BENEMÉRITA UNIVERSIDAD

AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

PLANTEAMIENTO DE PROBLEMAS COMO ESTRATEGIA PARA LA COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE VARIABLE COMO INCÓGNITA

TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE

MAESTRA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

PRESENTA

LIC. LETICIA SÁNCHEZ GONZÁLEZ

DIRECTORA DE TESIS

DRA. ESTELA DE LOURDES JUÁREZ RUIZ

CO-DIRECTOR DE TESIS

DR. JOSÉ ANTONIO JUÁREZ LÓPEZ

PUEBLA, PUE. MAYO 2021

BUAP

DR. SEVERINO MUÑOZ AGUIRRE
SECRETARIO DE INVESTIGACIÓN Y
ESTUDIOS DE POSGRADO, FCFM-BUAP
P R E S E N T E:

Por este medio le informo que la C:

LIC. LETICIA SÁNCHEZ GONZÁLEZ

Estudiante de la Maestría en Educación Matemática, ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 09 de diciembre de 2020, con la tesis titulada:

"PLANTEAMIENTO DE PROBLEMAS COMO ESTRATEGIA PARA LA COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE VARIABLE COMO INCÓGNITA"

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

A T E N T A M E N T E.
H. Puebla de Z. a 20 de abril de 2021

Lidia A H R.

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA · FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS · SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y ESTUDIOS DE POSGRADO · 1578 ·

DRA. LIDIA AURORA HERNÁNDEZ REBOLLAR
COORDINADORA DE LA MAESTRÍA
EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA.

DRA'LAHR/l'agm*

Esta tesis se realizó gracias a la beca otorgada por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnologia CONACYT

AGRADECIMIENTOS

“Tener éxito no es aleatorio. Es una variable dependiente del esfuerzo”

Sócrates

Hoy termina una etapa importante en mi vida, uno de aquellos sueños que siempre soñe. Culminar mis estudios de maestría con un cúmulo de grandes retos y aprendizajes me permiten reafirmar y compartir que los grandes logros vienen acompañados de perseverancia y amor por lo que haces. No importa cuantos obstáculos se presenten, siempre debemos tener claras nuestras metas y luchar por ellas, además de dar gracias a quienes nos acompañan y están día con día apoyándonos.

Agradezco a Dios, por permitirme culminar esta etapa y por brindarme una vida llena de salud y felicidad. Por cuidarme y bendecir mi camino, por darme paz y sabiduría.

Gracias a mi familia, quienes son y serán siempre el pilar de mi vida. Por acompañarme en mis triunfos y alegrías y también estar presente en mis derrotas y tristezas. Por guiarme por el buen camino y formarme en la persona que ahora soy. Por su apoyo incondicional y amor infinito, por los buenos momentos. Gracias a ustedes por ser mi compañía en esas horas de desvelo, por las largas noches agotadoras de trabajo, por ese abrazo y ánimo que me hace seguir, el mejor regalo de la vida.

A mis maestros, que me guiaron y compartieron conmigo enseñanzas y conocimientos. Por su paciencia, consejos y motivación. En especial, agradezco a mi directora de tesis Dra. Estela Juárez Ruíz y a mi co-director y asesor de tesis Dr. José Antonio Juárez López y Dr. Eric Flores Medrano, respectivamente, por el tiempo dedicado a este trabajo y su apoyo.

Gracias a mis compañeros y amigos que estuvieron conmigo durante este trabajo y durante mis estudios, dándome animos y creyendo en que siempre puedo dar lo mejor de mi. El poder compartir y celebrar con ustedes estos logros son memorias de toda la vida.

Gracias a ti, porque sin perdirlo, llegaste a mi vida en el momento ideal. Por ser mi complemento y mi felicidad, por apoyarme y estar siempre conmigo. Porque ambos sabemos ser un equipo y lucharemos por más metas y sueños juntos.

ÍNDICE

Índice de tablas

Indice de figuras

Resumen

Comúnmente, los estudiantes de nivel básico presentan dificultades al resolver problemas algebraicos, es decir, cuando existe la presencia de variables, y en particular cuando esta representa algo desconocido (incógnita). En este sentido, para ecuaciones lineales, suelen hacer operaciones mecánicas a manera de encontrar el valor deseado, sin llegar a comprender completamente dicho concepto. Así, el planteamiento de problemas es una actividad bastante útil para dar sentido a estas expresiones y hacer la matemática más cercana para el alumno, pues requiere una interpretación propia y creativa.

La investigación desarrollada es de tipo mixto con énfasis en estudio cualitativo cuyo objetivo radica en analizar los procesos que llevan a cabo estudiantes de segundo grado de secundaria para lograr la comprensión del concepto de variable como incógnita, a través de ecuaciones lineales de primer grado, considerando a la variable en un solo miembro de la igualdad o en ambos. Se enfatizó en describir el razonamiento y manejo del uso de la variable antes y después de la implementación de la secuencia didáctica y con ello reflexionar respecto al alcance que se obtiene de la comprensión del concepto tratado. Para tal efecto, este análisis se realizó bajo el modelo de Pirie y Kieren, el cual consiste en ocho niveles que muestran una evolución o crecimiento gradual de comprensión hasta llegar al último nivel que corresponde a la invención de situaciones para el concepto propuesto, y del cual en nuestro caso corresponde al planteamiento de problemas. Dicho modelo requiere crear descriptores propios al estudio para identificar en qué etapa se encuentra el estudiante. Estos descriptores fueron creados y validados mediante juicio de expertos para formar parte de la herramienta de recolección de datos correspondiente a las evaluaciones diagnóstica y final, así como para la secuencia didáctica. Finalmente, para el análisis cuantitativo se realizó un preexperimento con un solo grupo con pretest y postest.

Además, para la implementación de dichas actividades se consideraron las tres situaciones del planteamiento de problemas: libre, semiestructurado y estructurado, las cuales consisten en brindar información al estudiante que sirvan de guía en la invención de problemas y cuya diferencia radica en la cantidad de detalles sugeridos. Con ello también se distinguió el rol que juegan cada una de estas situaciones en la dificultad para generar los problemas. Por otro lado, para el análisis del proceso creativo desarrollado por los estudiantes al plantear problemas de ecuaciones lineales se consideró las tres componentes correspondientes a: fluidez, flexibilidad y originalidad.

También se corroboró el vínculo entre el planteamiento y resolución de problemas resaltando que los alumnos académicamente buenos son capaces de plantear más y mejores problemas, así como comprobar e interpretar resultados. Además, se resalta que entre la evaluación diagnóstica y final se identificó una diferencia en el número de planteamientos de problemas generados por los estudiantes, demostrando así el interés y motivación por la actividad.

Finalmente, a la luz del modelo, se distinguió una evolución importante de la comprensión del concepto de variable como incógnita, ya que hubo una mayor respuesta a los niveles correspondientes a dicho esquema, y mostrar evidencias estadísticamente significativas, sonbretodo en dos de las cuatro ecuaciones propuestas. Sin embargo, también se resalta la dificultad que presentaron los estudiantes al trabajar en esta actividad y sobre todo en niveles de formalización de propiedades y generalizaciones. Así, a pesar de tener resultados en minoría, se observó un buen desempeño y un aumento en respuestas correctas y completas en solución y planteamientos de problemas en ecuaciones lineales. Además, se obtuvo una muy buena participación e interacción grupal a través de la discusión de ideas y con ello una alta recuperación de ideas creativas.

Introducción

La enseñanza del álgebra en educación secundaria es uno de los temas que ha cobrado mayor relevancia en el currículum escolar. Debido a su carácter abstracto y multifacético, es el origen de muchas dificultades de los alumnos, pues se requiere un gran manejo de habilidades y razonamiento. Como sugiere la National Council of Teachers of Mathematics (2014) las ideas algebraicas deben evolucionar a través de los grados como una forma de pensar y comprender, donde se generen oportunidades para generalizar, modelar y analizar situaciones que son puramente matemáticas y que surgen en fenómenos del mundo real.

Así, para el final de la educación secundaria, se espera que los estudiantes puedan moverse entre el simbolismo algebraico y las representaciones verbales (en ambas direcciones), entre otros sistemas de representación. Las dificultades de los estudiantes con el álgebra se han relacionado tradicionalmente con la traducción de la representación verbal a la simbólica, en el contexto de la resolución de problemas, y con la traducción, desde el simbolismo algebraico hasta la representación verbal, lo cual está involucrado en el proceso de planteamiento de problemas. (Cañadas, Molina, y del Río, 2018, p. 1).

Este último, es un enfoque pedagógico nuevo e inventivo en la educación matemática. Aunque ha estado bajo la sombra de la resolución de problemas, hasta hace poco, los investigadores comenzaron a darse cuenta de sus potencialidades, lo que resultó en un rápido reconocimiento de la necesidad de incorporarlo en el aprendizaje en el aula de Matemáticas. Aunado a esto, las investigaciones acerca de la enseñanza del álgebra se han enfocado a un concepto central: el concepto de variable.

De esta manera, el presente trabajo busca analizar cómo el planteamiento de problemas conduce desde una comprensión del estudiante hacia conceptos matemáticos, en particular al uso de la variable como incógnita. La propuesta didáctica que se diseñó y aplicó está enfocada en guiar al estudiante para trabajar algebraicamente con la incógnita, evitando operaciones sin sentido y sin interpretación. Los alumnos adquieren una cercanía con problemas propuestos de manera particular para formalizar ideas y conceptos, además de que es pertinente para la resolución de problemas. El trabajo de tesis está guiado mediante el modelo de comprensión de Pirie y Kieren.

Esta propuesta se desarrolla en 5 capítulos distribuidos de la siguiente manera:

En el capítulo 1 se muestra la revisión de literatura pertinente al tema de investigación. Se presentan los antecedentes que muestran el panorama general actual. De manera inicial la relación entre la resolución y planteamiento de problemas, así como las aportaciones e investigaciones en ese campo. Por otro lado, las investigaciones relacionadas al uso de las variables y su proceso de comprensión. Esto conduce a la segunda parte donde se plantea la pregunta y los objetivos de investigación, justificación y delimitaciones del trabajo.

El capítulo 2 contiene el marco teórico donde se resaltan tres secciones fundamentales: la comprensión matemática, la resolución y planteamiento de problemas, así como el concepto y usos de variables. Se muestra una generalidad y enfoques comparativos y se concreta en el modelo o perspectiva con el cual se abordará el trabajo.

En el capítulo 3 se presenta el método de la investigación, la descripción de la población de estudio y los instrumentos diseñados y validados para la recolección de datos adecuada.

El capítulo 4 muestra los resultados de la investigación, desde el análisis de los datos de la evaluación diagnóstica y final, así como el trabajo realizado en la intervención en el aula y las entrevistas particulares con base en el modelo de comprensión de Pirie y Kieren. Se describe además, el análisis de creatividad realizado con base en el planteamiento de problemas de ideas obtenidas en la secuencia didáctica.

En el capítulo 5 se presentan las conclusiones, donde se realiza la discusión de los resultados obtenidos en la investigación.

Finalmente, se incluyen las referencias bibliográficas consultadas.

Adicionalmente, en los anexos se incluyen los instrumentos utilizados en el presente trabajo.

Capítulo 1.

Revisión de literatura

1.1 Planteamiento y resolución de problemas.

La resolución de problemas se ha convertido en una parte esencial en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, mientras que, el planteamiento de problemas es un enfoque nuevo e inventivo en este ámbito. Es también conocido como invención y formulación de problemas o *problem posing* en la literatura en inglés. Ha empezado a recibir una atención creciente en la educación matemática, pues a pesar de que ha estado bajo la sombra de la resolución de problemas, hasta hace poco, los investigadores comenzaron a darse cuenta de sus potencialidades, lo que resultó en un rápido reconocimiento de la necesidad de incorporarlo en el aprendizaje de matemáticas en el aula.

Muchos hallazgos de investigación han demostrado que la resolución y el planteamiento de problemas están estrechamente relacionados. Por ejemplo, Espinoza, Lupiañez y Segovia (2015) mencionan a varios autores que ponen de manifiesto que el planteamiento de problemas es una herramienta que ha sido empleada para mejorar las habilidades de resolución de problemas matemáticos, tener una visión de la comprensión de los conceptos y procedimientos y dar un punto de vista sobre cómo los estudiantes manejan y desarrollan su conocimiento matemático.

De igual forma, Bonotto (2013) recopila a varios autores que consideran que el planteamiento de problemas tiene una influencia positiva sobre la habilidad de los estudiantes para resolver problemas, así como para mejorar la disposición, actitudes y confianza hacia la matemática, argumentando que los procesos de invención de problemas promueven la participación de los estudiantes en una auténtica actividad matemática.

Ayllón y Gómez (2014) exponen los beneficios que la tarea de plantear problemas aporta a la construcción del conocimiento matemático y a su éxito educativo, e indican que esta actividad permite adquirir aprendizajes significativos al exigir realizar una aportación personal, propia y creativa. Así, el planteamiento de problemas se presenta como una estrategia importante para el desarrollo de la comprensión de las matemáticas en los estudiantes y que estos puedan establecer relaciones entre los distintos conceptos matemáticos.

Además, su investigación recopila los estudios más relevantes que se habían realizado hasta ese momento sobre el tema y donde se relacionan con campos como la resolución de problemas, la tecnología, la evaluación y los métodos de enseñanza.

Resultados similares afirman que el conocimiento del contenido matemático de los estudiantes podría estar altamente relacionado con la creatividad en matemáticas, y que el planteamiento de problemas se presenta como una estrategia importante para el desarrollo de la comprensión, y mejora la aptitud y disposición que los estudiantes tienen hacia la materia permitiendo el aprendizaje autónomo en el alumno (Van Harpen y Presmeg, 2013). Esto coincide con Espinoza (2017) y Cai, Hwang, Jiang y Silber (2015) considerando que este tipo de actividades fomenta la capacidad de razonar y comunicar matemáticamente, así como capturar el interés y curiosidad. Además, los autores afirman que es una actividad central dentro de la experiencia matemática de los estudiantes y su importancia queda manifestada en estudios realizados por investigadores en educación matemática y en reportes curriculares como el del National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2014), que mencionan el gran valor educativo que tiene este tipo de actividades.

Por otro lado, Silver y Cai (1996) analizaron la relación entre la capacidad de plantear y resolver problemas. Entre sus resultados obtuvieron que los estudiantes frente a una situación conocida inventaron numerosos problemas que se podían resolver, donde sus enunciados tenían un nivel semántico y sintáctico alto. Los autores aseguran que existe una fuerte correlación entre la resolución de problemas y la invención de problemas y concluyen su estudio advirtiendo que los alumnos considerados buenos resolutores de problemas, inventan más problemas y más complejos, que los sujetos considerados malos resolutores. Por lo general, el estudiante que inventa problemas sabe cómo resolverlos, así como el que es un buen resolutor de problemas es capaz de inventar problemas. Esta tarea permite indagar en cómo piensan matemáticamente los alumnos, el grado de comprensión que poseen de determinados conceptos matemáticos, las razones por las que comenten ciertos errores y las estrategias que utilizan.

