BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE LÍMITE DE UNA FUNCIÓN REAL EN DIFERENTES ETAPAS ACADÉMICAS DE NIVEL SUPERIOR

TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE
MAESTRA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

PRESENTA
LIC. AMÉRICA GUADALUPE ANALCO PANOHAYA

DIRECTOR DE TESIS
DRA. LIDIA AURORA HERNÁNDEZ REBOLLAR

CO-DIRECTOR DE TESIS
DRA. HONORINA RUIZ ESTRADA

PUEBLA, PUE. FEBRERO 2022

DR. SEVERINO MUÑOZ AGUIRRE
SECRETARIO DE INVESTIGACIÓN Y
ESTUDIOS DE POSGRADO, FCFM-BUAP
P R E S E N T E:

Por este medio le informo que la C:

LIC. AMÉRICA GUADALUPE ANALCO PANOHAYA

Estudiante de la Maestría en Educación Matemática, ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 02 de diciembre de 2021, con la tesis titulada:

"COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE LÍMITE DE UNA FUNCIÓN REAL EN DIFERENTES ETAPAS ACADÉMICAS DE NIVEL SUPERIOR"

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

A T E N T A M E N T E.
H. Puebla de Z. a 22 de febrero de 2022

DRA. LIDIA AURORA HERNÁNDEZ REBOLLAR
COORDINADORA DE LA MAESTRÍA
EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA.

DRA´LAHR/l´agm*

Facultad
de Ciencias
Físico Matemáticas

Av. San Claudio y 18 Sur, edif. FM1
Ciudad Universitaria, Col. San
Manuel, Puebla, Pue. C.P. 72570
01 (222) 229 55 00 Ext. 7550 y 7552

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT)
por brindarme el apoyo económico para realizar mis estudios de maestría.
Becario Nº de CVU:1028791

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecerle a Dios por su infinito amor, por fortalecerme cada día y darme siempre una oportunidad de comenzar de nuevo.“Y mirándolos Jesús, les dijo: Para los hombres esto es imposible; más para Dios todo es posible” (Mt 19:26 Nueva Traducción Viviente).

A mis padres Arnulfo Analco Huitlotl y Juana Panohaya Cholula quiero darles las gracias por cuídarme, llenarme de amor y cariño, me siento tan orgullosa, dichosa e inmensamente feliz de ser su hija, son los mejores ¡los amo!

También les doy gracias a mis hermanas Carolina y Gina y a mi hermano Gustavo porque siempre me han cuidado, dado mucho amor, me han consentido, apoyado, guiado, dado consejos, me han enseñado con mucho cariño son muy buenos hermanos, los amo mucho hermanitos.

Julio quiero darte las gracias por todo el cariño y apoyo que me das, por cuidarme y enseñarme, por tus risas, tus abachos ¡gracias amorcito!

A mis compañeros de la maestría les quiero dar las gracias por su apoyo, cariño y enseñanzas. En especial a Vero, Cesi, Dani, David y Juanito, gracias por todo.

Le agradezco a Aby todo su apoyo, cariño y súper eficiencia, gracias :3

A mi asesora, Dra. Lidia Aurora Hernández Rebollar, le agradezco la oportunidad de poder trabajar con usted. Estoy muy agradecida porque a pesar de que muchísimas veces metí la patita, siempre me corrigió con cariño y buen humor. Le agradezco sus consejos, enseñanzas, apoyo, cariño, correcciones, comprensión, gracias por motivarme cuando me hacía falta, por sus palabras de aliento, ¡mil gracias!

A la Dra. Honorina, le agradezco sus consejos, palabras de aliento, enseñanzas, tiempo y apoyo, muchísimas gracias.

Quiero agradecerles a mis sinodales la Dra. Estela Juárez Ruíz, Dra. Honorina Ruíz Estrada, Dra. María Trigueros Gaisman y el Dr. José Martín Estrada Analco por tomarse el tiempo para revisar mi tesis, sus consejos, aportaciones, su amabilidad ¡gracias!

A mis profesores de la maestría les quiero agradecer primero que nada el hecho de que se adaptaron tan rápido y bien a esta nueva modalidad de enseñanza. Dra. Estela gracias por la manera tan cálida y apasionada de dar clases. Dra. Araceli, gracias por mostrarme otros puntos de vista, a ser objetiva, más clara y precisa. Dra. Lidia gracias por todo lo anterior mencionado y por mostrarme que teniendo una buena organización se puede con todo. Dr. José Antonio gracias por siempre compartirnos libros y nuevos enfoques. Les agradezco su calidez, apoyo, aportaciones y retroalimentaciones, ¡gracias infinitas!

ÍNDICE

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE FIGURAS

Resumen

En esta investigación de corte cualitativo con un enfoque interpretativo, se analizó la comprensión del concepto de límite de una función de variable real, en cinco estudiantes de matemáticas de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla que cursaban diferentes etapas de los programas de licenciatura y posgrado. El diseño y análisis de las actividades contestadas por los informantes se enmarcan en las teorías APOE (Acción, Proceso, Objeto y Esquema) y de Representaciones Semióticas. Se exploró una posible evolución de las estructuras mentales, así como las transformaciones semióticas que realizaron los alumnos, y se identificaron dificultades que prevalecen a lo largo de la formación matemática.

Los informantes contestaron 5 actividades en línea fundamentadas en estas teorías. Del análisis de resultados se desprende que, el alumno de doctorado ha construido la estructura Objeto de límite y usa un lenguaje matemático preciso. Además, realizó todas las transformaciones semióticas solicitadas en los registros dados. Mientras que, los alumnos de maestría y licenciatura tienen dificultades para hacer tratamientos en el registro algebraico y muestran evidencia de que la estructura Proceso está en construcción.

Palabras clave: Límite, comprensión, teoría APOE, nivel superior.

Abstract

In this qualitative research with an interpretive approach, the understanding of the concept of limit of a real variable function was analyzed in five mathematics students from the Facultad de Ciencias Físico Matemáticas of the Benemérita Universidad Autónoma de Puebla who were studying different stages of undergraduate and graduate programs. The design and analysis of the activities answered by the informants are framed in the APOE (Action, Process, Object and Scheme) and Semiotic Representations theories. A possible evolution of the mental structures was explored, as well as the semiotic transformations carried out by the students, and difficulties that prevail throughout the mathematical training were identified.

The informants answered 5 online activities based on these theories. From the analysis of results, it can be deduced that the doctoral student has built the Limit Object structure and uses a precise mathematical language. Furthermore, he performed all the requested semiotic transformations on the given records. While, master's and bachelor's students have difficulties to do treatments in the algebraic register and show evidence that the Process structure is under construction.

Keywords: Limit, understanding, APOE theory, higher level.

INTRODUCCIÓN

En el ámbito matemático, el cálculo es una materia que está presente en diversos programas de estudio a nivel medio superior y algunas carreras de nivel superior por sus aplicaciones y usos. Uno de los conceptos más estudiados es el límite de una función, porque es fundamental para la comprensión de otros conceptos matemáticos como: derivada, integral, continuidad, convergencia, entre otros.

Los estudios sobre el concepto de límite han mostrado que este es difícil de comprender. Sierpinska (1987) propuso una lista de obstáculos alrededor del concepto de límite desde una perspectiva del desarrollo histórico del concepto y de estudios de caso con alumnos, entre los cuales están los siguientes: horror al infinito, obstáculos ligados a la noción de función, geométricos, lógicos y derivados del uso de símbolos. A su vez, Cornu (1991) afirma que "una de las grandes dificultades emana de la complejidad de entender que todos los aspectos cognitivos del concepto de límite no se pueden aprender partiendo de su definición matemática". Además, Azcárate, Bosch, Casadevall y Casellas (1996, citado en Vrancken et al., 2006, p.11) manifiestan, al referirse a los trabajos de Cornu (1991) y Sierpinska (1985) que "la enorme dificultad de la enseñanza y del aprendizaje del concepto de límite se debe tanto a su riqueza y complejidad, como al hecho de que los aspectos cognitivos implicados no se pueden generar puramente a partir de la definición matemática". Los estudios de Cornu demostraron que los alumnos tienen "concepciones espontáneas personales" que provienen de su experiencia cotidiana. Dichas concepciones son muy resistentes al cambio y permanecen durante mucho tiempo, de manera que pueden contener factores contradictorios que se manifiestan según las situaciones.

De la misma forma, Cottrill, Dubinsky, Nichols, Schwingendorf, Thomas, y Vidakovic (1996) mostraron que el concepto de límite no es estático como se cree. Por el contrario, tiene un esquema muy complicado respecto a su concepción dinámica y, para comprender su definición formal, se requiere que los estudiantes tengan una concepción de cuantificación bien construida.

Para Medina (2001), el concepto de límite ocupa una posición central en el campo conceptual del cálculo, y su complejidad resulta ser fuente de dificultades, tanto en la enseñanza como en el aprendizaje. Primero, por su carácter estructural que lo posiciona como eje central y concepto básico, sobre el cual se construye la estructura del Cálculo Diferencial e Integral y otros conceptos de otras ramas de la matemática. En igual forma, Blázquez, Gatica y Ortega (2008, citado en Camacho et al., 2013), mencionan que los estudiantes no logran interpretar con facilidad la definición formal de límite y en poco tiempo dicha definición es olvidada. Además, Swinyard y Larsen (2012) exponen dos dificultades que presentan los estudiantes. La primera consiste en enfocarse primeramente en las aproximaciones en el eje X y posteriormente en el eje Y. La segunda se relaciona con el significado de qué es estar infinitamente cerca de un punto.

Hasta aquí, se han mencionado algunas de las dificultades estudiantiles para acceder al concepto de límite de una función real. Pero comprenderlo es primordial, en este sentido, Buendía y Molfino (2010) mencionan que la definición formal de límite surgió por una necesidad interna de la estructura matemática con la finalidad de generalizar a nuevas funciones, nuevos contextos y estructurar otros conocimientos, pues a partir de la definición de límite se reformulan conceptos y definiciones tales como: derivada, continuidad, entre otros. De igual forma, Usman, Juniati y Siswono (2017) mencionan que, "comprender el límite de una función es fundamental, porque consiste en la comprensión del concepto básico del análisis matemático el cual tiene un papel importante en la comprensión de la diferenciación, el análisis integral y matemático"(p. 2).

Considerando la importancia del concepto de límite de una función, resulta interesante conocer cómo evoluciona la comprensión del concepto de límite en tres etapas diferentes de la formación en Matemáticas que se imparte en la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. Con este fin, se compararon las estructuras mentales y los mecanismos cognitivos relacionados con el concepto de límite de una función de una variable real en cinco estudiantes que se encontraban en diferentes etapas de su formación como matemáticos. Se desea explorar cómo ocurre la evolución de las estructuras mentales y detectar si existen dificultades que prevalecen a lo largo del programa de estudios, desde licenciatura hasta doctorado.

Para la realización de este trabajo nos apoyaremos en diversas investigaciones, sin embargo, estará sustentado por la descomposición genética de Hernández, Ruiz y Juárez (s.f) que pretende integrar los registros semióticos a la descomposición genética de Cottrill et al. (1996) para la concepción dinámica del concepto de límite y, para la concepción métrica, se va a usar la descomposición genética de Swinyard y Larsen (2012). También el trabajo de Morante (2020), dada su experiencia y aportaciones a este concepto utilizando la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto y Esquema) para diseñar una secuencia de 25 actividades didácticas.

La presentación del trabajo se organizará en cuatro capítulos que describimos a continuación:

Capítulo 1. Planteamiento del problema. En esta parte se brinda una descripción concreta del problema de estudio, los objetivos y motivación que nos impulsaron a realizar este trabajo. Además, se presentan algunos trabajos de investigación como antecedentes.

Capítulo 2. Marco teórico. En este apartado presentamos, en primer lugar, la teoría APOE y sus pilares como lo son: la abstracción reflexiva, los mecanismos y estructuras mentales necesarias para la comprensión de conceptos matemáticos. También presentamos el ciclo de la investigación de APOE y la descomposición genética del concepto límite de una función que vamos a utilizar. En segundo lugar, la teoría de las representaciones semióticas, la cual tiene un papel fundamental en la comprensión de un concepto matemático.

Capítulo 3. Método. En este capítulo describimos el procedimiento para llevar a cabo la investigación, así como la selección de los alumnos que participaron y las actividades que se aplicaron.

Capítulo 4. Resultados. En este apartado se presenta el análisis de las respuestas que proporcionaron los estudiantes, describiendo las estructuras y mecanismos mentales que presentaron, así como las dificultades para resolver las actividades.

Conclusiones. En esta sección se presentan las conclusiones a las que llegamos una vez finalizado el análisis de los datos.

Capítulo 1

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Como se mencionó en la introducción, diversas investigaciones han mostrado algunas dificultades que tienen los estudiantes respecto al entendimiento del concepto de límite, sin embargo, no se tiene certeza si estas dificultades permanecen en diferentes grados académicos o si solamente se presentan cuando se enfrentan al concepto en primera instancia.

El presente trabajo pretende aportar información a la comunidad educativa en términos de las siguientes preguntas:

¿Qué estructuras y mecanismos mentales han construido un grupo de estudiantes de matemáticas de diferentes niveles académicos de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas (FCFM) de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP) sobre el concepto de límite de una función?

¿Qué cambios experimentan las estructuras mentales de un grupo de estudiantes de matemáticas de la FCFM de la BUAP a través de los diferentes niveles académicos?

Las preguntas de investigación buscan la relación entre la comprensión del concepto de límite y el nivel educativo, es decir, cómo cambia la comprensión a través del tiempo en estudiantes de matemáticas.

1.1 Antecedentes

Los antecedentes de este trabajo son los trabajos de Cottril et al. (1996), Blázquez y Ortega (2001), Swinyard y Larsen (2012), la tesis de Morante (2020) y la Descomposición Genética (DG) de límite de una función en su concepción dinámica de Hernández, Ruiz y Juárez (s.f) la cual integra algunos registros semióticos a la DG de Cottrill et al. (1996).

En el trabajo realizado por Cottrill et al. (1996) propusieron una descripción de la comprensión del concepto de límite de una función basada en la definición formal del límite y utilizando como marco teórico la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema). Esta descripción muestra las estructuras y mecanismos mentales por los cuales un estudiante tiene que transitar para lograr la construcción del concepto. Los resultados obtenidos de esta investigación fueron solamente en términos de la concepción dinámica del concepto de límite, la cual usualmente se conoce como concepción informal. Los autores encontraron que el concepto de límite no es estático como se cree, sino que tiene un esquema muy complejo respecto a la concepción dinámica, pues se requiere que los individuos tengan una concepción de cuantificación bien construida.

