BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ACELERACIÓN COGNITIVA MEDIANTE EL APRENDIZAJE ACTIVO EN MATEMÁTICAS: UN ESTUDIO INICIAL

TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE

MAESTRO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

PRESENTA

LIC. PAUL TEUTLI ETCHEVERRY

DIRECTOR DE TESIS

DR. JOSIP SLISKO IGNJATOV

CO-DIRECTORA DE TESIS

DR. LIDIA AURORA HERNÁNDEZ REBOLLAR

PUEBLA, PUE. MAYO 2021

BUAP

DR. SEVERINO MUÑOZ AGUIRRE
SECRETARIO DE INVESTIGACIÓN Y
ESTUDIOS DE POSGRADO, FCFM-BUAP
P R E S E N T E:

Por este medio le informo que el C:

LIC. PAUL TEUTLI ETCHEVERRY

Estudiante de la Maestría en Educación Matemática, ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 10 de diciembre de 2020, con la tesis titulada:

"ACELERACIÓN COGNITIVA MEDIANTE EL APRENDIZAJE ACTIVO EN MATEMÁTICAS: UN ESTUDIO INICIAL"

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

A T E N T A M E N T E.
H. Puebla de Z. a 24 de mayo de 2021

DRA. LIDIA AURORA HERNÁNDEZ REBOLLAR
COORDINADORA DE LA MAESTRÍA
EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA.

DRA´LAHR/l´agm*

Facultad
de Ciencias
Físico Matemáticas

Av. San Claudio y 18 Sur, edif. FM1
Ciudad Universitaria, Col. San
Manuel, Puebla, Pue. C.P. 72570
01 (222) 229 55 00 Ext. 7550 y 7552

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por el apoyo económico en el periodo de enero de 2019 a diciembre de 2020, para la realización de esta investigación.

CVU: 958235

Agradecimientos

Doy gracias a mis padres por darme la vida y la oportunidad de tener los estudios necesarios para llegar hasta esta etapa de mi formación personal y profesional.

Al doctor Josip Slisko Ignjatov, a la doctora Lidia Aurora Hernández Rebollar y la doctora Honorina Ruiz Estrada, director de tesis, codirectora de tesis y tutora por el apoyo otorgado en este proyecto, por sus sugerencias y observaciones realizadas para enriquecer el trabajo.

A mi esposa Ana y a mis hijas Bárbara y Nicole por su gran apoyo, cariño y comprensión. Gracias por formar parte de mi vida y por estar siempre juntos.

A mis compañeros y profesores de la maestría por su apoyo y empatía.

A todos, muchas gracias.

Contenido

Índice de tablas

Índice de figuras

Resumen

Este trabajo consistió en determinar la influencia del aprendizaje activo en el desarrollo del razonamiento lógico y la reflexión cognitiva en 158 estudiantes de tercer año de bachillerato. Se diseñó una intervención sustentada en el programa de Aceleración Cognitiva a través de la Educación Matemática (CAME, por sus siglas en inglés), el cual consiste en una metodología de aprendizaje activo que implica realizar actividades que invitan a la reflexión y el análisis. Asimismo, se implementó el método de Polya para el análisis y resolución de las actividades. Considerando dos grupos de control y dos experimentales, inicialmente, se aplicaron dos instrumentos, el Test de Razonamiento Lógico (TRL) y el Test de Reflexión Cognitiva (TRC), con la finalidad de establecer el nivel de pensamiento formal y reflexivo de los participantes. Con un análisis descriptivo y de pruebas de hipótesis se determinó que los grupos eran estadísticamente comparables. Debido a que el programa CAME pretende mejorar las habilidades matemáticas utilizando el conflicto cognitivo, la intervención se sustentó en actividades que contienen desafíos de dificultad moderada, los cuales procuran el desarrollo del pensamiento formal y reflexivo. Por tanto, se conformaron dos antologías, una de razonamiento lógico y otra de reflexión cognitiva, esta última sometida a validación de expertos. Después de un avance considerable en la intervención, hubo la necesidad de rediseñarla, debido a la contingencia derivada del Covid-19. De tal manera, se eligió una muestra de los grupos experimentales y de control. Posteriormente, se conformaron dos grupos privados en Facebook con la finalidad de concluir el trabajo con los grupos experimentales. Al término de la intervención considerada en dos modalidades, presencial y en línea, nuevamente se aplicaron, a los estudiantes de la muestra, las pruebas TRL y el TRC. De ahí, se realizó un análisis descriptivo y de pruebas de hipótesis, con lo cual se determinaron diferencias estadísticamente significativas entre los resultados de los grupos experimentales vs de control, del pre y post test en ambas pruebas.

Palabras clave: aprendizaje activo, razonamiento lógico, reflexión cognitiva, CAME, método de Polya.

Abstract

This work consisted of determining the influence of active learning on the development of logical reasoning and cognitive reflection in 158 third-year high school students. An intervention was designed based on the Cognitive Acceleration through Mathematics Education (CAME) program, which consists of an active learning methodology that involves carrying out activities that invite reflection and analysis. Likewise, the Polya method was implemented for the analysis and resolution of activities. Considering two control groups and two experimental groups, initially, two instruments were applied, the Logical Reasoning Test (TRL) and the Cognitive Reflection Test (CRT), in order to establish the level of formal and reflective thinking of the participants. With a descriptive analysis and hypothesis tests, it was determined that the groups were statistically comparable. Because the CAME program aims to improve mathematical skills using cognitive conflict, the intervention was based on activities that contain challenges of moderate difficulty, which seek the development of formal and reflective thinking. Therefore, two anthologies were formed, one on logical reasoning and the other on cognitive reflection, the latter subject to validation by experts. After considerable progress in the intervention, there was a need to redesign it, due to the contingency derived from Covid-19. Thus, a sample of the experimental and control groups was chosen. Subsequently, two private groups were formed on Facebook in order to conclude the work with the experimental groups. At the end of the intervention considered in two modalities, face-to-face and online, the TRL and TRC tests were once again applied to the students in the sample. From there, a descriptive analysis and hypothesis tests were carried out, with which statistically significant differences were determined between the results of the experimental vs. control groups, of the pre and posttest in both tests.

Keywords: active learning, logical reasoning, cognitive reflection, CAME, Polya method.

Introducción

El presente trabajo reporta los resultados derivados de la aplicación de una metodología de aprendizaje activo en el aula, por medio de una intervención con estudiantes de nivel medio superior: dos grupos experimentales y dos de control. El propósito principal fue determinar la influencia del aprendizaje activo en el desarrollo del razonamiento lógico y la reflexión cognitiva de los estudiantes de los grupos experimentales.

El aprendizaje activo propicia una actitud dinámica de los estudiantes. Esto supone que el alumno debe estar expuesto continuamente a situaciones que impliquen actividades intelectuales de orden superior: análisis, síntesis, interpretación, inferencia y evaluación. El análisis de la literatura de investigación sugiere que los estudiantes deben hacer más que simplemente escuchar. Deben leer, escribir, discutir o participar en la resolución de problemas. De tal modo, las estrategias que promueven el aprendizaje activo se deben establecer como actividades instructivas que les permitan a los estudiantes reflexionar y pensar sobre lo que están haciendo (Bonwell y Eison, 1991).

Michael Shayer y Philip Adey, principales exponentes del Programa de Aceleración Cognitiva a través de la Educación Científica (CASE, por sus siglas en inglés), han trabajado como maestros de ciencias, desarrolladores de currículos y formadores de docentes e investigadores a lo largo de más de tres décadas (Shayer y Adey, 2014). Desde la década de los 80, se han dedicado a investigar los efectos de implementar el programa de aceleración cognitiva, como una estrategia de aprendizaje activo en diferentes escuelas, por medio de un diseño cuasiexperimental.

A partir del surgimiento del programa CASE, se han desarrollado e implementado otros programas de aceleración cognitiva, fundamentados en el esquema piagetiano de operaciones concretas y habilidades de razonamiento formal. Este tipo de programas ha tenido un impacto positivo en las habilidades de razonamiento de los estudiantes que pertenecen al grupo experimental, debido a que advierten mejores resultados en su desempeño, en comparación con los estudiantes del grupo de control (Tornero, 2014).

Como una alternativa al desarrollo de los programas de estudio, existen programas de aceleración cognitiva basados en el programa CASE, como el Proyecto de Aceleración Cognitiva a través de la Educación Matemática (CAME, por sus siglas en inglés) establecido en 1993 por Shayer, Johnson, y Adhami (1999), que incitan a los estudiantes a tomar tiempo para reflexionar sobre su actuar al resolver un problema, analizar qué les resultó difícil, qué tipo de razonamiento utilizaron, si requirieron ayuda y de qué manera (Oliver y Venville, 2015).

La esencia del proyecto CAME consiste en el diseño y selección de actividades que permitan el desarrollo cognitivo de los alumnos, mediante la solución de problemas que contienen un determinado conflicto cognitivo. Según Adey y Shayer (2002), el desarrollo cognitivo puede estimularse mediante la presentación de desafíos cognitivos de dificultad moderada, los cuales deben apoyarse en preguntas provocativas, invitaciones a discutir las dificultades presentadas o sugerencias para mirar el problema desde otras perspectivas.

Es así que, este trabajo se llevó a cabo por medio de una intervención sustentada en el programa CAME. Para ello, se conformaron dos antologías, una de razonamiento lógico y otra de reflexión cognitiva. Dichas antologías se adecuaron con actividades que implican desafíos de mediana dificultad, los cuales procuraron el desarrollo del pensamiento formal y reflexivo. De tal modo, se llevó a cabo una revisión cuidadosa de diversos sitios web y literatura especializada donde se incluyen tareas de razonamiento lógico y de reflexión cognitiva.

Asimismo, debido a que el desarrollo cognitivo puede estimularse mediante la presentación de retos de mediana dificultad que, a su vez, deben acompañarse de soporte en forma de preguntas o propuestas para examinar el problema desde diferentes enfoques (Adey y Shayer, 2002). Se empleó el método de Polya (1986), como apoyo para el análisis y resolución de cada uno de los problemas propuestos en ambas antologías, mismo que anticipadamente se explicó y discutió con los grupos experimentales en la asignatura de matemáticas correspondiente.

Considerando dos grupos de control y dos experimentales, al inicio de la intervención se aplicaron dos instrumentos a cada grupo, el Test de Razonamiento Lógico (TRL) y el Test de Reflexión Cognitiva (TRC), con el propósito de establecer el nivel de pensamiento formal y reflexivo de los participantes. Una vez obtenidos y analizados los resultados diagnósticos, se pudo determinar que la mayoría de los estudiantes, se situó en el estadio de las operaciones concretas o de primer orden (Acevedo y Oliva, 1995), así como en el nivel de pensamiento rápido o intuitivo (Kahneman, 2011). Por lo cual, los estudiantes de los cuatro grupos participantes revelaron características iniciales similares, respecto a su nivel de razonamiento lógico y de reflexión cognitiva.

Cada semana se trabajó con los grupos experimentales alternando una actividad de cada antología. No obstante, después de doce sesiones presenciales, fue necesario replantear la dinámica de intervención, debido a la contingencia sanitaria derivada del Covid-19. De este modo, para dar continuidad al trabajo programado, se conformaron dos grupos privados en Facebook uno por cada grupo experimental, en los cuales se incluyó una muestra representativa de cada grupo. Así mismo, se procuró, dentro de lo posible, continuar con una dinámica similar a la desarrollada en las sesiones presenciales. Por tanto, el trabajo se consideró en dos modalidades, presencial y en línea.

Una vez concluido el periodo de intervención, nuevamente se aplicaron las pruebas TRL y TRC, Finalmente, con los resultados obtenidos, se realizó un análisis estadístico descriptivo y de pruebas de hipótesis, con lo cual se determinaron diferencias estadísticamente significativas entre los resultados iniciales y finales de los grupos experimentales y los grupos de control, en ambas pruebas.

El trabajo de tesis se divide en cuatro capítulos. El primero presenta el planteamiento del problema, en el cual se especifican la justificación, las preguntas de investigación y los objetivos. El segundo capítulo expone la revisión de la literatura y el marco teórico, donde se mencionan las investigaciones que dieron origen a la aceleración cognitiva, como lo son los proyectos CASE y CAME. Así mismo se hace mención de conceptos importantes como: el razonamiento lógico, la reflexión cognitiva, el aprendizaje activo y el método de Polya. El tercer capítulo presenta el método aplicado en el trabajo; se hace una descripción del proceso estadístico efectuado para el análisis matemático y se puntualizan las etapas de cada sesión de intervención con los grupos experimentales. Asimismo, se describen los instrumentos de medición y las antologías para la intervención. El cuarto capítulo muestra los resultados iniciales y finales del TRL y TRC, estableciendo un análisis comparativo entre estos y analizando posibles diferencias estadísticamente significativas. De igual manera, presenta el análisis de cuatro problemas, dos de la antología de razonamiento lógico y dos de la antología de reflexión cognitiva, considerando, además, uno presencial y el otro en línea.

CAPÍTULO 1

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La matemática en México es un área en el currículo escolar que implica dificultades para su aprendizaje. Generalmente, entusiasma poco a los estudiantes quienes suelen mostrar un alto grado de rechazo al considerarlas difíciles y carentes de utilidad en la vida cotidiana (Ruiz, 2008). Se encuentra en una posición poco envidiable; se sabe que su estudio es necesario, pero pocos estudiantes se sienten cómodos con ello (Bishop, 2002).

Con frecuencia, los estudiantes muestran diversas limitantes al enfrentarse al análisis y solución de problemas matemáticos: no comprenden conceptos básicos de matemáticas y los conocimientos que adquieren se relacionan con la memorización y aplicación de algoritmos. Font (1994) afirma que, se enseña matemáticas otorgando fundamental importancia a la memorización de conceptos y técnicas, aminorando sustancialmente el análisis, la reflexión y la participación activa del estudiante. Por tanto, el alumno supone que lo primordial en las matemáticas es la utilización automática de una serie de procedimientos algorítmicos.

De igual manera, Vila y Callejo (2009) sostienen que, la escuela favorece el aprendizaje de procedimientos mecánicos; provocando que los estudiantes se muestren pasivos, con escaso nivel de interés, compromiso y motivación hacia el aprendizaje. Por tanto, un alto porcentaje de alumnos acredita los cursos sin haber comprendido las nociones y procedimientos básicos matemáticos y sin desarrollar adecuadamente habilidades para razonar y pensar.

Por otra parte, los currículos matemáticos de Educación Media Superior (EMS) en México, pretenden el desarrollo de competencias que permitan al estudiante formular y resolver problemas cotidianos y complejos, con capacidad de análisis y síntesis, argumentando de manera crítica, reflexiva y creativa la solución del problema (SEP, 2017). Sin embargo, la evidencia de diversos resultados nacionales e internacionales sugiere que tales habilidades no se han logrado favorablemente.

Según el informe de resultados del Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes (PLANEA) 2017, únicamente, el 2.5% de los estudiantes a los que se les aplicó la prueba, alcanzó el nivel máximo en el área de matemáticas. No así el 66% que no logró superar el nivel más bajo.

Además, en la última publicación del Programa para la Evaluación Internacional de Estudiantes (PISA, por sus siglas en inglés) del año 2018, se advirtió que el 44% de los estudiantes mexicanos logró el nivel 2 o superior y, solamente, el 1% obtuvo el nivel 5 o superior en matemáticas (Etcheverry et al., 2020).

Por su parte, el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), de gran parte del mundo, sugiere que los estudiantes de matemáticas deben participar activamente en actividades prácticas, a partir de situaciones problemáticas que requieran pensar crítica y reflexivamente. Además de permitir el descubrimiento y la comunicación de ideas (Grouws, 1992).

De tal modo, este trabajo consistió en una intervención sustentada en el programa CAME, el cual implica la implementación de tareas que contienen un determinado conflicto cognitivo. La finalidad fue fomentar, en los participantes, el desarrollo del razonamiento lógico y la reflexión cognitiva por medio de la implementación del aprendizaje activo en el aula; esto debido a que, según Vygotsky, los alumnos aprenden mejor cuando se encuentran involucrados de forma activa en tareas significativas e interesantes (Ruiz, 2008). De esta manera, se plantean las siguientes preguntas y objetivos de investigación.

Pregunta general:

¿Cómo influye la implementación del aprendizaje activo en el desarrollo del razonamiento lógico y la reflexión cognitiva de los participantes?

Preguntas específicas:

¿Cuál es el nivel de razonamiento lógico y de reflexión cognitiva de los participantes?

¿Qué habilidades pueden desarrollarse en los estudiantes de bachillerato para resolver problemas de razonamiento lógico y de reflexión cognitiva de manera más efectiva?

Objetivo general:

- Determinar el impacto del aprendizaje activo en el desarrollo del razonamiento lógico y la reflexión cognitiva de los participantes.

Objetivos específicos:

- Establecer el nivel de razonamiento lógico y de reflexión cognitiva de los participantes.
- Desarrollar, en los participantes, habilidades para la resolución de problemas de razonamiento lógico y de reflexión cognitiva de manera más efectiva.

Capítulo 2

REVISIÓN DE LA LITERATURA Y MARCO TEÓRICO

2.1 Aceleración cognitiva a través de la educación científica

La *aceleración cognitiva* (AC) implica el proceso de acelerar el desarrollo natural de los estudiantes a través de diferentes etapas de la capacidad de pensamiento, hacia el tipo de pensamiento abstracto, lógico y multivariado, al que Piaget describe como pensamiento operacional formal. Este tipo de pensamiento se entiende como un proceso natural de desarrollo intelectual que se manifiesta entre los 14 y 15 años de edad (Adey, 1999). La AC se ha implementado en muchas escuelas de diferentes países, con el propósito de elevar los estándares en el desarrollo de la ciencia (Jones y Gott, 1998).

La A*celeración Cognitiva a través de la Educación Científica* (CASE, por sus siglas en inglés) es un programa de enseñanza innovador establecido a partir de la investigación sobre el desarrollo cognitivo. Se sustenta, principalmente, en el trabajo de Piaget y en los principios fundamentales de las teorías del aprendizaje de Vygotsky (Adey, 1999). El objetivo principal del programa es incrementar la cantidad de estudiantes con pensamiento operacional formal, ya que el éxito en la ciencia de la escuela y en las matemáticas requiere este nivel de procesamiento (McCormack, 2009).

En lugar de ser un plan de estudios alternativo, CASE está diseñado como una intervención en el plan de estudios de ciencias para estudiantes de 11 a 14 años. Tiene sus orígenes en el trabajo realizado a partir de la década de los ochentas en el Chelsea College de Londres, el cual mostraba que muchos de los conceptos comprendidos en los planes de estudios de ciencias en el Reino Unido (y en todo el mundo) exigían más allá de la capacidad intelectual de los estudiantes (Oliver y Venville, 2015). El equipo del Chelsea College, dirigido por el profesor Michael Shayer, asumió un enfoque científico del problema. Como punto de partida, se necesitaba una descripción precisa del perfil intelectual de la población escolar. Además, se requería establecer y describir el nivel de dificultad de los conceptos científicos. La teoría del desarrollo cognitivo, elaborada por Piaget, proporcionó el tipo de descripción que requerían (Oliver y Venville, 2015).

Michael Shayer y Philip Adey, principales exponentes del programa CASE, han trabajado como maestros de ciencias, desarrolladores de currículos, formadores de docentes e investigadores durante más de 30 años. Shayer fue el director del proyecto CASE y Adey fue el investigador principal en este tema (Shayer y Adey, 2014). Durante la década de los ochenta se dedicaron a investigar los efectos de implementar el programa de aceleración cognitiva, en diferentes escuelas, por medio de un diseño cuasiexperimental.

El experimento CASE original se llevó a cabo de 1984 a 1987 a través de una intervención de diseño experimental / de control (Shayer y Adey, 2014). Participaron alumnos en grados escolares Y7 y Y8 con edades entre 11 y 12 años, realizando actividades especiales en sus lecciones de ciencias cada dos semanas durante un período de dos años (Adey y Shayer, 1990). La muestra consistió en 190 alumnos en el grupo experimental y 208 en un grupo de control. Los estudiantes que participaron en el grupo experimental mostraron, estadísticamente, mayores niveles de desarrollo cognitivo, a diferencia de sus compañeros en el grupo de control. Además, se detectó que la intervención también tuvo un efecto a largo plazo y se transfirió a otras materias como inglés y matemáticas (Tornero, 2014).

2.1.1 Pilares del programa CASE

El sustento teórico del programa CASE es piagetiano, principalmente, ya que plantea situaciones de conflicto que fomentan el equilibrio y la construcción de patrones de razonamiento de las operaciones formales. Además, tiene influencia vygotskiana, puesto que enfatiza la construcción social del razonamiento, a través de la reflexión metacognitiva y el uso minucioso del lenguaje del pensamiento (McCormack, 2009). Por tanto, el programa CASE se estructura en un conjunto de principios o etapas operativas denominadas *pilares de la AC,* con el propósito de apoyar el diseño de actividades que estimulen al máximo el desarrollo cognitivo de los estudiantes (Adey y Shayer, 2002).

1. La *preparación concreta*, considerada como el primer pilar de la teoría CASE, tiene por objetivo permitir que los alumnos se familiaricen con el problema. Adey y Shayer (2002) sostienen que en la práctica educativa los alumnos necesitan una introducción a cualquier problema intelectual con el que deben enfrentarse, tienen que conocer el contexto del problema y el vocabulario sobre el cual tendrán que deliberar. De tal modo, no se trata solamente de presentar a los estudiantes un problema difícil y esperar que el *conflicto cognitivo* haga el trabajo de la AC. Debe existir una fase de preparación en la que se

introduce el lenguaje del problema, el instrumento empleado y el contexto en el que se delimita el problema.

El propósito de esta etapa es asegurar que las dificultades encontradas sean solamente intelectuales y, de ser posible, no se incrementen por problemas con el idioma o el contexto (Oliver y Venville, 2015). Los estudiantes deben conocer y estar familiarizados con el contexto del problema y con las terminologías que se utilizan en la actividad (Finau et al., 2016).

2. El segundo pilar de la teoría CASE, el *conflicto cognitivo*, ocurre cuando el estudiante encuentra un problema que no puede resolver fácilmente por sí mismo, pero con la ayuda cuidadosamente estructurada de un experto, puede solucionar, o al menos lograr un avance significativo en la comprensión de su naturaleza intrínseca.

El principio del conflicto cognitivo se resume en la idea de una *zona de desarrollo próximo* (ZDP) propuesta por Vygotsky. La ZDP es la diferencia entre el nivel real de desarrollo, determinado por la capacidad de resolver de manera independiente un problema, y el nivel de desarrollo potencial, determinado por la resolución de un problema con la orientación de un adulto u otro compañero más apto (Vygotsky, 1989; citado en Montealegre, 2007). La ZDP permite evidenciar aquellas funciones que todavía no han madurado, pero que se encuentran en proceso de hacerlo y, en un determinado momento, alcanzarán su madurez.

En algunos casos, los estudiantes necesitan pensar y hablar sobre la idea abstracta o el modelo para explicar el fenómeno dado. Piaget describió ese proceso como una *adaptación* en la que los niños y jóvenes modifican su comportamiento y sus estructuras cognitivas, permitiéndoles enfrentar el nuevo entorno o experiencia. Según Piaget, para resolver el conflicto, la estructura cognitiva debe modificarse para que la nueva información pueda asimilarse. Simplemente, tal conflicto se considera el motor del crecimiento cognitivo, ya que los estudiantes requieren un esfuerzo mental para ir más allá de sus formas actuales de pensar (Finau et al., 2016).

El desarrollo cognitivo puede estimularse mediante la presentación de desafíos cognitivos de dificultad moderada, estos deben venir acompañados de apoyo, en forma de preguntas provocativas, invitaciones a discutir las dificultades presentadas o sugerencias para mirar el problema desde otras perspectivas (Adey y Shayer, 2002).

El profesor puede proporcionar las experiencias adecuadas y dirigir, a través de un cuestionamiento cuidadoso, pero no puede poner la capacidad de pensamiento de nivel superior directamente en la mente del estudiante. Este debe construirlo por sí mismo, lo cual puede ser un proceso lento considerando que las experiencias que estimulan cognitivamente son aquellas que tienen lugar en la ZDP (Oliver y Venville, 2015).

