BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

DISEÑO Y PRUEBA EMPÍRICA DE TAREAS MATEMÁTICAS AUTÉNTICAS BAJO LA TEORÍA DE PALM

TESIS
PARA OBTENER EL TÍTULO DE
MAESTRO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

PRESENTA
LIC. LUIS JOSÉ CRÚZ RAMÍREZ

DIRECTOR DE TESIS
DR. JOSÉ ANTONIO JUÁREZ LÓPEZ

CO-DIRECTOR DE TESIS
DR. DIONICIO ZACARÍAS FLORES

PUEBLA, PUE. DICIEMBRE 23

BUAP

DR. SEVERINO MUÑOZ AGUIRRE
SECRETARIO DE INVESTIGACIÓN Y
ESTUDIOS DE POSGRADO, FCFM-BUAP
P R E S E N T E:

Por este medio le informo que el C:

CRUZ RAMÍREZ LUIS JOSÉ

Estudiante de la Maestría en Educación Matemática, ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 08 de diciembre de 2020, con la tesis titulada:

"DISEÑO Y PRUEBA EMPÍRICA DE TAREAS MATEMÁTICAS AUTÉNTICAS BAJO LA TEORÍA DE PALM"

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

A T E N T A M E N T E.
H. Puebla de Z. a 18 de mayo de 2021

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA · 1578 · FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS · SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y ESTUDIOS DE POSGRADO

Lidia Adg R.

DRA. LIDIA AURORA HERNÁNDEZ REBOLLAR
COORDINADORA DE LA MAESTRÍA
EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA.

DRA´LAHR/l´agm*

Facultad
de Ciencias
Físico Matemáticas

Av. San Claudio y 18 Sur, edif. FM1
Ciudad Universitaria, Col. San
Manuel, Puebla, Pue. C.P. 72570
01 (222) 229 55 00 Ext. 7550 y 7552

Esta Investigación se realizó gracias al financiamiento del

Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT),

De diciembre de 2018 a diciembre 2020.

Nº de CVU 963319

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a Dios por permitirme cumplir una meta más en mí formación, por ser permanentemente mi guía en los momentos más difíciles. A mis amigos y profesores por su apoyo y paciencia, por su paciencia y los desvelos compartidos, por sus aportaciones y ayuda en cada momento, por motivar cada día el concluir con éxitos cada uno de los trabajos.

A mi madre y hermanas por estar y compartir momentos aún a la distancia, por su apoyo en cada uno de mis proyectos, por sus consejos y palabras de aliento que me motivaron a continuar cada día con el trabajo. A todos mis familiares por apoyarme y motivarme siempre.

A mis asesores:

Dr. José Antonio Juárez López agradezco su dedicación y paciencia, por sus consejos y valiosas aportaciones a este trabajo, por su experiencia y anécdotas que alimentaban la ilusión y ambición de concluir este trabajo.

Dra. Estela de Lourdes Juárez Ruíz por su comprensión y apoyo incondicional.

RESUMEN

En la enseñanza de las matemáticas se recomienda el vínculo de las tareas que se realizan en el aula con la vida cotidiana, para fomentar el desarrollo de la competencia matemática. Una posibilidad para lograrlo es empleando tareas auténticas, ya que el trabajar con este tipo de tareas brinda a los estudiantes un alcance de utilidad de las matemáticas a aprender en el salón de clases con su vida real, es por ello que en el presente trabajo se realizó un análisis con la Teoría de las Situaciones Auténticas, propuesta por Torulf Palm para determinar si los problemas contextualizados planteados en libros de texto de matemáticas en secundaria y primer año de bachillerato analizados se pueden considerar auténticos. Se analizaron 30 libros de texto utilizados en escuelas secundarias mexicanas y 15 de bachilleratos también mexicanos. En el caso de secundaria nos detuvimos en las contextualizaciones del Teorema de Pitágoras, en bachillerato analizamos el tema de cálculo de área y perímetro de figuras geométricas. Mientras que, en el caso de Cuba, donde en cada nivel de enseñanza se utiliza un libro de texto de Matemática, analizamos el de décimo grado, específicamente las contextualizaciones de la resolución de triángulos rectángulos aplicando razones trigonométricas.

El objetivo de la presente investigación fue identificar en libros de textos de tercer año de secundaria, primer año de bachilleratos mexicanos, y de primer año de bachilleratos cubanos una contextualización artificial en cada uno de ellos, y a partir de ello, diseñar cuatro tareas auténticas que cumplan con los aspectos y sub-aspectos planteados en la teoría de Torulf Palm. También se realizó investigación de tipo documental en el caso de la tarea: el poste de teléfono, para verificar que la información y los datos fueran reales, así como los métodos o estrategias de solución, que puede utilizar un alumno, coincidieran con el de las personas involucradas en la situación planteada.

Luego de diseñadas las cuatro tareas auténticas se implementaron dos de estas en un grupo de 35 estudiantes cubanos, cuyas edades se encuentran en el intervalo de 15 a 16 años

Palabras claves: contextualización, tarea, problemas verbales matemáticos, libro de texto, tarea auténtica.

INTRODUCCIÓN

La capacidad de resolver problemas se ha convertido en el centro de la enseñanza de la Matemática en la época actual, lo cual muestra la necesidad de redactar los problemas de modo que se conecten con los conocimientos previos del alumnado, y sus centros de interés.

En este sentido es imprescindible destacar la importancia de la situación descrita en el texto del problema, siendo esta una de las dificultades encontradas al efectuar una revisión pormenorizada de los libros de textos de matemática escolar, utilizados en secundaria y bachillerato en las escuelas mexicanas, y cubanas, donde no es difícil identificar una inadecuada cultura de la contextualización.

En los materiales escolares de secundaria y bachillerato se proponen tareas de muchos tipos, entre ellas las tareas textuales que tratan de reflejar situaciones que deben ser resueltas utilizando los contenidos matemáticos del tema correspondiente, y las que simulan situaciones reales donde puede que ninguna de esas tareas sea la preocupación usual de un estudiante de secundaria, o bachillerato. En concreto, la situación puede ser real pero no cercana a ellos, en ocasiones la pregunta tiene poco sentido en la vida real, por otra parte, los datos parecen poco verídicos o no es claro que generen preocupación por conocerlos. Además, tampoco parece existir un objetivo claro en cada una de ellas ni que el contexto presentado anime a resolverlas.

Para intentar formalizar y ayudar a aminorar algunos de los aspectos mencionados anteriormente, en la presente investigación se realizó un análisis de tareas propuestas en libros de texto de tercer año de secundaria y primer año de bachillerato mexicanos, así como los utilizados en el primer año de bachilleratos cubanos con la finalidad de detectar aquellas que se consideren carentes de autenticidad de acuerdo con la teoría de Torulf Palm. En el caso de las tareas matemáticas propuestas en los textos de tercer año de secundarias mexicanas analizamos las contextualizaciones del Teorema de Pitágoras, en primero de bachillerato las referentes al cálculo de área de figuras geométricas, y en décimo grado de bachilleratos cubanos, las contextualizaciones de resolución de triángulos rectángulos aplicando razones trigonométricas.

Luego de realizado el análisis de las tareas seleccionadas, diseñamos cuatro Tareas Matemáticas Auténticas que cumplen con la totalidad de los aspectos y sub-aspectos planteados por Palm (2009). En un tercer momento de la investigación se implementaron dos de estas cuatro tareas en un grupo de 35 estudiantes, que cursan el décimo grado en un bachillerato cubano. A continuación, mostramos cómo quedó estructurada la presente investigación.

En el primer Capítulo, llamado marco epistémico, encontraremos algunos estudios e investigaciones que se han realizado en torno a los libros de texto, así como la importancia que tiene este material para los docentes, pues lo consideran como su principal herramienta dentro del salón de clases. También podremos ver algunas investigaciones en las que nos apoyamos para la definición de términos, la diferencia entre tarea y secuencia didáctica, así como la diferencia entre ejercicios, actividades y tareas, esto debido a la extensión de una de las tareas diseñadas. Se mencionan las preguntas de investigación y los objetivos.

El Capítulo II, referente al marco teórico, hace alusión a varios trabajos para acentuar la importancia de los libros de texto en la enseñanza de las matemáticas. Se relata la utilidad de las tareas matemáticas en el salón de clases. También se podrá ver la funcionalidad y como se tratan los problemas verbales matemáticos en los libros de texto, y cómo se han querido insertar las tareas matemáticas auténticas en los textos. Se plantea la teoría propuesta por Torulf Palm, y cada uno de sus aspectos: A) *evento, B) pregunta, C) información/datos, D) presentación, E) estrategias de solución, F) circunstancias, G) Requisitos de solución y H) Propósito en el contexto figurativo*, que se utilizaron para indicar si las tareas propuestas son auténticas. Luego, para cerrar este capítulo se nombran y describen los elementos que se tuvieron en cuenta para el diseño de las tareas.

El capítulo III referente al método plasma el proceso que se siguió para realizar el análisis de las tareas seleccionadas con la Teoría de Palm, así como la manera y utilidad de la investigación documental que consistió en verificar que la problemática presentada fuese algo que pudiese suceder en la vida real, y analizar si los datos presentados cumplen con las condiciones de cada situación. Se describe con qué fin se realiza el diseño de las tareas, y se especifica sobre la población de estudio.

En el Capítulo IV se analiza la autenticidad de tres problemas propuestos en los libros de texto antes mencionados mediante la teoría de Torulf Palm, tomando en cuenta cada uno de los ocho aspectos con los que cuenta la teoría. Se explica detalladamente cada aspecto con el problema planteado para determinar si el problema es carente de autenticidad. El análisis realizado se compara con los documentos relacionados con los problemas, para identificar la veracidad de los datos proporcionados, y que proporcionarán las nuevas consideraciones e información para crear las nuevas tareas que son consideradas auténticas.

Se diseñaron cuatro tareas teniendo en cuenta todos los aspectos y sub-aspectos de la Teoría de Palm, y los elementos para el diseño de tareas propuestos por Sullivan et al. (2015). En cuanto a la investigación documental, la información fue utilizada para que las tareas presentadas fueran auténticas, de esta manera se esperaba que al proponer y trabajar con estas tareas los estudiantes descubrieran el significado de los temas vistos dentro del salón de clases, y lograran notar que tienen una verdadera aplicación en su vida cotidiana.

En el quinto capítulo, nombrado implementando y analizando el grado de aceptación por parte de los estudiantes, se describe el papel del profesor en el momento de implementar dos tareas de las cuatro diseñadas, así como las alternativas que se propusieron para que el investigador pudiera estar presente y no interfiriera negativamente en el proceso de ejecución. También se podrá ver cómo se llevó a cabo la familiarización de los estudiantes con las nuevas tareas, para posteriormente pasar a la ejecución de estas. Para ello se programaron cuatro sesiones de resolución de varios problemas del libro de texto que utilizan en su día a día anteriores a la implementación, la mitad de estos problemas los resuelven en equipos y luego la otra mitad de manera individual.

Posteriormente se realizó el análisis de los resultados y el grado de aceptación por parte de los estudiantes, mediante entrevistas semiestructuradas, así como la revisión de sus respuestas y estrategias utilizadas. Luego, para cerrar el capítulo, se proponen algunas consideraciones que nos permiten iniciar un camino hacia la creación de un modelo de diseño de Tareas Matemáticas Auténticas bajo la perspectiva de la Teoría de Palm, algunas investigaciones sobre el diseño de tareas, los seis criterios de idoneidad destinados a facilitar el análisis de tareas y los cinco dilemas de diseño de tareas para indicar la jerarquía de consideraciones de diseño propuestos por Sullivan et al. (2015).

CAPÍTULO I. MARCO EPISTÉMICO

1.1 Planteamiento del problema

Uno de los principales objetivos de la escuela es proporcionar herramientas y procurar la preparación necesaria para que las personas puedan desempeñarse satisfactoriamente de acuerdo con objetivos de carácter social.

Según apunta el Programme for International Student Assessment (PISA) en su informe del 2012, la competencia matemática es la capacidad personal para formular, emplear e interpretar las matemáticas en distintos contextos. Incluye el razonamiento matemático y la utilización de conceptos, procedimientos, datos y herramientas matemáticas para describir, explicar y predecir fenómenos. Ayuda a las personas a reconocer el papel que las matemáticas desempeñan en el mundo y a emitir los juicios y las decisiones bien fundadas que necesitan los ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos.

A su vez, la competencia matemática es una capacidad que se relaciona con el éxito en la educación futura, la vida cotidiana y el trabajo, ya que permite al individuo participar de manera eficaz en la sociedad (Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS, 2011). Relacionado con esto, en los resultados clave de PISA 2018 en México, se reveló que:

… Los estudiantes también respondieron un cuestionario de contexto, que demoró alrededor de 35 minutos en ser completado. El cuestionario buscaba información sobre los propios estudiantes, sus actitudes, disposiciones y creencias, sus hogares y sus experiencias escolares y de aprendizaje. Los directores de cada escuela también respondieron un cuestionario que abordaba manejo y organización escolar y el ambiente de aprendizaje (Nota País, 2019, p. 11).

Vinculado a lo anterior podemos acentuar que, particularmente, el estudio de la matemática en las instituciones de educación, específicamente en la enseñanza media y media superior, pretende que las personas sean capaces de desenvolverse en una sociedad tecnológicamente avanzada, lo cual incluye, entre otras cosas, la capacidad para razonar lógicamente, resolver problemas no rutinarios y comunicarse por medio de ideas fundamentadas en las matemáticas (Sánchez, 2005). En este sentido, cobra especial relevancia el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática, pues contempla la formación de determinadas habilidades mentales en el alumno.

1.1.1 Antecedentes y Justificación

Teniendo en cuenta que, la capacidad de resolver problemas se ha convertido en el foco de la enseñanza de la Matemática en los tiempos actuales, es necesario entonces contar con una concepción de su enseñanza, que ponga en primer lugar la capacidad de resolución de problemas y el desarrollo del pensamiento lógico. Según apuntó Mayer (2010), para resolver problemas el alumnado debe poner en marcha cuatro grandes procesos cognitivos. Estos procesos son: traducción del problema, integración del problema, planificación, supervisión de la solución, y ejecución de la solución.

Primeramente, el alumno o alumna debe comprender de qué trata el problema y traducir el enunciado en una representación interna. Para ello se necesita conocimiento lingüístico y conocimiento fáctico (relativo al mundo). Los resultados obtenidos en la investigación de Gómez-Ferragud, et al. (2013) apuntan a que la falta de familiaridad es una característica importante en la resolución de problemas verbales.

Lo anterior nos muestra la necesidad de redactar los problemas de modo que se conecten con el conocimiento previo del alumnado (conocimiento fáctico) y sus centros de interés. Por otro lado, Lesh y English (2013) afirman que se deben tener en cuenta dos aspectos para la instrucción en matemáticas desde primaria: uno de ellos es que el alumnado encuentre el sentido del problema conectándolo con sus propias experiencias y, por otro lado, se debe saber que existen diferentes maneras de resolver un problema teniendo ellos en sus manos la decisión de qué alternativa elegir.

En principio se asume que hay que considerar en cada momento el carácter práctico de la Matemática, que hace importante su enseñanza. Esta ciencia al trabajar diferentes contenidos responde a determinados fines y propósitos de la educación, se ratifica además como un tipo de saber que ha sido recibido desde la educación primaria; pero que aún en secundaria y preparatoria presentan dificultades.

En la resolución de problemas verbales de matemáticas los estudiantes se enfrentan a la tarea de comprensión textual, previa a la matematización y a la aplicación de algún algoritmo. Prediger y Krägeloh (2015) presentaron una revisión amplia de investigaciones sobre dificultades estudiantiles con problemas matemáticos y diferentes estrategias didácticas de andamiaje diseñadas para ayudarles a superarlas.

En otra investigación sobre este tema Falcón et al. (2017) se interesaron en estudiar aspectos relacionados con la resolución de problemas en alumnos de tercero de educación secundaria obligatoria y, especialmente, centraron dicha investigación en la fase de comprensión del problema, ya que un elemento fundamental del proceso de resolución es la comprensión de la situación cualitativa descrita por el enunciado del problema (Vicente, et al. 2008).

Respecto a la comprensión de problemas, es imprescindible destacar la importancia de la situación descrita en el texto del problema, siendo esta una de las dificultades encontradas al efectuar una revisión pormenorizada de los libros de textos de matemática escolar, utilizados en secundaria y bachillerato en las escuelas mexicanas.

Para el desarrollo del presente trabajo se han definido tres categorías que serán desarrolladas a lo largo del proceso, éstas fueron definidas a partir de los objetivos de la investigación.

En primer lugar, se tomará como punto de partida identificar una tarea carente de autenticidad en los libros de textos de matemática para estudiantes de tercero en secundaria, y de primero en bachillerato respectivamente. En segundo lugar, diseñar las tareas asegurando que cumplan con los aspectos definidos por Palm, y en tercer lugar implementar una de estas para analizar los resultados.

Teniendo presente que desde el momento en que la tarea describe una situación de la vida real se convierte en un problema verbal, se pretende hacer evidente la relación entre la vida cotidiana y las matemáticas, con lo cual se busca que los estudiantes sean cada vez más conscientes de sus procesos de aprendizaje.

1.1.2 Deficiencias en la evidencia

Los libros de texto escolares han recibido una creciente atención en la investigación internacional de la educación matemática en las últimas décadas. Sin embargo, aún se encuentra en una etapa temprana de desarrollo, por lo que solo existen pocas investigaciones en diversos ámbitos sobre los libros de texto (Fan, 2013). Una pequeña parte de esta investigación se ha centrado recientemente en el análisis de los problemas que simulan situaciones auténticas (Fernández, et al. 2013), específicamente en Crúz, et al. (2020) se analizó la autenticidad de cinco tareas matemáticas que se contextualizan en presumibles situaciones reales al utilizar el teorema de Pitágoras.

En especial la investigación de Lino-Mellado (2017) resulta de gran importancia porque representa el primer análisis de libros de texto mexicanos, y aunque la investigación es parcial (dado que incluye únicamente libros de segundo grado de educación secundaria), sus conclusiones aportan abundante información sobre el panorama de este tipo de problemas en textos mexicanos.

En este sentido se ha venido trabajando desde hace poco tiempo, pero de manera ardua, ya son varias las investigaciones realizadas donde se mantuvo esta línea, pero se han centrado solo en revisar libros de textos para identificar tareas matemáticas contextualizadas artificialmente y a partir de ahí diseñar nuevas tareas que si cumplan con los aspectos indicados en la teoría de Palm. No se ha logrado aún llevar estas tareas al salón de clases.

1.1.3 Definición de términos

A partir de la revisión de la literatura respecto al tema de tarea, se carece de una definición unánime, las tareas son las propuestas de trabajo que hace el docente y las actividades son las acciones que realiza el alumno para poder elaborar lo que cree que se le pide, no existiendo tareas universales que activen todos los tipos de aprendizaje (Goñi, 2008).

En el contexto de la enseñanza de las Matemáticas, Herbst (2012) define la tarea como unidades de significado determinadas en la observación del trabajo matemático que se realiza en el aula, constituyendo un contexto práctico en el que los alumnos razonan sobre las herramientas matemáticas asociadas a un problema. Para este autor, la tarea planteada debe encaminarse a que los alumnos trabajen generando conocimiento.

Esta definición nos acerca un tanto a otra que se abordará en el presente trabajo, la cual permitirá identificar cuándo un problema matemático verbal simula una situación auténtica. En este trabajo se entenderá como problemas que simulan situaciones auténticas a aquellos problemas con "descripciones textuales de situaciones que se asumen comprensibles para el lector [estudiante], con lo cual las preguntas matemáticas pueden ser contextualizadas y proveen, en forma conveniente, una posible conexión entre la abstracción de las matemáticas puras y sus aplicaciones a fenómenos del mundo real" (Verschaffel, Greer, & De Corte, 2000, pág. ix).

Aunque la inadecuada cultura de la contextualización en los libros de texto de matemáticas se ha criticado desde hace tiempo (Pollak, 1969), ese tema todavía es bastante actual. Por suerte, en los últimos años se ha incrementado la cantidad de estudios teóricos y empíricos en que se consideran diferentes maneras de diseñar los problemas que se apoyan en los contextos reales y cómo esos tipos de problemas promueven el auténtico aprendizaje matemático de los estudiantes (Kaiser et al. 2006; Kaiser y Schwarz, 2010).

Lo que permite que se utilice la definición proporcionada por Newmann, (1988). Él introdujo el término autenticidad en el aprendizaje y la evaluación; describió las cualidades intelectuales consideradas necesarias para muchos logros humanos significativos más allá del éxito en la escuela; siete normas para tareas (incluidas las tareas matemáticas) que promueven el "logro auténtico", como el problema conectado al mundo real.

Se trata de una definición amplia que incluye tareas matemáticas puras "vestidas" en un contexto del mundo real, que para su solución simplemente requieren que los estudiantes "desnuden" estas tareas y las resuelvan. También incluye tareas que requieren que los estudiantes participen en el ciclo completo de modelado matemático.

La revisión de varias contextualizaciones que muestran libros de texto utilizados en secundarias mexicanas y bachilleratos, tanto mexicanos como cubanos, proporcionó que se identificaran tareas metamatemáticas convertidas en problemas verbales simulando una situación de la vida real, pero carentes de autenticidad, es decir, disfrazadas en un contexto artificial, lo que permitió identificar como **problema de investigación:** El insuficiente número de tareas auténticas que poseen los libros de texto de matemática, para estudiantes de secundaria y bachillerato en las escuelas mexicanas y cubanas.

1.1.4. Diferencia entre tarea y secuencia didáctica

Debido a la extensión de las tareas que fueron diseñadas en esta investigación, nos propusimos dejar claro, que existe una diferencia bien definida entre lo que es una tarea, y lo que es una secuencia didáctica, en el apartado anterior del presente capítulo nombrado: Definición de términos, se presentó la definición de tarea. Luego nos planteamos presentar las definiciones de secuencia didáctica, dadas por cuatro autores.

La secuencia didáctica según Pitluk (2006) se entiende como *"La organización de diferentes actividades pensadas para favorecer determinados conocimientos o competencias a través de propuestas que posibilitan diferentes acercamientos"* (p. 10), la autora nos indica que podemos profundizar en un tema, incluso varias veces para volver a realizar lo hecho desde otra perspectiva, puede referirse a un área formativa en específico o también se puede integrar con otras áreas. Tiene la intención de generar aprendizaje relacionados (no encontrados) que logre imprimir sentido y riqueza a las acciones.

Por otra parte, para Frade (2008) "Es la serie de actividades que, articuladas entre sí en una situación didáctica, desarrollan la competencia del estudiante. Se caracterizan porque tienen un principio y un fin, son antecedentes con consecuentes" (p.11). Para Zavala (2008) *"*Son un conjunto de actividades ordenadas, estructuradas, y articuladas para la consecución de unos objetivos educativos que tienen un principio y un final conocidos tanto por el profesorado como por el alumnado*"*. (p.16). También se propone como "Conjuntos articulados de actividades de aprendizaje y evaluación que, con la mediación de un docente, buscan el logro de determinadas metas educativas, considerando una serie de recursos*"*. (Tobón, et. al. 2010, p. 20*).* Ahora refiriéndonos a las tareas, podemos decir que estas contienen actividades, pero van más allá y no se quedan sólo en eso.

1.1.5 Ejercicios, actividades y tareas

Tanto los ejercicios, las actividades, como las tareas son importantes, la decisión la tomamos en función del objetivo que queramos trabajar en cada clase. Por ello, es conveniente que sepamos qué estamos haciendo. La tabla siguiente es útil para analizar si lo que planteamos son actividades o tareas. Lo importante no es sólo saber si estamos haciendo actividades o tareas, sino tener claro qué objetivo perseguimos: para que los alumnos aprendan un procedimiento (por ejemplo, utilizar un instrumento) tendremos que diseñar actividades (más sencillas, repetitivas, para que se adquiera la destreza); pero si queremos que los estudiantes adquieran competencias básicas, tendremos que programar tareas.

Tabla 1**.** Diferencias entere actividades y tareas.

ACTIVIDADES	**TAREAS**
Cerradas: tienen una solución.	Abiertas: admiten varias soluciones o formas de hacerlas.
Uniformes: consideran al alumnado homogéneo.	Flexibles: se adaptan a diferentes estilos y ritmos de aprendizaje.
Sin contextualizar: no tienen una relación con ningún contexto (personal, social, …)	Contextualizadas: se presentan dentro de un contexto concreto.
Desconectadas de la realidad y de los intereses del alumno.	Conectan con la realidad, con la vida cotidiana, con los intereses del alumnado.
Simples: Movilizan alguna habilidad o proceso mental sencillo.	Complejas: Movilizan recursos personales diversos.
No trabajan directamente CCBB.	Sirven para desarrollar Competencias Básicas.
Pueden hacerse automáticamente.	Implican reflexión.
Tratan de que se adquiera una estrategia, se asimile un contenido.	Tienden a la resolución de un problema, y fundamentalmente, a la elaboración de un producto.