Cifarelli y Cai (2005) concluyeron que cuando los alumnos resuelven un problema cuestionan sus acciones y objetivos y que esta situación les lleva a la formulación de un nuevo problema. Por tanto advierten que la invención de problemas ayuda al estudiante a progresar en el proceso de resolución de problemas. Sin embargo, en un estudio posterior, Penalva, Posadas y Roig (2010) afirman que no está clara la relación entre la resolución y el planteamiento de problemas. Su investigación concluye en que no se encuentra un vínculo entre los buenos resolutores de problemas y los inventores de problemas y que existe una relación compleja entre la manera de resolver y formular problemas. Pero estos resultados contradicen los obtenidos por autores antes mencionados.

A pesar de que los investigadores afirman que la invención de problemas conlleva importantes beneficios para el aprendizaje matemático y el desarrollo intelectual del individuo, las investigaciones en este campo aún son menores en comparación con la resolución de problemas. La mayoría de estudios se encuentran en el trabajo con números decimales (Bonotto, 2013) y geometría (Siswono, 2010), entre otros.

En este sentido, Santos (1997) resalta que es importante que el estudiante formule sus propios problemas a partir de información específica. Resultados similares se presentan en el trabajo de Polya (1965) donde aparece como componente esencial de la actividad matemática cuando se cuestiona ¿Cómo podemos plantear el problema de manera diferente?

Por lo anterior, queda evidenciado que la invención de problemas contribuye a la construcción del conocimiento lógico-matemático e incrementa de forma considerable el desarrollo del razonamiento en el estudiante.

1.2 El álgebra y el planteamiento de problemas.

En el contexto del álgebra escolar y en la tarea de plantear problemas, autores como Resnick, Cauzinille-Marmeche y Mathie (1987) y Dede (2005) (citados en Cañadas et al., 2018) señalaron que se debe pedir a los estudiantes que escriban historias sobre ecuaciones, como una herramienta para prevenir realizar operaciones sin sentido en las ecuaciones.

Para profundizar en la comprensión de las expresiones simbólicas, Fernández y Molina (2017) investigaron el conocimiento conceptual de los estudiantes sobre el simbolismo algebraico desarrollado en la educación secundaria, enfocándose en caracteristicas de ecuaciones y sistemas de ecuaciones, sus dificultades y significados asociados con operaciones contenidas mediante un estudio empírico. Los autores llegaron a la conclusión de que plantear problemas era una tarea difícil para los estudiantes porque se requiere pensar en el significado de las variables y los símbolos algebraicos. Resultados similares posteriores (Cañadas et al., 2018) se centran en el planteamiento de problemas como un proceso de traslación del sistema de representación simbólico al verbal con estudiantes que han terminado su educación secundaria bajo un enfoque basado en variables estructurales, semántico y sintáctico. O bien, desde la perspectiva de estudio con análisis de creatividad en este mismo tema, identificamos a Diantari (2017) quién analizó la habilidad de los estudiantes en el pensamiento creativo en ecuaciones lineales de dos variables y a Nurasih (2017) al trabajar con operaciones algebraicas.

Los estudios antes mencionados, se basan en identificar la capacidad de planteamiento de problemas de los estudiantes en situaciones de planteamiento de problemas libres, semiestructurados y estructurados dados por Stoyanova (1997), y de las cuales se concluye que las situaciones libres son las más exigentes para los estudiantes de secundaria dentro de los tres tipos (Ngah, Ismail, Tasir, y Mohamad Said, 2016).

Mestre (2002) identificó la transferencia de aprendizaje a través de plantear problemas, pero Abramovich (2015) dice que una sola ecuación como modelo de un problema verbal no necesariamente proporciona evidencia de comprensión conceptual o falta de ella. No es hasta que se resuelve la ecuación (sea cual sea el método de resolución de problemas) que no se puede lograr una comprensión conceptual de la relación entre los símbolos involucrados.

El estudiante, al inventar problemas, considera la matemática como algo propio, crea situaciones más cercanas y reales a él, haciendo que su implicación en la tarea matemática sea total. Esto hace que se incrementen las ganas de aprender en muchos alumnos y disminuya el temor que en algunos de ellos genera el aprendizaje matemático. Por lo tanto, plantear problemas es una tarea potencialmente rica para explorar la comprensión conceptual.

Por lo anterior, se considera de vital importancia el incluir el planteamiento de problemas como tarea complementaria en los procesos de resolución de problemas o como estrategia didáctica, ya que en este tipo de actividades los estudiantes pueden desarrollar y fortalecer las habilidades del pensamiento crítico, demostrando una comprensión profunda de un concepto (Rizvi, 2004). Los resultados a los estudios previos analizados muestran la viabilidad, pertinencia y aspectos positivos de emplear este tipo de actividades en el aula con relación a temas de álgebra.

De esta manera, surgen nuestras preguntas de investigación:

1.2.1 Pregunta general.

¿Cómo mejora la comprensión y uso de la variable como incógnita al implementar el planteamiento de problemas como estrategia didáctica en estudiantes de secundaria?

1.2.2 Preguntas específicas.

1.- ¿Cuáles son los procesos de planteamiento y resolución de problemas que los estudiantes llevan a cabo al enfrentarse a una ecuación lineal en el análisis de la evaluación diagnóstica?

2.- ¿Cuál es el efecto de la estrategia de introducir las tres situaciones de planteamiento de problemas en el uso de la variable como incógnita durante la implementación de la propuesta didáctica?

3.- ¿Qué cambios se observan en el análisis comparativo de la evaluación diagnóstica y final de la comprensión y uso del concepto de variable como incógnita?

4.- ¿Cuáles son los aspectos de creatividad que logran desarrollar estudiantes de secundaria en el planteamiento de problemas en ecuaciones lineales?

Partiendo de esta idea se plantean los siguientes objetivos:

1.2.3 Objetivo general.

Analizar el proceso que llevan a cabo los estudiantes para lograr una comprensión del concepto de variable como incógnita antes y después de aplicar el planteamiento de problemas como estrategia didáctica.

1.2.4 Objetivos Específicos.

1.- Identificar los procesos que llevan a cabo los estudiantes al implementar de manera diagnóstica, el planteamiento de problemas para ecuaciones lineales, así como su respectiva solución y comprobación.

2.- Analizar el efecto de la estrategia didáctica en estudiantes al implementar las tres situaciones de planteamiento de problemas para la comprensión del concepto de variable como incógnita y su relación con el proceso de resolución de problemas.

3.-Distinguir los cambios relacionados con el proceso de comprensión y uso de la variable como incógnita, al implementar las tres situaciones de planteamiento de problemas como estrategia didáctica.

4.- Identificar el proceso creativo de los estudiantes al plantear problemas de ecuaciones lineales bajo los componentes de fluidez, flexibilidad y originalidad.

1.2.5 Justificación.

El planteamiento de problemas es un proceso matemático complejo en el cual se construyen problemas a partir de la interpretación personal que le da el estudiante a un problema previamente dado. Este proceso demanda una mayor reflexión matemática y genera interés, y cuya relevancia se focaliza en que forma parte de la resolución de problemas. Estos dos procesos se han convertido en una parte esencial en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática y cuyo estudio nos puede permitir implementarlos en la enseñanza del concepto de variable como incógnita en estudiantes de secundaria para contribuir a una mejor comprensión.

Capítulo 2.

Marco teórico

En este sección se describirán las referencias que guiarán esta investigación, específicamente, describiremos el proceso de comprensión bajo el modelo de Pirie y Kieren, la variable como incógnita, el planteamiento de problemas, y las categorías para análisis de creatividad.

2.1 Modelos de comprensión.

En la actualidad, el estudio del proceso de comprensión tiene diferentes enfoques bajo el objetivo que se persiga. En la literatura de Educación Matemática se ha buscado establecer una definición única y concisa del término comprensión, sin embargo, han surgido varios modelos que intentan describirla (Arenas, 2018).

Las aproximaciones más importantes se relacionan con Skemp (1976), al diferenciar entre la comprensión instrumental (utilizar las reglas sin razones) y la relacional (saber qué hacer y por qué), la perspectiva histórico empírica de Sierpinska (1994), el modelo recursivo de Pirie y Kieren (1989, 1994) y, la teoría del significado y la comprensión de los objetos matemáticos (Godino, 1996), entre otros. Además, Meel (2003) hace un resumen de la evolución de este concepto y resalta que antes de 1978, la comprensión estaba relacionada con el desarrollo de las conexiones en el contexto de la realización de operaciones algorítmicas y la resolución de problemas; mientras que después de 1978 se empezó hablar de categorías de comprensión y se empezó a considerar el desarrollo de conexiones entre ideas, hechos o procedimientos.

Aunque el proceso de comprensión es complejo, en las investigaciones, a veces se asume que la comprensión es una noción bien definida y aparece como un ideal que deben alcanzar los estudiantes. Sin embargo, en Meel (2003) también se menciona que "a pesar de que actualmente los investigadores distinguen entre comprensión y conocimiento, la comunidad de Educación Matemática no ha alcanzado un acuerdo respecto al significado de comprensión." (p.227).

Así, en un problema escolar simple, la comprensión puede consistir en identificar lo que se da, lo que se debe encontrar y, tal vez, a qué categoría de problemas pertenece el problema. Sin embargo, en la enseñanza de las matemáticas, el término comprensión también se utiliza en los procesos para evaluar el aprendizaje de los alumnos.

Las instituciones escolares esperan que los sujetos se apropien de algunos objetos culturalmente fijos, y asignan al maestro la tarea de ayudar a los estudiantes a establecer las relaciones acordadas entre los términos, las expresiones matemáticas, las abstracciones y las técnicas. En este caso, la comprensión no es meramente una actividad mental, sino que se convierte en un proceso social.

2.2 El Modelo de comprensión de Pirie y Kieren

Este modelo teórico de comprensión fue desarrollado por Susan Pirie y Thomas Kieren, dos profesores norteamericanos que realizaron una primera publicación en 1989. Las nociones iniciales de la comprensión matemática por estos autores surgen de ideas constructivistas. Los autores consideran que su trabajo proporciona algunas respuestas a preguntas que surgen en Sierpinska (1994) y la evolución de la definición de este concepto fue a partir de las ideas de Glasersfeld (1987, citado en Meel, 2003) al considerar a la comprensión como un proceso continuo para organizar las estructuras del conocimiento de una persona.

Bajo esta postura, establecen la siguiente definición:

> *La comprensión matemática* [cursivas añadidas] se puede definir como nivelada (estable) pero no lineal. Es un fenómeno recursivo, y la recursión se observa cuando el pensamiento se mueve entre niveles de sofisticación. De hecho, cada nivel de comprensión se encuentra contenido dentro de los niveles subsiguientes. Cualquier nivel particular depende de las formas y procesos del mismo y, además, se encuentra restringido por los que están fuera de él. (p.8)

De manera inicial, Pirie y Kieren usaron su modelo para trabajar en aritmética. Ahora este modelo, se ha utilizado para estudiar la comprensión matemática de conceptos en las áreas de cálculo, estadística, álgebra, y geometría, entre otros (Villa, 2011). Todos los estudios en estas áreas dan pautas de que los descriptores preliminares a cada nivel deben ser refinados y se articulen de manera coherente. Esto permite al investigador, por un lado, describir de manera detallada la forma como un estudiante amplía la comprensión en su progreso entre un nivel y el siguiente y, por otro lado, consolidar la estrategia metodológica.

2.2.1 Niveles de comprensión.

La representación del modelo de Pirie y Kieren (Figura 1) tiene ocho niveles que describen la evolución de la comprensión matemática en cuanto a conceptos o relaciones entre conceptos (Londoño,Villa y Morales, 2013). Se representan en un diagrama en dos dimensiones, en el que cada círculo corresponde a un nivel y estos están anidados uno dentro de otro. Arenas (2018) observa que las capas del modelo tal y como están esbozadas, dan una percepción de crecimiento hacia fuera, pero en realidad es un movimiento continuo (hacia delante y hacia atrás) a través de los diferentes niveles.

Rendón y Londoño (2013) establecen que la descripción de cada uno de los niveles de comprensión obedece a la necesidad de mostrar claramente cuáles son los comportamientos de los estudiantes que evidencian el nivel en el cuál comprenden un concepto en un momento dado. Esta situación permite además diseñar estrategias de intervención en el proceso de enseñanza para mejorar la comprensión de un concepto matemático en particular.

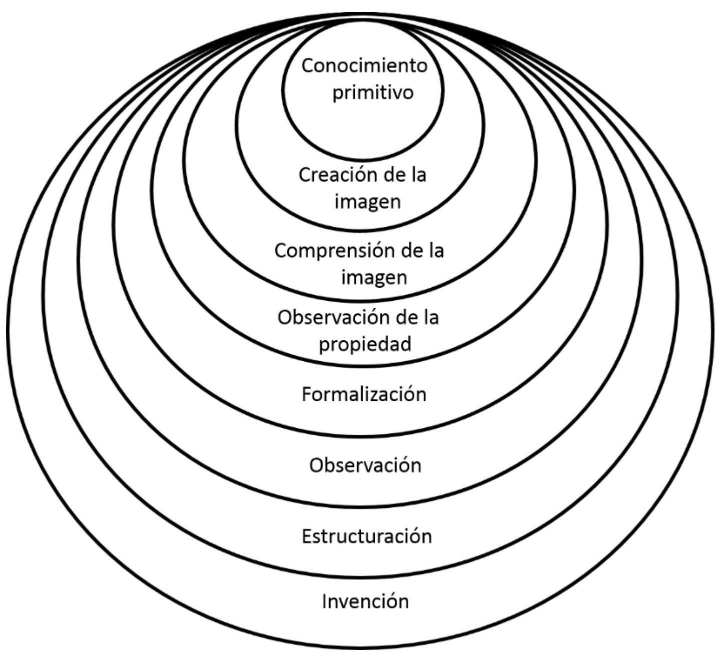


Figura 1. Representación del modelo de comprensión de Pirie y Kieren (1994).

Se muestra a continuación la descripción de cada nivel (Meel, 2003; Pirie y Kieren, 1994):

- Conocimiento primitivo (primitive knowing, PK)

Es donde se inicia el proceso de comprensión. Se refiere a todo el conocimiento que tiene el estudiante de un concepto antes de abordarlo. Pirie y Kieren (1994) asumen que “primitivo no implica matemáticas de bajo nivel, sino que es más bien el punto de partida para el crecimiento de cualquier comprensión matemática particular” (p.170).

En este nivel, los estudiantes desarrollan en su mente toda la información asociada a su conocimiento intuitivo o conocimientos previos.

- Creación de la imagen (image making, IM)

El estudiante es capaz de hacer distinciones en el conocimiento previo y lo usa de nuevas maneras con base en sus capacidades. Realiza acciones (físicas o mentales) con el fin de crear una idea del nuevo concepto matemático. Las imágenes no siempre son representaciones pictóricas, sino que se pueden expresar mediante el lenguaje o acciones específicas de los estudiantes.