3. De tal modo, se presenta el tercer pilar de la teoría CASE, *la idea de la construcción* (Oliver y Venville, 2015). Vygotsky, encontró que la construcción del conocimiento y la comprensión son un proceso eminentemente social. La comprensión aparece primero en el espacio social que los aprendices comparten, para luego ser interiorizada por estos (Adey y Shayer, 2002). Asimismo, el proceso de construcción involucra discusiones orales sobre nuevas ideas, explorándolas a través de encuentros grupales, buscando explicaciones y justificaciones.

   En el programa CASE, la construcción se refiere a los períodos de actividad de grupos pequeños en el aula. De esta manera, los estudiantes construyen, comparten, desarrollan y discuten significados, depurando y desarrollando su propia comprensión (Finau et al., 2016).

4. El cuarto pilar de la teoría CASE es el estímulo de la *metacognición*, lo que significa *pensar sobre su propio pensamiento*. De acuerdo con Schoenfeld (2016), la metacognición se refiere al conocimiento de un individuo sobre sus propios procesos cognitivos o cualquier cosa relacionada con ellos. Podemos ayudarnos a desarrollar un pensamiento de mayor nivel solo si tomamos un poco de control de nuestro pensamiento, es decir, ser conscientes de nosotros mismos como pensadores. Una parte importante para desarrollar habilidades de pensamiento es que los estudiantes tomen conciencia de los pensamientos que emplean para resolver diferentes problemas. Recordar y reflexionar en voz alta ayuda a desarrollar esta conciencia (McCormack, 2009).

   El programa CASE alienta a los estudiantes a tomar tiempo para reflexionar sobre cómo resolvieron un problema, qué les resultó difícil, qué tipo de razonamiento utilizaron, cómo y qué tipo de ayuda solicitaron (Oliver y Venville, 2015). Se enseña a los estudiantes a tomar conciencia no solamente, de su propio pensamiento sino de cómo pensaban los demás cuando discutían o resolvían el problema.

En CASE, la metacognición conlleva al diálogo en el aula; por tanto, requiere tiempo durante las lecciones para que los maestros presenten estrategias de resolución de problemas y los alumnos reflexionen sobre sus errores y puedan modificar sus patrones de pensamiento (Finau et al., 2016). El propósito es establecer estrategias para planificar, supervisar y evaluar la ejecución, mediante expresiones verbales durante la ejecución de la tarea. Se puede recurrir al *recuerdo estimulado*, a través de un cuestionario que permita registrar los procesos concientizados por el estudiante durante la realización de la tarea, al responder un conjunto de preguntas, inmediatamente después de concluida la tarea (Rios, 1990; citado en González, 1993).

5. El último pilar es el *puente o vinculación* de las formas de pensar. Desarrollado en el contexto particular de la actividad CASE, con otros contextos como las matemáticas u otras partes del currículo y las experiencias en la vida real. En general, el razonamiento expuesto dentro de un contexto especial, debe resumirse y el estudiante debe mostrar cómo se puede usar como una herramienta de pensamiento general (Oliver y Venville, 2015).

   El maestro expande los problemas que los estudiantes han emprendido para mostrar dónde ocurren problemas similares en otras áreas del currículo matemático o en actividades de la vida diaria. Se requiere que los estudiantes hagan explícitas las estrategias que han desarrollado e imaginen cómo pueden aprender más a través del pensamiento abstracto y el razonamiento (Finau et al., 2016).

2.2 Aceleración cognitiva a través de la educación matemática

Desde el surgimiento del programa CASE se han propuesto otros programas de aceleración cognitiva. Implementados a gran escala en diferentes contextos, sustentados en los pilares del programa CASE y desarrollados a partir del esquema piagetiano de operaciones concretas y habilidades de razonamiento formal. Este tipo de programas ha tenido un impacto favorable en las habilidades de razonamiento de los estudiantes que pertenecen al grupo experimental, debido a que, en general, obtienen mejores resultados en su nivel de razonamiento lógico en comparación con los estudiantes del grupo control, no solo en ciencias, sino que también en pruebas nacionales de matemáticas e inglés (Tornero, 2014).

Entre tales programas se destacan los siguientes: Aceleración Cognitiva a través de la Educación Matemática (CAME, por sus siglas en inglés), Aceleración Cognitiva a través de la Educación Tecnológica (CATE, por sus siglas en inglés) y el proyecto Artes, Razonamiento y Habilidades de Pensamiento (ARTS, por sus siglas en inglés). Todos están diseñados para promover el pensamiento operacional formal en adolescentes con edades que oscilan entre 11 y 14 años (McCormack, 2009).

Específicamente, el programa CAME, considerado como un hermano menor del proyecto CASE (Goulding, 2009), se establece en 1993 por Shayer y colaboradores (1998). Surge como una intervención realizada en el contexto de las matemáticas, con el objetivo de acelerar el desarrollo cognitivo de los estudiantes en los primeros dos años de educación secundaria (Shayer y Adhami, 2007).

Desarrollado en el King's College de Londres, adaptado y aprobado con éxito en otros lugares del mundo como Hong Kong, Irlanda, Nigeria, Singapur y Finlandia, el programa CAME busca mejorar las habilidades de pensamiento, el rendimiento y las actitudes en matemáticas de los estudiantes (Finau et al., 2016). Es un ejemplo de programa de éxito, al proporcionar la mediación apropiada para involucrar a los estudiantes en niveles más altos de pensamiento matemático. La investigación en curso muestra que dicho programa apoya el desarrollo metacognitivo, generando conciencia en los estudiantes de cómo aprenden y resuelven problemas. (Pugalee et al., 2002).

Las lecciones CAME, llamadas Thinking Maths, constan de actividades que favorecen la estimulación cognitiva, utilizando tareas desafiantes en el aula. En lugar de promover un método mecánico de resolución de problemas, basado en procedimientos y algoritmos matemáticos, el esquema metodológico del proyecto CAME se fundamenta en la resolución de problemas que contienen un determinado conflicto cognitivo y una dinámica de aprendizaje activo en el aula. De tal manera, pretende desarrollar en los estudiantes habilidades de razonamiento lógico y de reflexión mediante el proceso de reconstrucción de conceptos matemáticos (Adhami et al., 1998).

Los proyectos CASE y CAME se basan en la investigación y la teoría en psicología cognitiva y psicología social y, a diferencia de los programas de habilidades de pensamiento general, están claramente arraigados dentro de las disciplinas del sujeto (Goulding, 2009). Al respaldarse en las teorías de Piaget y Vygotsky, las actividades con el enfoque de enseñanza CAME se sustentan en los cinco *pilares de la aceleración cognitiva*, descritos anteriormente: *preparación concreta, conflicto cognitivo, construcción, metacognición y puente o vinculación*.

De acuerdo con Shayer y Adhami (2007), la evidencia sugiere que, a medida que los maestros adquieren confianza en la utilización de los cinco pilares y los adoptan en sus lecciones regulares de matemáticas, brindan oportunidades para que los estudiantes aprovechen las estrategias de resolución de problemas y las maneras de pensar desarrolladas durante las lecciones CAME.

2.3 Aprendizaje activo

El *aprendizaje activo* se distingue como una estrategia que favorece una actitud dinámica de los estudiantes, a diferencia de lo que sucede con el método tradicionalista, en el que el alumno se limita a escuchar al profesor y tomar notas. De acuerdo con Bonwell y Eison (1991; citado en Sierra, 2013), el aprendizaje activo es un proceso que adentra a los estudiantes a realizar cosas y a reflexionar acerca de las mismas. De igual manera, implica que el estudiante debe estar expuesto continuamente a situaciones que conlleven a actividades intelectuales de orden superior.

El empleo del término *aprendizaje activo* se basa más en la comprensión intuitiva que en una definición. Muchos profesores afirman que todo aprendizaje es sustancialmente activo y, por ende, los estudiantes participan activamente mientras escuchan presentaciones formales en el salón de clase. Sin embargo, el análisis de la literatura de investigación sugiere que los estudiantes deben hacer más que simplemente escuchar, deben leer, escribir, discutir o participar en la resolución de problemas.

Según Ruiz (2008), Vygotsky plantea que los alumnos aprenden mejor en colaboración con sus pares, profesores, padres u otros, cuando se encuentran involucrados de forma activa en tareas significativas e interesantes. Además, de acuerdo con Sierra (2012), el aprendizaje activo permite que los estudiantes dejan de ser espectadores, adquieran un compromiso mayor con las actividades, aprendan a reconocer cuándo se necesita más información, pongan mayor énfasis en el desarrollo de habilidades, incrementen su nivel de motivación y desarrollen habilidades de orden superior.

De tal modo, se propone que las estrategias que promueven el aprendizaje activo se definan como actividades instructivas que involucren a los estudiantes para hacer cosas y pensar sobre lo que están haciendo. El uso de estas técnicas en el aula es vital debido a su poderoso impacto en el aprendizaje de los estudiantes.

2.4 Reflexión cognitiva

La reflexión cognitiva consiste en pensar detenidamente acerca de cierto conocimiento, se considera como la tendencia a verificar y detectar errores intuitivos (Sinayev y Peters, 2015). Kahneman (2011), profesor de psicología en la Universidad de Princeton, ha desarrollado una teoría, en la que plantea la existencia de dos tipos de procesos cognitivos identificados, frecuentemente, como sistema de pensamiento 1 o intuitivo y sistema de pensamiento 2 o reflexivo. El primero es inmediato e involuntario y requiere poca o nula atención o reflexión. El segundo, demanda más atención y un mayor esfuerzo y tiempo de análisis.

El pensamiento intuitivo tiene la ventaja de generar soluciones rápidas y aproximadas, con un mínimo esfuerzo, a un problema dado. No obstante, aunque este pensamiento a menudo proporciona respuestas suficientemente aceptables, no es infalible (Haigh, 2016). Por tanto, el pensamiento reflexivo permite reconocer y suprimir respuestas intuitivas pero incorrectas.

2.5 Razonamiento lógico

Se define como la capacidad para construir soluciones y resolver problemas, estructurar elementos para realizar deducciones y fundamentarlas con argumentos sólidos (Ferrándiz et al., 2008). Parte desde el manejo de objetos al desarrollo de la capacidad para pensar sobre los mismos, utilizando dos tipos de pensamiento: concreto y formal. El primero se caracteriza por las operaciones de primer orden: conservación, igualación y correspondencia; así mismo, permite realizar operaciones relativas a un objeto, siendo lo posible una extensión limitada de lo real (Hernández et al., 2013). El segundo, que se considera como el nivel superior del razonamiento humano (Kitchener y Fisher, 1990), permite establecer suposiciones y llevar a cabo operaciones de orden superior: análisis, síntesis, interpretación, inferencia y evaluación.

Ciertos expertos aseguran que, según Piaget, el razonamiento lógico-matemático se deriva desde la manipulación de objetos al desarrollo de la facultad para reflexionar acerca de tales objetos. Se utiliza, inicialmente, el pensamiento concreto y, finalmente, el pensamiento formal (Ferrándiz et al., 2008).

2.6 Método de Polya

Hace algunas décadas, en 1945, George Polya publicó su famoso libro “How to solve it”, el cual, sin ser el primer tratado sobre la resolución de problemas, se ha transformado en un clásico sobre esta temática. Este libro surge como un apoyo para el profesor, mismo que le permite ayudar a sus alumnos de forma efectiva en la resolución de problemas.

Consiste en un método de cuatro fases, las cuales incluyen preguntas que invitan a la reflexión y análisis de cada etapa en el proceso de solución de un problema (Polya, 1986):

Fase 1. Entender el problema. El alumno no solo debe comprender el problema, sino también debe desear resolverlo. El maestro debe proponer problemas retadores, pero que no sean tan complicados, que el alumno pierda el interés. Las siguientes preguntas pueden servir de apoyo para entender el problema: ¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son los datos? ¿Cuál es la condición? ¿Es la condición suficiente para determinar la incógnita? ¿Es insuficiente? ¿Contradictoria?

Fase 2. Concebir un plan. Lo primordial en la solución de un problema es idear un plan. Esto puede tomar forma poco a poco y después de varios ensayos aparentemente infructuosos, se puede tener de pronto una "idea brillante". Lo mejor que puede hacer el maestro por su alumno es conducirlo con su ayuda, pero sin imposiciones. Las siguientes preguntas pueden ser útiles para la comprensión del problema: ¿Te has encontrado con un problema semejante? ¿O has visto el mismo problema planteado en forma ligeramente diferente? ¿Conoces un problema relacionado con éste? ¿Conoces algún teorema, que te pueda ser útil? ¿Te haría falta introducir algún elemento auxiliar a fin de poder utilizarlo? ¿Podrías enunciar el problema en otra forma? ¿Podrías plantearlo en forma diferente nuevamente? ¿Podrías imaginarte un problema análogo un tanto más accesible? ¿Puedes pensar en algunos otros datos apropiados para determinar la incógnita? ¿Puedes cambiar la incógnita? ¿Has empleado todos los datos?

Fase 3. Ejecución del plan. El plan proporciona una línea general. Se deben examinar muy bien y tomar en cuenta todos los detalles, hasta que todo quede claro. Las siguientes preguntas coadyuban a llevar a cabo el plan: ¿Puedes ver claramente que el paso es correcto? ¿Puedes demostrarlo?

Fase 4: Mirar hacia atrás. Al no considerar la posibilidad de haber cometido algún error en el procedimiento, se pierde una fase importante del trabajo. Reconsiderando la solución y analizando el proceso de la misma, permite reafirmar los conocimientos y desarrollar aptitudes para resolver problemas. Las preguntas siguientes permiten llevar a cabo una visión retrospectiva: ¿Tu solución es correcta? ¿Puedes comprobar el resultado? ¿Puedes verificar el razonamiento? ¿Puedes obtener el resultado de una forma diferente? ¿Puedes ver de golpe el resultado? ¿Puedes usar el resultado, o el método para algún otro problema?

Con este método se pretende que el alumno desarrolle habilidades efectivas al resolver un problema matemático. Se basa en la heurística, que según el diccionario de la real academia española (DRAE) es una técnica de indagación y descubrimiento; además, en algunas ciencias, se considera una manera de buscar la solución de un problema mediante métodos no rigurosos, como el tanteo, reglas empíricas, etc.

Según Polya (1986), el profesor de matemáticas tiene una gran oportunidad. Por tanto, si dedica su tiempo a encaminar a sus alumnos en operaciones rutinarias, apagará en ellos el interés, impidiendo su desarrollo intelectual. Sin embargo, si pone a prueba la curiosidad de sus alumnos, planteándoles problemas adecuados a sus conocimientos, y les ayuda a resolverlos por medio de preguntas interesantes, podrá generar en ellos el gusto por encontrar la solución a los problemas planteados.

Capítulo 3

MÉTODO

El enfoque implementado en esta investigación es de tipo mixto, el cual implica un proceso de recolección, análisis y vinculación de datos cuantitativos y cualitativos para responder al planteamiento del problema. De igual manera, comprende un diseño cuasiexperimental, mismo que es particularmente útil para estudiar problemas en los cuales no se puede tener control absoluto de las situaciones. Este tipo de diseño se utiliza cuando los grupos ya están constituidos y permite establecer una medición previa a la intervención y otra posterior (Hernández et al., 2010).

3.1 Participantes

La población participante se conformó por alumnos de nivel medio superior, con un rango de edad entre 17 y 19 años. Los cuales, se encontraban cursando la asignatura de Estadística del Plan de Estudio 2006 (SEP, 2006) del ciclo escolar 2018 – 2019.

Los estudiantes pertenecen al bachillerato general oficial estatal, turno matutino, del Centro Escolar "General Miguel Negrete Novoa", institución pública de modalidad escolarizada, la cual forma parte de los Centros Escolares del estado de Puebla, mismos que se conforman por cuatro niveles educativos: preescolar, primaria, secundaria y bachillerato. El bachillerato se encuentra en el municipio de Tepeaca de Negrete, ubicado a 35 km de la Ciudad de Puebla. Dicho municipio es considerado como una región de tipo urbano que colinda con municipios de marginación media, alta y muy alta. Por lo tanto, la población objeto de estudio cuenta con características socioeconómicas muy diversas.

Cabe aclarar que, inicialmente, el trabajo se programó para ser implementado en sesiones presenciales. No obstante, debido a la contingencia sanitaria originada por el Covid-19, hubo la necesidad de seccionar el proyecto en dos modalidades, presencial y en línea. Por la tanto, los participantes se conformaron como en seguida se explica.

3.1.1 Presencial

En esta modalidad participaron 158 estudiantes, divididos en cuatro grupos: el A con 41 alumnos, el B con 38 alumnos, el C con 40 alumnos y el D con 39 alumnos. Los grupos A y C se establecieron como grupos experimentales 1 y 2 respectivamente, a cargo del profesor 1, mientras que el B y D se consideraron como grupos de control 1 y 2, a cargo del profesor 2.

3.1.2 En línea

En esta modalidad, participaron, en un inicio, 10 estudiantes por grupo, de los cuales quedaron 8 de cada uno, tanto experimental como de control. Los participantes fueron elegidos, principalmente, por su disponibilidad para realizar las actividades escolares en línea y su facilidad de tiempo adicional y acceso a internet. De hecho, no fue posible establecer la selección de manera más sistematizada, ya que la proporción de estudiantes que cumplía con las características descritas, no rebasaba el 30%. Sin embargo, es importante resaltar que, antes de establecer la muestra, se procuró seleccionar a los estudiantes al azar, sin considerar su rendimiento académico o promedio escolar.

3.2 Instrumentos de medición.

3.2.1 Test de Razonamiento Lógico

El grado de razonamiento lógico de los participantes se determinó con el empleo de la versión en castellano del Test of Logical Thinking (TOLT) (Tobin y Capie, 1981) de Acevedo y Oliva (1995), denominado Test de Razonamiento Lógico (TRL) (ver Anexo 1).

Esta prueba de razonamiento formal, expuesta a estudios de fiabilidad y validez por los autores de la misma, consta de 10 ítems, dos por cada uno de los siguientes esquemas de razonamiento: proporcionalidad, control de variables, probabilidad, correlación y operaciones combinatorias. Los ocho primeros son del tipo respuesta – explicación, en un formato de opción múltiple, tanto en la respuesta como en la posible justificación y los dos últimos, que contemplan combinaciones y permutaciones, se presentan a manera de respuesta abierta semiestructurada (Acevedo y Oliva, 1995).

Se obtiene un punto, solamente, cuando la respuesta y justificación brindan una correcta solución al problema. Se considera como pensador concreto al individuo que logra obtener de cero hasta cuatro puntos. Por otra parte, se distingue como pensador formal, a quien logra puntuar de ocho a diez aciertos (Acevedo y Oliva, 1995). Asimismo, se considera como pensador en transición, a quien obtiene de cinco a siete puntos.

3.2.2 Test de Reflexión Cognitiva

Para establecer el grado de reflexión cognitiva de los participantes, se aplicó la extensión del Test de Reflexión Cognitiva (TRC) de Toplak y colaboradores (2014) (ver Anexo 2). Esta prueba, basada en el Cognitive Reflections Test (CRT) de Frederick (2005), permite medir la tendencia del encuestado para emplear el pensamiento rápido o lento en el análisis de algunos desafíos matemáticos. Consta de siete ítems, de los cuales se retomaron seis. El ítem 7 fue omitido ya que su contexto (inversión bursátil) se consideró distinto a la realidad socioeconómica de los participantes. Los tres primeros ítems surgen del TRC original de Frederick (2005). Los ítems 4 y 5, fueron brindados por Frederick a los autores de la propuesta y, el sexto, fue una adaptación de Dominowski (1994; ver Gilhooly y Murphy, 2005; citado en Toplak et al., 2014).

El TRC contiene problemas matemáticos diseñados para provocar una respuesta rápida, pero equívoca, que podría evitarse reflexionando cuidadosamente sobre el enunciado que se presenta (López, 2012). De este modo, a cada respuesta correcta se le asigna un punto o ninguno en caso contrario. Se considera como pensador rápido a quien obtiene de cero a tres puntos y como pensador lento a quien acierta al menos a cuatro respuestas.

De acuerdo con Frederick (2005), el TRC mide la capacidad para desprenderse de una respuesta rápida e intuitiva, evitando dar como respuesta la primera opción que viene a la mente.

3.3 Procedimiento

3.3.1 Análisis cuantitativo

La aplicación del TRL y TRC se realizó al inicio (pre test) y al final de la intervención (post test), con la finalidad de contrastar los resultados obtenidos antes y después de la intervención. Cabe aclarar que el post test se aplicó, única y exclusivamente a los participantes en línea, puesto que no hubo oportunidad de aplicarlo a todos los participantes de manera presencial.

Después de obtener la puntuación inicial y final de las pruebas TRL y TRC, se realizó un análisis estadístico descriptivo, complementándolo con un análisis gráfico. Asimismo, se aplicaron tests de hipótesis de normalidad y homocedasticidad para determinar, en primer lugar, si los datos cumplían con la condición de normalidad y, en segundo lugar, con la homogeneidad de varianzas. Posteriormente, se realizaron pruebas de hipótesis para detectar posibles diferencias estadísticamente significativas entre los puntajes iniciales y finales en y entre los grupos experimentales y los grupos de control.

El contraste de normalidad de los datos se estableció con el empleo del test de Shapiro-Wilk (Amat, 2016). De igual manera, el supuesto de homogeneidad de varianzas se determinó con el empleo de del test no paramétrico Fligner-Killeen (Amat, 2016).

Para identificar posibles diferencias estadísticamente significativas se aplicaron las pruebas de hipótesis no paramétricas Mann-Whitney-Wilcoxon para muestras independientes y la prueba de Wilcoxon para muestras apareadas (Amat, 2016).

A lo largo del proceso de aplicación de tests y pruebas de hipótesis estadísticas, para aceptar o rechazar la hipótesis nula, se consideró un nivel de confianza de 0.05. Dicho procedimiento se llevó a cabo con el programa RStudio versión 3.6.1. Asimismo, el proceso de elaboración de gráficas, se realizó con el apoyo del software estadístico Excel.

3.3.2 Análisis cualitativo

A partir de las actividades implementadas con los alumnos de la muestra de los grupos experimentales, se hizo una selección de aquellas trabajadas, tanto presencialmente como en línea. Esto con la finalidad de mostrar los procedimientos de solución y los argumentos dados por los participantes. De tal modo, se presentan dos actividades por cada una de las antologías. Una de ellas trabajada presencialmente y la otra en línea.

3.4 Antologías para la intervención

Las lecciones CAME, como anteriormente se mencionó, se constituyen por tareas que persiguen la estimulación cognitiva, evitando promover métodos mecánicos de resolución de problemas, además de fundamentarse en situaciones que contienen un determinado conflicto cognitivo (Adhami et al., 1998). Por ello, las actividades propuestas en esta investigación pretenden desarrollar habilidades de razonamiento lógico y de reflexión cognitiva que, de acuerdo con Adey y Shayer (2002), estimulen el desarrollo cognitivo mediante la presentación de desafíos cognitivos de dificultad moderada.

De tal manera, después de realizar una revisión minuciosa en distintas fuentes de información, se integraron dos antologías: una de reflexión cognitiva y otra de razonamiento lógico. La finalidad fue incluir tareas con características similares a los problemas de los tests descritos anteriormente (TRL y TRC) que contribuyeran al desarrollo cognitivo de los participantes.

3.4.1 Antología de Reflexión Cognitiva (ARC)

1. Lucía fue al médico, el cual le recetó tomar 4 pastillas, una pastilla cada 6 horas, ¿En cuántas horas terminará de tomar todas las pastillas?

   Extraído de: https://es.scribd.com/doc/130967795/Razonamiento-Logico-Matematico-Ejercicios-Resueltos

2. En una ferretería tienen un rollo de 84 m de alambre, y diario cortan 7 m. ¿En cuántos días habrán cortado todo el alambre?

   Extraído de: https://es.scribd.com/doc/130967795/Razonamiento-Logico-Matematico-Ejercicios-Resueltos

3. Susana quiere compartir con sus siete amigos un pastel que preparó. ¿Cuántos cortes debe realizar como mínimo?

   Extraído de: http://razonamiento-logico-problemas.blogspot.com/2013/04/problemas-resueltos-de-razonamiento.html

4. Un caracol trepa un poste cuya altura es de 10 metros. Durante el día sube 3 metros, pero en la noche resbala 2 metros. ¿Cuántos días y cuántas noches necesita el caracol para subir hasta la cima del poste?

   Retomado del trabajo de tesis de Velasco (2017).

5. María y Alejandra, compiten en una carrera de 100 metros planos, María gana la carrera y Alejandra queda a 5 metros detrás de María. Posteriormente, acuerdan correr nuevamente los 100 metros, pero ahora María decide dar ventaja a Alejandra, colocándose 5 metros por detrás de ella. Considerando que cada una corrió a la misma velocidad que en la carrera anterior, ¿quién llega primero a la meta? o ¿ambas empatan?

