



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

USO DE REPRESENTACIONES GRÁFICAS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS GEOMÉTRICOS DE MODELIZACIÓN

TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE
MAESTRA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

PRESENTA
ING. ABISH ROJAS GUTIÉRREZ

DIRECTOR DE TESIS
DR. MANUEL PONCE DE LEÓN PALACIOS

CO-DIRECTOR DE TESIS
DR. JOSÉ ANTONIO JUÁREZ LÓPEZ

PUEBLA, PUE.

MAYO, 2022



DR. SEVERINO MUÑOZ AGUIRRE
SECRETARIO DE INVESTIGACIÓN Y
ESTUDIOS DE POSGRADO, FCFM-BUAP
P R E S E N T E:

Por este medio le informo que la C:

ABISH ROJAS GUTIÉRREZ

Estudiante de la Maestría en Educación Matemática, ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 02 de diciembre de 2021, con la tesis titulada:

**"USO DE REPRESENTACIONES GRÁFICAS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
GEOMÉTRICOS DE MODELIZACIÓN"**

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

A T E N T A M E N T E.
H. Puebla de Z. a 13 de mayo de 2022



DRA. LIDIA AURORA HERNÁNDEZ REBOLLAR
COORDINADORA DE LA MAESTRÍA
EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA.

Agradecimiento CONACYT

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, por el patrocinio de este proyecto de investigación, por la confianza depositada y por su contribución para la maestría. Número de CVU-1028262.

Agradecimientos

A la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, por el apoyo brindado en el curso de esta maestría.

A la Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas por promover la investigación de la Didáctica de las Matemáticas y por darme la oportunidad de ingresar a la maestría.

A mi director, el Dr. Manuel Ponce de León Palacios, por su constante guía a lo largo de estos dos años y por compartir su conocimiento conmigo para concluir con mi proyecto de tesis.

A mi co-director, el Dr. José Antonio Juárez López, por sus observaciones y sugerencias que permitieron mejorar mi desempeño.

A mis profesores, la Dra. Lidia Aurora Hernández Rebollar, la Dra. Estela de Lourdes Juárez Ruiz, el Dr. José Gabriel Sánchez Ruíz y la Dra. Honorina Ruíz Estrada, por permitirme aprender a través de sus clases y de sus experiencias. Dicho aprendizaje me ayudará a mejorar mi práctica docente.

A mis compañeros de la maestría por su disposición a asesorarme en el ámbito académico.

A la Lic. Abigail García Martínez, por su trabajo eficiente, que facilitó mucho los procesos administrativos durante mi estancia en la maestría.

A mis padres y hermanos, por su motivación y apoyo incondicional para que yo pudiera concluir esta etapa de mi vida.

A mi esposo, por motivarme a ser mejor en todos los ámbitos y por demostrarme su amor al apoyarme en mis metas.

Índice	
Resumen	11
Abstract	12
Introducción	13
Capítulo 1 REVISIÓN DE LITERATURA	15
1.1 Vinculación con teorías	18
1.1.1 Educación Matemática Realista	18
Capítulo 2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN	21
2.1 Pregunta de investigación	21
2.1.1 Preguntas específicas	21
2.2 Objetivo general	21
2.2.1 Objetivos específicos	21
2.3 Justificación	
Capítulo 3 MARCO TEÓRICO	23
3.1 Clasificación de problemas	23
3.2 Modelización matemática	24
3.2.1 Ciclo de modelización matemática	24
3.3 Representaciones gráficas	27
3.4 Análisis de contenido	30
3.5 Validez de contenido	32
Capítulo 4 MÉTODO	33
4.1 Tipo de estudio	33
4.2 Sujetos	33
4.3 Instrumentos	33

4.4 Procedimiento	34
4.4.1 Procedimiento estándar de resolución de problema geométrico de modelización de la hoja de trabajo	34
Capítulo 5 RESULTADOS Y ANÁLISIS	38
5.1 Análisis de resultados obtenidos en la Hoja de trabajo	38
5.1.1 Caso LAURA	39
5.1.2 Caso ROSA	40
5.1.3 Caso DIANA	41
5.1.4 Caso EDUARDO	43
5.1.5 Caso ADRIANA	43
5.1.6 Caso PEDRO	44
5.1.7 Caso MARIANA	45
5.1.8 Caso LUIS	46
5.1.9 Caso MÓNICA	46
5.1.10 Caso JESSICA	47
5.1.11 Caso JOAQUÍN	47
5.1.12 Caso PILAR	49
5.1.13 Caso ERNESTO	50
5.2 Análisis de los resultados obtenidos en la Entrevista semiestructurada	51
5.2.1 Análisis de caso de Ernesto	51
5.2.1.1 Análisis de hoja de trabajo del Estudiante ERNESTO	51
5.2.1.2 Explicación de los elementos de la representación gráfica	52
5.2.1.3 Explicación de las relaciones de la representación	52
5.2.1.4 Valoración de la utilidad o aportación del dibujo al proceso de solución	52
5.2.1.5 Representación de objetos matemáticos	53
5.2.2 Análisis de caso de Diana	54
5.2.2.1 Análisis de hoja de trabajo de la estudiante DIANA	54
5.2.2.2 Explicación de los elementos de la representación gráfica	55
5.2.2.3 Explicación de las relaciones de la representación	55

5.2.2.4 Valoración de la utilidad o aportación del dibujo al proceso de solución	55
5.2.2.5 Representación de objetos matemáticos	56
5.2.3 Análisis de caso de Rosa	57
5.2.3.1 Análisis de hoja de trabajo de la estudiante ROSA	57
5.2.3.2 Explicación de los elementos de la representación gráfica	58
5.2.3.3 Explicación de las relaciones de la representación	59
5.2.3.4 Valoración de la utilidad o aportación del dibujo al proceso de solución	59
5.2.3.5 Representación de objetos matemáticos	59
5.2.4 Análisis de caso de Joaquín	60
5.2.4.1 Análisis de hoja de trabajo de la estudiante JOAQUÍN	60
5.2.4.2 Explicación de los elementos de la representación gráfica	61
5.2.4.3 Explicación de las relaciones de la representación	61
5.2.4.4 Valoración de la utilidad o aportación del dibujo al proceso de solución	62
5.2.4.5 Representación de objetos matemáticos	62
5.3 Discusión de resultados de los casos	63
5.3.1 Hoja de trabajo	63
5.3.2 Explicación de los elementos de la representación gráfica	64
5.3.3 Explicación de las relaciones de la representación	64
5.3.4 Valoración de la utilidad o aportación del dibujo al proceso de solución	61
5.3.5 Representación de objetos matemáticos	65
Conclusiones	66
Referencias	69
Anexos	72

Índice de tablas

Tabla 1 *Resultados de la Escuela 1 de la Hoja de Trabajo 1* 38

Tabla 2 *Resultados de la Escuela 2 de la Hoja de Trabajo 1* 42

Índice de figuras

Figura 1 <i>Fases del ciclo de Modelización Matemática (Leiss et al., 2010).</i>	27
Figura 2 <i>Modelo de proceso de formación de categorías inductivas</i>	31
Figura 3 <i>Representación gráfica de la resolución estándar de la Hoja de trabajo 1</i>	35
Figura 4 <i>Representación gráfica de la estudiante LAURA de la Hoja de trabajo 1</i>	39
Figura 5 <i>Representación gráfica 2 de la estudiante LAURA de la Hoja de trabajo 1</i>	40
Figura 6 <i>Representación gráfica de la estudiante ROSA de la Hoja de trabajo 1</i>	40
Figura 7 <i>Representación gráfica de la estudiante DIANA de la Hoja de trabajo 1</i>	41
Figura 8 <i>Representación gráfica de la estudiante ADRIANA de la Hoja de trabajo 1</i>	43
Figura 9 <i>Representación gráfica del estudiante PEDRO de la Hoja de trabajo 1</i>	44
Figura 10 <i>Representación gráfica 2 del estudiante PEDRO de la Hoja de trabajo 1</i>	45
Figura 11 <i>Representación gráfica de la estudiante MARIANA de la Hoja de trabajo 1</i>	45
Figura 12 <i>Representación gráfica del estudiante LUIS de la Hoja de trabajo 1</i>	46
Figura 13 <i>Representación gráfica del estudiante MÓNICA de la Hoja de trabajo 1</i>	47
Figura 14 <i>Representación gráfica del estudiante JOAQUÍN de la Hoja de trabajo 1</i>	48
Figura 15 <i>Representación gráfica 2 del estudiante JOAQUÍN de la Hoja de trabajo 1</i>	48
Figura 16 <i>Representación gráfica del estudiante PILAR de la Hoja de trabajo 1</i>	49
Figura 17 <i>Representación gráfica 2 del estudiante PILAR de la Hoja de trabajo 1</i>	49
Figura 18 <i>Representación gráfica del estudiante ERNESTO de la Hoja de trabajo 1</i>	50
Figura 19 <i>Representación gráfica del estudiante ERNESTO de la Hoja de trabajo 1</i>	52
Figura 20 <i>Inscripciones de las operaciones del estudiante ERNESTO de la Hoja de trabajo 1</i>	54
Figura 21 <i>Representación gráfica de la estudiante DIANA de la Hoja de trabajo 1</i>	54
Figura 22 <i>Inscripciones de las operaciones de la estudiante DIANA de la Hoja de trabajo 1</i>	56
Figura 23 <i>Respuesta de DIANA a la pregunta planteada en la Hoja de trabajo 1</i>	57
Figura 24	
<i>Representación gráfica de la estudiante ROSA de la Hoja de trabajo 1</i>	58
Figura 25 <i>Representación gráfica del estudiante JOAQUÍN de la Hoja de trabajo 1</i>	60

Figura 26 *Representación gráfica 2 del estudiante JOAQUÍN de la Hoja de trabajo 1* 61

Figura 27 *Inscripciones de las operaciones del estudiante JOAQUÍN de la Hoja de trabajo 1* 63

Resumen

Este estudio buscó analizar la influencia de las características de las representaciones gráficas y las estrategias que usan alumnos de primer grado de secundaria en la resolución correcta de problemas geométricos de modelización, puesto que se ha comprobado que la modelización matemática es un tema muy relevante en la participación de los estudiantes en la vida social y profesional.

Esta tesis, se llevó a cabo por medio de una investigación de tipo cualitativa con un enfoque descriptivo hacia un estudio de caso múltiple, en el que se trabajó con estudiantes de primer grado de una escuela secundaria en, Puebla, México. Los informantes se seleccionaron por medio de un muestreo intencional. Se utilizaron dos instrumentos de recolección de datos ya validados: hoja de trabajo y entrevista. Los resultados mostraron una relación entre el tipo de representación gráfica producida por los estudiantes y el desempeño en modelización matemática. Los estudiantes que presentaron una representación gráfica que correspondía a la clasificación diagramática y que además lo relacionaron con el conocimiento que tenían sobre porcentajes y números racionales, lograron un proceso correcto de resolución del problema planteado.

De acuerdo con lo analizado en este proyecto de investigación, el uso de representaciones gráficas en problemas geométricos de modelización, en este contexto, puede llegar a ser una herramienta útil para los estudiantes cuando se enfrenten a dichos problemas. La prospectiva, es que tomando en cuenta la clasificación propuesta por Johanna Rellensmann y Barbara Ott, futuras investigaciones relacionadas con el presente estudio permitirán realizar propuestas didácticas que se enfoquen en diseñar herramientas para que los estudiantes mejoren sus estrategias al resolver problemas geométricos de modelización.

Abstract

In this research project our goal was to analyze the influence of the characteristics of the graphic representations and the strategies used by first-grade secondary school students in the correct resolution of geometric modeling problems, since it has been proven that mathematical modeling is a very relevant topic in the participation of students in social and professional life.

This thesis was carried out through qualitative research with a descriptive approach towards a case study, in which we worked with first grade students from a secondary school in Puebla, Mexico. The informants were selected through intentional sampling. Two validated data collection instruments were used: a worksheet and interview. The results showed a relationship between the type of graphic representations produced by the students and the performance in mathematical modeling. The students who presented a graphic representation that corresponded to the diagrammatic classification and who also related it to the knowledge they had about percentages and rational numbers, achieved a correct process of solving the problem posed.

According to what was analyzed in this research project, the use of graphic representations in geometric modeling problems, in this context, can become a useful tool for students when they face these problems. The prospective is that taking into account the classification proposed by Johanna Rellensmann and Barbara Ott, future research related to this project will allow to make didactic proposals that focus on designing tools for students to improve their strategies when solving geometric modeling problems.

Introducción

En este trabajo de investigación se analizó la influencia de las características de las representaciones gráficas y las estrategias que usan alumnos de primer grado de secundaria en la resolución correcta de problemas geométricos de modelización.

En el Capítulo 1 se describen estudios relevantes para el estudio. Se hace mención de diversas investigaciones relacionadas con la utilidad del uso de representaciones gráficas en la resolución de problemas matemáticos. En dicha revisión de la literatura, se hace hincapié en el grado de abstracción de los dibujos empleados como herramienta para resolver correctamente las situaciones planteadas.

Se recalca que la modelización matemática se vincula con la participación de los estudiantes en la vida social y profesional. Distintas investigaciones han dado indicios de que los problemas de contexto y las situaciones de la vida real permiten a los estudiantes desarrollar herramientas matemáticas y de comprensión.

A su vez, diversos investigadores atribuyen un gran beneficio potencial al dibujo generado por el alumno como una de las estrategias que pueden producir un aprendizaje efectivo en varios dominios. Específicamente hablando de las representaciones gráficas esquemáticas, existen estudios que relacionan positivamente con el éxito en la resolución de problemas matemáticos.

En el capítulo 2, se plantean las preguntas y objetivos de investigación, dentro de los cuales se buscó analizar las características de las representaciones gráficas y su rol en las estrategias en la resolución de problemas geométricos de modelización. De igual forma se indagó sobre la influencia que tenían las características de las representaciones en la construcción del modelo matemático.

El capítulo 3, incluye el marco teórico que sustentó esta investigación, que se basó en el ciclo de Modelización Matemática propuesto por Leiss et al. (2010), y en la clasificación de las representaciones gráficas propuesta por Rellensmann (2019).

Con respecto al ciclo de Modelización Matemática, se describen los siete pasos o fases y sus respectivas transiciones: se construye un modelo mental individual de la situación real, se forma un modelo real de la situación, el modelo real se transforma en un modelo matemático por medio de la matematización, se produce un resultado matemático que se obtiene a partir del modelo matemático, el resultado matemático debe interpretarse con respecto al mundo real, se lleva a cabo la validación del resultado real y se expone una respuesta final al problema original.

En relación con la clasificación de las representaciones gráficas, se detallan las categorías: dibujo fuera del texto, dibujo ilustrativo, dibujo relacionado con objetos y dibujo diagrama, siendo la subcategoría diagrama de alta calidad la de mayor grado de abstracción.

Se describe el análisis de contenido, el cual se basa en la formación de categorías inductivas. Dicho análisis se empleó en esta investigación como medio para comprender las repuestas de los estudiantes en la entrevista semiestructurada.

En consecuencia, a partir de dicho análisis de contenido, se establecieron cuatro categorías inductivas: explicación de los elementos de la representación, explicación de las relaciones en la representación gráfica, valoración de la utilidad o aportación de la representación gráfica al proceso de solución y representación de objetos matemáticos.

El capítulo 4 plantea el método de la investigación, la cual es de tipo cualitativa con enfoque descriptivo con base en un estudio de caso múltiple.

Se trabajó con estudiantes de primer grado de dos escuelas secundarias a las que se les denominó Escuela 1 y Escuela 2. Participaron 3 estudiantes en la Escuela 1 y 10 estudiantes en la Escuela 2. Los informantes se seleccionaron por medio de un muestreo intencional con base en su desempeño en Modelización Matemática. Para respetar la privacidad de los estudiantes, se les asignó un pseudónimo que también permitiera identificarlos fácilmente.

Se emplearon dos instrumentos de recolección de datos ya validados: hoja de trabajo y entrevista.

La hoja de trabajo, permitió indagar las estrategias empleadas por los estudiantes y uso de los dibujos. Por medio de la entrevista semiestructurada se analizó la relación entre las características de los dibujos y estrategias.

Posteriormente se describió el procedimiento de aplicación de instrumentos.