- Comprensión de la imagen (image having, IH)

El estudiante se ve en la necesidad de reemplazar las imágenes asociadas al concepto por una imagen mental del mismo. El desarrollo de tales imágenes mentales que no son más que imágenes orientadas por un proceso, libera al estudiante de las matemáticas a partir de la necesidad de realizar acciones físicas particulares (Pirie y Kieren, 1992). Aquí, el estudiante comienza a reconocer las propiedades globales obvias de las imágenes matemáticas inspeccionadas.

- Observación de la propiedad (property noticing, PN)

En este nivel, el estudiante examina la imagen mental que ha creado y determina los distintos atributos y propiedades internas asociados con dicha imagen, además de las distinciones, combinaciones o conexiones entre las distintas imágenes mentales. Estas propiedades se combinan para construir definiciones que evolucionan y que pueden definir características particulares. Así, alcanzar este nivel implica que el estudiante puede utilizar o combinar aspectos de las imágenes mentales que ya posee, para construir propiedades específicas del concepto y tratar de generalizarlas.

La diferencia entre la obtención de la imagen y observación de la propiedad es la capacidad de observar una conexión entre las imágenes y explicar cómo verificar dicha conexión (Pirie y Kieren, 1992).

- Formalización (formalizing, F)

Cuando el estudiante conoce las propiedades y es capaz de abstraer características comunes de esa imagen. Aquí ya el estudiante trabaja el concepto matemático como un objeto formal y no hace referencia a una acción o imagen particular. La descripción de estos objetos mentales de clases similares tiene como resultado la producción de definiciones completas. Las descripciones generales proporcionadas deben ser equivalentes a una definición matemática adecuada, aun cuando no sea necesario usar un lenguaje matemático formal.

- Observación (observing, O)

En este nivel, la observación permite la capacidad de considerar y utilizar como referencia el pensamiento formal de la persona.

El estudiante es capaz de observar, estructurar y organizar sus procesos de pensamiento metacognitivamente, así como reconocer las ramificaciones de dichos procesos. Puede producir verbalizaciones relacionadas con la cognición sobre el concepto formalizado.

El estudiante está en condiciones de reflexionar y coordinar dicha actividad formal y llevarla a cabo.

- Estructuración (structuring, S)

Una vez que se es capaz de organizar las observaciones formales de una persona, las expectativas naturales son determinar si la observación formal es verdadera. Después de que el estudiante logró dicha conciencia, puede explicar la interrelación de dichas observaciones mediante un sistema axiomático (Pirie y Kieren, 1989), es decir, en este nivel, el estudiante comienza o trata de pensar en sus observaciones formales como una teoría y justifica o verifica una declaración a través de un argumento lógico y matemático.

- Invención (inventising, I)

Implica la capacidad del estudiante al liberarse del conocimiento estructurado que representa la comprensión total y crea preguntas totalmente nuevas que tendrán como resultado el desarrollo de un concepto nuevo. En este nivel, la comprensión matemática del estudiante es alta, imaginativa y llega más allá de la estructura actual para completar las preguntas ¿Qué pasaría si?. Esta pregunta tiene como resultado el uso, por parte del estudiante, tanto de un conocimiento estructurado como un conocimiento primitivo, al investigar más allá del dominio de exploración inicial.

2.2.2 Características del modelo.

A continuación, se presentan las características que describe el modelo.

- *Cualidad parecida a un fractal (fractal-like quality)*

Pirie y Kieren (1994) hacen notar que el centro interno del modelo, también llamado conocimiento primitivo, es el fondo de la comprensión matemática. En sus palabras "la inspección de cualquier conocimiento primitivo particular, revelará las capas de los conocimientos internos" (p.172).

Este carácter fractal, señala la importancia de la información que se encuentra en el centro interno, toda vez que, al recorrer los niveles del modelo hasta llegar al nivel de invención, es susceptible de convertirse en un nuevo conocimiento primitivo para la comprensión de otro conocimiento más elaborado (Pirie y Kieren, 1989). Como resultado, este conocimiento central toma dos roles: en beneficio a un estudiante en la comprensión de un concepto, o al dificultar la comprensión del estudiante al actuar como obstáculo (Mack, 1990; Resnick, 1989; citado en Meel 2003).

Además, Arenas (2018) expresa que es una de las características que permite deducir que la comprensión no es limitada, ni tampoco finita, más bien, recursiva.

- *Redoblar o volver hacia atrás* (*Folding back)*

Esta es la característica más importante del modelo que representa el crecimiento de la comprensión de una persona.

Muestra la naturaleza no unidireccional de llegar a comprender la matemática, es decir, la posibilidad de "redoblar" o volver hacia atrás en un proceso dinámico que asegura al final la efectividad de la comprensión.

"Cuando una persona se enfrenta a un problema o una pregunta en cualquier nivel, que no se puede resolver de inmediato, uno debe retroceder a un nivel interno para extender la propia comprensión inadecuada actual" (Pirie y Kieren, 1994, p.173). De esta forma, la comprensión matemática es un fenómeno recursivo y dinámico.
Los estudiantes se moverán de diferentes maneras y a diferentes velocidades a través de los niveles, retrocediendo una y otra vez para permitirles construir una comprensión más amplia, pero también más sofisticada o más profunda, guiada por el conocimiento que ha adquirido en el nivel externo de donde retrocedió.

- *Fronteras no necesarias* (*Don't need Boundaries*)

Cuando un estudiante avanza en los niveles de comprensión y supera las fronteras, ya no se encuentra en la capacidad de estar pensando en la construcción del concepto que realizó en los niveles anteriores a la frontera, sino que posee la capacidad de pensar mediante la parte simbólica del concepto, puesto que lo ha superado y comprendido. Es decir, el estudiante puede trabajar a un nivel o abstracción sin la necesidad de referirse mental o físicamente a imágenes específicas. Esto no implica, por supuesto, que uno no pueda volver a la comprensión de antecedentes específicos si es necesario (Pirie y Kieren, 1994).
Tomando el esquema del modelo teórico, la primera frontera ocurre entre los niveles *image making y image having*, lo que quiere decir que cuando una persona ya tiene una imagen de una idea matemática, no necesita acciones o las instancias específicas de cómo creó de la imagen. Lo mismo ocurre en la segunda frontera, la cual se encuentra entre los niveles *property noticing y formalising*, lo que quiere decir que una persona que ya tiene una idea formal matemática no necesita de una imagen. En consecuencia, ocurre lo mismo con la última frontera, puesto que una persona con una estructura matemática bien desarrollada, no necesita el significado traído a ella por ninguno de los niveles internos (Pirie y Kieren, 1994).

- La complementariedad de la acción y la expresión (*the complementarities of acting and expressing*)

Esta característica refiere que cada nivel (excepto el primero y último), se encuentra estructurado para que el crecimiento de la comprensión, se produzca al menos a través de la primera acción y luego de la expresión. En Arenas (2018) se identifica que los estudiantes deben mostrar los progresos que tienen en dichos niveles, antes de avanzar al siguiente, realizando primero el actuar antes de expresar. Estos dos aspectos fundamentales permiten conocer cuando los estudiantes están comprendiendo conceptos matemáticos en situaciones de aprendizaje, y resaltan la importancia de expresar con respuestas procedimientos, quizás no esperados, pero que pueden indicar una actitud innovadora o de descubrimiento de relaciones matemáticas. La respuesta creativa será aquella que aparece como nueva para el sujeto que la produce; puede considerarse como un descubrimiento, en unos casos, o como una invención, en otros (Londoño, Villa y Morales, 2013).

2.3 La variable como incógnita.

El inicio de la enseñanza del álgebra escolar se caracteriza por la introducción de los símbolos literales, comúnmente llamados variables, para representar números.

Algunas investigaciones, por ejemplo Ursini, Escareño, Montes y Trigueros (2005) coinciden en evidenciar que cuando se resuelven problemas algebraicos, la variable se presenta en una diversidad de formas. Este carácter multifacético da origen a muchas de las dificultades de los alumnos. Incluso se establece que, bajo algunas pruebas de álgebra estandarizadas, los alumnos pueden presentar buenos resultados sin haber comprendido realmente lo que están haciendo y por qué.

En nivel secundaria, el álgebra se trabaja esencialmente con tres usos distintos de la variable. Ursini, et al. (2005) definen lo que se denomina Modelo 3UV (tres usos de la variable): las incógnitas, los números generales y las relaciones funcionales, y describe aspectos para trabajar exitosamente con cada una de ellas. Sin embargo, el uso de la variable en el que se pone mayor énfasis es siempre el de la incógnita, y reiteradamente se pide encontrar su valor.

Dada la transición de nivel primaria a secundaria, los estudiantes tienden a encontrar el valor faltante mediante prueba y error, haciendo cumplir la operación bajo la idea de obtener un resultado, más no en sentido de una equivalencia de dos expresiones. Es decir, en términos aritméticos, el miembro izquierdo de una ecuación corresponde a una secuencia de operaciones que se realizan sobre números para llegar así al miembro derecho, que es el resultado de haber ejecutado dichas operaciones (Filloy, 1999).

En primer grado de secundaria, los alumnos tendrán un primer acercamiento con el uso de las variables como incógnitas y los problemas con los que trabajen deben ser modelados con ecuaciones sencillas de los tipos $x \pm A = B$, $Ax = B$, $\frac{x}{A} = B$ y $Ax \pm B = C$, con $A, B, C \in R$ y son valores específicos dados (Ursini et al., 2005). De esta forma, Filloy (1999) remarca que estas ecuaciones pueden ser resueltas con solo deshacer, una a una, las operaciones de la secuencia de la izquierda, partiendo del resultado de la derecha. El autor define a este tipo de ecuaciones como "ecuaciones aritméticas".

Sin embargo, en álgebra, también se trabaja con expresiones del tipo $Ax \pm B = Cx \pm D$, con $A, B, C, D \in R$, y lo mencionado entonces, no puede ser aplicado directamente como una noción aritmética de igualdad y su resolución implica operaciones fuera de este ámbito. A este tipo de ecuaciones Filloy (1999) las llama "ecuaciones no aritméticas". Así, para el manejo de estas expresiones, lo primero será establecer su significado, en relación de que ambos miembros de la igualdad son de la misma estructura y que hay una serie de acciones que le dan sentido a la igualdad entre ellas. Esta falta operatoria sugiere un punto de corte o de cambio entre operar o no a la incógnita. Se dice entonces que:

> La operación de la incógnita aparece, en efecto, como acción necesaria para resolver con métodos no-espontáneos ciertas ecuaciones de primer grado con al menos dos ocurrencias de la incógnita y para cuya resolución no basta con invertir las operaciones sobre coeficientes. (Filloy, 1999, p.85).

Este proceso no es inmediato, está de por medio la construcción o adquisición de ciertos elementos de sintaxis algebraica, la cual se lleva a cabo sobre una base bien consolidada de conocimientos aritméticos, y esto es posible, si se logra romper esta barrera.

Esta complejidad del concepto permite reconocer que no se puede esperar que los alumnos logren comprenderlo sin una enseñanza correcta y explícita. La intervención con enseñanza, en este momento de transición de aprendizaje, entre el conocimiento aritmético y algebraico, puede resultar crucial para los sujetos que por primera vez entran al área.

Así, para comprender el uso de la variable como incógnita específica, y poder resolver de manera exitosa los ejercicios o problemas que la involucran, uno debe ser capaz de reconocer que en cierta situación está involucrada una cantidad cuyo valor no conocemos, pero que es posible determinar tomando en consideración los datos proporcionados.

La enseñanza del álgebra puede hacer uso de recursos didácticos para su fin, y entre ellas se propone modelar en contextos más concretos, es decir, contextos más cercanos para el alumno, con el propósito de darles significado y construir así, elementos de sintaxis algebraica. Dos modelos en este sentido pueden ser considerados: La balanza y un modelo geométrico (Filloy, 1999).

2.4 Situaciones de planteamiento de problemas.

Según Stoyanova (1997), una situación que plantea problemas puede clasificarse como libre, semiestructurada o estructurada. A continuación se describe cada caso.

2.4.1 Problemas libres.

Se refiere a la situación en que se les pide a los estudiantes que planteen un problema desde una situación artificial o natural. Por lo tanto, la estructura de la situación es abierta y los estudiantes deben seleccionar un conjunto de elementos, definir relaciones entre ellos y presentar esta información como un problema matemático bien estructurado. Se pueden dar algunas instrucciones para incitar acciones particulares.

Por ejemplo, las acciones de la vida diaria (dentro o fuera de la escuela) pueden ayudar a un alumno a generar algunas preguntas que lo lleven a construir un problema, y pueden implicar los siguientes tipos: situaciones de la vida cotidiana, problemas que les gustan, problemas para una competencia de matemáticas, problemas escritos para un amigo y problemas generados por diversión.

2.4.2 Problemas semiestructurados.

Se puede decir que corresponde a la edición y traducción de un problema. A los estudiantes se les da una situación abierta y se les invita a explorarlos utilizando conocimientos, habilidades, conceptos y relaciones de sus experiencias matemáticas anteriores y esto puede tomar las siguientes formas: problemas abiertos, problemas similares a los problemas dados, problema con situaciones similares, problemas relacionados con teoremas específicos o problemas derivados de las imágenes dadas en problemas de palabras.

2.4.3 Problemas estructurados.

Un problema es tipo estructurado cuando las actividades de planteamiento de problemas son basadas en un problema o situación específica. Hace referencia a un conocimiento mayor requerido, que incluye la comprensión y selección de problemas y conceptos. Cualquier problema matemático consiste en datos conocidos (dados) y desconocidos (requeridos). Un profesor puede simplemente cambiar lo conocido y plantear un nuevo problema, o conservar los datos y modificar los requeridos. Este enfoque de reformulación parece ser el método más efectivo para introducir actividades estructuradas de planteamiento de problemas en aulas de matemáticas.

2.5 Creatividad en el planteamiento de problemas.

Ayllón y Gómez (2014) señalan varios aspectos positivos de la invención de problemas, entre ellos la creatividad. Sugieren que el estudiante adquiere grandes beneficios, pues al inventar un problema matemático, parte de ideas propias, se ve obligado a pensar, a analizar críticamente el enunciado, a examinar los datos que este presenta y a manipular distintas estrategias. Así, se concuerda con el autor al concluir que la creatividad constituye un componente indispensable para realizar tareas matemáticas.

Por otra parte, Siswono (2010) define el pensamiento creativo matemático como una combinación de lógica y pensamiento divergente que se basa en la intuición, pero con un objetivo consciente. Cuando uno aplica el pensamiento creativo en una situación práctica de resolución o de planteamiento de problemas, el pensamiento divergente produce muchas ideas. Además, el autor recopila información donde se identifican distintas maneras de evidenciar la creatividad basada en características específicas, lo que lleva a sugerir la existencia de niveles o grados de creatividad en los estudiantes. Al respecto, Singer y Voica (2015) señalan que el trabajo de plantear problemas no solo desarrolla la creatividad, sino que favorece las habilidades metacognitivas.