La investigación realizada por Blázquez y Ortega (2001), nos muestra que utilizar diferentes representaciones semióticas al momento de abordar el tema de límite, puede ser un obstáculo didáctico porque casi siempre se trabaja en el registro algebraico, aunque esta dificultad se puede remediar, si se utiliza el ordenador para traducir unos sistemas de representación a otros. Pues, los autores manifiestan que el uso de distintas representaciones favorece el aprendizaje de dos maneras: la primera manera compensa las limitaciones de unas representaciones con otras y, la segunda, promueve que los alumnos tengan una imagen conceptual más rica, lo cual le permite escoger al alumno una representación más apropiada para cada situación.

Swinyard y Larsen (2012) realizaron una investigación que se fundamenta en dos tareas: la primera tarea consistió en realizar un diseño de actividades para una instrucción didáctica basada en el trabajo Cottrill et al. (1996) y a partir de esta, proponer una descripción del concepto de límite, pues se percataron que los resultados de Cottrill et al. (1996) no daban evidencia de la concepción métrica del concepto de límite en una función. La segunda tarea radicó en la validación de la propuesta realizada, después de aplicar las actividades se identificó que los estudiantes tienden a centrar su atención en los valores de entrada de la función al determinar el límite, lo cual es contrario al proceso que se debe de aplicar con la definición, pues ésta se centra en lo que pasa primero con $f(x)$. También, se encontró que los alumnos tienen ciertas dudas para mencionar lo que significa estar *infinitamente cerca de un valor*, por ello, los autores proponen una descripción del concepto de límite en donde se toma en cuenta la búsqueda de candidatos a límite y se tiene que comprobar si alguno de ellos es el límite.

Otra investigación realizada sobre el concepto de límite fue realizada por Morante (2020). Para su elaboración se apoyó en la teoría APOE y se enfocó en desarrollar un diseño instruccional para que los estudiantes de ingeniería construyeran el concepto de límite de una función que les permitiera la comprensión de la definición ε -δ.

Su investigación fue de corte exploratorio y cualitativo. En la cual buscó identificar si la instrucción didáctica basada en la DG de Swinyard & Larsen (2012) se corresponde con las estructuras mentales mencionadas ahí.

Para diseñar sus actividades se apoyó en la DG mencionada y en los registros semióticos de Duval (1999, citado en Morante, 2020) quien afirma que “la habilidad para cambiar o

interpretar la forma mediante la cual se representa un objeto matemático constituye un indicador de la comprensión o dificultad del aprendizaje de cierto objeto” (p. 2).
Los resultados que él obtuvo muestran que es viable transitar hacia la concepción métrica de límite para lograr la construcción de la estructura objeto de este concepto.
Para el análisis de los resultados de esta investigación, se usará la DG de Hernández et al. (s.f) la cual integra algunos registros semióticos a la DG de Cottrill et al. (1996). En ese trabajo las autoras presentaron un refinamiento de la descomposición genética de Cottrill et al. (1996) del concepto límite de una función en una variable real. El refinamiento que muestran se basa en los resultados de actividades didácticas ya implementadas en otras investigaciones, con las cuales ejemplifican cómo se promueven las estructuras y mecanismos mentales así como las transformaciones semióticas consideradas en la DG propuesta. Su trabajo pretende contribuir a la comprensión de la construcción del concepto de límite de una función en su concepción dinámica y al diseño de actividades didácticas, por lo cual, se considera útil para docentes e investigadores que laboran en los niveles medio superior y superior.

1.2 Objetivos de la investigación

Para dar respuesta a las preguntas de investigación se plantean los siguientes objetivos:

Objetivo general

Identificar las estructuras mentales, así como los mecanismos cognitivos, relacionados con el concepto límite de una función en una variable real, que se hacen presentes en estudiantes de matemáticas de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas (FCFM) de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP) en diferentes etapas académicas, para conocer la evolución de dicho concepto conforme los estudiantes avanzan y cuáles son las dificultades que prevalecen.

Objetivos específicos

- Diseñar un cuestionario basado en actividades seleccionadas de la tesis de Morante (2020) para determinar las estructuras y mecanismos mentales.
- Identificar la evolución de las estructuras y mecanismos mentales relacionados con el concepto de límite de una función que han construido los participantes. Así como los tratamientos y conversiones en los registros dados.
- Identificar las dificultades que prevalecen a lo largo de las diferentes etapas de aprendizaje del concepto.

1.3 Justificación

Diversas investigaciones han reportado las dificultades que tienen los estudiantes para comprender el concepto de límite, es por eso que nos inquietó saber cómo es su evolución a través del tiempo. Por esta razón, identificaremos las estructuras y mecanismos mentales que muestran los estudiantes de matemáticas sobre este concepto en diferentes etapas académicas.

Esta investigación es importante pues nos va a permitir observar también si hay alguna dificultad en la comprensión del concepto del límite que permanece a través del tiempo en un grupo de estudiantes de matemáticas de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas (FCFM) de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP), en México.

Capítulo 2

MARCO TEÓRICO

En este capítulo presentamos los dos marcos teóricos en los cuales se fundamenta esta investigación. En primer lugar, la Teoría APOE, pues en ella encontramos un modelo cognitivo apropiado para guiar nuestro trabajo, debido a que proporciona una descripción detallada de las estructuras y mecanismos mentales por los cuales un estudiante tiene que transitar para aprender un concepto matemático. En segundo lugar, la teoría de representaciones semióticas, pues "proporciona las herramientas conceptuales para analizar la flexibilidad en el uso de diferentes representaciones y su papel en la comprensión de las ideas matemáticas en consideración" (Trigueros y Martínez, 2010, p. 5).

Cabe mencionar que "estos dos marcos conceptuales se pueden utilizar de forma coherente y complementaria, tanto a la hora de analizar las respuestas y estrategias de los estudiantes cuando trabajan en tareas como para diseñar la instrucción en el futuro" (Trigueros y Martínez, 2010, p. 6).

2.1 Teoría APOE

El nombre de la teoría APOE surge del acrónimo de las estructuras principales las cuales son: Acción, Proceso, Objeto y Esquema. Esta tiene por objetivo entender cómo se aprenden los conceptos matemáticos y se enfoca en plantear modelos de lo que podría estar pasando en la mente de una persona cuando intenta aprender un término matemático.

APOE surgió cuando Dubinsky (1991) reflexionó sobre la aplicación de la abstracción reflexiva de Piaget en las matemáticas para describir el desarrollo del pensamiento lógico en los niños, y extiende la idea a nociones matemáticas de educación superior.

> Pero, ¿Qué es la abstracción reflexiva? La respuesta de Piaget consta de dos partes, la primera parte implica reflexión, en el sentido de conciencia y pensamiento contemplativo, sobre lo que Piaget llamó contenido y operaciones sobre ese contenido, en el sentido de reflejar éste y de realizar operaciones que permitan transitar de un nivel o etapa cognitiva inferior a uno superior (es decir,

de procesos a objetos en términos de la teoría APOE). La segunda parte consiste en la reconstrucción y reorganización del contenido y operaciones. En esta etapa superior resulta que las operaciones se pueden convertir en contenido al que se pueden aplicar nuevas operaciones (Arnon et al., 2014, p.6).

Piaget propuso que la ideas más abstractas y generales provenían de extraer características comunes de un conjunto de objetos (los objetos pueden ser mentales, no necesariamente físicos). Consideraba que el desarrollo del conocimiento de un objeto requiere que el sujeto actué sobre él y viceversa, es decir, que el objeto y sujeto no pueden estar separados.

Dichas ideas sientan las bases de las distinciones más sutiles, como lo son las acciones materiales y operaciones interiorizadas, ambas constituyen las diferencias entre las estructuras mentales de acción y proceso, así como los mecanismos mentales como la interiorización y la encapsulación que conducen a la progresión Acción, Proceso, Objeto, Esquema (A→P→ O→E). (Arnon et al., 2014).

Dubinsky (1991) interpreta a las "acciones materiales y mentales" como las Acciones que son llevadas a cabo por el sujeto, pero que son externas a él. Dentro de la teoría APOE las "operaciones interiorizadas" de Piaget se convirtieron en el mecanismo mental de interiorización en el cual una Acción física o mental que el sujeto considera como externa se reconstruye en la mente del sujeto en un Proceso, es decir, se realiza la misma Acción, pero completamente en la mente del sujeto. Esta noción de la abstracción reflexiva influyó en el desarrollo de la teoría APOE, de cómo un Proceso (Acción interiorizada) se transforma en un Objeto (contrucción sobre la cual, en etapas superiores se pueden realizar nuevas operaciones) a través del mecanismo mental de la encapsulación.

Dubinsky interpreta estas situaciones como el desarrollo cognitivo que empieza con Acciones, que son interiorizadas en los Procesos y luego se encapsulan en Objetos a los que se le pueden aplicar nuevas Acciones, todo ello forma un Esquema, "en donde un Esquema consiste en Acciones, Procesos y Objetos y otros Esquemas previamente construidos, que evolucionan continuamente y pueden ser encapsulados como Objetos" (Tall, 1999, p. 2). Pareciera que la propuesta progresiva en la teoría es de la forma A→P→ O→E. Sin embargo, aunque se presente en esta forma lineal el desarrollo no siempre procede así, más bien, un individuo puede avanzar y retroceder entre las distintas etapas. Cabe mencionar que para Dubinsky y McDonald, "el conocimiento matemático de un individuo es su tendencia para responder a situaciones matemáticas problemáticas en un contexto social, construyendo acciones, procesos y objetos y organizándolos en esquemas con el fin de manejar las situaciones y resolver los problemas" (2001, p. 276).

A continuación se van a mostrar los mecanismos y estructuras que están involucradas en la teoría APOE. Dubinsky (1991) considera cinco tipos de abstracción reflexiva o mecanismos mentales (interiorización, coordinación, encapsulación, desencapsulación e inversión) que conducen a la construcción de las estructuras mentales (acciones, procesos, objetos y esquemas).

La siguiente figura muestra cómo se relacionan los mecanismos y las estructuras mentales:

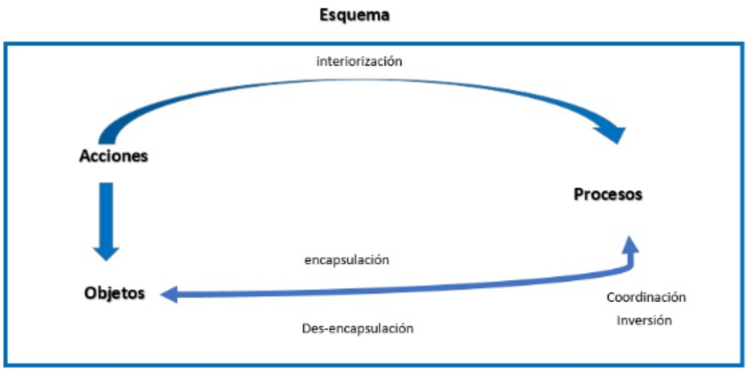


Figura 1 Estructuras y mecanismos mentales (Arnon et al., 1996)

A continuación, presentamos una descripción de los mecanismos mentales, (Dubinsky, 1991):

- ***Interiorización***: Se puede considerar como la transferencia de una actividad específica del mundo externo al mundo interno del individuo, en otras palabras, el individuo pasa de tener ayudas externas para tener un control interno. Se evidencia este mecanismo, cuando el individuo posee la capacidad de imaginar la realización de los pasos sin realizarlos de manera explícita, puede saltar los pasos e incluso revertirlos.

- ***Coordinación***: Este mecanismo consiste en acoplar dos o más procesos para construir un nuevo proceso. Este nuevo proceso puede ser encapsulado como un objeto.

- ***Encapsulación***: Este mecanismo se da cuando uno ve al proceso como una totalidad, percibe las transformaciones que pueden actuar sobre esa totalidad y realmente puede construir tales transformaciones. De manera general consiste en la conversión de un proceso (estructura dinámica) en un objeto (estructura estática).

- ***Desencapsulación***: Una vez que un individuo ha encapsulado un proceso en un objeto, este puede ser desencapsulado para regresar al proceso que lo generó, en otras palabras, reinvertir el mecanismo que lo generó.
- ***Inversión***: Cuando un proceso existe internamente, el estudiante es capaz de pensarlo de forma inversa (en el sentido de deshacerlo), con la creación de un nuevo proceso consistente en el inverso del proceso inicial.

A continuación se presentan las estructuras mentales de la teoría APOE (Dubinsky y MacDonald, 2001):

- ***Acción*:** Se considera que un estudiante posee una estructura acción si realiza las transformaciones de un objeto dirigido por estímulos externos. Estableciendo una analogía, una acción se puede imaginar como cuando un individuo realiza una actividad mediante un instructivo.
- ***Proceso*:** Estructura mental que se produce cuando un individuo reflexiona sobre las acciones y puede recrearlas mentalmente sin la necesidad de depender de estímulos externos, es decir, el individuo ha interiorizado las acciones en un Proceso.

- ***Objeto*:** Cuando un individuo reflexiona sobre las operaciones aplicadas a un proceso como un todo y puede identificar las transformaciones, además de construirlas (acciones o procesos) diremos que el proceso ha sido encapsulado en un objeto, por tanto, el individuo posee una concepción objeto del concepto. El mecanismo de desencapsulación es tan importante como el de encapsulación, debido a que permite regresar al proceso que generó dicho concepto.
- ***Esquema*:** Se construye como una colección coherente de las estructuras de acción, proceso, objeto y otros esquemas y las conexiones que se establecen entre ellas, éstas se caracterizan por su dinamismo, es decir, su reconstrucción continua debido a la actividad matemática del individuo en situaciones específicas.

Estas construcciones son la base de las estructuras matemáticas de un individuo, las cuales fundamentan la construcción de esquemas. Los esquemas no son estructuras estáticas, más bien, son dinámicas debido a que evolucionan constantemente cada vez que un nuevo objeto matemático es agregado a sus estructuras previas, con esto podemos decir que un esquema no es una estructura terminada, sino que está en *constante* desarrollo.

2.2 Descomposición genética de la investigación

Antes de mostrar las descomposiciones genéticas utilizadas en nuestra investigación, es necesario definir qué es una descomposición genética.

> Una descomposición genética (DG) es un modelo hipotético que describe las estructuras y mecanismos involucrados en la construcción de un concepto matemático. Una DG predice cómo un estudiante construye un concepto; debe ser probada experimentalmente y refinada si es necesario. Cabe mencionar que una DG no es única, es decir, no hay pretensión en la teoría de describir cómo se construye exactamente un concepto (Trigueros y Oktaç, 2019 p. 45)

> Es importante aclarar que una descomposición genética no explica qué pasa en la mente de una persona, más bien describe las estructuras que el estudiante necesita para construir el aprendizaje de un concepto. Una DG no es única, es decir, no proporciona una única forma en la que todos los estudiantes construyen un concepto matemático específico (Arnon et al., 2014).