Tabla obtenida de Recurso 2.1.1: Documento. Ejercicios actividades y tareas (Alcalá 2015)

1.1.6 Preguntas de investigación

Conociendo que el libro de texto es un medio por el cual se construye el consenso educativo, que sirve para introducir una ideología y para legitimar contenidos y formas específicas del conocimiento escolar. Ratificamos que, el análisis del libro de texto o manual escolar es un recurso fundamental para la investigación educativa en la medida en que brinda visiones institucionalizadas del conocimiento que con frecuencia suelen ser distantes de los estudiantes (Cantoral, et al. 2015).

Son muy variados los tipos de problemas verbales que aparecen en los libros de texto de matemática, debido a que, la capacidad de resolver problemas se ha convertido en el centro de la enseñanza de la matemática, es aquí donde cobra importancia el tema a investigar, teniendo en cuenta que desde hace pocos años se vienen realizando investigaciones relacionadas con problemas contextualizados con la vida real (situaciones auténticas), y en la búsqueda de información sobre dicho tema se ha podido identificar que es un campo dentro de la investigación educativa poco explorado, aquí es posible plantear las preguntas de investigación:

¿Cómo analizar un problema del contexto real que se propone en algunos libros de texto utilizados por los estudiantes que cursan el tercer año de secundaria en México, el primer año de bachillerato en México y el décimo grado en Cuba?

¿Qué aspectos debemos tener en cuenta para diseñar una tarea matemática auténtica aplicando la Teoría de Palm?

¿Qué aspectos se deben tener en cuenta para implementar una tarea matemática auténtica?

1.2 Objetivos

● Identificar en los libros de textos de tercero para secundaria en México, primero de bachillerato en México y de décimo grado en Cuba, una contextualización carente de autenticidad.

● Diseñar cuatro tareas matemáticas auténticas, apoyándonos en el análisis obtenido con la Teoría de Palm, así como los cinco dilemas y los seis criterios para el diseño y análisis de tareas, utilizando la investigación documental en los casos pertinentes.

● Analizar el desarrollo de los conocimientos, resultados, y el grado de aceptación de los estudiantes.

1.3 Delimitación del objeto de estudio

El objeto de estudio fue inicialmente las tareas incluidas en libros de texto de matemática que utilizan los alumnos de tercero en secundaria y primero de bachillerato en las escuelas mexicanas y cubanas. En el caso de las escuelas cubanas fueron específicamente las tareas incluidas en los libros de décimo grado, en los cuales se identificaron tareas matemáticas convertidas en problemas verbales, pero que no cumplían con los aspectos de la teoría de Palm, para que fuesen consideradas verdaderamente tareas auténticas.

Luego, el segundo objeto de estudio pasaría a ser el diseño de las tareas matemáticas auténticas aplicando la Teoría de Palm y, por último, el impacto que podrían tener estas tareas en el aprendizaje de los estudiantes. Para ello se implementaron dos tareas en un grupo de estudiantes que cursan el primer año en un bachillerato cubano, los cuales serán los encargados de resolver las nuevas tareas matemáticas diseñadas, de modo que se manifieste lo planteado en el Programme for International Student Assessment (PISA) en su informe del 2012, donde se planteó que la competencia matemática es “La capacidad personal para formular, emplear e interpretar las matemáticas en distintos contextos.

CAPÍTULO II. MARCO TEÓRICO

El presente capítulo quedará estructurado de la manera siguiente, primero se describirá la literatura de investigación revisada, la cual está relacionada con el análisis de los libros de texto de matemática y las tareas contenidas en éstos, bajo la perspectiva de la conexión entre las tareas matemáticas y la vida cotidiana. Posteriormente, se describirá y planteará la teoría que lo sustenta.

2.1 Los libros de textos en la enseñanza de las matemáticas

Uno de los pilares básicos sobre los que se sustenta la acción docente, en cualquier nivel educativo, es el libro de texto. Resulta hoy por hoy incuestionable su poderosa influencia en el trabajo de aula, tanto para los profesores como para los alumnos, constituyéndose en bastantes ocasiones como el referente exclusivo del saber científico.

A pesar de la incorporación en la enseñanza de las matemáticas de material multimedia, software informático y demás recursos de las nuevas tecnologías, los libros de texto escolares son los materiales que los alumnos transportan en sus mochilas y el que la mayoría de los profesores manda abrir cuando comienza una nueva clase. Los libros de texto continúan siendo uno de los soportes fundamentales de información de los profesores, y en muchas ocasiones los principales materiales de apoyo para la enseñanza.

Al ser el recurso más utilizado, los libros de texto tienen gran influencia en la adquisición de conceptos científicamente aceptados, pero también pueden reforzar ideas alternativas de los estudiantes y contribuir a causar dificultades de aprendizaje (Perales, 2000).

El libro de texto no es significativo sólo por el conocimiento de la materia que aporta, sino también por las estrategias que facilitan la planificación y desarrollo de la enseñanza al profesor (Serrado, 2000). Boostrom (2001) confirmó esta idea, afirmando que: “el papel principal de un libro de texto no es presentar información, pero sí apoyar la instrucción. El libro de texto adquiere el propósito de crear condiciones de aprendizaje” (p. 242).

Por otra parte, Occeli y Valeiras (2013), indicaron que “los libros de texto constituyen herramientas mediadoras que traducen y concretan aquellos significados incluidos en el currículo prescripto por los organismos gubernamentales y que lo hacen a través de una presentación didáctica” (p. 134).

El libro de texto es una herramienta polivalente que tiene que ser explotada por los estudiantes, pero también por los docentes: "[debe] suministrar a la vez en proporciones variadas un contenido, métodos, ejercicios, una documentación, especialmente icónica, abundante y diversa." (Haby, 1997, p. 25). Monterrubio y Ortega, (2011) consideran los libros de texto diseñados para que el alumno haga uso contando con la ayuda del profesor que servirá de guía.

Investigadores como Fan y Kaeley (2000) indicaron que los profesores que utilizan diferentes tipos de libros de texto desarrollan distintos estilos de estrategias de enseñanza, que ayudan a los alumnos a tener mayor diversidad de problemas planteados. Afirmaciones como estas son las que han provocado que el docente crea que al darle mayor utilidad al libro de texto su enseñanza logrará un mejor aprendizaje en los alumnos. Sería bueno destacar que muchas de las tareas que aparecen en los libros de textos carecen de lo que se pretende, para lograr que el alumno se sienta atraído por su resolución.

2.2 Las tareas matemáticas

En el aula de Matemáticas se realizan actividades de diversos tipos y en diversos momentos incluyendo, por ejemplo, las utilizadas para introducir un tema o evaluar los conocimientos adquiridos. A todas ellas las denominamos tareas. En los últimos años se está dedicando mucha atención al tipo de tareas que se realizan en la enseñanza de matemáticas. Por ejemplo, en el año 2013, la Conferencia 22 de la Comisión Internacional de Enseñanza de Matemáticas (International Comission on Mathematical Instruction, ICMI) tuvo como objetivo la propuesta de tareas en Educación Matemática.

En concreto, definieron tarea a todo aquello que el profesor utiliza para realizar demostraciones matemáticas, para el seguimiento del aprendizaje del estudiante o para solicitar que los estudiantes hagan algo. En este sentido, el término tarea abarca, por ejemplo, la realización de ejercicios rutinarios o repetitivos, la construcción de objetivos o ejemplos que refuercen las definiciones, o la resolución de problemas (Watson et al. 2013).

También se entiende por tarea a cada una de las demandas estructuradas que un profesor plantea a los alumnos, que movilizan su conocimiento sobre un tema determinado, implican que el estudiante ponga en juego su conocimiento sobre conceptos y procedimientos, activan sus competencias, contribuyen a su desarrollo, y requieren su reflexión sobre el uso de las matemáticas (Lupiáñez, 2015). Esta se acerca más a la definición que se utiliza en el anterior capítulo del presente trabajo.

En otro sentido, la nueva ley general de educación DOF 30-09-2019 incluye: "El alumnado es el centro y la razón de ser de la educación. El aprendizaje en la escuela debe ir dirigido a formar personas autónomas, críticas, con pensamiento propio" (p. 43). Ello implica, entre otras cosas, conectar los aprendizajes con contextos reales.

La conexión de las tareas matemáticas con la vida cotidiana ha sido objeto de interés en los últimos años en diferentes sentidos. Por ejemplo, Lupiáñez (2015) sugirió, entre otras recomendaciones para una enseñanza funcional que promueva el desarrollo de la competencia matemática de los escolares (p. 498): "Contextualizar el aprendizaje de las matemáticas en tareas auténticas y significativas para los alumnos", "orientar el aprendizaje de los alumnos hacia la comprensión y la resolución de problemas" o "Vincular el lenguaje formal matemático con su significado referencial".

2.3 Los problemas verbales matemáticos en los libros de texto

El propósito de aprender a resolver los problemas verbales matemáticos en el ámbito escolar, es saber aplicarlos en situaciones que el alumno podría encontrarse en su día a día, de manera que los conocimientos matemáticos aprendidos en clase sean adquiridos sin la necesidad de tener ese contacto real con la situación planteada. La idea es traer la realidad a los libros de texto que permitan simular, lo más fielmente posible, problemas reales que el alumno podría hallar fuera de la escuela, de tal manera que los alumnos puedan estar preparados o capacitados para afrontar dichos problemas en la realidad (Depaepa, et. al. 2010).

Para lograr lo anterior, es imprescindible que exista concordancia entre las matemáticas que el estudiante aprende en la escuela y la realidad. Es decir, los problemas de matemáticas deben ser auténticos, describir lo más fielmente posible situaciones reales.

Sin embargo, el gran problema surge cuando la mayoría de los problemas que aparecen en los libros de texto no tienen en cuenta la parte de autenticidad para ser resueltos y, por lo tanto, no se ajustan a la realidad del alumno. En consecuencia, resulta factible pensar que los seres humanos puedan aprender matemáticas a partir de los fenómenos que estén presentes en sus contextos (Castro y Villarraga, 2001).

Para mantener la idea anterior sería válido acercarnos a lo planteado por Verschaffel, Greer y De Corte (2000), citado en Palm (2009) donde definen los problemas verbales como

¨*descripciones textuales de las situaciones asumidas como comprensibles para el lector dentro de las cuales se pueden contextualizar las preguntas matemáticas*¨ (p. 3).

No obstante, los problemas incluidos en los libros de texto de matemáticas con frecuencia no permiten generar pensamiento matemático importante. De hecho, pueden cohibirlo, lo que lleva a Reusser (1988), citado por Wiest (2001) a este desafortunado acierto: ¨El principal resultado observado en la mayoría de los estudios es el grado en que los contextos pueden perjudicar la calidad de la comprensión de los problemas verbales de los libros de texto¨ (p. 334).

Wiest (2001) afirmó que el contexto de los problemas verbales puede tener diferente impacto sobre algunos grupos de estudiantes en término de interés y logros. Como se mencionó anteriormente es común encontrar problemas que carecen de autenticidad, o que no se podrían considerar en su totalidad reales, pues en ocasiones con el afán de convertir una situación en un problema matemático se pasan por alto características importantes como podrían ser, medidas ficticias, eventos que se podrían considerar caducados, que no están diseñados en el contexto actual del alumno, o no contienen información verídica, y, comúnmente, los estudiantes ejecutan operaciones sin evaluar sus acciones en la dirección de comprender y dar sentido según las prácticas de la vida real.

Es de vital importancia recalcar que muchos de los problemas verbales matemáticos que aparecen en los libros de texto no cumplen con su fin de simular situaciones de la vida real, sino que están disfrazados con una situación artificial. Como primera consecuencia, el alumno no percibirá los conocimientos matemáticos aprendidos en la escuela como útiles para aplicarlos en situaciones reales del día a día, y como segunda consecuencia no se sentirá atraído o motivado.

Ante esta problemática, la solución que proponen muchos investigadores es la de identificar en los libros de texto aquellos problemas de matemáticas que no tienen en cuenta la realidad que rodea al alumno y reescribirlos de forma que sean más auténticos. En este sentido, Palm (2006) indicó que debe haber una concordancia entre los problemas verbales y las situaciones del mundo real. La comprensión, la fidelidad y la representatividad son conceptos fundamentales que serán utilizados en lo referente al concepto de simulación.

• La comprensión se refiere al conjunto de diversos aspectos de la situación simulada en los cuales el aprendizaje debe ser aplicado.

• La fidelidad se refiere al grado con el cual cada aspecto se aproxima a una representación justa de la situación.

• La representatividad se refiere a la combinación de comprensión y de fidelidad y será utilizado como el término técnico para la semejanza entre una tarea escolar y una situación del mundo real.

Es importante señalar que, en rigor, estamos hablando de situaciones propias del mundo real. Por definición, la escuela no es el mundo real (aunque es parte del mismo). Por tanto, la mayor parte del tiempo las situaciones y actividades se dan en un contexto escolar. Lo importante es que, en dicho contexto, se trabaje en el tipo de situaciones a las que normalmente se enfrenta un ciudadano, un científico, un trabajador o un artista.

2.4 Tareas auténticas en libros de texto

Las tareas auténticas tienen dos virtudes principales: exigen un nivel de pensamiento complejo y resultan motivadoras y desafiantes para los estudiantes. “Las tareas auténticas que requieren un pensamiento de más alto nivel y una activa solución de problemas, también incrementan la motivación del estudiante porque son intrínsecamente más interesantes que la memorización o la aplicación de procedimientos sencillos” (Shepard, 2008: 34) citado por Medina (2013).

Palm (2006) expresa que el afán de contextualizar todos los problemas verbales o tareas propuestas en libros de matemáticas, ha generado que muchas de estas simulaciones de situaciones reales simplemente sean tareas ordinarias matemáticas, cuyo objetivo es el desarrollo de un algoritmo mecanizado sin sentido; disfrazadas con un contexto figurativo de situaciones fuera del aula, lo cual genera efectos negativos sobre el aprendizaje, actitudes y creencias de los estudiantes.

La idea de incluir el mundo fuera de la escuela en la educación matemática se enfatiza en los documentos de política en muchos países (Palm, 2005), implicando que algún foco se ponga en aplicaciones de la vida real.

Es una realidad que las tareas que proponen los libros de texto son muy utilizadas por los maestros para que los alumnos “desarrollen” sus habilidades matemáticas. La investigación ha realizado fuertes críticas basadas en experiencias empíricas sobre qué impactos tiene la falta de autenticidad de las tareas propuestas por libros de texto (Palm, 2008).

2.5 Teoría de las situaciones auténticas en las tareas matemáticas escolares

El presente trabajo es sustentado por la Teoría de las situaciones auténticas en las tareas escolares, para analizar la autenticidad de las situaciones presumibles reales descritas en los libros de texto de tercero en secundaria y primero de bachillerato, así como para el diseño de cuatro tareas auténticas. Siendo dicha teoría de gran utilidad para analizar problemas verbales que tratan situaciones reales, de forma tal que los estudiantes se familiaricen con matemáticas útiles en situaciones fuera de la escuela y en la práctica de resolución de problemas que requieran circunstancias que se consideran como situaciones en la vida diaria.

Los problemas reales dependerán altamente de la interpretación contextual de la actividad, ya que el conocimiento de la vida real juega un papel importante en el pensamiento matemático, sin embargo, en la mayoría de los libros de texto se incorporan problemas verbales en donde los alumnos resuelven estos problemas sin asociar su comprensión con la práctica de la vida real (Verschaffel et al. 2000).

Numerosos libros de texto intentan alcanzar esta finalidad fomentando el uso de tareas que supuestamente tratan situaciones reales, sin embargo, muchos de estos problemas no cumplen los aspectos necesarios para que las circunstancias sean realmente auténticas.

La Teoría de Palm (2002, 2006), propone ocho aspectos que debe cumplir toda tarea matemática que pretenda tratar la realidad, esto son:

A. Evento. Este aspecto se refiere al evento descrito en la tarea. En una simulación de una situación del mundo real, es un requisito previo que el evento descrito en la tarea de la escuela haya tenido lugar o tenga una oportunidad justa de realizarse.

B. Pregunta. Este aspecto se refiere a la concordancia entre la tarea asignada en la tarea de la escuela y en una situación correspondiente fuera de la escuela. La pregunta en la tarea de la escuela, que podría plantearse en el evento del mundo real descrito, es un requisito previo para que exista una situación del mundo real correspondiente.

C. Información / datos. Este aspecto se refiere a la información y los datos en la tarea e incluye valores, modelos y condiciones dadas. Se refiere a los siguientes tres sub-aspectos:

C1. Existencia. Este sub-aspecto se refiere a la coincidencia existente entre la información disponible en la tarea de la escuela y la información disponible en la situación simulada. Las discrepancias en la información entre la situación de la escuela y la situación simulada a menudo conducen a diferencias entre las actividades matemáticas realizadas en las dos situaciones.

C2. Realismo. Este sub-aspecto se refiere a la información existente. En una simulación de este aspecto, con un razonable grado de fidelidad, números y valores indicados son realistas en el sentido de naturaleza idéntica o muy cerca de los números correspondientes y los valores de la simulación.

C3. Especificidad. Este sub-aspecto se refiere a la relación en la especificidad de la información disponible en la situación escolar y la situación simulada. Esta relación es importante para que el alumno pueda resolver la situación dentro y fuera de la escuela. El texto de la tarea que describe una situación específica en que los sujetos, objetos y lugares en el contexto figurativo son concretos. Estas simulaciones pueden ayudar a proporcionar evidencia de situaciones reales en las que las matemáticas de la escuela son útiles.

D. Presentación. El aspecto de la presentación de la tarea se refiere a la manera en que la tarea se transmite o se comunica a los estudiantes. Este aspecto se divide en dos sub-aspectos:

D1. Modo. El modo en que se transmite la tarea se refiere, por ejemplo, a que si el problema se comunica a los estudiantes oralmente o en forma escrita y si la información se presenta en palabras, diagramas o tablas.

D2. Uso del Lenguaje. Este aspecto se refiere a la estructura de la oración de terminología, y la cantidad de lenguaje utilizado en la presentación de la situación de trabajo. Las tareas escolares requieren diversas capacidades en la interpretación de las tareas extraescolares correspondientes, por lo que es importante que el lenguaje usado en la tarea escolar no sea tan diferente al de la situación de la vida real correspondiente, pues afecta negativamente las posibilidades de los estudiantes para utilizar las mismas matemáticas que se habrían utilizado en la situación simulada.

E. Estrategias de solución. Para ser simulada, una situación de trabajo incluye el papel y el propósito de alguien que soluciona la tarea. Este aspecto se divide en dos sub-aspectos:

E1. Disponibilidad. Se refiere a la coincidencia en las estrategias de solución disponibles para los estudiantes que resuelven las tareas y para las personas descritas en la simulación del problema. Si estas estrategias no coinciden, entonces los estudiantes no tienen las mismas posibilidades para utilizar las mismas matemáticas que se habrían podido utilizar en la situación simulada.

E2. Experiencia plausible. Este sub-aspecto se refiere a la adecuación en las estrategias experimentadas como plausibles tanto para la resolución de la tarea en la situación de la escuela como en la situación simulada.

F. Circunstancias. Las circunstancias bajo las cuales la tarea debe ser solucionada son factores en el contexto social y se dividen en los sub-aspectos siguientes:

F1. Disponibilidad de herramientas externas. Este aspecto se refiere a las herramientas externas (como calculadoras, computadoras y mapas), disponibles en la situación de trabajo.

F2. Dirección. Este sub-aspecto se refiere a una guía en forma de consejos explícitos o implícitos, por ejemplo, métodos de solución y tipos de respuestas requeridas.

F3. Consulta y colaboración. Las situaciones de tareas extraescolares son solucionadas solamente por uno mismo, con la colaboración dentro de grupos, o con la posibilidad de ayuda. En las simulaciones, estas circunstancias han de ser consideradas desde la entrada de otras personas que pueden afectar las habilidades y competencias necesarias para resolver una tarea.

F4. Oportunidades de la discusión. Este sub-aspecto se refiere a las posibilidades de los estudiantes para preguntar y discutir el significado y la comprensión de la tarea. Una carencia de la concordancia entre las situaciones escolares y extraescolares en este sub-aspecto puede causar diferencias en las matemáticas usadas puesto que esta comunicación se ha demostrado que tiene el poder de afectar al significado experimentado de la tarea y de las estrategias de soluciones aplicadas.

F5. Tiempo. La presión del tiempo se sabe que impide el éxito de la tarea a resolver. En las simulaciones, es por lo tanto importante que las restricciones de tiempo sean tales que no causen diferencias significativas en las posibilidades de resolver las tareas de la escuela en comparación con las situaciones que se simulan.

F6. Consecuencias de la solución de éxito de la tarea (o fracaso). Diversas soluciones a los problemas pueden tener diferentes consecuencias para los que los resuelven. La presión sobre ellos y el tener una motivación por el problema afecta el proceso de resolución y por lo tanto es un aspecto a considerar en las simulaciones. Este aspecto puede incluir esfuerzos para promover la motivación para la solución de problemas verbales.

G. Requisitos de la solución. La idea de la solución debe ser interpretada en un sentido amplio, es decir, tanto el método de solución como la respuesta final a una tarea. Los juicios en la validez de respuestas y la discusión de los métodos de solución (en libros de texto y la evaluación de los sistemas de calificación) o las frases en el texto de la tarea (por ejemplo; usando derivadas solucione la tarea siguiente) pueden constituir los requisitos para la solución a las tareas escolares.

H. Propósito en el contexto figurado. Siempre hay un propósito más o menos explícito de la solución de situaciones de trabajo en la vida real. Este aspecto se refiere a esos fines. Por lo tanto, en las simulaciones es esencial que el propósito de la tarea en el contexto figurativo sea tan claro para los estudiantes como para el solucionador de la situación simulada.

2.6 Elementos para el diseño de tareas

Uno de los temas demandantes en muchas de las discusiones realizadas por la Comisión Internacional de Instrucción Matemática (ICMI), que generó el libro "Task Design In Mathematics Education " fue que, si las matemáticas ejemplificadas por la tarea son centrales, hay abundancia en lo que respecta a consideraciones importantes en el diseño de tareas, especialmente cuando los diseñadores desean anteponer y alentar elecciones pedagógicas particulares.

En esta misma discusión se presentó un debate sobre los elementos para el de diseño de tareas dividiéndolo en dos partes. Primero se presentaron cinco dilemas de diseño de tareas para indicar la jerarquía de consideraciones de diseño. Posteriormente, se presentaron seis criterios de idoneidad destinados a facilitar el análisis de tareas, así como la investigación y evaluación de esas tareas (Sullivan, et al. 2015).

Referente a los dilemas de diseño, Sullivan, Knott y Yang (2015) plantearon que la exploración de las tensiones inherentes es esencial para las decisiones que surgen en el diseño de tareas y las pedagogías asociadas. También informaron que, Barbosa y de Oliveira (2013) al proyectar las decisiones sobre los elementos de las tareas, se centraron en varias disyuntivas asociadas con el diseño de tareas para grupos de estudiantes. De esta manera se especificó que, aprovecharon los dilemas no solo como consideraciones de diseño, sino también como maneras de evaluar la idoneidad de las tareas diseñadas por los docentes en el proyecto de investigación sobre el que informaron.

El primer dilema al que se hace mención surge en el contexto matemático de las tareas (el contexto como un dilema). El segundo dilema sería el lenguaje de la tarea y la solución prevista. Barbosa y de Oliveira (2013) plantearon que, por un lado, la precisión matemática es una pieza fundamental en el aprendizaje deseado, y que por otro lado se necesita claridad en el lenguaje utilizado. Para las preguntas redactadas, las transformaciones delicadas en el lenguaje ejemplifican las diferencias entre las formas de las preguntas.

Como tercer dilema tenemos: la "estructura", que se refiere al grado de apertura en las tareas. Esto puede considerarse tanto una función del resultado final como es la estructura. En este dilema, la consideración es que se pueden plantear situaciones específicas que, por un lado, fomentan el compromiso del estudiante con una tarea más prescrita y, por otro lado, les permiten a los estudiantes una mayor oportunidad de tomar decisiones estratégicas sobre rutas y destinos para ellos mismos. Barbosa y de Oliveira (2013) describen este continuo como que va de más cerrado a más abierto.

El cuarto dilema, descrito como distribución, se refiere a la selección de contenido para enfocarse en las tareas. Esta es una función de la demanda cognitiva de las tareas, descrita por Smith y Stein, (2011); citado en, Sullivan et al. (2015) como una jerarquía de tareas en el aula, que se desarrollan desde la memorización a los procedimientos, sin conexiones con los procedimientos relacionados con las tareas matemáticas. El quinto dilema hace referencia a los niveles de interacción de los participantes, es decir, entre los profesores y los alumnos. Se plantea que esto se puede interpretar en el sentido de que la tarea no existe por sí sola, pero su implementación está acreditada por la naturaleza de las interacciones previstas entre el profesor y los estudiantes.

Respecto de los criterios de idoneidad de las tareas, es importante resaltar que los dilemas del diseño de la tarea proporcionan un marco que se puede utilizar para analizar la idoneidad de las tareas. (Giménez, et al, 2010, citado en Sullivan et al. 2015) proporcionaron un marco adecuado para el análisis de tareas en general. Esto se conecta directamente con el conocimiento del contenido matemático del profesor, qué necesita percibir, qué matemática es posible. Estos autores explican que la idoneidad cognitiva refleja el grado en que los objetivos de enseñanza y lo que realmente se enseña son consistentes con el potencial de desarrollo de los estudiantes, así como la cercanía de la correspondencia entre lo que finalmente se aprendió.