   Extraído de: https://www.youtube.com/watch?v=V33U1OsFVnQ

6. Un día un pequeño poney se perdió en el desierto durante cinco días. El primer día recorrió una cierta distancia, y cada uno de los días siguientes recorrió una milla más que el día anterior. Al final de los cinco días regresó a casa exhausto, ya que había cubierto una distancia total de cincuenta y cinco millas. ¿Cuántas millas recorrió el primer día?

   Extraído de: Smullyan (1998)

7. ¿Cuánto es un millón dividido por un cuarto, más cincuenta?

   Extraído de: Smullyan (1998)

8. Cierto animal pesaba sesenta libras más un tercio de su peso. ¿Cuánto pesaba?

   Extraído de: Smullyan (1998)

9. Una especie de ameba se reproduce dividiéndose en dos cada día. Entonces, si hoy tenemos una ameba, mañana tendremos dos, pasado mañana cuatro, etc. Comenzando con una ameba, en 30 días se llena cierta superficie de amebas. ¿Cuántos días se necesitan para cubrir la misma superficie con dos amebas?

   Extraído de: http://www.mlevitus.com/clasicos.html

3.4.2 Antología de Razonamiento Lógico (ARL)

1. Al llegar al hotel nos han dado un mapa con los lugares de interés de la ciudad, y nos dijeron que 5 centímetros del mapa representaban 600 metros de la realidad. Hoy queremos ir a un parque que se encuentra a 8 centímetros del hotel en el mapa. ¿A qué distancia del hotel se encuentra este parque?

   Extraído de: http://143.137.111.132/Planea/Resultados2017/MediaSuperior2017Examenes/R17ExamenMediaSuperiorPreguntas.aspx?id=01#ParteSuperior

2. Una familia, formada por los padres y dos hijos, van al cine. Se sientan en cuatro butacas consecutivas. a) ¿De cuántas maneras distintas pueden sentarse? b) ¿Y si los padres se sientan en los extremos, de cuántas maneras pueden sentarse? Escribe las maneras de sentarse que identificaste.

Extraído de: https://www.fing.edu.uy/tecnoinf/mvd/cursos/pye/materiales/practico/pye-pr02.pdf

3. Una fábrica de bombillas produce 5,000 bombillas diarias. La máquina A produce 3,000 de estas bombillas, de las que el 2% son defectuosas y la máquina B produce las 2,000 restantes, de las que se sabe que el 4% son defectuosas. ¿Cuál es la probabilidad de que una bombilla elegida al azar sea defectuosa?

   Extraído de: https://www.ematematicas.net/probabilidad.php?tipo=test

4. José fue al cajero automático a extraer dinero, pero no se acordaba de la clave que tiene 4 dígitos. Sólo se acuerda que son dos cincos, un tres y un dos. ¿Cuántas veces tendrá que probar como máximo hasta dar con la clave?

   Extraído de: Curotto (2010).

5. Si se tiene una baraja de 52 cartas y de ella se extrae una al azar. Halla la probabilidad de que la carta extraída represente su valor con una letra.

   Extraído de: https://matematicasn.blogspot.com/2015/12/probabilidades-ejemplos-resueltos-de.html

6. Ayer 2 camiones transportaron una mercancía desde el puerto hasta el almacén. Hoy 3 camiones, iguales a los de ayer, tendrán que hacer 6 viajes para transportar la misma cantidad de mercancía del almacén al centro comercial. ¿Cuántos viajes tuvieron que hacer ayer los camiones?

   Extraído de: https://www.smartick.es/blog/matematicas/recursos-didacticos/problemas-de-proporcionalidad/

7. En una ciudad el 40 % son hombres y el 60 % mujeres. El 50 % de los hombres y el 40 % de las mujeres fuman. Si se escoge una persona al azar, ¿es más probable que se elija un hombre fumador o una mujer fumadora? ¿por qué?

   (Propuesto por el autor del presente trabajo)

8. En una caja hay 3 bolas rojas, 3 bolas verdes y 2 azules; en otra caja hay 2 bolas rojas, 3 verdes y 2 azules. ¿En qué caja es mayor la probabilidad de extraer una bola azul?

   Extraído de:
   http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/EDAD_4eso_Aprobabilidad/impresos/4quincena12.pdf

3.5 Validación de la ARC

Considerando que la ARC contiene problemas que implican respuestas rápidas generadas por el pensamiento intuitivo, dicha antología fue sometida a validación de contenido, esto con el propósito de subsanar algún tipo de ambigüedad o falta de claridad en el planteamiento de los problemas incluidos en ella.

La ARC se validó con el empleo del Coeficiente de Validez de Contenido (CVC) de Hernández-Nieto, el cual permite evaluar el grado de acuerdo de los expertos en cada uno de los ítems y del instrumento en general (Pedroza et al., 2013). Una vez hecha la validación por parte de los expertos, Pedroza y colaboradores (2013) recomiendan mantener únicamente aquellos ítems con un valor del CVC superior a .80.

De tal modo, con el apoyo de cinco expertos, se evaluó cada problema de la ARC utilizando la escala: 0 (no cumple), 1 (cumple parcialmente) y 2 (si cumple). Con dicha escala se determinó el grado de coherencia, claridad y relevancia.

Los resultados obtenidos arrojaron un CVC mayor a .80 para cada problema de la ARC (ver Tabla 5), por lo cual, se determinó la coincidencia de los expertos en la validez de contenido en todos los problemas de la antología.

Tabla 1.

Resultados de validez de contenido de la ARC

Problema	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
CVC	.9997	.9997	.8997	.9997	.9330	.9663	.9997	.9997	.9997

Cabe señalar que, después de una primera revisión, se consideraron algunas recomendaciones hechas por los jueces. Específicamente, se realizaron correcciones de redacción con la finalidad de permitir al estudiante una mejor comprensión de cada problema.

3.6 Sesiones de trabajo

3.6.1 Presenciales

Se llevaron a cabo 12 sesiones presenciales. Las dos primeras fueron empleadas para la aplicación del pretest. Las sesiones subsecuentes se efectuaron dentro del trabajo de la asignatura de Estadística, impartida por el profesor 1, empleando los problemas de la ARL y la ARC. Se aplicó un problema por sesión de 40 a 45 minutos. Cada sesión se distribuyó, cumpliendo con las etapas del programa CAME, bajo la siguiente estructura:

1. **Preparación concreta.** Los primeros cinco minutos de la sesión, el docente proporciona a los estudiantes la hoja de trabajo con el problema a resolver, el cual se debe trabajar con el apoyo del método de Polya (ver Anexo 3). Lo anterior, considerando la primera etapa en la que se introduce el lenguaje, el instrumento empleado y el contexto en el que se delimita el problema (Adey y Shayer, 2002). Así mismo, les solicita analizar la situación expuesta y posteriormente comenten si tienen algún inconveniente con el vocabulario presentado. De ser así, propone la participación de los estudiantes que consideran saber el significado de los conceptos en duda y pide que lo compartan con el resto del grupo.

   De igual manera, el docente interviene para precisar los conceptos y verificar que las dudas hayan sido resueltas satisfactoriamente. Con ello, se pretende que los estudiantes se familiaricen con el lenguaje y contexto del problema (Adey y Shayer, 2002) y se procura que las dificultades encontradas sean solamente intelectuales y no propias del vocabulario (Oliver y Venville, 2015).

2. **Conflicto cognitivo.** Una vez que se ha contextualizado el problema, se solicita trabajarlo, de manera individual, los primeros diez minutos de la sesión para que, posteriormente, sea socializado con el resto del grupo con la orientación del docente. Esto debido a que el conflicto cognitivo persigue la introducción hacia la ZDP, lo que implica una diferencia entre lo que el estudiante puede hacer individualmente y lo que puede lograr con la orientación de alguien más (Finau et al., 2016).

Asimismo, dado que el desarrollo cognitivo puede estimularse mediante la presentación de retos de dificultad moderada y estos deben acompañarse de apoyo en forma de preguntas, invitaciones a discutir las dificultades presentadas o sugerencias para mirar el problema desde otras perspectivas (Adey y Shayer, 2002), se consideró el empleo del método de Polya (1986) para el análisis y resolución de cada uno de los problemas propuestos. Dicho método se explicó y discutió, previamente a la intervención, en la respectiva asignatura de matemáticas.

Después de analizar el problema propuesto, el docente solicita resolverlo hasta el paso tres del método de Polya (ejecución del plan), puesto que más tarde, durante la sesión, se socializan algunos resultados y procedimientos de solución de los estudiantes que así decidan hacerlo. Esto con la finalidad de que cada estudiante verifique sus resultados y los contraste con los presentados por sus compañeros.

3. **Construcción.** Posterior al trabajo individual, se solicita a los participantes integrarse en equipos de dos a tres compañeros, ya que el programa CAME refiere períodos de actividad de grupos pequeños en el aula (Adey y Shayer, 2002). De este modo, se otorga a los participantes un espacio de 10 a 15 minutos para compartir sus impresiones del problema y analizar en conjunto sus procedimientos y soluciones respectivas. Con ello, se pretende que los estudiantes construyan, compartan y discutan significados, desarrollando su propia comprensión (Finau et al., 2016).

   El docente únicamente cumple con la función de moderar el tiempo y verificar que los equipos compartan sus experiencias, sin intervenir en la interacción de los estudiantes.

4. **Metacognición.** En esta etapa, se exhorta a los estudiantes a externar los acuerdos o conclusiones a las que llegaron en el equipo, compartiéndolos con el resto de los compañeros. Lo anterior, debido a que el programa CAME implica el diálogo en el aula y, además, requiere tiempo durante las lecciones para que el docente presente estrategias de resolución de problemas y los estudiantes reflexionen acerca de sus errores.

   De este modo, el docente promueve la participación activa de los estudiantes, motivándolos a compartir y escribir en la pizarra sus respuestas y procedimientos de solución. Finalmente, el docente comparte la solución experta y solicita a los estudiantes que la contrasten con las soluciones presentadas por sus compañeros. Así mismo, los invita a debatir grupalmente y a reflexionar sobre cómo resolvieron el problema, qué les resultó difícil, cómo y qué tipo de ayuda solicitaron, o si fue necesario solicitarla (Oliver y Venville, 2015).

Una vez que se ha dado el proceso de socialización y discusión entre los participantes, el docente solicita a los estudiantes concluir el problema, realizando el último paso (visión retrospectiva) y de esta manera, puedan verificar si su solución fue correcta y adviertan si existe alguna solución diferente o más sencilla a la que aplicaron inicialmente. Después de concluir la tarea, les pide responder una serie de preguntas de forma individual, mismas que se anexan al final del problema proporcionado.

5. **Vinculación.** El docente cierra la actividad, con un análisis del problema trabajado en la sesión, cuestionando a los estudiantes acerca de la ocurrencia de problemas similares en otras áreas del currículo matemático o en actividades de la vida diaria.

Cabe señalar que los grupos de control trabajaron, en mayor medida, de manera tradicionalista a cargo del profesor 2, contemplando los temas programados en la asignatura de Estadística. Esto implicó que el profesor explicara y presentara los conocimientos de manera expositiva, desarrollando los temas con el apoyo de ejercicios y problemas correspondientes al tema estudiado. Posteriormente, solicitaba a los alumnos resolver ejercicios similares a los vistos en clase, para verificar que el tema hubiese quedado claro. Finalmente, resolvía las dudas presentadas, en caso de haberlas, sin dar mayor apertura a la discusión y participación activa de los estudiantes.

3.6.2 En línea

Como anteriormente se mencionó, debido a la contingencia sanitaria derivada del Covid-19, hubo la necesidad de replantear la forma de trabajo. Incluso, es preciso señalar que, la consecución de las actividades fue interrumpida un mes, aproximadamente, ya que se había contemplado el regreso a clases para el mes de junio, lo cual no sucedió. Por lo tanto, con la finalidad de continuar con trabajo programado, a principios de junio, se conformaron dos grupos privados en Facebook (Sexto A CEGMNN y Sexto C CEGMNN), uno por cada grupo experimental, en los cuales se incluyó a 10 integrantes de cada grupo. Así mismo, se procuró, dentro de lo posible, continuar con una dinámica similar a la desarrollada en las sesiones presenciales. De tal modo, el trabajo se llevó a cabo de la siguiente manera:

1. Durante dos semanas se comparten, en los grupos de Facebook, algunas actividades pendientes de las dos antologías (ARL y ARC). De esta manera, se trabajan dos problemas de cada una de las dos antologías, los cuales, deben resolverse empleando el método de Polya, únicamente hasta el paso tres; es decir, hasta la ejecución del plan. Posteriormente, se solicita a cada miembro compartir, en su respectivo grupo, sus procedimientos de solución y respuestas de cada problema.

2. Una vez que todos los miembros del grupo han cargado sus problemas, el docente les solicita revisar las respuestas de los demás y comentar, por lo menos a dos compañeros, si están de acuerdo con la respuesta y el procedimiento de estos. Además, se les pide realizar alguna observación o sugerencia para enriquecer el trabajo de los compañeros.

3. Después de la revisión y los comentarios, el docente comparte la solución y respuesta correcta de cada problema para que los estudiantes comparen sus procedimientos y resultados obtenidos.

4. Finalmente, los estudiantes deben concluir la actividad, desarrollando el paso 4 del Método de Polya (visión retrospectiva), tomando en cuenta las sugerencias y procedimientos de sus compañeros, así como el procedimiento y respuestas compartidas por el docente.

Capítulo 4

ANÁLISIS DE RESULTADOS

4.1 Diagnóstico de los grupos experimentales y de control

El diagnóstico (pre test) del nivel de razonamiento lógico y reflexión cognitiva, de los grupos experimentales y de control, se realizó al inicio del ciclo escolar 2019 – 2020. En la primera sesión se aplicó el TRL en un tiempo de 40 minutos y en la segunda sesión, el TRC, en un lapso de 30 minutos. Asimismo, previamente, se informó a los estudiantes que el resultado de las pruebas no formaría parte de su calificación en la respectiva asignatura de matemáticas.

Al ser el TRC una prueba muy recurrente, al inicio de su aplicación, se preguntó a los estudiantes si anteriormente habían tenido contacto con alguno de los problemas de la prueba, a lo que ninguno dio una respuesta afirmativa. Esto se hizo debido a que, en otros estudios, al ser enfrentados al TRC algunos sujetos aseguraron haber sido expuestos anteriormente a una o varias preguntas del test (Thomson y Oppenheimer, 2016).

En lo subsecuente se presentan los resultados del diagnóstico de los cuatro grupos. Considerando, en primer lugar, el análisis con todos los participantes y, posteriormente, el análisis con los estudiantes elegidos en la muestra.

4.1.1 Análisis grupal

Después de la aplicación del pre test (TRL y TRC) se realizó un análisis estadístico descriptivo con los resultados obtenidos por cada grupo.

Tabla 2.

Estadística descriptiva inicial: TRL

	Grupos experimentales			Grupos de control		
	1	**2**	**Ambos**	**1**	**2**	**Ambos**
Media	1.41	1.38	1.39	1	1.62	1.28
Mediana	1	1	1	1	1	1
Moda	0	1	0	1	0	0
Desviación estándar	1.55	1.30	1.43	.90	1.96	1.53

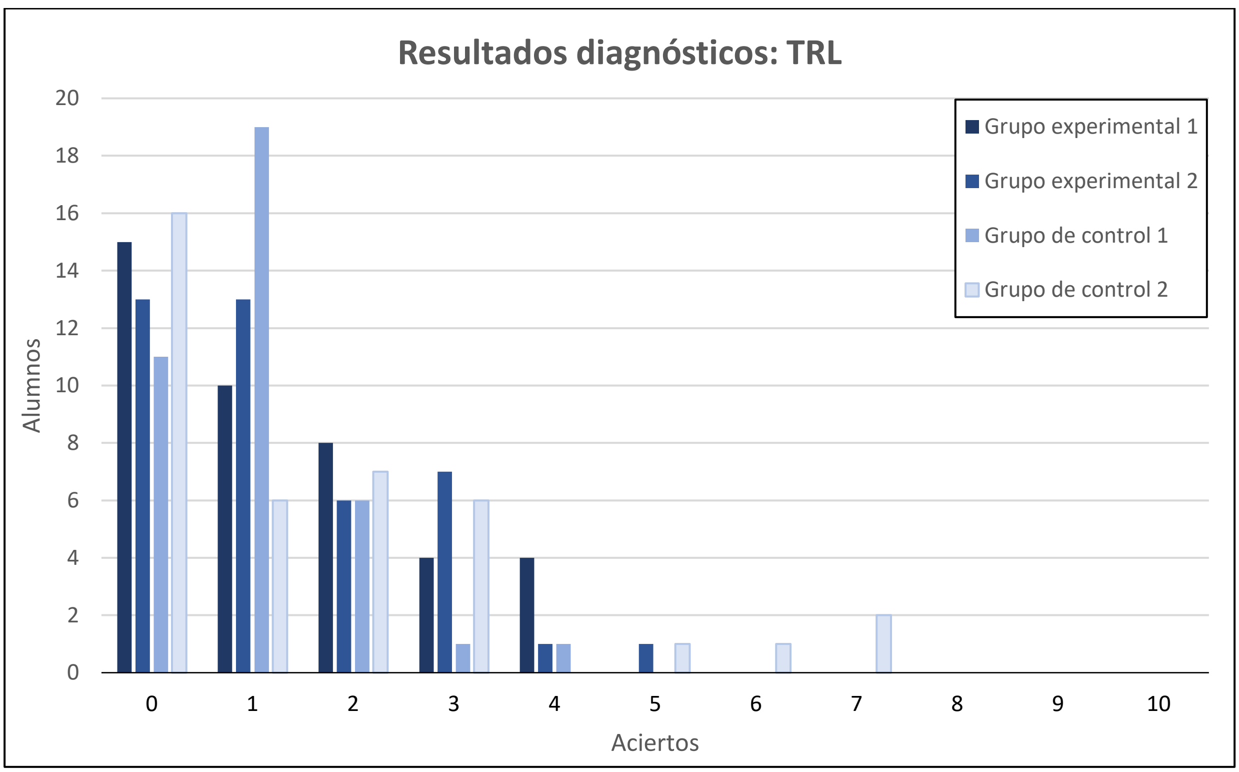
Rango	5	5	5	4	7	7
Mínimo	0	0	0	0	0	0
Máximo	5	5	5	4	7	7
Cuenta	41	40	81	38	39	77

De la Tabla 2 se observa que, la media de los cuatro grupos oscila entre 1 y 1.62. Esto implica que los participantes, en promedio, acertaron entre una y dos respuestas, esto considerando que el TRL consta de 10 preguntas. De igual manera, se distingue un valor mediano de 1 acierto para los cuatro grupos. Esto señala que, al menos, el 50% de los estudiantes de cada grupo obtuvo, a lo mucho, una respuesta correcta. Además, se identifica que los valores más frecuentes corresponden a 1 acierto en el grupo experimental 2 y en el grupo de control 1. Incluso, en el grupo experimental 1 y el grupo de control 2 el valor más frecuente fue de 0 aciertos.

La siguiente gráfica (Figura 1) muestra los resultados obtenidos por cada uno de los grupos, tanto experimentales como de control, considerando el número de aciertos y la cantidad de alumnos que obtuvieron cierta puntuación en el TRL.

Figura 1.

Resultados iniciales del TRL: grupales



De los resultados presentados en la Tabla 2 y la Figura 1 se puede advertir que, la mayoría de los alumnos participantes obtuvo puntuaciones muy bajas, que oscilan entre 0 y 2 aciertos. Pocos son quienes puntuaron 3 o más aciertos. Aunque se distinguen valores máximos entre 4 y 7 aciertos (ver Figura 1), estos corresponden a una mínima cantidad de participantes, prácticamente se consideran como puntos atípicos dentro de los resultados mostrados. De hecho, solamente 5 estudiantes excedieron el nivel de pensamiento concreto, ya que obtuvieron más de 4 aciertos. Sin embargo, son considerados como pensadores en transición, debido a que su puntuación se encuentra entre 5 y 7 aciertos.

Igualmente, la Tabla 3 muestra el análisis estadístico descriptivo correspondiente a los resultados del TRC.

Tabla 3.

Estadística descriptiva inicial: TRC

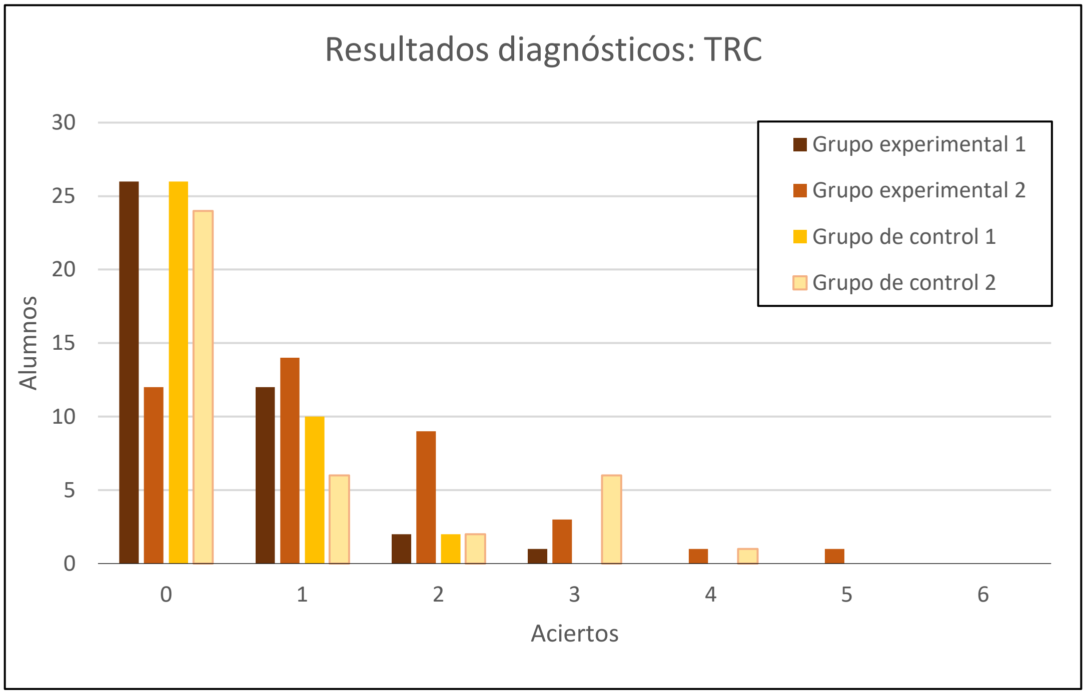
	Grupos experimentales			**Grupos de control**		
	1	**2**	**Ambos**	**1**	**2**	**Ambos**
Media	.46	1.25	.83	.37	.82	.61
Mediana	0	1	1	0	0	0
Moda	0	1	0	0	0	0
Desviación estándar	.71	1.19	1.03	.59	1.23	.99
Rango	3	5	5	2	4	4
Mínimo	0	0	0	0	0	0
Máximo	3	5	5	2	4	4
Cuenta	41	40	81	38	39	77

De la Tabla 3 se distinguen medias entre .37 como mínimo, hasta 1.25 como máximo. Esto indica que, en promedio, los participantes respondieron correctamente, a lo mucho, dos preguntas del TRC, esto considerando que la prueba consta de seis ítems. Incluso, el único que promedió más de un acierto fue el grupo experimental 2. Igualmente, se destaca un valor mediano de 0 aciertos en el grupo experimental 1 y los grupos de control 1 y 2. Esto implica que, al menos, el 50% de los estudiantes de dichos grupos no logró acertar a ninguna de las preguntas del TRC. De hecho, únicamente el grupo experimental 2 rebasó el promedio de una respuesta correcta y obtuvo una mediana de 1 acierto. Asimismo, se observa que el valor más frecuente fue de 1 acierto en el grupo experimental 2 y nulo en los restantes tres grupos.

La gráfica siguiente (Figura 2) muestra los resultados obtenidos por cada uno de los grupos, tanto experimentales como de control, considerando el número de aciertos y la cantidad de alumnos que obtuvieron determinada puntuación en el TRC.

Figura 2.