Así, la creatividad se basa en conocimientos para crear. Es un proceso que permite construir algo nuevo liberándose de ideas establecidas, analizando distintas posibilidades y aplicando una variada gama de conocimientos. Las ideas creadas permiten hacer conjeturas, son innovadoras y útiles. Las investigaciones de creatividad en la educación matemática la consideran como un elemento metodológico que ayuda a adquirir aprendizaje matemático (Ayllon y Gómez, 2014).

Para este estudio se consideró lo sugerido por Silver (1997) y Bonotto y Dal Salto (2015), donde el pensamiento creativo se centra en la flexibilidad, la fluidez y la originalidad en la resolución y planteamiento de problemas matemáticos. Estos tres componentes evalúan respectivamente diferentes partes del pensamiento y son independientes entre sí. Los estudiantes tienen varios conocimientos precedentes y habilidades diferentes. En consecuencia, es coherente pensar que tienen diferentes niveles de pensamiento creativo. Así, un alumno puede mostrar los tres componentes, dos componentes o solo un componente durante la resolución y el planteamiento de problemas.

Por ejemplo, en Siswono (2010, 2011) y Ayllón, Gómez y Ballesta-Claver (2016) se define la creatividad con base en estos tres componentes, tanto para la resolución como para el planteamiento de problemas, dado que en cada contexto el proceso mental es distinto. Así, la fluidez en el planteamiento de problemas se refiere a la capacidad de los estudiantes para generar muchos problemas con soluciones correctas. La flexibilidad a la capacidad del estudiante para plantear o construir problemas con soluciones divergentes, y la originalidad como la capacidad del estudiante para plantear o construir un problema diferente de los demás.

De manera análoga, Balka (1974) y Torrance (1974) (citados en Silver,1997), y Van Harpen y Presmeg (2013) se refieren a la fluidez como al número de problemas planteados, flexibilidad al número de diferentes categorías de problemas generados y originalidad a qué tan diferente es el planteamiento del problema en el conjunto de todas las propuestas. Este esquema analítico es muy similar al utilizado en muchos enfoques para medir la creatividad.

Por otro lado, en Shiriki (2013) se definen puntajes para medir los componentes de creatividad. El puntaje total de fluidez del estudiante se determina sumando el número de problemas nuevos diferentes que planteó, en función de un problema dado. El puntaje total de flexibilidad del estudiante está determinado por el número total de diferentes categorías de los problemas planteados, y como originalidad, por su propia naturaleza compleja, requiere que el autor determine según su contexto o realidad, las condiciones para que un problema se considere original.

Bonotto (2013) coincide con lo expuesto anteriormente. En su estudio realizó una comparación de problemas planteados por estudiantes en un período determinado en dos escuelas diferentes.

Consideró la fluidez como el número de problemas planteados, mientras que, para evaluar la flexibilidad de los estudiantes, los problemas matemáticos se clasificaron teniendo en cuenta la cantidad de detalles dados que fueron incorporados al texto del problema planteado y los datos adicionales introducidos por los estudiantes. Por último, para la originalidad tomó en consideración la rareza del problema en comparación con los otros problemas planteados en cada escuela. Un problema se consideró original si este lo planteaba menos del 10% de los alumnos en cada escuela.

De aquí que, con base en la revisión de literatura realizada, en el presente estudio se consideró la creatividad en el planteamiento de problemas como compuesta por tres dimensiones: fluidez, flexibilidad y originalidad, donde la *fluidez* se define como el número de problemas planteados completa y correctamente, la *flexibilidad* como el número de situaciones y/o contextos bajo los cuales se creó el problema, y la *originalidad* como aquellos problemas que presentan detalles adicionales bajo un contexto novedoso (Bonotto y Del Salto, 2015).

Capítulo 3.

Método

Se trató de un estudio de caso mixto, predominantemente cualitativo, que Rodríguez y Valldeoriola (2009) describen, implica un proceso de indagación que se caracteriza por el examen detallado, comprehensivo, sistemático y en profundidad de un caso particular. Que puede ser abordado desde diferentes perspectivas: analítica u holística, orgánica o cultural, o metodologías mixtas, entre otras. La parte cualitativa descriptiva consistió en el análisis del proceso de comprensión de los estudiantes sobre la variable como incógnita al plantear problemas. Además de distinguir el proceso creativo desarrollado para cada ecuación lineal propuesta. El estudio cuantitativo trató de un preexperimento con un solo grupo con pretest y postest, que bajo lo definido por Sampieri, Collado y Lucio (1997) consiste en aplicar un tratamiento y después una medición para observar cual es el grado de avance de las variables definidas.

3.1 Informantes.

Los sujetos del estudio fueron un grupo de 32 estudiantes de segundo grado de secundaria con al menos un curso previo en el tema de ecuaciones lineales de primer grado, de la escuela particular Emilio Sánchez Piedras, ubicada en la ciudad de Apizaco, Tlaxcala, México. Del grupo de estudio, 38 % son hombres y 62 % son mujeres con promedio de 13 años de edad.

Los estudiantes provienen de una región que es zona urbana y es una de las principales ciudades del estado, debido a su desarrollo industrial, económico, comercial y turístico. En el municipio existe un porcentaje de asistencia escolar del 94.8 % en nivel secundaria (INEGI, 2005). La escuela se encuentra en inmediaciones cercanas a la zona centro y es reconocida dentro del sector privado. El nivel socioeconómico de los estudiantes es medio-alto.

3.2 Diseño de actividades.

A continuación se muestra el proceso de diseño y validación de los instrumentos de recolección de datos para esta investigación, y poder explicar el proceso de comprensión del concepto de la variable como incógnita en estudiantes de secundaria. También, se muestra el diseño de la secuencia didáctica para la intervención en el aula.

3.2.1 Diseño de descriptores del modelo de comprensión de Pirie y Kieren.

El modelo de comprensión de Pirie y Kieren (1994) sugiere crear descriptores particulares necesarios para abordar el objeto de estudio en una investigación de un tema particular. De esta manera se pueden identificar elementos que deben cumplirse en cada nivel y para el paso entre los demás niveles. Las características creadas de cada etapa deben cumplir, claro está, con lo señalado por las condiciones generales del modelo, como sugiere Rendón y Londoño (2013).

En la Tabla 1 se muestra el diseño de los descriptores para verificar el proceso de comprensión del concepto y uso de la variable como incógnita. En la columna inicial se identifica cada nivel del modelo de comprensión; en la columna dos, las características definidas para el concepto de la variable como incógnita, y finalmente en la columna tres, el ítem que lo representa en el instrumento.

Tabla1. Descriptores para la comprensión del concepto de variable como incógnita

Niveles	Descriptores	Ítems
Conocimiento primitivo	*RECONOCE / IDENTIFICA* 1.Reconoce la expresión como algo que le es familiar	a)
Creación de imagen	*EXPRESA / DESCRIBE* 1. Describe ideas sobre que representa la expresión	b)
Comprensión de la imagen	*REPRESENTA* 1.Explica las acciones matemáticas que están involucradas con la expresión	c)
Observación de la propiedad	*IDENTIFICA PROPIEDADES* 1. Tiene la capacidad de identificar el proceso que lleva al desarrollo de la expresión matemática 2. Es capaz de resolver correctamente la ecuación	d)
Formalización	*DEFINE/ RESUELVE* 1. Explica con su propio lenguaje propiedades o leyes que están involucradas en el desarrollo de la ecuación	e)
Observación	*ANALIZA*	f)

	1. Analiza metacognitivamente los procesos que llevó a cabo	
Estructuración	*FORMALIZA* 1. Explica el proceso que realizó a través de propiedades matemáticas formales. 2. Realiza el procedimiento formal de solución de la ecuación	g)
Invención	*CREA* 1.- Identifica la relación de la expresión algebraica con posibles situaciones de la vida real. 2. Propone una situación o problema relacionado a su entorno que pueda ser representado mediante la expresión matemática. 3. Interpreta la solución del problema coherentemente	h) , i) y j)

3.2.2 Diseño y validación de instrumento diagnóstico y final.

Se construyó un cuestionario basado en las 8 etapas del modelo de comprensión de Pirie y Kieren con 10 ítems para 4 ecuaciones lineales de nivel básico en función de los descriptores definidos anteriormente (Tabla 1). El instrumento considera expresiones del tipo $Ax = B$, $Ax + B = C$ y $Ax + B = Cx + D$. Las primeras dos ecuaciones son consideradas por Ursini, et al. (2005) como ecuaciones sencillas que pueden ser modeladas por estudiantes de secundaria, mientras que la tercera ecuación, presenta un grado de dificultad mayor, como lo establece Filloy (1999) al distinguir la necesidad de operar con la incógnita. El instrumento permitió además, identificar el proceso de resolución y planteamiento de problemas.

Al instrumento se le realizó la validación de contenido, esto con la finalidad de determinar si el diseño de esta herramienta cumplía con el objetivo de medir lo que se pretendía y tenía los ítems relevantes y representativos del objeto de estudio.

Bajo este panorama, se consideró la validación a través del juicio de expertos la cual Escobar-Pérez y Cuervo-Martínez (2008) la definen como “una opinión informada de personas con trayectoria en el tema, que son reconocidas por otros como expertos cualificados en éste, y que pueden dar información, evidencia, juicios y valoraciones" (p. 29). Los autores elaboraron una plantilla que contiene 4 categorías de análisis: claridad, coherencia, relevancia y suficiencia y la cuál fue adaptada a nuestro estudio. Además, es importante mencionar, que la decisión respecto a la cantidad de jueces a considerar varía entre distintos autores.

En nuestro estudio se consideró una muestra intencional de 5 expertos especialistas en el área de educación matemática y con experiencia docente en diversos niveles educativos. La plantilla usada además recoge los datos de identificación del participante, como actividad laboral actual, años de experiencia y sector profesional. Posterior a ello, se le muestra la valoración de los ítems del cuestionario. Esta sección solicita a los participantes una valoración cuantitativa de los grupos de ítems, en una escala Likert de cuatro puntos, siendo establecidos como sigue: *1=No cumple con el criterio, 2=Bajo Nivel, 3=Moderado nivel y 4=Alto nivel*, para las categorías de claridad, coherencia y relevancia. Finalmente se recoge la valoración de los jueces sobre el grado de suficiencia. Ver Anexo 1.

El siguiente paso consiste en determinar la concordancia entre los jueces. Para ello se pueden usar diferentes procedimientos (Pedrosa, Suárez-Álvarez y García-Cueto, 2013; Escobar-Pérez y Cuervo-Martínez, 2008). En nuestro caso, consideramos el coeficiente de validación V de Aiken (Aiken, 1985), el cual informa sobre la proporción de jueces que manifiestan una valoración positiva sobre el objeto valorado, y tomar así decisiones en cuanto a la pertinencia de revisar o eliminar ítems. Para realizar su cálculo se hace uso de la siguiente formula:

$$V = \frac{\bar{X} - l}{k}$$

Donde: $\bar{X}$ es la media de las calificaciones de los jueces en la muestra, l es la calificación más baja posible, y k es el rango de los valores posibles de la escala Likert utilizada.

Además, el resultado ha sido interpretado atendiendo al método desarrollado por Penfield y Giacobbi (2004) asumiendo un nivel de confianza del 95%. Dicho procedimiento permite calcular la adecuación del contenido de los ítems atendiendo a cada juez participante.

De esta manera, se toma la V de Aiken de la tabla de valores de Aiken (1985) considerando 4 categorías y 5 jueces, con un nivel de confianza del 95% equivalente a 0.87, y se propone la siguiente prueba de hipótesis:

$H_o: No\ hay\ concordancia\ entre\ jueces$ $\qquad Vcalculada < V\ probabilistica$ Se acepta H_0

$H_a: Hay\ concordancia\ entre\ jueces$ $\qquad Vcalculada > V\ probabilistica$ Se rechaza H_0

Se muestra a continuación el registro de valores asignados por cada uno de los expertos distribuidos de manera vertical respecto a los ítems agrupados por categorías de forma horizontal.

- **Primer análisis**

En la primera evaluación de expertos se obtuvo:

	CLARIDAD							
	item 1	item 2	item 3	item 4	item 5	item 6	item 7	item 8
eval1	0.667	1	0.667	1	1	1	0.333	1
eval2	0	0.667	0	1	1	0	0	1
eval3	1	0.667	0.667	0.667	1	1	1	1
eval4	0.333	0.667	0.333	1	1	0	0.333	1
eval5	1	1	0.667	0.667	1	1	0.667	1
total	0.6	0.8	0.467	0.867	1	0.6	0.467	1
Total dim	0.725							
total prueba	0.761111111							

	COHERENCIA							
	item 1	item 2	item 3	item 4	item 5	item 6	item 7	item 8
eval1	1	1	1	1	1	1	1	1
eval2	0	0.3333	0	0.333	1	0	0	1
eval3	1	1	1	1	1	1	1	1
eval4	1	1	0.6667	0.333	1	0.333	0.667	1
eval5	1	1	0.6667	0.667	1	1	0.667	1
total	0.8	0.8667	0.6667	0.667	1	0.667	0.667	1
Total dim	0.791666667							

	RELEVANCIA							
	item 1	item 2	item 3	item 4	item 5	item 6	item 7	item 8
eval1	1	1	1	1	1	1	1	1
eval2	0	0.3333	0	0	1	0	0	1
eval3	1	1	1	0.3333	1	1	0.667	1
eval4	1	1	1	0.3333	1	0.333	0.667	1
eval5	1	1	0.667	0.6667	1	1	0.667	1
total	0.8	0.8667	0.733	0.4667	1	0.667	0.6	1
Total dim	0.766666667							

Figura 2. Análisis 1 de Juicio de expertos

Así, $V\ calculada < V\ probabilistica$, es decir, $0.76111 < 0.87$.

Por lo tanto, se acepta Ho y se concluye que no hay concordancia entre jueces. Lo que nos indica que debemos realizar modificaciones pertinentes a ítems señalados, atendiendo a las observaciones dadas por los jueces.

- **Segundo análisis**

Después de la modificación y reestructuración de ítems, en la segunda evaluación de expertos se tuvo:

	CLARIDAD								COHERENCIA								RELEVANCIA							
	item 1	item 2	item 3	item 4	item 5	item 6	item 7	item 8	item 1	item 2	item 3	item 4	item 5	item 6	item 7	item 8	item 1	item 2	item 3	item 4	item 5	item 6	item 7	item 8
eval1	1	1	1	1	1	1	0.6667	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
eval2	1	1	1	1	1	1	1	1	0.667	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
eval3	1	0.667	1	0.6667	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0.333	1	1	0.6667	1
eval4	0.667	0.667	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0.3333	0.6667	1	1	1	1	1	1	0.3333	1	1
eval5	1	1	0.667	0.6667	1	1	0.6667	1	1	1	0.6667	0.6667	1	1	0.6667	1	1	1	1	0.667	1	1	0.6667	1
total	0.933	0.867	0.933	0.8667	1	0.8	0.8667	1	0.933	1	0.9333	0.9333	1	0.8667	0.8667	1	1	1	1	0.8	1	0.8667	0.8667	1
Total dim	0.908333333								0.941666667								0.941666667							
total prueba	0.930555556																							

Figura 3. Análisis 2 de Juicio de expertos

Ahora, $V\ calculada > V\ probabilistica$, es decir, $0.930555556 > 0.87$.