Morante (2020) menciona que una DG que contemple los distintos registros de representación del concepto de límite puede lograr mejores caracterizaciones de las estructuras mentales logradas por los estudiantes. Por ello, esta investigación se fundamenta en una DG parcial de la concepción dinámica del límite de una función que las autoras proponen para esta investigación y para la concepción métrica se va a emplear la DG de Swinyard y Larsen (2012).

En Tabla 1 se muestran los primeros cuatro pasos de la DG del límite de una función real de Hernández et al. (s.f.) que pretende integrar los registros semióticos a la DG de Cottrill et al. (1996). Aquí se presentan las estructuras mentales, los mecanismos y las transformaciones semióticas necesarias para la construcción de la concepción dinámica del límite de una función real en los registros numérico-algebraico y gráfico. La versión completa de la DG se encuentra en revisión y se publicará posteriormente. Esta propuesta también modifica el paso 4, el cual, originalmente, Cottrill planteó de la siguiente manera "Encapsulación del Proceso del paso 3, de tal forma que el límite se convierte en un Objeto al cual es posible aplicar Acciones" (Arnon et al., 2014, p. 46). La DG de Cottrill y colaboradores puede verse, prácticamente, en la columna de la izquierda de esta tabla, pues ellos la plantearon únicamente en el registro algebraico o analítico.

Tabla 1: Estructuras mentales, mecanismos y transformaciones semióticas del límite de una función f en $x = a$ en su concepción dinámica

Registro algebraico-numérico (AN)	Registro gráfico (G)
P1AN. La acción de asociar el valor de la función, dada en una tabla o en una expresión algebraica, con su correspondiente valor *x* cercano a un número a.	P1G. La acción de identificar en la gráfica de una función f la imagen de un valor *x* cercano al valor a.
P2AN. La acción de asociar el valor de la función *f*, dada en una tabla o en expresión algebraica, con sus correspondientes valores *x*,	P2G. La acción de identificar en la gráfica de una función *f* los valores $f(x)$ de algunos puntos, cada uno

cada uno sucesivamente más cercano a a que el anterior.	sucesivamente más cercano al valor a que el anterior.
P3AN. Construcción de un Proceso coordinado de la siguiente manera: P3ANa) Interiorización de la acción del paso 2 para la construcción de un Proceso en el dominio que permite imaginar una infinidad de valores x aproximándose al valor a. P3ANb) Construcción de un Proceso en el rango que permite imaginar una infinidad de valores y aproximándose o no a un valor L. P3ANc) Coordinación de a) y b) a través de f. Es decir, la función f se aplica al Proceso en el dominio, de x aproximándose al valor a, para obtener el Proceso en el rango de $f(x)$ aproximándose o no a un cierto número L.	P3G. Construcción de un Proceso coordinado de la siguiente manera: P3Ga) Interiorización del paso 2 para la construcción de un Proceso en el eje X que le permita visualizar una infinidad de valores de x aproximándose al número a. P3Gb) Construcción de un Proceso en el eje Y que permite visualizar una infinidad de valores de f aproximándose o no a un cierto valor L. P3Gc) Coordinación de los Procesos construidos en a) y b) a través de la gráfica de f. Es decir, apoyándose en la gráfica es posible relacionar el Proceso en el dominio, de x aproximándose al valor a, con el Proceso en el rango de $f(x)$ aproximándose o no a un cierto número L.
P4AN. Encapsulación del Proceso del paso 3 en el Objeto límite de f cuando x tiende a a al concebir las aproximaciones en el registro numérico como una totalidad y manifestarlo mediante una conversión en la notación analítica: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L,\ \lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ o $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$	P4G. Encapsulación del Proceso del paso 3 en el Objeto límite de f cuando x tiende a a al concebir las aproximaciones en el registro gráfico como una totalidad y manifestarlo mediante una conversión en la notación analítica: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L,\ \lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ o $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$

Fuente: Hernández et al. (s.f.)

Cabe hacer la aclaración de que el Objeto límite de una función que se menciona en P4AN y P4G es aquel que corresponde a la concepción dinámica del límite de una función real, pero construido en los registros respectivos. En esta concepción, el límite de una función se entiende como el número al que se aproximan las imágenes de valores en el dominio, cuando estos se aproximan a un cierto número $x=a$. Además de la coordinación de los procesos dominio y rango que se mencionan en la sección anterior (P3ANc y P3Gc), para entender al límite de una función de esta forma, se requiere pasar del infinito como un proceso (infinito potencial) al infinito como objeto (infinito actual). Dubinsky (2005) afirma que lo anterior se logra cuando "este proceso puede ser visto como una totalidad completa, para la cual es crucial el mecanismo de encapsulación" y que "el infinito actual es el objeto mental que se obtiene por la encapsulación de este proceso" (p. 346).

DG de la Concepción métrica de Swinyard y Larsen (2012)

A continuación, se presenta la DG de Swinyard y Larsen (2012, citado en Morante, 2020)

1. La acción de evaluar f en un solo punto x que se considera cercano, o incluso igual al valor a. (PASO DG1)
2. La acción de evaluar la función f en unos pocos puntos, cada punto sucesivo más cercano al valor a que el anterior. (PASO DG2)
3. Construcción de un esquema coordinado de la siguiente manera:

   (a) Interiorización de la acción del paso 2 para la construcción de un proceso en el dominio en el que x se aproxima al valor a. (PASO DG3(A))

   (b) Construcción de un proceso en el rango en el que y se aproxima al valor L. (PASO DG3(B))

   (c) Coordinación de (a), (b) a través de f. Es decir, la función f se aplica al proceso de x aproximándose al valor a para obtener el proceso de $f(x)$ aproximándose a L. (PASO DG3(C))
4. Construir un proceso mental en el cual uno prueba si un candidato es un límite:

   a) Elegir una medida de proximidad al valor límite L a lo largo del eje Y; (PASO DG4(A))

b) Determinar si hay un intervalo alrededor del valor en el cual uno está conjeturando el límite (es decir a) para el cual el valor de la función, aparte del que está en ese punto, está lo suficientemente cerca de L; (PASO DG4(B))

c) Repetir los pasos (a) y (b) para cada vez más pequeñas medidas de cercanía. (PASO DG4(C))

5. Asociar la existencia de un límite con la capacidad de continuar (teóricamente) este proceso para siempre, sin dejar de producir el intervalo deseado sobre a, o de manera equivalente, con la observación de que no hay un caso en el que será imposible encontrar dicho intervalo. (PASO DG5)
6. Encapsular este proceso a través de la noción de cercanía arbitraria. Esto implica darse cuenta de que se puede establecer que el proceso en el paso 4 funcionará para todas las medidas de cercanía demostrando que funcionará para una medida arbitraria de cercanía. (PASO DG6)

Cabe mencionar, que para esta investigación, ocuparemos los pasos DG4, DG5 y DG6, puesto que son los que hacen referencia a la concepción métrica del concepto de límite.

2.3 La teoría de registros de representación semiótica

Duval (1993) propuso una teoría que determina que el uso de representaciones semióticas para el pensamiento matemático es fundamental. Pues no existe otra manera de tener acceso a los objetos matemáticos, sino a través de la producción de representaciones semióticas y cada registro es cognitivamente parcial con respecto a lo que cada uno representa.

La teoría de representaciones semióticas propuesta por Duval (1993) proporciona un marco para el análisis del conocimiento matemático, que considera no solo la naturaleza de los objetos estudiados, sino también la forma en que se nos presentan y cómo podemos acceder a ellos por medio de nuestros sentidos y pensamiento.

Cabe resaltar que un registro semiótico debe permitir tres actividades cognitivas: la formación de una representación identificable, el tratamiento y la conversión. La formación de una representación identificable se asocia con la expresión de una representación mental del objeto. El tratamiento es una transformación interna de la representación en el mismo registro dado y la conversión es una transformación externa, es decir, representa la transición de un registro a otro registro. La coordinación de los diferentes registros es necesaria, pues el dominio de uno de ellos no permite el aprendizaje integral del concepto. Además, Duval (2017) afirma que los registros semióticos proporcionan los medios para crear nuevos conocimientos.

Esta teoría menciona que la manera de tener acceso a los objetos matemáticos es a través de la producción de representaciones semióticas. Asimismo, Fernández, Sánchez, Moreno y Callejo (2018) mencionan que el papel de la coordinación de los procesos de aproximación en los diferentes modos de representación, resulta esencial en la comprensión del concepto de límite.

Por tal motivo, la enseñanza del concepto de límite no se debe restringir a trabajar con un solo registro. Blázquez y Ortega (2001) afirmaron que, "el concepto de límite funcional parte del concepto de función, utiliza sus representaciones, y diversas investigaciones sobre este tópico y sus representaciones sugieren considerar los siguientes sistemas: verbal, numérico, gráfico y algebraico" (p. 225).

Para Amaya (2016, citado en Amaya et al., 2021), los registros más usados para representar una función son: Coloquial o lenguaje materno, analítico, cartesiano, gráfico, figural, tabular y fenomenológico.

Aunque por la naturaleza de este estudio veremos las descripciones de los siguientes registros:

- *Coloquial o del leguaje materno*: Se relaciona con la capacidad lingüística indispensable para la descripción de situaciones funcionales, así como la comunicación, interpretación y discusión de resultados, en él se pueden configurar representaciones coloquiales.
- *Analítico*: está íntimamente relacionado con la capacidad simbólica, principalmente con el álgebra y la modelación algebraica o analítica. En

él se pueden configurar representaciones analítico-algebraicas y analítico-aritméticas

- *Gráfico*: consiste en un sistema coordenado, donde se pueden hacer representaciones gráficas, correspondientes a un conjunto de puntos que finalmente las determinan.
- *Tabular*: consiste en una tabla, en la que se ubican las entradas, ya sea en las filas o en las columnas, de tal forma que el número de columnas (o filas según se ordenen), corresponda al total de cantidades que intervienen en la situación, que vienen a ser los elementos que constituyen la función. La tabla llena con la información correspondiente a la función es la representación tabular (Amaya et al., 2021).

2.4 Ciclo de investigación de la Teoría APOE

Una investigación que se fundamenta en la teoría APOE sigue una metodología que tiene tres componentes: el análisis teórico, el diseño e implementación de enseñanza y observación, además del análisis de datos.

Este ciclo de investigación es muy importante porque permite obtener una descripción detallada del concepto y de las construcciones del estudiante a través de la repetición de las tres componentes del ciclo.

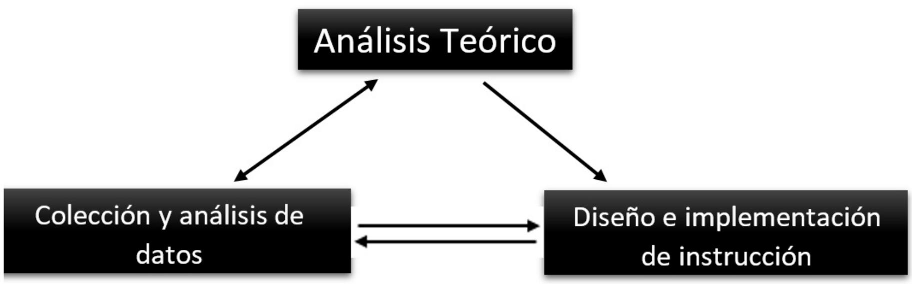


Figura 2 Ciclo de investigación (adaptado de Asiala et al. 1996)

La investigación se inicia con un análisis teórico sobre el concepto matemático.

El cual toma en cuenta el análisis de libros de texto, la experiencia de los investigadores y los resultados de estudios previos, entre otros aspectos que pueden contribuir al diseño de un camino viable en la construcción de un concepto determinado. Asimismo, por medio de la descripción de las construcciones mentales, permite modelar la epistemología y la cognición del concepto matemático estudiado (Roa y Oktaç, 2010).

Esto da lugar a la descomposición genética preliminar del concepto, la DG no es única, ya que depende de los caminos de construcción del concepto y de las estructuras definidas en los estudiantes. En el siguiente apartado se definirá qué es una (DG).

- Diseño e implementación de la enseñanza

El análisis teórico conduce al diseño e implementación de la enseñanza. Las actividades y ejercicios se diseñan para ayudar a los estudiantes a construir acciones, interiorizarlas en procesos, encapsular procesos en objetos y coordinar dos o más procesos para construir nuevos procesos. La implementación de la instrucción proporciona una oportunidad para la recopilación y el análisis de datos que se lleva a cabo utilizando la lente de la teoría APOE.

- Colección y análisis de datos

La fase de recopilación y análisis de datos es crucial para la investigación basada en APOE, ya que, sin evidencia empírica, una descomposición genética sigue siendo simplemente una hipótesis. El propósito del análisis de datos es responder dos preguntas:
1) ¿Hacen los estudiantes las construcciones mentales descritas en la descomposición genética?
2) ¿Qué han aprendido los estudiantes acerca del concepto matemático en cuestión?
Se utilizan diferentes tipos de instrumentos para investigar estas dos preguntas. Dependiendo de los objetivos del estudio particular, estos pueden incluir, cuestionarios escritos, entrevistas semiestructuradas (grabadas en audio y/o video), exámenes, y/o juegos de computadora. El diseño metodológico también puede incluir, el aula, observaciones, análisis de libros de texto y estudios históricos/epistemológicos. En todos estos casos, el análisis se triangula a través de la investigación colaborativa, mientras los investigadores negocian los resultados hasta llegar a un consenso sobre sus interpretaciones y/o implementando más de un instrumento de investigación para un estudio.

2.5 Concepciones del concepto de límite

Es posible describir la construcción del concepto de límite a través de dos concepciones, la concepción dinámica y la concepción métrica.

> La concepción dinámica del límite de una función supone construir un proceso en el dominio en el cual x se aproxima a a, construir otro proceso en el rango en el cual $f(x)$ se aproxima a L y utilizar la función para coordinarlos (Pons, 2014, p.101)
>
> Hemos considerado como concepción métrica en términos de desigualdades aquella que se deriva de la construcción de un proceso en el dominio en el cual $x - a$ en valor absoluto se aproxima a 0, construir otro proceso en el rango en el cual $f(x) - L$ en valor absoluto se aproxima a 0, y coordinarlos (Pons, 2014, p.102).

Capítulo 3

MÉTODO

Esta investigación es de corte cualitativo con un enfoque interpretativo. Se ubica en el ciclo de investigación de la teoría APOE de la siguiente manera: se aplicaron cinco actividades diseñadas por Morante (2020), las cuales estaban fundamentadas en las DG mencionadas anteriormente y en la teoría de representaciones semióticas, para recabar datos que ofrecieran evidencias de las estructuras, mecanismos mentales y así compararlos. Además, de identificar algunas de las dificultades que puedan surgir.