En el capítulo 5, se detallaron los resultados y el análisis de la aplicación de los instrumentos. Se clasificaron las representaciones gráficas en las categorías propuestas por Rellensmann (2019) y se analizaron las respuestas a las entrevistas individuales que aplicaron a cuatro estudiantes seleccionados.

Los estudiantes que demostraron un desempeño alto en modelización presentaron una representación gráfica diagramática, es decir, identificaron y plasmaron los objetos relevantes para la solución, así como las relaciones entre ellos. Además de las representaciones diagramáticas que presentaron, resolvieron correctamente el problema de modelización. Aunado a lo anterior, los alumnos integraron conocimientos previos sobre los temas de números racionales y porcentajes para poder llegar a la respuesta correcta.

Finalmente, las conclusiones comparan lo evaluado en esta investigación con el cumplimiento de los objetivos establecidos. A su vez, se expone una prospectiva relacionada con la investigación.

De acuerdo con lo analizado en esta investigación, el uso de representaciones gráficas en problemas geométricos de modelización, en este contexto, puede llegar a ser una herramienta útil para los estudiantes cuando se enfrenten a dichos problemas.

Capítulo 1

REVISIÓN DE LITERATURA

La modelización matemática es un tema importante en la educación matemática, ya que es muy relevante para la participación de los estudiantes en la vida social y profesional. La modelización o la capacidad de resolver problemas del mundo real exige la aplicación de procesos de transferencia desafiantes entre la realidad y las matemáticas (Niss et al., 2007).

Galbraith y Stillman (2006); Schukajlow (2011, citado en Rellensmann et al., 2016); Stillman y Galbraith (1998, citado en Rellensmann et al., 2016) han enfatizado la importancia de las estrategias que pueden usarse para ayudar a los estudiantes a superar sus dificultades al resolver problemas de modelización. Van Meter y Garner (2005) atribuyen un gran beneficio potencial al dibujo generado por el alumno como una de las estrategias que pueden producir un aprendizaje efectivo en varios dominios.

Csíkos, Sztányi y Kelemen (2012); Uesaka et al. (2007), entre otros investigadores (De Bock et al., 1998; Hembree, 1992, citado en Rellensmann et al., 2016), han identificado a la construcción de una representación visual como una estrategia efectiva para la resolución de problemas matemáticos.

En el contexto de la modelización matemática, el dibujo generado por el alumno describe el proceso y el producto de generar una ilustración que corresponde a los objetos y relaciones descritos en una tarea (Rellensmann et al., 2016).

Hegarty y Kozhevnikov (1999) se centraron en investigar hasta qué punto los dibujos de los niños representan la estructura matemática real en problemas escritos. Para este propósito, la estructura matemática, la correspondencia matemática y el grado de abstracción se identificaron como características sustanciales de tales representaciones gráficas.

Las autoras pudieron clasificar de manera confiable las representaciones visoespaciales utilizadas en la resolución de problemas matemáticos como esquemáticas, que codifican principalmente las relaciones espaciales descritas en un problema, o pictóricas, que codifican principalmente la apariencia visual de los objetos o personas descritas. Por lo tanto, esta investigación ayudó a esclarecer la relación entre las imágenes visuales, la capacidad espacial y la resolución de problemas matemáticos (Hegarty y Kozhevnikov, 1999).

A partir de esto, también se observó que el uso de representaciones esquemáticas se relaciona positivamente con el éxito en la resolución de problemas matemáticos, mientras que el uso de representaciones pictóricas se relaciona negativamente. Además de que el uso de imágenes esquemáticas se asoció con una alta capacidad de visualización espacial (Hegarty y Kozhevnikov, 1999).

La evidencia empírica indica que el beneficio del dibujo depende del tipo de representación gráfica generada por el alumno (Booth y Thomas, 1999, citado en Rellensmann et al., 2016). Esto se refiere en particular al grado de abstracción del dibujo (Van Garderen, 2006; Van Garderen y Montague, 2003).

Rellensmann et al. (2016) presentaron resultados que apuntan, primero, al papel clave que desempeña un dibujo matemático correcto en la resolución exitosa de problemas: si no se producen errores técnicos, un dibujo matemático correcto casi siempre conduce a una solución correcta. Segundo, los resultados sugieren que un dibujo situacional correcto -representación externa del modelo de situación que representa gráficamente los objetos descritos en el enunciado del problema de acuerdo con su apariencia visual- puede promover la construcción de un dibujo matemático correcto, que representa solo objetos relevantes para la solución de la situación del problema, y estos se reducen a sus características matemáticas relevantes. Los estudiantes primero deben comprender la situación del problema para construir un modelo matemático correcto.

En la enseñanza de las matemáticas, el maestro puede pedirles a los estudiantes que resuelvan problemas escritos para practicar la aplicación de las matemáticas. Los problemas verbales son tareas expresadas verbalmente, en las cuales los estudiantes reciben problemas del mundo real, que pueden resolver aplicando herramientas y operaciones matemáticas (Verschaffel et al. 2000, citado en Rellensmann et al., 2020).

Específicamente, en el dominio de la geometría, se cree que las estrategias de dibujo ofrecen formas poderosas para hacer frente a las complejas demandas de modelización matemática (Schukajlow, 2011, citado en Rellensmann et al., 2020).

Una causa para los bajos niveles de precisión del dibujo es el conocimiento estratégico insuficiente de los estudiantes sobre el dibujo (es decir, el conocimiento sobre las características de los dibujos útiles). A partir de esta causa, Rellensmann et al. (2016) desarrollaron una medida de conocimiento

estratégico específico, la escala del conocimiento estratégico sobre dibujo (ECED). La ECED evalúa el conocimiento de los estudiantes sobre dos características de los dibujos útiles, tanto situacionales como matemáticos, aplicados a problemas de modelización: (1) representación correcta de los objetos y (2) relaciones relevantes y etiquetado completo con números relevantes.

Mientras que los hallazgos anteriores revelaron la importancia del conocimiento estratégico relacional, Rellensmann et al. (2020) mostraron en su investigación hallazgos que indican la importancia del conocimiento estratégico específico como se hipotetiza en el modelo teórico de Borkowski et al. (2000). La construcción de la ECED puede proporcionar una base para el desarrollo de nuevas medidas de conocimiento estratégico específico.

Por su parte, Ott (2017), recalcó también que, para resolver problemas matemáticos, el uso de representaciones externas es esencial. Sin ellas, es prácticamente imposible discutir u obtener información sobre problemas matemáticos (Dörfler, 2008; Hoffmann, 2005, citado en Ott, 2017).

Dentro de un rango de representaciones externas, las representaciones gráficas permiten que ciertos aspectos del espacio sean mapeados en elementos específicos de contenido (Stern, Aprea y Ebner, 2003, citado en Ott, 2017). Las representaciones se pueden definir como una "estructura de datos en la que la información se indexa por ubicación bidimensional" (Larkin y Simon, 1987; p. 68, citado en Ott, 2017). Cada elemento de una representación gráfica contiene información no solo relacionada con su propia ubicación, sino también con elementos cercanos. Las representaciones gráficas, por lo tanto, constituyen una herramienta clave para la resolución de problemas (Polya, 1967, citado en Ott, 2017).

Sin embargo, a menudo se informa que los niños tienen dificultades para usar las representaciones gráficas como una herramienta para la resolución de problemas, por ejemplo, esto se muestra en los estudios de Fagnant y Vlassis (2013); y de van Essen y Hamaker (1990, citado en Ott, 2017). Estas dificultades pueden ser sorteadas si se prepara a los estudiantes, ya que como se muestra en algunos estudios, es posible entrenar en el uso de representaciones gráficas (Fagnant & Vlassis, 2013; Diezmann, 2002).

Ott (2017) presentó en su investigación, un borrador de una teoría o una herramienta de análisis, para evaluar representaciones gráficas, en las siguientes dimensiones: la estructura matemática, la correspondencia matemática y el grado de abstracción.

1.1 Vinculación con teorías

1.1.1 Vinculación con otras teorías de la Educación Matemática

Los inicios del movimiento de reforma educativa holandés conocido como Educación Matemática Realista (EMR) se remontan a principios de los años setenta, cuando se conceptualizaron las primeras ideas sobre este modelo.

Desde los primeros días de la EMR, se ha realizado mucho trabajo de diseño relacionado con la investigación del desarrollo (o investigación de diseño), y aún se sigue considerando como un trabajo en progreso.

Uno de los aspectos en los que la EMR trabaja continuamente es el progreso de los niños. Este trabajo en progreso del desarrollo matemático se distingue en dos niveles de trabajo. Se presta atención a dos perspectivas del crecimiento de los estudiantes: la micro-didáctica y la macro-didáctica. La perspectiva micro-didáctica aclara cómo dentro del contexto de una o dos lecciones pueden suceder cambios en la comprensión y las habilidades. Durante este proceso, tienen un papel clave los modelos que se originan a partir de situaciones de contexto y que funcionan como puentes hacia niveles más altos de comprensión. La perspectiva macro-didáctica aborda el progreso en la comprensión durante un período de tiempo más largo (Van den Heuvel-Panhuizen, 2001).

La EMR ha sido influenciada ampliamente por la visión de Freudenthal (1977, citado en Van den Heuvel-Panhuizen, 2001) sobre las matemáticas. Según él, las matemáticas, a fin de ser de valor humano, deben estar conectadas con la realidad, estar cerca de los niños y ser relevantes para la sociedad. En lugar de ver las matemáticas como algo que debe transmitirse, Freudenthal enfatizó la idea de las matemáticas como una actividad humana. La educación debe dar a los estudiantes la oportunidad "guiada" de "reinventar" las matemáticas al hacerlo. Esto significa que, en la educación matemática, el enfoque no debería estar en las matemáticas como un sistema cerrado sino en la actividad, en el proceso de matematización (Freudenthal, 1968, citado en Van den Heuvel-Panhuizen, 2001).

La EMR colocó el razonamiento matemático de los estudiantes en el centro del proceso de diseño y, al mismo tiempo, propuso los medios específicos por los cuales el desarrollo de su razonamiento podría ser sistemáticamente respaldado (Cobb et al., 2008).

Sin embargo, la razón por la cual la EMR se llamó "realista" no es solo la conexión con el mundo real, sino que está relacionada con el énfasis que pone en ofrecer a los estudiantes situaciones problemáticas que puedan imaginar.

En la EMR, los problemas de contexto y las situaciones de la vida real se utilizan tanto para constituir como para aplicar conceptos matemáticos. Mientras trabajan en problemas de contexto, los estudiantes pueden desarrollar herramientas matemáticas y de comprensión. Primero, desarrollan estrategias relacionadas con el contexto. Más adelante, ciertos aspectos de la situación del contexto pueden volverse más generales, lo que significa que el contexto puede obtener más o menos el carácter de un modelo y, como tal, servir de apoyo para resolver otros problemas relacionados. Finalmente, los modelos dan a los estudiantes acceso a un conocimiento matemático más formal. Para cumplir la función de puente entre el nivel informal y el formal, los modelos tienen que pasar de un "modelo de" a un "modelo para". Este cambio se dio gracias a que Streefland, en 1985, detectó este mecanismo crucial en el crecimiento de la comprensión (Van den Heuvel-Panhuizen, 2001).

Los modelos, tal como se caracterizan en la EMR, se originan en las formas de actuar y razonamiento de los estudiantes con herramientas y símbolos en las situaciones de punto de partida (Cobb et al., 2008).

Una diferencia relevante entre la EMR y el enfoque tradicional de la educación matemática es el que no se basa en la forma de enseñanza mecanicista donde los estudiantes reciben procedimientos de resolución fijos para ser entrenados por ejercicios, a menudo para hacerse individualmente. La EMR, por el contrario, tiene una conceptualización más compleja y significativa del aprendizaje. Los estudiantes, en lugar de ser receptores de matemáticas ya hechas, se consideran participantes activos en el proceso de enseñanza-aprendizaje, en el que desarrollan herramientas y conocimientos matemáticos. Es por eso, que la EMR tiene mucho en común con la educación matemática basada en el socio-constructivismo. Otra similitud entre los dos enfoques de la educación matemática es que para los métodos de enseñanza de la EMR es crucial que a los estudiantes también se les ofrezcan oportunidades para compartir sus experiencias con otros.

Para los diseñadores de la EMR, el desafío es apoyar el desarrollo progresivo del razonamiento matemático de los estudiantes para que eventualmente puedan participar en prácticas matemáticas

establecidas que han surgido de siglos de exploración e invención. La metáfora inherente al enfoque de EMR es la de construir continuamente hacia una participación sustancial en las prácticas matemáticas establecidas en lugar de intentar conectar o conectar directamente entre los conocimientos actuales de los estudiantes y las ideas y tradiciones matemáticas establecidas que constituyen la herencia intelectual de los estudiantes (Cobb et al., 2008).

Capítulo 2

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

2.1 Pregunta de investigación

Se ha destacado que la resolución de problemas es parte esencial de las matemáticas. Hablando específicamente de la Educación Matemática, la modelización matemática que conlleva la resolución de problemas es una competencia muy importante que se debe desarrollar.

Una vez establecida la relevancia de la resolución de problemas, es necesario reconocer que dicha resolución es un proceso complejo en el cual está implícita la modelización. La modelización involucra representar, y representar diagramáticamente es comprender de forma abstracta las matemáticas. En consecuencia, surge la problemática de analizar más sobre las representaciones gráficas, porque pueden reflejar el pensamiento matemático del estudiante.

Al ser enfatizada por diversos autores la importancia tanto de la modelización matemática para la participación de los estudiantes en la vida social y profesional, así como del uso estratégico de representaciones gráficas para la resolución de problemas matemáticos, surge la siguiente pregunta de investigación: ¿Cómo influyen las características de las representaciones gráficas que los estudiantes de primero de secundaria utilizan en la resolución correcta de problemas geométricos de modelización?

2.1.1 Preguntas específicas

¿Qué características tienen las representaciones gráficas que los estudiantes de primero de secundaria utilizan en la resolución de problemas geométricos de modelización?

¿Cuál es el rol que tiene las representaciones gráficas en las estrategias utilizadas por estudiantes de primero de secundaria en la resolución de problemas geométricos de modelización?

¿Qué influencia tienen las características de las representaciones gráficas que estudiantes de primero de secundaria emplean en la construcción del modelo matemático?

2.2 Objetivo general

Analizar cómo se relacionan las características de las representaciones gráficas que los estudiantes de primero de secundaria utilizan con la resolución correcta de problemas geométricos de modelización.

2.2.1 Objetivos específicos

Detallar las características de las representaciones gráficas que los estudiantes de primero secundaria utilizan en la resolución de problemas geométricos de modelización.

Describir las estrategias que usan los estudiantes de primero secundaria en la resolución de problemas geométricos de modelización.

Determinar la relación que tienen las características de las representaciones gráficas que los estudiantes de primero de secundaria emplean con la construcción del modelo matemático.

2.3 Justificación

Una de las aportaciones de este estudio es la de profundizar en la línea de investigación relacionada con el uso de representaciones gráficas en la resolución de problemas geométricos de modelización, esto se llevó a cabo por medio de la innovación del diseño metodológico a través de las herramientas de análisis y su aplicación en contextos diferentes, dichas herramientas permitirán extraer datos de las representaciones gráficas de estudiantes.

El ahondar en la línea de investigación del presente trabajo, tendrá como implicación el enriquecimiento de las categorías de la clasificación de las representaciones gráficas. A partir de ello, se podrán plantear secuencias didácticas más adecuadas para posteriores estudios de caso.

El describir las representaciones gráficas de los estudiantes, en conjunto con sus procedimientos al resolver problemas geométricos de modelización, posibilitará al docente conocer las fortalezas y áreas de oportunidad de los alumnos. Por lo tanto, si el docente funge también como investigador, podrá implementar estrategias en clase para mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de sus estudiantes.