En otras palabras, dichos investigadores concuerdan en que cada una de las tareas tiene su propio esquema de utilización. La idoneidad conciliada se refiere a la disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales requeridos por el proceso de enseñanza / aprendizaje. También indicaron que una característica clave de la tarea, es la presentación a los estudiantes de una hoja de trabajo que requiera dos métodos de solución. Esto tiene como objetivo motivar a los estudiantes a ofrecer dos soluciones diferentes, especialmente cuando esto se ha convertido en una expectativa normal tanto para el maestro como para los estudiantes. La demanda cognitiva de este tipo de tarea se evidencia por el tipo de compromiso.

La naturaleza de las matemáticas es el foco de la tarea. Respecto a este primer criterio, Sullivan et al. (2015) informaron que, quizás el elemento más crítico del diseño de la tarea es el potencial de la tarea para impulsar el aprendizaje de los conceptos matemáticos previstos. Por un lado, Ernest (2010) describió los objetivos de una perspectiva práctica de las matemáticas como estudiantes, que aprenden las matemáticas adecuadas, para el empleo general y el funcionamiento en la sociedad: elegir rutas para viajar, interpretar datos en los periódicos, etc.

Por otro lado, este mismo autor describió una perspectiva especializada como esa comprensión matemática, que forma la base de los estudios universitarios en ciencias, tecnología e ingeniería. Argumentó que esto incluye la capacidad de plantear y resolver problemas, apreciar las contribuciones de las matemáticas a la cultura, la naturaleza de la resonancia y la apreciación intuitiva de las ideas matemáticas como patrón, simetría, estructura, prueba, paradoja.

Tarea que abordan objetivos matemáticos especializados. Según este segundo criterio, el conocimiento del maestro que informa el diseño y la implementación de tareas nos indican dos aspectos: las ideas conceptuales representadas por una perspectiva especializada y los procesos matemáticos en los que se espera que los estudiantes participen desde esta perspectiva. Se supone que los maestros serán explícitos sobre la naturaleza de las metas matemáticas esperadas para los estudiantes, no solo como parte de su planificación sino también en sus interacciones continuas con los estudiantes.

Sin embargo, existe una tensión inherente entre articular una meta matemática a los estudiantes y hacer que los estudiantes descubran o investiguen un concepto o idea matemática en una lección. En el último caso, la articulación de la meta debe ser bastante general, para no revelar el concepto a descubrir o investigar. Además, Smith y Stein (2011), citado en Sullivan et al. (2015) afirmaron que la articulación de los objetivos matemáticos (en la fase de diseño, especialmente si el diseño se realiza de otra manera que no sea por el maestro de la clase) puede apoyar el avance del conocimiento sobre las matemáticas especializadas.

Diseño de tareas que abordan una perspectiva práctica. En el tercer criterio Sullivan et al. (2015) hacen mención a una postura diferente, tomada de Goos, Geiger y Dole (2010) donde utilizaron un modelo matemático que se centra en contextos de la vida real, la aplicación del conocimiento matemático, el uso de la presentación física y herramientas digitales afirmando que eso enfatiza el cultivo de disposiciones positivas hacia las matemáticas.

Procesos de diseño de tareas. Atendiendo este criterio en Sullivan, et al. (2015) se presenta una visión general de los marcos y principios para el diseño de tareas, analizándolos en diferentes niveles de marcos ampliados, intermedios y específicos de dominio. Se hizo evidente a lo largo de la discusión planteada en dicho texto, la relación difícil entre el diseño de la tarea y el del entorno de aprendizaje. Estos dos deben considerarse simultáneamente. En este mismo sentido se plantea que Ron et al. (2013) describieron un proceso de diseño hacia atrás de tres etapas, que incluye:

- Establecer objetivos y conectar la tarea a los objetivos.
- Diseñar una tarea genérica que aborde estos objetivos; y luego (cuando corresponda)
- Elegir cuidadosamente los ejemplos específicos para "enchufar" la tarea genérica (p. 641)

Un aspecto crítico de este proceso de diseño es proporcionar puntos de partida bien pensados para los maestros. Otro aspecto es explorar el papel de las tareas para fomentar el conocimiento sobre el uso de las herramientas, en este caso, las rutinas matemáticas o procedimientos de aprendizaje que pueden enlistarse en la solución de problemas. Estos autores discutieron desde una perspectiva de diseño, con respecto a las herramientas, donde plantean su gusto al saber que los profesores puedan diseñar tareas que fomenten la discusión sobre los méritos y la limitación de las herramientas existentes y nuevas.

Continuaron afirmando que lo anterior constituye un desafío para los maestros porque, por una parte, a menudo queremos señalar las limitaciones de las herramientas existentes para un propósito particular, mientras existe la necesidad de mantener la utilidad y los méritos de las herramientas existentes para otros fines.

El papel de la autoridad y la autonomía del maestro en el diseño e implementación de las tareas. Refiriéndose a este criterio, al papel de la autoridad y la autonomía del maestro en el diseño e implementación de tareas, los autores plantean que una influencia adicional en el diseño e implementación de tareas en las aulas es el papel del maestro, ya sea adaptando una tarea desarrollada por otros o diseñando la tarea en primer lugar. También indicaron que existe una evidencia sustancial de que la implementación de tareas por parte de los maestros puede perturbar los objetivos del diseñador de la tarea, como reducir o aumentar la demanda de las tareas en los estudiantes. Al respecto, Kullberg et al. (2013, 2014) describieron un proyecto en el que las adaptaciones de los maestros de una tarea mejoraron el aprendizaje de los alumnos. En lugar de tratar de limitar las adaptaciones de los maestros, las fomentaron y celebraron.

Aspectos problemáticos de convertir tareas de un contexto a otro. Haciendo énfasis en este criterio y sus aspectos, Sullivan et al. (2015) indicaron que un problema sobre las intenciones pedagógicas anticipadas es la adaptación de una tarea diseñada para un contexto, para el uso en una cultura diferente. La cultura aquí se toma tanto en su interpretación amplia como asociada con una ubicación geográfica y un idioma diferentes y, a veces, en su interpretación más estrecha para significar el contexto cultural predominante de la asignatura y del aula, incluidas las normas sociales y socio-matemáticas en lugar.

Hay una serie de conexiones claves entre la formulación de tareas y la cultura. Estas incluyen: la especificidad cultural del contexto de la tarea, la relación entre las consideraciones culturales y los tipos de solución propuestos, la precisión del lenguaje disponible y su relación con los conceptos matemáticos, así como la compatibilidad entre los antecedentes culturales. Las relaciones culturales y contextualmente dependientes entre los diferentes conceptos matemáticos son complejas. En resumen, la implementación exitosa de un plan de estudios o tareas específicas, depende en gran medida de cómo el maestro interprete la cultura del mismo y los alumnos. No es una tarea simple tomar el currículum de un idioma y cultura para usarlo en otro. Gran parte del contexto cultural, especialmente en matemáticas, está implícito, enclavado en la secuencia de tareas y actividades, la elección del contexto y las nominaciones sociales.

Es función del maestro comprender e interpretar la tarea tal como está contextualizada en una cultura, y volver a presentarla como una tarea culturalmente relevante y apropiada en su propio contexto. En un contexto occidental, el maestro puede optar por reinterpretar la tarea para involucrar cuadrados de alfombras o azulejos o algún otro material contextualmente relevante. La tarea de compra, tal como se plantea, es específica para los grupos de ingresos más altos, pero la noción de descuentos dos por uno es común, por lo que se puede esperar que los maestros adapten los contextos, para adaptarse a sus estudiantes mientras preservan los elementos esenciales de las tareas (Ron, et al. 2013)

CAPÍTULO III: MÉTODO

La metodología utilizada es de tipo cualitativa. Se tuvo como propósito analizar varios libros que se utilizan en tercer año de educación básica en México y primer año de educación media superior de México y Cuba, exclusivamente los de la asignatura de matemática, para identificar aquellos que presenten contextos presumiblemente auténticos al alumno, en dónde éstos tengan la necesidad de poner en práctica los conocimientos obtenidos dentro del salón de clase.

En el caso de los libros de secundaria se analizaron las contextualizaciones del Teorema de Pitágoras, en los de bachilleratos mexicanos nos centramos en el análisis de las contextualizaciones de cálculo de área y perímetro de figuras geométricas, y en los cubanos las contextualizaciones de resolución de triángulos rectángulos para aplicar las razones trigonométricas. Estos libros fueron los autorizados por la CONALITEG del ciclo escolar 2018-2019. Se revisaron aproximadamente 30 libros entre los 3 grados del bachillerato mexicano. En el caso de Cuba se utilizó el único libro de texto para todos los bachilleratos del país, y fue este el que revisamos. También se revisaron aproximadamente 10 libros de tercero de secundaria.

El análisis se realizó con los contenidos indicados anteriormente, de una muestra de 10 editoriales: Ediciones Castillo, Santillana, Trillas, Oxford University Press, Pearson Educación, Esfinge, Patria Educación, Book Mart, Pueblo y Educación, Grupo Editorial Patria. Para cada editorial se analizaron todos los problemas planteados en los libros de texto para los tres grados de bachillerato y tercero de educación secundaria.

Por su parte, la investigación cualitativa proporciona profundidad a los datos, dispersión, riqueza interpretativa, contextualización del ambiente o entorno, detalles y experiencias únicas. También aporta un punto de vista “fresco, natural y holístico” de los fenómenos, así como flexibilidad, (Hernández, et al. 2010; p. 17).

3.1 Análisis de las tareas matemáticas presumiblemente auténticas

Para realizar el análisis de las tareas presumiblemente auténticas se utilizó la teoría de Torulf Palm, con el fin de identificar por qué se consideraron faltas de autenticidad, mediante los ocho aspectos y sub-aspectos que establece dicha Teoría, se analizó cada uno describiendo por qué son carentes de autenticidad.

Posteriormente, se realizó investigación documental, mediante la recopilación, análisis e interpretación de información obtenida exclusivamente de fuentes fidedignas, las cuales sirvieron para corroborar que los datos proporcionados en la problemática fuesen poco auténticos o no reales.

3.2 El fin del diseño de las tareas

La investigación se enfocó en el diseño de cuatro tareas matemáticas auténticas, para luego implementar dos de ellas con alumnos de primer año en bachillerato, y de esta manera conocer y comprender el comportamiento natural de los estudiantes que recientemente ingresaron al bachillerato, cuando realizan una actividad cercana a la vida real; es decir, quisimos observar e interpretar las respuestas, discursos y discusiones de los alumnos, así como su relación con las competencias matemáticas.

Luego de la ejecución, se pretendió analizar resultados permitiéndole a los alumnos expresar sus vivencias personales relacionadas con la tarea, con lo cual se pudo lograr una elevada implicación personal. Todo esto debe educarse en la apertura a la opinión y actitud de otros, la tolerancia con menor tendencia a valoraciones apresuradas, donde el sentido del humor y el optimismo maticen el ambiente. Ello debe contribuir a que los alumnos se muestren y sientan más seguros y confiados en el desarrollo de la clase, puedan dar rienda suelta a su curiosidad, trabajen con independencia y disciplina, sin límites para su imaginación y mayor disposición para asumir riesgos y asumir la responsabilidad de su actuación.

La recolección de datos se realizó mediante las producciones escritas por los estudiantes y las observaciones del investigador y el profesor registradas en una bitácora. Se analizaron las estrategias de solución construidas y explicadas por los alumnos.

Se realizaron entrevistas semi-estructuradas a varios de los estudiantes que resolvieron las tareas diseñadas que se implementaron, esto con la finalidad de averiguar si la forma en que ellos daban solución al problema se asemejaba a la manera que este fuese resuelto por un experto en esa área, esto resultó de mucha ayuda para analizar los resultados y determinar el grado de aceptación de dichas tareas.

3.3 La población de estudio

En este estudio participó un grupo de 35 estudiantes cubanos, cuyas edades se encuentran en el intervalo de 15 a 16 años. Dichos estudiantes tomaron un curso propedéutico para el ingreso al bachillerato, por ello sus conocimientos matemáticos corresponderán al nivel de un egresado de secundaria. Al momento de resolver la tarea se buscó la manera que contaran con la experiencia de haber abordado, en ambientes colaborativos, aproximadamente 10 problemas matemáticos típicos de libros de texto, durante cuatro sesiones de 45 minutos cada una.

Los conocimientos matemáticos requeridos para resolver las tareas fueron razones trigonométricas, calcular la longitud de un cateto del triángulo rectángulo aplicando el Teorema de Pitágoras, operaciones con números racionales, conversión de unidades de medidas, despejar y utilizar fórmulas, así como traducción del lenguaje común al lenguaje algebraico y cálculo de área y perímetro de figuras geométricas.

CAPÍTULO IV. ANÁLISIS DE LAS TAREAS SELECCIONADAS Y DISEÑO DE NUEVAS TAREAS

4.1. Analizando la autenticidad de las tareas seleccionadas en los libros de texto para secundaria y bachillerato

En el salón de clases, específicamente en las clases de Matemáticas, se realizan actividades de diversos tipos y en diversos momentos, incluyendo, por ejemplo, las utilizadas para introducir un tema o evaluar los conocimientos adquiridos.

La conexión de las tareas matemáticas con la vida cotidiana ha sido objeto de interés en los últimos años en diferentes sentidos. Por ejemplo, Onrubia et al. (2001); citado por Lupiáñez (2015) sugirieron, entre otras recomendaciones para una enseñanza funcional, que promueva el desarrollo de la competencia matemática de los escolares (p. 498): "Contextualizar el aprendizaje de las matemáticas en tareas auténticas y significativas para los alumnos", "orientar el aprendizaje de los alumnos hacia la comprensión y la resolución de problemas" o "Vincular el lenguaje formal matemático con su significado referencial".

El analizar la autenticidad en los problemas propuestos en los libros de texto ha tomado mayor interés en los últimos años, el verificar que los datos presentados o el contexto que relata la situación simulada no se consideren reales, han sido motivo suficiente para realizar investigaciones. Se han realizado investigaciones como las de García (2011), Santanero (2011), Medina (2018) y Torres (2019), que trabajaron con la Teoría de Torulf Palm y en las cuales reportaron que existe una gran presencia de problemas con contextualizaciones artificiales bien distantes de la realidad, que violan aspectos de la Teoría, los cuales atentan contra el desempeño y motivación de los alumnos.

Teniendo en cuenta lo anteriormente planteado, en la presente investigación se realizó una selección de dos tareas matemáticas, para identificar los aspectos por los cuales no se pueden considerar auténticas, utilizando la teoría de Palm. Es importante recalcar que en este trabajo se reporta el análisis de los problemas verbales convertidos en tareas matemáticas, mediante la teoría de Palm, y de los resultados de la investigación documental.

Seguidamente se presenta el análisis de cada tarea seleccionada:

4.2. El poste de teléfono

El problema fue seleccionado del libro de texto de tercer año de secundaria editorial Castillo, en el tema: explicitación y uso del Teorema de Pitágoras, ubicado en el bloque 2.

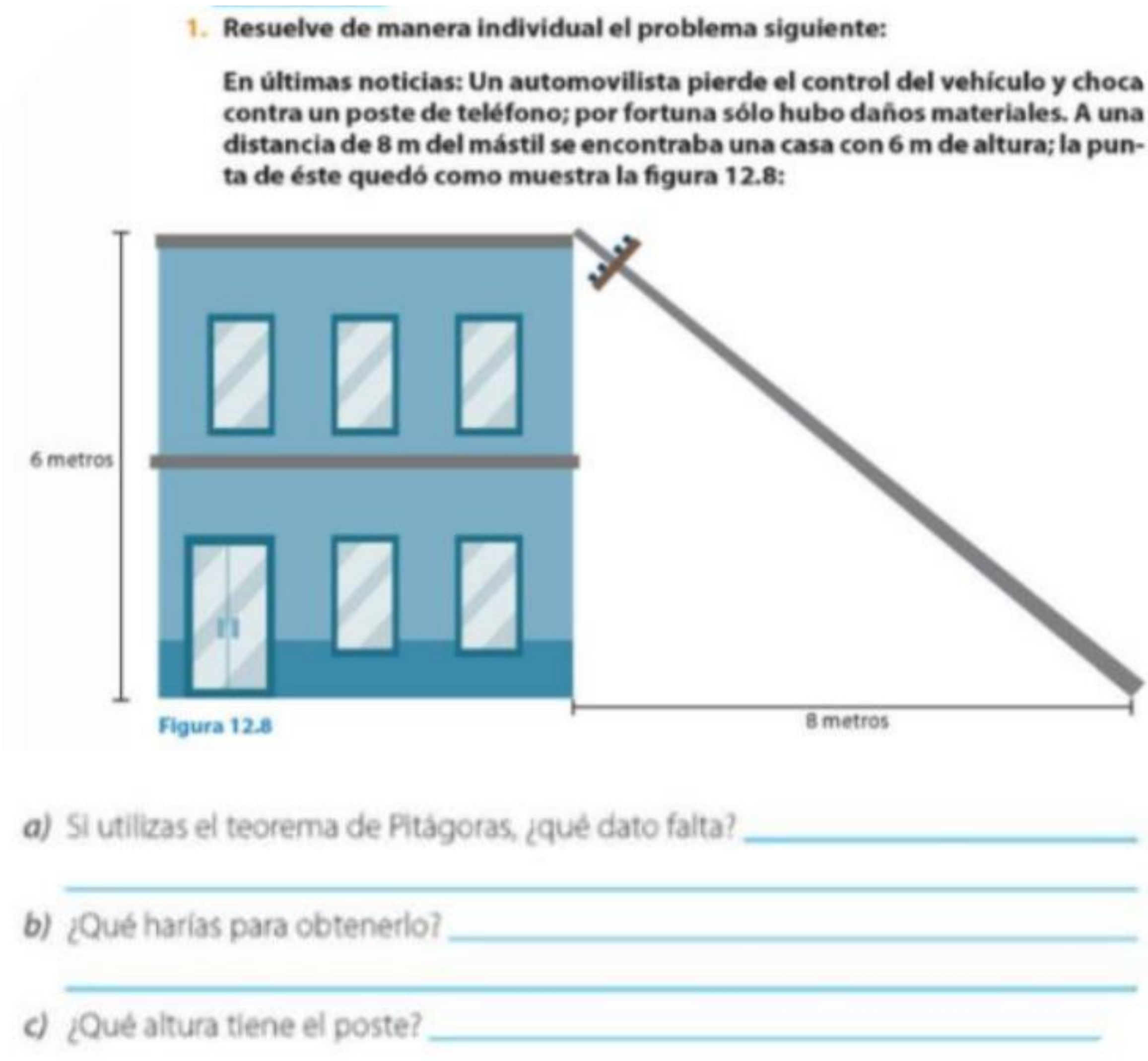


Figura 1. Ilustración del problema “El poste de teléfono”

Evento. De acuerdo con este aspecto podemos inferir, a partir de la situación presentada, que se trata de una situación que en condiciones habituales puede llegar a ocurrir fuera del salón de clases, y en la cual los alumnos tienen una alta probabilidad de llegar a enfrentarse, conociendo que la mayoría de ellos transitan por la vía pública y en el caso de muchos de ellos, los padres, algún familiar o amigo cuenta con un automóvil, por lo que pudieran estar involucrados o presenciar un accidente, por lo tanto, el evento descrito tiene altas posibilidades de presentarse en la vida real. Sin embargo, lo que no es posible que llegue a suceder es que el vehículo al chocar con un poste lo desprenda desde la base y quede recargado sobre el techo de una casa que se encuentra del otro lado donde se localiza el poste, formando cabalmente un triángulo rectángulo, sin que sobresalga del borde del techo algunos centímetros de este, aun así, la probabilidad de que el poste quede colocado de la manera que indica la figura es mínima, para no decir que es nula. Lo que nos presenta la ilustración prácticamente nos indica que una persona o máquina colocó el poste de esa manera.

Pregunta. Consideramos que, respecto a las preguntas presentadas, no es algo que se cuestione en la vida real**,** pues es poco probable que alguien, en este caso específico, quiera saber cuál es la medida del poste, o si utilizarían el teorema de Pitágoras para dar solución al problema presentado. En este tipo de circunstancias es más preocupante el saber sobre los daños causados, pues el conductor se preocuparía por las condiciones en las que pudo quedar su auto, si le causó daño a alguien o algo aparte de su coche, aunque en el texto se plantea que los daños fueron solo materiales, el conductor se preocuparía por lo antes planteado. También se preocuparía por cuánto le costará la reparación del poste derribado, si es el quien tiene que pagarlo o no, si cuenta con seguro el auto o no, si al realizar la investigación pertinente él queda liberado de cualquier cargo, si la compañía de telecomunicaciones o el propietario de la casa emitirá alguna demanda por daños a la casa, a dicho poste y accesorios.

En la información y los datos referentes a la existencia, hay discrepancia entre los datos proporcionados en la situación descrita y los datos en la vida real. Al momento de analizar la situación basada en la presentación gráfica que está mostrando, pudimos analizar que, cuando un automóvil choca con un poste de teléfono, no es usual que lo llegue a desprender, debido que el peso del automóvil y el material que lo conforma no es suficiente para producir tanto daño, además de ello, en la vida real un poste no se troza a ras de suelo debido a que el golpe del coche con éste se encuentra a unos 35 cm del suelo y como consecuencia el poste sufriría daño aproximadamente a esa altura, esto según la investigación documental, en cualquiera de los casos al trozar el poste intervienen otros elementos y factores que no permiten esta suposición en la vida real (Morales, 2016)

En el sub-aspecto de realismo pudimos analizar que no existe tanta fidelidad en los datos proporcionados en la problemática, así como en la imagen, debido a que no toman en cuenta que los postes de teléfono según la Oferta de Referencia para Compartición de Infraestructura

Pasiva para redes públicas de telecomunicaciones (s.f.) en el Anexo 2 Normas técnicas, que establece lineamientos técnicos de la infraestructura de postes de la empresa Telmex, deben seguir para garantizar una convivencia armoniosa y evitar la afectación del servicio y daño en la infraestructura existente durante el proceso de construcción.

Al resolver el problema propuesto obtenemos como resultado que la altura del poste es de 10 metros desde la base a la punta. Sin embargo, según las Normas técnicas, los postes más usados en la red aérea de Telmex tienen una medida de 7.6m y 9.2m de base a punta, pero se debe tener en cuenta que a esta medida se le debe restar la medida de empotramiento para poder ser colocados, que viene estipulado en las normas I4C01 03/2006 Instalación de postes, columnas, guías, herrajes y riendas. Esto nos permite concluir que la altura del poste no puede ser de 10 metros.

También se analizó mediante las normas I4C01 03/2006 Instalación de postes, que la longitud de los cables entre un poste y otro debe de ser de 7m como máximo, teniendo presente esto, cuando el poste se troza no podría llegar a una casa que se encuentre en el lado opuesto de la acera, como se hace mención, a una distancia de 8 metros, pues la tensión que tienen los cables no le permite llegar a dicha distancia, y mucho menos bajo las condiciones que nos muestra la imagen, donde se puede observar que el poste no sufre daño alguno, tampoco la casa, y es casi imposible que llegue a coincidir la punta del poste con el voladizo del techo de la casa.

En el sub-aspecto de especificidad podemos destacar que los valores, modelos y condiciones dadas, no nos permiten afirmar que la simulación descrita en esta tarea pueda ayudar a proporcionar evidencia de situaciones reales en las que las matemáticas de la escuela son útiles.

En el aspecto de presentación, la tarea se les propone a los alumnos de forma escrita, pero también proporciona una imagen en la que se puede observar que, al parecer alguna persona ayudada de una máquina, colocó con mucho cuidado el poste que va desde la orilla superior de la casa hasta justamente donde se encontraba la base del poste, tampoco se hace referencia en el texto de la tarea, a si el poste fue arrastrado algunos metros o centímetros. Además de lo anterior, en la imagen los alumnos podrían confundir la información de que es un poste de madera de teléfono, pues la imagen presenta un poste asociado al color gris con un centro de carga bastante parecido al que se ubica en los postes para cables de electricidad y no para teléfono, en cuanto a la forma del poste, pareciera que es cilíndrico, y respecto al color lo pueden asociar con un poste de concreto.

En el aspecto estrategias de solución, cuando un acontecimiento de este tipo se presenta en la vida real, el encargado de analizar la situación es un Perito de Vías Terrestres quien da una opinión técnica de los hechos de tránsito para dictaminar la causa que los generó, y bajo qué circunstancias viajaba el vehículo, él es quien recopila toda la información posible en el lugar de los hechos, los vehículos, las huellas de derrape si existen, los restos en el lugar. Debido a esto, no puede haber coincidencia en las estrategias de solución disponibles para los estudiantes que resuelven las tareas y para las personas descritas en la simulación del problema, primero porque la persona descrita en el problema no es quien propone o utiliza una estrategia de solución, y segundo, que los estudiantes no utilizarían es este caso las estrategias que emplearía el profesional indicado.