3.1 Características de los participantes

Los informantes fueron cinco estudiantes de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP). El primer estudiante ($EL1$) pertence a la primera mitad de la carrera de matemáticas y acababa de cursar la materia de cálculo diferencial en una variable. El segundo estudiante ($EL2$) tenía un año de haber cursado esta misma materia y al momento de ser encuestado, acababa de cursar la materia de cálculo diferencial en varias variables que pertenece a la segunda mitad de la carrera de matemáticas. El tercer estudiante (*EM1*) estaba cursando el primer año de la maestría en Matemáticas, el cuarto estudiante *(EM2)* estaba cursando el segundo año en la maestría mencionada anteriormente. Finalmente, el quinto estudiante *(ED)* estaba cursando el doctorado en Matemáticas.

Todos los participantes son masculinos y su participación fue voluntaria. Cabe mencionar que los estudiantes de posgrado realizaban su trabajo de tesis en el área de análisis matemático.

3.2 Actividades

En esta sección presentamos las actividades que se aplicaron a los estudiantes, las cuales fueron seleccionadas de la tesis de Morante (2020).

Como "el concepto de límite funcional parte del concepto de función, entonces utiliza sus representaciones, y diversas investigaciones sobre este tópico y sus representaciones sugieren considerar los siguientes registros: verbal, numérico, gráfico y algebraico" (Blázquez y Ortega, 2001, p. 225). Por lo mencionado anteriormente, las actividades están diseñadas utilizando diferentes registros semióticos "ya que para comprender un concepto es necesaria la coordinación de los diferentes registros de representación, pues con uno solo no se obtiene la comprensión integral del concepto” (Duval, 2006, p. 144).

Actividad 1

Dada la función $f(x) = \begin{cases} x, & si\ -1 \leq x < 1 \\ x - 1, & si\ \ 1 \leq x < 3 \end{cases}$

a) Calcula los valores $\boldsymbol{f(x)}$ para los $\boldsymbol{x}$ propuestos en la siguiente tabla.

x	-1.00	0.00	0.50	0.85	0.98	...	1.01	1.04	1.07	1.10	1.21
$f(x)$						...					

b) ¿A qué número se aproxima x?

c) ¿A qué número se aproxima $f(x)$?

d) Describe el comportamiento de $f(x)$ cuando x se aproxima al valor dado en el inciso b

e) ¿Cuál sería el límite de f cuando x se aproxima a 1? Argumenta tu respuesta

Para esta actividad, lo que se pretende es evaluar si el estudiante:

a) Realiza acciones en el registro algebraico-numérico, es decir, que a partir de los valores en la tabla cercanos a $x = 1$ asocia éste con su imagen bajo la función f. Si logra completar la tabla de manera correcta mostrará indicios de tener la concepción Acción.

b) Interioriza las acciones realizadas en a), para construir el Proceso dominio, es decir, centra su atención en el dominio de la función para notar que los valores de x dados, se aproximan cada vez más al valor de interés $x = 1$.

c) Interioriza las acciones realizadas en el inciso a), pero esta vez centrando su atención en el rango, para notar lo que ocurre con los valores $f(x)$ cuando se comparan con $f(1)$ y que esa reflexión lo lleve a construir el Proceso rango, para concluir que las imágenes de $f(x)$ por la izquierda se aproximan al valor 1 y por la derecha al valor 0.

d) Coordina los Procesos dominio y rango, a través de la aplicación de la función f.

e) A partir de la coordinación de los dos procesos dados en d), manifiesta la construcción de otro Proceso, el cual le permite concluir que el límite no existe, teniendo en cuenta que cuando x se aproxima a 1 los valores $f(x)$ se aproximan a diferentes números.

Actividad 2

Utiliza la siguiente representación gráfica de f para responder lo que se te pide.

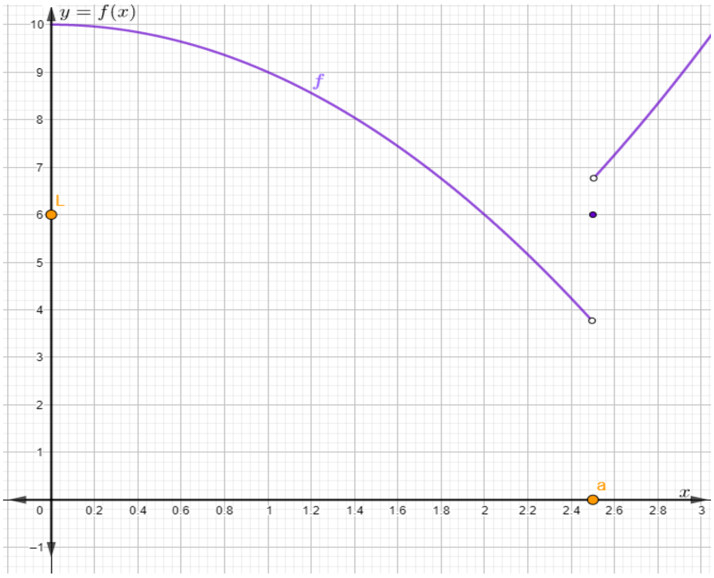


Figura 2 Gráfica de la Actividad 2

a) Si se elige un intervalo de radio $\varepsilon = 0.4$ centrado en $L = 6$ ¿es posible construir un intervalo centrado en $a = 2.5$ de radio δ, de forma que las imágenes $f(x)$ de los x contenidos en ese intervalo se mantengan dentro del intervalo centrado en L? Argumenta tu respuesta.

b) Apóyate en tu respuesta a la pregunta anterior, deduce si $L = 6$ es el límite de la función f en el valor $a = 2.5$. Argumenta tu respuesta.

Para esta actividad, lo que se pretende es evaluar si el estudiante:

a) Muestra un Proceso que le permita concluir que el intervalo solicitado no es posible de crear.

b) Ha construido un Proceso al interiorizar que no es posible hallar un valor δ para $\varepsilon = 0.4$ que cumpla con la propiedad métrica.

Actividad 3

Prueba que el $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4$, si $f(x) = \begin{cases} x^2, & si \ \ x \neq 2 \\ 1, & si \ \ x = 2 \end{cases}$

Para esta actividad, lo que se pretende es evaluar si el estudiante:

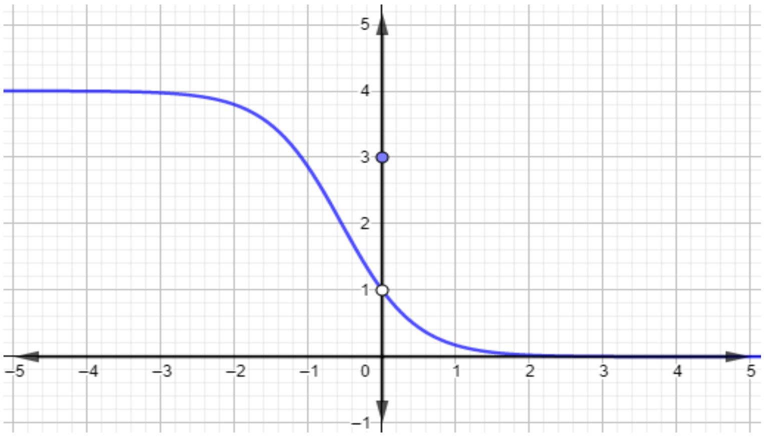
Desencapsula el Objeto límite construido en el registro algebraico y revierte los procesos de aproximación y validación del candidato a límite, a través del tratamiento analítico de las condiciones requeridas en la definición de límite, a saber:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0\ tal\ que\ si\ 0 < |x - a| < \delta\quad entonces\ |f(x) - L| < \varepsilon$.

Sin embargo, puede que el estudiante responda a partir de los límites laterales, es decir, que construya un proceso mental, en el cual propone a 4 como el límite, a través de la coordinación de los Procesos dominio y rango.

Actividad 4

Considera la gráfica de la función f y determina qué expresiones de límite son correctas y cuáles no, argumenta tus respuestas



a) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 3$

b) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$

c) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)\ no\ exite$

Figura 4 Gráfica de la Actividad 4

Para esta actividad, lo que se pretende es evaluar si el estudiante:

Logra desencapsular el Objeto de límite construido en su concepción dinámica o métrica en el registro gráfico, y revierte los procesos de aproximación y validación del candidato a límite.

Actividad 5

Una función f se comporta de la siguiente manera cerca del valor $a = 5$ (perteneciente al dominio de la función):

Afirmación 1. A medida que x se aproxima al valor $a = 5$ desde la izquierda, $f(x)$ se aproxima al valor 8.

Afirmación 2. A medida que x se aproxima al valor $a = 5$ desde la derecha, $f(x)$ se aproxima al valor 4.

Con la información anterior realiza lo que se te pide.

a) Elabora una representación gráfica aproximada para ilustrar el comportamiento de f para valores de x cerca del valor $a = 5$. (Utiliza una función lo más sencilla posible).

b) Escribe las afirmaciones 1 y 2 en forma simbólica.

c) Argumenta si el $\lim_{x \to 5} f(x)$ existe o no.

Para esta actividad, lo que se pretende es evaluar si el estudiante:

a) Realiza una conversión del registro verbal al registro gráfico y reflexiona acerca de la cercanía o proximidad de los valores de x al valor $a = 5$ y de los valores $f(x)$ en el rango.

b) Realiza una conversión del registro verbal al registro algebraico y encapsula los procesos de aproximación.

c) Desencapsula el Objeto de límite construido y revierte los procesos de aproximación y validación del candidato a límite, a través de una serie de enunciados. Además, se espera que logre concluir que el límite no existe, teniendo en cuenta que cuando x se aproxima a 5 por la izquierda, $f(x)$ se aproxima al valor 8, mientras que cuando x se aproxima a 5 por la derecha, $f(x)$ se aproxima al valor 4.

Capítulo 4

RESULTADOS

En este capítulo presentamos las respuestas que los estudiantes proporcionaron a las actividades de esta investigación. Para la interpretación de los resultados especificaremos qué mecanismos y estructuras mostraron los estudiantes. Así como los tratamientos y conversiones en los registros semióticos que se abordan en este trabajo. Además, se mostrarán las dificultades que tuvieron al responder algunas de las actividades planteadas.

Los resultados se presentarán de la siguiente manera, actividad y respuestas de los participantes, donde *EL1* es el estudiante de la primera parte de la licenciatura, *EL2* el estudiante de la segunda mitad de la licenciatura, *EM1* estudiante de la primera parte de la maestría, *EM2* estudiante de la segunda parte de la maestría y finalmente *ED* el estudiante de doctorado.

Actividad 1

Dada la función $f(x) = \begin{cases} x, & si\ -1 \leq x < 1 \\ x-1, & si\ \ 1 \leq x < 3 \end{cases}$

x	-1.00	0.00	0.50	0.85	0.98	...	1.01	1.04	1.07	1.10	1.21
$f(x)$						...					

a) **Completa la tabla**

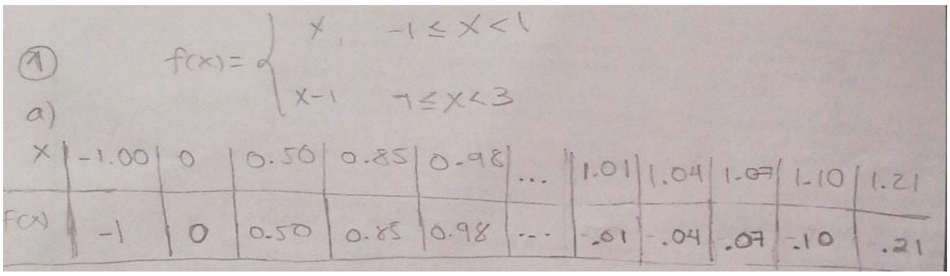


Figura 5: Respuesta de EM2

En la Figura 5 vemos un ejemplo de cómo respondieron todos los estudiantes, completando correctamente la tabla, es decir, realizaron la acción de asociar el valor de la función *f*, dada en una tabla o en expresión algebraica, con sus correspondientes valores *x*, cada uno sucesivamente más cercano a 1.

A partir de la respuesta que proporcionaron los estudiantes mostraron indicios de la estructura Acción, lo cual corresponde al paso PA2N.

b) ¿A qué número se aproxima x?

$EL1$, respondió "x se aproxima a 1 ya que los valores que están en la tabla se aproximan a ese valor". *EL2*, tuvo dificultades para responder este inciso utilizando la tabla, por ello realizó una conversión del registro numérico al gráfico, y esto le ayudó a responder que x se acerca a 1.

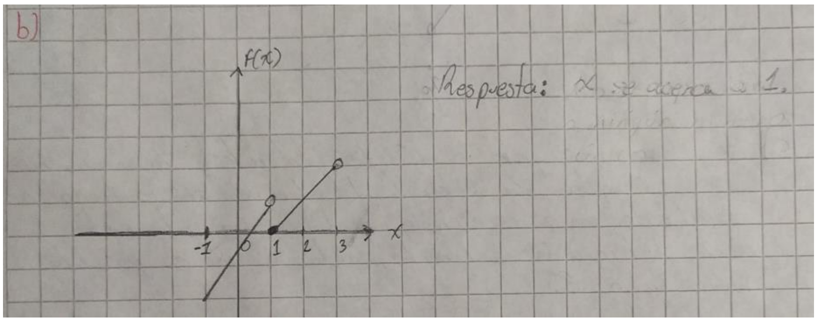


Figura 6: Respuesta de EL2

EM1 y *EM2* respondieron de manera similar, ellos notaron que "x se aproxima a 1, porque según la tabla, la parte de la izquierda, los números van aumentando y se aproximan al 1, mientras que de la parte derecha los números van decreciendo y se aproximan al 1".

ED respondió "1 dado que la diferencia entre el número 1 y los valores que se muestran en la tabla cada vez es más pequeña".

Todos los estudiantes interiorizaron la acción del paso P2AN, para imaginar que una infinidad de valores x se aproximan al valor 1, lo cual evidencia que tienen el Proceso dominio, que corresponde al paso P3ANa) de la DG.

La respuesta que proporciona *EL1* es a partir de la tabla, sin embargo, no especifica cómo encontró tal relación. Por otro lado, *EL2* mostró dificultad para observar a qué valor se aproximaba x, y tuvo que realizar una conversión del registro numérico al gráfico para notar la aproximación solicitada.

Los estudiantes *EM1* y *EM2* dieron su respuesta a partir de las aproximaciones laterales y notaron que ambas se aproximan a 1. Finalmente, *ED* observó la distancia entre 1 y los valores de la sucesión y se percató que los valores de x dados se aproximan cada vez más al valor de interés, es decir, a $x = 1$.

c) ¿A qué número se aproxima $f(x)$?

EL1, contestó “$f(x)$ se aproxima a 0 por la derecha y a 1 por la izquierda”. *EL2* tuvo dificultades para responder este inciso utilizando la tabla, por lo que decidió responder utilizando la gráfica de la función que había realizado previamente y con el apoyo de esta respondió que “ $f(x)$ no se acerca a un solo valor, ya que apartir de la gráfica vemos que cuando x se aproxima por la parte derecha a uno $f(x)$ se va acercando al 0 mientras que cuando cuando x se aproxima a 1 por la izquierda $f(x)$ se aproxima a 1”.