Capítulo 3

MARCO TEÓRICO

3.1 Clasificación de problemas

La clasificación de los problemas basada en los procesos cognitivos que se necesitan para resolverlos distingue entre problemas de modelización, problemas verbales contextualizados verbalmente (*dressed up problems*) y problemas intra-matemáticos. En el centro de los problemas de modelización se lleva a cabo una traducción entre el mundo real y las matemáticas. El proceso de resolución de problemas de modelización se describe a menudo como un ciclo de actividades que comienza y termina con una situación del mundo real (Galbraith y Stillman 2006; Verschaffel y Greer 2000; Blum y Leiß 2007, citado en Krawitz y Schukajlow, 2017). Según la descripción del proceso de resolución ideal-típico de Blum y Leiß (2007, citado en Krawitz y Schukajlow, 2017), en primer lugar, los alumnos comprenden la situación del mundo real al establecer un “modelo de la situación”. Este modelo debe estructurarse e idealizarse y, por lo tanto, se transfiere a un “modelo real”. Posteriormente el “modelo real” debe traducirse en un modelo matemático para que se puedan aplicar procedimientos matemáticos para encontrar un resultado matemático. El ciclo se completa interpretando y validando el resultado matemático con respecto a la situación del mundo real.

Aunque los problemas verbales contextualizados artificialmente (*dressed up problems*) también están relacionados con la realidad, difieren en lo que respecta al proceso de traducción de la realidad a las matemáticas y viceversa. Esto se debe a que los problemas verbales contextualizados verbalmente son simplemente tareas matemáticas que se adaptan en un contexto figurado. Los estudiantes solo tienen que identificar el modelo real simplificado del modelo problema seleccionando, que ya se proporciona en la descripción de la situación. Por lo tanto, no es necesario estructurar e idealizar la información dada o interpretar y validar seriamente los resultados matemáticos de acuerdo con la situación del mundo real. Además, los problemas contextualizados artificialmente no contienen información superflua o les faltan datos. Por lo tanto, los alumnos no están obligados a separar la información importante de la que no lo es ni a hacer suposiciones sobre los datos faltantes, requisitos que se consideran características importantes de los problemas de modelización (Krawitz et al. 2016, citado en Krawitz & Schukajlow, 2017).

Los problemas intramatemáticos no están conectados con la realidad y se basan puramente en las matemáticas. Por lo tanto, no requieren ninguna de las actividades mentales mencionadas anteriormente que están relacionadas con la realidad.

Los tres tipos de problemas tienen sus propios beneficios y características según sea el propósito. Todos los tipos de problemas requieren habilidades técnicas matemáticas, como resolver una ecuación lineal o aplicar el teorema de Pitágoras, mientras que los problemas de modelización, y también los problemas verbales contextualizados verbalmente pero en un nivel muy bajo, también requieren procesos de traducción cognitivamente exigentes como se describe arriba.

3.2 Modelización matemática

Los procesos de transferencia entre la realidad y las matemáticas están en el centro de las actividades de modelización matemática (Niss et al., 2007). Varios enfoques han analizado los procesos cognitivos que subyacen a la modelización, por ejemplo, el de Galbraith y Stillman (2006) entre otros (Blum y Leiss, 2007; Greer y De Corte, 2000, citado en Rellensmann et al., 2016). La mayoría de estos enfoques coinciden en que, como primer paso, el alumno tiene que construir un modelo de la situación descrita en el problema matemático para comprender la situación problemática. En un segundo paso, el modelo de la situación debe traducirse en un modelo matemático a través de la idealización y la matematización. El modelo matemático representa el problema en un nivel más abstracto que permite a los estudiantes aplicar métodos matemáticos y calcular un resultado matemático. En un tercer paso, el resultado matemático debe ser interpretado y validado con respecto a la realidad (Rellensmann et al., 2016).

3.2.1 Ciclo de modelización matemática

El ciclo de modelización matemática (Figura 1) en el que se basó esta investigación tiene un enfoque cognitivo y consta de los siguientes siete pasos o fases y transiciones (Leiss et al., 2010; Borromeo Ferri, 2006):

1. Se construye un modelo mental individual de la situación real. El modelo de la situación es la estructura cognitiva personal de la situación, supuesta desde el punto de vista del autor

o de los lectores (Reusser, 1989, citado en Leiss et al., 2010). El texto y probablemente una imagen o foto tienen que ser leídos y la situación problemática tiene que ser entendida por el estudiante que resuelve el problema. La diferencia entre la situación real y el modelo de la situación comprende dos aspectos principales: las simplificaciones inconscientes de la tarea y en relación con eso, la preferencia individual.

Dentro del proceso de transición del modelo de la situación al modelo real se produce una idealización y simplificación del problema, que es más consciente para el individuo. Esto se debe a que cuando el modelo de la situación ya está formado el individuo toma decisiones, lo que influye en la forma de “filtrar” la información en el problema. Dependiendo del tipo de problema que se presente, surge la pregunta o la demanda de conocimiento extra matemático.

2. Se forma un modelo real de la situación. Al hacer suposiciones o seleccionar datos dados, la situación debe simplificarse, estructurarse y hacerse más precisa. Este modelo se construye principalmente a nivel interno del individuo. Esto implica que las representaciones externas también pueden manifestar un modelo real. Pero esto depende de las declaraciones verbales de los individuos al hacer una representación externa.

La transición del modelo real al modelo matemático depende del progreso individual en matematización y el conocimiento extra matemático (depende de la tarea), este último es muy demandado por los individuos.

3. Basándose en ideas básicas de diferentes conceptos matemáticos (vom Hofe, 1998, citado en Leiss et al., 2010), el modelo real se transforma en un modelo matemático por medio de la matematización.

En esta etapa los individuos realizan representaciones externas (bocetos o fórmulas). En esta fase los enunciados verbales son más a un nivel matemático y menos a un nivel referido a la realidad.

La transición a las matemáticas se completa en este punto. Dentro de la transición del modelo matemático a los resultados matemáticos, los individuos utilizan sus competencias matemáticas.

4. Se produce un resultado matemático que se obtiene a partir del modelo matemático. Se utilizan herramientas matemáticas como reorganizar un término o la regla de tres.

5. El resultado matemático debe interpretarse en el mundo real como resultado del problema dado. Se activan nuevamente ideas básicas. La interpretación de los resultados tiene lugar en la transición de resultados matemáticos a resultados reales. Frecuentemente esta fase no se realiza conscientemente por parte de los individuos.

Los resultados matemáticos son discutidos por los individuos al determinar si pueden ser resultados reales

6. Se lleva a cabo la validación del resultado real. Al validar los individuos piensan en la correspondencia de sus resultados reales y su modelo de la situación. Se formulan preguntas como: ¿es razonable? ¿es la precisión apropiada? ¿son adecuadas las suposiciones/simplificaciones? En consecuencia, el ciclo se puede repetir varias veces.

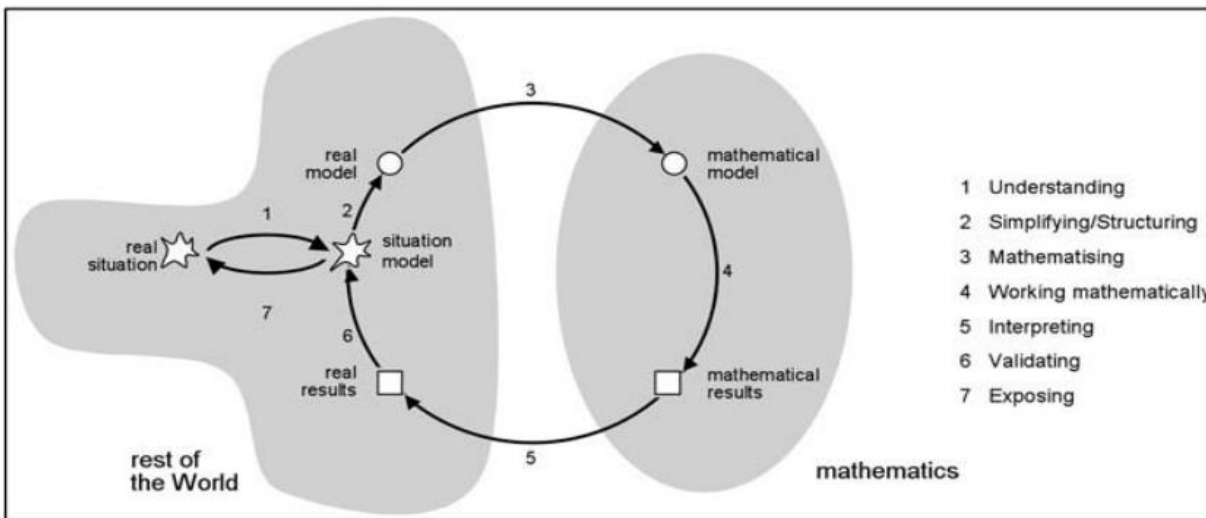
Se pueden generar dos formas diferentes de validación: una validación intuitiva, en la cual el individuo descubre por sí mismo que los resultados pueden ser incorrectos por razones que realmente no puede explicar. El individuo “siente que los resultados no son correctos, porque no encajan en el marco de experiencias y asociaciones propio. Así que es una decisión intuitiva, que es más inconsciente.

La segunda forma de validación es basada en el conocimiento. Esta es afrontada dependiendo de cómo se necesite el conocimiento extra matemático en el problema. La validación basada en el conocimiento significa que los individuos deciden si están de acuerdo con sus resultados basándose en sus conocimientos extra matemáticos. Se pueden distinguir dos tipos de consciencia, la consciente pero no basada en el conocimiento, y la consciente, pero basada en el conocimiento. Tanto la validación intuitiva como la basada en el conocimiento están conectadas con las reflexiones previas del individuo.

7. Se expone una respuesta final al problema original.

Figura 1

Fases del ciclo de Modelización Matemática (Leiss et al., 2010).



3.3 Representaciones gráficas

En relación con la modelización matemática, los problemas verbales son descripciones en forma de texto de situaciones con un enfoque en las relaciones matemáticas (Veschaffel, Greer y de Corte, 2000, citado en Ott, 2017). La información incluida en los problemas verbales se presenta secuencialmente con las cantidades y los sustantivos relacionados entre sí por verbos y preposiciones. Por lo tanto, la información estructural se integra en el texto y la palabra problema recibe una estructura matemática. La preocupación inicial por investigar los componentes lingüísticos de los problemas verbales dio como resultado la caracterización de variables, entre las cuales destacaron las pragmáticas, que, a su vez, se dividen en dinámicas y estáticas (Nesher, 1980). En un problema verbal dinámico, se puede distinguir entre el estado inicial de las cosas, en el tiempo t_1 , un cambio en ese evento que ocurre más tarde, en el tiempo t_2 , y un estado final, en t_3 (Vergnaud, 1976 1979; Nesher y Katriel, 1978, citados en Nesher, 1980), Greeno (1979, citado en Nesher, 1980), lo describe como un problema verbal de causa / cambio. Un problema verbal estático se refiere a un solo estado de cosas. Sus cadenas subyacentes se refieren a sub-partes de la totalidad. Moser (1979, citado en Nesher, 1980) lo llama un problema total de parte-parte.

Las distinciones anteriores se toman de la muestra de problemas verbales de suma y resta. Sin embargo, se supone que se pueden encontrar diferencias similares en otros problemas verbales (Nesher, 1980).

Parte de la modelización matemática se relaciona con las representaciones, que, de forma general, son signos o una configuración de signos, caracteres u objetos. Lo importante es que puede representar (simbolizar, representar, codificar o representar) algo distinto de sí mismo (Goldin & Shteingold, 2001).

Ya que las representaciones no pueden permanecer aisladas, se relacionan entre sí en sistemas, que a su vez se dividen en internos y externos (Goldin & Shteingold, 2001). Los sistemas externos van desde los sistemas de símbolos convencionales de las matemáticas (como la numeración de base diez, la notación algebraica formal, la recta numérica real o la representación de coordenadas cartesianas) a entornos de aprendizaje estructurados (por ejemplo, aquellos que involucran materiales manipuladores concretos o micromundos basados en computadora). Los sistemas internos, en contraste, incluyen construcciones de simbolización personal de los estudiantes y asignaciones de significado a las notaciones matemáticas, así como su lenguaje natural, sus imágenes visuales y representación espacial, sus estrategias de resolución de problemas y heurísticas en relación con las matemáticas. La interacción entre la representación interna y externa es fundamental (Goldin y Shteingold, 2001).

Tal como la enseñanza y el aprendizaje eficaz, cualesquiera que sean los significados e interpretaciones que el maestro pueda aportar a una representación externa, es la naturaleza del desarrollo de la representación interna del alumno lo que debe ser de interés principal (Goldin y Shteingold, 2001).

Ott (2017) menciona que, en comparación con los problemas verbales, las representaciones gráficas no incluyen símbolos relacionales. De hecho, se da una estructura a los signos para objetos estructuralmente relevantes al mapearlos a ciertos aspectos del espacio. Con este fin, los signos de los objetos estructuralmente relevantes deben establecerse en la hoja de tal manera que la disposición represente las relaciones verbalmente descritas del problema verbal. Tales representaciones gráficas tienen el carácter de diagramas (Dörfler, 2006, citado en Ott, 2017).

La autora identifica seis categorías de la estructura matemática de problemas verbales en los dibujos de los niños. Una representación es:

- No gráfica si consiste solo en cálculos o textos.

- Fuera del texto si posee elementos gráficos, pero no hay un enlace con el texto con respecto al contenido.
- Ilustrativa si posee elementos gráficos con enlace al texto, pero no se representan objetos estructuralmente relevantes.
- Relacionada con objetos si posee elementos gráficos con un enlace al texto y se representan objetos estructuralmente relevantes, aunque las relaciones entre ellos no son identificables en la disposición.
- Implícitamente esquemática si posee elementos gráficos con un enlace al texto, se representan objetos estructuralmente relevantes y las relaciones entre ellos son identificables en la disposición. Las relaciones no se enfatizan explícitamente.
- Explícitamente diagramática si posee elementos gráficos con un enlace al texto, se representan objetos estructuralmente relevantes y las relaciones entre ellos son identificables en la disposición. Las relaciones se enfatizan explícitamente.

Posteriormente, Rellensmann (2019) establece una descripción del sistema de categorías de representaciones gráficas, a las cuales se refiere como dibujos.

1. La categoría principal de dibujo fuera del texto incluye representaciones gráficas que no tienen relación con el planteamiento del problema.
2. La categoría principal del dibujo ilustrativo contiene representaciones gráficas que están relacionadas con la tarea, pero no muestran objetos relevantes para la solución ni relaciones entre los objetos.
3. La categoría principal del dibujo relacionado con los objetos contiene representaciones gráficas en las que se muestran los objetos relevantes para la solución del problema, pero no se muestran las relaciones entre los objetos.
4. La categoría principal del dibujo diagrama se define como una categoría de dibujos en la que se muestran los objetos relevantes para la solución, así como las relaciones entre ellos. La categoría principal del dibujo diagrama incluye las siguientes subcategorías:

A. La categoría del diagrama incompleto incluye dibujos en los que falta al menos un objeto relevante para la solución.

B. La categoría del diagrama con relaciones incorrectas incluye dibujos en los que los objetos relevantes para la solución se muestran completamente, pero no todas las relaciones son correctas.

C. La categoría del diagrama con etiquetas faltantes, contiene dibujos que representan los objetos relevantes para la solución de una manera completa y correctamente relacionada, pero en los cuales no aparecen todas las etiquetas con la información numérica relevante para la solución.

D. La categoría del diagrama sin identificación de la información buscada contiene dibujos en los que los objetos relevantes para la solución están correctamente relacionados y completamente etiquetados con las cantidades relevantes para la solución, pero en los que no se identifica la información buscada.

E. La categoría de diagramas de alta calidad incluye dibujos en los que están contenidos los objetos relevantes para la solución, correctamente relacionados y completamente etiquetados con los números relevantes para la solución, además de que se identifica la información buscada.