Resultados iniciales del TRC: grupales



De los resultados expuestos en la Tabla 3 y la Figura 2 se observa que, la mayoría de los estudiantes obtuvo a lo mucho una respuesta correcta, situándolos en un nivel de pensamiento rápido o intuitivo, al igual que aquellos que alcanzaron entre 2 y 3 aciertos. Por otra parte, se distinguen puntuaciones entre 4 y 5 aciertos que implican un nivel de pensamiento reflexivo de los participantes (ver Figura 2). Sin embargo, solamente tres estudiantes lograron tal desempeño.

De esta manera, a partir de los resultados diagnósticos expuestos, se puede establecer que, la mayoría de los participantes se encuentra en el estadio de las operaciones concretas o de primer orden (Acevedo y Oliva, 1995), así como en el nivel de pensamiento rápido o intuitivo (Kahneman, 2011). Por consiguiente, es posible afirmar que los estudiantes, tanto de los grupos de control como de los grupos experimentales, tienen características similares respecto a su nivel de razonamiento lógico y de reflexión cognitiva.

4.1.2 Análisis de la muestra

Como anteriormente se especificó, este trabajo se programó para ser implementado en sesiones presenciales. No obstante, derivado de la contingencia sanitaria propiciada por el Covid-19, se reprogramó en dos modalidades: presencial y en línea. De tal manera, se presentan los resultados del diagnóstico de la muestra seleccionada para el trabajo en línea, los cuales se extrajeron de los resultados grupales.

Tabla 4.

Estadística descriptiva inicial de la muestra: TRL

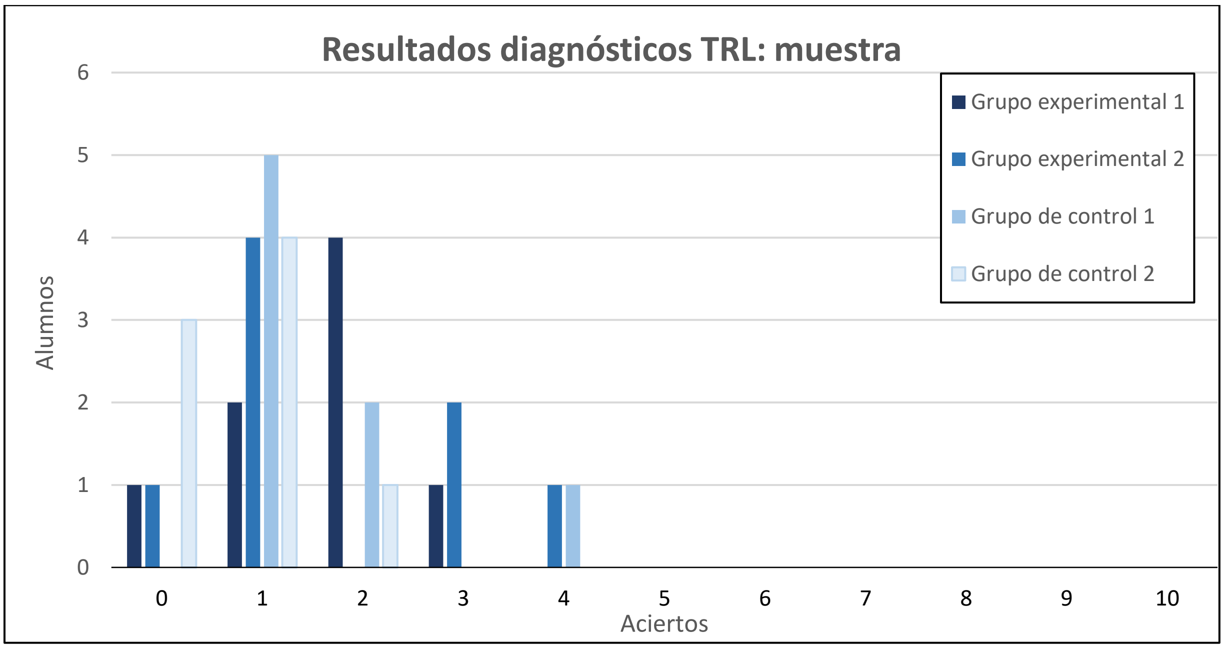
	Grupos experimentales			Grupos de control		
	1	**2**	**Ambos**	**1**	**2**	**Ambos**
Media	1.63	1.75	1.69	1.63	.75	1.19
Mediana	2	1	1.5	1	1	1
Moda	2	1	1	1	1	1
Desviación estándar	.92	1.39	1.14	1.06	.71	.98
Rango	3	4	4	3	2	4
Mínimo	0	0	0	1	0	0
Máximo	3	4	4	4	2	4
Cuenta	8	8	16	8	8	16

A partir de los resultados presentados en la Tabla 4, se observa que, la media de los cuatro grupos de la muestra se encuentra entre .75 y 1.75. Lo que implica que, en promedio, los estudiantes seleccionados respondieron correctamente entre una y dos preguntas del TRL. Aunque también se observa que, el grupo de control 2 no alcanzó más de 1 acierto en promedio. Además, se puede distinguir una mediana de 1 acierto en el grupo experimental 2 y los dos grupos de control. Solamente el grupo experimental 1, obtuvo un valor mediano de 2 aciertos. Esto significa que, al menos, el 50% de los estudiantes seleccionados de cada grupo obtuvo, a lo mucho, una respuesta correcta, excepto el grupo experimental 1 del cual, por lo menos, el 50% de estudiantes puntuó 2 aciertos como máximo. Además, se observa que el valor más frecuente corresponde a 1 acierto, con excepción del grupo experimental 1 que resultó con un valor modal de 2 aciertos. Incluso, ambos valores, mediana y moda, son coincidentes en cada uno de los grupos.

La siguiente gráfica (Figura 3) muestra los resultados de cada uno de los grupos, tanto experimentales como de control, considerando el número de aciertos y la cantidad de alumnos que obtuvieron determinada puntuación.

Figura 3.

Resultados iniciales del TRL: muestra



De la Tabla 4 y la Figura 3 se observa que, la mayoría de los estudiantes de la muestra, obtuvo puntuaciones que se encuentran entre 0 y 2 aciertos. Pocos son quienes lograron 3 o más aciertos. Solamente 2 estudiantes obtuvieron 4 aciertos como máximo. Por tanto, se puede aseverar que, ninguno de los estudiantes seleccionados excede el nivel de pensamiento concreto.

De igual modo, la Tabla 5 muestra el análisis estadístico descriptivo correspondiente a los resultados del TRC de la muestra seleccionada.

Tabla 5.

Estadística descriptiva inicial de la muestra: TRC

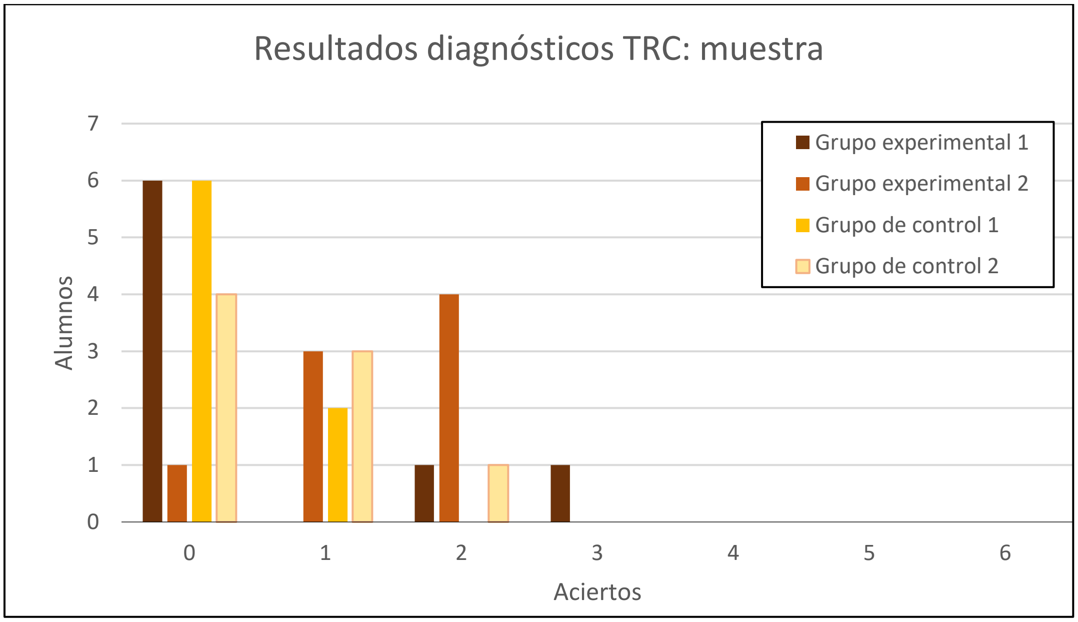
	Grupos experimentales			Grupos de control		
	1	**2**	**Ambos**	**1**	**2**	**Ambos**
Media	.63	1.38	1	.25	.63	.44
Mediana	0	1.5	1	0	0.5	0
Moda	0	2	0	0	0	0
Desviación estándar	1.19	.74	1.03	.46	.74	.63
Rango	3	2	3	1	2	2
Mínimo	0	0	0	0	0	0
Máximo	3	2	3	1	2	2
Cuenta	8	8	16	8	8	16

De la Tabla 5 observamos que, a excepción del grupo experimental 2 que promedió entre 1 y 2 aciertos, el resto de los grupos no alcanzó más de una respuesta correcta en promedio. Además, se distingue una mediana de 0 aciertos en el grupo experimental 1 y el grupo de control 1. Lo cual indica que, al menos el 50% de los estudiantes seleccionados de dichos grupos, no logró acertar a ninguna de las preguntas del TRC. No así en los grupos experimental 2 y de control 2 que obtuvieron una mediana de 1.5 y .5, respectivamente. Indicando, con ello, que al menos el 50% del grupo experimental 2 consiguió entre 1 y 2 aciertos como máximo y del grupo de control 2 entre 0 y 1 acierto a lo mucho. De igual manera, se observa que el valor más frecuente fue de 0 aciertos en todos los grupos, excepto en el grupo experimental 2, el cual resultó con una moda de 2 aciertos.

La gráfica siguiente (Figura 4) muestra los resultados obtenidos por los estudiantes seleccionados de cada uno de los grupos, tanto experimentales como de control, considerando el número de aciertos y la cantidad de alumnos que obtuvieron determinada puntuación.

Figura 4.

Resultados iniciales del TRC: muestra



Derivado de los resultados presentados en la Tabla 5 y la Figura 4 se observa que, la mayoría de los participantes seleccionados, obtuvo a lo mucho 1 acierto. No obstante, algunos alcanzaron puntuaciones por arriba de 1 acierto. Un estudiante del grupo experimental 1, cuatro estudiantes del grupo experimental 2 y uno del grupo de control 2, puntuaron 2 aciertos. Solamente un participante del grupo experimental 1 puntuó 3 aciertos. Por tanto, es posible determinar que, tanto los estudiantes seleccionados de los grupos experimentales como los seleccionados de los grupos de control, se encuentran en el nivel de pensamiento intuitivo.

Es así que, a partir del análisis descrito, se puede establecer que los estudiantes seleccionados de los grupos experimentales y de control, al igual que la mayoría de sus compañeros del resto del grupo, se sitúan en el nivel de pensamiento concreto o de primer orden (Acevedo y Oliva, 1995) y en el nivel de pensamiento rápido o intuitivo (Kahneman, 2011). Esto sugiere que los participantes de ambas muestras se encuentran en condiciones similares y, por lo tanto, son estadísticamente comparables. No obstante, se llevó a cabo una prueba de hipótesis para identificar posibles diferencias estadísticamente significativas entre los resultados del TRL de los grupos experimentales y de control, al igual que con los resultados del TRC.

De tal modo, previamente, se determinó la normalidad y homocedasticidad de los resultados de ambos grupos (ver Anexos 3 y 4). De ahí, se concluyó que los datos no cumplieron, en su totalidad, con el contraste de normalidad y el supuesto de homocedasticidad (Wiersma y Jurs, 2008). Por consiguiente, se aplicó la prueba de hipótesis no paramétrica Mann-Whitney-Wilcoxon para muestras independientes con un nivel de significancia (p-valor) > .05 para aceptar H_0 (ver Anexo 5). La prueba arrojó p-valores de .1726 y .1205 de los resultados del TRL y TRC, respectivamente, por lo cual, se acepta la hipótesis nula. Concluyendo así, que no hay diferencias estadísticamente significativas entre los resultados iniciales del TRL de los grupos experimentales y de control, al igual que con los resultados del TRC. Por lo tanto, es posible establecer que ambos grupos son estadísticamente comparables.

Es importante precisar que, tanto el análisis de los resultados de salida (post test) como el análisis subsecuente de las actividades realizadas en la intervención, se hizo con base en los resultados de la muestra seleccionada.

4.2 Análisis de algunos problemas aplicados en la intervención

En seguida se presentan dos problemas de cada una de las antologías (ARL y ARC) trabajados en la intervención, uno presencial y otro en línea. En cada problema se muestran las respuestas otorgadas por los participantes, las cuales, se han clasificado en *correctas*, *incorrectas más frecuentes* y *otras incorrectas*. Además, se exponen los argumentos que pretenden validar a tales respuestas. Al inicio de cada problema se presenta una tabla comparativa de las respuestas proporcionadas por los estudiantes.

4.2.1 Análisis de dos problemas de la Antología de Razonamiento Lógico

Problema "Las bombillas"

Una fábrica de bombillas produce 5,000 bombillas diarias. La máquina A produce 3,000 de estas bombillas, de las que el 2% son defectuosas y la máquina B produce las 2,000 restantes, de las que se sabe que el 4% son defectuosas. ¿Cuál es la probabilidad de que una bombilla elegida al azar sea defectuosa?

Este problema fue tomado del sitio web descrito en el método del presente trabajo: https://www.ematematicas.net/probabilidad.php?tipo=test. En el cual, se encuentran diversos cuestionarios de opción múltiple de problemas matemáticos, entre ellos, encontramos tests de sucesos y probabilidad de donde se extrajo la tarea planteada.

El problema hace énfasis en el cálculo de probabilidades simples cuando se tienen dos eventos independientes y se quiere saber la probabilidad de ocurrencia de ambos, esto implica sumar sus probabilidades. Se aplicó a los grupos experimentales en la cuarta sesión presencial, siguiendo la metodología de trabajo para las sesiones presenciales que se definió para la intervención. Es posible resolverlo con un procedimiento análogo al que se describe a continuación.

Considerando que la máquina A produce 3,000 bombillas, de las cuales el 2% resultan defectuosas, la probabilidad de extraer una bombilla defectuosa de esta máquina es de 60/3,000. Asimismo, la probabilidad de seleccionar una bombilla defectuosa da la máquina B, equivale a 80/2,000; debido a que produce 2,000 bombillas de las cuales, el 4% presenta algún defecto. Por lo tanto, la probabilidad de elegir una bombilla defectuosa del total corresponde a la suma de las probabilidades anteriores, es decir, 140/5,000; 7/250; .028 o 2.8%.

La Tabla 6 muestra las respuestas correctas e incorrectas del problema en cuestión.

Tabla 1.

Respuestas correctas e incorrectas del problema "Las bombillas"

Grupos experimentales	**Respuesta Correcta**	**Respuestas Incorrectas**				**No concluyó**	**No contestó**	**Total**
		Más frecuente	**Otras**					
	140/5,000	**300/5,000**	**1/140**	**14,000/500**	**14%**			
Uno	3	2	0	1	0	2	0	8
Dos	3	0	1	0	1	2	1	8
Total	6	2	1	1	1	4	1	16

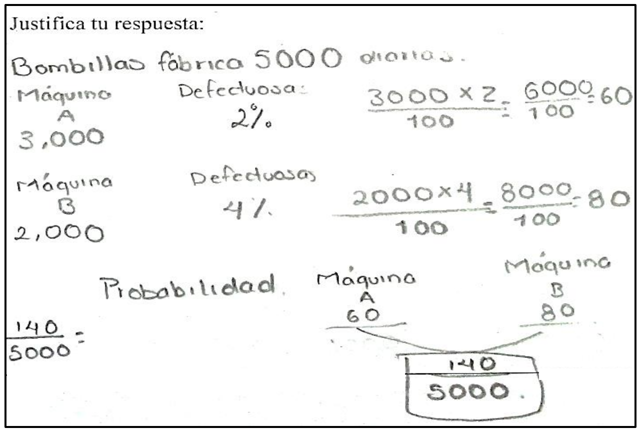
De las respuestas mostradas en la tabla, a continuación, se exponen algunos de los procedimientos de solución más representativos.

Respuesta correcta

De los 16 estudiantes de ambos grupos, el 37.5% dio la respuesta correcta, de los cuales, se presentan algunas justificaciones.

Figura 5.

Ejemplo de solución correcta al problema "Las bombillas": E6 G2



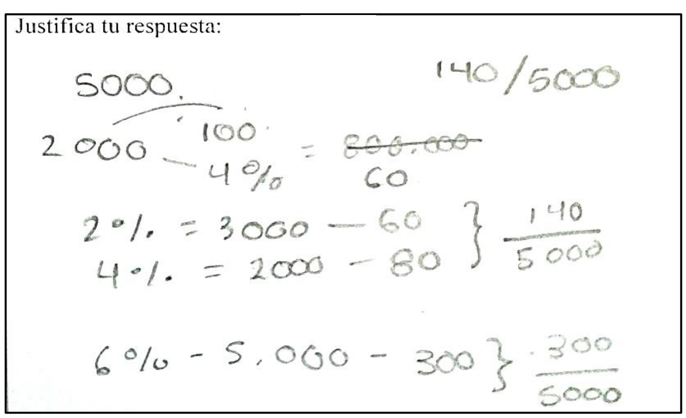
Nota: la clave E6 G2 representa al estudiante 6 del grupo 2. De tal modo, en lo subsecuente se utilizarán claves similares para denotar a los estudiantes.

En el ejemplo de la Figura 5 se puede observar que, el estudiante E6 G2 comprende adecuadamente el proceso a seguir para dar respuesta correcta al problema. En primer lugar, calcula la cantidad de bombillas defectuosas de cada máquina por medio de reglas de tres y, posteriormente, la suma de ambas cantidades (140) la divide por 5,000 para indicar la probabilidad de elegir una bombilla defectuosa del total producido por ambas máquinas.

La mayoría de los estudiantes que contestaron correctamente realizaron un procedimiento análogo al descrito anteriormente. Sin embargo, el estudiante E7 G1, además de considerar la respuesta correcta, también proporcionó como otra posible respuesta 300/5,000; tal como se observa en la Figura 6.

Figura 6.

Ejemplo de solución correcta al problema "Las bombillas": E7 G1



Es probable que el estudiante E7 G1 haya considerado que, al sumar los porcentajes de bombillas defectuosas de cada máquina, podía obtener la respuesta solicitada. No obstante, aunque la cantidad de bombillas producidas en cada máquina y de piezas defectuosas fueran iguales, no sería correcto sumar el porcentaje de bombillas defectuosas. Por ejemplo, si suponemos que, de un total de 6,000 bombillas producidas diariamente, tanto la máquina A como la B elaboran 3,000 bombillas, de las cuales, el 3% son defectuosas, la probabilidad de elegir una bombilla defectuosa del total no sería del 6% sino del 3%.

Respuestas incorrectas

El 31.3% de los estudiantes de ambos grupos proporcionó diferentes respuestas incorrectas. De los cuales, en seguida se presentan algunas justificaciones.

- ***Respuesta más frecuente: 300 / 500***

Figura 7.

Ejemplo de solución incorrecta al problema "Las bombillas": E8 G1

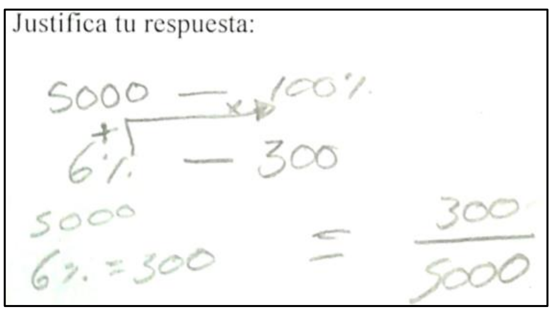
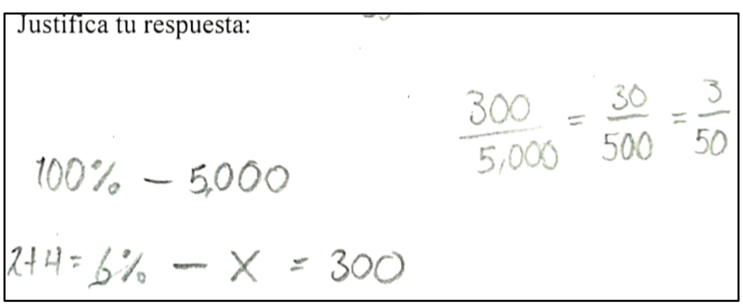


Figura 8.

Ejemplo de solución incorrecta al problema "Las bombillas": E6 G1

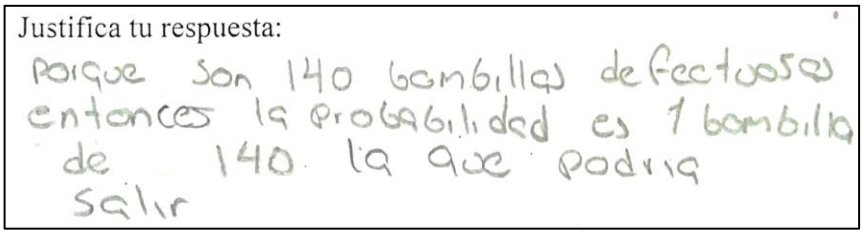


En los dos procedimientos presentados (ver Figuras 7 y 8) se puede apreciar un razonamiento similar. Ambos estudiantes consideraron sumar el porcentaje de piezas defectuosas de cada máquina y con ello obtener la probabilidad de elegir al azar una bombilla defectuosa del total de piezas. Esto no es posible, puesto que conduce a una respuesta inválida, tal como se ha explicado líneas arriba con la respuesta análoga que da el estudiante E7 G1.

- ***Respuesta: 1 / 40***

Figura 9.

Ejemplo de solución incorrecta al problema "Las bombillas": E8 G2

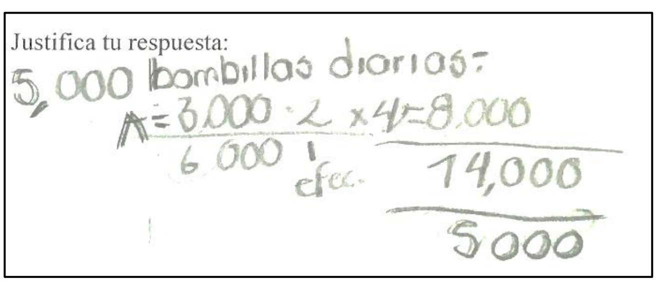


De la Figura 9 se observa que el estudiante identifica la cantidad total de bombillas defectuosas de las máquinas A y B que equivale a 140 bombillas. No obstante, considera a las 140 bombillas como el total y asume que la probabilidad de obtener una bombilla defectuosa es 1 de 140. Eso resulta inadmisible, ya que 140 representa las bombillas defectuosas. Entonces, si este fuera el total, la probabilidad de elegir una bombilla defectuosa sería del 100%.

- ***Respuesta: 14,000 / 5,000***

Figura 10.

Ejemplo de solución incorrecta al problema "Las bombillas": E8 G2

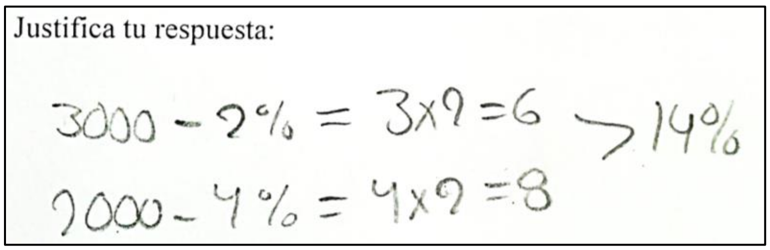


A partir del argumento presentado en la Figura 10 se percibe que, probablemente, el estudiante trata de obtener la cantidad de bombillas defectuosas al multiplicar 3,000 por dos y 2,000 por 4, obteniendo 6,000 y 8,000 respectivamente. Esto no es del todo claro, ya que presenta inconsistencias al momento de reportar su procedimiento operacional. Además, no es correcto multiplicar por 2 y 4, lo adecuado es hacerlo por .02 y .04. Finalmente, suma 8,000 con 6,000 y reporta una probabilidad de 14,000/5,000. Por tanto, esto supondría que la probabilidad de extraer una bombilla defectuosa del total, corresponde al 280%. Esto resulta incoherente, puesto que la probabilidad de ocurrencia de un evento debe oscilar entre 0 y 100%.

