capacidades cognoscitivas					
7.Consistencia	Está basado en aspectos teóricos y científicos de la Educación					
8.Coherencia	Entre el objetivo, instrucciones, redacción y la actividad propuesta					
9.Metodología	Las estrategias corresponden al objetivo de cada actividad.					

III. OPINIÓN DE APLICABILIDAD:

____

IV. PROMEDIO DE VALORACIÓN: $\boxed{}$

Puebla, _____ de ______ 2021

____

Nombre y Firma