3.4 Análisis de contenido

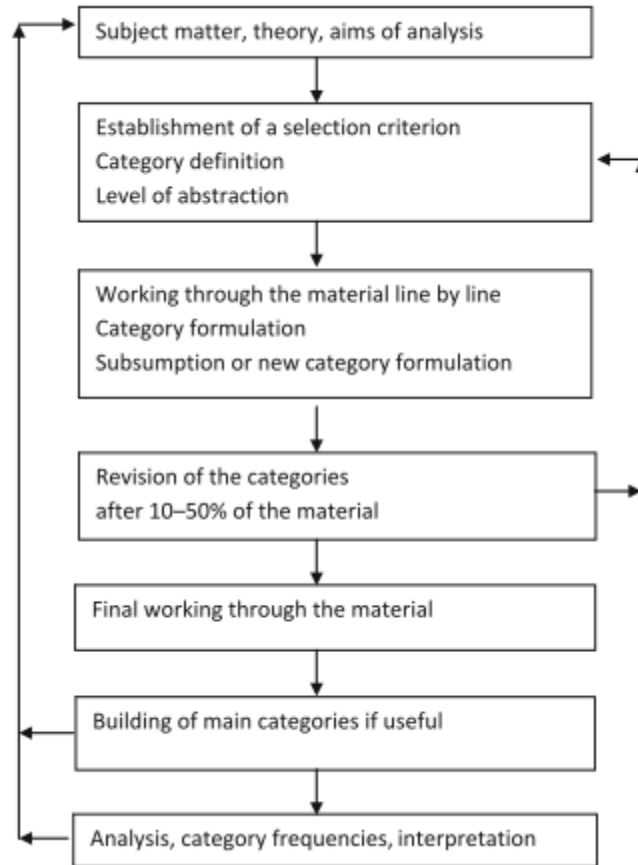
El análisis de contenido es una técnica de interpretación y comprensión de textos, esto se refiere a todo tipo de registro teniendo en cuenta el contexto en el que se produce tanto lo manifiesto como lo latente de los discursos, y en el cual también es posible realizar análisis cuantitativo o cualitativo. Los registros mencionados pueden ser escritos, orales, filmados, fotográficos, transcripciones de entrevistas y observaciones, discursos, documentos, etc (Schettini y Cortazzo, 2015). Según Krippendorff (1990, citado en Schettini y Cortazzo, 2015), el análisis de contenido requiere un marco de referencia conceptual que abarque: el objetivo del análisis, los datos que son comunicados por el analista, el contexto de los mismos y la forma en que el conocimiento del analista lo obliga a fragmentar su realidad.

Los tres principales objetivos del análisis de contenido son el describir registros, obtener inferencias de los registros que permitan a partir de sus antecedentes y obtener inferencias de los registros tomando como base sus efectos.

De forma general, un análisis de contenido puede llevarse a cabo de forma deductiva e inductiva, siendo la inductiva de suma importancia para el análisis cualitativo, ya que permite obtener información directamente a partir del material original sin que haya ideas preconcebidas del autor (Mayring, 2015).

Figura 2

Modelo de proceso de formación de categorías inductivas (Mayring, 2015).



En el análisis cualitativo, el proceso de formación de categorías inductivas (Figura 2) consiste en los siguientes pasos: en primer lugar, se debe definir el tema de las categorías que se evaluarán, basándose en un criterio deductivo, ya que dependerá de los objetivos del análisis y de consideraciones teóricas del mismo. Dentro de la formación de categorías se encuentra el establecimiento del nivel de abstracción, esto como consecuencia de la síntesis de la información que permite pasar al siguiente nivel. Este paso se realiza para que haya un orden en las categorías. Luego se trabaja la información línea por línea. Cada que vez que se identifica por primera vez información relevante que se ajusta a la definición de la categoría, se debe construir una categoría. Se elige una frase corta o término que se asemeje lo más que se puede a la información extraída y que servirá como etiqueta de la categoría; se realiza un proceso reductivo porque se verifica que información nueva no pertenezca a una categoría anterior antes de crear una nueva. Ya que se

trabajó con una cantidad de información considerable, entre 10% y 50%, es cuando ya no se encuentran nuevas categorías. Se realiza una revisión de todo el sistema de categorías, en donde se tiene que verificar que el nivel de abstracción es adecuado y se basa en los objetivos del análisis. Posiblemente se tengan realizar cambios a algunas categorías y si es necesario, volver a revisar toda la información. Como resultado se tendrá un sistema de categorías para un tema en particular que se encuentra conectado con fragmentos específicos de la información. Finalmente se puede continuar de diferentes formas, el conjunto de categorías se puede interpretar basándose en los objetivos y teorías empleados en el análisis; por otra parte, se puede analizar cuantitativamente las conexiones entre las categorías y fragmentos de la información, por ejemplo, se puede indagar la frecuencia con la que aparece cada categoría (Mayring, 2015).

3.5 Validez de contenido

La Validez en la investigación cualitativa, también conocida como validez racional o lógica, tiene como objetivo asegurar un alto grado de correspondencia entre el universo y el atributo que se medirá, es decir, el instrumento debe medir el o los atributos que se pretende que mida.

Dentro de la validez, se encuentra la Validez de Contenido que indica el grado que un instrumento manifiesta un dominio específico del contenido de lo que se desea medir. Los ítems deben ser representativos del universo a estudiar (Corral, 2009).

El análisis de un instrumento se realiza principalmente en términos de su contenido, y es primordial que el instrumento se elaboré ajustándose a un plan y tomando como referencia al marco teórico de la investigación. Una vez elaborado el instrumento, debe de ser evaluado por un grupo impar de expertos que certifiquen que los ítems son claros y coherentes con la investigación.

La validez de contenido sólo puede expresar cualitativamente por medio del denominado Juicio de expertos, los cuales estiman el grado de error de los instrumentos. En el Método de Agregados Individuales, se pide de forma individual a cada experto que realice una evaluación de todos los ítems del instrumento, posterior a esto, se recogen los instrumentos, y si hay coincidencia favorable todos los ítems se conservan en el instrumento, en algunos casos se tiene que reformular o incluso eliminar ítems con el fin de ser validados positivamente (Corral, 2009).

Capítulo 4

MÉTODO

4.1 Tipo de estudio

Se realizó una investigación tipo cualitativa con enfoque descriptivo con base en un estudio de caso múltiple (Stake, 2005, citado en Rodríguez y Valleoriola 2009), ya que implica varios casos.

4.2 Sujetos

Se trabajó con estudiantes de primer grado de dos escuelas secundarias a las que se les denominó Escuela 1 y Escuela 2. Participaron 3 estudiantes en la Escuela 1 y 10 estudiantes en la Escuela 2. Los informantes se seleccionaron por medio de un muestreo intencional con base en su desempeño en Modelización Matemática. Para respetar la privacidad de los estudiantes, se les asignó un pseudónimo que también permitiera identificarlos fácilmente.

4.3 Instrumentos

Se emplearon dos instrumentos de recolección de datos ya validados: hoja de trabajo y entrevista.

La hoja de trabajo, como técnica e instrumento, consiste en diferentes áreas, la primera para anotar el nombre del informante, la segunda de instrucciones, la tercera donde se presenta un problema de geometría de modelización, la cuarta de opciones de respuesta, la quinta de dibujos y operaciones y la sexta donde se responde a una pregunta que pide describir qué proceso se utilizó para resolver el problema.

El instrumento de la entrevista semiestructurada se basó en una guía de entrevista que permitió saber aspectos importantes del proceso de resolución del problema que el alumno llevó a cabo. La guía de entrevista consistió en diferentes apartados: la primera para los datos generales, incluyendo los del estudiante; la segunda en la que se abordaron preguntas relacionadas con el tema de representaciones gráficas y, finalmente, un apartado que se refiere a verificación de la solución.

Los instrumentos fueron validados por medio de juicio de expertos, a través de un formato por escrito, tomando como referencia el Método de Agregados individuales que propone Corral, (2009). Los instrumentos se enviaron a tres jueces para ser evaluados, después se modificaron algunos ítems de los instrumentos tomando en cuenta las observaciones de dichos jueces, para que, en consecuencia, fueran aprobados.

Se llevó a cabo la aplicación de una prueba piloto a los estudiantes para analizar la pertinencia de las hojas de trabajo. Después de analizar los resultados de la hoja de trabajo aplicada y el tiempo asignado por las autoridades de las instituciones para la aplicación de los instrumentos, además de tomar en cuenta las limitaciones que implicó que los estudiantes sólo tomaban clases virtuales en el momento de la investigación, se tomó la decisión de aplicar una hoja de trabajo como forma de selección para la aplicación de las entrevistas y, por consiguiente, fueron los medios de recolección de información.

4.4 Procedimiento

La recolección de datos se llevó a cabo en varias sesiones. La primera sesión, de aproximadamente 40 minutos, consistió en la aplicación de un problema piloto de geometría de modelización por medio de una hoja de trabajo, a estudiantes de primer grado de secundaria.

Después de analizar los resultados del problema piloto, se tomó la decisión de aplicar una hoja de trabajo.

4.4.1 Procedimiento estándar de resolución de problema geométrico de modelización de la hoja de trabajo

Se estableció un procedimiento estándar de resolución del problema geométrico de modelización de la hoja de trabajo aplicada a los estudiantes. El problema fue el siguiente:

Problema del borrego atado

Un borrego está atado a la esquina de un granero cuadrado de 4 metros de lado. ¿Cuál es el área máxima que el borrego puede pastar en el exterior, si la cuerda tiene un largo de 3 metros?

Nota: el borrego únicamente puede moverse fuera del granero y no sobre él.

En primer lugar, se debe identificar qué es lo que plantea el problema. Se realiza por medio de una representación gráfica (Figura 3):

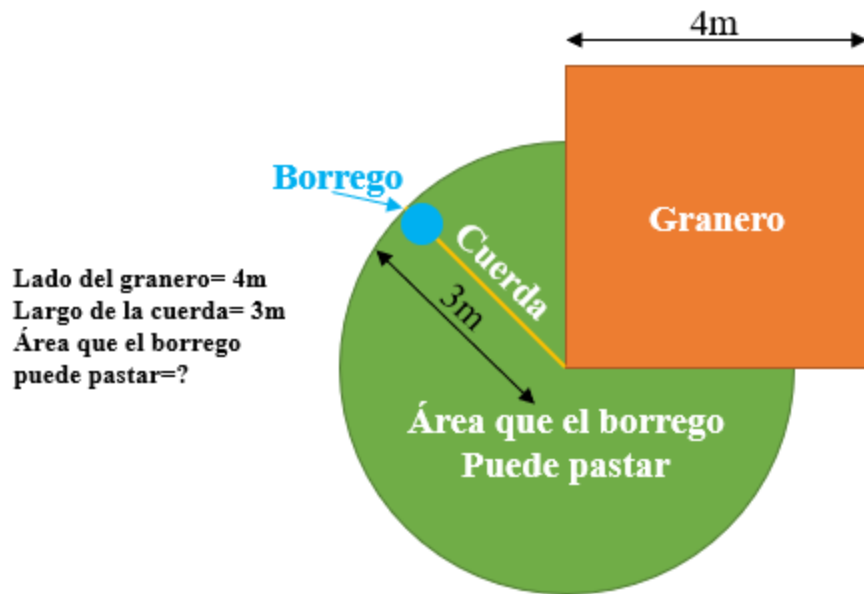


Figura 3

Representación gráfica de la resolución estándar de la Hoja de trabajo 1

El problema establece que hay un borrego atado a la esquina de un granero cuadrado de cuatro metros de largo, y que la cuerda a la que está atado el borrego tiene tres metros de largo. El granero está representado por un cuadrado de color naranja, el borrego que está atado por un punto azul y la cuerda se representa por medio de un segmento de recta de color amarillo.

Posteriormente, el problema indica que hay que calcular el área máxima que el borrego puede pastar, que está representado en el dibujo con un sector circular en color verde, ya que queda claro que el borrego no puede pasar a través del granero. En consecuencia, se tiene que calcular tres cuartas partes del área de un círculo de radio igual a tres metros para poder obtener el área máxima que el borrego puede pastar. El procedimiento se muestra a continuación:

Datos del problema

Lado del granero = 4m

Área que el borrego puede pastar =?

Largo de la cuerda = 3m

Procedimiento

$$\text{Fórmula del Área del círculo} = \pi r^2$$

$r = \text{radio}$

$$\pi = 3.14$$

1. Se calcula el área del círculo.

$$\text{Área del círculo} = \pi r^2 = \pi(3m)^2 = \pi(9m^2) = (3.14)(9m^2) = 28.26m^2$$

2. Se calcula el área del sector circular.

$$\text{Área del sector circular} = \frac{3}{4}(\text{Área del círculo}) = \frac{3}{4}(28.26m^2) = 21.195m^2 \sim 21.2m^2$$

3. Se obtiene el resultado

El área que el borrego puede pastar corresponde a 21.2 m^2

Posteriormente se seleccionaron a cuatro estudiantes, tres de ellos produjeron dibujos diagrama, y un cuarto estudiante realizó dos representaciones gráficas (Dibujo relacionado con objetos y Dibujo ilustrativo). El propósito de seleccionar a estudiantes con diferentes características fue contrastar el análisis de los niveles de desempeño bajo y alto en modelización matemática. Las entrevistas se llevaron a cabo por medio de sesiones individuales con una duración aproximada de 15 minutos cada una.

Los resultados se analizaron con las teorías y herramientas de análisis sobre representaciones que proponen Ott (2017) y Rellensmann (2019).

Por medio de la hoja de trabajo se pudieron describir las estrategias que los alumnos de secundaria emplearon en la resolución de problemas geométricos de modelización y el uso que dieron a los dibujos en esta tarea.

La entrevista permitió analizar si hay relación entre las características de las representaciones gráficas y las estrategias que los participantes de secundaria utilizaron en el desempeño durante la resolución de problemas geométricos de modelización.

Además de analizar las relaciones entre las características de las representaciones gráficas y las estrategias de los estudiantes, se pretendió establecer hasta qué punto esto influye en la comprensión y resolución correcta de dichos problemas.

La profundización en la investigación del uso de representaciones gráficas en problemas geométricos de modelización permitirá, en futuras investigaciones, realizar propuestas didácticas que se enfoquen en diseñar herramientas para que los estudiantes mejoren sus estrategias al resolver este tipo de problemas.

Capítulo 5

RESULTADOS Y ANÁLISIS

5.1 Análisis de resultados obtenidos en la Hoja de trabajo

Después de evaluar las hojas de trabajo de los estudiantes de la Escuela 1, se decidió presentar los resultados en forma de tabla (Tabla 1).

Se evaluaron tres aspectos diferentes, dentro de los que se encuentran el desempeño de la clase, el tipo de representación gráfica y el desempeño en Modelización Matemática. El desempeño de la clase se clasificó en tres categorías de menor a mayor, que corresponden a bajo, básico y alto, que se asignaron como resultado de una conversación con la maestra de cada clase. El siguiente aspecto que se evaluó fue el tipo de representación gráfica tomando como referencia la clasificación propuesta por Rellensmann (2019) que corresponde a cuatro categorías generales las cuales son dibujo fuera del texto, dibujo ilustrativo, dibujo relacionado con objetos y dibujo diagrama. Finalmente el tercer aspecto evaluó el desempeño en Modelización Matemática, para el cual se estableció una escala tomando como referencia el trabajo de Rellensmann et al. (2016), iniciando con un valor de 0 al estudiante que tiene fallas tanto en el procedimiento como la representación gráfica correspondiente al problema dado, se le asigna el valor 1 a quien falle el procedimiento pero su representación gráfica sea considerada diagramática y se le da el valor de 2 al estudiante el cual su procedimiento sea correcto y su representación gráfica sea diagramática. Se le asignó a cada estudiante un pseudónimo para poder identificarlo para asegurar la confidencialidad.

Estudiante	Desempeño en clase	Tipo de representación gráfica	Desempeño en Modelización Matemática
Laura	Básico	Dibujo ilustrativo	0
Rosa	Alto	Diagrama sin identificación de la información buscada.	2
Diana	Alto	Diagrama con etiquetas faltantes	2

Tabla 1

Resultados de la Escuela 1 de la Hoja de Trabajo 1

Cada caso se presenta a continuación:

5.1.1 Caso LAURA

La estudiante LAURA tiene un desempeño básico en la clase, de acuerdo a comentarios de su maestra, ya que es muy reservada y no participa, aun cuando se le hacen preguntas en clase. Para poder entender las clases o cómo se resuelve un problema, necesita que se le explique paso por paso el procedimiento, ya que olvida fácilmente lo aprendido. En relación al tipo de representación gráfica se observaron dos objetos matemáticos, por un lado, cómo se puede ver en la Figura 4, un dibujo ilustrativo con indicios a una categoría relacionada a objetos, porque presentó elementos relacionados con la tarea, pero no muestran objetos relevantes para la solución ni relaciones entre los objetos, también se consideraría con tendencia a una categoría superior porque intentó mostrar un objeto relevante a la tarea, pero sin éxito.