En el aspecto de circunstancias, y más específicamente en el sub-aspecto de disponibilidad de herramientas, existe una gran diferencia entre los instrumentos que utiliza un Perito de vía terrestre y los que utilizaría un alumno, siendo algunos de estos completamente desconocidos y otros muy comunes para los alumnos. Las herramientas que más usan los peritos son: la cinta métrica, el distanciómetro, la brújula, la lupa, el goniómetro, la cámara fotográfica, la calculadora, el cronómetro, entre otras. Estas herramientas son utilizadas en la toma de datos del lugar de los hechos y en los vehículos. Dentro del sub-aspecto oportunidades de discusión, los alumnos encontrarían una carencia en la concordancia entre la situación escolar y la extra escolar, pues como ya analizamos en la tarea presentada es poco probable que interese calcular la altura del poste, sin embargo, si se tuviera un acercamiento con un experto en la materia, los alumnos verían con mayor interés como aplicar una serie de conocimientos matemáticos y discutir sobre los beneficios de aprender matemáticas.

En esta primera tarea la investigación documental se realizó teniendo en cuenta la medida de los postes de teléfono, y las condiciones en las que éste debe de estar incrustado en el suelo y las normas generales que se deben seguir para la distribución y utilización, así como los procedimientos necesarios para la instalación de los postes y cableado, las cuáles deben garantizar la convivencia armoniosa y evitar la afectación del servicio y daño en la infraestructura existente durante el proceso de construcción.

El análisis minucioso realizado anteriormente, nos posibilitó identificar los aspectos y sub-aspectos de la Teoría de Palm, que nos permitieron verificar que la tarea seleccionada y analizada no se pudo considerar como una tarea matemática auténtica. De aquí que tomemos esta situación como punto de partida para el diseño de nuestras primeras dos tareas auténticas.

4.3. El pintor

Se quiere pintar una casa como la que se muestra en la figura. Calcula los botes de pintura que se van a necesitar si se sabe que un bote de pintura rinde 10 m^2.

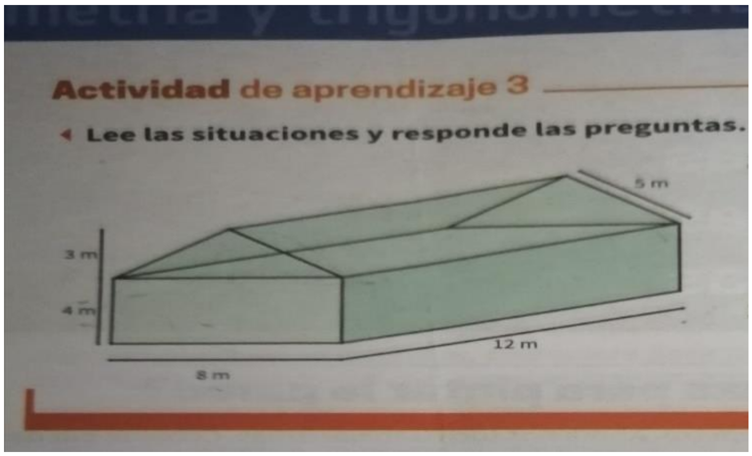


Figura 2. *El pintor*

El problema fue seleccionado del libro de texto Geometría y Trigonometría 1ª Edición 2018 (EPOEM) Bachillerato tecnológico.

Evento. Es una situación que en condiciones normales podría llegar a ocurrir fuera de la escuela, enfrentándose tanto alumnos, padres de familia o algún familiar cercano, pues la mayoría de ellos han experimentado el evento descrito, ya sea involucrados directamente, o como simples espectadores. Por lo tanto, el evento tiene una alta probabilidad de presentarse en la vida real. Sin embargo, lo que no es posible que suceda es que la casa que se desea pintar no tenga puertas o ventanas.

Pregunta. En la pregunta que presenta el problema no se considera que sea solo ese el cuestionamiento que los involucrados en esta situación se harían, pues en los botes de pintura se especifica bien cuanto rinde cada uno, lo que no queda claro es el tipo de pared, si es de textura rugosa o lisa, en este caso es más preocupante para las personas involucradas el costo de cada bote y tener claridad sobre la cantidad de superficie a pintar y el tipo de superficie para de esa forma realizar la compra de la pintura adecuada y tener certeza de la cantidad de dinero que deberá invertir, y si cuenta con el dinero necesario o no.

Información y datos. Con respecto a la existencia, hay una discrepancia entre los datos proporcionados en el evento descrito y los datos en la vida real. Al analizar la situación con base en la figura mostrada, podemos constatar que no se tiene claridad sobre qué va a realizar en realidad la persona, si tiene que pintar el interior y el exterior, o solo uno de estos, si tiene que pintar el techo o no; porque no serviría de nada la información que se brinda en el texto que describe la situación planteada, si no se tiene conocimiento de lo anteriormente planteado. También podemos observar que la forma del techo se presta para que la casa tenga un falso techo, y siendo así quedarían inutilizables las medidas que se dan en la imagen.

En el sub-aspecto de realismo pudimos analizar que no existe fidelidad en los datos proporcionados en la problemática, así como en la imagen, ya que la altura total de la casa que, dada la imagen es de una sola planta, está determinada por la suma de la distancia del piso al punto máximo del techo o tejado, de esta forma se obtiene que la altura de dicha casa es de 7 metros, esto nos indica que no se toma en cuenta la definición de la norma 405. Alturas libres y alturas de piso, donde se define como altura libre de planta a la distancia entre la cara inferior del techo y la superficie del piso, ambos terminados. Se establecen como máximas y mínimas, según el uso, las siguientes alturas:

En plantas de viviendas la altura libre mínima sería de 2.5 metros. En castilletes la altura máxima libre sería de 2.8 metros, incluso hace referencia a que una casa de vivienda con techo de dos aguas (como el de la figura), la altura permitida puede llegar hasta los 3 metros.

En el sub-aspecto de especificidad, podemos destacar que los valores, modelos y condiciones dadas en la tarea, no nos permiten afirmar que la simulación descrita en esta, pueda ayudar a proporcionar evidencia de situaciones reales en las que las matemáticas de la escuela son del todo útiles.

Presentación. La tarea se da a conocer de forma escrita, además se proporciona una imagen de la situación. Al examinar la imagen se puede observar que, al parecer, la casa no tiene puertas ni ventanas. Tampoco se aclara si se desea pintar el techo o la fachada de la casa. Algunos alumnos podrían asumir que se va a pintar la fachada de la casa, y otros que se tiene que pintar el interior y el exterior, esto nos indica que de la forma que se presenta esta tarea dirige a los estudiantes a obtener en todo momento resultados diferentes.

En el aspecto estrategias de solución, cuando una situación de este tipo se presenta en la vida real, el encargado de analizar la situación en la mayoría de los casos es la persona contratada para realizar el trabajo, siendo así, a esta persona solo le preocuparía tener pintura suficiente para realizar su trabajo a la mayor brevedad, y no utilizaría estrategia de solución alguna. En el caso que la persona que se disponga a pintar es el dueño de la casa, éste tendría que emplear una estrategia para dar solución a la problemática, pero siendo así al ser el dueño de la vivienda si tendrá los datos reales de la vivienda, por lo que la estrategia de solución que utilice no será la misma que empleen los estudiantes con estos datos que les proporciona la figura.

De igual manera que en el análisis de la primera tarea, en esta segunda identificamos cada uno de los aspectos de la Teoría de Palm, que nos permitieron demostrar la falta de autenticidad presente en la situación descrita. Luego del análisis anterior es importante indicar que tomaremos esta tarea como punto de partida para el diseño de nuestra tercera tarea auténtica, pero trasladándola a otro contexto.

En esta segunda tarea la investigación documental se realizó en cuanto a las medidas brindadas respecto a la altura total de la casa, debido a que tiene un techo nombrado por muchos como techo de dos aguas, se proporciona una altura y esta debe cumplir con las normas para alturas libres y alturas de piso.

4.4. Empinando un papalote

El problema fue seleccionado del libro de texto de décimo grado para bachilleratos cubanos, editorial Pueblo y Educación, en el tema aplicaciones de la trigonometría, capítulo 4.

Un muchacho empinando un papalote ha soltado 135 metros de hilo. El papalote se halla situado verticalmente sobre un punto que está a 75 metros de distancia del muchacho. Admitiendo que el hilo no forma onda y sin tener en cuenta la altura del muchacho. ¿A qué altura se encuentra el papalote y cuál es el ángulo de elevación?

Evento. Es una situación que en condiciones normales puede ocurrir fuera de la escuela y que podrían enfrentar los alumnos, pues la mayoría de ellos, debido a sus edades, ha experimentado el evento descrito. Al igual que algunos familiares cercanos o amigos, también pudieran estar involucrados o ser espectadores. Por lo tanto, el evento descrito tiene una alta probabilidad de presentarse en la vida real. Sin embargo, lo que no es posible que suceda es que la persona pueda medir exactamente la cantidad de hilo que ha soltado y mucho menos que el hilo, por su peso y el viento, no forme ondas.

Pregunta. En la pregunta presentada, no se considera que sean cuestionamientos que los involucrados en esta situación se harían, pues es poco probable que se pregunten a qué altura se encuentra el papalote, o si utilizarían el Teorema de Pitágoras para dar solución al problema presentado. En este tipo de situaciones es más recurrente saber la cantidad de hilo que se necesita para que el papalote pueda alcanzar una altura determinada. Por otra parte, en el texto se indica despreciar la altura del muchacho, lo que indica que la altura que se obtendrá al resolver el problema no será la altura respecto del suelo.

Información y datos. La información y los datos proporcionados no se podrían obtener con facilidad en la vida real. Para obtener la ubicación exacta del papalote sobre un punto A se deberían utilizar instrumentos de medición empleados por expertos.

Existencia. En este sub-aspecto la información no se podría obtener con facilidad, por lo que se complicaría realizar las mediciones que el problema contiene. Existe una diferencia entre la información proporcionada y lo que podría suceder en un evento fuera de la escuela.

Realismo. Este sub-aspecto se refiere a lo que en verdad se podría tener en la vida real en cuanto a la información proporcionada. Sin embargo, como se mencionó anteriormente, sería muy difícil que, al presentarse la situación, se obtengan las medidas tanto de distancia entre el muchacho y el punto mencionado en la tarea, como la medida del ángulo que se forma. Por otra parte, consideramos que la longitud del hilo proporcionada, no es muy adecuada.

Presentación. La tarea se da a conocer a los alumnos de forma escrita, por lo que el estudiante tendrá que modelar la situación con un dibujo, donde podría presentar dificultades al realizar el análisis, considerando que debe despreciar la altura del muchacho, asumir que el hilo no forma onda e identificar que se forma un triángulo rectángulo.

En el aspecto estrategias de solución, cuando un acontecimiento de este tipo se presenta en la vida real, el encargado de analizar la situación es la propia persona involucrada en ella, y como se plantea en el texto es un muchacho, no se especifica en qué rango de edad se encuentra o la edad exacta que tiene (pudiera ser un niño), por lo que sería muy complicado que dé una opinión técnica de los hechos. Debido a esto, no puede haber coincidencia en las estrategias de solución disponibles para los estudiantes que resuelven las tareas y para las personas descritas en la simulación del problema, primero porque la persona descrita en el problema no es quien propone o utiliza una estrategia de solución y, segundo, que los estudiantes no utilizarían en este caso las estrategias que emplearía el profesional indicado. En este caso el profesional indicado para realizar la toma de datos y analizar una estrategia podría ser un topógrafo.

En el aspecto de circunstancias, y más específicamente en el sub-aspecto de disponibilidad de herramientas, existe una diferencia más que significativa entre los instrumentos que utiliza un topógrafo y los que utilizaría un alumno, siendo algunos de estos completamente desconocidos para los alumnos. Los topógrafos utilizan una amplia gama de equipos para medir distancias y ángulos. Este equipo incluye **tránsitos, cintas adhesivas, teodolitos e instrumentos GPS** (sistemas de posicionamiento global, por sus siglas en inglés). Los instrumentos modernos se basan en el GPS y el láser para las mediciones. Estas herramientas son utilizadas en la toma de datos.

Dentro del sub-aspecto oportunidades de discusión, los alumnos encontrarían una carencia en la concordancia entre la situación escolar y la extra escolar, pues como ya analizamos en la tarea presentada, es poco probable que interese calcular la altura del papalote, sin embargo, si se tuviera un acercamiento con un experto en la materia, los alumnos verían con mayor interés cómo aplicar una serie de conocimientos matemáticos y discutir sobre los beneficios de aprender matemáticas.

En esta tarea, la investigación documental se basó en la búsqueda de información sobre qué profesión o qué instrumentos serían necesarios para obtener los datos que se proporcionan en el texto de la situación modelada. Lo anterior nos llevó a encontrar que los topógrafos utilizan una amplia gama de equipos para medir distancias y ángulos. El presente análisis sirvió como punto de partida para el diseño de una nueva tarea (4.8).

4.5. Investigación documental rumbo a las tareas auténticas

Las investigaciones documentales en cada uno de los problemas analizados han servido para aportar información acerca de las reestructuraciones que se realizaron con las tareas, a partir de la información encontrada se les dio los aspectos necesarios para considerarlos auténticos. Por otra parte, la investigación documental sirvió para analizar la información proporcionada en cada problemática, esta consistió en buscar documentos donde se sustentara que los datos, medidas o condiciones que presentan los problemas se apegaran a la realidad, tal fue el caso del poste de teléfono, el pintor y el muchacho empinando un papalote.

Para el diseño de la primera tarea, titulada: El choque dos automóviles, nos apegamos en todo momento al documento basado en la investigación realizada por Muñoz (2007), para tener la certeza de que existiera una concordancia entre la tarea asignada y la situación correspondiente fuera de la escuela. De esta manera, con toda seguridad contamos con una coincidencia entre la estrategia de solución que puede proponer un estudiante y la persona descrita en la situación simulada. La investigación documental en esta tarea también nos ayudó a que los estudiantes que van a resolver la tarea utilicen las mismas herramientas que utilizaría la persona descrita en la situación planteada.

En el caso de la tarea de las manualidades no se realizó investigación documental, ya que se utilizaron objetos manipulativos tanto para el diseño, como para proponer a la hora de que fuese implementada. En la tarea de la altura de la montaña nos apoyamos de un documento sobre nociones básicas de topografía.

4.6. Diseño de cuatro tareas matemáticas auténticas

El diseñar tareas que cumplan a cabalidad con todo lo que requiere una tarea de este tipo, es, sin duda, una labor para nada fácil. Se debe buscar que los contenidos matemáticos se puedan conectar con el mundo real, de manera que sean útiles y sirvan como punto de partida para la educación matemática. Está claro que para lograr eso se necesita claridad en el lenguaje utilizado en el texto de la tarea. Por otra parte, las preguntas redactadas, las transformaciones delicadas en el lenguaje ejemplifican las diferencias entre las formas de preguntar.

Son muchos los aspectos que hacen ardua la tarea de diseñar tareas auténticas, uno de ellos es la selección de contenido que se quiere trabajar, otro es que cada una de las tareas tiene su propio esquema de utilización, y así se va haciendo cada vez más complejo el trabajo de diseñar este tipo de tareas. También es de nuestro conocimiento y estudiado por diferentes investigadores, que los alumnos se apropian de una idea matemática cuando ésta es significativa para ellos.

4.6 El choque de dos automóviles

Para rediseñar el problema del automóvil que choca bajo las condiciones dadas y después de realizar la investigación documental, se analizó y decidió que la mejor aplicación del evento es en cuestión de calcular la velocidad de impacto mediante la medición de la deformación.

La instalación en los automóviles del sistema de frenado ABS por sus siglas en español (Sistema Antibloqueo de Frenos), anula las huellas de frenado en el pavimento de la carretera, por ello la investigación para conocer la velocidad con que circulaban los vehículos implicados en un accidente, se recurre a la realización de un análisis completo de las deformaciones de sus estructuras en la colisión.

En este trabajo utilizaremos la teoría de los ingenieros norteamericanos, Kenneth (1974) y de Raymond (1978); citado por Muñoz (2007), que basaron sus estudios para calcular la resistencia de la carrocería de un vehículo y obtener su coeficiente de rigidez en la realización de ensayos de impacto de un vehículo contra una barrera fija, recibiendo el nombre de: velocidad equivalente en barrera, en inglés EBS (*equivalent barrier speed*) cuya ecuación es:

$$EBS = \sqrt{\frac{2E_{def}}{m}}$$

E_{def}: energía de deformación m: peso del vehículo.

Tarea 1: El choque de dos automóviles. Sesión 1 (50 minutos).

Objetivos de la tarea:

- Medir la longitud de un segmento.
- Reconocer las unidades de medidas menores y mayores que el metro.
- Realizar operaciones de (sumas, restas, multiplicaciones y divisiones) de medidas de longitud, y aplicarlas a la resolución de una situación problemática.
- Calcular la amplitud de un ángulo agudo, aplicando razones trigonométricas.
- Calcular la longitud de un lado de un triángulo rectángulo aplicando el Teorema de Pitágoras.
- Realizar operaciones de cálculo con números racionales, mediante el uso de fórmulas.
- Convertir de una unidad de medida a otra.
- Despejar una incógnita en una expresión o fórmula.

Primer momento:

Familiarización con las partes que se deben medir en el auto, sus componentes, magnitudes y las mediciones.

Batalla: es la distancia entre los dos ejes (delantero y trasero).

Voladizo anterior: es la distancia medida desde el eje delantero al frente del auto (para choque delantero).

Voladizo posterior: es la distancia desde el eje trasero al final del auto (para choque trasero).

Longitud: Longitud del auto (distancia medida desde el para choque delantero hasta el para choque trasero).

Anchura: ancho del auto (choque frontal se mide el ancho del frente).

Observaciones:

-Para todas las mediciones utilizarán la escala: 1mm = 3.5 cm. (mm es milímetros, cm es centímetros y m es metros)

-Para medir el ancho del auto, tendremos en cuenta la parte delantera.

1) De las fotografías que se les presentarán, responda (A indica auto A y B auto B)

a) La batalla (A) mide: ______ cm = _____ m.   (B) mide: _____ cm = _____ m.

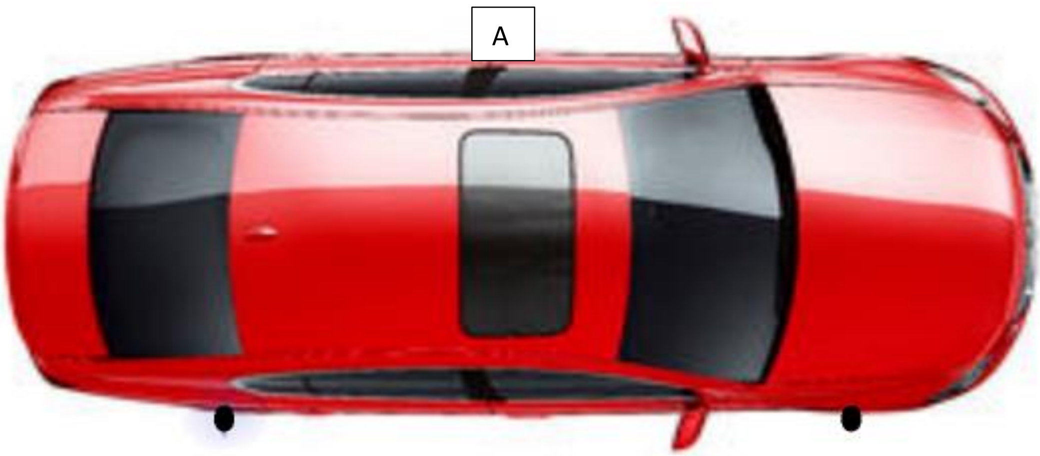
b) Complete colocando en la línea dada la longitud del:

voladizo posterior (A) = _______ cm.   voladizo anterior (A) = _______ cm. voladizo posterior (B) = _______ cm.   voladizo anterior (B) = _______ cm.

c) El largo del auto (A) es de: _______ m, y el del auto (B) es de: _______m.

d) Podemos afirmar que el ancho del auto (A) es de: _____ m.

A



B

Figura 3. Mediciones

Segundo momento (Se les plantea la tarea a los estudiantes)

El día de ayer fue noticia en varios medios de comunicación, un accidente automovilístico en la ciudad de Puebla, afortunadamente los daños solo fueron materiales. Se describió en los medios, que un automovilista (A) conducía su vehículo por una vía preferente, cuando irrumpió por su derecha de un camino asfaltado señalizado con stop, el vehículo (B), cortándole la trayectoria al realizar una maniobra para evitar chocar con un poste de teléfono.

(En la sub-tarea uno y dos, los estudiantes trabajarán de forma individual, y al finalizarlas se conformarán equipos de tres estudiantes, para debatir sobre los resultados obtenidos)

1) El perito de tránsito que atiende el caso se basó en el análisis de dos escenarios (punto de contacto y posición final de cada automóvil) para construir una figura, donde se modela la trayectoria de ambos automóviles después del choque, teniendo como referencia el punto de contacto, y luego la posición final. La figura es la siguiente:

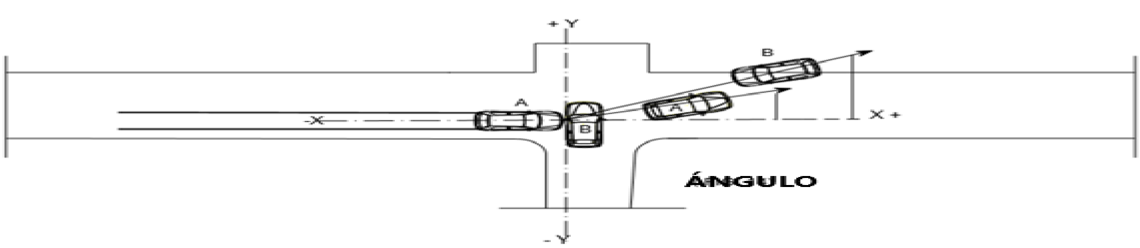
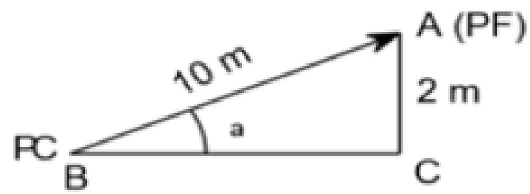
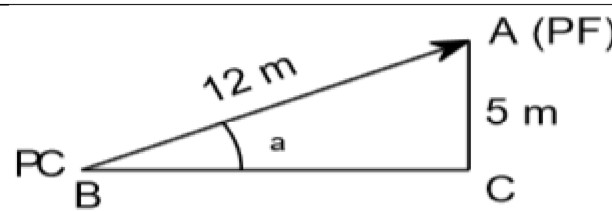


Figura 4. El choque. Cálculo de la velocidad de accidentes de tráfico, Muñoz (2007)

a) Utilizando las medidas que proporcionó el perito de tránsito, y apoyándote en las razones trigonométricas, calcula el ángulo de salida del auto A y explique cada paso.	

b) Con la experiencia de haber podido calcular el ángulo de salida del auto A, y teniendo las mediciones que nos brindó el perito del auto B: *Entonces podemos afirmar que, el ángulo de salida del automóvil B tiene una amplitud de:*	

2) Si el perito antes mencionado tiene un hermano que es amante de las matemáticas, ve el triángulo formado por las mediciones que corresponden al automóvil B, y calcula correctamente de manera rápida la longitud del lado BC aplicando el Teorema de Pitágoras. ¿Podrías plantear el procedimiento que utilizó el hermano del perito?

Entonces la longitud de BC es de ______m

Sesión 2 (1 hora). Primer momento:

Se retoma la tarea: (se forman equipos de 3 estudiantes para las sub-tareas tres, cuatro y cinco y se especifica que la escala de medición a utilizar es la misma que se usó en la familiarización con las mediciones). Al terminar cada sub-tarea se dedicarán entre 5 y 10 minutos, para que los estudiantes puedan debatir sobre lo realizado y comparar resultados.

3) Las fotos que se les proporcionarán son de un auto con las mismas características (marca, año, peso y dimensiones), que las del automóvil A, antes del accidente. De ellas van a obtener las longitudes del auto mediante la medición.