De esta forma, se rechaza Ho y se acepta Ha. Lo que nos lleva a concluir que hay concordancia entre jueces y nuestro instrumento es pertinente para realizar la recolección de datos.

3.2.3 Diseño de la secuencia didáctica.

Una vez analizados los resultados diagnósticos, y con los datos obtenidos, se realizó el diseño de la secuencia didáctica para luego implementarla en 9 sesiones de 50 minutos cada una.

La secuencia incluyó desde introducir al alumno a nociones de ecuaciones, formalizar definiciones, hasta plantear, resolver e interpretar problemas. La secuencia didáctica involucra ecuaciones que fueron seleccionadas a manera de que el alumno trabaje con resultados en números positivos, negativos, enteros y racionales, además de representar a la incógnita mediante diferentes variables. La distribución de la secuencia didáctica consistió en una sesión como actividad introductoria y las restantes mediante el análisis de las ecuaciones siguientes, en el orden respectivo:

- Sesión 2 y 3 : $8x = 96$ y $6x = 27$
- Sesión 4 y 5: $2x - 7 = -15$ y $x + (x + 6) = 28$
- Sesión 6 y 7: $15(y + 4) = 111$ y $84 - 6x = 54$
- Sesión 8 y 9: $z + 14 = 2z + 10$ y $10x + 6 = 2x - 2$

Con respecto al planteamiento de problemas, se sugiere al alumno trabajar mediante las tres situaciones definidas por Stoyanova (1997). Se puede consultar en el Anexo 2 la secuencia didáctica.

Capítulo 4.

Resultados

A continuación, se describen inicialmente los resultados de la investigación cualitativa, distribuidos en varios apartados: resultados diagnósticos y finales, así como de la secuencia didáctica aplicada, descripción de dos estudiantes bajo el análisis del modelo de comprensión y el análisis de creatividad del planteamiento de problemas del grupo de trabajo.

Con la finalidad de describir casos relevantes y ejemplos del proceso de alumnos mediante el modelo, de aquí en adelante los alumnos serán nombrados A1, A2, …..A32, numeración definida conforme a lista de clases.

Además, dado el énfasis en el estudio del planteamiento de problemas, será conveniente definir categorías del proceso obtenido, siendo estos los siguientes casos posibles:

- Planteamientos correctos
- Planteamientos en proceso (falta concretar pregunta o alguna otra característica puntual de la sección)
- Planteamientos incorrectos
- Sin contestar

4.1 Resultados diagnósticos.

Se muestra gráficamente la comparación del número de alumnos que mostraron respuestas correctas al planteamiento y solución de ecuaciones lineales en la evaluación diagnóstica y final. Las ecuaciones consideradas fueron: $6x = 45$ (Ecuación 1), $x + 67 = 76 + 4x$ (Ecuación 2), $y + (y + 2) = 22$ (Ecuación 3) y $9(z + 2) = 126$ (Ecuación 4).

Podemos observar en la Figura 4 que la expresión que presentó mayor facilidad tanto en planteamiento como en solución fue la ecuación 1. Esto se debe a que bajo la teoría analizada (Filloy, 1999) la expresión $6x = 45$ es una ecuación aritmética cuya solución solo es una operación, en este caso la división, así como también, que al ser de estructura sencilla (Ursini et al., 2005) es más fácil de modelar y resulta cercana al alumno, ya que es una de las ecuaciones tradicionales que se estudian en el primer curso de secundaria. Se enfatiza también que la ecuación 3 presenta un número de respuestas altas en solución del ejercicio, y esto se debe a que el alumno manipuló aritméticamente la expresión para llegar a obtener el valor deseado, pues la manipulación algebraica le resultó complicada al presentar signos de agrupación como los paréntesis, situación similar a la ecuación 4.

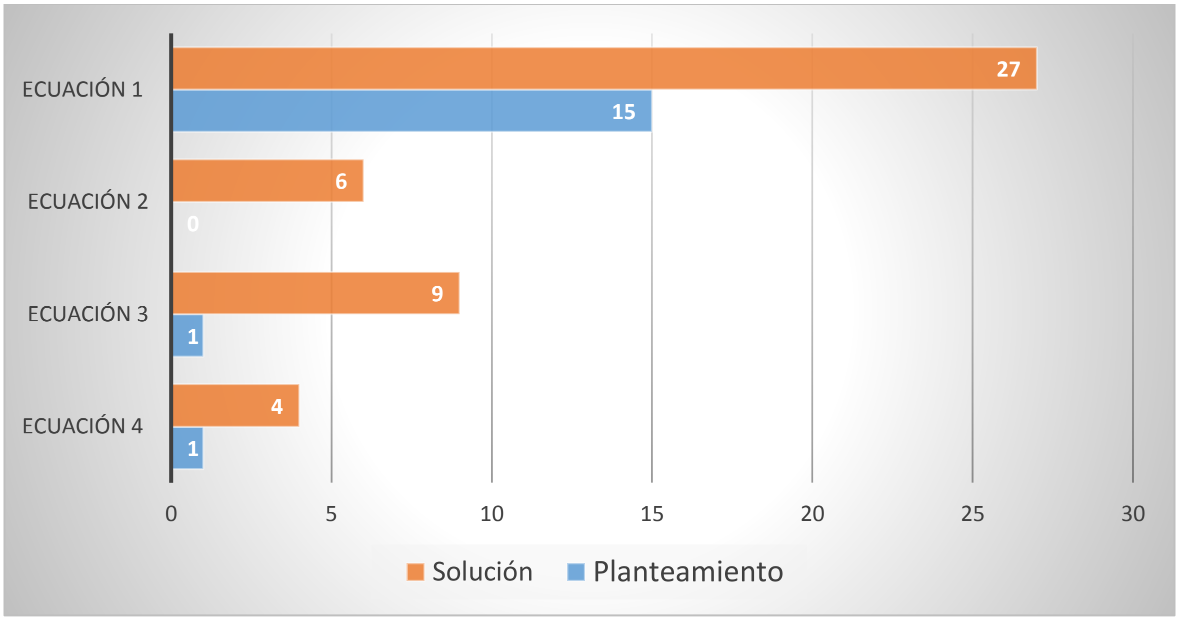


Figura 4. Resultados diagnósticos de planteamiento y solución para cada ecuación lineal.
Fuente: Elaboración propia

Se hace notar que las expresiones antes mencionadas presentan ausencia de operar la incógnita, al tener a la variable en un solo miembro de la igualdad. Un caso diferente se presenta en la ecuación 2, donde a pesar de ello se logró que al menos un 18% resolviera la ecuación propuesta, en este caso, aplicando diferentes estrategias que en su mayoría fueron operaciones numéricas e intentos.
En cuanto al planteamiento de problemas para una ecuación lineal se observó la baja experiencia que tienen los estudiantes al enfrentarse a este reto en comparación con su proceso de solución. Con base en las categorías antes definidas se puede distinguir en la Figura 5 los cuatro posibles casos presentados por los estudiantes para cada ecuación lineal propuesta.

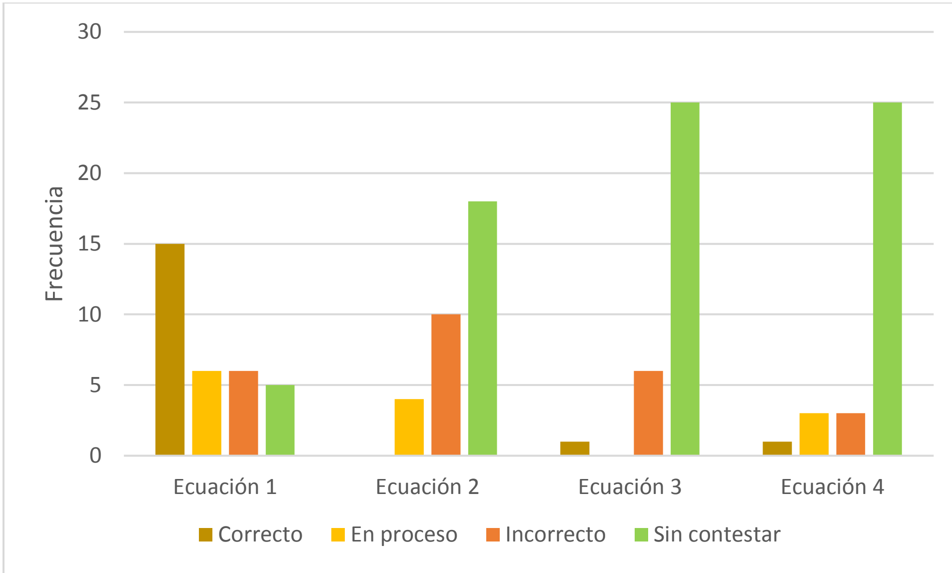
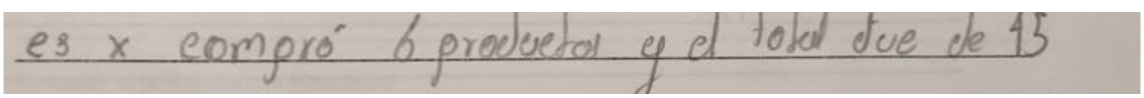


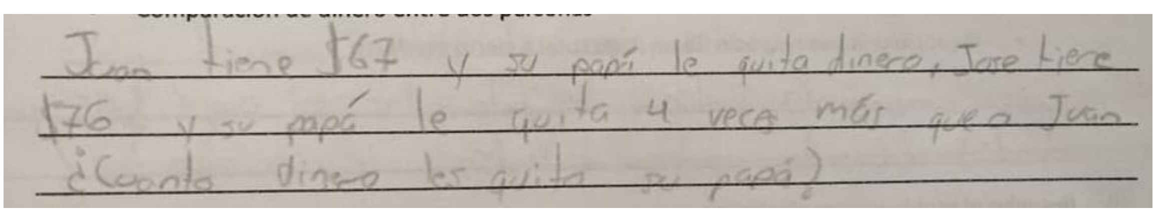
Figura 5. Resultados evaluación diagnóstica de planteamiento de problemas para cada ecuación.

Fuente: Elaboración propia

Para las ecuaciones 1, 2 y 4, a pesar de ser minoría, es importante distinguir que hay alumnos que aunque no completaron el planteamiento correctamente tienen respuestas que están *en proceso*, lo que significa que, bajo una intervención y guía por parte del docente pueden completar la idea. En esta categoría se consideran en proceso los problemas a los que les hace falta generar la pregunta (aplica en todos los casos), falta comparar expresiones (aplica ecuación 2) y planteamiento correcto pero con base en otra idea diferente a la propuesta (ecuación 1). Se muestra en la Figura 6 ejemplos de lo mencionado anteriormente.



a) Ejemplo de planteamiento de A6 donde falta pregunta para la ecuación 1 ($6x = 45$).

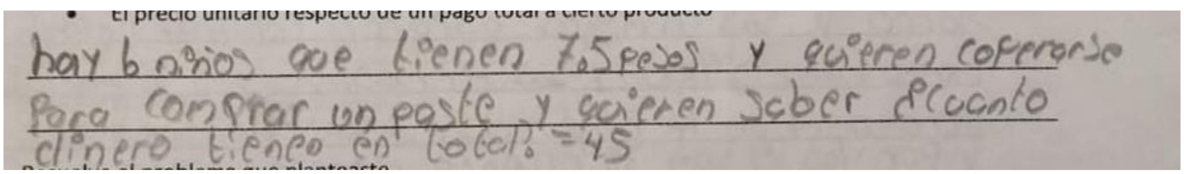


b) Ejemplo de planteamiento de A10 donde falta comparar para la ecuación 2 ($x + 67 = 76 + 4x$).

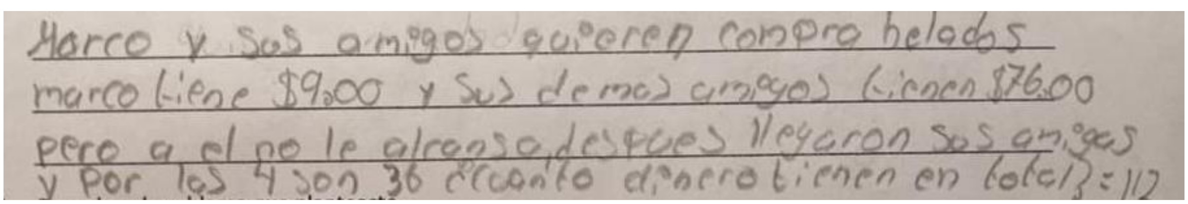
Figura 6. Ejemplos de planteamientos en proceso.

Para el caso de la categoría *sin contestar*, se puede distinguir que a excepción de la ecuación 1, predomina en todas las ecuaciones con gran frecuencia, situación generada debido a la estructura sintáctica diferente que presenta (más términos algebraicos), donde los alumnos consideran difícil las expresiones por lo que omiten intentarlo.

Se resalta también la alta frecuencia de la categoría de *incorrectos* en la ecuación 2, situación presentada por el grado de dificultad que implica a diferencia de las anteriores por la necesidad de operar la incógnita, pues es claro que se requiere tener claramente la noción de igualdad, situación que no se cumplió y como consecuencia presentó errores para los estudiantes. Ejemplos de lo antes mencionado se puede observar en la Figura 7, ya que en ambos problemas se identifica el error que presenta el estudiante al incluir el valor de la variable dentro del problema, además de que en el segundo caso, hace falta la noción de igualdad incluyendo a la variable.



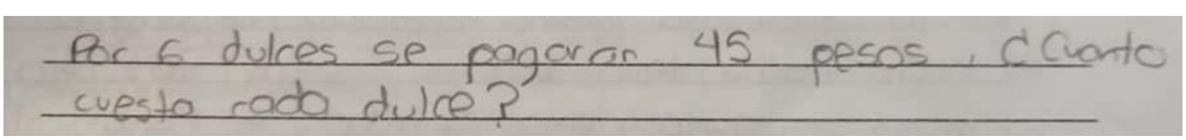
a) Planteamiento incorrecto Ecuación 1



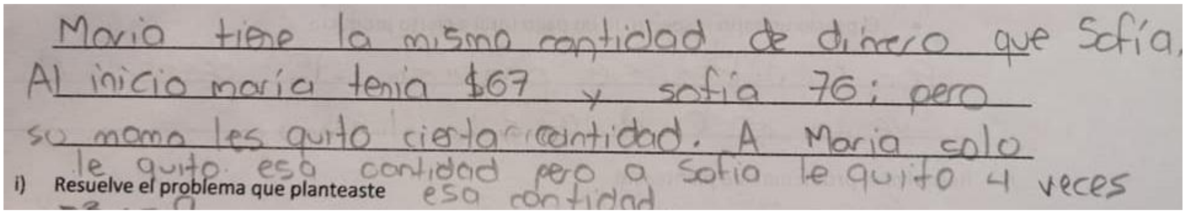
a) Planteamiento incorrecto Ecuación 2

Figura 7. Ejemplos de planteamientos incorrectos del alumno A19 en la evaluación diagnóstica.