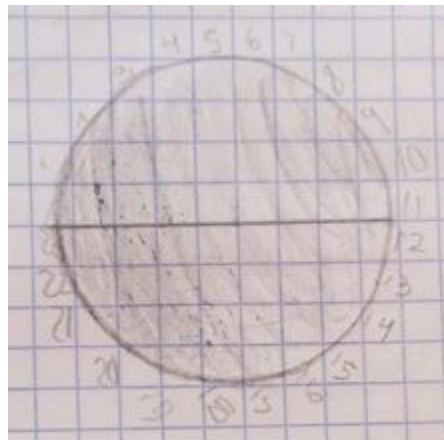


Figura 4

Representación gráfica de la estudiante LAURA de la Hoja de trabajo 1

En la figura 5 se observa otra representación de la estudiante LAURA, que pertenece a la categoría del dibujo ilustrativo, porque no muestra objetos relevantes para el problema. A partir de esto, se puede percibir que la estudiante no logró hacer una conexión entre los objetos relevantes para la tarea. La estudiante realizó algunas operaciones con los números que anotó alrededor de la circunferencia de una de las representaciones.

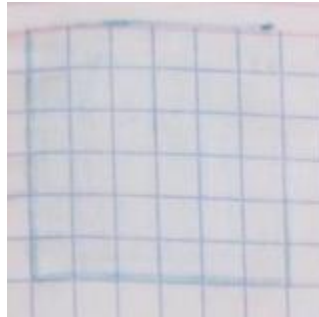


Figura 5

Representación gráfica 2 de la estudiante LAURA de la Hoja de trabajo 1

En cuanto al desempeño en modelización matemática, la estudiante LAURA falló en su procedimiento y su representación de los elementos del problema es incompleta por lo que se le asignó 0 en la escala propuesta anteriormente.

5.1.2 Caso ROSA

La estudiante ROSA, de acuerdo a su maestra, tiene un desempeño alto en la clase de matemáticas, es participativa, tiene interés por aprender y se cuestiona constantemente lo que se aborda en diferentes temas; se debe agregar que la estudiante tiene facilidad para explicar sus ideas.

En la Figura 6, se puede observar la representación gráfica de la estudiante ROSA, la cual se clasificó como diagrama sin identificación de la información buscada, porque sólo tiene todos los objetos relevantes para el problema y sus relaciones, es decir muestra el granero y el movimiento del borrego al pastar con sus respectivas etiquetas.

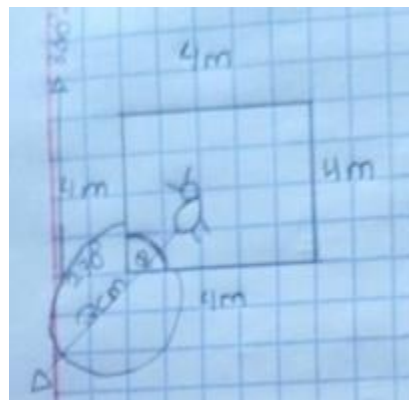


Figura 6

Representación gráfica de la estudiante ROSA de la Hoja de trabajo 1

Con respecto al desempeño en Modelización Matemática, se le designó el número 2 en la escala propuesta, por su procedimiento correcto y su diagrama. También es preciso mencionar que no realizó operaciones en la hoja de trabajo, lo que sugiere el uso de calculadora o es probable que haya hecho las operaciones en otra hoja.

5.1.3 Caso DIANA

La estudiante DIANA también presenta un alto desempeño en clase, le gusta trabajar con dibujos al resolver problemas y expresa interés en los temas al realizar constantemente preguntas durante las lecciones.

Su representación se consideró como diagrama con etiquetas faltantes (Figura 7) ya que contiene los objetos relevantes para la tarea, pero no indicó las dimensiones del granero.

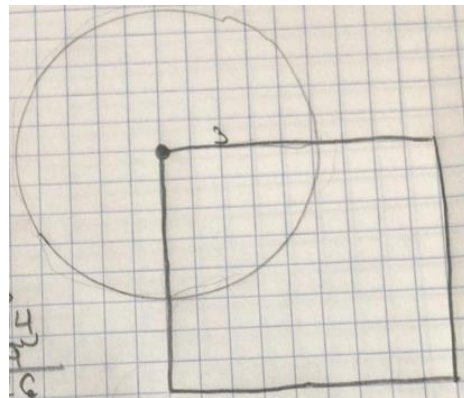


Figura 7

Representación gráfica de la estudiante DIANA de la Hoja de trabajo 1

Se le asignó el valor de 2 en la escala de desempeño de Modelización Matemática propuesta porque su procedimiento fue correcto y su representación es considerada como diagramática. Realizó operaciones en la hoja de la libreta y dio una explicación escrita clara y concisa de los pasos que siguió para resolver el problema.

De igual modo, se presentan los resultados de la Escuela 2 de la Hoja de Trabajo 1 (Tabla 2).

Estudiante	Desempeño en clase	Tipo de representación gráfica	Desempeño en Modelización Matemática
Estudiante EDUARDO	Básico	Sin representación gráfica	0
Estudiante ADRIANA	Básico	Diagrama con relaciones incorrectas	0
Estudiante PEDRO	Básico	Diagrama sin identificación de la información buscada	1
Estudiante MARIANA	Básico	Diagrama incompleto	0
Estudiante LUIS	Básico	Dibujo relacionado con objetos	0
Estudiante MÓNICA	Básico	Dibujo relacionado con objetos	0
Estudiante JESSICA	Básico	Sin representación gráfica	0
Estudiante JOAQUÍN	Básico	Representación 1: Diagrama incompleto Representación 2: Dibujo ilustrativo	0
Estudiante PILAR	Bajo	Representación 1: Dibujo relacionado con objetos Representación 2: Dibujo ilustrativo	0
Estudiante ERNESTO	Alto	Diagrama sin identificación de la información buscada	2

Tabla 2

Resultados de la Escuela 2 de la Hoja de Trabajo 1

5.1.4 Caso EDUARDO

El estudiante EDUARDO presenta un desempeño básico en clase, es responsable, pero la maestra nota que no comprende lo que debe de aprender, sólo realiza las actividades porque es un alumno cumplido

No realizó una representación gráfica para resolver el problema y su desempeño en Modelización Matemática correspondió a 0 en la escala descrita anteriormente, debido a que su procedimiento fue incorrecto y no hizo uso de una representación gráfica para llegar a una respuesta. Basándose en su explicación de selección de respuesta, se puede decir que sólo realizó una operación con los datos del problema para acercarse a alguno de los incisos de respuesta propuestos en la hoja de trabajo.

5.1.5 Caso ADRIANA

La estudiante ADRIANA es participativa en clase, pero en el momento de la aplicación de la hoja de trabajo, había ingresado recientemente a la escuela, por lo que la maestra conoce poco sobre su desempeño en clases de Matemáticas.

Su representación se clasificó como diagrama con relaciones incorrectas (Figura 8) porque, aunque se muestran todos los objetos relevantes, la dimensión de la cuerda es diferente a la dada en el problema, por consiguiente, todos los elementos de la representación se enlazan incorrectamente.

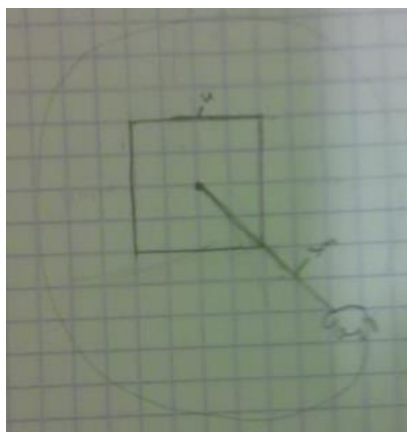


Figura 8

Representación gráfica de la estudiante ADRIANA de la Hoja de trabajo 1

Su desempeño en Modelización Matemática correspondió a 0 en la escala propuesta, ya que su procedimiento fue incorrecto y su representación incompleta; no interpretó adecuadamente el problema, por lo que se mostró confundida al explicar los pasos que siguió para resolverlo, y a su vez no quedó definido qué operaciones realizó a lo largo de este proceso.

5.1.6 Caso PEDRO

El estudiante PEDRO recientemente ingresó a la clase, tiene un desempeño básico en las lecciones, pero es participativo cuando tiene dudas que esclarecer. Al analizar su representación gráfica (Figura 9), se clasificó como Diagrama sin identificación de la información buscada, esto se debe a que están presentes todos los objetos matemáticos relevantes y adecuadamente identificados y relacionados.



Figura 9

Representación gráfica del estudiante PEDRO de la Hoja de trabajo 1

En desempeño en Modelización Matemática se le asignó 1 en la escala presentada ya que su representación contaba con los objetos matemáticos relevantes relacionados, pero por otra parte, su procedimiento fue inconcluso, intentó enlazar los elementos del problema, esto es sugerido por otra representación más sintética que realizó el estudiante a comparación de la primera (Figura 10), pero no fue suficiente para poder continuar con el procedimiento, aun cuando también se observó que hubo indicios de que empezaba a identificar que se tenía que calcular el área de un sector circular.



Figura 10

Representación gráfica 2 del estudiante PEDRO de la Hoja de trabajo 1

5.1.7 Caso MARIANA

La estudiante MARIANA, con base en las observaciones de su maestra, se desempeña en clase a un nivel básico, ya que le gusta trabajar en las lecciones, pero ha disminuido su desempeño por cuestiones en su entorno familiar. Su respectiva representación gráfica (Figura 11) indicó que se clasifica como diagrama incompleto, esto se debe a que incluyó dibujos en los que falta al menos un objeto matemático relevante para la solución, particularmente se evidencia porque no se mostró en la hoja de trabajo, el movimiento que efectúa el borrego ni las dimensiones de la cuerda a la que está atado, la cual es importante para la resolución del problema.



Figura 11

Representación gráfica de la estudiante MARIANA de la Hoja de trabajo 1

Se le asignó un 0 en la clasificación del desempeño en Modelización Matemática porque su procedimiento fue incorrecto y su representación incompleta. La explicación de los pasos que siguió para responder el problema muestra que buscó operar con los datos proporcionados por el problema hasta obtener un resultado que fuera compatible con los incisos dados.

5.1.8 Caso LUIS

El estudiante LUIS muestra un desempeño básico en la clase de Matemáticas, por un lado es participativo, pero por otro, no le gusta escuchar explicaciones cuando él se equivoca, y llega a distraer a sus compañeros. Su representación gráfica (Figura 12) se clasificó como dibujo relacionado a objetos, porque contiene representaciones gráficas en las que se muestra un objeto relevante para la solución del problema, es decir, las dimensiones del granero, pero no se muestran los otros objetos relevantes, como el largo de la cuerda ni el movimiento del borrego.

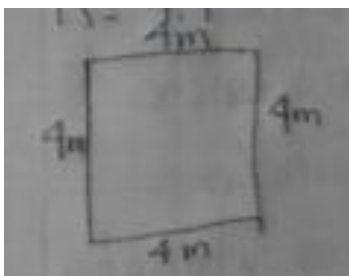


Figura 12

Representación gráfica del estudiante LUIS de la Hoja de trabajo 1

Su desempeño en Modelización Matemática correspondió al valor 0 porque su procedimiento fue incorrecto y su representación gráfica carecía de algunos elementos, y basándose en su explicación en la hoja de trabajo, sólo operó con los datos para obtener una respuesta que fuera semejante a las dadas en los incisos, en primer lugar calculó el área del granero, posteriormente restó el largo de la cuerda, lo que le llevó a un resultado que no coincidía con las opciones en la hoja trabajo, por lo que bajo su criterio, seleccionó el que más se le acercaba.

5.1.9 Caso MÓNICA

La estudiante MÓNICA es dedicada en clase y le gusta participar, por lo que la maestra considera que tiene un desempeño básico. En cuanto a su representación gráfica (Figura 13) se consideró en la categoría Dibujo relacionado con objetos que incluye un elemento cercano a la categoría ilustrativa, esto se debe a que representó el granero con sus dimensiones pero no lo mostró matemáticamente el movimiento que realiza el borrego para pastar ni el largo de la cuerda.



Figura 13

Representación gráfica del estudiante MÓNICA de la Hoja de trabajo 1

Su desempeño en Modelización Matemática corresponde al valor 0 ya que no presentó un procedimiento por escrito ni una justificación a respuesta, lo que puede indicar confusión al resolver el problema, falta de interés por realizarlo entre otras razones.

5.1.10 Caso JESSICA

La estudiante JESSICA es considerada como muy reservada por la maestra, no participa en clase, y hasta cierto punto puede parecer que se siente cohibida por sus compañeros más participativos. En su respectiva hoja de trabajo no realizó ninguna representación gráfica; se le asignó un valor de 0 en su desempeño en Modelización Matemática, porque, aunque su respuesta correcta, la explicación de su procedimiento sugiere que no comprendió el problema, porque menciona hacer el cálculo del área del granero, pero eso no coincide con su respuesta, y tampoco realizó operaciones.

5.1.11 Caso JOAQUÍN

El estudiante JOAQUÍN tiene un desempeño básico en clase de Matemáticas porque es responsable y a su vez es participativo.

Una de sus representaciones gráficas (Figura 14) se clasificó como Categoría Diagrama incompleto porque incluye dibujos en los que falta al menos un objeto relevante para la solución, en este caso, las dimensiones del granero, aunado a esto, se puede observar que intentó realizar un dibujo que representara de alguna manera tres dimensiones en el espacio.

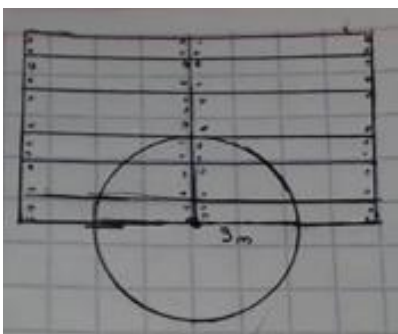


Figura 14

Representación gráfica del estudiante JOAQUÍN de la Hoja de trabajo 1

El estudiante realizó otra representación (Figura 15) clasificada como ilustrativa, ya que mostró elementos relacionados con la tarea pero no relevantes para la resolución del problema matemático. Nuevamente se observa que se enfocó en representar tres dimensiones de los elementos en la hoja de trabajo.



Figura 15

Representación gráfica 2 del estudiante JOAQUÍN de la Hoja de trabajo 1

Su desempeño en Modelización Matemática se evaluó con 0 porque su procedimiento fue incorrecto, olvidó cómo se calcula correctamente el área del círculo, entonces, al obtener rápidamente un valor que corresponde al dado en uno de los incisos, se queda con la idea de que ya obtuvo la respuesta correcta y no se detiene a revisar nuevamente su procedimiento. Otra de las razones por la que obtiene ese valor en su desempeño es porque no representa completamente los objetos matemáticos necesarios para resolver el problema.

5.1.12 Caso PILAR

La estudiante PILAR no tiene una buena retención de información en clase de Matemáticas por lo que se considera que tiene un desempeño bajo, a causa de que se le tiene que repetir paso a paso continuamente las indicaciones de las tareas para que pueda trabajar en las lecciones.

Una de sus representaciones gráficas (Figura 16) entró en la clasificación de dibujo relacionado con objetos, porque presenta sólo uno de los objetos matemáticos relevantes y estos están etiquetados incorrectamente. Esto se observa porque colocó la etiqueta del largo de la cuerda en la que está atado el borrego cómo si fuera el ancho del granero.

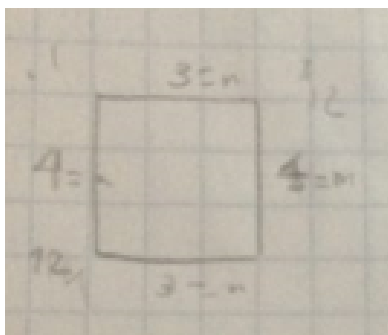


Figura 16

Representación gráfica del estudiante PILAR de la Hoja de trabajo 1

Otra de las representaciones (Figura 17) que realizó corresponde a la categoría Ilustrativa ya que no contiene ningún objeto matemáticamente relevante. Hay que mencionar, además que no logró relacionar los elementos clave del problema por lo que sus representaciones parecen aisladas.

Su desempeño en Modelización Matemática se evaluó con 0 porque su procedimiento fue incorrecto y su representación errónea e incompleta. De acuerdo con la explicación de su procedimiento, Pilar posiblemente sólo hizo una operación con los datos del problema, aunque no lo comprendiera y su resultado tampoco corresponde con el inciso que seleccionó como correcto.