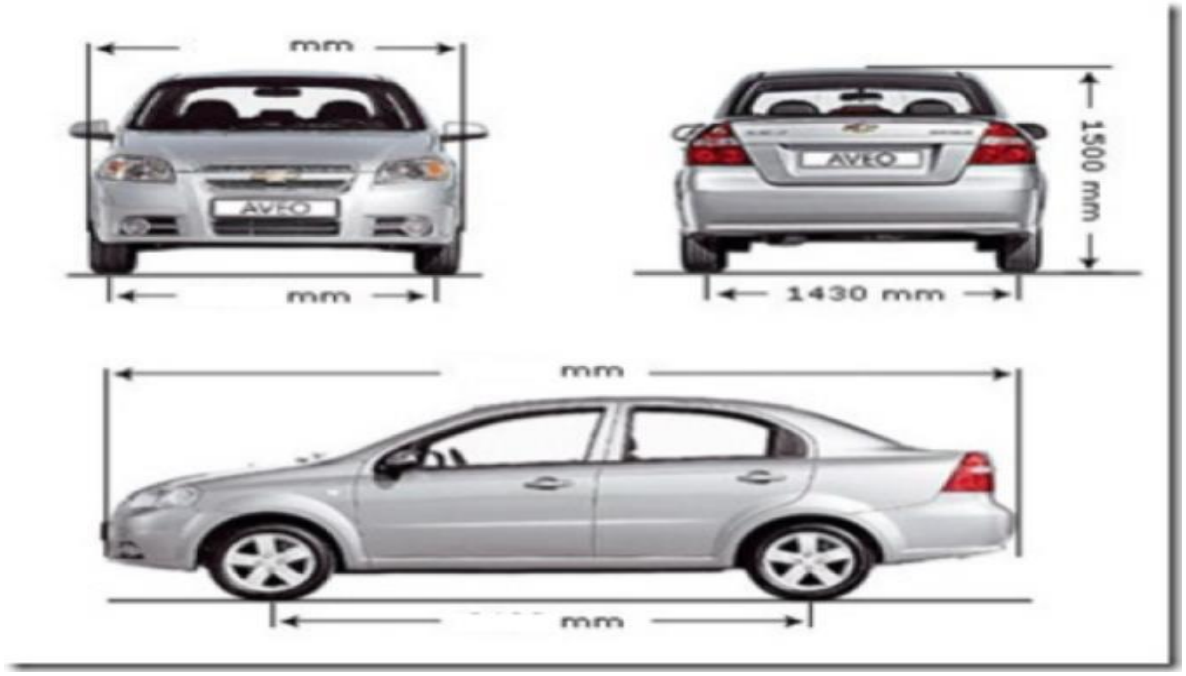
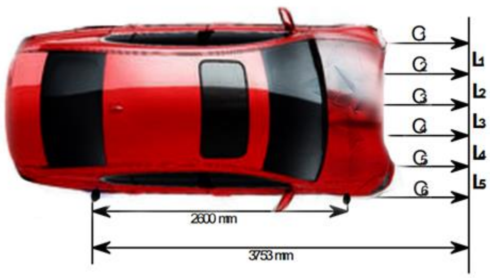


Figura 5. Mediciones para la tarea

a) Batalla = *b) Ancho =* *c) Voladizo anterior =*
d) Voladizo posterior =

4) En la siguiente fotografía del auto (A) deformado después del choque, deben trazar una línea de referencia frontal paralela al eje trasero cumpliendo con la condición: que la distancia entre la línea y el eje mencionado no sea mayor a 318 cm.

	*Observaciones:* *-Cada equipo realizará seis mediciones frontales desde la línea de referencia hasta el frente deformado, trazando rectas, comenzando por el extremo derecho del frente del automóvil.* *-Quedarían cinco intervalos de igual longitud cada uno (la longitud del intervalo la hallan dividiendo el ancho del auto entre la cantidad de intervalos).* *-A la primera medición (extremo derecho) y a la última (extremo izquierdo) le restamos 10 cm, que son las partes curvas de los extremos del frente.* *-A la longitud de cada medición de la deformación (es decir a C_1, C_2,…., C_6) tenemos que restarle la diferencia entre: la distancia que hay desde el eje trasero a la línea de referencia, y la suma de la batalla y el voladizo anterior.*

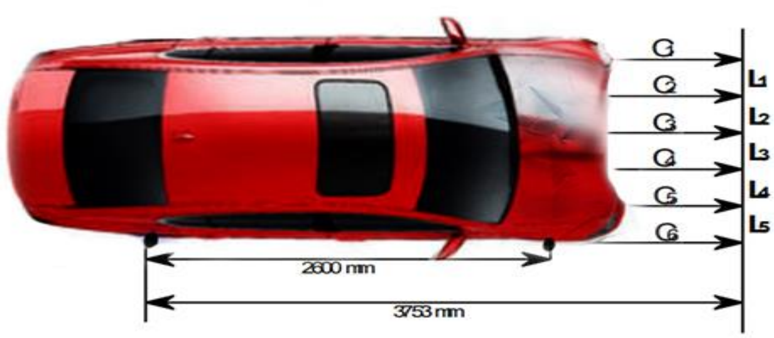


Figura 6. El auto chocado

a) Si denotamos la primera medición con C_1, la segunda con C_2, la tercera con C_3, así hasta la última con C_6 y a los intervalos con L_1, L_2, L_3, L_4, L_5. Entonces:

C_1 = ______ *cm* = _____*m*	C_2 = ______ *cm* = _____*m*
C_3 = ______ *cm* = _____*m*	C_4 = ______ *cm* = _____*m*
C_5 = ______ *cm* = _____*m*	C_6 = ______ *cm* = _____*m*

L_1 = _____*m*	L_2 = _____*m*	L_3 = _____*m*
L_4 = _____*m*	L_5 = _____*m*	L_6 = _____*m*

b) El perito necesita calcular la energía de deformación del automóvil (A), para utilizar ese resultado en análisis posteriores. Si ella se denota con E_{def} y se obtiene mediante la fórmula:

$$E_{def} = \frac{L}{5}\left[\frac{A}{2}\cdot\left(C_1 + 2\cdot C_2 + 2\cdot C_3 + 2\cdot C_4 + 2\cdot C_5 + C_6\right) + \frac{B}{6}\cdot\left(C_1^2 + 2\cdot C_2^2 + 2\cdot C_3^2 + 2\cdot C_4^2 + 2\cdot C_5^2 + C_6^2\right) + C_1\cdot C_2 + C_2\cdot C_3 + C_3\cdot C_4 + C_4\cdot C_5 + C_5\cdot C_6 + 5\cdot\frac{A^2}{2}\cdot B\right]$$

Dejando evidencias del cálculo, y utilizando las mediciones antes realizadas, calcule la energía de deformación del automóvil (A).

Datos necesarios:

A= 45.325 N/m (es el coeficiente de rigidez del auto A)

B= 296.270 N/m (es el coeficiente de rigidez del auto B)

La energía de deformación (E_{def}) se da en (Julios).

Segundo momento

Se forman equipos de 4 estudiantes para las sub-tareas restantes.

5) Conociendo que (V_I) es la velocidad de impacto, y que ella se calcula mediante la fórmula $\sqrt{\frac{2E_{def}\circ(1+tanx)}{m}}$, donde m: es el peso total del vehículo en el momento del impacto, que $tanx =$ tangente del ángulo de la fuerza principal (es la suma de los dos ángulos que ya tenemos calculados) y que el automovilista pesa 80 kg, ¿con qué velocidad impactó el automóvil (A) al automóvil (B) ?

6) Del seguro se pronunciaron afirmando, que ellos correrían con los gastos siempre que la velocidad de impacto fuese menor a 50 km/h, y que, de cualquiera otra manera, los gastos correrían por el conductor.

a) Investiguen mediante el cálculo si el seguro tendría que correr con los gastos.

b) Expliquen, cómo llegaron a la conclusión anterior.

Al realizar el diseño de esta nueva tarea, la cual se analizó bajo los aspectos de la teoría de Palm y los elementos para el diseño de tareas, pudimos verificar que se cumplieron los siguientes aspectos de una tarea auténtica:

Evento. Situación simulada del mundo real (se tomó en cuenta la investigación documental).

Pregunta. En todo momento se cuidó que existiera concordancia entre la tarea planteada y la situación fuera de la escuela.

Información (existencia, realismo y especificidad). Los datos proporcionados en la tarea presentada fueron obtenidos de la investigación en accidentes de tráfico y reglamento de tránsito.

Presentación (modo y uso del lenguaje). La tarea se le da a conocer a los estudiantes de manera escrita, presentándole fotografías de autos reales. La estructura de las oraciones en la presentación de la situación de trabajo es adecuada.

Estrategia de solución. La manera en que los alumnos resolverán la tarea planteada, será similar a la forma en como lo resuelven las partes involucradas.

Circunstancias (disponibilidad de herramientas externas, dirección, consulta y colaboración, oportunidades de la discusión, Tiempo, consecuencias de la solución de éxito de la tarea, o fracaso). A la hora de resolver la tarea, los estudiantes utilizarán herramientas de medición, calculadora, manipularán las fotografías, en el texto de la tarea contarán con una guía en forma de consejos para que no se les dificulte el trabajo, tienen la oportunidad de consultar y trabajar colaborando dentro del grupo. También tienen la posibilidad de preguntar y discutir el significado y la comprensión de la tarea. Las restricciones de tiempo que se hicieron son tales, que no causen diferencias significativas en las posibilidades de resolver la tarea. Por otra parte, se cuidó que no exista presión sobre los alumnos y se trata de mantener una motivación por el problema, para que no afecte el proceso de resolución. Respecto al requisitos de la solución. La idea de la solución puede ser interpretada en un sentido amplio.

La investigación documental jugó un papel fundamental en el diseño de esta tarea, para los datos, condiciones y la situación simulada nos apoyamos en todo momento del trabajo de Muñoz (2007)

4.7 Automóvil en el periférico

Objetivos de la tarea:

- Calcular longitudes con números racionales mediante el uso de fórmula.
- Despejar una incógnita o magnitud en una expresión.
- Comparar valores que corresponden a longitudes halladas.
- Calcular por ciento.
- Identificar proporcionalidad directa, o calcular una incógnita mediante la regla de tres

Se les plantea la tarea a los estudiantes:

El miércoles, 18 de marzo de 2020 fue publicada en la página: www.diariocambio.com.mx la noticia: ***¡Aguas! Ya hay más foto-multas en Periférico y Calzada Zavaleta****. La primicia de la publicación fue aclarar, que el límite de velocidad en el Periférico Ecológico es de 90 km/h, y en la Calzada Zavaleta de 70 km/h.*

Dos días después de ser pública la noticia anterior, en horas de la mañana, un automóvil circulaba a 90 km/h por el periférico de la ciudad de Puebla, al observar a un camión detenido en su carril, el conductor frena bruscamente, originándose una deceleración de 6.87 m/s, y tardando tres segundos en detenerse el automóvil. De esta manera no se produjo el choque.

(Las actividades a y b las resolverán de manera individual)

a) En un estudio que se estaba realizando ese día, por varias autoridades de tránsito, se tomó como ejemplo la situación planteada para calcular mediante la fórmula: $e = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} a \cdot t^2$

la distancia a la que se encontraba el auto del camión, cuando fue visto por el conductor.

Donde:

e *es el espacio en metros*

$\boldsymbol{v_0}$ *es la velocidad con la que circulaba el auto en el momento de ser visto el camión.*

t *el tiempo en segundos.*

a la aceleración.

¿Podrías calcular dicha distancia en metros, dejando evidencia de tus cálculos?

b) Para calcular la deceleración de un automóvil, las autoridades antes mencionadas emplean la misma ecuación, pero realizando un despeje. ¿Podrían indicar paso a paso, cómo queda la ecuación que permite hallar la deceleración?

(Para resolver las actividades c y d se conformarán equipos de cuatro estudiantes)

c) Se tiene conocimiento que en la autopista a Atlixco se permiten hasta 120 km/h. Suponiendo que un vehículo hubiese circulado a dicha velocidad, detectándose un automóvil detenido en el mismo carril a 50 metros, y al conductor aplicar los frenos el vehículo tarda cuatro segundos en detenerse por completo. Responda

1. Se habría evitado impactar al auto detenido. Si___ no___. Explique mediante el cálculo y exprese con sus palabras el significado del resultado.

2. ¿A Cuántos metros del auto se detiene el vehículo que estaba en movimiento?

d) En la noticia publicada también se aclaró, que las multas por circular a exceso de velocidad en dichas vialidades van desde los 560.28 pesos hasta los 800.40 pesos, pero si el pago se realiza dentro de los primeros 10 días a partir de ser notificado, se otorgará un descuento del 25 por ciento. De aquí, responda:

1. Si un automovilista fue multado por rebasar el límite de velocidad, y pagó un total de 510.30 pesos por su multa al cuarto día de ser notificado, ¿de cuánto era el monto de su multa?

2. ¿Cuántos pesos menos tendría que pagar una persona, cuyo monto de su multa es de 800.40 pesos, si paga antes de los 10 días de ser notificado?

Al realizar el diseño de esta nueva tarea, analizada bajo los aspectos de la teoría de Palm y los elementos para el diseño de tareas, pudimos verificar que se puede considerar una tarea auténtica por los siguientes aspectos:

Evento. Situación simulada del mundo real (se tomó en cuenta la investigación documental y datos reales emitidos por las autoridades de tránsito en Puebla).

Pregunta. Cuidamos con detenimiento que existiera concordancia entre la tarea planteada y la situación fuera de la escuela.

Información (existencia, realismo y especificidad). Los datos proporcionados en la tarea presentada fueron obtenidos de la investigación en accidentes de tráfico y reglamento de tránsito.

Presentación (modo y uso del lenguaje). La tarea se le da a conocer de manera escrita. La estructura de las oraciones en la presentación de la situación de trabajo es adecuada.

Estrategia de solución. La manera en que los alumnos resolverán la tarea diseñada, será similar a la forma que pudieran resolverla las partes que podrían estar involucradas.

Circunstancias (disponibilidad de herramientas externas, dirección, consulta y colaboración, oportunidades de la discusión, Tiempo, consecuencias de la solución de éxito de la tarea, o fracaso). A la hora de resolver la tarea, los estudiantes podrán utilizar calculadora, en el texto de la tarea contarán con una guía en forma de consejos evitando que se les dificulte el trabajo, tienen la oportunidad de consultar y trabajar colaborando dentro de los equipos de trabajo que se conformen. También tienen la posibilidad de preguntar y discutir el significado y la comprensión de la tarea. Las restricciones de tiempo se hicieron de manera, que no causen diferencias significativas en las posibilidades de resolver la tarea. Luego, se cuidó que no exista presión sobre los alumnos y se trata de mantener una motivación por el problema, para que no afecte el proceso de resolución.

Requisitos de la solución. La idea de la solución puede ser interpretada en un sentido amplio.

4.8. Las manualidades

Para rediseñar el problema del pintor después de realizar la investigación documental, se analizó y decidió que la mejor aplicación del evento sería en relación con el cálculo del área lateral y la de la base del cuerpo (prisma recto de base rectangular), utilizando como trabajo intermedio el lenguaje algebraico.

Objetivos de la tarea:

- Convertir unidades de medidas cuadradas.

- Traducir del lenguaje común al lenguaje algebraico.
- Identificar una expresión algebraica que modele el área lateral de un cuerpo.
- Identificar una expresión algebraica que modele el área de la base de un cuerpo.
- Resolver una ecuación cuadrática.

Una empresa contrató a la familia de Jorge, que se dedica al negocio de las manualidades. La empresa le informó que les proporcionaría el material para la confección de una gran cantidad de cajas de cartón, para envasar pequeños productos.

Las indicaciones de la empresa fueron las siguientes:
-El área de la superficie de cada caja abierta debe ser de 0.18 m^2.
-La altura debe ser de 12 cm.
-Deben medir 10 cm más de largo que de ancho.
Observación:
Los incisos a, b y c se trabajarán de forma individual (40 minutos), y para los restantes se formarán equipos de 3 estudiantes (50 minutos).

a) ¿Cómo le explicarías a Jorge para que ayude a su familia a convertir los 0.18 m^2 en cm^2?

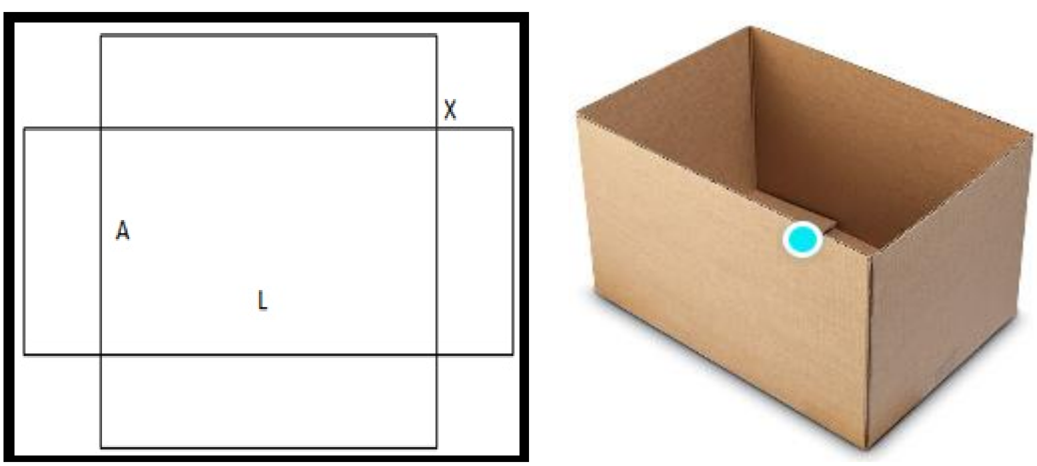


Figura 7. Plantilla y caja abierta

b) Si Jorge te pidiera ayuda y te propone designar con la literal A el ancho de la caja, ¿cómo representarías el largo? ____________________

c) Utilizando la información anterior, ¿cómo lo ayudarías a representar el área de la base? ____________________ *y ¿el área de una de una de las cuatro caras?* _______________

d) La familia de Jorge intentó resolver la situación descrita por tanteo, para ello hicieron una tabla, donde registraron los resultados obtenidos, asignando valores al ancho de la caja, para calcular el largo y el área total de la caja (abierta).

¿Podrían completar la siguiente tabla registrando los resultados que obtendrían, al resolver el problema por tanteo?

Tabla 2. Registro de resultados del problema por tanteo

Dimensiones de la caja			Áreas de las caras y la base					Área total
A	b	H	C 1	C2	C3	C4	Base	

e) Jorge le plantea a su familia una ecuación que le permite hallar el acho y el largo de la caja. ¿Podrían encontrar ustedes esa ecuación? Si __ No __. En caso de ser no, diga por qué____

En caso afirmativo, expliquen, ¿Cómo obtienen dicha ecuación?

f) ¿Cuál es la solución de la ecuación? ___________________________________

Expliquen el procedimiento que utilizaron _______

Al realizar el diseño de esta última tarea, analizada bajo los aspectos de la teoría de Palm y los elementos para el diseño de tareas, pudimos verificar que se considera una tarea auténtica por los siguientes aspectos:

Evento. Situación simulada del mundo real (se tomó en cuenta la investigación documental).

Pregunta. Se insistió en todo momento en lograr que existiera concordancia entre la tarea planteada y la situación fuera de la escuela.

Información (existencia, realismo y especificidad). Los datos proporcionados en la tarea presentada fueron obtenidos de la investigación documental y de mediciones reales con objetos (cajas) manipulativos.

Presentación (modo y uso del lenguaje). La tarea se da a conocer de manera escrita. La estructura de las oraciones en la presentación de la situación de trabajo es apropiada.

Estrategia de solución. La manera en que los alumnos resolverán la tarea diseñada, será similar a la forma que pudieran resolverla las partes que podrían estar involucradas.

Circunstancias (disponibilidad de herramientas externas, dirección, consulta y colaboración, oportunidades de la discusión, Tiempo, consecuencias de la solución de éxito de la tarea, o fracaso). A la hora de resolver la tarea, los estudiantes podrán utilizar calculadora e instrumentos de medición, en el texto de la tarea se proporciona una guía en forma de consejos para evitar que se les dificulte el trabajo, tienen la oportunidad de consultar y trabajar colaborando dentro de los equipos de trabajo que se conformen. De igual manera tienen la posibilidad de preguntar y discutir el significado y la comprensión de la tarea. Las restricciones de tiempo se hicieron de manera, que no causen diferencias significativas en las posibilidades de resolver la tarea. Luego, se cuidó que no exista presión sobre los alumnos y se trata de mantener una motivación por el problema, para que no afecte el proceso de resolución.

Requisitos de la solución. La idea de la solución puede ser interpretada en un sentido amplio.

4.9. La altura de la montaña

Para rediseñar el problema del muchacho empinando un papalote bajo las condiciones dadas y después de realizar la investigación documental, se analizó y decidió que la mejor aplicación del evento es en cuestión de calcular la altura de una montaña haciendo uso de nociones técnicas sobre la aplicación de las funciones trigonométricas en la topografía.

Sesión 1 (40 minutos)

Objetivos de la tarea:

- Identificar ángulos de inclinación y ángulos de elevación.
- Calcular la amplitud de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo.
- Identificar la función trigonométrica a utilizar en la tarea.

- Calcular razones trigonométricas con números racionales.
- Convertir unidades de medidas (de kilómetro a metro).

Primer momento: sub-tarea 1

Se forman equipos de cuatro estudiantes. Luego se les orienta que seleccionen a un estudiante por equipo. Seguidamente se le pide a cada uno de los estudiantes seleccionados que pasen al frente del salón de clases y se ubiquen de frente a cualquier pared.

a) Inmediatamente se les orienta a los otros integrantes de cada equipo que midan la estatura de su representante con una cinta métrica.
b) Posteriormente se procede a medir con la cinta métrica la distancia del punto más alto de la pared a la cabeza del integrante seleccionado.
c) Calcula la amplitud del ángulo de elevación y el ángulo de inclinación.

Segundo momento: Sub-tarea 2

Un topógrafo utiliza un instrumento denominado teodolito, para medir el ángulo de elevación entre el nivel del piso, y la cumbre de la montaña más alta del Escambray o Macizo de Guamuhaya situado en las provincias de Sancti Spíritus, Villa Clara y Cienfuegos, en la zona central de Cuba. En un punto, midió un ángulo de elevación de 60°, y un kilómetro más lejos de la base de la montaña, el ángulo de elevación medido es de 31,2°. ¿Cuántos metros de altura tiene la montaña?

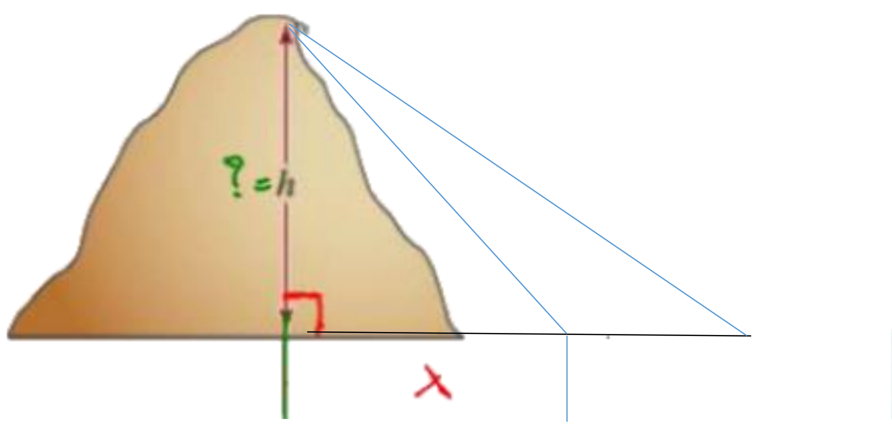


Figura 8. La montaña

Al terminar el diseño de esta nueva tarea, se realizó el análisis bajo los aspectos de la teoría de Palm y los elementos para el diseño de tareas, pudimos verificar que se cumplieron todos los aspectos para afirmar que una tarea es auténtica:

Evento. Situación simulada del mundo real (se tomó en cuenta la investigación documental).

Pregunta. En todo momento se cuidó que existiera concordancia entre la tarea planteada y la situación fuera de la escuela, la altura que obtendrán al resolver la tarea será la altura real de la montaña.

Información (existencia, realismo y especificidad). Los datos proporcionados en la tarea presentada fueron obtenidos de la investigación documental. Presentación (modo y uso del lenguaje). La tarea se le da a conocer a los estudiantes de manera escrita, presentándoles una figura de la situación simulada. La estructura de las oraciones en la presentación de la situación de trabajo es adecuada.

Estrategia de solución. La manera en que los alumnos resolverán la tarea planteada fue similar a la forma en como lo resuelven las partes involucradas.

Circunstancias (disponibilidad de herramientas externas, dirección, consulta y colaboración, oportunidades de la discusión, Tiempo, consecuencias de la solución de éxito de la tarea, o fracaso). A la hora de resolver la tarea, los estudiantes utilizarán herramientas de medición, calculadora, en el texto de la tarea contarán con una guía en forma de consejos para que no se les dificulte el trabajo, tienen la oportunidad de consultar y trabajar colaborando dentro del grupo. También tienen la posibilidad de preguntar y discutir el significado y la comprensión de la tarea. Las restricciones de tiempo que se hicieron son tales que no causen diferencias significativas en las posibilidades de resolver la tarea. Por otra parte, se cuidó que no existiera presión sobre los alumnos y se trató de mantener una motivación por el problema, para que no afectara el proceso de resolución.

Requisitos de la solución. La idea de la solución puede ser interpretada en un sentido amplio.

CAPÍTULO V. IMPLEMENTAR LA TAREA Y ANALIZAR EL GRADO DE ACEPTACIÓN DE LOS ESTUDIANTES

5.1. El papel del profesor en el momento de implementar las tareas

Es bien sabido que el docente prepara y planea de acuerdo con los programas o directrices del Ministerio de Educación o política educativa vigente, que es el que orienta y propone los aprendizajes que deben adquirir los estudiantes. Asimismo, el docente se limita a transmitir lo que el órgano de control le está sugiriendo, con el fin de cumplir y "garantizar" los objetivos y metas de aprendizaje que deben tener los aprendices en los diferentes niveles de escolaridad. Aunque en los últimos años se ha abogado por hacer que los estudiantes sean los protagonistas de su propio aprendizaje, no son pocos los docentes que están influenciados en mayor o menor medida por el modelo de enseñanza tradicional, de una o de otra forma los docentes se ven influenciados por el entorno donde laboran, donde la escuela tradicional es predominante y siempre se termina realizando lo mismo y algunas veces enseñando en la forma en que se aprendió.