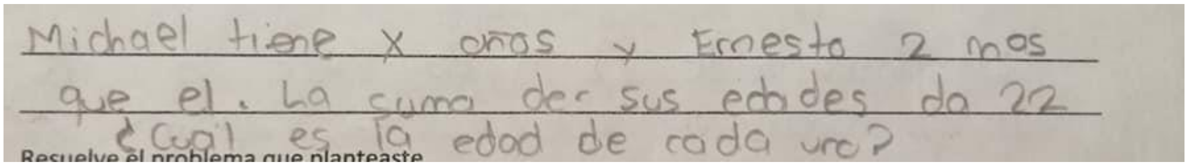
Por último, se hace notar que en esta sección al menos un alumno (A26) de considerable aprovechamiento académico logró generar la mayoría de planteamientos de forma correcta, siendo únicamente en el problema 2 que falta la pregunta final, como puede verse en la Figura 8.



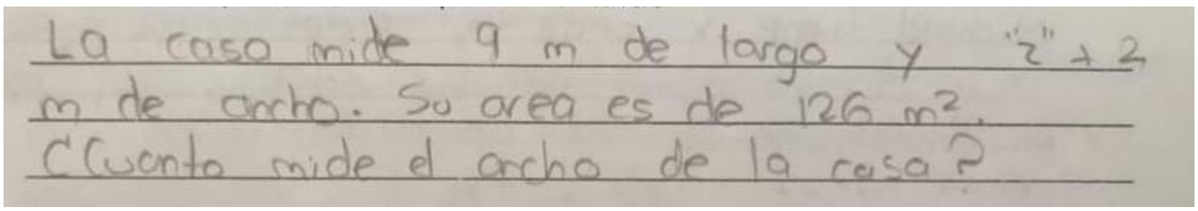
a) Ecuación 1. $6x = 45$


Maria tiene la mismo cantidad de dinero que Sofía,
Al inicio maría tenia $67 y sofía 76; pero
su mama les quito cierta cantidad. A Maria solo
le quito esa cantidad pero a Sofia le quito 4 veces
i) Resuelve el problema que planteaste esa cantidad

b) Ecuación 2. $x + 67 = 76 + 4x$


Michael tiene x años y Ernesto 2 mas
que el. La suma des sus edades da 22
¿Cual es la edad de cada uno?
Resuelve el problema que planteaste

c) Ecuación 3. $y + (y + 2) = 22$


La casa mide 9 m de largo y "z" + 2
m de ancho. Su area es de 126 m².
¿Cuanto mide el ancho de la casa?

d) Ecuación 4. $9(z + 2) = 126$

Figura 8. Planteamientos para las ecuaciones de evaluación diagnóstica por alumno A26.

Por otro lado, de manera general en la evaluación diagnóstica se pueden distinguir algunos niveles que corresponden al modelo de comprensión de Pirie y Kieren. En relación al *conocimiento primitivo* que corresponde al nivel uno del modelo, los estudiantes en su mayoría logran cumplir el requisito que corresponde a asociar conceptos o ideas de conocimientos previos con el reconocimiento de la ecuación indicada, es decir, traen de regreso algo que fue anteriormente visto y que les es familiar. Así, es el ítem que presenta mayor número de respuestas para todas las ecuaciones y se resaltan algunas contestaciones como: "*es una expresión algebraica*", "*tiene incógnitas*", "*es una ecuación*" y se "*desea encontrar el valor de x*".

Para el nivel dos que indica la *creación de la imagen*, se identifica que los estudiantes son capaces de realizar acciones mentales que involucran la descripción de los procedimientos y acciones que desean hacer, tal como resolverla y hallar el valor de la incógnita x o bien, un razonamiento especifico que implica que se debe satisfacer el concepto de igualdad, reconociendo las propiedades del concepto que se está estudiando, por ejemplo: "*seis por un número debe dar cuarenta y cinco*". Además, esta situación es ampliamente relacionada con el nivel tres correspondiente a *comprensión de la imagen*, donde ahora los estudiantes se ven en la necesidad de puntualizar las acciones físicas que llevarán a cabo, es decir, las operaciones involucradas para darle solución a cada ecuación. Por ejemplo, se resalta que solo la ecuación 1 cumple con un 60% de respuestas correctas dadas a esta pregunta en comparación con las ecuaciones restantes, al distinguir claramente una sola operación, en cuyo caso es la división. Sin embargo, para esta misma expresión dos estudiantes (A18 y A19) identificaron a la multiplicación como operación que tienen que aplicar para resoverla. El resto del grupo mencionó las cuatro operaciones básicas, aunque más adelante no hicieran uso de ellas.

El siguiente punto determinado como *observación de la propiedad*, es donde puede distinguirse de manera concreta, el proceso de resolución de las ecuaciones por parte de los estudiantes, ya que como bien se mencionó en la descripción del modelo, corresponde a la capacidad de identificar el proceso que lleva al desarrollo de la expresión matemática, ya que se debe aplicar la conexión de todas las propiedades e imágenes mentales antes generadas. Este proceso como bien lo muestra la Figura 4, se distingue predominantemente en la ecuación 1 con un 47% de respuestas correctas y siendo escaso en las restantes. Por lo tanto, se puede distinguir que este nivel como todo proceso, depende de los anteriores, y se necesitará tenerlos consolidados para cumplir de manera satisfactoria esta fase; caso contrario, ocasionó obtener bajos resultados.

Así, es en este momento cuando bajo las características del modelo se pudo haber realizado el *Folding back*, donde los estudiantes tenían la posibilidad de regresar a niveles anteriores para recuperar y cambiar información que le permitiera cumplir correctamente dicho nivel, pero desafortunadamente no lograron aplicarlo.

Por último, se distigue al nivel de *invención* como uno de los niveles que tambien presentó gran relevancia, sobre todo, por la mínima o nula experiencia que pudieran presentar los estudiantes al ser una actividad no común en el aula de clases. Por ello, dado el énfasis de esta actividad para el trabajo de investigación, se determinaron tres ítems para su análisis: directamente solicitar un planteamiento mediante una idea propuesta (resultados que también se pueden distinguir en la Figura 1), así como resolver dicho problema planteado por los medios que se consideren pertinentes y analizar de manera crítica la relación entre esta respuesta del problema con la respuesta de la ecuación obtenida en un ítem anterior. Esto genera que el estudiante compare y razone la pertinencia del problema planteado y pensar no solo en la respuesta de la ecuación como un número, sino darle sentido en el contexto del problema considerando la naturaleza del mismo. Así, claramente estas tres preguntas están relacionadas y son dependientes, por lo que al fallar desde el planteamiento u omitirlo es imposible seguir, situación que se identificó en todas las ecuaciones con excepción de la ecuación 1. Otro punto importante por mencionar precisamente en esta ecuación es que los estudiantes optaron por resolver el problema planteado mediante el proceso algebraico sistemático del despeje y asumiendo sin razonamiento que las respuestas eran coincidentes, lo que claramente se asume como un efecto del *contrato didáctico,* pues los alumnos asumen que esto debe cumplir.

Con respecto a los niveles restantes, se puede mencionar la falta de experiencia en la formalidad y análisis que los contenidos matemáticos requieren, y en particular, el trabajo con la variable como incógnita. Así, los que presentaron mayor problema fueron *formalización, observación* y *estructuración*.

4.2 Resultados finales.

Para la evaluación final posterior a la aplicación de la secuencia didáctica, se observó lo siguiente: es considerable el aumento de respuestas correctas para la solución de las ecuaciones lineales propuestas, así como para las ecuaciones 1, 3 y 4 al planteamiento de problemas (Véase Figura 9). La ecuación 2 presentó una similitud de número de planteamientos correctos a la evaluación diagnóstica, situación que se debe a la estructura de la ecuación dada, que como dijimos en ese momento, se requiere operar la incógnita y manipular paréntesis u operaciones algebraicas.

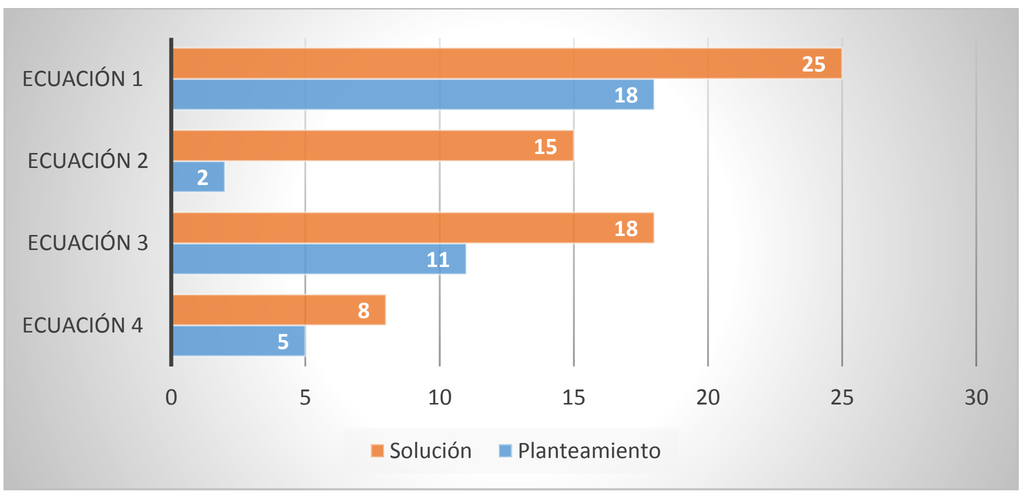


Figura 9. Resultados de la evaluación final de planteamiento y solución para cada ecuación.
Fuente: Elaboración propia

De manera análoga al análisis anterior, se muestra en la Figura 10 el aumento en el número de alumnos que realizaron la actividad de plantear un problema que modela cada ecuación.

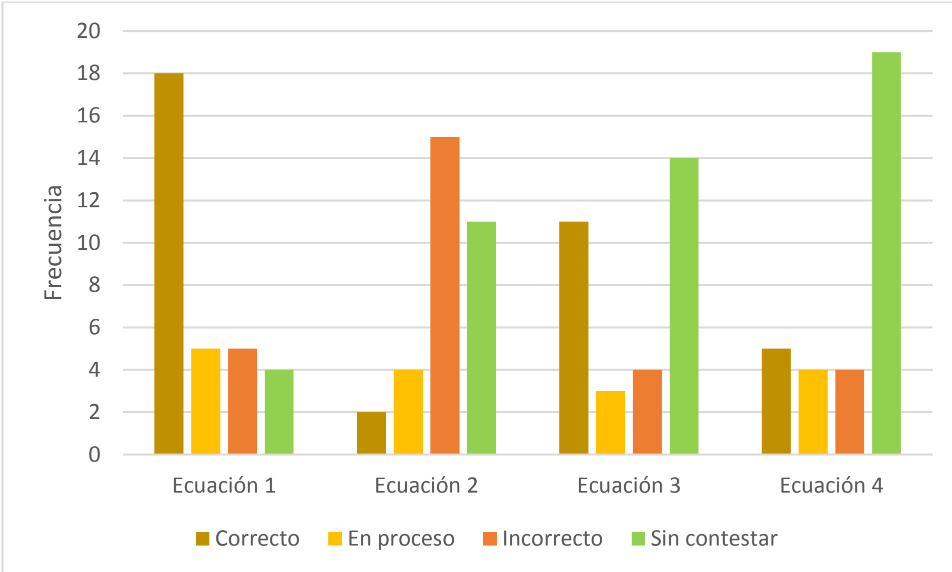


Figura 10. Resultados evaluación final de planteamiento de problemas para cada ecuación.

Fuente: Elaboración propia

Se puntualiza así, el aumento considerable en el proceso de plantear problemas para ecuaciones lineales y ayudar al alumno a darle un contexto y sentido a la representación algebraica. Además, se observa también el aumento en el número de intentos de realizar algún planteamiento, identificando así las ventajas de implementar este tipo de actividades en el aula y generando interés en las matemáticas.

A pesar de que la Ecuación 2 no presentó avance en el número de planteamientos correctos, se identifica ahora que el número de intentos en el planteamiento de un problema o planteamientos en procesos para esta ecuación ha aumentado, lo cual significa un resultado significativo, ya que a pesar de ser un proceso complejo y requerir un proceso continuo de aplicación, se obtuvo un mejor aprovechamiento para el aprendizaje de los estudiantes.

4.2 Resultados de la secuencia didáctica.

La secuencia didáctica se llevó a cabo en nueve sesiones de aproximadamente cincuenta minutos cada una. Cada sesión fue bajo una temática diferente: por tipo de ecuación o forma de organización de trabajo. Además, a excepción de la sesión 1, en todas las sesiones se promueve la identificación y análisis con las diferentes situaciones de planteamiento de problemas definidas por Stoyanova (1997).

A continuación se puntualiza sobre cada una de ellas.

4.2.1 Sesión 1 Actividad introductoria

En esta sesión se pretendió que los estudiantes recordaran y formalizaran el concepto de ecuación a través de ejemplos y representaciones gráficas, así como el analizar situaciones y procedimientos planteados. Esta actividad fue pensada bajo la premisa de que los estudiantes tenían conocimientos previos del curso de Matemáticas I de primer grado de nivel secundaria. La forma de trabajo fue de manera grupal bajo la guía del docente promoviendo la participación y discusión de ideas. Con base en ello, fue claro llegar a la distinción y agrupación de las expresiones propuestas bajo el criterio de ecuaciones, funciones y sucesiones en términos de las literales indicadas, como se muestra en la Figura 11. Los alumnos se mostraron participativos en hacer distinciones, entre todas ellas rescatando ideas tales como: "*unas tienen signo igual y otras no*", "*estas tienen dos letras, la* (x) *y* (y)" o "*unas tienen dos términos y otras tres*", entre otras. Posterior a ello, cada uno colocó las respuestas en sus respectivas hojas de trabajo.