- ***Respuesta: 14%***

Figura 11.

Ejemplo de solución incorrecta al problema "Las bombillas": E2 G1



A partir del procedimiento mostrado (ver Figura 11), se observa que el estudiante trata de obtener la cantidad de bombillas defectuosas de cada máquina, pero de manera incorrecta. Multiplica 3 por 2 para obtener la cantidad de bombillas defectuosas de la máquina A y, de igual manera, multiplica 4 por 2 para determinar las bombillas defectuosas de la máquina B. No obstante, olvida indicar la posición del punto decimal y los ceros que debe tener cada una de las cantidades en la operación. Además, emplea el signo igual de manera inapropiada. Al final, suma los resultados que obtuvo previamente e interpreta el resultado como la probabilidad, expresada en porcentaje, de obtener una bombilla defectuosa del total de bombillas producidas. Eso, finalmente, resulta incoherente, puesto que 6 y 8 no representan un porcentaje.

Problema "El cajero automático"

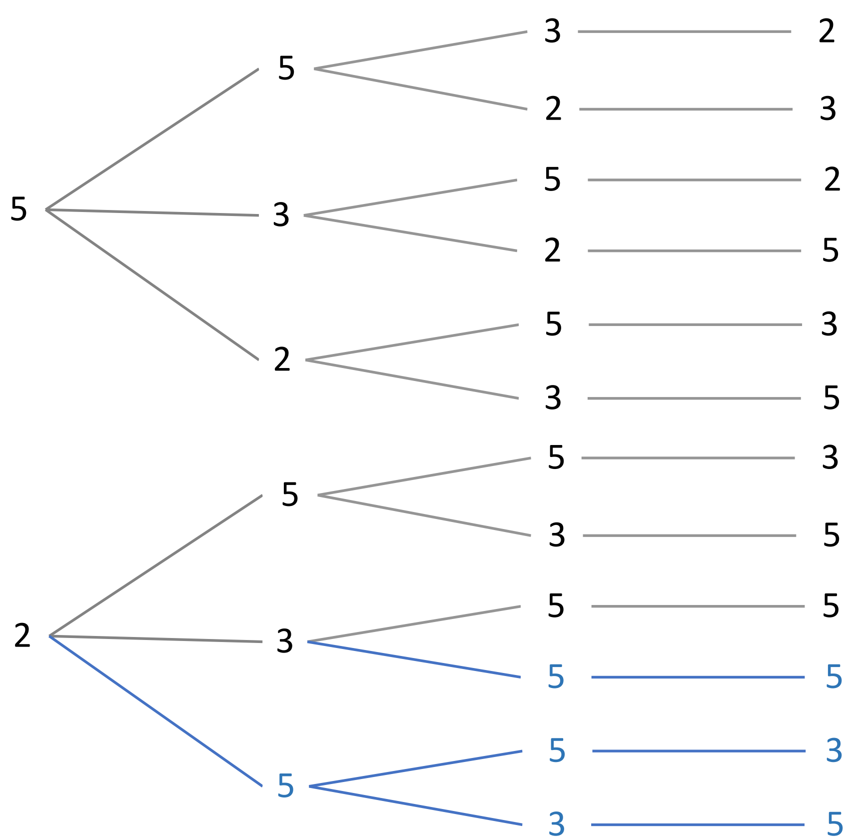
José fue al cajero automático a extraer dinero, pero no se acordaba de la clave que tiene 4 dígitos. Sólo se acuerda que son dos cincos, un tres y un dos. ¿Cuántas veces tendrá que probar como máximo hasta dar con la clave?

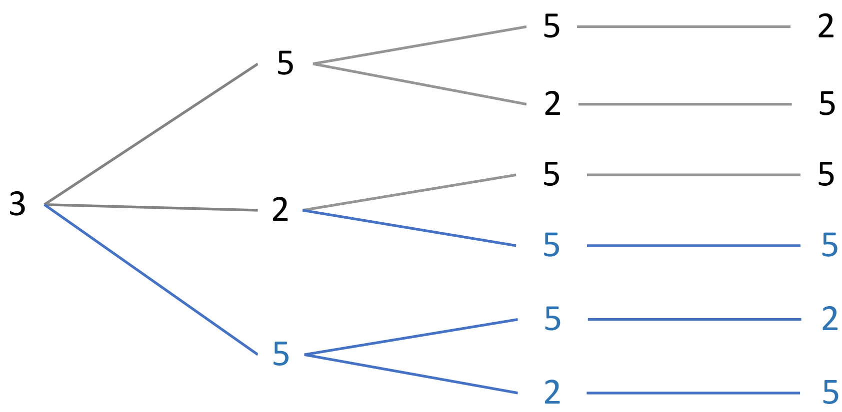
Este problema fue retomado del trabajo de Curotto (2010). En su estudio, la autora sugiere que, al plantear este tipo de problemas, el profesor permite que el estudiante no solo se enfoque en repetir algoritmos, sino que reflexione sobre lo que necesita para resolver la tarea propuesta. Es una situación que induce a la construcción de diagramas de árbol o al establecimiento de combinaciones. Según Curotto, es un intermedio entre la combinatoria y las ideas probabilísticas.

Se aplicó a los grupos experimentales en la segunda semana de trabajo en línea, siguiendo la metodología de trabajo para las sesiones virtuales que se definió para la intervención. Por lo general, es posible resolverlo, como así lo advierte Curotto, por medio de combinaciones ordenadas; es decir, permutaciones con repetición o diagramas de árbol. En seguida se presentan ambas formas.

1) $P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4\times3\times2\times1}{2\times1} = \frac{24}{2} = 12$

2)





Las opciones recalcadas en color azul son aquellas que se repiten. Por consiguiente, deben descartarse de la respuesta, al igual que el diagrama de árbol del segundo 5, puesto que el problema implícitamente lo advierte, al solicitar el número máximo de veces que debe probar Juan hasta dar con su clave. De tal modo, al sumar las posibles combinaciones ordenadas se tienen seis del primer diagrama, tres del segundo y tres del tercero.

En efecto, con ambos procedimientos, es posible constatar que el número máximo de veces que debe probar Juan para dar con su clave es 12. Por supuesto, si el problema no tuviese números repetidos, el total de permutaciones sería 24.

La Tabla 7 muestra las respuestas correctas e incorrectas del problema presentado.

Tabla 2.

Respuestas correctas e incorrectas del problema "El cajero automático"

Grupos experimentales	**Respuesta correcta**	**Respuestas incorrectas**				**Total**
		Más frecuente	**Otras**			
	12	**24**	**13**	**14**	**18**	
Uno	3	1	2	1	1	8
Dos	1	7	0	0	0	8
Total	4	8	2	1	1	16

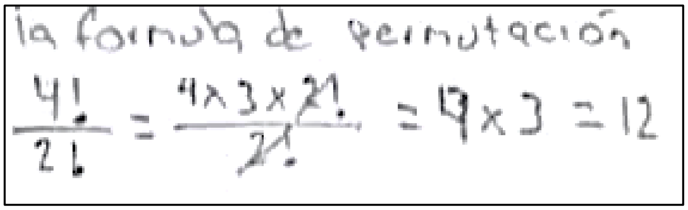
A partir de las respuestas presentadas, en seguida se muestran los argumentos más relevantes proporcionados por los participantes con la finalidad de validarlas.

Respuesta correcta

Del total de participantes seleccionados de ambos grupos experimentales, el 25% obtuvo la respuesta correcta. De los cuales, se presentan las siguientes justificaciones.

Figura 12.

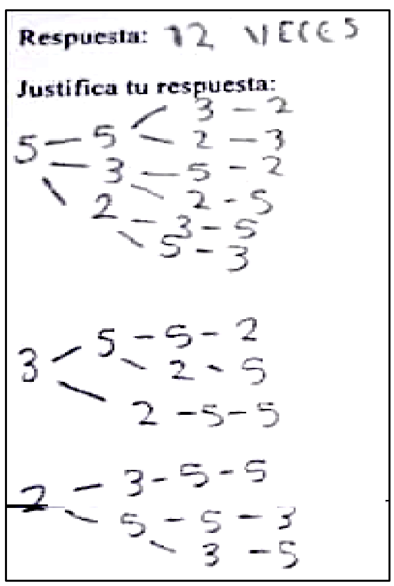
Ejemplo de solución correcta al problema "El cajero automático": E8 G2



De la Figura 12 se observa que el estudiante E8 G2 aplica un procedimiento análogo al mostrado en las opciones de solución al problema, es decir, empleando permutaciones con repetición. Por otra parte, el estudiante E7 G1 utilizó diagramas de árbol para dar respuesta a lo solicitado (ver Figura 13).

Figura 13.

Ejemplo de solución correcta al problema "El cajero automático": E7 G1



El resto de los participantes realizó procedimientos similares a los mostrados en este apartado.

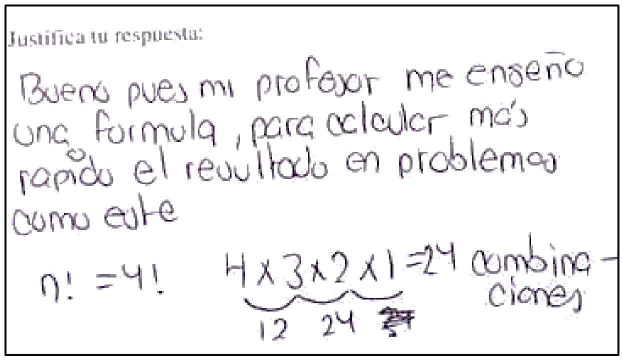
Respuestas incorrectas

- ***Respuesta más frecuente: 24***

El 50% de los participantes llegó a tal respuesta, de la cual, se muestran algunas justificaciones.

Figura 14.

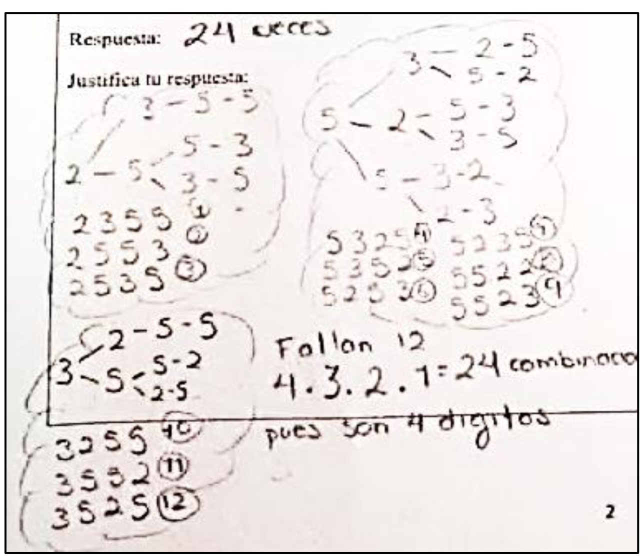
Ejemplo de solución incorrecta al problema "El cajero automático": E2 G2



De los participantes que proporcionaron esta respuesta, la mayoría lo hizo utilizando la fórmula de permutaciones, así como se muestra en la Figura 14. Sin embargo, aunque es una opción para solucionar el problema, no advirtieron que se deben considerar las permutaciones con repetición. Por otra parte, además de resolverlo de manera similar al resto, el participante E6 G2 realizó un diagrama de árbol que, incluso, contempla las combinaciones correctas (ver Figura 15). No obstante, equivocadamente consideró duplicar el resultado para llegar a la respuesta solicitada.

Figura 15.

Ejemplo de solución incorrecta al problema "El cajero automático": E6 G2



- ***Respuesta: 13***

Dos participantes obtuvieron trece combinaciones, de los cuales se muestra su procedimiento de solución.

Figura 16.

Ejemplo de solución incorrecta al problema "El cajero automático": E4 G1

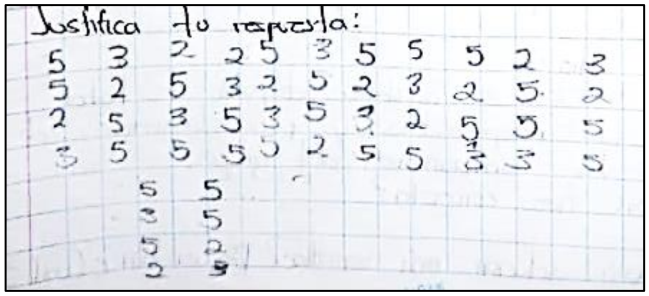
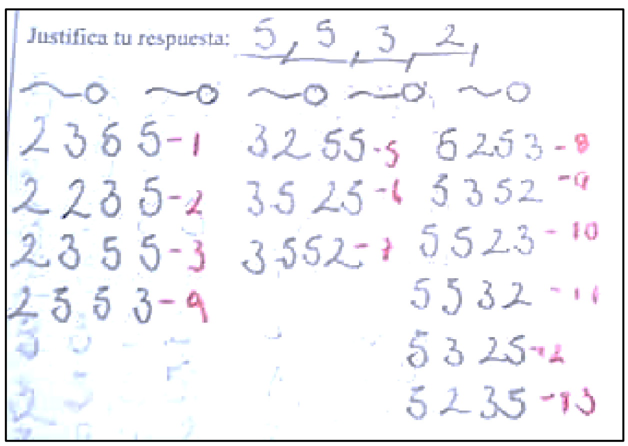


Figura 17.

Ejemplo de solución incorrecta al problema "El cajero automático": E2 G1

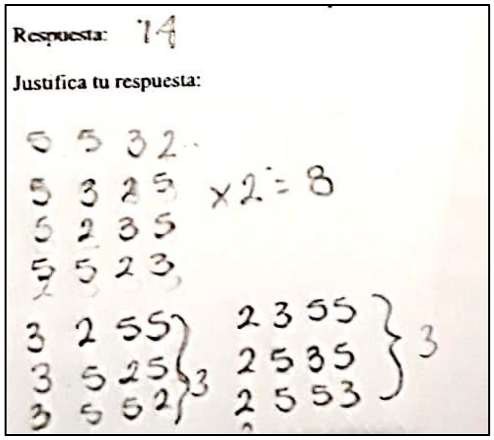


Como se observa en las Figuras 16 y 17, ambos estudiantes repitieron u omitieron combinaciones. No obstante, su procedimiento se encaminaba a la respuesta correcta. El estudiante E4 G1 duplicó las combinaciones 5 5 2 3, 5 2 3 5 y 3 2 5 5 y omitió las combinaciones 5 5 3 2 y 3 5 2 5. Esto, posiblemente, porque no estableció un orden preciso. Por su parte, aunque se percibe un orden en su proceso, el estudiante E2 G1 repitió la combinación 2 3 5 5.

- ***Respuesta: 14***

Figura 18.

Ejemplo de solución incorrecta al problema "El cajero automático": E1 G1

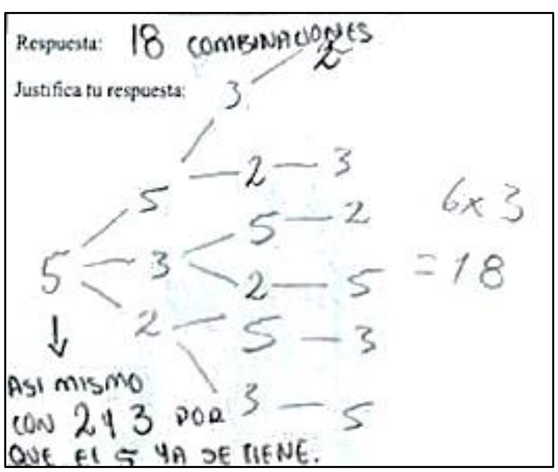


Del proceso mostrado en la Figura 18, se advierte que el estudiante E1 G1 tuvo un razonamiento similar a los estudiantes que obtuvieron 13 combinaciones. No obstante, considera que las combinaciones que principian en 5 deben duplicarse; posiblemente, porque el 5 se encuentra dos veces. Sin embargo, resulta contradictorio puesto que, de las combinaciones que inician en 2 y 3, acertadamente descartó las que se repetían. Además, se observa la omisión de dos combinaciones: 5 5 3 2 y 5 2 5 3.

- ***Respuesta: 18***

Figura 19.

Ejemplo de solución incorrecta al problema "El cajero automático": E3 G1



A partir de la Figura 19, inicialmente, se puede observar un razonamiento correcto del estudiante, ya que considera descartar las combinaciones repetidas que principian en 5. Pero, en los subsecuente, no advierte que la cantidad de combinaciones que inician en 2 y 3 no deben ser seis sino tres, ya que también contienen valores duplicados.

4.2.2 Análisis de dos problemas de la Antología de Reflexión Cognitiva

Problema "El caracol"

Un caracol trepa un poste cuya altura es de 10 metros. Durante el día sube 3 metros, pero en la noche resbala 2 metros. ¿Cuántos días y cuántas noches necesita el caracol para subir hasta la cima del poste?

De acuerdo con Velasco (2017), existen diversos estudios con diferentes versiones del "problema del caracol". Entre las cuales, para este trabajo, se utilizó la versión que Velasco retomó del estudio de Cenobio y colaboradores (2017). Cabe aclarar que se realizaron ligeras adaptaciones al problema por sugerencia de los jueces expertos que validaron la ARC.

La solución del problema tiende a generar diferentes respuestas incorrectas, la mayoría de estas, propiciadas por el pensamiento rápido o intuitivo. Entre tales respuestas sobresalen: "10 días y 9 noches" y "10 días y 10 noches". En este sentido, es posible obtener la respuesta correcta (8 días y 7 noches) gracias al pensamiento lento o reflexivo, el cual permite realizar un análisis más cuidadoso. Recordemos que, según Kahneman (2011), el pensamiento intuitivo es inmediato e involuntario y requiere poca atención o reflexión. No así el pensamiento reflexivo, el cual demanda mayor esfuerzo y tiempo de análisis.

El problema se aplicó en la novena sesión presencial, acorde con la metodología de trabajo de las sesiones presenciales. Por lo general, es posible resolverlo con el apoyo de diagramas, tablas, u operaciones (Velasco, 2017). A manera de ejemplo, se muestra el siguiente procedimiento de solución.

Tabla 3.

Procedimiento de solución al problema "El caracol"

Día	Avanza (m)	Distancia a la que se encuentra del punto de partida (m)	Noche	Retrocede (m)	Distancia a la que se encuentra del punto de partida (m)
1	3	0 + 3 = 3	1	2	3 – 2 = 1
2	3	1 + 3 = 4	2	2	4 – 2 = 2
3	3	2 + 3 = 5	3	2	5 – 2 = 3
4	3	3 + 3 = 6	4	2	6 – 2 = 4
5	3	4 + 3 = 7	5	2	7 – 2 = 5
6	3	5 + 3 = 8	6	2	8 – 2 = 6
7	3	6 + 3 = 9	7	2	9 – 2 = 7
8	3	7 + 3 = 10*	–	–	–

* Al iniciar el día 8, el caracol se encuentra a 7 metros con respecto al punto de partida. De ahí, avanza 3 metros más, llegando a 10 metros, posición en la cual se encuentra la cima del poste. Por lo tanto, ahí finaliza su recorrido, cubriendo un total de 8 días y 7 noches.

La Tabla 8 muestra las respuestas dadas por los alumnos seleccionados de los grupos experimentales.

Tabla 4.

Respuestas correctas e incorrectas del problema "El caracol"

Grupos experimentales	Respuesta correcta	Respuestas incorrectas			No contestó	Total
		Más frecuente	Otras			
	8 y 7	10 y 9	8 y 9	10 y 10		
Uno	4	1	1	0	2	8
Dos	3	4	0	1	0	8
Total	7	5	1	1	2	16

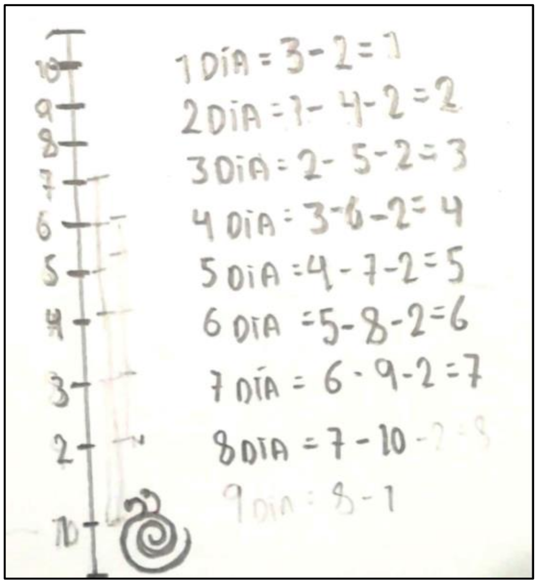
De las respuestas expuestas, se presentan los procedimientos más representativos.

Respuesta correcta

El grupo de alumnos que contestó correctamente el problema corresponde al 43.8% de la muestra de los grupos experimentales. De los cuales, se muestran algunos procedimientos de solución.

Figura 20.

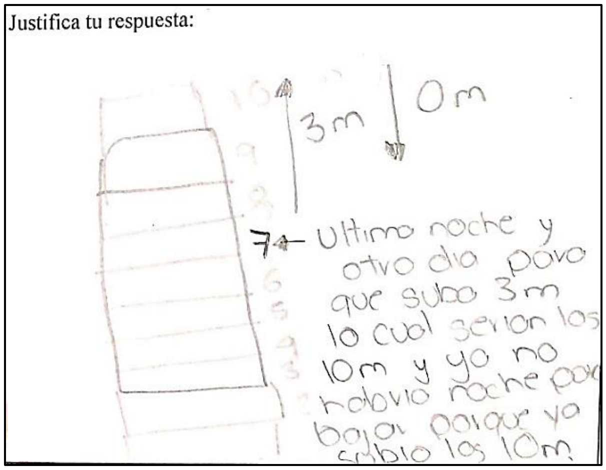
Ejemplo de solución correcta al problema "El caracol": E5 G1



De acuerdo con el dibujo del estudiante E5 G1 (ver Figura 20), se observa la interpretación de lo que sucede cada día, aunque con algunas inconsistencias, sobre todo en el uso del signo igual. Por ejemplo, el primer día el caracol sube 3 metros y en la noche desciende 2, esto implica 1 metro de avance en total. Para el segundo día, sube otros 3 metros, pero ya se había desplazado 1 metro, por tanto, llega hasta el punto de los 4 metros y, nuevamente, desciende 2 metros por la noche, resultando un desplazamiento total de 2 metros. El tercer día asciende 3 metros más, llegando hasta el punto de los 5 metros, debido a que su punto de partida fue en 2 metros. Posteriormente, al resbalar 2 metros en la noche, alcanza un desplazamiento total de 3 metros. De esta manera, continúa la secuencia hasta llegar el octavo día, en el cual, parte del punto de los 7 metros ascendiendo 3 metros más. Finalmente, llega hasta la cima del poste, cubriendo así la distancia total de 10 metros.

Figura 21.

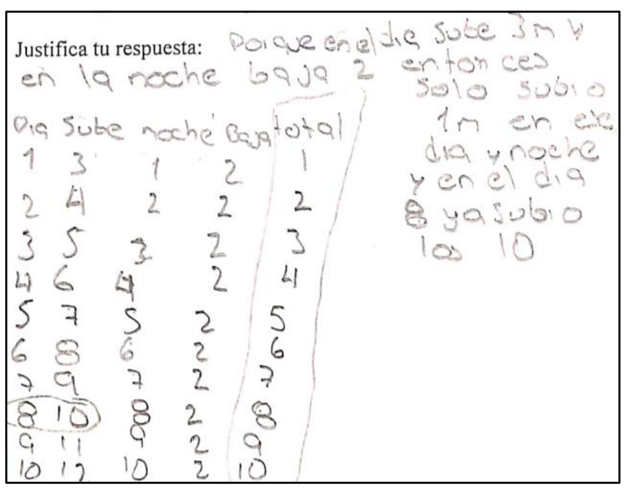
Ejemplo de solución correcta al problema "El caracol": E5 G2



Por su parte, el estudiante E5 G2 advierte que, al llegar la séptima noche (última), el caracol se ha desplazado 7 metros (ver Figura 21). Por lo tanto, el siguiente día (octavo) recorre 3 metros más, pero no habrá un descenso posterior, debido a que el caracol ya ha cubierto la distancia total, es decir, 10 metros.

Figura 22.