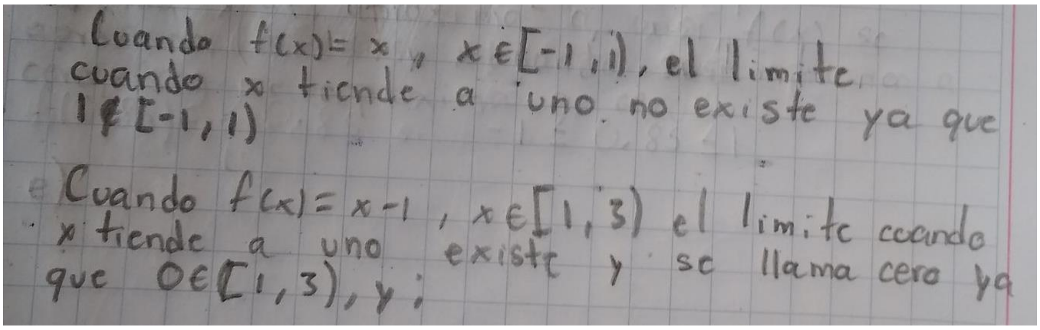
El estudiante *EM1*, respondió “cuando x se aproxima a 1 por la izquierda $f(x)$ se aproxima a 1, mientras que cuando x se aproxima por la parte derecha, es decir se va disminuyendo hacia el uno pues $f(x)$ se va acercando al 0”.

EM2 también notó que $f(x)$ tiene dos aproximaciones, pese a ello, la justificación de su respuesta no es clara, pues menciona “$f(x)$ tiene dos aproximaciones, se aproxima al 0 y al 1, los valores que se aproximan al cero, son los que se aproximan a 1 por la derecha, mientras que los valores que se aproximan al 1 son los valores que se aproximan a 0 por la izquierda”. Se entiende que trata de relacionar x con $f(x)$, pero al no especificar esta relación, su respuesta resulta confusa. Finalmente, *ED* respondió lo siguiente “$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1$”.

En este inciso los estudiantes *EL1, EL2, EM1* y *ED* dan evidencia de haber construido el Proceso rango, porque lograron imaginar una infinidad de valores $f(x)$ que se aproximaban a dos valores, cuando x se aproxima a 1 por la derecha $f(x)$ se va acercando al 0 mientras que cuando cuando x se aproxima a 1 por la izquierda $f(x)$ se aproxima a 1, lo cual corresponde al paso P3ANb.

Notamos que a *EL2* se le facilitó observar a qué valor se aproximaba $f(x)$ en la gráfica, algo que en la tabla quizá no le resultaba evidente. Por otro lado, *ED* ve la aproximación de $f(x)$ a partir de los límites laterales, es decir, logró encapsular los Procesos de aproximación y así pudo concluir que $f(x)$ se aproxima a dos valores, lo cual corresponde al paso P4AN de la DG.

d) Describe el comportamiento de $f(x)$ cuando x se aproxima al valor dado en el inciso b


Cuando $f(x) = x$, $x \in [-1,1)$, el limite cuando x tiende a uno no existe ya que $1 \notin [-1,1)$

Cuando $f(x) = x-1$, $x \in [1,3)$ el limite cuando x tiende a uno existe y se llama cero ya que $0 \in [1,3)$, y:

Figura 7: Respuesta de EL1

En la Figura 7 se aprecia la respuesta de *EL1*, en donde evidencia no coordinar los Procesos dominio y rango, pues en la primera parte de la función centra su atención en lo que sucede en el eje x y esto le dificulta explicar que $f(x)$ no toma el valor de 1. Al parecer, él ubica a $f(x) = 1$ pero en el eje x, pues afirma que 1 no pertenece a $[-1,1)$. También es posible que *EL1* piense que $y = 1$ no puede ser el límite porque en este intervalo la función nunca es igual a 1. Asimismo, en la segunda parte, menciona que $0 \in [1,3)$ lo cual es falso, y esto se puede deber a que nuevamente fijó su atención solo en el eje x.

Por otro lado, *EL2* contestó "parece dar un salto antes de llegar a $x = 1$ y exactamente en $x = 1$ toma otro valor distinto". En la respuesta que da se aprecia que en el registro gráfico se siente más cómodo, pues a partir de la gráfica que realizó se percató de la discontinuidad de la función. Sin embargo, no nos da evidencia de los procesos de aproximación ni de su coordinación.

Los estudiantes *EM1* y *EM2*, respondieron "cuando x va tomando ciertos valores por la izquierda $f(x)$ se aproxima a 1 mientras que cuando x toma valores por la derecha los valores de $f(x)$ se aproximan a 0".

ED respondió "cuando nos acercamos demasiado a 1 por la derecha, $f(x)$ está muy cerca de 0, cuando tomamos valores de x demasiado cerca a 1 por la izquierda $f(x)$ se va pareciendo a 1". La explicación que brinda *ED* es más precisa porque él sí menciona a qué valor se acerca x, mientras que *EM1* y *EM2* no lo hacen.

En este inciso, los estudiantes de posgrado dieron evidencia de coordinar los Procesos dominio y rango, pues a la función f le aplicaron el Proceso dominio en donde x se aproxima al valor 1, para obtener el Proceso en el rango de $f(x)$ y notar que se aproxima a dos valores diferentes, algo que los estudiantes de licenciatura no mostraron.

e) ¿Cuál sería el límite de f cuando x se aproxima a 1? Argumenta tu respuesta

La respuesta que proporcionó *EL1*, fue "$\lim_{x\to 1} x - 1 = 1 - 1 = 0$". En su solución notamos ciertos errores, uno de ellos fue no analizar lo que ocurre con puntos cercanos al valor de interés, el segundo fue olvidar cómo estaba definida la función, pues esta era a trozos, aunque evaluó de manera correcta, no era toda la regla de correspondencia. *EL1* no mostró tener construido este Objeto en el registro numérico-algebraico, pues no logró concebir las aproximaciones en el registro y manifestarlo mediante una conversión en la notación analítica.

Los estudiantes *EL2, EM1 y EM2,* dieron sus respuestas a partir de los límites laterales, las cuales veremos a continuación:

EL2, contestó "No tiene límite, recordemos que el límite es único y debe de encontrarse en el mismo valor tendiendo en ambas direcciones (izquierda y derecha)". *EM1*, respondió "Serían dos límites, uno por la izquierda y otro por la derecha". *EM2* respondió que "no existe ya que $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 0 \neq 1 = \lim_{x\to 1^-} f(x)$ ya que el límite es único y aquí vemos que tiene dos aproximaciones distintas"

El estudiante *ED* contestó " el $\lim_{x\to 1} f(x)$ no existe, ya que por un teorema de cálculo tenemos que el límite de una función existe si y solo sí los límites laterales existen y son iguales y en este caso son diferentes". El estudiante *ED*, además de haber construido los Procesos dominio y rango, mostró tener la concepción Objeto al justificar que el límite no existe.

En las respuestas proporcionadas por *EL2, EM1 y EM2*, nos percatamos que ven a los límites laterales como dos límites y por eso evocan a la unicidad del límite para concluir que este no existe. Ellos recuerdan superficialmente el resultado en el que se afirma que el límite de una función existe en un punto sí y solo si los límites laterales existen y son iguales en ese punto. Lo anterior se afirma porque en lugar de mencionar este teorema ellos justifican la inexistencia del límite por la falta de unicidad, y ven a los límites laterales como si fueran dos límites de la función.

Estos estudiantes han logrado construir los Procesos dominio y rango y en el inciso c) mostraron que pueden coordinarlos para construir un Proceso, pero tienen dificultades para encapsular este Proceso en el Objeto límite bajo la concepción dinámica.

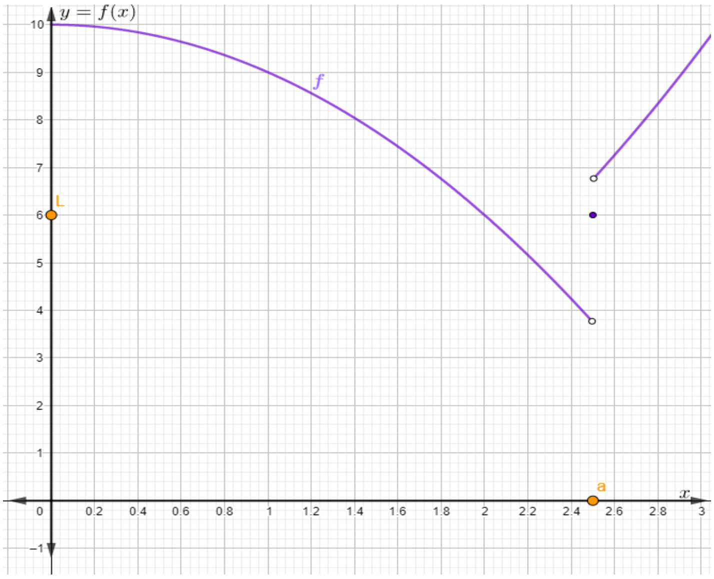
Algo importante que resaltar, es que los estudiantes de la maestría y doctorado, mostraron evidencia de coordinar los Procesos dominio y rango. A diferencia de los de licenciatura, por un lado *EL1*, mostró algunos errores y *EL2* dio una propiedad que observó en la gráfica que previamente había realizado.

Tabla 2: Actividad 1: Registro algebraico numérico

Estructuras, mecanismos y transformaciones semióticas.	**Número de estudiantes**	**Observaciones**
Acción de evaluar la función f en unos puntos, cada punto sucesivo cercano a $x = 1$	5	Todos los estudiantes completaron correctamente la tabla, es decir, manifestaron la concepción Acción.
Proceso dominio Conversión del registro numérico al gráfico	5	Todos dieron evidencia de tener el Proceso dominio. En este inciso *EL2,* realizó una conversión del registro numérico al gráfico para construir el Proceso dominio.
Proceso rango	4	Aunque todos mostraron evidencia de ver las dos aproximaciones laterales, la respuesta que proporcionó *EM2,* es confusa, por lo cual no podemos afirmar que haya construido el Proceso rango.
Coordinación de los Procesos dominio y rango	3	Aunque los estudiantes de licenciatura, se percataron de que la función se aproximaba a dos diferentes valores, no coordinaron los Procesos dominio y rango. Los estudiantes de posgrado mostraron evidencia de coordinar ambos procesos.
Concepción Objeto al justificar que el límite no existe.	1	Los estudiantes *EL1*, *EL2*, *EM1* y *EM2* no mostraron tener construido este Objeto en este registro numérico-algebraico. El estudiante de doctorado fue el único que dio evidencia de la estructura Objeto de la concepción dinámica.

Actividad 2

Utiliza la siguiente representación gráfica de f para responder lo que se te pide.



a) **Si se elige un intervalo de radio $\boldsymbol{\varepsilon = 0.4}$ centrado en $\boldsymbol{L = 6}$ ¿es posible construir un intervalo centrado en $\boldsymbol{a = 2.5}$ de radio $\boldsymbol{\delta}$, de forma que las imágenes $\boldsymbol{f(x)}$ de los $\boldsymbol{x}$ contenidos en ese intervalo se mantengan dentro del intervalo centrado en $\boldsymbol{L}$?**

$EL1$ respondió "No, porque en algunos puntos la gráfica de f toca a los elementos de dicho intervalo". A partir de su respuesta no tenemos evidencia suficiente para decir que haya construido un Proceso con el cual note que no es posible crear el intervalo solicitado. *EL2* contestó "recordemos que por los límites laterales, la coincidencia de estos implican la unicidad del límite, sin embargo en este caso, dados los elementos de la definición de límite no es posible encontrar dicha δ". *EL2* se percató que los límites laterales tenían diferentes aproximaciones, sin embargo, solo menciona que no es posible encontrar la delta solicitada, pero no lo justifica. Además, en su respuesta se observa que sigue confundiendo la existencia del límite de una función en un punto, con la unicidad del límite.

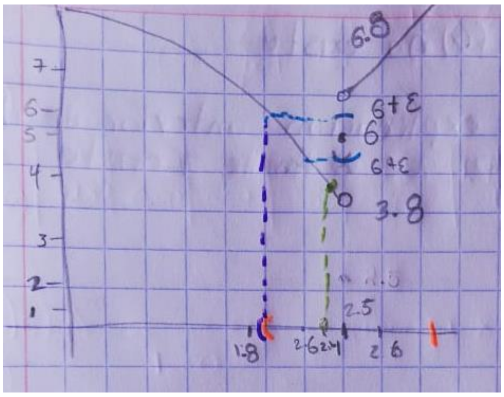


Figura 8: Respuesta de EM1

En la Figura 8, se aprecia la respuesta de *EM1* quién a través de la gráfica dio la siguiente solución: "Nos damos cuenta que el intervalo que debe existir debe de iniciar por 1.8, entonces dentro de este intervalo debe estar 2.4 y su imagen es de 4.2, claramente ese valor no está en el intervalo $(6-\varepsilon, 6+\varepsilon)$, por lo tanto, no se puede encontrar dicho intervalo". *EM1* muestra cómo debería ser un extremo del intervalo de radio delta solicitado, pero, olvidó la dependencia que tiene delta de épsilon, lo que muestra cierta dificultad con los cuantificadores.

Observación: el intervalo centrado en $L = 6$ de radio $\varepsilon = 0.4$ lo dibujó sobre la gráfica de la función f y no en el eje Y. Es posible que lo anterior le haya dificultado justificar la no existencia de delta.

El estudiante *EM2*, respondió que "no, porque la imagen de $f(x_0)$ llamémosle una singularidad, dista mucho de ambas partes de la gráfica, por más que podamos encontrar un delta que abarque puntos de la gráfica, esas imágenes de esos x no van a poder caer en tal intervalo". *EM2* pasó desapercibido que algunos valores de x van a estar dentro del intervalo de radio δ centrado en $a = 2.5$ lo cual muestra que *EM2* tiene alguna dificultad con los cuantificadores. Asimismo, en su respuesta olvida la dependencia que tiene delta de épsilon.

El estudiante *ED*, respondió lo siguiente: "No, ya que dada cualquier $\delta > 0$, en el intervalo $(a-\delta, a+\delta)$ siempre que se encuentra el punto $\frac{a+(a+\delta)}{2}$ es tal que $L + \varepsilon < f(\frac{a+(a+\delta)}{2})$".