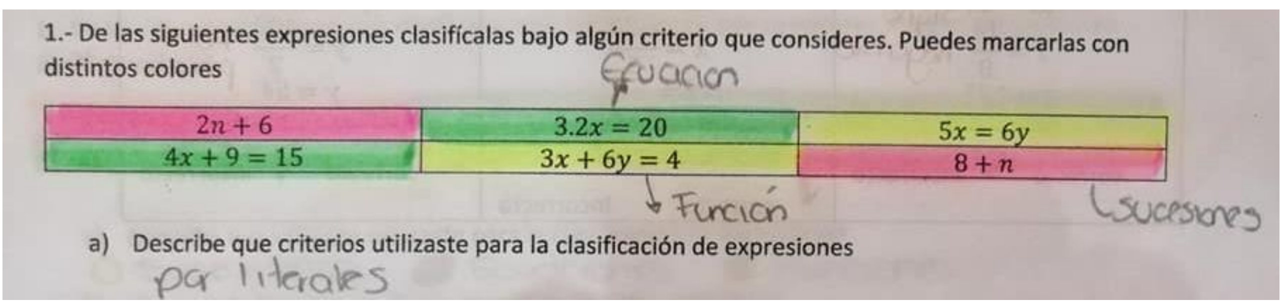
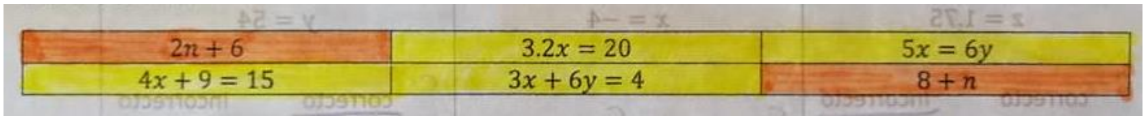
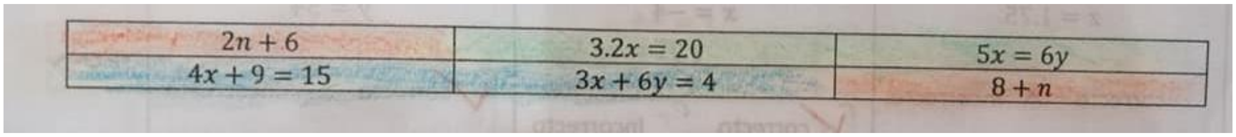


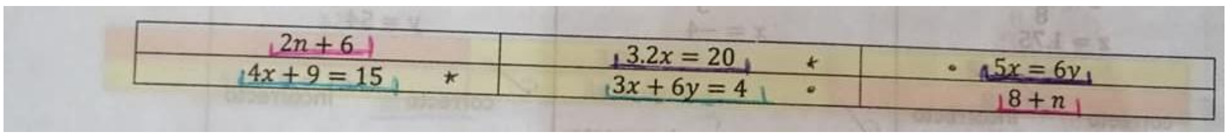
Figura 11. Distinción y agrupación de expresiones ejercicio 1- sesión 1.

Solo tres alumnos (A18, A23, A25) presentaron una agrupación incorrecta al considerar criterios diferentes propios de su observación y conocimientos limitados del tema. En el primer caso se realizaron solo dos agrupaciones en sentido de todas presentar el signo igual, mientras que en los dos casos restantes se consideró la igualdad de las expresiones en sentido del número de términos que involucra: término igual a término y dos términos igual a un término, sin considerar las variables involucradas, véase Figura 12.



a) Agrupación alumno A18.

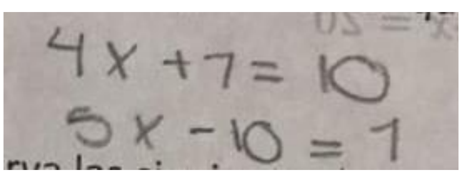


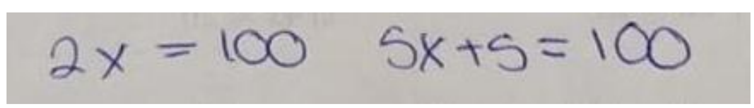


b) Agrupación alumno A23 y A25 respectivamente.

Figura 12. Errores de agrupación de expresiones ejercicio 1- sesión 1.

Con base en esta clasificación se solicitó analizar en cuáles casos se desea encontrar un valor específico, así como puntualizar como se llaman estas expresiones, de los cuales un 99% mostró respuestas correctas. Para complementar este concepto de ecuaciones se solicitó también a los estudiantes que escribieran ideas que les generaba dicha expresión, de las cuales predominó aproximadamente con un 72% el hecho de descubrir o encontrar el valor de la incógnita. Dos estudiantes (A16, A18) presentaron ideas diferentes como respuesta a este ítem, de lo cual como se muestra en la Figura 13 consiste en proponer otras ecuaciones, es decir, ejemplos de ecuaciones en el mismo sentido de la estructura sintáctica.





a) Alumno A16 b) Alumno A18

Figura 13. Ideas propuestas por estudiantes para el concepto de ecuación.

Para la pregunta 2 de la misma sesión, se promovió la noción de igualdad en sentido de una balanza. Se proponen ejemplos por medio de figuras para que el alumno asigne valores con números reales que permitan cumplir la condición de equilibrio. Posterior a este análisis, cada estudiante propuso un ejemplo diferente, se muestra en la Figura 14 un caso en particular.

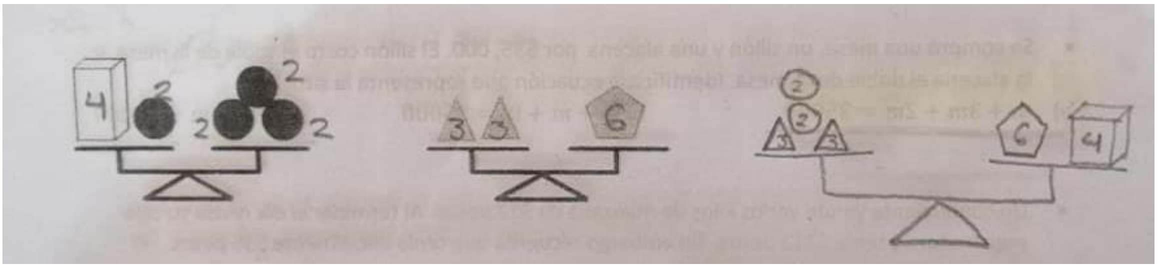


Figura 14. Ejemplo de balanza propuesta por alumno A12.

Como puede observarse el estudiante asigna valores diferentes para cada figura logrando un equilibro en cada una y la coincidencia del mismo peso en ambas (aspecto no totalmente requerido). A partir de esto genera la combinación de todas las figuras y realiza su representación correcta y completa. Bajo este criterio solo 10 alumnos más realizaron su representación de la misma forma.

El ítem siguiente que corresponde al número tres de esta sesión consistió en analizar procedimientos de solución de ecuaciones y determinar así si estaban correctas o incorrectas. Los alumnos estaban familiarizados con esta actividad y la realizaron de manera individual para después mediante una lluvia de ideas y participación justificar su respuesta. De esta forma, de manera grupal se pudo completar la actividad distinguiendo y resaltando los errores que en su mayoría pertenecían a cambios de signos y operaciones finales. Asimismo, para el último ítem que correspondió a la traducción de lenguaje verbal al algebraico de cinco problemas, se requirió la asesoría y análisis guiada por parte del docente.

4.2.2 Sesión 2 y 3: Ecuaciones de la forma $Ax = B$

Esta sesión se llevó a cabo de manera grupal mediante las hojas de trabajo. El objetivo de la sesión consistió en que los alumnos reconocieran ecuaciones de primer grado de la forma $Ax = B$ donde además de resolverlas, las relacionaban con situaciones cercanas a su entorno.

La primera ecuación con la que se trabajó fue la de $8x = 96$. Los estudiantes inmediatamente reconocieron la expresión y externaron la facilidad que les presentaba, puesto que fue un tema que trabajaron en un curso anterior. De esta forma, se dió paso a realizar el análisis de las operaciones que se tendrían que llevar a cabo para darle solución, siendo la división la única operación que consideraron necesaria. Sin embargo, dos estudiantes propusieron a la multiplicación también como una operación de solución. En el primer caso, identificado y discutido en el aula, el alumno A4 propuso la equivalencia de 8×12, y al pedirle que explicara más detalladamente su procedimiento dijo: "*Yo hice, multiplicar 8 × 10 y era 80 y restaba 80-96 y era 16 entonces 2×8 es 16 y 10+2=12, entonces x es 12*". Como se puede observar, el alumno desarrolló un pensamiento aritmético para resolver el problema. El resto de los compañeros comentaron que era una buena idea pero menos efectiva pues requería mayor tiempo dado que era considerada como una operación de prueba y error. Por otro lado, de manera escrita el alumno A6 mostró la operación que ocupó para obtener el valor de la variable, cumpliendo que un número por ocho debe dar noventa y seis, así $8 \times 12 = 96$. Después de resolver la ecuación por este medio se les solicitó identificaran propiedades matemáticas que fueron requeridas y utilizadas para su solución, en cuyo caso, solo fue posible distinguir al despeje u operación inversa como respuestas debido a que la formalidad de propiedades era desconocida o no consolidada. Por otro lado, al pedirles analizar y comprobar su resultado se identificó lo siguiente: Para el primer caso, los estudiantes identificaron que el número obtenido se podía considerar como entero, positivo, natural, par, etc. Bajo estas respuestas el docente generó en el estudiante la reflexión respecto a la contención y relación entre ellos, y puntualizó la importancia de conocer esta característica.

Para el segundo caso propusieron diferentes alternativas de comprobación del resultado, siendo en su mayoría la propuesta de evaluación directa o sustitución, es decir, en palabras del alumno A16: "*Darle como tal el valor a la x, 8×12".* Sin embargo, este mismo estudiante propuso lo siguiente minutos después: "*También podría ser como plantear un problema de la vida cotidiana y llevándolo a experimento*".

Es importante resaltar aquí, que el alumno logra identificar a la actividad de planteamiento de problemas como auxiliar en la validación de resultados e interpretación, sobre todo sin tener suficiente formación sobre esta actividad como antecedente. De esta forma y generando las reflexiones en el aula, el docente propone (con apoyo del material de trabajo) diferentes situaciones o ideas que podrían ser tomadas para modelar un problema matemático bajo la ecuación indicada como bien se propuso anteriormente. Los estudiantes determinaron la posibilidad o dificultad de cada una, analizando los diferentes ejemplos propuestos. Entre ellos, se puede distinguir el siguiente fragmento al analizar la posibilidad de que la ecuación represente un modelo de área de figura geométrica.

> *Docente: ¿Puede representar el área de una figura geométrica?*
> *A8: Si se puede. Se supone, bueno no recuerdo como se llama la figura que tiene 8 lados.*
> *A6: Bueno, yo digo que no, el área pues no, pero el perímetro podría ser porque para el área necesitas la apotema.*
> *A8: Entonces no, podría ser la medida de un cuadrado donde x sea 4*
> *A2: Podría ser un rectángulo donde un lado es 8 y otro x y ese sea 12*
> *Docente: Entonces, con esa información ¿Ahora si me representa el área de un figura?*
> *Todos: Si, lado por lado,* $8\ por\ x$

Distíngase que los alumnos debaten sobre el tipo de figura más adecuada que se pueda tomar, concluyendo que en conveniencia implica una multiplicación y esa operación está relacionada con un cuadrilátero. Sin embargo, fue importante aclarar específicamente a qué tipo de cuadrilátero se referían, puntualizando todos: *"Es un rectángulo, si fuera cuadrado seria* 8×8*"*.

Al analizar la situación dos en sentido de representar el valor unitario respecto a un pago total, los estudiantes estuvieron de acuerdo inmediatamente que era posible, y lo relacionaron con la idea siguiente que corresponde a una repartición, aclarando que dependerá del objeto que se tenga para repartir, pues no todo se puede dividir. Debido a esto, fue el contexto que en su mayoría utilizaron los estudiantes al plantear problemas en el aula bajo el supuesto de ser más sencillo. Finalmente, se analizó la última idea que corresponde a la posibilidad de representar el total de días de ahorro a una cantidad, donde hubo propuestas como la siguiente: "*Sería si ahorras 8 pesos por 12 días*", sugerida por A7.

Después de este análisis toca el turno a los estudiantes plantear problemas (pueden considerar situaciones como las mencionadas anteriormente), lo que ocasiona una interesante participación.

En algunos casos especiales se analizaron nuevamente con detenimiento los problemas propuestos, por ejemplo, se distingue el siguiente diálogo:

> *A8: Tenía 96 libretas y las debo repartir entre 8 salones ¿Cuántas libretas toca a cada uno?*
> *A6: Yo lo hice al revés. Pepito compró 12 paquetes de galletas y pagó 96.*
> *(Reacciona y dice)… No, no, Olvídelo…. Estoy dando la respuesta*
> *Docente: Entonces ¿Cómo quedaría?*
> *A5: Beto compró 8 cosas y el resultado fue 96.*
> *Docente: Mejora tu problema. Y el resultado ¿De qué?*
> *A5: Beto compró 8 cosas y pagó 96.*
> *Docente: Ok ¿Ahora es correcto?*
> *A6: Si*

En este momento, los alumnos no identificaron la falta de la interrogante que diera sentido a la variable y completara el problema. Bajo esto, el docente hizo la intervención y aclaración correspondiente.

Por otro lado, también es importante resaltar, el hecho importante de que el alumno A6, por si mismo, es capaz de identificar su error cuando plantea un problema, dado que incluye la información (valor de la respuesta) dentro de este, lo que ocasiona un error. Debido a ello, nuevamente el docente interviene y apoya en determinar las características necesarias requeridas para crear problemas.

Para terminar esta sesión que corresponde a la ecuación uno, se le solicitó al estudiante propuestas diferentes de planteamientos, es decir, considerando otros temas o contenidos. Así, es relevante comentar que de manera grupal lograron completar la idea del perímetro de una figura geométrica, ya sea cuadrado, rectángulo u octágono, teniendo en mente que habría que descomponer o desarrollar la expresión 8x. El alumno A6 propone: *Mi terreno con forma de octágono, su perímetro mide 96 m. ¿Cuánto mide de cada lado?*. Es claro que el planteamiento involucra la información correctamente y la pregunta va en sentido de determinar el valor de la variable, sin embargo resultaría importante hacer la distinción si ese problema existe.

Una vez finalizado el análisis correspondiente de la ecuación uno, se da paso a trabajar con una segunda ecuación, de la misma estructura algebraica. Por ello, aquí se inicia distinguiendo las similitudes que presentan las ecuaciones propuestas y teniendo los siguientes comentarios.

> *Docente: ¿La ecuación 2 es semejante a la 1? ¿Por qué?*
>
> *A10: Si, en que solo se necesita un paso y que son de un valor específico.*
>
> *A6: En su estructura, tiene la misma literal y valor enteros juntos.*
>
> *A12: El planteamiento es el mismo, nada más cambian los datos y por eso varia el resultado.*
>
> *A10: Es* $Ax = B$ *donde A es un número y B otro número.*

De manera general los estudiantes pueden distinguir que estas expresiones son de estructura similar, es decir, representan una estructura base donde para todos los ejemplos propuestos se manipulan, interpretan y modelan igual, pero no olvidando la interpretación que debe existir con el valor de la variable que corresponde al resultado. Ejemplo de esto se muestra a continuación cuando un estudiante propone un planteamiento.

> *A13: Una caja de chocolates Ferrero contiene 27 chocolates. Si están ordenados de manera (pausa). ¿Cómo cuántos chocolates habrá en cada una?*
>
> *(Se escucha un murmullo comentando que no es posible crear así el problema)*
>
> *Docente: Exacto, es importante analizar ¿Tendría sentido el problema con el resultado que obtendremos?*
>
> *Todos: No, porque es decimal.*

Después de esta observación, otros estudiantes propusieron ejemplos diferentes cuidando ese detalle importante.

Es así, que es significativo lo identificado en el aula en este primer acercamiento del planteamiento de problemas, ya que como bien se ha mencionado, esta actividad permitió el razonamiento crítico y analítico de los estudiantes, se generó un ambiente de participación y el interés por proponer y crear sus propios problemas.