Ejemplo de solución correcta al problema "El caracol": E8 G2



Destaca el procedimiento del estudiante E8 G2 (ver Figura 22), el cual, realiza el desglose de los metros avanzados cada día y los metros retrocedidos cada noche. Esto lo hace hasta cumplirse el décimo día. No obstante, se percata que al llegar el octavo día ya ha cubierto la distancia total. De hecho, es probable que, inicialmente, haya sido motivado por su intuición al considerar las demás opciones.

Respuestas incorrectas

- ***Respuesta más frecuente: 10 días y 9 noches***

  El 31.3% de los estudiantes seleccionados de los grupos experimentales, obtuvo esta respuesta, la cual resultó ser la respuesta intuitiva más frecuente entre estos participantes. De los cuales, se muestran algunos argumentos.

Figura 23.

Ejemplo de solución incorrecta al problema "El caracol": E7 G2

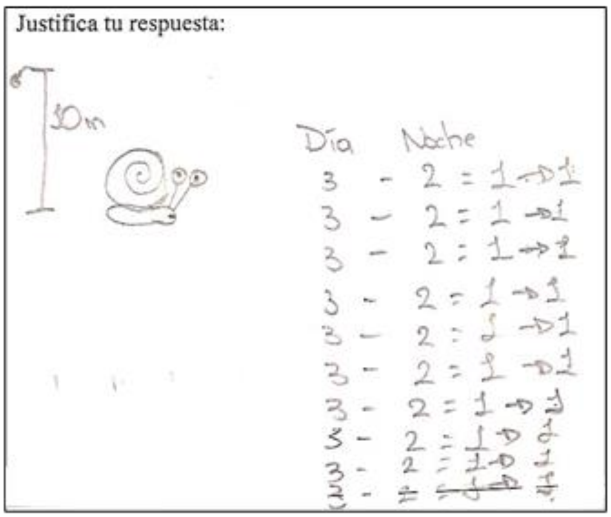
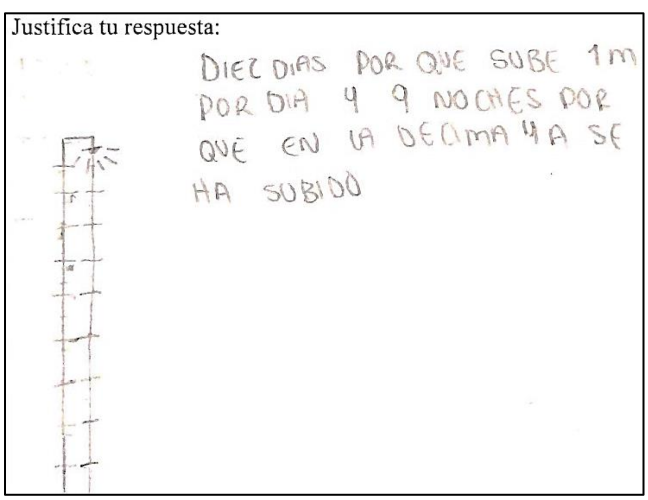


Figura 24.

Ejemplo de solución incorrecta al problema "El caracol": E3 G1



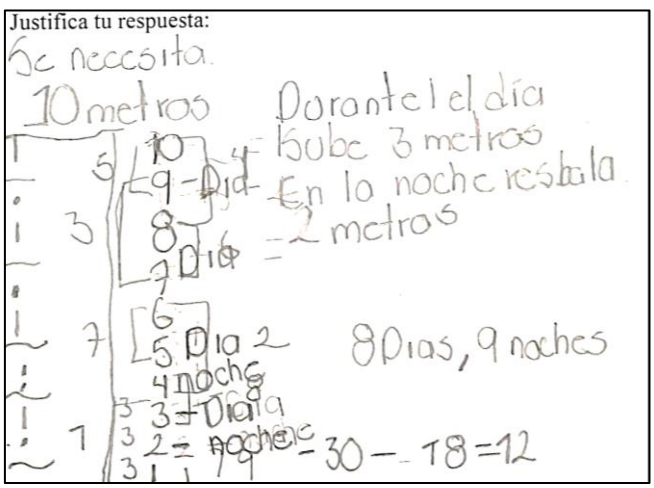
Es posible señalar, a partir de los procedimientos mostrados (ver Figuras 23 y 24), que la intuición predominó en estos estudiantes. Los cuales solamente contemplaron la diferencia entre los 3 metros ascendidos y los 2 metros retrocedidos por el caracol, por cada día y noche transcurridos, sumando 10 veces tales diferencias. En este sentido, de acuerdo con Cenobio y colaboradores (2017), si se considera que el caracol sigue ascendiendo el poste, a partir del día 9 implicaría "un caracol volador" (citado en Velasco, 2017).

No obstante, también es posible percibir indicios del pensamiento reflexivo. Tal como lo revela el estudiante E3 G1: "*Diez días por que sube 1 m por día y 9 noches porque en la décima ya se ha subido*". Al analizar su argumento, podemos advertir un razonamiento similar a quienes dan la respuesta reflexiva: 8 días y 7 noches, puesto que logra percatarse que el "supuesto" último día, el caracol ha llegado la cima y, por lo tanto, ya no retrocederá más.

- ***Respuesta: 8 días y 9 noches***

Figura 25.

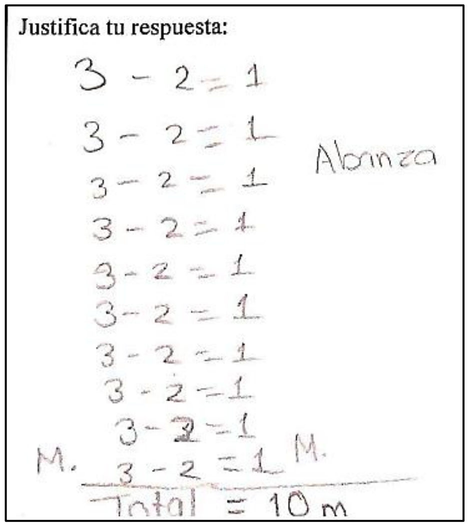
Ejemplo de solución incorrecta al problema "El caracol": E2 G1



De la respuesta presentada (ver Figura 25) se percibe, aunque no con mucha claridad, que el estudiante intenta describir la secuencia de los metros que asciende el caracol y los metros que resbala. De tal manera, acierta en la cantidad de días que tarda el caracol en llegar a la cima del poste, pero falla en el número de noches. De hecho, si fuera el caso en el que el caracol tardara más noches que días, implicaría que éste tendría que haber rebasado la cima del poste para que, a la noche siguiente, al descender 2 metros llegara hasta la misma.

- ***Respuesta: 10 días y 10 noches***

Figura 26. *Ejemplo de solución incorrecta al problema "El caracol": E4 G2*



De la Figura 26 se puede inferir un razonamiento similar al de aquellos compañeros que respondieron 10 días y 9 noches de manera intuitiva. Pero, a diferencia de ellos, el estudiante E4 G2 solamente se enfocó en sumar las diferencias entre los 3 metros de avance y los 2 metros de retroceso a lo largo de los 10 metros de altura del poste.

Problema "El millón"

¿Cuánto es un millón dividido por un cuarto, más cincuenta?

El problema fue extraído de la obra "El Enigma de Scherezade" de Raymond Smullyan, la cual, de acuerdo con Ghafouri (2017), reúne diversos cuentos, algunos quizá consideran que demasiados, pero existe un hilo conductor. Partícipe de su propia historia como creadora del conjunto de relatos, Scherezade lucha por su vida proponiendo al rey Shahryar diferentes acertijos que le impedirán quitarle la vida. Parece que puede tener un final trágico, pero no es así, pues su narración, es decir, lo expuesto sobre el rey Shahryar y ella acaba felizmente. El enigma de Scherezade incluye diversas adivinanzas antiguas y un total de 225 acertijos originales.[1]

La solución del problema tiende a generar diferentes respuestas incorrectas, por lo general, afectadas por el pensamiento intuitivo, lo cual, deriva en una interpretación o planteamiento incorrecto. De este modo, una de las principales respuestas es 250,050, puesto que aquel que lo

[1] https://www.casadellibro.com/libro-el-enigma-de-scherezade/9788474326642/628123

resuelve tiende a dividir un millón por cuatro, mas no por un cuarto, y así, posteriormente adiciona las 50 unidades.

El problema se aplicó en la segunda semana de trabajo en línea, acorde con la metodología descrita anteriormente. Es posible resolverlo, entre otros procedimientos, utilizando la fracción 1/4 o con su correspondiente valor de .25. En seguida se muestran ambas formas.

1) $\frac{1,000,000}{\frac{1}{4}} + 50 = \frac{\frac{1,000,000}{1}}{\frac{1}{4}} + 50 = 4,000,000 + 50 = 4,000,050$

2) $\frac{1,000,000}{0.25} + 50 = 4,000,000 + 50 = 4,000,050$

La Tabla 9 muestra las respuestas dadas por los alumnos seleccionados de los grupos experimentales.

Tabla 5.

Respuestas correctas e incorrectas del problema "El millón"

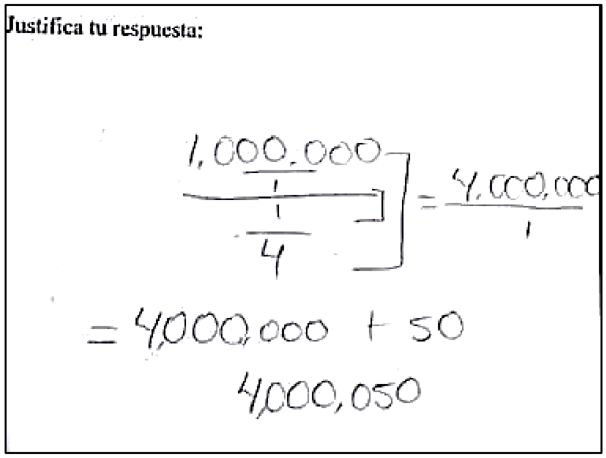
Grupos experimentales	**Respuesta correcta**	**Respuestas incorrectas**		**No contestó**	**Total**
		Más frecuente	**Otras**		
	4,000,050	**250,050**	**54**		
Uno	4	2	2	0	8
Dos	1	5	2	0	8
Total	5	7	4	0	16

Respuesta correcta

El 31.25% de la muestra de los grupos experimentales contestó correctamente. Enseguida se muestran algunos procedimientos de solución.

Figura 27.

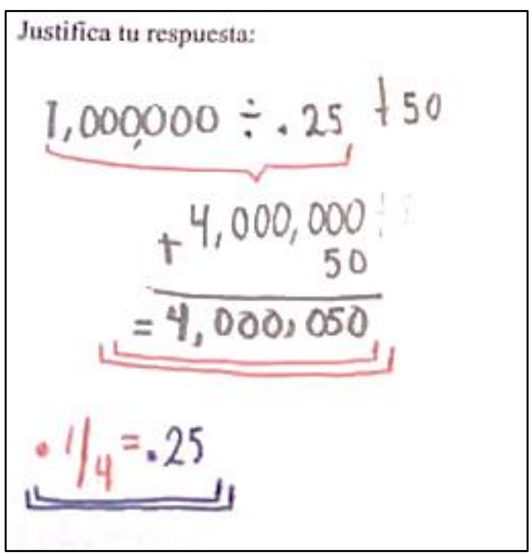
Ejemplo de solución correcta al problema "El millón": E3 G2



De acuerdo con la justificación del estudiante E3 G2 (ver Figura 27), se puede observar que estableció un planteamiento adecuado, al dividir, como así lo indica el problema, por un cuarto. Por otra parte, el estudiante E5 G1 optó por utilizar .25 en lugar de 1/4 (ver Figura 28), lo que le permitió obtener la respuesta correcta, tal vez, de manera más práctica. El resto de los participantes realizó alguno de los dos procedimientos mostrados.

Figura 28.

Ejemplo de solución correcta al problema "El millón": E5 G1



Respuestas incorrectas

- ***Respuesta más frecuente: 250,050***

El 43.75% de los estudiantes de la muestra obtuvo esta respuesta, la cual, resultó ser la respuesta más frecuente. A continuación, se muestran los argumentos más significativos, mismos que resultan similares a los del resto de participantes que proporcionaron tal respuesta, salvo la justificación del estudiante E2 G2, quien difiere en su interpretación del cociente respectivo de 1/4 (ver Figura 30).

Figura 29.

Ejemplo de solución correcta al problema "El millón": E5 G2

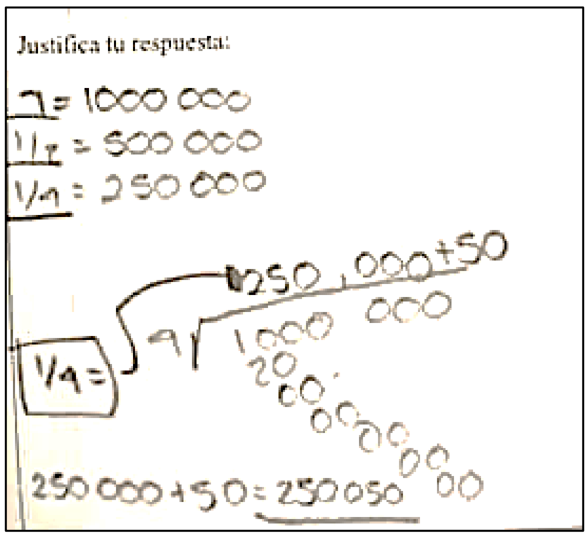
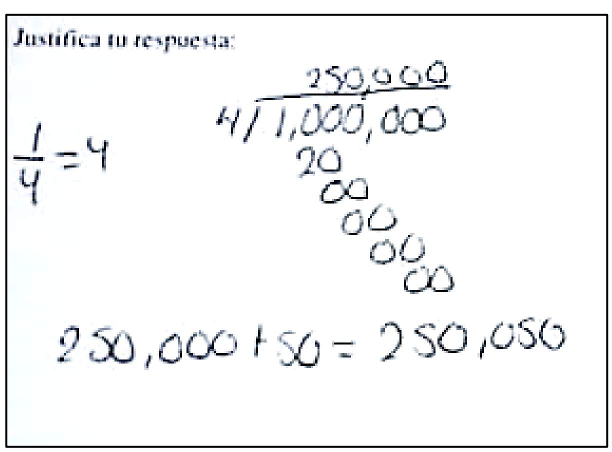


Figura 30.

Ejemplo de solución correcta al problema "El millón": E2 G2



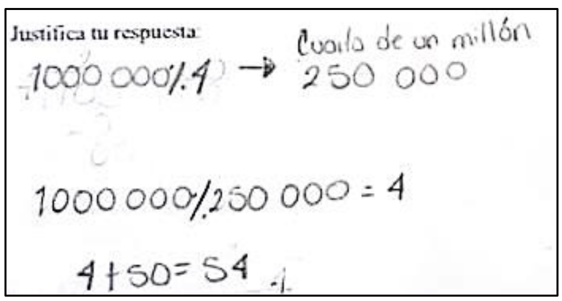
De la figura 29 se observa lo referido anteriormente. Quienes dieron esta respuesta confundieron la cantidad por la cual se tiene que dividir 1,000,000. Esto porque, usualmente, al hallar la cuarta parte de cierta cantidad, se divide por cuatro. Esto se advierte en la justificación del estudiante E5 G2 quien, inclusive, considera la mitad y la cuarta parte de un millón. No obstante, el problema no solicita obtener la cuarta parte de dicha cantidad, sino dividirla por un cuarto.

Asimismo, de la figura 30 destaca el procedimiento del estudiante E2 G2, quien interpreta equivocadamente el resultado de dividir 1 entre 4, indicando como cociente 4, en vez de .25. De hecho, este error resulta ser común entre algunos estudiantes que asumen la conmutatividad en los elementos de la división.

- ***Respuesta: 54***

Esta respuesta se destaca, puesto que 4 estudiantes, es decir, el 25% la obtuvieron. De los cuales, se presentan algunos procedimientos de solución.

Figura 31. *Ejemplo de solución correcta al problema "El millón": E1 G1*


Justifica tu respuesta:

1000 000/.4 → Cuarto de un millón 250 000

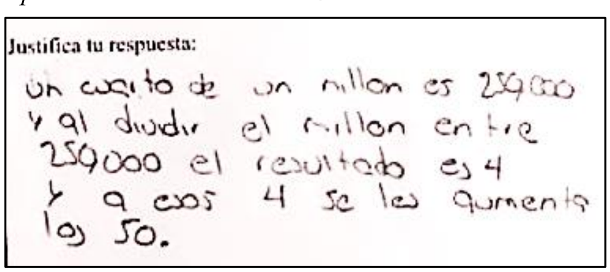
1000 000/250 000 = 4

4+50= 54

De acuerdo con la justificación del estudiante E1 G1 (ver Figura 31) se puede observar una interpretación distinta del enunciado del problema. De tal manera, quienes dieron esta respuesta, consideraron dividir el millón dado entre la cuarta parte de este, así como lo ratifica el argumento del estudiante E8 G2 (ver Figura 32).

Figura 32.

Ejemplo de solución correcta al problema "El millón": E8 G2


Justifica tu respuesta:

un cuarto de un millon es 250000 y al dividir el millon entre 250000 el resultado es 4 y a esos 4 se les aumenta los 50.

4.3 Resultados finales

Una vez concluido el periodo de intervención con la muestra de los grupos experimentales, se realizó la segunda medición (post test) del nivel de razonamiento lógico y de reflexión cognitiva de los alumnos seleccionados, tanto de los grupos de control como de los experimentales. Por tanto, con el empleo de formularios de Google, se diseñaron dos cuestionarios con las preguntas correspondientes al TRL y TRC, puesto que fue la alternativa que se identificó para llevar a cabo tal actividad. Posteriormente, se efectuó el análisis descriptivo de los resultados. Además, se hizo una comparación de los resultados iniciales y finales del nivel de razonamiento lógico y de reflexión cognitiva de los estudiantes de la muestra, esto con el propósito de establecer su nivel de logro. Asimismo, se realizaron pruebas de hipótesis para verificar posibles diferencias estadísticamente significativas.

4.3.1 Medición final del nivel de razonamiento lógico

En seguida se presentan los resultados obtenidos por la muestra de los grupos experimentales y de control, de acuerdo con la medición final del TRL.

Tabla 6.

Estadística descriptiva final de la muestra: TRL

	Grupos experimentales			Grupos de control		
	1	**2**	**Ambos**	**1**	**2**	**Ambos**
Media	3.63	2.63	3.13	.75	1.50	1.13
Mediana	3	3	3	1	1.5	1
Moda	2, 3, 6	1, 3	3	1	0	1
Desviación estándar	2.45	1.51	2.03	.71	1.20	1.03
Rango	7	4	7	2	3	3
Mínimo	0	1	0	0	0	0
Máximo	7	5	7	2	3	3
Cuenta	8	8	16	8	8	16

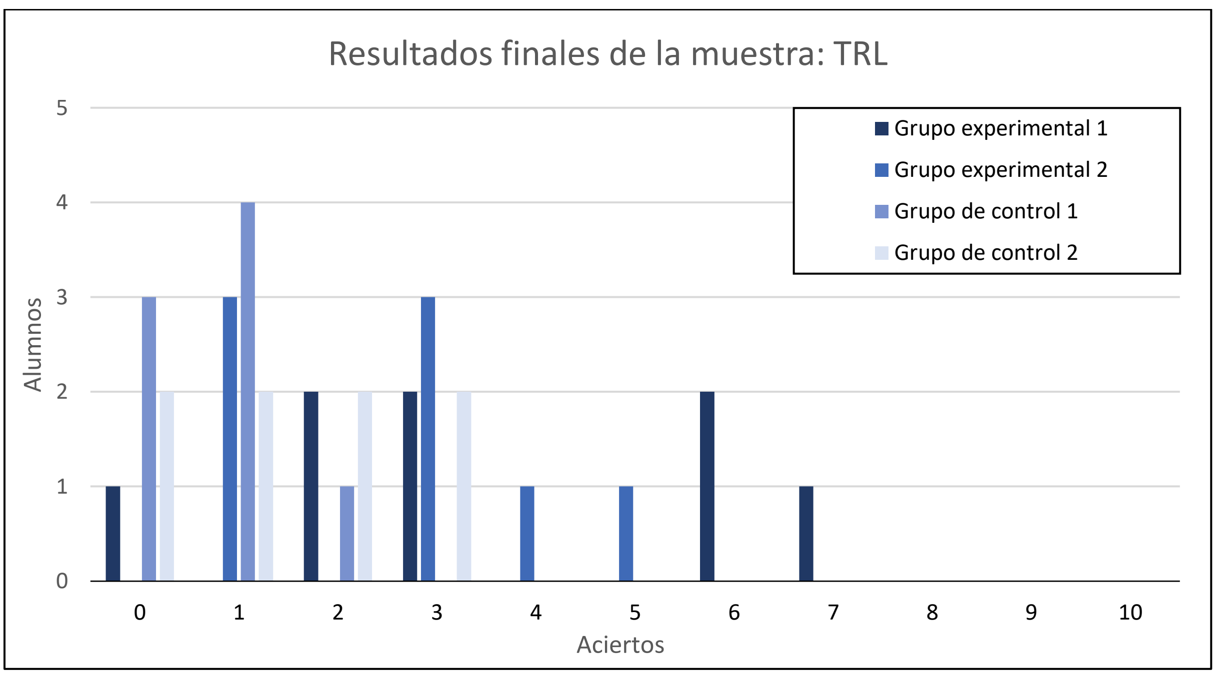
De la Tabla 10 se observa, de acuerdo con la media de los grupos experimentales, que los estudiantes del grupo 1 obtuvieron entre 3 y 4 aciertos y del grupo 2 entre 2 y 3 aciertos en promedio. De tal manera, entre ambos grupos, contestaron correctamente de tres a cuatro preguntas en promedio. Asimismo, la mediana de los grupos experimentales nos indica que al menos el 50% de los participantes logró un máximo de 3 aciertos, valor que también representa una de las puntuaciones más frecuentes.

Por otra parte, la media en los grupos de control indica que, en promedio, el primer grupo acertó a no más de una pregunta y, el segundo grupo a dos preguntas como máximo. Así, entre ambos grupos, se observa que contestaron correctamente entre una y dos preguntas en promedio. De igual manera, la mediana de ambos grupos señala que el 50% de los estudiantes consiguió no más de 1 acierto, valor que coincide con la puntuación más frecuente.

Una vez presentado el análisis descriptivo, de manera complementaria, la Figura 5 muestra los resultados finales del TRL (cantidad de aciertos) obtenidos por los alumnos seleccionados, tanto de los grupos experimentales como de los grupos de control.

Figura 33.

Resultados finales del TRL: muestra.



De la Tabla 10 y la Figura 33 se distingue que los estudiantes de los grupos experimentales obtuvieron mejores resultados que los estudiantes del grupo de control. De hecho, solamente un alumno de los grupos de control logró puntuar 3 aciertos, el resto consiguió como máximo 2 aciertos. En consecuencia, se puede afirmar que ninguno de los estudiantes seleccionados de los grupos de control rebasa el nivel de pensamiento concreto (Acevedo y Oliva, 1995). A diferencia de los grupos experimentales en los cuales, al menos cuatro estudiantes, se situan en el nivel de pensamiento en transición, es decir, entre 5 y 7 aciertos. No obstante, ningún estudiante se ubica en el nivel de pensamiento formal.

Por otra parte, aunque se advierte un avance en el desarrollo del razonamiento lógico de los grupos experimentales con respecto a los grupos de control, se llevó a cabo una prueba de hipótesis para determinar posibles diferencias estadísticamente significativas entre ambos grupos. Para ello, se determinó la normalidad y homocedasticidad de los datos (ver Anexos 4 y 5), concluyendo que los resultados de los grupos experimentales cumplieron con la condición de normalidad, no así, los resultados de los grupos de control. Igualmente, ambos grupos cumplieron con el supuesto de homocedasticidad.

En consecuencia, al no tener en su totalidad ambas condiciones (normalidad y homocedasticidad) se consideró la prueba de hipótesis no paramétrica de Wilcoxon para muestras independientes (Amat, 2016) (ver Anexo 6). De este modo, considerando un nivel de significancia (p-valor) > .05 para aceptar H_0, los resultados arrojaron un p-valor igual a .002662, lo cual implica que la hipótesis nula se rechaza. Por tanto, es posible afirmar que, existen diferencias estadísticamente significativas entre el nivel de razonamiento lógico de los estudiantes de los grupos experimentales respecto a los grupos de control.

Una vez hecho el análisis anterior, de manera análoga, se realizó un comparativo del nivel inicial de razonamiento lógico de los participantes seleccionados de cada grupo, con respecto a su nivel final.