ED determinó que no hay un intervalo alrededor del valor en el cual uno está conjeturando el límite (es decir a) para el cual el valor de la función, aparte del que está en ese punto, está lo suficientemente cerca de L; PASO DG4(B)

Los estudiantes *EL1, EL2, EM1* y *EM2* mencionaron que no existia tal intervalo, sin embargo, no les fue posible mostrar el Proceso solicitado. En esta pregunta se observa cómo la etapa académica influye al momento de responder, pues *ED* fue el único en dar una respuesta aceptable utilizando la negación de la definición formal del límite de manera precisa, empleando correctamente los cuantificadores y respondiendo a través de la concepción métrica, *ED* mostró que para cualquier delta hay ciertos valores que estarán fuera del intervalo solicitado, lo cual corresponde al paso DG5, pues se percató de que no hay un caso en el que sea posible encontrar el intervalo solicitado.

b) Apóyate en tu respuesta a la pregunta anterior, deduce si $L = 6$ es el límite de la función f en el valor $a = 2.5$. Argumenta tu respuesta.

EL1 respondió “Sí, ya que en $a = 2.5$ dicho punto si toca a la función si pertenece. Por lo cual el límite sería 6 de acuerdo a como se ve la gráfica”. La respuesta que da *EL1* evidencia que tiene dificultad con el valor de la función y el límite de la función pues él observa que cuando $a = 2.5$ hay un punto en la gráfica que vale 6 y es al que llama el límite de la función. En la respuesta que dio muestra no haber construido el Objeto límite, pues no eligió una medida de proximidad al valor límite *L* a lo largo del eje *Y* ni determinó si hay un intervalo alrededor del valor en el cual uno está conjeturando el límite para el cual el valor de la función, está lo suficientemente cerca de *L*.

El estudiante *EL2*, contestó “No lo es, si usamos lo elementos dados dentro de la definición de límite, no encontramos la δ que satisface, lo cual resulta en la negación de dicha definición”. A partir de su respuesta notamos que tiene dificultades con los cuantificadores, aunque observa que 6 no es el límite de la función, olvidó que la negación de la definición de límite contiene la expresión “para toda delta” en lugar de “no encontramos la δ”. *EL2* muestra que no ha construido un Proceso en la concepción métrica que le permita notar que el límite no existe.

El estudiante *EM1* respondió “por la gráfica nos damos cuenta que si nos acercamos por la izquierda el límite es 3.8 y si nos acercamos por la derecha el límite es 6.8, por lo tanto, no tiene límite en $a = 2.5$”. *EM1* nos da evidencia de haber construido un Proceso el cual le permitió ver que el límite no existe. Sin embargo, *EM1* manifiesta la estructura Proceso en la concepción dinámica y no en la métrica como se esperaba. En este registro (gráfico), *EM1* se percató de que los límites laterales eran diferentes, lo cual le permitió concluir que el límite no existe, algo que no realizó en la actividad 1 (planteada en el registro numérico-algebraico), pues aunque los límites laterales que había encontrado eran diferentes, no pudo concluir que el límite no existía, él mencionó que había dos límites.

El estudiante *EM2* constestó lo siguiente: "El límite no existe, debido a que la definición de límite no se cumple, en la parte que menciona para cualquier $\varepsilon > 0$, al no cumplirse esa parte no existe el límite en ese valor". El estudiante *EM2* muestra que ha construido un Proceso en la concepción métrica que le permitió concluir que el límite no existe en $a = 2.5$. Él se apoyó en su respuesta del inciso a) para justificar la no existencia del límite.

La respuesta del estudiante *ED*, fue la siguiente: "No, ya que de la gráfica podemos observar que:

$\lim_{x \to 2.5^+} f(x) = 3.8 \neq \lim_{x \to 2.5^-} f(x) = 6.8$ y como los límites son distintos, el límite de esa función no existe. El estudiante *ED* muestra el Objeto límite de la concepción dinámica, él observó cómo eran las aproximaciones laterales y el notar que son diferentes le permitió concluir que el límite no existe. Sin embargo, al igual que *EM1* no da evidencia del Proceso de la concepción métrica como se esperaba. La diferencia que hay entre la respuesta de *ED* y la que proporcionó *EM1*, es la notación formal que utilizó *ED*.

En este inciso, los estudiantes *EL2, EM1, EM2* y *ED* respondieron que la función no tiene límite en $a = 2.5$, no obstante, no todos dieron evidencia de haber construido un Proceso que les permitiera notar que no existia el límite de la función en ese punto.

Tabla 3: Actividad 2: Registro gráfico

Estructuras, mecanismos y transformaciones semióticas.	**Número de estudiantes**	**Observaciones**
Proceso, al mencionar que no es posible construir el intervalo solicitado. Conversión del registro verbal al gráfico.	1	Aunque todos mencionan que no existe el intervalo solicitado, *ED* fue el único estudiante en mostrar el Proceso esperado, pues realizó la conversión necesaria del registro verbal al gráfico, para observar que el intervalo solicitado no era posible de construir, lo cual corresponde al paso DG5.
Proceso, al mencionar que el límite no existe.	3	El estudiante *EL1* no dio evidencia de la estructura Proceso. *EL2* mostró dificultad con los cuantificadores.

		Los estudiantes *EM1* y *ED* construyeron un Proceso que les permitió concluir que el límite de esa función no existe. La diferencia que hubo entre *EM1* y *ED* fue la notación ya que *ED* mostró más formalidad, además mostró el Objeto límite de la concepción dinámica. Asimismo, el estudiante *EM2,* fue el único en evidenciar que el límite no existe utilizando la concepción métrica del concepto de límite.

Actividad 3

Prueba que el $\boldsymbol{\lim_{x \to 2} f(x) = 4}$**, si** $\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} x^2, & si\ \ x \neq 2 \\ 1, & si\ \ x = 2 \end{cases}}$

EL1 respondió "El límite cuando $f(x) = x^2$, si x es igual a 2, cuando x tiende a 2, el límite es 4. El límite cuando $f(x) = 1$, si x no es igual a 2, cuando x tiende a 2, el límite es 1". *EL1* muestra dificultades para interpretar la regla de correspondencia de la función dada, pues el invirtió los valores que toma $f(x)$ cuando $x \neq 2$ y cuando $x = 2$.

En esta actividad él ve a la función como dos funciones y calcula el límite para cada una de ellas, evaluando la función en la regla de correspondencia que no pudo interpretar correctamente. A diferencia de lo que realizó en la Actividad 1, en donde evaluó el valor de interés en la regla de correspondencia de su preferencia. También es importante agregar que *EL1* no hizo intentos de probar la afirmación como lo solicita la actividad.

En lo que respecta a *EL2* y *EM2*, intentaron hacer la prueba usando la definición formal de límite, es decir, quisieron desencapsular el Objeto límite construido en el registro algebraico y revertir los procesos de aproximación y validación del candidato a límite. Sin embargo, mostraron dificultades para acotar la función, a continuación, veremos sus respuestas:

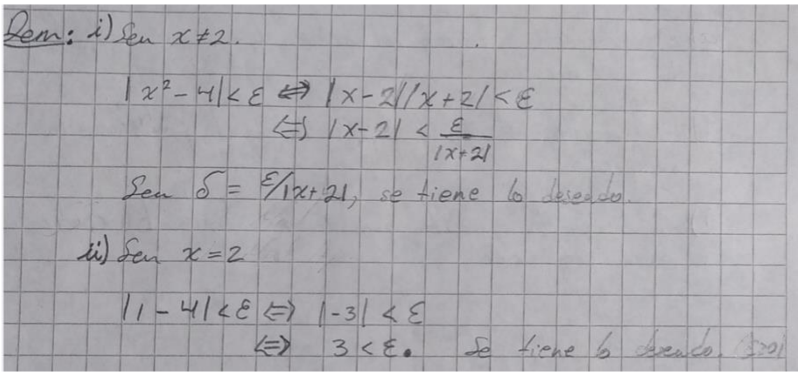


Figura 9. Respuesta del estudiante EL2 Actividad 3

En la Figura 9 observamos la respuesta de *EL2*, en donde vemos que recuerda la definición formal de límite, sin embargo, en el inciso i) olvidó acotar el término $|x + 2|$ lo que lo lleva a proponer a delta en términos de x. Intentó determinar si hay un intervalo alrededor del valor en el cual está conjeturando el límite (es decir a) para el valor de la función, que esta lo suficientemente cerca de *L*. Sin embargo, no logró desencapsular el Objeto límite propuesto.

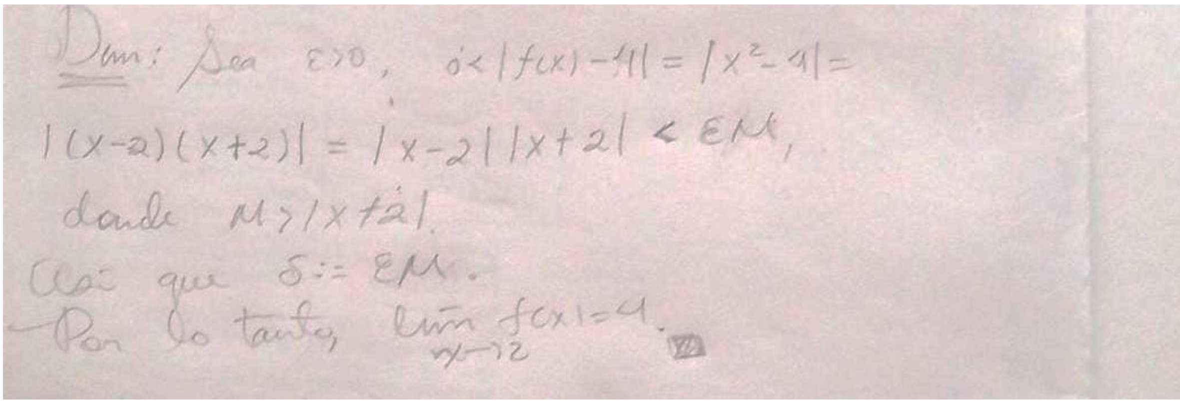


Figura 10. Respuesta del estudiante EM2 Actividad 3

En la Figura 10, se muestra la respuesta de *EM2*, intentó determinar si hay un intervalo alrededor del valor en el cual está conjeturando el límite (es decir a) para el valor de la función, que esta lo suficientemente cerca de *L*. Mostró ciertas dificultades para desencapsular el Objeto de límite, debido a que no acotó correctamente la función. Cuando obtuvo que $|(x + 2)(x - 2)| < \varepsilon$, *EM2* tenía que haber establecido la desigualdad $|x - 2| \leq 1$ y llegar a que $|x + 2| \leq 5$ y así obtener que sí $\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{5}, 1\right\}$, entonces $|f(x) - 4| = |x^2 - 4| = |x - 2||x + 2| < 5|x - 2| < \varepsilon$. Pues en el delta que propone, no especifica su valor, asimismo, no menciona que el valor de delta depende del mínimo entre el propuesto y el obtenido.

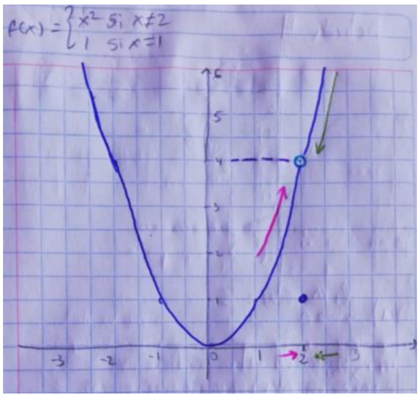


Figura 11. Respuesta del estudiante EM1 Actividad 3

El estudiante *EM1* tuvo dificultades para responder este inciso utilizando la notación algebraica. Y realizó una conversión del registro algebraico al gráfico, lo cual se observa en la Figura 11. Con el apoyo de la gráfica él respondió, “si $x \rightarrow 2$ por la izquierda entonces $f(x) \rightarrow 4$, es decir, cuando x se aproxima a 2 por la izquierda, $f(x)$ se aproxima a 4 y si $x \rightarrow 2$ por la derecha entonces $f(x) \rightarrow 4$ entonces de manera intuitiva podemos ver que $\lim_{x\rightarrow 2} f(x) = 4$”. A partir de su respuesta evidencia que desencapsula el Objeto límite representado en el registro algebraico y revierte los procesos de aproximación y validación del candidato a límite a través de una conversión de los límites laterales en el registro gráfico, lo cual muestra el Objeto mental de límite en su concepción dinámica, pues concibe las aproximaciones en el registro numérico como una totalidad y manifestó una conversión en la notación analítica, $\lim_{x\rightarrow 2} f(x) = 4$, lo cual corresponde al paso P4G.

ED respondió: sea $\varepsilon > 0$ definimos $\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{7}, 1\right\} > 0$, si $0 < |x-2| < \delta$ entonces $0 < |x-2| < 1$ y $0 < |x-2| < \frac{\varepsilon}{7}$, $-1 < x-2 < 1$ entonces $5 < |x+2| < 7$ entonces $|f(x)-4| = |x^2-4| = |x-2||x+2| < 7|x-2| < \varepsilon$. Por lo tanto $\lim_{x\rightarrow 2} f(x) = 4$. Lo anterior muestra que *ED*, logró desencapsular el Objeto límite de la concepción métrica construido en el registro algebraico y revirtió los procesos de aproximación y validación del candidato a límite en términos de desigualdades, lo cual corresponde al paso DG4C. Además, realizó los tratamientos necesarios en el registro algebraico con el fin de expandir la información y responder lo solicitado.

Respecto a esta actividad, *EM1* y *ED* fueron los únicos que lograron desencapsular el Objeto límite representado en el registro algebraico y revirtieron los procesos de aproximación y validación del candidato a límite. *EM1* hace lo anterior en la concepción dinámica y *ED* lo hace en la concepción métrica del límite de una función.

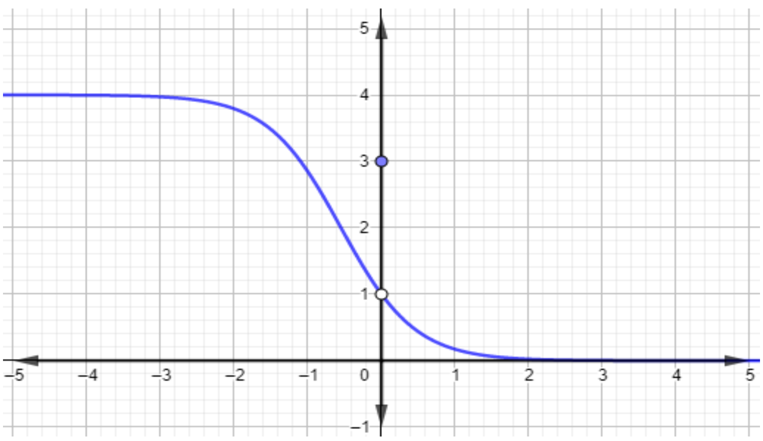
Esta pregunta nos permite apreciar cómo influye la etapa académica en las respuestas, pues *ED* es el único que prueba que el límite de la función es cuatro utilizando correctamente la definición formal, incluyendo los cuantificadores y realizando las acotaciones correspondientes. Aunque el δ que propuso posiblemente lo encontró por tanteo y le funcionó, no obstante, ese valor es más pequeño que el delta correcto. Cabe mencionar, que él fue el único que notó que el delta que se tenía que elegir se tomaba del mínimo entre uno que se propone y otro que se calcula a partir del primero.