Figura 17

Representación gráfica 2 del estudiante PILAR de la Hoja de trabajo 1

5.1.13 Caso ERNESTO

El estudiante ERNESTO tiene un desempeño en clase superior al de sus compañeros. Es responsable y constantemente verifica sus procedimientos en las tareas y problemas abordados en clase.

Su representación gráfica (Figura 18) se clasificó como Diagrama sin identificación de la información buscada contiene dibujos en los que los objetos matemáticamente relevantes para la solución están correctamente relacionados y completamente etiquetados con las cantidades relevantes para la solución.

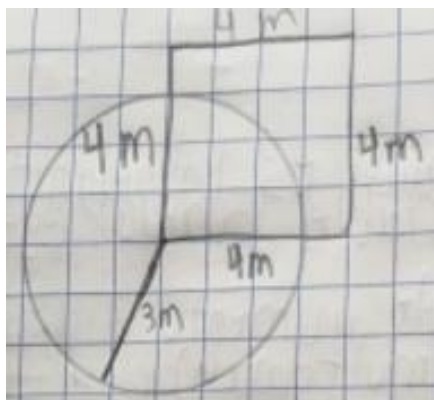


Figura 18

Representación gráfica del estudiante ERNESTO de la Hoja de trabajo 1

Su desempeño en Modelización Matemática de acuerdo con la escala propuesta en esta investigación correspondió al valor 2, debido a que su procedimiento es correcto, los objetos matemáticos de su representación están correctamente etiquetados y relacionados. Presentó orden al realizar sus operaciones. Se debe agregar que, en la explicación de su procedimiento, redactó de una forma concisa, identificando que se debe calcular el área de un sector circular.

5.2 Análisis de los resultados obtenidos en la Entrevista semiestructurada

Se seleccionaron cuatro estudiantes para realizarles entrevistas semiestructuradas correspondientes a su desempeño en modelización matemática demostrado en la resolución del problema geométrico de modelización. De los estudiantes seleccionados, tres presentaron un desempeño alto en modelización matemática y uno mostró un desempeño bajo, lo que permitió contrastar los análisis entre niveles de desempeño.

La revisión de las entrevistas se llevó a cabo por medio de un análisis cualitativo de contenido. El proceso de análisis se llevó a cabo a través de tareas de codificación y categorización. A partir del cual se definieron las 4 categorías en relación con los objetivos de la presente investigación:

(1) Explicación de los elementos de la representación. (2) Explicación de las relaciones en la representación gráfica (3) Valoración de la utilidad o aportación de la representación gráfica al proceso de solución. (4) Representación de objetos matemáticos.

Cada caso se presenta a continuación.

5.2.1 Análisis de caso de Ernesto

5.2.1.1 Análisis de hoja de trabajo del Estudiante ERNESTO

Ernesto presentó un desempeño en modelización alto (valor de 2), de acuerdo con la escala propuesta en esta investigación. Es importante recordar la escala de desempeño en modelización matemática propuesta en este trabajo de investigación. En dicha escala se asignó un valor de 0 al estudiante que tiene fallas tanto en el procedimiento como la representación gráfica correspondiente al problema dado; se le asignó el valor 1 a quien falle el procedimiento pero su representación gráfica sea considerada diagramática; y se le dio el valor de 2 al estudiante el cual su procedimiento sea correcto y su representación gráfica sea diagramática. La representación gráfica del estudiante se clasificó como Diagrama sin identificación de la información buscada.

Su procedimiento fue correcto, los objetos matemáticos de su representación estuvieron correctamente etiquetados y relacionados (Figura 19). De igual manera, el informante presentó orden en las inscripciones de sus operaciones.

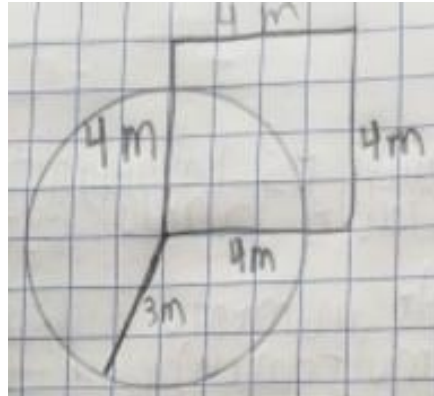


Figura 19

Representación gráfica del estudiante ERNESTO de la Hoja de trabajo 1

5.2.1.2 Explicación de los elementos de la representación gráfica

Ernesto identificó elementos clave para la resolución del problema, a partir de sus representaciones gráficas. En primer lugar, representó al granero por medio de un cuadrado, en segundo lugar, el área que puede pastar el borrego a través de un sector circular, e identificó la cuerda como el radio del círculo.

5.2.1.3 Explicación de las relaciones de la representación

Ernesto también logró relacionar los elementos de la representación al reconocer que el movimiento que realiza un borrego que está atado a una cuerda en la esquina de un granero implica un sector circular. Esto es similar al movimiento de un compás, lo que le permitió delimitar el área que hay que calcular para resolver el problema. Esto se vio reflejado en el extracto de entrevista que muestra a continuación.

Ernesto: “Porque cuando hay una cuerda si vas caminando, bueno es como un compás y es lo que va marcando, entonces hice este círculo y la línea para que simule la cuerda y el área”.

5.2.1.4 Valoración de la utilidad o aportación del dibujo al proceso de solución

Ernesto consideró que el uso de un dibujo es de utilidad para el problema porque es una forma de externalizar una imagen interna, y posteriormente facilitar su resolución.

Ernesto: "Porque como me da una idea de... de, bueno me da como una imagen en la mente de cómo se debe de resolver".

A partir de la respuesta de Ernesto, se interpretó en su caso, que la aplicación de un dibujo en la resolución del problema es el resultado de imaginarla en primer lugar.

5.2.1.5 Representación de objetos matemáticos

Con respecto a la representación de objetos matemáticos, Ernesto relacionó el área en la que pueda pastar el borrego (sector circular) con un porcentaje,

Ernesto: "Ahmmmm... primero.... Ammmm pues primero decía que el borrego no podía pasar arriba del granero, pues le saque la cantidad de 28.26 eh... como el 25% que también pudiera representar un cuarto. Que sería la parte en la que no puede pasar..."

Al explicar el procedimiento que llevó a cabo para resolver el problema, el participante mostró el cálculo que realizó. A partir de observar sus cálculos, y la forma en la que los lleva a cabo, se hace visible la aplicación de su conocimiento sobre porcentajes en formato decimal. Este conocimiento sobre porcentajes y decimales fue clave para que el estudiante construyera el modelo matemático y derivara en la resolución correcta del problema.

Ernesto: "Si, ahmm... primero ah... al multiplicar 3.14 por 9 medio 28.26 y nos enseñaron que para sacar el porcentaje una de las formas ah... es multiplicar 0.25 por la cantidad y eso fue lo que hice, y al final como 28.26 representaba toda el área, le reste el 25% para que sea el área que no puede cruzar".

El estudiante relacionó el conocimiento que tiene sobre conceptos de cálculo de áreas con el de cálculo de porcentaje, y al tener una representación diagramática que ilustraba dicha relación con base en la situación planteada en el problema, Ernesto pudo construir el modelo matemático adecuado y llegar a la respuesta correcta.

Presentó una competencia en la representación, de modelización, los conocimientos previos que tiene sobre los temas de cálculo del área de un círculo y porcentajes le permitió resolver correctamente este problema (figura 20).

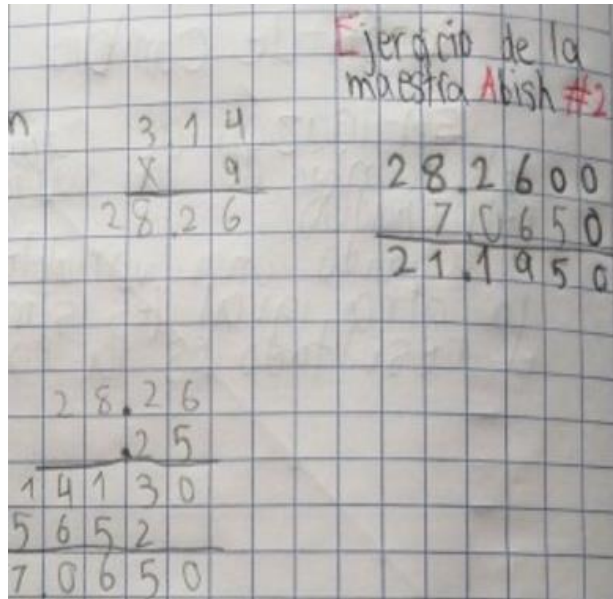


Figura 20

Inscripciones de las operaciones del estudiante ERNESTO de la Hoja de trabajo 1

5.2.2 Análisis de caso de Diana

5.2.2.1 Análisis de hoja de trabajo de la estudiante DIANA

Diana presentó un desempeño en modelización alto (valor de 2), de acuerdo con la escala propuesta en esta investigación. La representación gráfica de la estudiante se clasificó como Diagrama con etiquetas faltantes, ya que contiene los objetos relevantes para la tarea, pero no indicó las dimensiones del granero (Figura 21). De igual manera, la informante a través de las inscripciones explicitó la secuencia de pasos en su hoja de trabajo.

A partir de los comentarios de la docente sobre el desempeño de la estudiante, Diana también presenta un alto desempeño en clase, le gusta trabajar con dibujos al resolver problemas y expresa interés en los temas al realizar constantemente preguntas durante las lecciones.

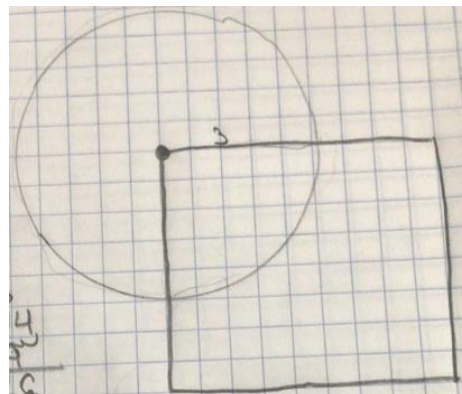


Figura 21

Representación gráfica de la estudiante DIANA de la Hoja de trabajo 1

La informante realizó operaciones en la hoja de la libreta y dio una explicación escrita clara y concisa de los pasos que siguió para resolver el problema.

5.2.2.2 Explicación de los elementos de la representación gráfica

De forma similar al caso anterior, Diana identificó los elementos clave para la resolución del problema. La estudiante representó al granero a través de un cuadrado, el área que puede pastar el borrego con un círculo, el largo de la cuerda atada al borrego se observó en el radio del círculo y un punto muestra el vértice en dónde está sujeta la cuerda antes mencionada (Figura 21).

Diana: “Es donde está como atada la cuerda del borreguito (al preguntar sobre lo que representa un punto que se encuentra en su hoja de trabajo)”.

Diana no etiquetó las dimensiones del granero, pero sí indica el largo de la cuerda.

5.2.2.3 Explicación de las relaciones de la representación

La identificación de la vinculación del problema con un círculo, es lo que apunta a que la estudiante relacionó los elementos de la representación, como se puede notar en el siguiente extracto:

Diana: “Pues, o sea, hice el círculo porque de algún modo entendí que el problema se trataba como de alguna circunferencia, entonces pues hice el circulito y el cuadrado solo lo puse para representar el granero y poder entenderle mejor el problema”.

La estudiante no elaboró más en su respuesta, pero su representación relacionó el movimiento del borrego, simbolizado por un círculo, y el granero, indicado por cuadrado. La vinculación entre los elementos se dio por medio de la delimitación del área que el borrego puede pastar y que derivó de las dimensiones del granero, el largo de la cuerda y la posición del borrego.

5.2.2.4 Valoración de la utilidad o aportación del dibujo al proceso de solución

En relación con la valoración de la utilidad del dibujo al proceso de solución, la estudiante mencionó que el uso de representaciones fue de ayuda para la resolución de problema, porque le sirvió de guía para saber qué parte del área del círculo el borrego no podía pastar.

La respuesta de la informante dio indicios de que el dibujo que trazó para comprender la disposición de los elementos presentados en el problema fue un factor que reafirmó la idea de que el borrego no puede pasar encima del granero para pastar. La relación entre los elementos y el área delimitada en la que puede pastar se puede observar en el siguiente fragmento:

Diana: "Pues sí me ayudó bastante porque, o sea, también como decía que no podía pastar adentro también me ayudo a saber cuánto es... o sea cuanto de la parte del granero no podía pastar o sea cuanta parte del círculo no podía entrar pues."

5.2.2.5 Representación de objetos matemáticos

Referente a la representación de objetos matemáticos, la estudiante identificó que hay una sección en la que no puede pastar el borrego, dicha sección corresponde con el área del granero al que está atado. Como consecuencia, Diana, reflejando un proceso de matematización, determinó que tiene que calcular el área de un sector circular para resolver el problema planteado. Lo mencionado anteriormente, se puede ver reflejado en el siguiente extracto, específicamente en la última parte:

Diana: "Ehm... si, pues como decía eh... pues el granero pues decía que era, bueno dibujé el granero por eso hice el cuadradito y después dibujé como ese puntito que está en la esquina de granero y pues dibuje el círculo porque así es como yo creí que estaba como caminando el borrego ¿no?, como en círculos, pero pues como no podía pasar... como no podía pasar adentro del granero pues o sea lo que hice fue pues sacar el... el área ¿Si es el área, no?, del círculo pero quitarle o sea restarle la parte de adentro, del granero pues, o sea eliminé ese pedazo".

Diana relacionó el conocimiento sobre características de algunas figuras geométricas (círculo y cuadrado) con el de fracciones (sector circular), lo que derivó en calcular sobre tres cuartas partes del círculo que corresponde al área que tiene acceso el borrego (Figura 22).

$$\begin{array}{r} 7065 \\ 4128.20 \overline{) 26} \end{array}$$
$$\begin{array}{r} 7065 \\ \times 3 \\ \hline R = 21195 \end{array}$$

Figura 22

Inscripciones de las operaciones de la estudiante DIANA de la Hoja de trabajo 1

Esta relación entre conocimiento de conceptos de geometría y de los números racionales se observó en la respuesta de la estudiante a la pregunta planteada en la hoja de trabajo 1 (Figura 23).

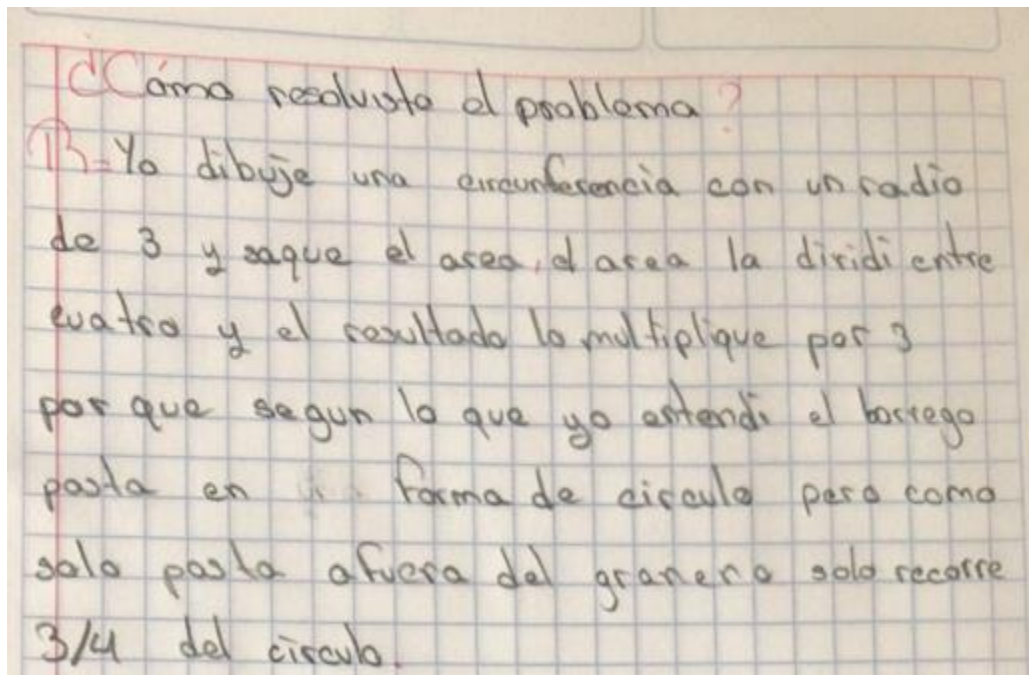


Figura 23

Respuesta de DIANA a la pregunta planteada en la Hoja de trabajo 1

Diana relacionó el conocimiento que tiene sobre características de algunas figuras geométricas (círculo y cuadrado) y números racionales. Lo mencionado en el punto anterior, aunado con la realización una representación diagramática, contribuyó con que la informante construyera el modelo matemático y llegara a la respuesta correcta.