4.3.2 Nivel de razonamiento lógico: grupos de control

De acuerdo con los resultados iniciales y finales del nivel de razonamiento lógico de los grupos de control 1 y 2 se presenta un análisis comparativo, considerando, en primer lugar, la estadística descriptiva y, posteriormente, la existencia de posibles diferencias estadísticamente significativas.

Tabla 7.

Resultados iniciales y finales de la muestra de los grupos de control 1 y 2: TRL

	Resultados	
	Iniciales	**Finales**
Media	1.19	1.13
Mediana	1	1
Moda	1	1
Desviación estándar	.98	1.03
Rango	4	3
Mínimo	0	0
Máximo	4	3
Cuenta	16	16

Aunque es evidente que la muestra de los grupos de control no presentó ningún avance en el desarrollo del razonamiento lógico (ver Tabla 11), se realizó una prueba de hipótesis para verificar posibles diferencias estadísticamente significativas. De tal manera, debido a la ausencia de normalidad (ver Anexo 4) y al cumplimiento de la homocedasticidad de los resultados iniciales y finales de ambos grupos de control (ver Anexo 5) se aplicó la prueba de hipótesis no paramétrica de Wilcoxon para muestras apareadas (Hernández et al., 2010) (ver Anexo 6). De ahí, considerando un nivel de significancia (p-valor) > .05 para aceptar H_0, los resultados arrojaron un p-valor igual a .8562, lo cual señala que no existe evidencia suficiente para rechazar la hipótesis nula. Entonces, es posible concluir que no hay diferencias estadísticamente significativas entre los resultados iniciales y finales del nivel de razonamiento lógico de los estudiantes de los grupos de control.

4.3.3 Nivel de razonamiento lógico: grupos experimentales

De igual manera, se presenta un análisis comparativo con base en la estadística de los resultados iniciales y finales del nivel de razonamiento lógico de los grupos experimentales 1 y 2 (ver Tabla 12) y, posteriormente, se identifican posibles diferencias estadísticamente significativas.

Tabla 8.

Resultados iniciales y finales de la muestra de los grupos experimentales 1 y 2: TRL

	Resultados	
	Iniciales	**Finales**
Media	1.69	3.13
Mediana	1.5	3
Moda	1	3
Desviación estándar	1.14	2.03
Rango	4	7
Mínimo	0	0
Máximo	4	7
Cuenta	16	16

De acuerdo con los resultados mostrados en la Tabla 12 se pueden observar ciertas diferencias que permiten, como primera aproximación, identificar un avance en el desarrollo del razonamiento lógico de la muestra de los grupos experimentales. No obstante, se realizó una prueba de hipótesis para identificar posibles diferencias estadísticamente significativas. Por lo tanto, se llevó a cabo un proceso análogo al efectuado con los grupos de control. De tal modo, previamente se determinó la normalidad y homocedasticidad de los resultados iniciales y finales de los grupos experimentales (ver Anexos 3 y 4). De ahí, se comprobó que los datos cumplieron con la condición de normalidad, no así con el supuesto de homocedasticidad. Por consiguiente, el análisis de diferencias estadísticamente significativas se efectuó con la prueba de hipótesis no paramétrica de Wilcoxon para muestras apareadas (Hernández et al., 2010). Esta prueba se realizó con un nivel de significancia (p-valor) > .05 para aceptar H_0. Los resultados arrojaron un p-valor igual a .03557, con lo cual se rechaza la hipótesis nula. De esta manera, es posible concluir que existen diferencias estadísticamente significativas entre los resultados iniciales y finales del nivel de razonamiento lógico de los estudiantes de ambos grupos experimentales.

4.3.4 Medición final del nivel de reflexión cognitiva

Después de comparar los resultados del nivel de razonamiento lógico, de manera análoga, se presenta el análisis de los resultados del TRC. De tal modo, la Tabla 7 expone los resultados obtenidos por la muestra de los grupos experimentales y de control, de acuerdo con la medición final del TRC.

Tabla 9.

Estadística descriptiva final de la muestra: TRC

	Grupos experimentales			**Grupos de control**		
	1	**2**	**Ambos**	**1**	**2**	**Ambos**
Media	3.63	3.13	3.38	.38	1.38	.88
Mediana	4	3	4	0	2	.5
Moda	4	5	4	0	2	0
Desviación estándar	1.85	1.73	1.75	.74	.92	.96
Rango	6	4	6	2	3	3
Mínimo	0	1	0	0	0	0
Máximo	6	5	6	2	3	3
Cuenta	8	8	16	8	8	16

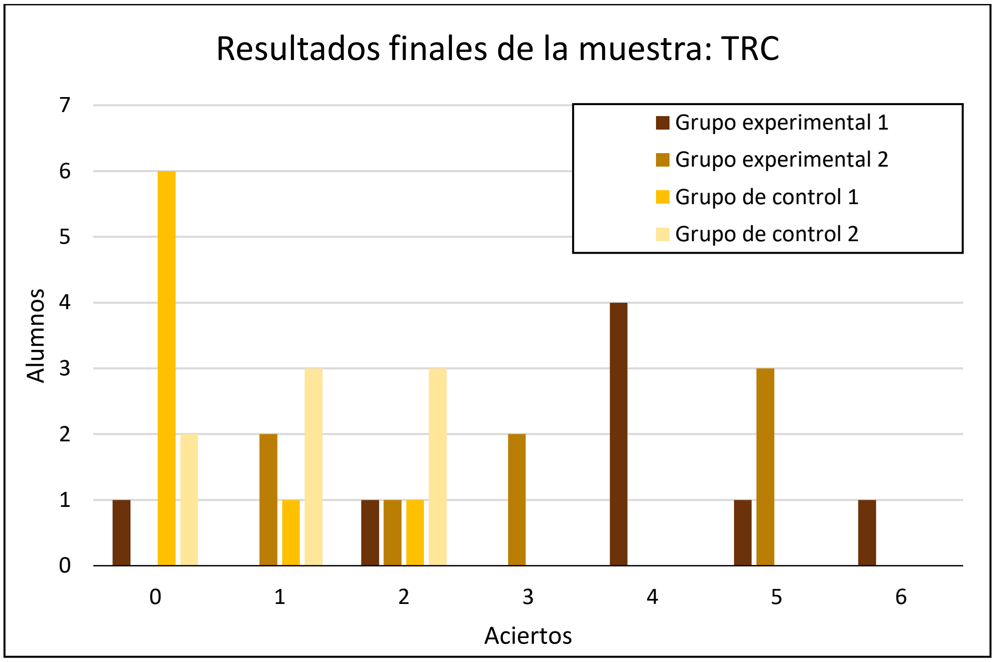
De la Tabla 13, se observa que los participantes de los grupos experimentales alcanzaron un promedio de 3 a 4 aciertos. Asimismo, acorde con la mediana, se puede afirmar que, al menos el 50% de los participantes de los grupos experimentales, obtuvo un máximo de 4 aciertos. Valor que también, resultó ser el más frecuente en ambos grupos. Incluso, se distinguen valores máximos de 6 y 5 aciertos en los grupos experimentales 1 y 2 respectivamente.

Asimismo, la media en los grupos de control indica que los participantes de ambos grupos, acertaron a no más de 2 respuestas. De hecho, los estudiantes del grupo de control 1, no alcanzaron más de 1 acierto en promedio. Además, entre ambos grupos, se distingue un valor mediano entre 0 y 1 acierto lo que implica que, por lo menos, el 50% de los estudiantes de tales grupos obtuvo a lo mucho 1 acierto. Aunque se presentó un valor máximo de 3 aciertos, el más frecuente, en ambos grupos de control, corresponde a 0 aciertos.

De igual manera, la siguiente gráfica (Figura 34) muestra los resultados finales del TRC de cada uno de los grupos, tanto experimentales como de control, considerando el número de aciertos y la cantidad de alumnos que obtuvieron cierta puntuación.

Figura 34.

Resultados finales del TRC: muestra



De la Tabla 13 y la Figura 34 se observan mejores puntuaciones de los estudiantes de los grupos experimentales. Ningún estudiante de los grupos de control puntuó más de tres aciertos, solo uno del grupo 2. En contraste, hubieron nueve estudiantes de los grupos experimentales que lograron 4 o más aciertos. De hecho, es posible afirmar que tales estudiantes, seis del grupo experimental 1 y tres del grupo experimental 2, alcanzaron el nivel de pensamiento reflexivo.

Aunque se percibe una diferencia importante entre los resultados de los grupos experimentales con respecto a los grupos de control, al igual que en los análisis precedentes, se realizó una prueba de hipótesis para identificar posibles diferencias estadísticamente significativas entre ambos grupos. De tal manera, al no cumplir totalmente, con la normalidad y homocedasticidad (ver Anexos 4 y 5) se aplicó la prueba de hipótesis no paramétrica de Wilcoxon para muestras independientes (Amat, 2016) (ver Anexo 6). Considerando un nivel de significancia (p-valor) $> .05$ para aceptar H_0, los resultados arrojaron un p-valor igual a .000130. Por lo tanto, es posible afirmar que existen diferencias estadísticamente significativas entre el nivel de reflexión cognitiva de los estudiantes de los grupos experimentales con respecto a los grupos de control.

De igual manera, una vez hecho el análisis anterior, se llevó a cabo el comparativo del nivel inicial de reflexión cognitiva de los participantes seleccionados de cada grupo con respecto a su nivel final.

4.3.5 Nivel de reflexión cognitiva: grupos de control

De acuerdo con los resultados iniciales y finales de TRC, de los grupos de control 1 y 2, se presenta el análisis descriptivo de los datos y, posteriormente, la verificación de posibles diferencias estadísticamente significativas.

Tabla 10.

Resultados iniciales y finales de la muestra de los grupos de control 1 y 2: TRC

	Resultados	
	Iniciales	**Finales**
Media	.44	.88
Mediana	0	0.5
Moda	0	0
Desviación estándar	.63	.96
Rango	2	3
Mínimo	0	0
Máximo	2	3
Cuenta	16	16

Aunque se advierte, de acuerdo con la Tabla 14, que los estudiantes seleccionados de los grupos de control no lograron un avance significativo en el desarrollo de la reflexión cognitiva, se realizó una prueba de hipótesis para verificar posibles diferencias estadísticamente significativas. Previamente se analizó la normalidad y homocedasticidad, resultando una falta de normalidad en los datos de ambos grupos y el cumplimiento de la homocedasticidad (ver Anexos 4 y 5). Por consiguiente, al no cumplirse ambas condiciones, se aplicó la prueba de hipótesis no paramétrica de Wilcoxon para muestras apareadas (Hernández et al., 2010) (ver Anexo 6). De tal modo, de acuerdo con un nivel de significancia (p-valor) > .05 para aceptar H_0, los resultados arrojaron un p-valor igual a .2117. Esto implica que se rechaza la hipótesis nula y, por ende, permite concluir que no hay diferencias estadísticamente significativas entre los resultados iniciales y finales del nivel de reflexión cognitiva de los estudiantes de los grupos de control.

4.3.6 Nivel de reflexión cognitiva: grupos experimentales

Igualmente, se presenta el análisis comparativo de los resultados iniciales y finales del TRC de los grupos experimentales 1 y 2 (ver Tabla 15) y, posteriormente, se analizan posibles diferencias estadísticamente significativas.

Tabla 11.

Resultados iniciales y finales de la muestra de los grupos experimentales 1 y 2: TRL

	Resultados	
	Iniciales	**Finales**
Media	1	3.38
Mediana	1	4
Moda	0	4
Desviación estándar	1.03	1.75
Rango	3	6
Mínimo	0	0
Máximo	3	6
Cuenta	16	16

De acuerdo con los resultados mostrados en la Tabla 15, se observan diferencias que permiten identificar un avance en el desarrollo de la reflexión cognitiva de los estudiantes seleccionados de los grupos experimentales. No obstante, para reafirmar lo anterior, se realizó una prueba de hipótesis con el propósito de identificar diferencias estadísticamente significativas. Para ello, se aplicó la prueba de hipótesis no paramétrica de Wilcoxon para muestras apareadas (Hernández et al., 2010). Esto debido a que los datos en cuestión no cumplieron íntegramente con el contraste de normalidad y el supuesto de homocedasticidad (ver Anexos 4 y 5). La prueba se realizó con un nivel de significancia (p-valor) > .05 para aceptar H_0. Los resultados arrojaron un p-valor igual a .00243 (ver Anexo 6), con lo cual, se determinó la existencia de diferencias estadísticamente significativas. Por lo tanto, es posible afirmar que hubo un avance significativo en el desarrollo de la reflexión cognitiva de los estudiantes de ambos grupos experimentales.

CONCLUSIONES

Esta investigación surgió gracias a la idea de implementar una metodología de aprendizaje activo con el propósito de acelerar el desarrollo cognitivo de los estudiantes de los grupos experimentales, impactando de manera específica en su razonamiento lógico y la reflexión cognitiva.

El proyecto de Aceleración Cognitiva mediante la Educación Matemática (CAME) se considera una alternativa metodológica de aprendizaje activo y, asimismo, tiene la finalidad de mejorar la capacidad intelectual de los alumnos que pertenecen al grupo experimental debido a que, en general, estos obtienen mejores resultados en comparación con los estudiantes del grupo control (Tornero, 2014). Si bien, de acuerdo con Adey y Shayer (1990), tal mejora se logra con el apoyo de actividades especiales en sus lecciones de ciencias cada dos semanas durante un período de dos años, este proyecto tuvo una duración de un año, trabajando cada semana, alternadamente, una actividad de reflexión cognitiva y una de razonamiento lógico en la correspondiente materia de matemáticas.

Antes de iniciar la intervención se aplicó un diagnóstico con las pruebas TRL y TRC a los dos grupos experimentales y los dos grupos de control. De ahí, a partir del análisis descriptivo y de pruebas de hipótesis de los resultados del pre test, se pudo determinar que la mayoría de los estudiantes, se situó en el estadio de las operaciones concretas o de primer orden (Acevedo y Oliva, 1995), así como en el nivel de pensamiento rápido o intuitivo (Kahneman, 2011). Por tanto, los estudiantes de los cuatro grupos participantes revelaron características iniciales similares respecto a su nivel de razonamiento lógico y de reflexión cognitiva.

Una vez realizado el diagnóstico se inició el trabajo con los grupos experimentales implementando las actividades propuestas en las antologías, acorde con las etapas o pilares del proyecto CAME, cubriendo así un total de 12 sesiones presenciales. No obstante, después de un avance considerable en el desarrollo del trabajo programado, hubo la necesidad de rediseñar la aplicación de las actividades restantes para su aplicación en línea, debido a la contingencia sanitaria propiciada por el Covid-19. Por consiguiente, se extrajo una muestra de cada uno de los grupos participantes, de los cuales, se examinaron sus resultados diagnósticos por medio de un análisis estadístico descriptivo, así como de pruebas de hipótesis. Esto con la finalidad de verificar posibles diferencias estadísticamente significativas y determinar si las muestras seleccionadas de cada grupo presentaban características similares al resto de su grupo correspondiente y, así mismo, podían ser estadísticamente comparables. Después del análisis realizado, se determinó que las muestras seleccionadas de cada grupo eran estadísticamente comparables, ya que no se presentaron diferencias significativas.

Posteriormente, se conformaron dos grupos privados en Facebook, esto con la finalidad de concluir satisfactoriamente la intervención en línea con los alumnos seleccionados de los grupos experimentales. Lo cual se realizó, dentro de lo posible, por medio de una dinámica similar a la llevada a cabo presencialmente.

Al concluir el periodo de intervención con la muestra de los grupos experimentales, se llevó a cabo la segunda medición del nivel de razonamiento lógico y de reflexión cognitiva de los alumnos seleccionados, tanto de los grupos de control como de los grupos experimentales. Lo anterior aplicando nuevamente, las pruebas TRL y TRC. Una vez realizado el post test, se llevó a cabo un análisis descriptivo y de pruebas de hipótesis, con el cual, al contrastar los resultados iniciales y finales del análisis estadístico de los grupos de control, se observó la ausencia de diferencias estadísticamente significativas. Lo anterior indicó que no se presentó ningún avance en el desarrollo del razonamiento lógico y la reflexión cognitiva de los estudiantes de tales grupos. Esto se debe a que, estadísticamente, no se encontró evidencia suficiente para rechazar la hipótesis nula. No así en los estudiantes de los grupos experimentales quienes lograron un avance significativo en ambas áreas, tanto en el razonamiento lógico como en la reflexión cognitiva, debido a que sí se encontraron diferencias estadísticamente significativas.

Es importante destacar que, aunque se identificó que no más de cuatro estudiantes de la muestra de los grupos experimentales alcanzaron el nivel de pensadores en transición, inicialmente, ninguno rebasaba el nivel de pensamiento concreto. Por su parte, se determinó que ningún estudiante de los grupos de control superó el nivel de pensamiento concreto, puesto que, de acuerdo con Acevedo y Oliva (1995) quienes rebasan tal nivel de pensamiento deben puntuar más de cuatro aciertos.

De igual manera, se observó un avance considerable en el desarrollo de la reflexión cognitiva de los participantes de los grupos experimentales. De los dieciséis estudiantes seleccionados, nueve de ellos, lograron al menos cuatro aciertos en el TRC, lo cual los aproxima al nivel de pensamiento reflexivo (Frederick, 2005). Situación que, inicialmente, ningún estudiante ostentó.

Por otra parte, se realizó el análisis de algunas tareas efectuadas por los estudiantes seleccionados de los grupos experimentales. Para ello, se eligieron dos tareas de cada antología, una trabajada de manera presencial y la otra en la modalidad en línea. En cada una se identificaron respuestas correctas, respuestas incorrectas más frecuentes y otras respuestas incorrectas. Además, se analizaron los argumentos proporcionados por los estudiantes, los cuales pretendieron validar las respuestas respectivas. Esto con la finalidad de verificar la perspectiva de los participantes y realizar una comparación de los procedimientos proporcionados por los participantes. De ahí, llama la atención que, a pesar de haber obtenido una respuesta equívoca, el razonamiento de algunos estudiantes no fue del todo incorrecto. Sin embargo, en el proceso, por lo general cometieron ciertos errores de interpretación o aritméticos. Al respecto, Socas (2007) afirma que los errores no son fortuitos, sino que se manifiestan por estrategias que los alumnos utilizan en situaciones problemáticas y son consecuencia de experiencias matemáticas anteriores.

Por lo anterior, se puede aseverar que, con el sustento del proyecto CAME, la participación dinámica del profesor y las tareas realizadas por los alumnos, se logró un estímulo de crecimiento en el nivel de razonamiento lógico y de reflexión cognitiva de la muestra de estudiantes de los grupos experimentales. Esto se debe a que el proyecto CAME, en lugar de promover un método mecánico de resolución de problemas, se fundamenta en la resolución de problemas que contienen un determinado conflicto cognitivo y en una dinámica de aprendizaje activo en el aula (Adhami et al., 1998).

De igual manera, cabe resaltar que, durante las sesiones presenciales e incluso en el trabajo en línea, se observó una actitud proactiva de los estudiantes, mostrando, en su mayoría, gran interés por participar y discutir la razón detrás de cada una de las respuestas generadas a partir de la implementación de las actividades propuestas. En este sentido, recordemos que, según Ruiz (2008), Vygotsky plantea que los alumnos aprenden mejor en colaboración con sus pares, profesores u otros, cuando se encuentran involucrados de forma activa en tareas significativas e interesantes. Además, Sierra (2012) afirma que, el aprendizaje activo permite que los estudiantes dejan de ser espectadores, adquieran un compromiso mayor con las actividades, incrementen su nivel de motivación y desarrollen habilidades de orden superior.

Finalmente, de acuerdo con Shayer y Adhami (2007), es posible aseverar que, a medida que los profesores implementen una metodología de aprendizaje activo en el aula con lecciones que impliquen retos de dificultad moderada que, a su vez, estimulen el desarrollo de los estudiantes, adquirirán más confianza y brindarán mayores oportunidades para que los estudiantes aprovechen las estrategias de resolución de problemas y adquieran una perspectiva favorable durante las lecciones de clase.

Algunos trabajos, derivados del presente proyecto, se presentaron en los siguientes eventos o revistas:

- VI Taller Internacional "Tendencias en la Educación Matemática Basada en la Investigación"
  Nombre de la ponencia: Influencia del nivel de escolaridad en las pruebas TRL y TRC. Noviembre 2019.

- VI Taller Internacional "Tendencias en la Educación Matemática Basada en la Investigación"
  Nombre del cartel: Validación de contenido de la antología de problemas para el desarrollo de la reflexión cognitiva. Noviembre 2019.
- Seventh International Conference on Mathematics and its Applications (7CIMA)
  Nombre de la ponencia: El problema del barril de Iván y María: La reformulación que mejora el desempeño de los estudiantes. Septiembre 2020.
- VII Taller Internacional "Tendencias en la Educación Matemática Basada en la Investigación"
  Nombre de la video ponencia: Test De Reflexión Cognitiva: las diversas respuestas y argumentos que revelan estudiantes de bachillerato. Noviembre 2020.
- Artículo de investigación publicado en la Revista Iberoamericana de Educación Matemática: Unión.
  Nombre del trabajo: Influencia de la escolaridad en el desarrollo del razonamiento lógico y la reflexión cognitiva en estudiantes de bachillerato. Número 60, páginas 212-232.
- XXII Escuela de Invierno en Matemática Educativa. Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa A. C.
  Nombre de la ponencia oral: "Beber agua de un barril": Conocer el volumen reduce el "pensamiento rápido". Diciembre de 2020.

- Artículo de investigación aceptado para su publicación en el número 108 de la Revista de Didáctica de las Matemáticas: NÚMEROS.

  Nombre del trabajo: Test de Reflexión Cognitiva: las diversas respuestas y los argumentos que revelan estudiantes de bachillerato.

Referencias bibliográficas

Acevedo, J. y Oliva, J. (1995). Validación y aplicación de un test de razonamiento lógico, *Revista de psicología general y aplicada* 48, 339-351.

Adey, P. (1999). The Science of Thinking, and Science for Thinking: A Description of Cognitive Acceleration through Science Education (CASE). Innodata Monographs 2.

Adey, P. y Shayer, M. (2002). La aceleración cognitiva llega a la madurez, 1–4.

Adey, P. y Shayer, M. (2014). Really Raising Standards. Cognitive intervention and academic achievement. London: Routledg

Adhami, M., Johnson, D. C. & Shayer, M. (1998). Thinking mathematics: the curriculum materials of the CAME project.

Amat, J. (2016). Análisis de Normalidad: gráficos y contrastes de hipótesis. Recuperado de: https://github.com/JoaquinAmatRodrigo/Estadistica-con-R

Bonswell, C., and Eison, J. (1991). *Active Learning: Creating Excitement in the Classroom AEHE-ERIC Higher Education Report No. 1*, Washington, DC: Jossey-Bass.

Curotto, M. (2010). La metacognición en el aprendizaje de la matemática. *Revista electrónica Iberoamericana de educación en ciencias y tecnología*, *2*(2), 21-39.

Etcheverry, P. T., Ignjatov, J. S., & de Lourdes Juárez, E. (2020). Influencia de la escolaridad en el desarrollo del razonamiento lógico y la reflexión cognitiva en estudiantes de bachillerato. *UNIÓN-REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA*, *16*(60), 212-232.

Ferrándiz, C., Bermejo, R., Sainz, M., Ferrando, M., y Prieto, M. D. (2008). Estudio del razonamiento lógico-matemático desde el modelo de las inteligencias múltiples. *Anales de Psicología/Annals of Psychology*, *24*(2), 213-222.

Finau, T., Treagust, D. F., Won, M., & Chandrasegaran, A. L. (2018). Effects of a mathematics cognitive acceleration program on student achievement and motivation. International *Journal of Science and Mathematics Education*, 16(1), 183-202.

Font, V. (1994). Motivación y dificultades de aprendizaje en matemáticas. *Suma*, 17, 10-16.

Frederick, S. (2005). Cognitive Reflection and Decision Making. *Journal of Economic Perspectives*, *19*(4), 25–42.

Ghafouri, M. (2017). *Las Mil y una noches como construcción intertextual e intercultural: sus vínculos con la literatura española* (Doctoral dissertation, Universidad Autónoma de Madrid).

Goulding, M. (2009). Cognitive Acceleration in Mathematics Education: Teachers’ Views. *Evaluation & Research in Education*, *16*(2), 104–119.

Grouws, D. A. (Ed.). (1992). *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York: Macmillan.