Tabla 4: Actividad 3: Registro algebraico

Estructuras, mecanismos y transformaciones semióticas.	**Número de estudiantes**	**Observaciones**
Desencapsular el Objeto límite Tratamientos en el registro algebraico.	2	Los estudiantes *ED* y *EM1* lograron desencapsular el objeto de límite, *ED* lo hizo en la concepción métrica, mientras que *EM1* en la concepción dinámica. El estudiante *EM1*, realizó una conversión del registro algebraico al verbal, para justificar su respuesta. Mientras que *ED*, realizó los tratamientos correspondientes para responder a la actividad dada.

Actividad 4

Considera la gráfica de la función f y determina qué expresiones de límite son correctas y cuáles no, argumenta tus respuestas



a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 3$

b) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$

c) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)\ no\ existe$

El estudiante *EL1* respondió “ a) no es correcta ya que cuando $x \to 0$, su límite no puede ser 3 por cómo se muestra la gráfica. b) es la respuesta correcta ya que $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$ por cómo se muestra la gráfica de la función. c) no puede ser ya que $f(x)$ es continua”.

En la respuesta que proporcionó *EL1* observamos que logró hacer las conversiones del registro algebraico al gráfico, las cuales le permitieron transformar el objeto límite expresado algebraicamente en el objeto límite representado en la gráfica de la función. Sin embargo, no logró hacer una conversión del registro gráfico al verbal para justificar su respuesta, pues se limitó a responder “como se muestra en la gráfica”. Asimismo, muestra cierta confusión con las funciones continuas, pues la gráfica que proporcionamos no lo es y él afirma lo contrario.

A partir de las respuestas del estudiante *EL1* podemos ver que no logró desencapsular el Objeto de límite construido en su concepción dinámica en el registro gráfico y tampoco revirtió los procesos de aproximación y validación del candidato a límite.

EL2 respondió “a) es incorrecta, hacer al valor $L = 3$ no satisface la definición, ya que no es posible encontrar los intervalos, b) es correcta, el uso de límites laterales justifica la respuesta, c) es incorrecta por el inciso b)”.

Aunque responde que el inciso a) es incorrecto no especifica qué parte de la definición del límite es la que no se satisface. Respecto al inciso b) él hace referencia a los límites laterales, se sobreentiende que como las aproximaciones laterales son iguales, el límite existe y en este caso es 1. La justificación que da para el inciso c) no tiene sentido, pues el hecho de que b) sea correcta no implica que c) tenga que ser incorrecta.

El estudiante *EM1* respondió “falso, gracias a la gráfica nos dimos cuenta de que cuando nos vamos acercando a la izquierda, los puntos de $f(x)$ se van pareciendo a 1, análogamente, los puntos por la derecha se van pareciendo a 1 y no a 3, que es lo que dice la pregunta y los incisos b) y c) son consecuencia de a), es decir, b) es verdadero y c) es falso”. Respecto al inciso a) se observa que *EM1* logró desencapsular el Objeto de límite construido en el registro gráfico, sin embargo, la argumentación que da para los demás incisos es incorrecta, pues afirma que como no se cumple a) entonces b) es verdadero.

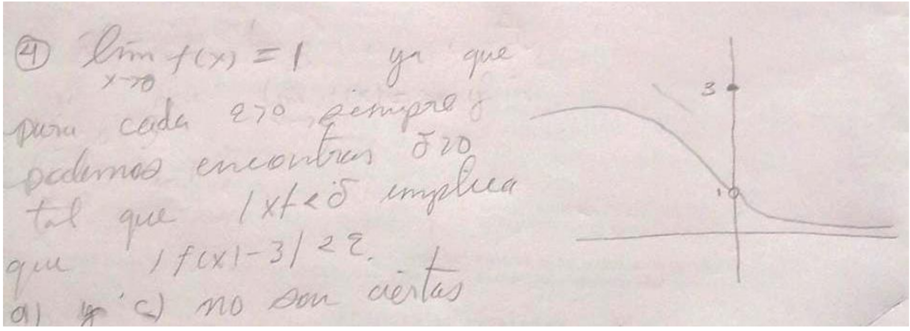


Figura 12. Respuesta del estudiante EM2 Actividad 4

En la figura 12, se muestra la respuesta de *EM2*, quien afirma que el inciso b) es verdadero utilizando la definición formal de límite, esto le permitió concluir que los incisos restantes eran falsos. A partir de sus respuestas *EM2* está evidenciando un Proceso de la concepción métrica que corresponde al PASO DG5 en el registro gráfico.

ED argumentó sus respuestas de la siguiente manera: "a) el $\lim_{x\to 0} f(x)$ no puede ser 3, pues si tomamos $\varepsilon = 0.2, y\ \delta > 0$ tomamos cualquier intervalo de la forma $(-\delta, +\delta)$ con $\delta > 0$, van a existir puntos $a\ \in (-\delta, +\delta)$ tales que $f(a) \notin (3-\varepsilon, 3+\varepsilon)$, donde $f(a) = \frac{\delta}{2}$.

Para el inciso b) respondió "es cierto, ya que dado cualquier $\varepsilon > 0$ no importa qué tan pequeño sea, nos fijamos en las rectas $y = 1+\varepsilon$ y $y = 1-\varepsilon$, estas rectas intersectan a la gráfica de la función f en un único punto, ya que la gráfica de f es inyectiva (pues las rectas horizontales a la gráfica solo se intersectan en un punto), digamos $f(a)$ para $y = 1+\varepsilon$ y $f(a_1)$ para $y = 1-\varepsilon$, consideremos el mínimo entre a y a_1, es decir, $\delta = \min\{a, a_1\} > 0$, será el que buscamos. Y el inciso c) es falso por b).

ED muestra haber desencapsulado el Objeto de límite de una función en su concepción métrica, a diferencia de los otros estudiantes, el vocabulario que ocupa es más formal y utiliza la definición formal de límite para demostrar que el inciso a) es falso, propone una épsilon y un delta y construye los intervalos que se mencionan en la definición, en donde se percata que existe un valor en particular al cual llama $f(a)$ que no va a estar en el intervalo $(3-\varepsilon, 3+\varepsilon)$, por lo tanto, no se cumple la definición. Además, él mostró que el inciso b) es verdadero utilizando la definición formal de límite y usó otras propiedades como que la función f es inyectiva. Asimismo, *ED* realizó la conversión del registro gráfico al algebraico y todos los tratamientos necesarios en el registro algebraico para poder concluir que el inciso b) es verdadero.

En esta actividad todos lograron identificar cuáles expresiones eran falsas y cuál es verdadera pero los argumentos que dieron fueron muy diferentes y solo *ED* dio evidencia de haber desencapsulado el Objeto de límite construido en la concepción dinámica. Podemos notar que la etapa académica influye, pues solamente el estudiante de doctorado logró desencapsular el Objeto de límite en el registro gráfico y justificar sus respuestas con mayor formalidad y en términos de ε y δ.

Tabla 5: *Actividad 4: Registro gráfico*

Estructuras, mecanismos y transformaciones semióticas.	**Número de estudiantes**	**Observaciones**
Desencapsular el Objeto de límite. Conversión del registro algebraico al gráfico.	1	En esta actividad, todos los estudiantes realizaron la conversión del registro algebraico al gráfico. *ED* muestra haber desencapsulado el Objeto de límite, utilizando la concepción métrica de límite para justificar la veracidad de las afirmaciones propuestas y también notó que la función *f* es inyectiva.

Actividad 5

Una función f se comporta de la siguiente manera cerca del valor $a = 5$ (perteneciente al dominio de la función):

Afirmación 1. A medida que x se aproxima al valor $a = 5$ desde la izquierda, $f(x)$ se aproxima al valor 8.

Afirmación 2. A medida que x se aproxima al valor $a = 5$ desde la derecha, $f(x)$ se aproxima al valor 4.

Con la información anterior realiza lo que se te pide.

a) Elabora una representación gráfica aproximada para ilustrar el comportamiento de f para valores de x cerca del valor $a = 5$. (Utiliza una función lo más sencilla posible).
b) Escribe las afirmaciones 1 y 2 en forma simbólica.
c) Argumenta si el $\lim_{x\to 5} f(x)$ existe o no.

a) **Elabora una representación gráfica aproximada para ilustrar el comportamiento de f para valores de x cerca del valor $a = 5$. (Utiliza una función lo más sencilla posible).**

Los estudiantes *EL1* y *EM2* tuvieron un error respecto al valor de $a = 5$. Por un lado, EL1 tomó los valores de los extremos en el valor $a = 5$ (Figura 13). Algo curioso es la forma en la que pone las flechas para mostrar a qué número se aproximan los valores de $f(x)$.

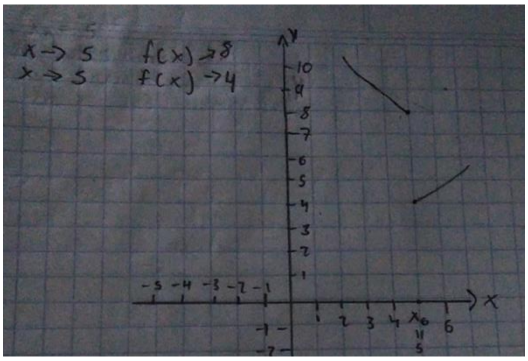


Figura 13. Respuesta del estudiante EL1 Actividad 5

En la Figura 14 podemos observar la respuesta que proporcionó *EM2*, en donde se aprecia que olvidó incluir al 5 en el dominio de la función, por lo que la conversión del registro verbal al gráfico no fue correcta del todo.

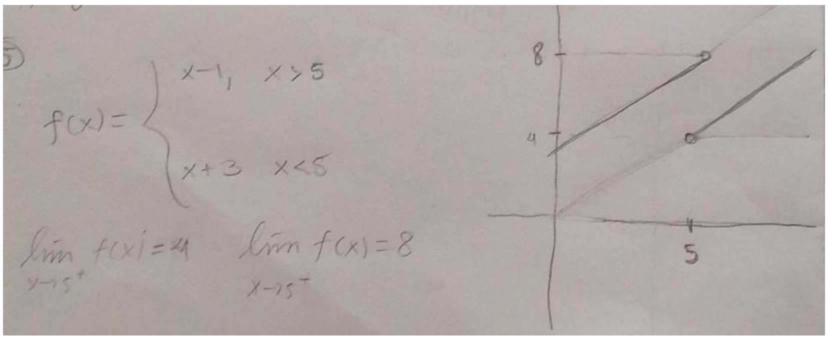


Figura 14. Respuesta del estudiante EM2 Actividad 5

En este inciso, los estudiantes *EL2*, *EM1* y *ED* hicieron gráficas muy parecidas a la que se observa en la Figura 15, lo cual nos da evidencia de que realizaron una conversión del registro verbal al registro gráfico y reflexionaron acerca de la cercanía o proximidad de los valores de x al valor $a = 5$ y de los valores $f(x)$ en el rango. También, representaron correctamente la pertenencia de $a = 5$ al dominio de la función.

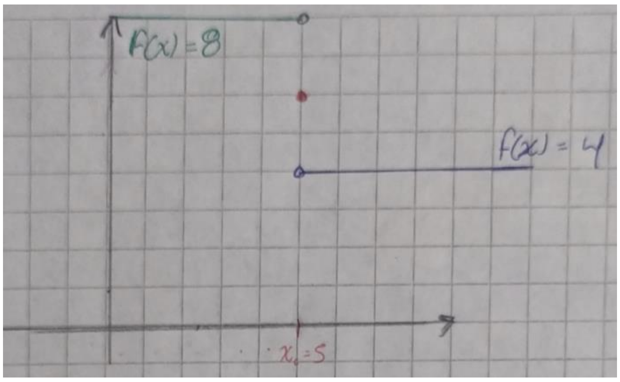


Figura 15. Respuesta del estudiante EL2 Actividad 5

b) Escribe las afirmaciones 1 y 2 en forma simbólica.

Todos los estudiantes respondieron de la siguiente manera:

$$\lim_{x\to 5^-} f(x) = 8 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 5^+} f(x) = 4$$

A partir de sus respuestas observamos que realizaron una conversión del registro verbal al registro algebraico.

c) Argumenta si el $\lim_{x\to 5} f(x)$ existe o no.

EL1 respondió "Dado que los límites laterales son diferentes, por la izquierda es 8 y por la derecha es 4, por lo cual $\lim_{x\to 5} f(x)$ no existe".

EL2 y *EM2* respondieron $\lim_{x\to 5} f(x)$ no existe ya que $\lim_{x\to 5^-} f(x) = 8 \neq \lim_{x\to 5^+} f(x) = 4$".

EM1 respondió "no existe, por el inciso b, nos damos cuenta que los valores de $f(x)$ se aproximan por la izquierda a 8 y por la derecha a 4".

ED, respondió " $\lim_{x\to 5} f(x)$ no existe, ya que un teorema de cálculo nos asegura que si el límite existiera, entonces los límites laterales existen y son iguales, lo cual por el inciso b) concluimos que no existe".

En este inciso todos los estudiantes desencapsularon el Objeto de límite construido y revirtieron los procesos de aproximación y validación del candidato a límite, a través de una serie de enunciados. Además, concluyeron que el límite no existe y lo argumentaron de la siguiente manera:

EL1 da un argumento correcto y lo da en el registro verbal, a diferencia de *EL2* y *EM2* que ocupan el registro algebraico para responder. Mientras que *ED* hace alusión a un teorema de cálculo que justifica por qué el límite no existe.

Se aprecia que el registro verbal fue favorable para *EL1* ya que en las actividades anteriores que utilizaban los registros numérico y algebraico no fue capaz de utilizar los límites laterales, mientras que en este registro si los logró usar adecuadamente.

Tabla 6: Actividad 5: Registro verbal

Estructuras, mecanismos y transformaciones semióticas.	**Número de estudiantes**	**Observaciones**
Conversión del registro verbal al registro gráfico, y la Coordinación del Proceso dominio con el Proceso rango.	3	Los estudiantes *EL2*, *EM1* y *ED* realizaron la conversión del registro verbal al gráfico. Las gráficas que realizaron todos los estudiantes fueron de funciones lineales.
Conversión del registro verbal al registro algebraico, y la Coordinación del Proceso Dominio con el Proceso Rango.	5	Todos los estudiantes lograron hacer la conversión del registro verbal al registro algebraico y la coordinación de los Procesos dominio y rango.
Desencapsularon el Objeto de límite	5	A diferencia de las otras actividades, en esta el registro gráfico favoreció a los estudiantes para desencapsular el Objeto de límite.