La estudiante presentó una competencia alta en la representación y en la modelización; los conocimientos previos que tenía sobre los temas de cálculo del área de un círculo y números racionales le permiten resolver correctamente este problema.

5.2.3 Análisis de caso de Rosa

5.2.3.1 Análisis de hoja de trabajo de la estudiante ROSA

En relación con la estudiante ROSA, ella obtuvo un nivel 2 de 2 en la escala de modelización matemática propuesta en este trabajo de investigación. Su procedimiento fue correcto y su

representación gráfica tiene características de diagrama. La informante no realizó operaciones en la hoja de trabajo, sólo presentó los resultados.

ROSA es participativa en clase, tiene interés por seguir aprendiendo, tiene facilidad para explicar sus ideas y en general tiene un desempeño alto durante las clases matemáticas.

La representación gráfica de la informante (Figura 24) correspondió a la categoría de diagrama sin identificación de la información buscada, ya que muestra los objetos relevantes para el problema y sus relaciones, esto es indicado por el granero y el movimiento del borrego al pastar con sus respectivas etiquetas.

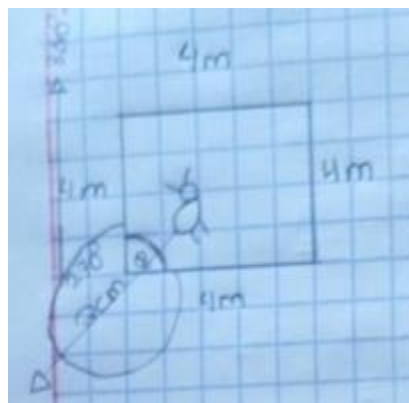


Figura 24

Representación gráfica de la estudiante ROSA de la Hoja de trabajo 1

5.2.3.2 Explicación de los elementos de la representación gráfica

La estudiante representó el granero por medio de un cuadrado y el movimiento del borrego por medio de un círculo y explicó que el problema establece que el borrego estaba situado en ese sitio.

Rosa: “Pues dice que estaba ahí situado, y que era donde estaba comiendo pasto o no sé qué estaba comiendo”.

La resolución correcta del problema por parte de la alumna, indica que la localización del dibujo del borrego dentro del granero no fue un error, sino una manera de evitar empalmarlo con las etiquetas y con la representación del movimiento de dicho animal.

De manera similar a la idea anterior, el error en la unidad de medida del largo de la cuerda (3cm en lugar de 3m), no mostró una falta de comprensión de la situación problemática, sino que hay una confusión en el uso de las unidades de medición y la estudiante necesitaría consolidar su conocimiento sobre ese tema.

5.2.3.3 Explicación de las relaciones de la representación

Rosa relacionó correctamente los elementos matemáticamente relevantes para el problema, y lo demostró al externar que identifica que el área que el borrego puede pastar es limitada, y a su vez lo relacionó con lo aprendido en clases pasadas sobre el área del círculo.

Rosa: “Desde que está atado a una esquina ¿no?, en un cuadrado, entonces hice un cuadrado...eh pues, luego el borrego y estaba atado en la esquina que era como la... el área, bueno el...el espacio limitado ¿no?, y lo hice como un círculo que en ese tiempo estábamos haciendo este... pues estábamos viendo lo del círculo y ya”.

5.2.3.4 Valoración de la utilidad o aportación del dibujo al proceso de solución

La informante externó que fue útil el uso de dibujos para poder resolver correctamente el problema, porque es ella es una persona visual, de igual forma ella mencionó que el uso de dibujos en su proceso de resolución le ayudó a guiarse para poder comprender la situación problemática de una mejor forma.

Rosa: “Ahm... bueno, aparte de lo de visual yo creo que sería como el no ver... el no poder ver.... guiarme de los, ¿cómo se dice?, en los números y todo eso, y no... no sé, no... no podría.

5.2.3.5 Representación de objetos matemáticos

Como se estableció en el apartado de las relaciones de la representación, la estudiante relacionó el movimiento del borrego y la limitación del granero para poder comprender que se tiene que calcular el área de un sector circular; esto es evidenciado (Figura 24) al indicar la estudiante en el dibujo del granero un ángulo recto. Rosa relacionó el planteamiento del problema con su conocimiento sobre grados totales de un círculo y posteriormente lo relacionó con su conocimiento sobre números racionales.

Rosa: “...hice el círculo y medí como que en grados lo que media esa cachito o algo así... lo hice como así y después eso lo reste eh por... en 90 y me dio 270, y ya de ahí nada más dividí 270 grados entre 360 grados y me dio $\frac{3}{4}$ y ya de ahí... ehm pues la circun... la circunferencia del círculo que estaba ahí era 3 centímetros, y ya este, de esos 3 centímetros... este puse 3.14 que es el π y lo... lo multipliqué por sí mismo y ya me dio... este... bueno ese resultado, el que puse ahí”.

La informante no presentó las inscripciones de sus operaciones. Al preguntarle la razón de ello, menciona que las realizó en una hoja que no anexó en el momento de la aplicación del problema y que ya desechó.

La estudiante, al igual que en los dos casos anteriores, relacionó conocimientos sobre diferentes temas, cálculo de áreas, ángulos y números racionales, con su representación gráfica de la situación plasmada en el problema, es así que Rosa construye el modelo matemático y la resolución es correcta.

5.2.4 Análisis de caso de Joaquín

5.2.4.1 Análisis de hoja de trabajo de la estudiante JOAQUÍN

El estudiante Joaquín tuvo un desempeño en modelización matemática que corresponde al nivel 0 en relación con la escala propuesta en este trabajo de investigación, porque en primer lugar no representa todos los objetos matemáticamente relevantes para el problema, y en segundo lugar su proceso de resolución no fue correcto.

El estudiante realizó dos representaciones gráficas. La primera representación (Figura 25) se encuentra en la categoría Diagrama incompleto, porque presenta dibujos en los que falta al menos un objeto relevante para la solución, específicamente en este caso, el estudiante no especificó al granero como un cuadrado.

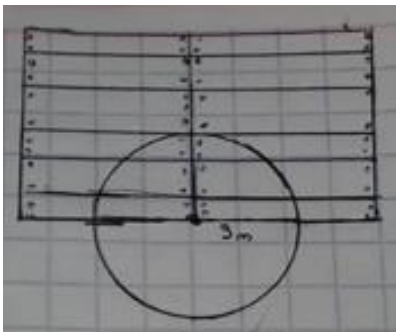


Figura 25

Representación gráfica del estudiante JOAQUÍN de la Hoja de trabajo 1

La segunda representación del informante (Figura 26) pertenece a la categoría ilustrativa, porque plasmó elementos relacionados con la tarea que no son relevantes para la resolución del problema matemático. El estudiante trató de representar tres dimensiones en los graneros de en ambos dibujos



Figura 26

Representación gráfica 2 del estudiante JOAQUÍN de la Hoja de trabajo 1

El estudiante JOAQUÍN tiene un desempeño suficiente en clase de Matemáticas porque es responsable y a su vez es participativo.

5.2.4.2 Explicación de los elementos de la representación gráfica

Joaquín representó al granero visto desde arriba (Figura 25), por lo que dibujó un rectángulo que indica que es el techo de dicho granero. Por otra parte, representó la cuerda con el radio de 3m de un círculo.

Joaquín: “Ah pues el primero es como si viéramos el granero desde arriba, y pues es el techo. Y pues hice el círculo que representa 3 metros de la cuerda...”.

5.2.4.3 Explicación de las relaciones de la representación

Al comparar las dos representaciones realizadas por el estudiante, se pudo observar que no hay consistencia entre la posición del borrego y la cuerda con respecto al granero. En la primera representación (Figura 25) la cuerda está anclada al centro de una de las paredes del granero, y en la segunda (figura 26) la cuerda está anclada a la esquina del granero. La primera representación no coincidió con la situación descrita por el estudiante.

Joaquín: “y pues yo nada más lo que hice en el segundo es representar que el borrego estaba en la esquinita, y que nada más podía estar por ahí, no podía pasar por encima del techo ni de nada, por eso nada más el pedacito de afuera”.

5.2.4.4 Valoración de la utilidad o aportación del dibujo al proceso de solución

El estudiante mencionó que el uso de dibujos para la resolución del problema le ayudó para poder indicar que hay un área que el borrego no puede pastar, pero hay una contradicción con lo expresado anteriormente por el estudiante, ya que mostró que el borrego sólo puede pastar la mitad del círculo.

Joaquín: “Pues el primer dibujo me ayudó porque se vio que pues nada más el borrego nada más podía saltar un pedacito, no todo el círculo, nada más la mitad del círculo, y pues que estaba, no puede pasar por el granero”.

5.2.4.5 Representación de objetos matemáticos

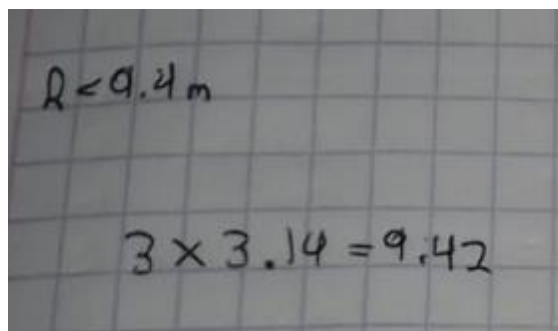
Al basarse en las respuestas dadas por Joaquín, él identificó que tenía que calcular el área de un sector circular, pero su proceso de resolución indicó algo diferente, porque sólo aplicó la fórmula del cálculo de área de un círculo e incluso no recordó la fórmula correcta.

Joaquín: “Entonces tenía que multiplicar 3 metros por π que es 3.14, y pues me dio 9.42”.

Con la intención de analizar el proceso de resolución del estudiante, se le preguntó el porqué de la selección de esa fórmula, y a pesar de esto, no logra percatarse de su error.

Joaquín: “Pues me acorde qué para sacar el área de un círculo, debo de primero ver cuánto mide su diámetro y su radio, y de ahí multiplicarlo por π que es 3.14”.

Posteriormente, no se dio cuenta que no calculó el área del sector circular correspondiente a lo que el borrego puede pastar (Figura 27).



The image shows a photograph of handwritten work on a grid background. The first line of text is $R = 9.4 \text{ m}$. The second line of text is $3 \times 3.14 = 9.42$.

Figura 27

Inscripciones de las operaciones del estudiante JOAQUÍN de la Hoja de trabajo 1

Joaquín: “Pues la “R” significa respuesta, y pues la respuesta le puse el signo igual, la respuesta es igual a 9.4 metros”.

El informante tampoco aplicó la fórmula de cálculo del área del círculo, lo que podría indicar que no recuerda la fórmula.

El estudiante relacionó conocimientos sobre el tema de cálculo de áreas con su representación gráfica; y al expresar sus respuestas durante su entrevista, identificó que tiene que calcular el área de un sector circular. Lo anterior contrastó con su proceso de resolución, que sólo se basó en el cálculo del área de un círculo, que incluso también fue incorrecto (no eleva al cuadrado el radio del círculo). Esto da indicios de que el uso de representaciones gráficas en donde no están todos los objetos matemáticamente relevantes para el problema o que no están correctamente relacionados, pueden ser causa de confusión para la construcción de un modelo matemático que permita resolver correctamente un problema.

5.3 Discusión de resultados de los casos

5.3.1 Hoja de trabajo

A partir de la comparación de las características de las representaciones gráficas de las hojas de trabajo de los estudiantes, se observó que tres alumnos presentaron un desempeño alto en modelización matemática y uno mostró un desempeño bajo.

Los tres estudiantes que demostraron un desempeño alto en modelización, es decir, obtuvieron un nivel 2, presentaron una representación gráfica diagramática, es decir, identificaron y plasmaron los objetos relevantes para la solución, así como las relaciones entre ellos. Además de las representaciones diagramáticas que presentaron, resolvieron correctamente el problema de modelización.

El estudiante Joaquín, que tuvo un desempeño bajo (nivel 0) en modelización matemática, produjo 2 representaciones gráficas, una de ellas se encuentra en la categoría Diagrama incompleto, porque presenta dibujos en los que falta al menos un objeto relevante para la solución, específicamente en este caso, el estudiante no especificó al granero como un cuadrado.

La segunda representación del informante pertenece a la categoría ilustrativa, porque plasma elementos relacionados con la tarea que no son relevantes para la resolución del problema matemático. El estudiante trató de representar tres dimensiones en los graneros en ambos dibujos. Relacionado al desempeño en modelización matemática de Joaquín, el informante no tuvo un proceso correcto de resolución del problema.

5.3.2 Explicación de los elementos de la representación gráfica

Ernesto, Diana y Rosa identificaron los elementos clave para la resolución del problema. En primer lugar, representaron al granero por medio de un cuadrado, en segundo lugar, el área que puede pastar el borrego a través de un sector circular, e identificaron la cuerda como el radio del círculo del cual se obtiene el sector circular.

Joaquín también identificó algunos elementos importantes para la resolución del problema, pero no tomó en cuenta las dimensiones del granero.

5.3.3 Explicación de las relaciones de la representación

Ernesto, Diana y Rosa relacionaron los elementos de la representación al reconocer que el movimiento que realiza un borrego que está atado a una cuerda a un punto fijo implica un sector circular. Y por lo tanto, se debe calcular el área de dicho sector circular para resolver el problema. Joaquín no relacionó correctamente los elementos del problema, porque en la representación que se clasifica como diagrama incompleto situó a la cuerda a la que está atado el borrego en la parte central del granero; mientras que en la representación que se clasifica como ilustrativa ubica a la cuerda en la esquina del granero.

Las respuestas de Joaquín en la entrevista, indican que comprendió cómo se tenía que resolver correctamente el problema, pero su representación clasificada como diagrama incompleto, entra en contradicción con lo expresado por el estudiante.

Esto da indicios de que el uso de representaciones gráficas en dónde no se encuentran todos los objetos matemáticamente relevantes para el problema o que no están correctamente relacionados, pueden ser causa de confusión para la construcción de un modelo matemático que permita resolver correctamente un problema.

5.3.4 Valoración de la utilidad o aportación del dibujo al proceso de solución

Los cuatro estudiantes entrevistados consideraron que el uso de un dibujo en la resolución del problema del borrego atado fue de utilidad, ya que fue una guía para visualizar correctamente la situación planteada.

5.3.5 Representación de objetos matemáticos

Ernesto, Diana y Rosa, relacionaron el conocimiento que tienen sobre conceptos de cálculo de áreas con el de cálculo de porcentaje y de fracciones, y al tener una representación diagramática que ilustra dicha relación con base en la situación planteada en el problema, los tres alumnos construyeron el modelo matemático y llegaron a la respuesta correcta.

Ernesto, Diana y Rosa presentaron competencia en representación y en modelización, los conocimientos previos que tiene sobre los temas de cálculo del área de un círculo, porcentajes y fracciones les permitió resolver correctamente este problema.

Por su parte, Joaquín, aun cuando una de sus representaciones fue diagramática, el plasmar una segunda representación que difería en relación a la primera, propició más confusión al resolver el problema matemático de la hoja de trabajo. También se observó que el estudiante requiere reforzar sus conocimientos sobre cálculo de área del círculo, porcentajes y fracciones.

Conclusiones

En virtud de los resultados obtenidos, se detallaron las características de las representaciones gráficas que los participantes de este estudio utilizaron en la resolución de problemas geométricos de modelización. Se observó que hay una correspondencia alta entre las características de las representaciones gráficas que produjeron estos estudiantes y la correcta resolución del problema planteado. Tres de los casos analizados (Ernesto, Diana y Rosa) coinciden en un nivel 2 de la escala propuesta en este trabajo de investigación, corresponde a un alto nivel de desempeño en modelización, ya que los estudiantes mostraron un proceso de resolución correcto, así como una representación gráfica diagramática. Uno de los casos (Joaquín) corresponde a un nivel 0 de la escala, ya que el estudiante produjo dos representaciones que no mostraban todos los objetos matemáticamente relevantes para el problema correctamente relacionados, además de que su proceso de resolución no fue correcto.