Según Caicedo (2019), es necesario considerar una intervención en el trabajo de aula con el fin de reflexionar sobre la práctica pedagógica que debe ser más centrada en los estudiantes, donde el docente se convierte en un mediador entre el sujeto y el objeto de estudio. En consecuencia, se propone una práctica de aula que rompa con el esquema convencional y que se acerque más a las demandas (participación, trabajo en equipo y experimentación) que están presentes en la enseñanza actual, donde, los aprendices sean partícipes de su proceso de aprendizaje.

En este sentido, uno de los fines de esta investigación a la hora de implementar las dos tareas de las cuatro que se diseñaron, fue que el profesor jugara un papel de comunicador en todo momento para que, en la medida que los estudiantes se involucraran en los procesos, fuese allí donde encontrara un verdadero sentido de lo que está aprendiendo y el para qué lo aprende, al mismo tiempo, lograr que los estudiantes desarrollarán la creatividad al generar respuestas, proponer soluciones y preguntas no esperadas que se convirtieran en un indicador de innovación por parte de ellos mismos en la búsqueda de resolver situaciones, utilizando las herramientas que disponibles en el contexto.

Por otra parte, al estar presente el investigador en la ejecución (implementación de las tareas) propusimos y programamos cuatro sesiones de resolución de problemas tal y como aparecen en los libros de textos de Matemática para estudiantes de décimo grado en bachilleratos cubanos, referentes a resolución de triángulos rectángulos aplicando razones trigonométricas. Estas sesiones fueron programadas para: a) impedir que en el momento de implementar las tareas los estudiantes vieran al investigador como un extraño y de alguna manera no se mostraran nerviosos, y b) lograr hacer sensible la diferencia entre estas tareas y las diseñadas.

5.2. Familiarización de los estudiantes con las tareas y ejecución

Según Martínez et al. (2016) el trabajo en equipo es una de las habilidades de mayor énfasis en el tiempo actual ya que está demostrado de que el ser humano no aprende solo, el proceso de aprendizaje se da por la interacción con sus semejantes y así poder evaluar situaciones por medios tradicionales o tecnológicos donde la experimentación se convierte en un aliado en la búsqueda de patrones, o respuestas a interrogantes que en el modelo tradicional se responderían con mayor dificultad. Es por ello que para familiarizar a los estudiantes con las tareas que se les proponen resolver, inicialmente se tienen en cuenta las tareas del libro de texto que utilizan cotidianamente y que resolvieron en las sesiones con presencia del investigador como preámbulo, y luego se formaron equipos para el trabajo colaborativo.

En este sentido pretendimos que, si los estudiantes trabajan en equipo para lograr conjeturar sobre sus respuestas y estrategias que utilizaron para llegar a la solución, aseguraríamos mantenerlos motivados, y de alguna manera enchufar esos conocimientos aplicados a las tareas a resolver en el momento que les corresponda trabajar de manera individual. Es por ello que, en la primera tarea se les dan instrucciones precisas para que hagan las mediciones correspondientes y de esta forma interpreten su significado, así como para comprender el uso que se les dará en el transcurso de la resolución. En el caso específico de la primera tarea se hizo un acercamiento a los elementos que deben conocer, en un primer momento se planteó hacerles conocer a los estudiantes las partes que se deben medir en el auto, sus componentes, magnitudes y las mediciones.

Batalla: es la distancia entre los dos ejes (delantero y trasero).

Voladizo anterior: es la distancia medida desde el eje delantero al frente del auto (para choque delantero).

Voladizo posterior: es la distancia desde el eje trasero al final del auto (para choque trasero).

Longitud: Longitud del auto (distancia medida desde el para choque delantero hasta el para choque trasero).
Anchura: ancho del auto (choque frontal se mide el ancho del frente).
Para la segunda tarea a implementar (de las tareas diseñadas es la cuarta) se formaron equipos de 3 estudiantes cada uno, para que se involucraran en el trabajo colaborativo y recolectaran datos en su propio entorno y realidad. De esta manera también se espera que puedan retroalimentarse entre ellos, ya que una parte fundamental en el proceso educativo es la retroalimentación en el salón de clases, lo cual implica utilizar las herramientas y procedimientos adecuados para brindar información a los estudiantes sin tener la necesidad de que sea dada por el propio profesor; es este uno de los factores que hace la diferencia para lograr llegar a los aprendizajes esperados. De esta manera se busca ofrecer oportunidades para que los estudiantes identifiquen por sí mismos sus fortalezas, dificultades y áreas de mejora, todo esto bajo un clima de confianza en el que el estudiante se sienta cómodo.

Respecto a la ejecución se buscó encaminar a los estudiantes hacia un aprendizaje autónomo, y promover la utilización independiente de los conocimientos adquiridos, con lo que esperábamos el aumento de la motivación al descubrir su aplicabilidad. De esta manera intentamos en todo momento diseñar entornos de aprendizaje que consideraran la utilización (contextualizada e integrada en el currículum). También nos propusimos despertar el interés de los estudiantes (el deseo de aprender) hacia los contenidos de la asignatura (establecer relaciones con sus experiencias vitales, y con la utilidad que obtendrán, se logró establecer un buen clima relacional, afectivo, que proporcionó niveles elevados de confianza y seguridad.

Durante el desarrollo de las actividades el profesor e investigador se dedicaron a observar el trabajo de los estudiantes y actuar como dinamizador y asesor. Actuar como consultor para aclarar dudas de contenidos, aprovechar sus errores para promover nuevos aprendizajes, y conformar los equipos en los momentos que las tareas lo requirieron, así como estimular y aceptar la iniciativa y autonomía de los estudiantes. Se permitió que el estudiante dirigiera el aprendizaje, cambiara la estrategia y cuestionara el contenido. Se fomentó el diálogo y la colaboración entre los alumnos.

5.3. Análisis del grado de aceptación y resultados de algunos estudiantes

Primeramente, nos detendremos a ver si el problema ha sido transferido y asumido por los estudiantes, si los conceptos, propiedades, procedimientos y argumentaciones que se ponen en juego concuerdan con los pretendidos. La actividad formativa de los profesores con relación al análisis de las interacciones en el aula y el uso de recursos necesarios para resolver las tareas. Desde el punto de vista de la observación pudimos darnos cuenta rápidamente tanto el profesor del grupo como el investigador, que los estudiantes se sintieron atraídos por la manera en que se les presentó cada tarea. En el caso de la tarea del choque de los dos automóviles les impresionó mucho un corto video que se les presentó para que sirviera de introducción a la tarea y comprendieran cuando se les habla de punto de impacto y punto final del coche chocado.

Por otra parte, se pudo constatar a simple vista la motivación de cada uno de los estudiantes al formar equipos para realizar las mediciones pertinentes, y reconocer desde el punto de vista ingenieril las partes que conforman a un auto, así como las medidas tomadas de estas partes en milímetros. Algo que les llamó la atención a los estudiantes fue que se preguntaron para qué tenían que hacer la conversión de milímetros a centímetros, pero cuando se percataron de la utilidad de dicha conversión, muchos quedaron impresionados. En los equipos comentaban sobre las distancias medidas y se escuchaba como repetían que después de la conversión se obtenía la longitud real del automóvil.

En el caso donde tenían que calcular el ángulo de salida de cada automóvil comentaban que les ayudó mucho la figura de análisis proporcionada, la que prácticamente les mostró la relación entre cateto e hipotenusa. Ya en las mediciones de la deformación frontal del auto chocado comentaban entre ellos, e incluso preguntaban al investigador si en realidad ese trabajo de medición lo realizaban los peritos de tránsito, desde este momento de la ejecución se pudo constatar la manera en que se involucraban dos estudiantes que según la profesora del grupo le hacían rechazo a la asignatura, estos alumnos se mostraron con un grado de motivación muy alto durante toda la ejecución.

A la hora de realizar el cálculo de la energía de deformación del automóvil A, utilizando la fórmula proporcionada les impactó que se les permitiera el uso de la calculadora, ya que no lo tienen permitido en las clases comunes de la asignatura, en esta ocasión varios alumnos preguntaron por qué se les permitía usar la calculadora en este caso y en otras clases no, donde la profesora les comenta que el investigador le daría respuesta a dicha pregunta. Al comentarles que la intención era que emplearan las herramientas que podrían utilizar los peritos de tránsito se pudo notar en los gestos y movimiento de sus rostros el grado de conformidad y satisfacción.

En el segundo momento de la tarea la totalidad de los estudiantes, incluyendo a la profesora, quedaron muy impresionados al conocer la fórmula para calcular la velocidad de impacto, y que los elementos que conforman a dicha fórmula son todos aquellos que ya se habían hallado anteriormente. Muchos comentaban: ¡mmm, mira para qué era la tangente del ángulo que calculamos, no y la E_{def} y el peso del auto también!. Todo esto que se pudo percibir fue muy interesante, tanto desde el nivel de motivación como el compromiso con el que se resolvió esta tarea.

Al concluir la sub-tarea seis se les pidió a los estudiantes que intercambiaran entre ellos la estrategia utilizada para dar respuesta a la problemática planteada, y muchos enunciaron que lo que hicieron fue una simple comparación entre la velocidad de impacto y la velocidad límite propuesta. Algunos otros (fueron la minoría) no pudieron llegar a la respuesta correcta porque no identificaron que tenían que trabajar con la velocidad de impacto calculada. Luego de concluida la ejecución se instaló una breve charla con el grupo donde se les preguntó: ¿En los libros que utilizan en sus clases de matemáticas han trabajado tareas parecidas a la que terminan de resolver? La respuesta fue instantánea: no. También se les preguntó, ¿cómo se sintieron durante todo el tiempo de la ejecución?, unos respondieron que entusiasmados, otros que alegres al poder trabajar en equipos y ver que cada cosa que hacían tenía sentido.

Respecto a la tarea de las manualidades se le proporcionó a cada estudiante una plantilla (material manipulativo). En el primer inciso de la tarea muchos realizaban la conversión mediante una regla de tres, otros hacían como tipo una escalerita e identificaban si debían multiplicar, dividir y por qué hacerlo. En el segundo inciso se podía ver en sus caras y escuchar sus comentarios entre compañeros, unos les decían a otros que debían tener en cuenta las indicaciones iniciales y así conjeturaban entre ellos, es decir que desde ese momento ya la totalidad de los alumnos estaban motivados y enganchados por la situación descrita en el texto de la tarea.

En el inciso donde se les pedía representar mediante el trabajo realizado anteriormente el área de la base y el área de una de sus caras, la gran mayoría de los estudiantes representaron expresiones para el área de la base y sus cuatro caras, lo que nos indicó el alto grado de aceptación e interés por resolver la tarea. Mientras más se avanzaba en la ejecución más involucrados se notaban los alumnos, siendo así que en el inciso d) los mismos dos estudiantes que según la profesora del grupo hacían rechazo a la asignatura se sintieron identificados por la familia de Juan, porque según ellos aplicarían ese método para resolver el problema, es decir que lo harían por tanteo.

Se les hizo un seguimiento visual a estos dos estudiantes mediante la resolución de este inciso, de esta manera se pudo observar lo comprometidos que se mostraron en todo momento y los deseos mostrados por resolver la tarea, evidentemente necesitaron de la ayuda de sus compañeros en determinados momentos porque no tenían conocimiento de las fórmulas y no estaban utilizando el valor de la altura que se proporcionó inicialmente, pero con esta ayuda lograron resolver el inciso y se sintieron tan emocionados que uno de ellos levantó la mano con fuerza como señal de logrado.

La parte más interesante o la que más llamó la atención, tanto a la profesora del grupo como al investigador, fue la parte final de la tarea en la que debían hallar una ecuación que les permitiera encontrar el ancho y el largo de cada una de las cajas. Aquí fue muy interesante observar los análisis que realizaron los estudiantes, casi en su totalidad, donde asumieron con mucha seguridad que la base era un rectángulo. En algún momento una alumna mencionó que la base también podía ser un cuadrado, pero la respuesta que le dio una de sus compañeras fue que las indicaciones iniciales no permitían que fuese un cuadrado porque el largo es mayor que el ancho.

Otro aspecto que llamó mucho la atención fue que una gran parte de los estudiantes trabajaron de dos maneras, unos con datos del inciso donde debían completar la tabla por tanteo (no es correcto del todo), y otros trabajaron con la fórmula para calcular el área total de la caja sin tapa (razonamiento correcto), pero en ambos casos se evidenció la concentración, motivación y los deseos expresados por todos los estudiantes para llegar a la ecuación pedida. Todos fueron muy claros a la hora de explicar los pasos que siguieron para encontrar dicha ecuación y el procedimiento utilizado para resolverla.

En el caso de los alumnos que trabajaron con la fórmula del área total de la caja sin tapa, estos pudieron verificar que la longitud del largo superaba en diez centímetros al ancho, por lo que tomaron ese análisis como comprobación. En la implementación de estas dos tareas se pudo corroborar que estas estimulan la iniciativa, independencia y creatividad del educando. Para ello se creó un clima favorable alrededor de la implementación de las tareas, utilizando con eficiencia los recursos disponibles. En las charlas que se mantuvieron con el grupo al finalizar cada una de las tareas se evidenció el grado de satisfacción de los estudiantes, el interés despertado por este tipo de tareas. Inclusive ellos mismos afirmaron que de este modo disfrutan de las matemáticas que están aprendiendo y ven la utilidad de las matemáticas para ellos.

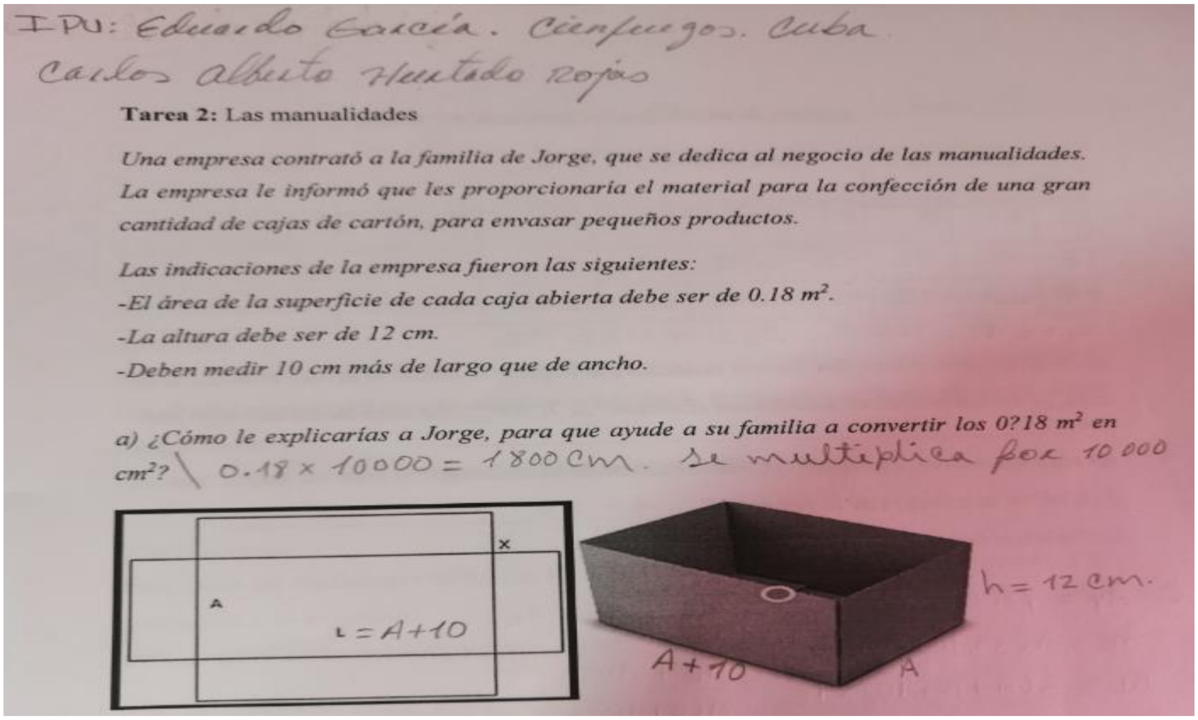
De estas charlas se pudo concluir que la tarea de las manualidades tuvo un grado de aceptación mayor que la del choque de los dos automóviles, esto resultó bastante interesante porque fue todo lo contrario a lo que pensó el investigador antes de la ejecución. Inicialmente se pensó que la terea de mayor impacto iba a ser la del choque de los dos automóviles, debido a lo novedoso que podría resultarles a los estudiantes todo lo de las nociones técnicas y el trabajo que realizan los peritos de tránsito, así como hacerles saber que ese mismo trabajo es el que se realizaría en la tarea; pero aquí juega un papel fundamental el contexto de los educandos, siendo este en un país donde la cultura automovilística es un poco antigua, el poder adquisitivo es bastante bajo y no todos pueden adquirir con facilidad un automóvil.

En este mismo sentido, al resultar difícil la adquisición de un automóvil y la poca circulación de estos, comparado con otros países o ciudades no es muy común que los estudiantes sean espectadores o se encuentren involucrados en una situación de este tipo. Aun así, lo novedoso de esta tarea, y al ver los estudiantes que de la manera que resuelve la tarea es la misma que utilizaría el perito de tránsito, fue motivo suficiente para que se sintieran motivados, comprometidos con su resolución y el grado de aceptación fuese alto.

Seguidamente se muestra el análisis realizado por tres estudiantes en la tarea de las manualidades:

Estudiante 1

En la primera parte de la ejecución el estudiante mostró y puso en práctica sus conocimientos sobre conversión de unidades de medidas, específicamente convertir de metros cuadrados a centímetros cuadrados. Luego hizo una traducción correcta del lenguaje común al lenguaje algebraico denotando como A_b al área de la base y A_c al área de las caras laterales como se puede observar en la fotografía de la Figura 9.



IPU: Eduardo García. Cienfuegos. Cuba
Carlos Alberto Hurtado Rojas

Tarea 2: Las manualidades

Una empresa contrató a la familia de Jorge, que se dedica al negocio de las manualidades. La empresa le informó que les proporcionaría el material para la confección de una gran cantidad de cajas de cartón, para envasar pequeños productos.

Las indicaciones de la empresa fueron las siguientes:

-El área de la superficie de cada caja abierta debe ser de 0.18 m^2.

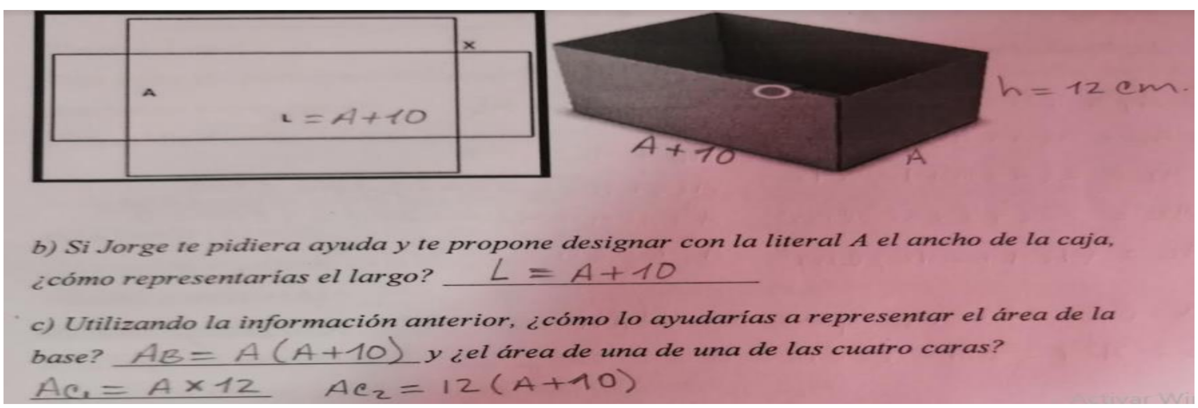
-La altura debe ser de 12 cm.

-Deben medir 10 cm más de largo que de ancho.

a) ¿Cómo le explicarías a Jorge, para que ayude a su familia a convertir los 0?18 m^2 en cm^2? 0.18 × 10000 = 1800 cm. se multiplica por 10 000

Figura 9.

En la Figura 10 podemos observar el planteamiento del alumno respecto a la expresión que representaría el área de la base y el área de dos de sus caras laterales.

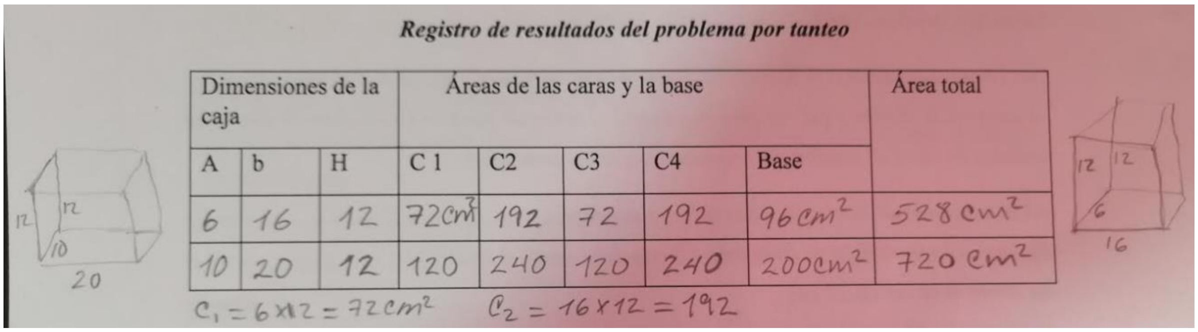


b) Si Jorge te pidiera ayuda y te propone designar con la literal A el ancho de la caja, ¿cómo representarías el largo? L = A+10

c) Utilizando la información anterior, ¿cómo lo ayudarías a representar el área de la base? AB = A (A+10) *y ¿el área de una de una de las cuatro caras?*
Ac1 = A × 12 Ac2 = 12 (A+10)

Figura 10

Luego, en la sub-tarea donde debían asignar valores al ancho de la caja para obtener el largo y el área total de dicha caja, el alumno asignó los valores al ancho sin analizar que tenía que resultarle el área total de la caja sin tapa que se le proporciona al inicio de la tarea, es decir en las indicaciones de la empresa. Aquí se pudo asumir que el estudiante se apresuró en la resolución o no está acostumbrado a resolver este tipo de tareas. En este caso asignó valores cualesquiera al ancho y partiendo de ellos si encontró correctamente el largo, el área de cada cara lateral y el área total de la caja sin tapa como se pedía. Al final de este inciso donde se dedicaron algunos minutos para que entre los alumnos comentaran sobre sus respuestas y resultados, este alumno se percató que el área total que debería obtener era de 0,18 metros cuadrados. En la siguiente figura se puede observar su trabajo.



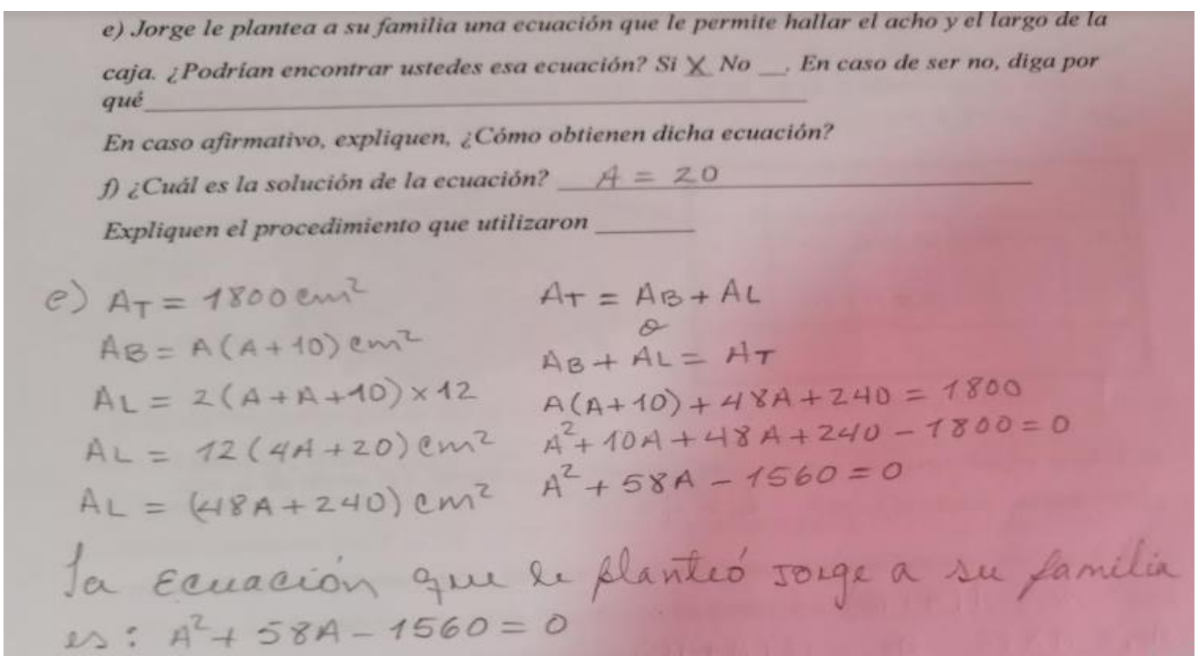
Registro de resultados del problema por tanteo

Dimensiones de la caja			Áreas de las caras y la base					Área total
A	b	H	C 1	C2	C3	C4	Base	
6	16	12	72cm²	192	72	192	96cm²	528 cm²
10	20	12	120	240	120	240	200cm²	720 cm²

$C_1 = 6 \times 12 = 72 cm^2$ $C_2 = 16 \times 12 = 192$

Figura 11.