Análisis de resultados

A partir de las respuestas proporcionadas por los estudiantes se obtuvieron los siguientes resultados:

Todos los informantes mostraron tener la estructura **Acción** en el registro algebraico-numérico, pues lograron completar correctamente la tabla proporcionada en la Actividad 1. Este resultado coincide con el de Analco (2019) quien aplicó un cuestionario similar a estudiantes de licenciatura en donde todos mostraron esta estructura.

La estructura **Proceso** apareció en algunas actividades y las respuestas que se obtuvieron fueron diversas, pues se notó la influencia que tuvieron la etapa académica y el registro semiótico. Por ejemplo: en la Actividad 1 todos los alumnos manifestaron los Procesos dominio y rango. En esta actividad *EL2* realizó una conversión del registro numérico al gráfico para evidenciar los Procesos dominio y rango.

Con respecto a la coordinación de los Procesos mencionados previamente *EL1* y *EL2* no lograron coordinarlos, por un lado, *EL1* centró su atención en el eje X, lo cual no le permitió relacionar los valores con $f(x)$. Mientras que *EL2*, a partir de la gráfica que construyó previamente, describió una relación que observó en ella, pero sin coordinar los procesos solicitados. Los resultados de esta actividad coinciden con los de Cottrill et al. (1996), Pons (2014), Fernández et al. (2018), quienes indican que coordinar estos Procesos resulta complicado a los estudiantes y por ello la concepción dinámica de límite no es tan sencilla de alcanzar como suele pensarse.

En la Actividad 2, que está escrita en el registro gráfico, los estudiantes no mostraron todos los procesos que se evaluaban. En el inciso a) que solicita mencionar si es posible construir el intervalo con ciertas características, los estudiantes de licenciatura y maestría tuvieron dificultades con los cuantificadores, lo cual refuerza lo mencionado por Cottrill et al. (1996), quienes argumentan que para el concepto de límite se debe tener una concepción de cuantificación bien construida. En cuanto al inciso b), *EL1* tuvo dificultades con el concepto de función y el límite de la función en un punto, lo cual concuerda con lo reportado por Sierpinska (1987) quien menciona que en la construcción del límite de una función hay obstáculos ligados a la noción de función. Mientras que *EL2* tuvo dificultades con la negación de la definición de límite.

No obstante, el estudiante *ED* evidenció el Proceso solicitado en a), negando correctamente la definición de límite, lo cual muestra que tiene construido el esquema de cuantificación. En el inciso b), los estudiantes de posgrado mostraron un Proceso que les permitió concluir que el límite no existe. En sus respuestas se apreció cómo la etapa académica influye, pues su experiencia les permitió argumentar correctamente que no existía el límite solicitado. Es importante mencionar que *EM2* mostró el Proceso de la concepción métrica.

La Actividad 5 está escrita en el registro verbal, el cual parece ser favorable a todos los alumnos, pues en el inciso a) *EL2, EM2* y *ED* realizaron la conversión del registro verbal al gráfico y coordinaron los Procesos dominio y rango. En cuanto al inciso b), todos los alumnos realizaron la conversión del registro verbal al algebraico solicitada y coordinaron los Procesos dominio y rango. Quizá con estos registros están más familiarizados o se sientan más cómodos.

En cuanto a la estructura **Objeto** de la concepción dinámica, en la Actividad 1, solo *ED* mostró tenerla. En la Actividad 3, escrita en el registro algebraico, solamente *EM1* y *ED* lograron desencapsular el objeto de límite, pues como la función estaba dada a trozos causó algunas dificultades al momento de acotar la función (*EL2*, *EM2*), y de observar las aproximaciones laterales (*EL1*). Esto coincide con lo mencionado por Pérez (2019) quien reportó en su investigación a nivel bachillerato, que uno de los conceptos previos fundamentales que necesitan tener los alumnos es el de función y mencionó que cuando una función es definida a trozos los estudiantes muestran dificultades, porque solo observan una parte de la función, ya sea que consideren la aproximación lateral derecha o izquierda y esto en ocasiones provoca que no se coordinen los Procesos dominio y rango.

En la Actividad 4, que está en el registro gráfico, todos realizaron las conversiones del registro algebraico al gráfico, no obstante, *EL1, EL2* y *EL3* no desencapsularon el Objeto de límite, pues las respuestas que dieron no fueron claras, mencionaban que si un inciso era verdadero los otros eran falsos o si uno era falso el otro verdadero, trataron de utilizar la ley de tricotomía pero olvidaron que se utiliza para los números reales y *EL1* evidenció tener dificultades con las funciones, él mencionaba que la función dada era continua cuando no era cierto. Por otro lado, *EM2* y *ED* lograron desencapsular el Objeto de límite en la concepción métrica, pues realizaron todas las conversiones necesarias y utilizaron la definición del límite de una función. Una diferencia entre ambos estudiantes es que *ED* notó que la función es inyectiva y su argumentación fue más precisa, incluso propuso el valor de épsilon que cumplía con lo solicitado.

Finalmente, en la Actividad 5 todos los alumnos desencapsularon el Objeto límite, lo cual muestra la influencia que pueden llegar a tener las diferentes representaciones semióticas, pues en los otros registros la conversión y los tratamientos no se realizaron correctamente, quizá el registro verbal es en el que más cómodos se sienten estos estudiantes.

CONCLUSIONES

Este trabajo fue de corte cualitativo con un enfoque interpretativo, en el que se analizó la comprensión del concepto de límite de una función de variable real en cinco estudiantes, quienes estudiaban matemáticas en la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas (BUAP) y cursaban diferentes etapas de los programas de licenciatura y posgrado. Para la interpretación y análisis de las respuestas se emplearon las teorías APOE y de Representaciones Semióticas para explorar cómo es la evolución de las estructuras mentales e identificar los tratamientos y conversiones que tienen los estudiantes, así como identificar si hay dificultades que prevalecen a lo largo de la formación matemática.

En la literatura revisada, no se encontró ninguna investigación de este tipo, aunque sería bastante interesante ver la evolución de un concepto en una persona a través de las diferentes etapas académicas. Sin embargo, como toma mucho tiempo realizarlo, se hizo con estudiantes de diferentes etapas de su formación, para tener una idea de cómo se va dando esa evolución de las estructuras y mecanismos mentales. Asimismo, conocer cómo influyen los registros semióticos y su importancia que tienen para comprender un concepto matemático.

A partir del análisis de las respuestas se encontró que todos los participantes tienen la concepción Acción del límite de una función y los Procesos dominio y rango de la concepción dinámica. En cuanto a la coordinación de estos Procesos en el registro algebraico-numérico, los estudiantes de posgrado dieron evidencia de tenerlo. Mientras que los alumnos de licenciatura no lo evidenciaron, en su lugar mencionaron otras características de la función. Lo anterior coincide con Cottrill et al. (1996), Pons (2014) y Fernández et al. (2018), quienes indican que a los estudiantes les resulta complicado coordinarlos. A diferencia del registro anterior, todos lograron coordinar los Procesos dominio y rango en el registro verbal, lo cual nos muestra el impacto que puede llegar a tener un registro semiótico, por esa razón es importante trabajar en todos ellos, para lograr tener un aprendizaje íntegro del concepto.

En relación con el Proceso mental que se requiere para determinar si el límite de la función existe o no, los alumnos de posgrado evidenciaron tenerlo en la concepción dinámica. En cuanto a la estructura de Objeto, en la concepción dinámica, vemos que está en proceso de construcción para los estudiantes de licenciatura y maestría, pues dan evidencia de tenerla en el registro verbal, pero en los demás registros no todos la mostraron.

A partir de las respuestas proporcionadas por los informantes, se conjetura la siguiente evolución de la comprensión del límite de una función:

Primera mitad de la licenciatura: se mostraron la estructura Acción y los Procesos dominio y rango de la concepción dinámica del límite de una función pero no del Proceso que surge de coordinar los Procesos dominio y rango. También, se evidenciaron dificultades al realizar transformaciones semióticas.

Segunda mitad de la licenciatura: se mostraron la estructura Acción, los Procesos dominio y rango, además, se evidenció la coordinación de estos en algunos registros semióticos. Sin embargo, al intentar usar la métrica hubo dificultades en los cuantificadores.

Primer año de maestría: se mostró la estructura Acción, los Procesos dominio y rango, así como la coordinación de estos en la concepción dinámica del límite de una función en todos los registros semióticos evaluados. En los intentos de usar la métrica, relativa a la definición formal de límite con épsilon y delta, se presentaron dificultades con la negación de los cuantificadores.

Segundo año de maestría: similar al del primer año de maestría, pero con dificultades en la conversión del registro verbal al gráfico.

Doctorado: se apreciaron todas las estructuras y transformaciones semióticas requeridas en las actividades, así como un uso correcto de los cuantificadores y un vocabulario matemático más preciso y formal.

Derivado de lo anterior, algunas recomendaciones son: trabajar con las distintas representaciones semióticas, así como con actividades que promuevan la coordinación de los procesos dominio y rango de la concepción dinámica del límite de una función; el uso de cuantificadores y la construcción de la estructura Proceso con el uso de la métrica que lleve a la comprensión de la definición formal del límite de una función.

De acuerdo con la teoría APOE, los estudiantes alcanzarán una construcción del límite si hacen las Acciones, construyen los Procesos dominio y rango, los coordinan para construir otro Proceso y este lo encapsulan en el Objeto Límite de una función en un punto. En Morante (2020) se puede conocer una secuencia de 25 actividades basadas en esta teoría y los resultados alentadores de su aplicación a un grupo de nivel superior (ingeniería). Está pendiente poner a prueba esta secuencia en estudiantes de Matemáticas, pues los informantes del estudio que aquí se presentó no aprendieron sobre este concepto con un diseño basado en la teoría APOE.

Referencias

Amaya De Armas, T., Castellanos, A. y Pino-Fan, L. (2021). Competencias de profesores en formación en matemáticas al transformar las representaciones de una función. *Uniciencia*, *35*(2), 1-15. https://doi.org/10.15359/ru.35-2.12

Analco, A. (2019). *Comprensión del concepto de límite de una función en estudiantes de actuaría, física y matemáticas* (Tesis de licenciatura). Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla.

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E. Oktac, A. Roa, S., Trigeros, M. y W. K. (2014). *APOS Theory A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education*. Springer.

Blázquez, S. y Ortega, T. (2001). Los sistemas de representación en la enseñanza del límite. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME, 4(3)*, 219-236.

Camacho Ruiz, C. G., Díaz Martínez, J. R., Mosquera Herreño, A. A., Salamanca Monroy y Y. P. (2013). El concepto de límite como una aproximación óptima mediante la teoría APOE. *Revista Científica*, *2*, 349–353. https://doi.org/10.14483/23448350.7068

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K., y Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process scheme. *Journal of Mathematical Behavior, 15(2)*, 167-192.

Cornu, B. (1991). Limits. En D. Tall (ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 153-166). Dordre-cht: Kluwer.https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1

Craig Swinyard y Sean Larsen. (2012). Coming to Understand the Formal Definition of Limit: Insights Gained From Engaging Students in Reinvention. *Journal for Research in Mathematics Education*, *43*(4), 465. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.43.4.0465

Dubinsky, E. (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95–123). Dordrecht: Kluwer.

Dubinsky, E. y McDonald, M. A. (2001). APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research. In D. Holton (Ed.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study* (pp. 273–280). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M.A. y Brown, A. (2005). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An APOS-based analysis: Part 1. *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 58, No. 3, 335-359.

Duval, R. (1993). Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, IREM de Strasbourg, Francia, 5, 37-65. https://mathinfo.unistra.fr/fileadmin/upload/IREM/Publications/Annales_didactique/vol_05/adsc5_1993-003.pdf

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de La Real Sociedad Matemática Española*, *9*, 143–168. http://cmapspublic.ihmc.us/rid=1JM80JJ72-G9RGZN-2CG/La habilidad para cambiar el registro de representaci?n.pdf

Duval, R. (2017). *Understanding the Mathematic al Way of Thinking – The Registers of Semiotic Representations*. Springer, Cham. https://doi-org.proxydgb.buap.mx/10.1007/978-3-319-56910-9_3

Fernández, C., Sánchez, Gl., Moreno, M. y Callejo L. (2018). La coordinación de las aproximaciones en la comprensión del concepto de límite cuando los estudiantes para profesor anticipan respuestas de estudiantes. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, [en línea], 2018, Vol. 36, n.º 1, pp. 143-62, https://raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/335278

Hernández, L., Juárez, E. y Ruíz, H. (s.f.). *Descomposición genética de la concepción dinámica del límite de una función real*. [manuscrito no publicado].

Hitt, F. y Murillo Páez, R. (2005). Dificultades de aprendizaje del concepto de límite y actividades de enseñanza. *Reflexiones Sobre El Aprendizaje Del Cálculo y Su Enseñanza*, *January*, 133–156.

Medina M., A. C. (2001). Concepciones Históricas Asociadas Al Concepto De Límite E Implicaciones Didácticas. *TED: Tecné, Episteme y Didaxis*, *9*. https://doi.org/10.17227/ted.num9-5622

Molfino, V y Buendía G. (2010). El límite de funciones en la escuela: un análisis de institucionalización. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias, 5*(1), 27-4. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=273319425002

Morante, J. (2020). *Una secuencia didáctica para la construcción de la definición formal del límite de una función basada en teoría APOE* (Tesis de maestría). Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla.

Pérez, A. (2019). *Implementación de una secuencia didáctica para el concepto límite de una función basada en teoría APOE* (Tesis de maestría). Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla.

Pons, J. (2014). *Análisis de la comprensión en estudiantes de Bachillerato del concepto de límite de una función en un punto* (Tesis de Doctorado) Universidad de Alicante, España. http://hdl.handle.net/10045/45713

Roa-Fuentes, Solange y Oktaç, Asuman. (2010). Construcción de una descomposición genética: análisis teórico del concepto transformación lineal. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 13*(1), 89-112. Recuperado en 05 de septiembre de 2021, de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362010000100005&lng=es&tlng=es.

Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational studies in Mathematics*, 18(4), 371-397.

Tall, D. (1999). *Reflections on APOS theory in elementary and advanced mathematical thinking*. Proceedings of the 23rd Conference of PME, 111–118.

Trigueros, M., y Martínez-Planell, R. (2010). Geometrical representations in the learning of two-variable functions. *Educational Studies in Mathematics*, *73*(1), 3-19. https://doi.org/10.1007/s10649-009-9201-5

Trigueros, M. y Oktaç, A. (2019). Task Design in APOS Theory. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 15*, 43-55.

Usman, Juniati, D., Siswono y T. Y. E. (2017). Differences conception prospective students teacher about limit of function based gender. *AIP Conference Proceedings, 1867*(1–7). https://doi.org/10.1063/1.4994406

Vrancken, S., Gregorini, M. I., Engler, A., Müller, D., y Hecklein, M. (2006). Dificultades relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje de concepto de Límite. *Premisa*, *8*(29), 9–19. http://funes.uniandes.edu.co/23103/1/Vrancken2006Dificultades.pdf