Se describieron las estrategias que usaron los participantes en la resolución de problemas geométricos de modelización. Los alumnos que tuvieron un alto desempeño en modelización matemática produjeron representaciones gráficas diagramáticas, que implica la identificación y relación correcta de los objetos matemáticamente relevantes para la resolución del problema. Asimismo, estos estudiantes mostraron tener una competencia para relacionar conocimientos de otras áreas de matemáticas, específicamente sobre el tema de porcentajes y números racionales que, como consecuencia, les permitieron crear un modelo matemático de la situación descrita en el problema y, a su vez, su proceso de resolución del problema fue correcto.

Los hallazgos mostraron que existe una correspondencia alta entre las características de las representaciones gráficas realizadas por los estudiantes y la correcta resolución del problema que se les planteó en la hoja de trabajo del presente proyecto de investigación.

Se halló una correspondencia significativa entre las características de la categoría dibujo diagrama con un alto desempeño en modelización, ya que sus producciones contenían los objetos matemáticamente relevantes correctamente relacionados para la situación. Aunado a lo anterior, los alumnos integraron conocimientos previos sobre los temas de números racionales y porcentajes para poder llegar a la respuesta correcta.

Se determinó la correspondencia que tienen las características de las representaciones gráficas que los participantes emplearon con la construcción del modelo matemático. Los resultados de este proyecto de investigación también mostraron que los estudiantes con alto desempeño en modelización, pasaron por las diferentes fases del ciclo de modelización matemática, en el cual, como primera etapa, construyeron un modelo mental individual de la situación. Posteriormente, hubo un proceso de transición al modelo real y, finalmente, llegaron a un modelo matemático de la situación, en el cual se llevó a cabo la matematización, en la que los alumnos realizaron representaciones externas.

A partir de los resultados, se identificó que, en el problema de modelización matemática que se les aplicó a los estudiantes de primer grado de dos escuelas secundarias de la ciudad de Puebla, México, efectivamente hay una correspondencia entre la producción de dibujos diagrama y un alto desempeño en modelización. Esto no implica que sea el único factor que intervino en el desempeño de dichos estudiantes, puesto que hubo otros componentes, como la capacidad para relacionar correctamente los elementos del problema. Otro factor que intervino en el desempeño de los alumnos fue el relacionar el conocimiento sobre cálculo de áreas de figuras geométricas, porcentajes e incluso números racionales. En conjunto, todos estos factores, posibilitaron que los estudiantes con alto desempeño en modelización resolvieran correctamente el problema.

De acuerdo con lo analizado en este proyecto de investigación, el uso de representaciones gráficas en problemas geométricos de modelización, en este contexto, puede llegar a ser una herramienta útil para los estudiantes cuando se enfrenten a dichos problemas. La perspectiva es que, tomando en cuenta la clasificación propuesta por Rellensmann (2019) y Ott (2016), futuras investigaciones relacionadas con el presente proyecto permitirán realizar propuestas didácticas que se enfoquen en diseñar herramientas para que los estudiantes mejoren sus estrategias a partir del uso estratégico efectivo de las representaciones gráficas.

Para concluir el presente trabajo de investigación y en concordancia con lo anterior, surgen nuevas interrogantes: ¿hasta qué punto los estudiantes pueden adquirir competencias que les permitan tener un mejor desempeño en la resolución de problemas geométricos?, ¿hasta qué punto se puede adquirir de manera autónoma o es necesario que el profesor lo fomente?, ¿hasta qué grado estas competencias se adquieren en el aula?, ¿qué tanto influyen el tipo de problemas que se abordan en la clase con el desarrollo de las competencias de modelización? A dichas preguntas se les podrá

dar seguimiento en trabajos posteriores, en el caso de problemas de modelización, al analizar a mayor profundidad las relaciones que existen entre las características de las representaciones gráficas que producen los alumnos, sus estrategias y la formación del modelo matemático correspondiente.

Referencias

- Borkowski, J. G., Chan, L. K. S., & Muthukrishna, N. (2000). A Process-Oriented Model of Metacognition: Links Between Motivation and Executive functioning. *Issues in the Measurement of Metacognition*, 1–41. <http://digitalcommons.unl.edu/burometacognition/2/>
- Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *Zentralblatt Für Didaktik Der Mathematik*, 38(2), 86–95. <https://doi.org/https://doi.org/10.1007/BF02655883>
- Cobb, P., Zhao, Q., & Visnovska, J. (2008). Learning from and Adapting the Theory of Realistic Mathematics education. *Éducation et Didactique*, 2(1), 105–124. <https://doi.org/10.4000/educationdidactique.276>
- Corral, Y. (2009). Validez y confiabilidad de los instrumentos de investigación para la recolección de datos. *Revista Ciencias de La Educación*, 19(33), 228–247.
- Csíkós, C., Sztányi, J., & Kelemen, R. (2012). The effects of using drawings in developing young children’s mathematical word problem solving: A design experiment with third-grade Hungarian students. *Educational Studies in Mathematics*, 81(1), 47–65. <https://doi.org/10.1007/s10649-011-9360-z>
- Diezmann, C. M. (2002). Enhancing students’ problem solving through diagram use. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 7(3), 4–8.
- Fagnant, A., & Vlassis, J. (2013). Schematic representations in arithmetical problem solving: Analysis of their impact on grade 4 students. *Educational Studies in Mathematics*, 84(1), 149–168. <https://doi.org/10.1007/s10649-013-9476-4>
- Galbraith, P., & Stillman, G. (2006). A framework for identifying student blockages during transitions in the modelling process. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, 38(2), 143–162. <https://doi.org/10.1007/BF02655886>
- Goldin, G., & Shteingold, N. (2001). Systems of Representations and the Development of Mathematical Concepts. En A. A. Cuoco & F. Curcio (Eds.), *The Roles of Representation in School Mathematics* (pp. 1–23).
- Hegarty, M., & Kozhevnikov, M. (1999). Types of visual-spatial representations and mathematical problem solving. *Journal of Educational Psychology*, 91(4), 684–689. <https://doi.org/10.1037//0022-0663.91.4.684>
- Krawitz, J., & Schukajlow, S. (2017). Do students value modelling problems, and are they

- confident they can solve such problems? Value and self-efficacy for modelling, word, and intra-mathematical problems. *ZDM - Mathematics Education*, 50, 143–157.
<https://doi.org/10.1007/s11858-017-0893-1>
- Leiss, D., Schukajlow, S., Blum, W., Messner, R., & Pekrun, R. (2010). The Role of the Situation Model in Mathematical Modelling—Task Analyses, Student Competencies, and Teacher Interventions. *Journal Fur Mathematik-Didaktik*, 31(1), 119–141.
<https://doi.org/10.1007/s13138-010-0006-y>
- Mayring, P. (2015). Approaches to qualitative research in mathematics education: examples of methodology and methods. En A. Bikner-Ahsbals, C. Knipping, & N. Presmeg (Eds.), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education Examples of Methodology and Methods* (pp. 365–380). <https://doi.org/10.1080/14794802.2015.1092392>
- Nesher, P. (1980). The Stereotyped Nature of School word problems. *For the Learning of Mathematics*, 1(1), 41–48.
- Niss, M., Blum, W., & Galbraith, P. (2007). Introduction. En W. Blum, P. Galbraith, & H.-W. Henn (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education: The 14th ICMI study* (pp. 1–32). Springer.
- Ott, B. (2016). *Textaufgaben grafisch darstellen. Entwicklung eines Analyse- instruments und Evaluation einer Interventionsmaßnahme*. Waxmann. file:///Users/leon/Library/Mobile Documents/com~apple~CloudDocs/PhD/resources_100/TS_Ott_2016_textaufgaben.pdf
- Ott, B. (2017). Children’s drawings for word problems – design of a theory and an analysis tool. En *10th Congress of European Research in Mathematics Education*.
- Rellensmann, J. (2019). *Selbst erstellte Skizzen beim mathematischen Modellieren. Ergebnisse einer empirischen Untersuchung*. Springer Spektrum.
<https://doi.org/https://doi.org/10.1007/978-3-658-24917-5>
- Rellensmann, J., Schukajlow, S., & Leopold, C. (2016). Make a drawing. Effects of strategic knowledge, drawing accuracy, and type of drawing on students’ mathematical modelling performance. *Educational Studies in Mathematics*, 95(1), 53–78.
<https://doi.org/10.1007/s10649-016-9736-1>
- Rellensmann, J., Schukajlow, S., & Leopold, C. (2020). Measuring and investigating strategic knowledge about drawing to solve geometry modelling problems. *ZDM - Mathematics Education*, 52(1), 97–110. <https://doi.org/10.1007/s11858-019-01085-1>

- Rodríguez, D., & Valldeoriola, J. (2009). Metodologías Cualitativas. En *Metodología de la investigación* (pp. 57). Editorial UOC.
- Schettini, P., & Cortazzo, I. (2015). Tipos de análisis de datos cualitativos. En *Análisis de datos cualitativos en la investigación social: procedimientos y herramientas para la interpretación de información cualitativa* (pp. 45–56). Editorial de la Universidad de La Plata. <https://doi.org/10.35537/10915/49017>
- Uesaka, Y., Manalo, E., & Ichikawa, S. (2007). What kinds of perceptions and daily learning behaviors promote students' use of diagrams in mathematics problem solving? *Learning and Instruction, 17*(3), 322–335. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2007.02.006>
- Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2001). Realistic Mathematics Education as work in progress. En F. L. Lin (Ed.), *Common Sense in Mathematics Education, Proceedings of 2001 The Netherlands and Taiwan Conference on Mathematics Education* (pp. 1–43).
- Van Garderen, D. (2006). Spatial Visualization, Visual Imagery, and Mathematical Problem Solving of Students With Varying Abilities. *Journal of Learning Disabilities, 39*(6), 496–506.
- Van Garderen, D., & Montague, M. (2003). Visual-Spatial Representation, Mathematical Problem Solving, and Students of Varying Abilities. *Learning Disabilities Research and Practice, 18*(4), 246–254. <https://doi.org/10.1111/1540-5826.00079>
- Van Meter, P., & Garner, J. (2005). The Promise and Practice of Learner-Generated Drawing: Literature Review and Synthesis. *Educational Psychology Review, 17*(4), 285–325. <https://doi.org/10.1007/s10648-005-8136-3>

Anexos

Nombre:

(Ítem 1) Instrucciones

1. Lee con atención el problema y resuélvelo.
2. Subraya la respuesta correcta.
3. Valida tus resultados mostrando por escrito los pasos que empleaste.

(Ítem 2) Problema de la alberca

Una alberca circular con un diámetro de 16 m tiene un borde con ancho uniforme construido a su alrededor. Si el área del borde es de $17\pi\text{m}^2$. (Ítem 3) Calcule su ancho.

Opciones de respuesta

- a) 3 m
- b) 1 m
- c) 0.5m
- d) 2 m

Utiliza esta área para hacer los dibujos y operaciones que te permitieron obtener el resultado.

(Ítem 4) ¿Qué proceso seguiste para resolver el problema?, ¿puedes describirlo?
(si necesitas más espacio, puedes utilizar el reverso de la hoja).

Nombre:

(Ítem 1) Instrucciones

1. Lee con atención el problema y resuélvelo.
2. Subraya la respuesta correcta.
3. Valida tus resultados mostrando por escrito los pasos que empleaste.

(Ítem 2) Problema del borrego atado

Un borrego está atado a la esquina de un granero cuadrado de 4 metros de lado. (Ítem 3) ¿Cuál es el área máxima que el borrego puede pastar en el exterior, si la cuerda tiene un largo de 3 metros?

Nota: el borrego únicamente puede moverse fuera del granero y no sobre él.

Opciones de respuesta

- a) 7.1 m
- b) 21.2 m
- c) 9.4 m
- d) 28.3 m

Utiliza esta área para hacer los dibujos y operaciones que te permitieron obtener el resultado.

(Ítem 4) ¿Qué proceso seguiste para resolver el problema?, ¿puedes describirlo?
(si necesitas más espacio, puedes utilizar el reverso de la hoja).

Nombre:

(Ítem 1) Instrucciones

1. Lee con atención el problema y resuélvelo.
2. Subraya la respuesta correcta.
3. Valida tus resultados mostrando por escrito los pasos que empleaste.

(Ítem 2) Problema de los cuatro caballos

Cuatro caballos están atados a las esquinas de un terreno cuadrado de 10 metros de lado con cuerdas de 5 metros. (Ítem 3) ¿Cuál es el área de la región dentro del terreno que los caballos no pueden alcanzar?

Nota: el terreno está cercado de tal manera que los caballos no pueden salirse del campo cuadrado. Únicamente pueden moverse dentro de él.

Opciones de respuesta

- a) 21.5 m
- b) 84.3 m
- c) 68.6 m
- d) 78.5 m

Utiliza esta área para hacer los dibujos y operaciones que te permitieron obtener el resultado.

(Ítem 4) ¿Qué proceso seguiste para resolver el problema?, ¿puedes describirlo?
(si necesitas más espacio, puedes utilizar el reverso de la hoja).

Nombre:

(Ítem 1) Instrucciones

1. Lee con atención el problema y resuélvelo.
2. Subraya la respuesta correcta.
3. Valida tus resultados mostrando por escrito los pasos que empleaste.

(Ítem 2) Problema del aspersor

Para regar el pasto, Enrique quiere colocar un aspersor en el centro de su jardín cuadrado. Si el jardín tiene 9 metros de lado y el aspersor tiene un alcance de 3.4 metros, (Ítem 3) ¿Cuál es el área del jardín que no será regada por el aspersor?

Nota: El aspersor gira completamente para regar el jardín.

Opciones de respuesta

- a) 69.4 m
- b) 44.7 m
- c) 11.6 m
- d) 36.3 m

Utiliza esta área para hacer los dibujos y operaciones que te permitieron obtener el resultado.

(Ítem 4) ¿Qué proceso seguiste para resolver el problema?, ¿puedes describirlo?
(si necesitas más espacio, puedes utilizar el reverso de la hoja).

Entrevista semiestructurada

Fecha:	
Observador:	
Nombre del problema	

Datos generales	
Sexo	<input type="checkbox"/> F <input type="checkbox"/> M
Nombre del alumno	
Edad (años y meses)	

Sección 1. Representaciones gráficas

Explicar al estudiante que existen diferentes representaciones de una misma cosa, pero en esta ocasión le harás algunas preguntas relacionadas con los dibujos que hizo.

- 1.1 ¿Qué representan estos dibujos?
- 1.2 ¿Qué intentaste plasmar con este dibujo?
- 1.3 ¿Por qué decidiste hacer este tipo de dibujos?
- 1.4 ¿Habrías podido resolver el problema sin el dibujo? Sí/No ¿por qué?
- 1.5 En la estrategia que tu decidiste para resolver el problema, ¿Qué tan útil fue para ti hacer un dibujo?
- 1.6 ¿Podrías proponer otra representación del mismo problema?

Sección 2. Estrategia

- 2.1 ¿Me podrías explicar la estrategia o plan que diseñaste para resolver el problema?
- 2.2 ¿En qué se basa tu plan o estrategia?
- 2.3 ¿Por qué crees que puede funcionar?
- 2.4 ¿Tienes la información que necesitas para ejecutarlo?

Procedimiento

- 2.5 ¿Me podrías explicar el procedimiento que seguiste para resolver el problema?
- 2.6 ¿Qué representan estas operaciones?
- 2.7 ¿Qué representan estos símbolos?
- 2.8 ¿Por qué decidiste utilizar este procedimiento para resolver el problema?
- 2.9 ¿Se te ocurre otra forma de resolver el problema?

Sección 3 Verificación

- 3.1 ¿Verificaste tu respuesta?
- 3.2 ¿Por qué verificaste tu respuesta?
- 3.3 ¿Me explicas ese proceso de verificación?
- 3.4 ¿Se te ocurre otro método de verificación?
- 3.5 ¿En algún momento te diste cuenta de que estabas contestando incorrectamente?
- 3.6 ¿Cómo te diste cuenta de que estabas contestando incorrectamente?
- 3.7 ¿Qué hiciste para corregir tu procedimiento?
- 3.8 ¿Tu solución es una respuesta adecuada a la pregunta del problema?