Llamó mucho la atención la estrategia utilizada por este estudiante para encontrar la ecuación que le permite hallar el ancho y largo de la caja. El alumno denotó el área total de la caja como A_T. El área de la base como A_B y el área de sus caras laterales como A_L**,** seguidamente planteó una igualdad basada en estas tres áreas, y luego sustituye la expresión que representa a cada una de ellas, hasta completar con un trabajo algebraico impecable y encontrar la ecuación pedida. En la siguiente fotografía se puede ver el trabajo realizado.



e) Jorge le plantea a su familia una ecuación que le permite hallar el acho y el largo de la caja. ¿Podrían encontrar ustedes esa ecuación? Si X No __. En caso de ser no, diga por qué ____

En caso afirmativo, expliquen, ¿Cómo obtienen dicha ecuación?

f) ¿Cuál es la solución de la ecuación? $A = 20$

Expliquen el procedimiento que utilizaron ____

e) $A_T = 1800 cm^2$

$A_B = A(A+10) cm^2$

$A_L = 2(A+A+10) \times 12$

$A_L = 12(4A+20) cm^2$

$A_L = (48A+240) cm^2$

$A_T = A_B + A_L$

o

$A_B + A_L = A_T$

$A(A+10) + 48A + 240 = 1800$

$A^2 + 10A + 48A + 240 - 1800 = 0$

$A^2 + 58A - 1560 = 0$

la Ecuación que le planteó Jorge a su familia es: $A^2 + 58A - 1560 = 0$

Figura 12.

Luego, para encontrar la solución de dicha ecuación, también llamó la atención que la mayoría de los estudiantes utilizaron la fórmula general para encontrar las, o la solución de una ecuación de segundo grado, mientras que este alumno encontró la solución mediante la factorización. Otro detalle es que la mayoría de los alumnos aceptaron como solución el valor negativo y él lo rechazó. De igual manera en la Figura 13 se puede ver su trabajo.

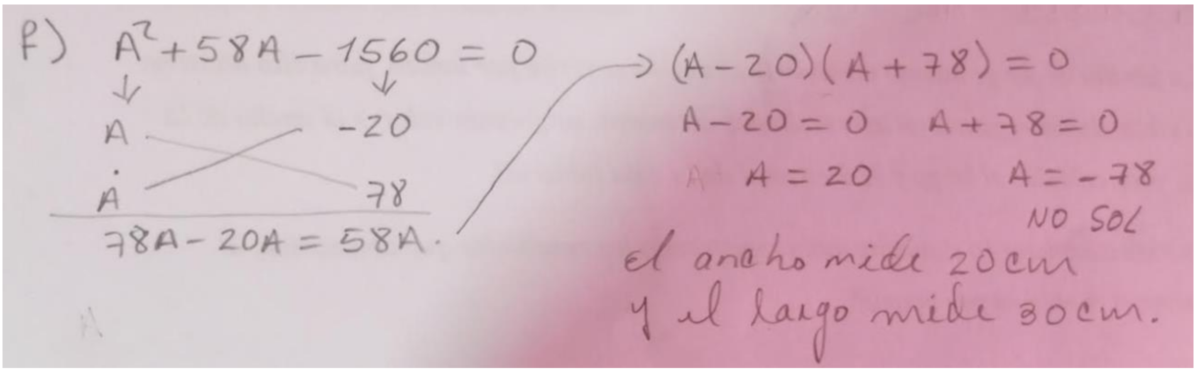


Figura 13.

Estudiante 2

De manera general la totalidad de los alumnos lograron resolver de manera correcta los tres primeros incisos de la tarea, en el caso de este estudiante es uno de los que según la profesora del grupo hace rechazo al estudio de la asignatura. Sin embargo, se le notó muy involucrado y motivado durante toda la ejecución. En la Figura 14 mostramos como planteó las expresiones que representan el largo de la caja y el área de la base, incluso muestra la unidad de medida correctamente.

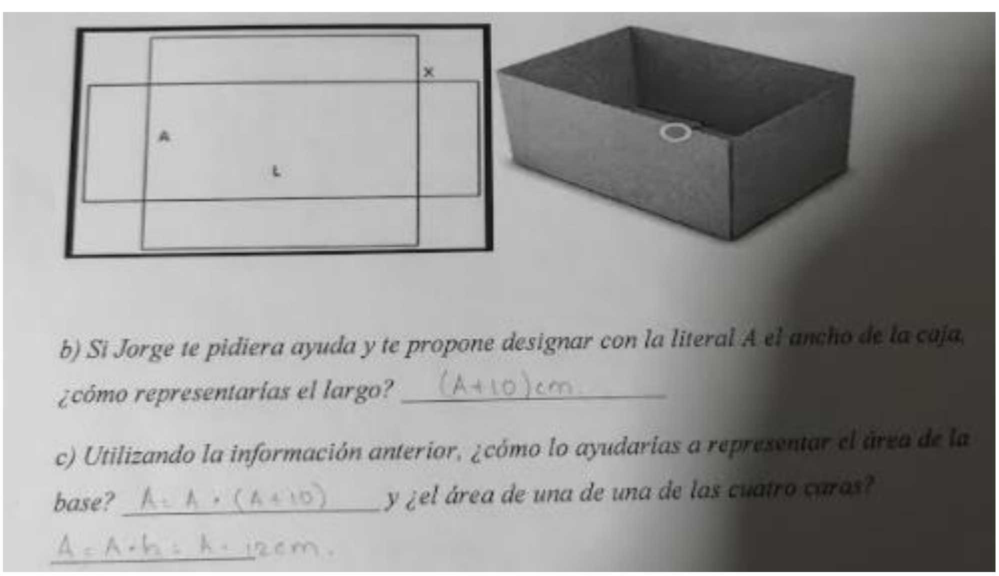
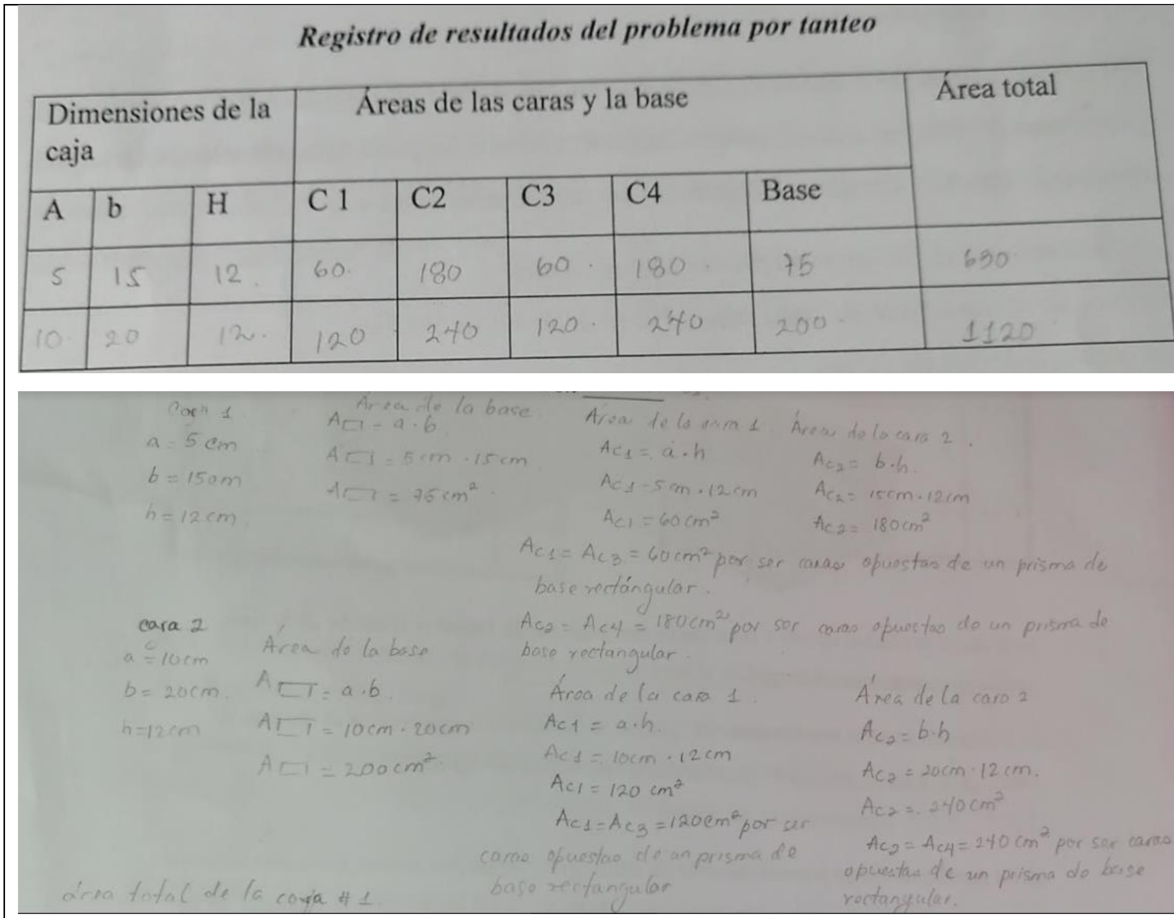


Figura 14.

En la sub-tarea donde se resuelve la problemática mediante tanteo y se completa la tabla asignándole valores al ancho para obtener el largo, el área de cada cara lateral, el área de la base y la total (Figura 15), se mostró comprometido y con igual grado de motivación, pero no tuvo en cuenta que debía obtener el área total real de la caja sin tapa, no obstante, realizó los cálculos correspondientes utilizando las fórmulas correctas.



Registro de resultados del problema por tanteo

Dimensiones de la caja			Áreas de las caras y la base					Área total
A	b	H	C 1	C2	C3	C4	Base	
5	15	12.	60.	180	60 .	180 .	75	690
10.	20	12.	120	240	120 .	240	200 .	1120

Cara 1
a = 5 cm
b = 15 cm
h = 12 cm

Área de la base
$A_{\square} = a \cdot b$
$A_{\square} = 5 cm \cdot 15 cm$
$A_{\square} = 75 cm^2$

Área de la cara 1
$A_{C1} = a \cdot h$
$A_{C1} = 5 cm \cdot 12 cm$
$A_{C1} = 60 cm^2$

Área de la cara 2
$A_{C2} = b \cdot h$
$A_{C2} = 15 cm \cdot 12 cm$
$A_{C2} = 180 cm^2$

$A_{C1} = A_{C3} = 60 cm^2$ por ser caras opuestas de un prisma de base rectángular.

$A_{C2} = A_{C4} = 180 cm^2$ por ser caras opuestas de un prisma de base rectangular.

cara 2
a = 10 cm
b = 20 cm
h = 12 cm

Área de la base
$A_{\square} = a \cdot b$
$A_{\square} = 10 cm \cdot 20 cm$
$A_{\square} = 200 cm^2$

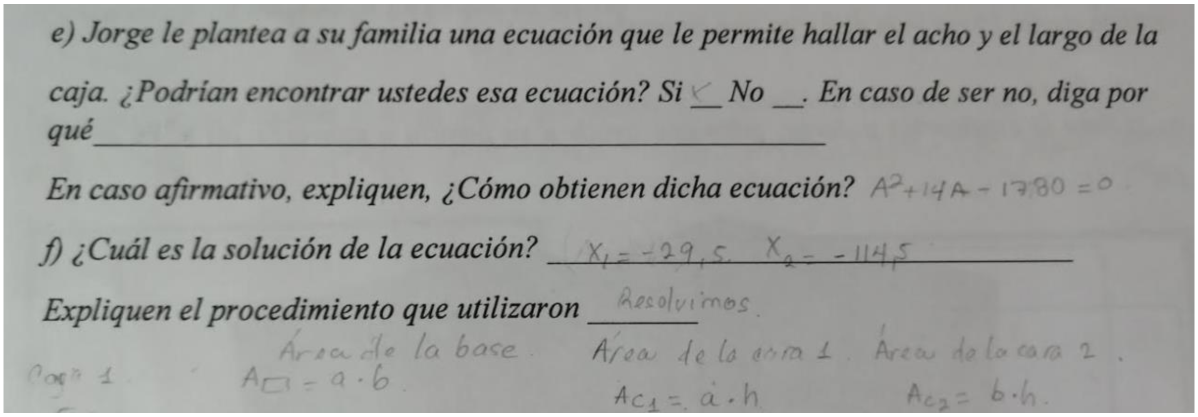
Área de la cara 1
$A_{C1} = a \cdot h$
$A_{C1} = 10 cm \cdot 12 cm$
$A_{C1} = 120 cm^2$
$A_{C1} = A_{C3} = 120 cm^2$ por ser caras opuestas de un prisma de base rectangular

Área de la cara 2
$A_{C2} = b \cdot h$
$A_{C2} = 20 cm \cdot 12 cm$
$A_{C2} = 240 cm^2$
$A_{C2} = A_{C4} = 240 cm^2$ por ser caras opuestas de un prisma de base rectangular.

área total de la caja # 1

Figura 15.

Basado en el trabajo realizado anteriormente en el registro de resultados por tanteo, el estudiante encontró una ecuación, la cual resolvió con la fórmula general y encontró dos valores negativos, los cuales dio como solución, aquí no realizó el análisis que le permitiera percatarse de que las dimensiones no pueden ser negativas, esto lo podía llevar a reestructurar su trabajo. Aquí independientemente de conocer que el alumno en clases normales muestra rechazo al estudio de las matemáticas, y aunque durante la ejecución se mostró motivado e involucrado en la resolución, se puede decir que el grado de satisfacción es elevado, ya que en todo momento intentó resolver de la mejor manera cada una de las sub-tareas hasta la última, la cual no pudo resolver correctamente, pero esto no fue motivo para que se sintiera fracasado, todo lo contrario, él mismo reconoció que de prestar atención en todas las clases anteriores hubiese podido llegar a la solución correcta.



e) Jorge le plantea a su familia una ecuación que le permite hallar el acho y el largo de la caja. ¿Podrían encontrar ustedes esa ecuación? Si ✓ *No __. En caso de ser no, diga por qué*____________________

En caso afirmativo, expliquen, ¿Cómo obtienen dicha ecuación? $A^2+14A-1780=0$

f) ¿Cuál es la solución de la ecuación? $X_1=-29,5$ $X_2=-114,5$

Expliquen el procedimiento que utilizaron Resolvimos.

Área de la base. Área de la cara 1. Área de la cara 2.

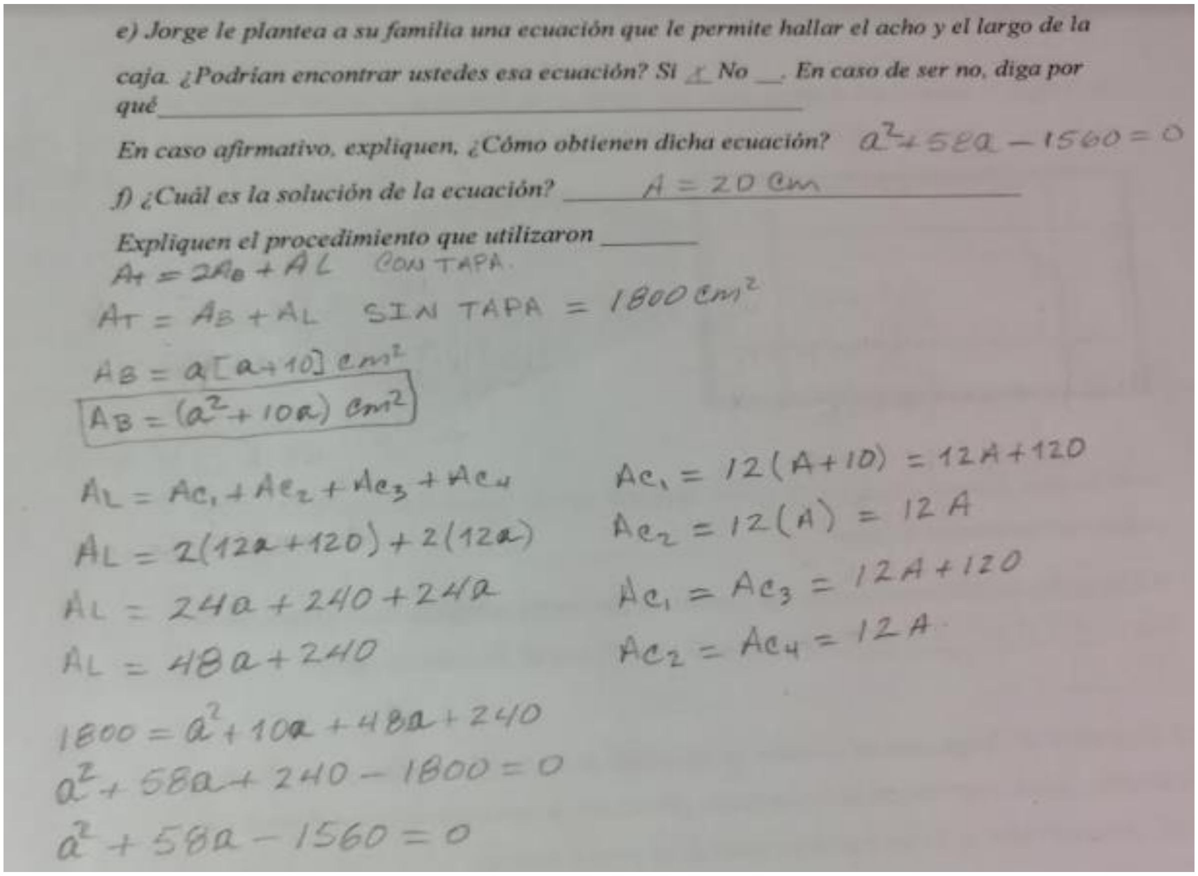
Caso 1. $A_{\square}=a\cdot b$. $A_{c_1}=a\cdot h$ $A_{c_2}=b\cdot h$.

Figura 16.

Estudiante 3

Ahora mostraremos el análisis realizado por este alumno en los últimos dos incisos de la tarea. El trabajo y razonamiento que plantea este alumno resultó muy interesante, ya que con las expresiones que representa a cada una de las áreas laterales y la de la base, hace un trabajo por separado hasta llegar a la conclusión de que la suma de todas estas áreas daría como resultado el área total de la caja sin tapa, y de esta manera encuentra la ecuación que le permite determinar el largo y el ancho de dicha caja. En el caso del área de cada cara lateral reconoció que las caras opuestas de la caja, es decir los rectángulos opuestos tienen la misma área, por lo que solo calculó el área de dos rectángulos que no fuesen opuestos y los multiplicó por dos.

Luego planteó la suma de las expresiones e igualó esta suma al área total de la caja sin tapa en centímetros cuadrados, seguidamente transpone e iguala a cero de manera correcta, lo que le permitió llegar a la ecuación pertinente, después de reducir términos semejantes. Este análisis realizado llama mucho la atención porque al revisar las respuestas y procedimientos empleados por los otros alumnos, se pudo observar que una parte considerable de estos utilizaban los datos registrados en la resolución por tanteo para encontrar la ecuación pedida, así como otros estudiantes escribieron una ecuación mediante el producto del ancho por el largo de la caja igualado al área total proporcionada en la orden inicial de la tarea.



e) Jorge le plantea a su familia una ecuación que le permite hallar el acho y el largo de la caja. ¿Podrían encontrar ustedes esa ecuación? Si x *No* __. *En caso de ser no, diga por qué* ____

En caso afirmativo, expliquen, ¿Cómo obtienen dicha ecuación? $a^2+58a-1560=0$

f) ¿Cuál es la solución de la ecuación? $A = 20$ cm

Expliquen el procedimiento que utilizaron ____

$A_T = 2A_B + A_L$ CON TAPA

$A_T = A_B + A_L$ SIN TAPA $= 1800\ cm^2$

$A_B = a[a+10]\ cm^2$

$\boxed{A_B = (a^2+10a)\ cm^2}$

$A_L = Ac_1 + Ac_2 + Ac_3 + Ac_4$

$A_L = 2(12a+120) + 2(12a)$

$A_L = 24a + 240 + 24a$

$A_L = 48a + 240$

$Ac_1 = 12(A+10) = 12A + 120$

$Ac_2 = 12(A) = 12A$

$Ac_1 = Ac_3 = 12A + 120$

$Ac_2 = Ac_4 = 12A$

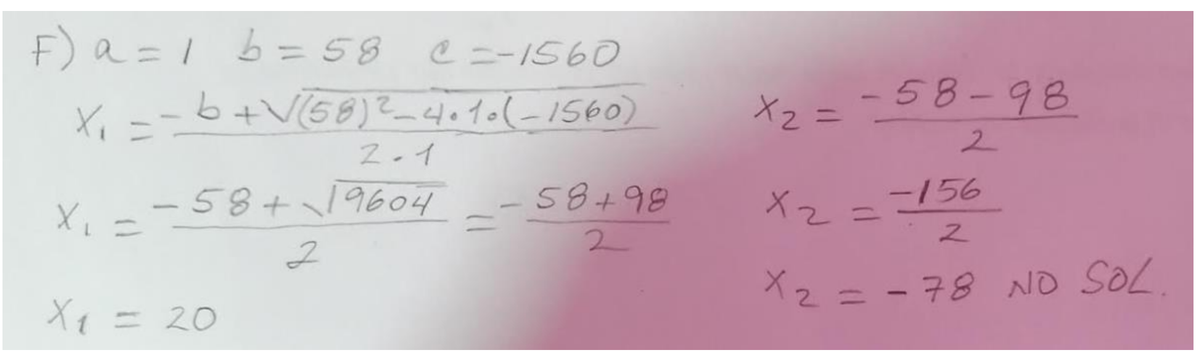
$1800 = a^2 + 10a + 48a + 240$

$a^2 + 58a + 240 - 1800 = 0$

$a^2 + 58a - 1560 = 0$

Figura 17.

Respecto a la solución de la ecuación encontrada, el alumno utilizó la fórmula general y desechó correctamente el valor negativo.



F) $a = 1 \quad b = 58 \quad c = -1560$

$X_1 = \dfrac{-b + \sqrt{(58)^2 - 4\cdot 1\cdot(-1560)}}{2\cdot 1}$

$X_1 = \dfrac{-58 + \sqrt{19604}}{2} = \dfrac{-58+98}{2}$

$X_1 = 20$

$X_2 = \dfrac{-58-98}{2}$

$X_2 = \dfrac{-156}{2}$

$X_2 = -78$ NO SOL.

Figura 18.

Vistas y analizadas algunas de las respuestas, procedimientos y estrategias de estos alumnos, se pudo corroborar el alto grado de aceptación de las tareas, como se mencionó anteriormente, la tarea de las manualidades tuvo un mayor grado de aceptación que la del choque de los dos automóviles, también se observó que en ningún caso los alumnos utilizaron la búsqueda ciega de la solución mediante operaciones básicas con los datos explícitos de la tarea.

En esta penúltima parte del capítulo se muestran algunas de las respuestas o comentarios que dieron los estudiantes que fueron entrevistados por el investigador luego de la implementación de las dos tareas.

Entrevista 1.

I: investigador A: Alumno (A) B: Alumno (B) C: Alumno (C)

I: ¿Te gustan las clases de Matemática?

A: No todas

I: ¿Por qué?

A: Porque algunas son monótonas y aburridas, es que casi siempre la profesora explica y explica en la pizarra y después nos manda a hacer ejercicios del libro.

I: ¿Te gusta trabajar en grupo con tus compañeros?, y ¿por qué?

A: Si, si me gusta, es que cuando tengo dudas mis compañeros me explican y también comparamos los resultados.

I: ¿Qué es lo que te ha llamado la atención de las tareas que resolviste en estos dos días?

A: Bueno casi todo, es que fue algo nuevo, la manera de preguntar parecía que estábamos ayudando en verdad al perito y la familia del muchacho que hacían las cajitas, no recuerdo el nombre del muchacho.

I: Si la familia de Juan.

A: Ajá si era Juan

I: ¿Qué se te hizo más difícil para resolver las tareas?

A: Bueno, en la del carro que chocaron se me hizo un poquito difícil los nombres de las partes que teníamos que medir, ese que era la distancia entre los dos ejes de las ruedas de adelante y de atrás. A ver a ver también se me enredé un poquito en los cálculos porque calculé en milímetros y tenía que calcular en centímetros.

I: ¿Y en la tarea de las manualidades no se te hizo difícil nada?

A: No en esa lo hice todo bien y me gustó muchísimo.

I: ¿Resuelven tareas de este tipo en sus clases normales de Matemática con su profesora?