Haigh, M. (2016). Has the standard cognitive reflection test become a victim of its own success? *Advances in cognitive psychology*, *12*(3), 145-149.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2010). *Metodología de la Investigación*. México, D. F.: Mac Graw Hill.

Hernández, C., Ramírez, P. y Rincón G. (2013). Pensamiento matemático en estudiantes universitarios. *Ecomatemático*, *4*(1), 4-10.

Jones, M., y Gott, R. (1998). Cognitive acceleration through science education: Alternative perspectives. *International Journal of Science Education*, *20*(7), 755–768.

Kahneman D. (2011). Thinking, Fast and Slow. *New York, NY: Farrar, Straus and Giroux.*

López, J., *Evolución de la reflexión cognitiva en la universidad*, Revista Divulgación Matemática 5, 17-18 (2012).

McCormack, L. (2009). *Aceleración cognitiva en la transición de segundo a nivel primario* (tesis doctoral, Dublin City University).

Oliver, M., y Venville, G. (2015). Cognitive acceleration through science education: The CASE for thinking through science. *The Routledge International Handbook of Research on Teaching Thinking.* 378-387.

Pedrosa, I., Suárez-Álvarez y García-Cueto, E. (2013). Evidencias sobre la Validez de Contenido: Avances Teóricos y Métodos para su Estimación. *Acción psicológica*, *10*(2), 3-18.

Polya, G. (1986). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

Puga, J. L. (2012). Evolución de la Reflexión Cognitiva en la Universidad. *Divulgación Matemática*, *V*, 17–18.

Pugalee, D. K., Douville, P., Lock, C. R., & Wallace, J. (2002, September). Authentic Tasks and Mathematical Problem Solving. In *The Mathematics Education into the 21st Century Project: Proceedings of the International Conference-The Humanistic Renaissance in Mathematics Education* (pp. 303-306).

Santos Trigo, L. M. (1997). Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas. México, D.F.: Grupo Editorial Iberoamérica.

SEP (2017). Plan de estudios 2017. Educación obligatoria. México: Secretaría de Educación Pública. Recuperado de: https://www.gob.mx/cms/uploads/attachment/file/207252/Modelo_Educativo_OK.pdf

Shayer, M., & Adhami, M. (2007). Fostering cognitive development through the context of mathematics: Results of the CAME project. *Educational studies in Mathematics*, *64*(3), 265-291.

Shayer, M., Johnson, D., y Adhami, M. (1999). Does CAME work? (2) Report on key stage 3 results following the use of the cognitive acceleration in mathematics education, CAME, project in year 7 and 8. *The British Society for Research into Learning Mathematics, 19(2),* 79-84.

Sierra Gómez, H. (2013). *Aprendizaje activo como mejora de las actitudes de los estudiantes hacia el aprendizaje.* Pamplona, España: Universidad Pública de Navarra.

Sinayev, A. y Peters, E. (2015). Cognitive reflection vs. calculation in decision making. *Frontiers in psychology*, *6*, 532.

Smullyan, R. (2015). *Enigma de Scherezade* (8a ed.). Madrid, España: Gedisa.

Socas, M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico. *Investigación en Educación Matemática, XI*, 19-52

Tobin, K. G. y Capie, W. (1981). The development and validation of a group test of logical thinking. *Educational and phychological measurement*, *41*(2), 413-423.

Toplak, M. E., West, R. F. y Stanovich, K. E. (2014). Assessing miserly processing: An expansion of the cognitive reflection test. *Thinking & Reasoning*, 20, 147–168.

Tornero, B. (2014). La experiencia de usar un programa de aceleración cognitiva con futuros profesores de tres universidades chilenas. *Pensamiento Educativo: Revista de Investigación Educacional Latinoamericana*, *51*(2), 98–118.

Velasco, M. P. (2017). Facultad de Ciencias Físico Matemáticas. *Las Soluciones que dan los Alumnos a un Acertijo Matemático: Un estudio de Caso con los Participantes en el Concurso Estatal de Talentos en Física* (Tesis de Licenciatura, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla).

Vila A. y Callego M. L. (2009*). Matemáticas para Aprender a Pensar: El papel de las creencias en la resolución de problemas.* Madrid, España: Narcea.

Anexos

A.1 Test de Razonamiento Lógico (TRL)

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

«Test de razonamiento lógico»

INSTRUCCIONES: Para contestar cada pregunta marca la opción, que consideres correcta, en la hoja de respuestas que se te entrega. Por favor, no escribas procedimientos sobre este test. Asimismo, sigue los pasos que se indican:

1. Lee con cuidado el enunciado de cada pregunta.
2. Piensa detenidamente la respuesta haciendo los cálculos que estimes oportunos.
3. Escribe la respuesta en el recuadro correspondiente de la hoja de respuestas.

Ej. 12. $\boxed{b}$ Razón $\boxed{}$

4. Lee todos los razonamientos que se presentan como posibles explicaciones de la respuesta que has elegido.
5. Selecciona cuidadosamente la opción que consideres oportuna teniendo en cuenta el razonamiento que utilizaste en tu respuesta.
6. Señala en el recuadro correspondiente de la hoja de respuestas la letra que indique la opción que has elegido.

Ej. 12. $\boxed{b}$ Razón $\boxed{4}$

7. Si en algún momento quieres modificar la respuesta ofrecida, táchala y señala la nueva de la forma que se te indica a continuación.

Ej. 12. $\boxed{b}$ Razón $\boxed{\cancel{4}}$ 3

No olvides escribir tu nombre en la hoja de respuestas.

PREGUNTA 1

Se necesita exprimir 4 naranjas para obtener seis vasos de jugo. ¿Qué cantidad de jugo se podría obtener con seis naranjas? (Considera que todas las naranjas son del mismo tamaño)

a. 7 vasos
b. 8 vasos
c. 9 vasos
d. 10 vasos
e. Otra respuesta

Razón

1. El número de vasos y el número de naranjas estarán siempre en la relación 3 a 2.
2. Con más naranjas, las diferencias serán menores.
3. La diferencia entre las cantidades será siempre de dos.
4. Con cuatro naranjas la diferencia era dos. Con seis naranjas la diferencia sería dos más.
5. No se podría predecir.

PREGUNTA 2

Usando las mismas naranjas de la pregunta 1. ¿Cuántas naranjas se necesitarían para hacer 15 vasos de jugo?

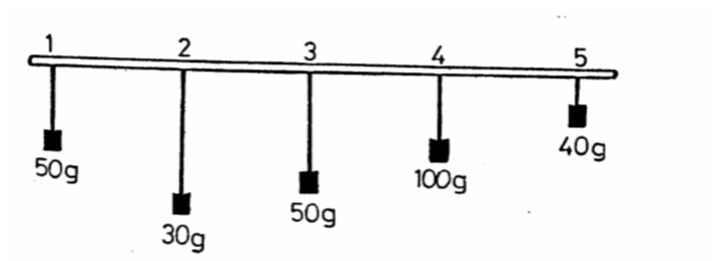
a. 7 naranjas y media
b. 9 naranjas
c. 10 naranjas
d. 13 naranjas
e. Otra respuesta

Razón

1. El número de naranjas y el número de vasos de jugo estarán siempre en la relación 2 a 3.
2. El número de naranjas será siempre menor que el número de vasos de jugo.
3. La diferencia entre las cantidades será siempre de dos.
4. El número de naranjas necesarias será la mitad del número de vasos de jugo.
5. No se podría predecir.

PREGUNTA 3

Supongamos que queremos hacer un experimento para averiguar si al modificar la longitud de un péndulo cambia también la cantidad de tiempo que tarda en oscilar de un lado a otro. ¿Qué péndulos deberíamos usar para realizar dicho experimento?



a. 1 y 4
b. 2 y 4
c. 1 y 3
d. 2 y 5
e. Todos

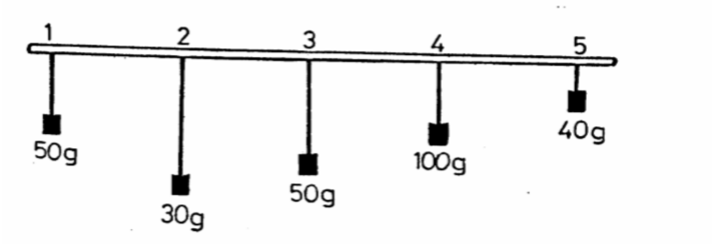
Razón

1. Compararíamos el péndulo más largo con el más corto.
2. Necesitaríamos comparar todos los péndulos entre sí.
3. Al aumentar la longitud tendríamos que disminuir el peso.

4. Los péndulos elegidos tendrían que tener todas las mismas longitudes y distinto peso.
5. Los péndulos elegidos tendrían que tener todos distinta longitud e igual peso.

PREGUNTA 4

Supongamos que queremos realizar un experimento para averiguar si al cambiar el peso del péndulo cambia también la cantidad de tiempo que tarda en oscilar de un lado a otro. ¿Qué péndulos tendríamos que usar para realizar dicha experiencia?



a. 1 y 4
b. 2 y 4
c. 1 y 3
d. 2 y 5
e. Todos

Razón

1. Compararíamos el péndulo más pesado con el más ligero.
2. Necesitaríamos comparar todos los péndulos entre sí.
3. Al aumentar el peso tendríamos que disminuir la longitud.
4. Los péndulos elegidos tendrían que tener diferente peso y la misma longitud.
5. Compararíamos péndulos de igual peso y distinta longitud.

PREGUNTA 5

Un jardinero compró un paquete que contenía 3 semillas de calabaza y 3 semillas de frijol. Si se extrae una semilla del paquete, ¿Cuál es la probabilidad de que ésta sea de frijol?

a. 1 de cada 2
b. 1 de cada 3
c. 1 de cada 4
d. 1 de cada 6
e. 4 de cada 6

Razón

1. Se necesitarían cuatro extracciones dado que las tres semillas de calabaza, podría suceder que se extrajesen seguidas.
2. Hay seis semillas entre las cuales ha de extraerse una de frijol.
3. De las tres semillas de frijol que hay se necesita extraer una.
4. La mitad de las semillas son de frijol.

5. Del total de seis semillas, además de la de frijol se podrían extraer tres de calabaza.

PREGUNTA 6

Un jardinero compró un paquete que contenía 21 semillas de diversas clases. La composición era la siguiente:

3 de flores pequeñas rojas	4 de flores pequeñas amarillas	5 de flores pequeñas naranjas
4 de flores grandes rojas	2 de flores grandes amarillas	3 de flores grandes naranjas

Si sólo ha de plantar una semilla, ¿cuál es la probabilidad de que la planta resultante tenga flores rojas?

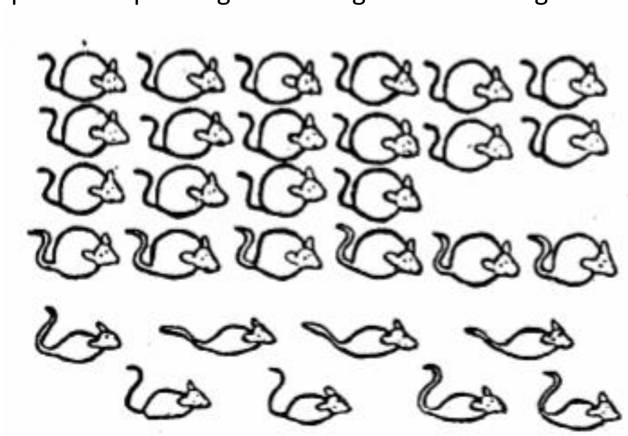
a. 1 de cada 2
b. 1 de cada 3
c. 1 de cada 7
d. 1 de cada 21
e. Otra respuesta

Razón

1. Ha de elegir una semilla entre aquellas que dan flores rojas, amarillas o naranjas.
2. 1/4 de las pequeñas y 4/9 de las grandes son rojas.
3. No importa que sean pequeñas o grandes. De las siete semillas rojas que hay se ha de elegir una.
4. Ha de seleccionar una semilla roja de un total de 21 semillas.
5. Siete de las 21 semillas darán flores rojas.

PREGUNTA 7

La siguiente figura representa una muestra de los ratones que viven en un campo. A partir de la figura, indica si es más probable que tengan cola negra los ratones gordos que los delgados.



a. Sí. Los ratones gordos tienen mayor probabilidad de tener cola negra que los delgados.

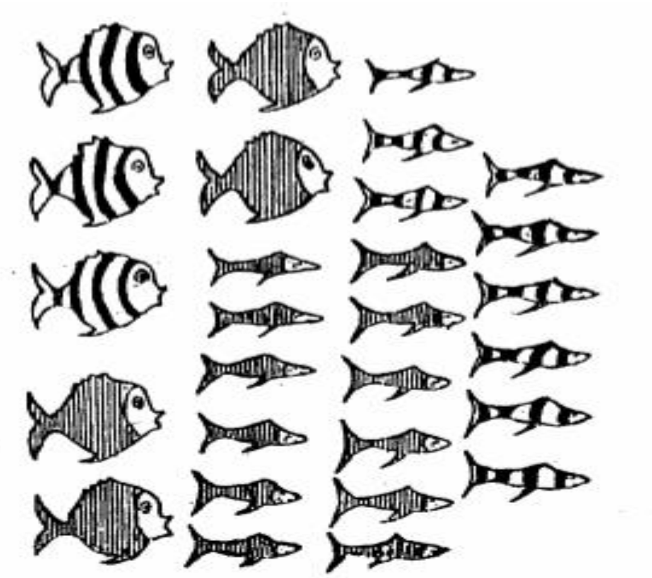
b. No. Los ratones gordos no tienen más probabilidad de tener cola negra que los delgados.

Razón

1. 8/11 de los ratones gordos tienen cola negra y 3/4 de los ratones delgados tienen cola blanca.
2. Tanto alguno de los ratones gordos como alguno de los ratones delgados tienen cola blanca.
3. De los treinta ratones, 18 tienen cola negra y 12 cola blanca.
4. Ni todos los ratones gordos tienen cola negra, ni todos los delgados tienen cola blanca.
5. 6/12 de los ratones con cola blanca son gordos.

PREGUNTA 8

¿Es más probable que tengan rayas anchas los peces gordos que los peces delgados?



a. Sí
b. No

Razón

1. Unos peces gordos tienen rayas anchas y otros estrechas.
2. 3/7 de los peces gordos tienen rayas anchas.
3. 12/28 tienen rayas anchas y 16/28 las tienen estrechas.
4. 3/7 de los peces gordos y 9/21 de los peces delgados tienen rayas anchas.
5. Algunos de los peces con rayas anchas son delgados y otros son gordos.

PREGUNTA 9

Tres estudiantes de cada uno de los cursos de 1^0, 2^0 y 3^0 de preparatoria son candidatos al consejo escolar. La representación estará constituida por un estudiante de cada curso. Cada votante debe considerar todas las combinaciones posibles antes de decidir su voto.

Dos posibles combinaciones serían Tomas, José y Pedro (TJP); e Isabel, Carmen y María (ICM).

Haz una lista con todas las combinaciones posibles usando los espacios que se ofrecen en la hoja de respuestas. Hay más espacios de los necesarios.

CONSEJO ESCOLAR

1^0 DE PREPA	2^0 DE PREPA	3^0 DE PREPA
Tomás (T)	José (J)	Pedro (P)
Isabel (I)	Carmen (C)	María (M)
Antonio (A)	Beatriz (B)	Luís (L)

PREGUNTA 10

Se prevé abrir en breve 4 tiendas en un nuevo centro comercial.

Optan por comprar los locales una peluquería (P), una farmacia (F), un supermercado (S) y una cafetería (C).

Cada uno de los negocios mencionados ha de ocupar uno de los locales previstos.

Una posible forma de ocupación sería PFSC.

Has una lista con todas las formas posibles de ocupación de los locales.

Hay más espacios en la hoja de respuestas de los que son necesarios.

1	2	3	4

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

«Hoja de respuestas»

Grado: _____ / Semestre: _____

Edad: Años cumplidos: __________ Meses cumplidos: __________.

Género: Hombre ( ) Mujer ( )

1._ ☐	**RAZON._** ☐
2._ ☐	**RAZON._** ☐
3._ ☐	**RAZON._** ☐
4._ ☐	**RAZON._** ☐
5._ ☐	**RAZON._** ☐
6._ ☐	**RAZON._** ☐
7._ ☐	**RAZON._** ☐
8._ ☐	**RAZON._** ☐

9._

10._

A.2 Test de Reflexión Cognitiva (TRC)

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

«Test de reflexión cognitiva»

Grado: _____ / Semestre: _____

Edad: Años cumplidos: __________ Meses cumplidos: __________.

Género: Hombre ( ) Mujer ( )

INSTRUCCIONES: Lee con cuidado el enunciado de cada pregunta y piensa detenidamente cómo llegar a la respuesta. Es importante que realices operaciones, dibujos, tablas, o lo que consideres pertinente para justificar tu respuesta.

1. Una raqueta y una pelota cuestan 1.10 euros en total. La raqueta cuesta 1.00 euro más que la pelota. ¿Cuánto cuesta la pelota?

La pelota cuesta __________ euros.

¿Cómo llegaste a tal respuesta?

2. Si 5 máquinas tardan 5 minutos en fabricar 5 piezas, ¿cuánto tardarán 100 máquinas en fabricar 100 piezas?

Las máquinas tardarán ___________ minutos.

¿Cómo llegaste a tal respuesta?

3. En un lago hay una zona cubierta de lirios. El área de lirios se hace el doble de grande cada día. Si el área de lirios tarda 48 días en cubrir el lago entero, ¿cuántos días tardarán los lirios en cubrir la mitad del lago?

Los lirios tardarán ________días.

¿Cómo llegaste a tal respuesta?

4. Iván puede beber un barril de agua en 6 días y María puede beber el mismo barril de agua en 12 días. ¿Cuántos días tardarán en beber tal barril de agua juntos?

Tardarán ______ días.

¿Cómo llegaste a tal respuesta?

5. Julio ha recibido tanto la decimoquinta calificación más alta como la decimoquinta calificación más baja en la clase. ¿Cuántos estudiantes hay en la clase?

Hay _____ estudiantes en la clase.

¿Cómo llegaste a tal respuesta?

6. Un hombre compra una mercancía por 60 pesos, la vende por 70 pesos, la compra de nuevo por 80 pesos y, finalmente, la vende por 90 pesos. ¿Cuánta ganancia logró obtener?

Su ganancia fue de _____ pesos.

¿Cómo llegaste a tal respuesta?

A.3 Hoja de trabajo para cada problema de la intervención

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

MΣM
Maestría en Educación Matemática
FCFM, BUAP

Problema:

Entender el problema:	**Elaborar plan:**
¿Entiendes todo lo que dice el problema? ¿Puedes escribir el problema con tus propias palabras? ______ En caso afirmativo, escríbelo. ¿Cuáles son los datos del problema? ¿Sabes a qué quieres llegar? ¿Hay suficiente información para resolver el problema? Explica por qué.	¿Es este problema similar a algún otro que hayas resuelto antes? ¿Qué estrategia(s) puedes usar para resolver el problema?
Ejecutar plan:	**Mirar hacia atrás:**
Respuesta: Justifica tu respuesta:	**Nota:** esta sección se contesta después de haber socializado las respuestas y procedimientos de solución con los compañeros del grupo. ¿Tu solución fue correcta? ¿Identificas una solución más sencilla? De ser así ¿cuál?

A.4 Análisis de normalidad de los resultados del TRL y TRC

A partir de los resultados iniciales y finales del TRL y TRC de los grupos experimentales y de control, se realizaron pruebas de normalidad con el Test de Shapiro-Wilk, debido a que la muestra del presente trabajo fue menor a 50 elementos.

Las pruebas se llevaron a cabo con el apoyo del software estadístico RStudio versión 3.6. Con un nivel de confianza (p-valor) mayor que .05 para aceptar la hipótesis nula, a partir de la prueba de hipótesis:

H_0: Los datos proceden de una distribución normal

H_A: Los datos no proceden de una distribución normal

Se obtuvieron los siguientes resultados.

- **Grupos experimentales**

	TRL		**TRC**	
	W	*P*	*W*	*P*
Inicial	.91876	.1611	.81756	.004705
Final	.93771	.3219	.93299	.2718

- **Grupos de control**

	TRL		**TRC**	
TRL	*W*	*P*	*W*	*P*
Inicial	.79037	.002035	.69505	.0001489
Final	.86237	.02083	.75681	.0007683

Por tanto, se concluyó que los resultados del TRL de los grupos experimentales cumplieron con el contraste de normalidad. No así, los resultados de los grupos de control que arrojaron P-valores menores a .05.

Por otro lado, a partir de los resultados del TRC de ambos grupos, se determinó la falta de normalidad de estos, a excepción de los resultados finales de los grupos experimentales.

A.5 Análisis de homocedasticidad de los resultados del TRL y TRC

A partir de los resultados del TRL y TRC de los grupos experimentales y de control, se realizaron pruebas de homocedasticidad con el F-Test y Test de Fligner-Killeen, para datos que proceden de una distribución normal y los que no, respectivamente.

Las pruebas se llevaron a cabo con el apoyo del software estadístico RStudio versión 3.6. Con un nivel de confianza (p-valor) mayor que .05 para aceptar la hipótesis nula, a partir de la prueba de hipótesis:

H_0: Los grupos tiene igual varianza

H_A: Los grupos no tienen igual varianza

Se obtuvieron los siguientes resultados.

- **Resultados iniciales vs finales: grupos experimentales**

TRL		**TRC**	
F	*P*	X^2	*P*
.31478	.03193	8.4994	.2037

Se concluye la falta de homocedasticidad en los resultados del TRL y el cumplimiento de la misma en los resultados del TRC.

- **Resultados iniciales vs finales: grupos de control**

TRL		**TRC**	
X^2	*P*	X^2	*P*
3.5916	.3091	2.4889	.2881

Se concluye que los resultados de ambas pruebas cumplen con el contraste de homocedasticidad.

- **Resultados iniciales: grupos experimentales vs grupos de control**

TRL		**TRC**	
X^2	*P*	X^2	*P*
1.8278	.6089	1.7254	.422

Se concluye que los resultados de ambas pruebas cumplen con el contraste de homocedasticidad.

- **Resultados finales: grupos experimentales vs grupos de control**

TRL		TRC	
X^2	*P*	X^2	*P*
1.3934	.7071	2.1683	.3382

Se concluye que los resultados de ambas pruebas cumplen con el contraste de homocedasticidad.

A.6 Análisis de diferencias estadísticamente significativas

Debido a que los datos del TRL y TRC no cumplieron, en su totalidad, con el contraste de normalidad y el supuesto de homocedasticidad, se aplicó la prueba de hipótesis no paramétrica de Wilcoxon (muestras apareadas e independientes) para el análisis de posibles diferencias estadísticamente significativas. Con la ayuda del software estadístico RStudio versión 3.6, considerando un nivel de confianza (p-valor) mayor que .05 para aceptar la hipótesis nula, a partir de la prueba de hipótesis:

H_0: La mediana de las diferencias de cada par de datos es cero.

H_A: La mediana de las diferencias entre cada par de datos es diferente de cero.

Se obtuvieron los siguientes resultados.

- **Grupos experimentales: inicio vs final**

TRL		TRC	
V	*P*	*V*	*P*
2	.01037	0	.00243

Debido a que el p-valor en ambos casos es menor que .05, se concluye que existen diferencias estadísticamente significativas entre los resultados iniciales y finales del TRL, al igual que entre los resultados iniciales y finales del TRC de los grupos experimentales.

- **Grupos de control: inicio vs final**

TRL		TRC	
V	*P*	*V*	*P*
33	1	12	.2117

Debido a que el p-valor en ambos casos es mayor que .05, se concluye que no existen diferencias estadísticamente significativas entre los resultados iniciales y finales del TRL, al igual que entre los resultados iniciales y finales del TRC de los grupos de control.

- **Grupos experimentales vs de control: inicio**

TRL		**TRC**	
W	*P*	*W*	*P*
162.5	.1726	166	.1205

Debido a que el p-valor en ambos casos es mayor que .05, se concluye que no existen diferencias estadísticamente significativas entre los resultados iniciales del TRL de ambos grupos. Al igual que con los resultados iniciales del TRC de ambos grupos.

- **Grupos experimentales vs de control: final**

TRL		**TRC**	
W	*P*	*W*	*P*
206.5	.002662	228	.0001309

Debido a que el p-valor en ambos casos es menor que .05, se concluye que si existen diferencias estadísticamente significativas entre los resultados finales del TRL de ambos grupos. De igual manera, se presentan diferencias estadísticamente significativas entre los resultados finales del TRC de ambos grupos.