A: No profesor, en las clases solo resolvemos los ejercicios del libro y los que nos pone la profesora en la pizarra.

I: ¿Te gustaría que, en todas las clases, o en gran parte de ellas te propongan resolver tareas como las que resolviste?

A: Si, ojalá todos los ejercicios que nos pusieran fueran así.

Entrevista 2.

I: ¿Te gustan las clases de Matemática?

B: Si.

I: ¿Te gusta trabajar en grupo con tus compañeros?, y ¿por qué?

B: A veces. Es que no todos mis compañeros están interesados en resolver los ejercicios y cuando me toca con algunos de ellos entonces me desconcentran.

I: ¿Qué es lo que te ha llamado la atención de las tareas que resolviste en estos dos días?

B: Trabajar con las fotos de los carros, es decir hacer las mediciones en las fotos, es que todo lo que íbamos haciendo lo teníamos que utilizar en las otras preguntas, y en el problema de las cajitas me gustó mucho que nos dieron la plantilla y ahí íbamos viendo casi todo.

I: ¿Qué se te hizo más difícil para resolver las tareas?

B: En la segunda tarea que no me acordé ni atrás ni delante de la fórmula del discriminante.

I: ¿Y por qué no aplicaste la factorización?, ¿si sabes que también podías?

B: Si verdad que si

I: ¿Resuelven tareas de este tipo en sus clases normales de Matemática con su profesora?

B: mmm, no, solo resolvemos ejercicios del libro y de algunos folletos de ejercicios.

I: ¿Te gustaría que, en todas las clases, o en gran parte de ellas te propongan resolver tareas como las que resolviste?

B: Si, sería genial.

Entrevista 3.

I: ¿Te gustan las clases de Matemática?

C: No profe no me gusta la Matemática.

I: Pero te observé bien activo y participando en la resolución de las tareas, ¿qué te hizo tener ese cambio en estos dos días?

C: Profe es que eso de los carros chocados cuando usted nos dijo que eso mismo que íbamos a hacer era lo que hacían los peritos de tránsito eso me llamó la atención.

I: ¿Qué se te hizo más difícil para resolver las tareas?

C: el Teorema de Pitágoras que no me dio el resultado que a los otros profe.

I: I: ¿Te gustaría que, en todas las clases, o en gran parte de ellas te propongan resolver tareas como las que resolviste?

C: Si profe, si son cosas así que me llamen la atención si me gusta.

5.4. Rumbo a la creación de un modelo de diseño de tareas matemáticas auténticas

El diseño y análisis de tareas en educación matemática está recibiendo recientemente una atención especial a nivel internacional, como se muestra en los trabajos presentados en el "Topic Study Group 31, Task Desing and Analysis" del congreso ICME 12 (Seul, Corea, 2012), que fue continuación del TSG 34 organizado sobre el mismo tema en el congreso ICME 11 (Monterrey, México, 2008). Otro indicador del interés sobre el tema es la convocatoria de un ICMI Study sobre diseño y análisis de tareas, cuya conferencia inicial tuvo lugar en Oxford en 2013. Igualmente, encontramos la publicación del triple número especial sobre esta temática en la revista Journal of Mathematics Teacher Education (2007).

En estas reuniones y publicaciones se convocó a investigadores, profesores y expertos en el desarrollo de recursos para la enseñanza para investigar de manera sistemática sobre el diseño y análisis de tareas matemáticas. Se esperan aportaciones, apoyadas empíricamente, que subrayen los principios de diseño, los enfoques teóricos usados y proporcionen ejemplos de tareas diseñadas para promover el aprendizaje matemático. De manera específica en el TSG 31 del ICME 12 se propusieron los siguientes temas:

1. Desarrollos teóricos y prácticos que guíen el diseño y análisis de tareas.

2. Análisis de diversas aproximaciones y tradiciones que guían el diseño/análisis de tareas y de sus explicaciones teóricas.

3. Propuestas de ejemplos de análisis de tareas, que estudien las relaciones entre las tareas, el desarrollo psicológico, y el desarrollo matemático.

4. Estudios críticos de la literatura o meta-análisis del diseño y análisis de tareas.

En el TSG 34, ICME 11 (http://tsg.icme11.org/tsg/show/35) se hizo referencia a la diversidad de tipos de tareas usadas en educación matemática: problemas, tareas realistas, tareas prácticas, tareas ricas en tecnología, tareas que provocan conflictos cognitivos, secuencia de cuestiones que apoyan la comprensión conceptual, tareas rutinarias, tareas no rutinarias, tareas de aplicación, etc. Aunque este listado de tipos de tareas es muy diverso se entiende que no se trata simplemente de "cosas que hay que hacer", sino de actividades que sean cruciales para enmarcar la actividad matemática que se debe poner en juego. Es aquí donde creemos sería importante proponer un modelo de diseño de tareas matemáticas auténticas.

Es importante destacar que la educación matemática realista (RME) es un marco de nivel intermedio que se ha desarrollado en los Países Bajos; véase Van den Heuvel-Panhuizen y Drijvers, (2013). RME tiene sus raíces en el trabajo de Freudenthal (1973, 1991), quien defendió la enseñanza de las matemáticas de forma relevante. Para los estudiantes y la investigación incitada en alumnos de bajo nivel se ofrecerían oportunidades para la reinvención guiada de las matemáticas.

Por un lado, la medida en que las tareas se establecen en un contexto realista para maximizar la participación de los estudiantes y, por otro lado, si el contexto resta valor al potencial de la tarea para lograr el aprendizaje deseado son aspectos que deben ser cuidados a la hora de diseñar tareas que traten la realidad. También es importante señalar que el uso de contextos está lejos de ser inequívoco, según Sullivan et al. (2015) en una revisión del sistema de evaluación en el Reino Unido, Cooper y Dunne (1998) encontraron que la contextualización de los ítems de matemáticas creaba dificultades particulares para los estudiantes de nivel socioeconómico bajo (NSE), tanto así que se desempeñaban significativamente peor que los de nivel medio, mientras que el rendimiento en tareas descontextualizadas fue equivalente.

Asimismo, Lubienski (2000), al estudiar la implementación de un programa curricular basado en problemas contextualizados abiertos, encontró que los alumnos que preferían los materiales de prueba contextualizados y los consideraban más fáciles, todos tenían antecedentes de NSE alto, mientras que la mayoría de los alumnos que preferían el contexto cerrado -Las tareas libres tenían un NSE bajo. Este es un tema complejo, y no está claro si la disminución del desempeño se debió a la contextualización o a otros factores como contextos particulares que no son familiares y alienantes para los estudiantes en comunidades de bajo ESE, o dificultades para separar el conocimiento contextual del previsto (acciones matemáticas puras). En otras palabras, la incorporación de contextos no necesita asegurarse de que las tareas sean accesibles para todos los estudiantes.

De aquí que se considere como uno de los dilemas del diseño de tareas al contexto de estas, también se contempla como dilema el lenguaje empleado y la solución prevista. Harbosa anel de Oliveira (2013) describió un tercer dilema como estructura, que se refiere al grado de apertura en las tareas. Esto puede considerarse como una función del resultado de la tarea, ya que es la estructura. En este dilema, la consideración es que se pueden plantear preguntas en las que, por un lado, encaminen el compromiso del estudiante de una manera más presentada y, por otro lado, brindan a los estudiantes una mayor oportunidad para tomar decisiones estratégicas sobre trayectorias y destinos por sí mismos.

El cuarto dilema, descrito como distribución, se refiere a la selección de contenidos en los que centrarse en las tareas. Esta es una función de la demanda cognitiva de las tareas descrita por Smith y Stein (2011) como una jerarquía de tareas en el aula que se desarrollan desde la memorización hasta procedimientos sin conexiones con procedimientos con conexiones para realizar tareas matemáticas. El quinto dilema se refiere a los niveles de interacción de los participantes, es decir, entre los profesores y los estudiantes.

Para encaminar la creación de un modelo de diseño de tareas matemáticas auténticas primeramente nos propusimos destacar la importancia de tener un punto de partida, siendo este el análisis de tareas matemáticas propuestas en libros de textos, dicho análisis debe ser realizado con la teoría de Palm, para luego diseñar una nueva tarea basándonos en los elementos para el diseño de tareas mediante los cinco dilemas para indicar la jerarquía de consideraciones de diseño y los seis criterios de idoneidad destinados a facilitar el análisis de tareas. Luego de diseñada la nueva tarea también se analiza con cada uno de los aspectos y sub-aspectos que plantea la Teoría de las situaciones auténticas de Torulf Palm.

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En esta investigación se logró analizar críticamente tres problemas matemáticos contextualizados en libros de texto que utilizan los estudiantes de tercer año en secundaria y primer año de bachillerato en las escuelas mexicanas y cubanas, que simulaban situaciones fuera de la escuela.

La investigación documental relacionada con las situaciones descritas en las tareas seleccionadas de los libros de texto, nos permitió concluir que ninguno de los problemas elegidos puede ser considerado auténtico, pues no cumplen siquiera con los tres primeros aspectos planteados en la Teoría de Palm. Lo anterior nos hizo percibir que existen problemas matemáticos planteados en los libros de texto, que son completamente distantes a la vida real de los estudiantes.

Los resultados de la revisión ejemplificada anteriormente para diferentes tipos de contextos, muestran una importante presencia de tareas con contextualización artificial que violan dos o más aspectos de la concepción de Palm de tareas auténticas. También pudimos identificar que la mayoría de los problemas verbales planteados en los libros de texto analizados, solo promueven el aprendizaje memorístico. Estos problemas tienen una contextualización que difícilmente podría interesarles a los alumnos. Sigue sin existir una relación estrecha entre los problemas matemáticos y la realidad, por lo que los problemas matemáticos no están cumpliendo con su función, la de simular situaciones reales que el alumno podría encontrarse en su vida cotidiana.

El diseño de las tareas auténticas no fue un trabajo sencillo, demandó mucha investigación para lograr que la información y valores se encuentren inmersos en una situación que los alumnos se pudieran encontrar involucrados en su vida. Palm (2009) indicó que entre más alta sea la representatividad de una simulación, mayor será la cantidad de alumnos que harán uso propio de su conocimiento del mundo real cuando se enfrenten a un problema, sus soluciones tendrán sentido en relación a la situación fuera de la escuela. Esto también dependerá de que el número de aspectos simulados tenga una alta fidelidad, es por ello que fuimos cuidadosos en este sentido a la hora de diseñar las tareas.

La investigación documental, específicamente los documentos pertinentes a cada situación, posibilitaron elaborar tareas con mayor grado de autenticidad, debido a que dejan que el alumno se enfrente a una situación que es altamente probable que le llegue a ocurrir en cualquier momento de su vida, y que en el momento de enfrentarse a esa situación tendrá las competencias necesarias para solucionarla.

Al diseñar las tareas, su propósito inicial cambió debido a las nuevas consideraciones que se derivaron de la investigación documental. Las tareas diseñadas podrían considerarse integradoras debido a que no solamente atenderán a la parte matemática, sino que intervienen muchos otros conocimientos o habilidades para poder darle solución.

Es válido destacar que la Teoría de Palm jugó un papel primordial en el diseño de las nuevas tareas, pues nos permitió identificar los elementos que no podían ausentarse para que pudieran ser consideradas auténticas. Por ejemplo, que el evento descrito en la tarea, la concordancia entre la tarea asignada en la tarea de la escuela y en una situación correspondiente fuera de esta, el lenguaje, datos, estrategias de solución, preguntas y las posibilidades de los estudiantes para preguntar y discutir el significado, así como la comprensión de la tarea coincidieran en las situaciones dentro y fuera de la escuela.

Es primordial que los alumnos noten la importancia que tienen las matemáticas dentro de su vida diaria, de tal manera que puedan aplicar sus conocimientos adquiridos dentro del salón de clase en el momento en el que un evento se les llegue a presentar, por eso el trabajo del docente es esencial para dar contexto y significado a las tareas.

En la implementación de las dos tareas, estas ilustrativamente tienen en común las expectativas de que los estudiantes creen conocimientos matemáticos al participar en su resolución con el apoyo atento del maestro.

El punto de partida para la implementación, es generalmente una tarea que representa un desafío apropiado para quienes se involucran en ella, y tienen el potencial de brindar apoyo de varios productos matemáticos y metas de procesos, e influir positivamente en las dimensiones afectivas del compromiso del estudiante con la tarea.

En la ejecución se pudo observar que:

- Los estudiantes disfrutaron de las matemáticas que estaban viendo y aprendiendo.
- Los estudiantes vieron la utilidad de las matemáticas para ellos.
- Los estudiantes lograron reconocer la conexión entre el aprendizaje de las matemáticas y opciones de carrera y su estudio futuro.

- Los estudiantes se mostraron motivados y comprometidos, involucrados en un ambiente agradable y colaborativo de aprendizaje. Su grado de aceptación fue considerablemente alto, de esta manera saben que pueden aprender matemáticas si persisten.

Se recomienda a las editoriales de los libros de texto en el nivel de secundaria y bachillerato cuidar el diseño de sus tareas, que traten de analizar las tareas propuestas mediante la Teoría de Palm para garantizar que estas sean lo más cercanas posibles a una situación real. También se les recomienda que interactúen con personas involucradas en sus tareas para dialogar sobre sus procesos, así como también verificar las estrategias que ellos aplican para dar solución a la situación simulada.

A los docentes se les sugiere adaptar los problemas propuestos en los libros de texto, cuidando el contexto adecuado a la región donde conviven los estudiantes, para que tengan un verdadero significado en el aprendizaje de sus alumnos, y estos vean que las matemáticas son útiles fuera del salón de clases. También se les sugiere que a la hora de implementar las tareas les den a los estudiantes libertad de trabajar en ambiente colaborativo, para que ellos mismos sean capaces de ver la importancia y utilidad de las matemáticas en su vida cotidiana, y de esta manera identifiquen lo poco distante que puede estar la matemática que ven en la escuela respecto de su vida real.

Queda como otra posible investigación la creación de un modelo de diseño de tareas matemáticas auténticas, tomando como punto de partida el análisis de tareas contextualizadas propuestas en libros de textos mediante la teoría de las situaciones auténticas propuesta por Palm (2009). Para el diseño se recomienda utilizar la Teoría de Palm, así como los elementos para el de diseño de tareas divididos en dos partes, los cinco dilemas de diseño de tareas para indicar la jerarquía de consideraciones de diseño, y segundo, los seis criterios de idoneidad destinados a facilitar el análisis de tareas, así como la investigación y evaluación de esas tareas (Sullivan, et al. 2015).

REFERENCIAS

Antel (2006). Norma l4C01 03/2006. *Instalaciones de postes, columnas, guías, herrajes y riendas.* Ingeniería de planta externa. ANTEL. Recuperado en octubre de 2020 de https://www.scribd.com/document/237696435/J1A41920-Instalacion-de-Columnas-Postes-y-Herrajes.

Barbosa, J. C., y de Oliveira, A. M. (2013). Collaborative groups and their conflicts in designing tasks. In C. Margolinas (Ed.), *Task design in mathematics education* (Proceedings of the International Commission on Mathematical Instruction Study 22, pp. 541-548), Oxford, UK. Available from http://hal.archives-overtes.fr/hal-00834054.

Boostrom, R. (2001). Whither textbooks? *Journal of Curriculum Studies, 33*(2), 229-245.

Caicedo, D. F. (2019). *Implementación de una situación de tareas matemáticas en el estudio de los parámetros de la función cuadrática con la utilización de Geogebra.* Tesis de maestría. Universidad de ICESI, Santiago de Cali, Colombia.

Cantoral, R., Montiel, G., y Reyes-Gasperini, D. (2015). Análisis del discurso Matemático Escolar en los libros de texto, una mirada desde la Teoría Socio epistemológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *8*, 9 – 28.

Crúz, L. J., Teutli, P., y Juárez, J. A. (2020). Análisis comparativo de la autenticidad de tareas matemáticas en libros de texto de bachillerato mexicanos y cubanos: el caso del Teorema de Pitágoras. *Épsilon- Revista de Educación Matemática, 106, 19 – 34.*

Depaepe, F., De Corte, E., y Verschaffel, L. (2010). Teachers' approaches towards word problem solving: Elaborating or restricting the problem context. *Teaching and Teacher education. 26*, 152-160.

Falcón, S., Medina, P., y Plaza, A. (2017). ¿Comprenden los alumnos los enunciados de los problemas? *Boletín de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas*, *103*, 72-89.

Fan, L., y Kaeley, G. S. (2000). The influence of textbooks on teaching strategies: An empirical study. Mid-Western, *Educational Researcher*, *13*(4), 2–9.

Fan, L. (2013). Textbook research as scientific research: towards a common ground on issues and methods of research on mathematics textbooks. *ZDM-International Journal on Mathematics Education*, *45*(5), 765-777.

Fernández, P., Caballero, P., y Fernández, J. A. (2013). ¿Yerra el niño o yerra el libro de Matemáticas? *Números, Revista de Didáctica de las Matemáticas, 83*, 131-148.

Frade Rubio, L. (2009). *Planeación por competencias.* Ed. Inteligencia educativa.

Gómez-Ferragud, C., Solaz-Portolés, J., y Sanjosé, V. (2013). Construcción de analogías y éxito en la resolución de problemas de matemáticas y ciencias: un estudio con alumnado de Secundaria. *Psicodidáctica, 18*(1), 81-111.

Goñi, J. M. (2008). *El desarrollo de la competencia matemática*. Graó.

Haby, J. Y. (1997). *Cartables et manuels scolaires: rapport à monsieur le Premier ministre.* Recuperado en abril de 2018 de https://goo.gl/HexDjv

Herbst, P. (2012). Las tareas matemáticas como instrumentos en la investigación de los fenómenos de gestión de la instrucción: un ejemplo en geometría. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 1, 5-22.

Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2006). *Metodología de la investigación.* México: McGraw- Hill.

Kullberg, A., Runesson, U., y Mártensson, P. (2013). The same task? - Different learning possibilities. In C. Margolinas (Ed.), *Task design in mathematics education* (Proceedings of the International Commission on Mathematical Instruction Study 22, pp. 609-616), Oxford, UK. Available from http://hal.archives-overtes.fr/hal-00834054

Kullberg, A., Runesson, U., y Mártensson, P. (2014). Different possibilities to learn from the same task. *PNA*, 8(4), 139 – 150.

Lesh, R., y English, L. (2013). Problem Solving in the Primary School (K-12). *The Mathematics Enthusiast,* 10 (1&2), 35-60.

Lino, D. (2017). *Análisis de libros de texto de segundo año de secundaria desde la perspectiva de la teoría de Palm.* Tesis de Licenciatura no publicada. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, México.

Lupiáñez, J. L. (2015): “Lo ordinario y lo extraordinario en el aula de matemáticas”. Conferencia paralela XIV CIAEM-IACME, Chiapas (México). Disponible en http://xiv.ciaemiacme.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/1491/696

Martínez, S., y Ramos, L. (2016). Construcción de metodologías comparativas e indicadores para medir el uso de TIC y sus impactos en el salón de clases. *Informes de investigación 014440, Fedesarrollo.*

Mayer, R.E. (2010). *Aprendizaje e Instrucción*, Madrid: Alianza.

Medina, I. (2018). *Diseño de tareas matemáticas auténticas en secundaria a partir de la teoría de Palm y la investigación documental y de campo.* Tesis de maestría. México: BUAP.

Medina, L. (2013). La evaluación en el aula: reflexiones sobre sus propósitos, validez y confiabilidad. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, *15*(2), 34-. Recuperado de: http://redie.uabc.mx/vol15no2/contenido-medina.html

Monterrubio, M. C., y Ortega, T. (2011). Diseño y aplicación de instrumentos de análisis de textos escolares de matemáticas. *PNA*, 5(3), 105-127.

Morales, M. (2016). *Tema de estudio de caso: Identificación de la altura a la que puede ser trozado un objeto fijo al ser impactado por un automóvil.* Tesis de maestría. Quito. Ecuador.

Muñoz, T. (2007). *Cálculo de la velocidad en la investigación de accidentes de tráfico.* España: ISBN: Tomás Muñoz Guzmán.

Occelli, M., y Valeiras, N. (2013) Los libros de texto de ciencias como objeto de investigación: una revisión bibliográfica. *Enseñanza de las Ciencias*, 31 (2), pp.1-20. ISSN: 0212-4521. IN-RECS 2009: 0.355. Revista indexada en Web of Science (Thomson-ISI) JCR 2011: 0.188.

Palm, T. (2005) ‘Preface’, In Palm, T. (ed), Proceedings of the 3rd international SweMaS conference, October 14-15 2003 (EM No 48), Umeå, Sweden, Department of Educational Measurement, Umeå University.

Palm, T. (2006). Word problems simulations of real-world situations: A proposed framework. *For the Learning of Mathematics*, 26(1), 42-47.

Palm, T. (2008). Impact of authenticity on sense making in word problems solving. *Educational Studies in Mathematics*, 67(1), 37-58.

Palm, T. (2009). Theory of authentic task situations. En L. Verschaffel, B. Greer, W. Van Dooren y S. Mukhopadhyay (Eds.), *Words and Worlds: Modelling Verbal Descriptions of situations* (pp. 3-19). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

PISA (2012). Programa para la Evaluación Internacional de los Alumnos. Informe español. MECD. INEE.

PISA (2018). Proyecto PISA. La medida de los conocimientos y destrezas de los alumnos: la evaluación de la lectura, las matemáticas y las ciencias en el proyecto Pisa 2018 / OCDE. Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, INCE.

Pitluk, L. (2006). *La Planificación didáctica en el Jardín de Infantes. Las unidades Didácticas, los proyectos y las secuencias didácticas. El juego trabajo.* Rosario, Argentina: Homo Sapiens.

Pollak, H. O. (1969). How can we teach applications of mathematics? *Educational Studies in Mathematics.* 2, 393 – 404.

Prediger, S., y Krägeloh, N. (2015). Low achieving eighth graders learn to crack word problems: a design research project for aligning a strategic scaffolding tool to students' mental processes. *ZDM-International Journal on Mathematics Education,* 47(6), 947-962.

Ron, G., Zaslavsky, O., y Zodik, I. (2013). Engaging teachers in the web of considerations under- lying the desing of tasks that foster the need for new mathematical concept tools. In C. Margolinas (Ed.), *Task design in mathematics education* (Proceedings of the International Commission on Mathematical Instruction Study 22, pp. 641-647), Oxford, UK. Available from http://hal.archives-overtes.fr/hal-00834054

Sánchez, M. V. (2005). La enseñanza de las matemáticas y la formación de los profesores. Una perspectiva desde la didáctica de las Matemáticas. En: *Jornada matemátic del congreso de los diputados. (pp. 115-120). Congreso de los Diputados.* 2000. ISBN/D.L. 84-7943-138-5.

Serradó, A. y Azcárate, P. (2000). *El Portafolio como instrumento para la evaluación en la formación inicial del profesorado de Secundaria*. Cádiz. Servicio de publicaciones de la Universidad de Cádiz.

Sullivan, P., Knott, L., y Yang, Y. (2015). The relationships between task design, anticipated pedagogies, and student learning. In A. Watson & M. Ohtani (Eds.), *Task Design in Mathematics Education: An ICMI study 22 (pp. 83–114).* Cham: Springer International Publishing.

Sullivan, P.A., Askew, M., Cheeseman, J., Clarke, D.M., Mornane, A., Roche, A., & Walker, N. (2015). Apoyar a los profesores en la estructuración de lecciones de matemáticas que implican tareas desafiantes. *Journal of Mathematics Teacher Education, 18*(2), 123–140.

Tobón, S., Pimienta, P., Julio, Y., García, F y Juan, A. (2010). *Secuencias didácticas: Aprendizaje y Evaluación de Competencias.* México: Pearson- Prentice Hall.

Torres, E. Z. (2019). *Diseño de tareas matemáticas para secundaria bajo la Teoría de las Situaciones con Tareas Auténticas*. Tesis de Licenciatura no publicada. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, México.

Verschaffel, L., De Corte, E. & Lassure, S. (1994). Realistic considerations in mathematical modeling of school arithmetic word problems, *Learning and Instruction, 4(4), 273-294.*

Verschaffel, L., Greer, B. & De Corte, E. (2000). *Making Sense of Word Problems*: Contexts of Learning. Lisse, The Netherlands: CRC Press.

Vicente S., Orrantia, J. y Verschaffel, L. (2008). Influencia del conocimiento matemático y situacional en la resolución de problemas aritméticos verbales: ayudas textuales y gráficas. *Infancia y Aprendizaje*, 31(4), 463-483. Recuperado de http://hdl.handle.net/10366/22527

Watson, A., Ohtani, M.; Ainley, J., Frant, J. B., Doorman, M., Kieran, C., Leung, A., Margolinas, C., Sullivan, P., Thompson, D., & Yang, Y. (2013): "Introduction". En C. Margolinas (Ed.), *Task Design in Mathematics Education - Proceedings of ICMI Study 22*, 1, 9-15. Oxford, UK: International Commission on Mathematics Instruction.

Wiest, L. (2001). The role of fantasy contexts in word problems. *Mathematics Education Research Journal. 13*(2), 74-90.

Zavala, A. (2008). *La práctica educativa. Cómo enseñar*. México: Graó.