4.2.3 Sesión 4 y 5: Ecuaciones de la forma $Ax + B = C$.

Esta sesión se desarrolló en binas con un trabajo supervisado por parte del docente, donde los estudiantes tenían que completar las hojas de trabajo de la secuencia didáctica propuesta considerando ahora $2x - 7 = -15$ y $x + (x + 6) = 28$ como Ecuación 1 y 2 respectivamente.

Al ser una estructura algebraica diferente, en ambas ecuaciones se presentó dificultad para resolver y plantear problemas. En un inicio, los estudiantes dieron pauta a resolver las ecuaciones realizando operaciones que bajo conocimientos previos tenían, sin embargo, se identificaron errores y dificultades ante la manipulación aritmética o algebraica que tenían que realizar. Entre ellos, se identifica la dificultad de trabajar con signos negativos y operaciones con números combinados (positivos y negativos) para la primera ecuación y errores de interpretación de los signos de agrupación para la segunda ecuación. No obstante a esto, más adelante (cuando se solicitó realizar comprobación) lograron identificar que el valor propuesto no satisface la igualdad y los obligó a revisar y rectificar. Después de este cambio se puede distinguir un 94% de respuestas correctas como solución a las ecuaciones. Una vez obtenido este resultado se pasa a analizar específicamente cada ecuación.

Para la ecuación 1, solo ocho alumnos lograron aproximarse a determinar el tipo de número que corresponde la respuesta, que en su caso describen solamente como número negativo. Por otro lado, identifican como propiedades matemáticas o leyes utilizadas a la *agrupación de términos semejantes o despejes.* A pesar de que este contenido fue explicado por el docente, les resulta difícil utilizar y comprender el concepto de asociar, inverso multiplicativo, inverso aditivo, entre otros, y prefieren así utilizar el lenguaje común y no formal, que en relación a lo anterior sería: *juntar términos iguales* y *hacer operaciones inversas.*

Con respecto al planteamiento de problemas, todos los equipos requirieron apoyo para empezar a realizar sus propuestas. Así, el docente retomó ideas vistas en las sesiones anteriores y los guío para empezar a realizar su formulación, no olvidando que tienen que considerar algunas características, por ejemplo: el tipo de número que representará la variable, incluir los datos correctos en el problema, además de considerarlos todos y en la actividad inicial, considerar situaciones o ideas sugeridas para realizar dicho planteamiento. Se muestra un ejemplo a continuación.

> *A29: ¿Cómo puedo hacer mi problema?*
>
> *Docente: Bien, empecemos por seleccionar de qué situación quieres hacerlo.*

A29: Deuda

Docente: Muy bien, y ¿ya resolvieron la ecuación y saben que número es la respuesta?

A29: -4

Docente: Es a lo que quieren llegar, también así en el problema. (Como hay duda aún, se continua). Díganme mostrando la ecuación, ¿el 2 que representa, x que puede representar?

A2: Dos semanas.

Docente: Considerando esto, entonces. ¿Cómo quedaría?

A29: Juan tiene una deuda de dos semanas y pago (pero es negativo, corrige) y volvió a endeudarse con otros 7. ….Y en total de su adeudo es – 15

Docente: Ahora solo genera la pregunta

De esta forma, el docente generó el apoyo para que el alumno tuviera el primer acercamiento a modelar problemas con valores negativos e interpretarlos. Sin embargo, se identifica claramente la dificultad que implica considerar esto, pues no lograron concretar y plasmar completamente sus problemas. Solo dos binas de estudiantes realizaron la actividad satisfactoriamente para estas ecuaciones.

Se hace notar que para esta ecuación, se solicitaron dos planteamientos de los cuales el segundo tuvo una frecuencia mucho menor de respuestas, pues se solicitó un contexto diferente, que debía ser creado por ellos.

Con respecto a la ecuación dos, es importante mencionar que a pesar de mantener la estructura base, se presenta a los estudiantes la expresión en una forma extensa o desarrollada, incluyendo además, un signo de agrupación. Esto con la finalidad de que el alumno analice la mejor estrategia de cómo abordar el problema y manipule algebraicamente si lo requiere, tanto para resolver como para plantear. Sin embargo, los errores identificados en los estudiantes se relacionan al considerar el paréntesis en el sentido de un producto (véase Figura 15), situación que tuvo que ser supervisada por el docente.

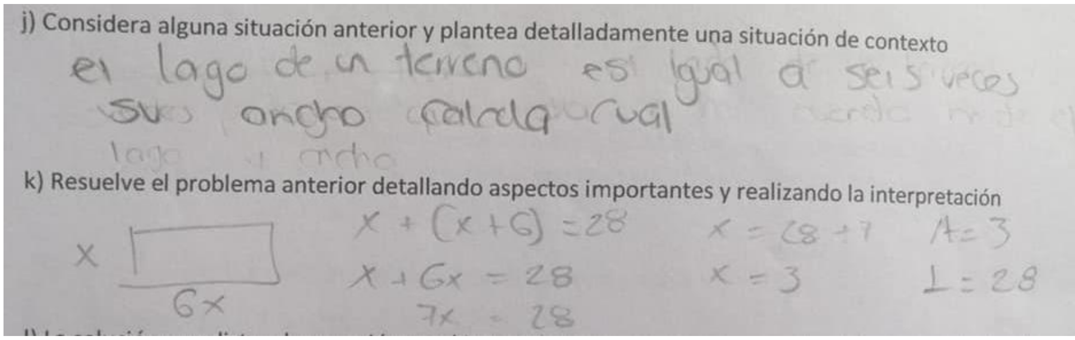


Figura 15. Error de planteamiento y solución de la ecuación por el alumno A12.

Para las respuestas que corresponden al tipo de número que toma la variable, un 48 % lo identificó como un número entero positivo, e hicieron mención de que las propiedades matemáticas utilizadas para resolver la ecuación involucran "*juntar términos semejantes*", siendo la suma la operación inmediata que realizan. Bajo este criterio, los estudiantes resaltan que es más sencillo considerar este valor para realizar un planteamiento.

Por otro lado, se identifica mediante la discusión abordada en cada grupo de trabajo, que a excepción de 4 binas, todos los estudiantes concluyen que los cuatro contextos sugeridos para crear problemas son posibles de tomar, sin embargo, al solicitarles realizar dichos ejemplos no lograron concretarlos. Por otro lado, la situación que esta minoría de alumnos no acepta para realizar un planteamiento, descarta al menos una de las siguientes ideas: *la suma de dos números que tienen diferencia de 6 unidades (*presentada con mayor frecuencia*)*, seguido de *área de un terreno* y *juntar cierta cantidad de dulces entre dos personas.* Así, respecto a estos dos últimos contextos, no se presentó ningún planteamiento.

Finalmente, con respecto al momento que el alumno debía crear una situación nueva y plantear un problema diferente, solo un equipo logró establecer la siguiente situación, donde se relaciona *la cantidad de dinero entre dos personas,* véase Figura 16.

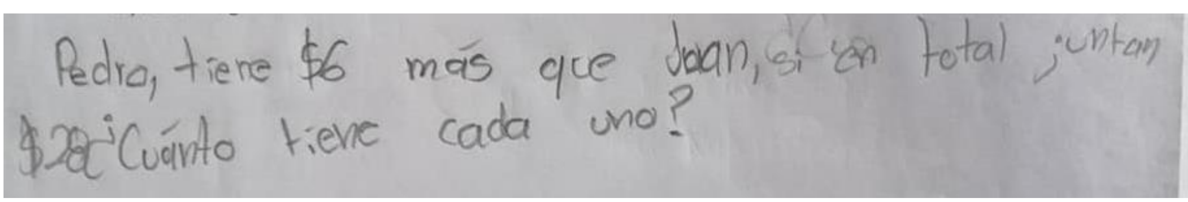


Figura 16. Planteamiento diferente propuesto por alumnos A11 y A19.

4.2.4 Sesión 6 y 7: Ecuaciones de la forma $\boldsymbol{Ax + B = C}$.

En estas dos sesiones los estudiantes trabajaron nuevamente con la estructura algebraica $Ax + B = C$, siendo en esta ocasión las ecuaciones $15(y + 4) = 111$ y $84 - 6x = 54$. Se puede observar que dichas ecuaciones están representadas en forma distinta incluso con las propuestas en las sesiones anteriores, esto con la finalidad de que el estudiante analice, interprete o manipule signos de agrupacion, posición de términos, simplificación de expresiones, entre otros.

Estas actividades se desarrollaron de manera grupal con la guía del docente y la participación activa de los estudiantes en el aula de clases y con sus hojas de trabajo.

Con respecto de la ecuación $15(y + 4) = 111$, los estudiantes identificaron que para resolverla se necesitaba aplicar la operación multiplicación y resta, que en sus propias palabras fueron *"multiplicación del paréntesis y la resta del 4 al cambio del término".* Obsérvese que los estudiantes consideran al signo de agrupación (paréntesis) como representante inmediato de un producto, y a su vez a la resta como operación inversa a la suma indicada. Sin embargo, cuando tocó el turno de resolverla y plasmar estos procedimientos, las operaciones que fueron claramente identificadas correspondían al menos en un 80 % a la división y resta, mencionando que resultaba mas fácil dicho proceso: "*si realizas primero 111/15 y le restas 4 es mas rápido el resultado*."

Aunque dicho procedimiento fue presentado en el pizarrón por el estudiante A11, hubo la necesidad de que el docente aclarara dudas y errores que algunos otros estudiantes presentaron, tales como, identificar incorrectamente términos semejantes. Además, esto permitió que el docente desarrollara la explicación completa de la idea correspondiente a distribuir términos, recalcando que es una propiedad matemática utilizada con la finalidad de desarrollar la expresión y tenerla ahora en forma análoga a la estructura base, y coincidente con las anteriores. Aunado a esto se resaltó que solo se tienen coeficientes y signos distintos.

Así, se determinó que el resultado correspondía a un número decimal positivo, y que efectivamente al dar paso a la sección de planteamiento de problemas, era un aspecto a considerar. Se analizaron cada una de las ideas y/o contextos propuestos resaltando por ejemplo lo siguiente:

> *Docente: Analicemos si se puede representar alguna situación siguiente. Caso 1*
> *¿El ahorro en una quincena?*
> *A11: Si, porque tiene el 15*

Docente: Ok, la pauta para su compañera fue considerar al número 15 como quincena.
A6: Por ejemplo: El pago de aguinaldo de una persona por quince días y le dieron un bono de 4 días.
Docente: Es importante aclarar que el bono tambien tendrá que ser por cada dia. Ademas debemos recordar que el problema que se fórmula debe encaminarse a que la pegunta sea cuánto gana cada día, es decir, el valor de la variable, y así debo decir que gana (mostrando el resultado ya calculado) 3.4. Pero, pensemos también ¿Tiene sentido manejarlo solamente así? Por ejemplo ¿En pesos?
A6: No, no. En dólares sería mejor.
Docente: Ok, ya tendría mayor sentido. Recuerden que deben tener mucho cuidado en ese aspecto. (E indica que continúen y terminen su planteamiento)
A15: En una quincena panchito ahorro 115 días, cada día su empresa le daba 4 pesos más, en cada día tenía 7.4 dólares ¿Cuánto tenía inicialmente?
Docente: Mucho cuidado aquí, ya que el dato de 7.4 no está dado en la ecuación explícitamente, entonces tenemos que tener cuidado, porque es un dato que me estás dando en el problema que no está en la ecuación.

Se hace notar que es recurrente esta clase de errores en los estudiantes (incluir dentro del problema el valor que se desea encontrar), sin embargo un porcentaje medio de ellos logra rectificar ese detalle.

Con respecto a la siguiente idea sugerida, que corresponde a la posibilidad de que la ecuación modele un problema de área, los estudiantes mencionaron que era correcto representar la superficie de un terreno de forma rectangular. No obstante, solamente un 32% consideró esta idea cuando se les solicitó escribir ese planteamiento, y de los cuales solo el 12% lo construyó completo, es decir, no olvidó generar la pregunta y considerar las unidades correspondientes. Los casos restantes se identifican en proceso o incorrectos como puede verse en Figura 17. El resto de estudiantes realizaron su planteamiento con relación a la idea 3 que consiste en conocer el precio con IVA de un producto determinado.

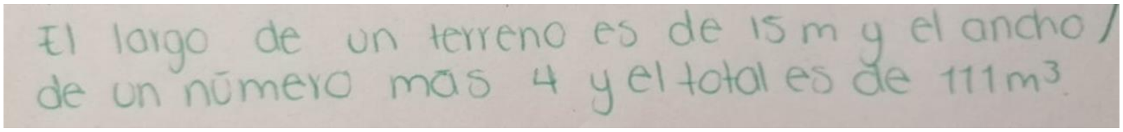


Figura 17. Ejemplo de planteamiento en proceso por A25.

Finalmente, se discuten otras ideas y planteamientos mencionados en clase y la pertinencia del contexto y objeto involucrado, por ejemplo el estudiante A11 sugiere un problema de conteo de canicas, sin embargo, A1 recalca que no es posible hablar en relación de números decimales con el objeto canicas, más bien, sugiere a su compañero considerar kilos, gramos, etc.

Con respecto a la ecuación 2, la mayor parte de los estudiantes logran resolverla mediante un procedimiento de operaciones inversas, además de identificar el tipo de número que toma la variable, siendo en este caso un número natural. Esta situación fue analizada con base en la participación del estudiante A24, en la cual planteó dos procedimientos (aritmético y algebraico) y del cual obtenía dos resultados cuya diferencia radica en el signo, situación que permitió la discusión y la determinación de las respuestas correctas.

Después de ello, los estudiantes con la guía del docente lograron identificar que esta expresión corresponde de manera similar a las estructuras anteriores (con respecto a las tres últimas ecuaciones propuestas) solo con la diferencia relacionada con la forma de plantearla. Seguido de ello se analizaron las situaciones que pudieran considerarse para realizar los planteamientos solicitados, inclusive haciendo mención de la posibilidad de manipular o cambiar la expresión. Los estudiantes discutieron las ideas y se resalta el diálogo siguiente con respecto al análisis de una representación de área, además de un contexto nuevo, que corresponde a volumen.

A23: A ver….Un rectángulo tiene de altura 84 metros…

Docente: Solo ten cuidado porque querrás indicar alguna multiplicación y así no está definida

A23: Cierto….

A6: De base tiene -6

A15: ¿Cómo puede medir -6?…. Eso esta mal

Docente: Si lo consideran necesario pueden modificar la ecuación.

A15: Un terreno incialmente tenía 84 metros de área, y cada día le quitaban 5 metros (por sembrar algo) ….
Docente: Solo ten cuidado porque deseas que la respuesta sea 5
A15: Ok si. Un terreno incialmente tenía 84 metros de área, y cada día le quitaban una cantidad de terrero por un día, si le quitaron 6 días la misma cantidad de terreno y al final quedo con 54 metros de área. ¿Cuánto le quitaron por cada día?
Docente: ¿Están de acuerdo con su compañero?
Alumnos: Si, está bien.
Docente: Muy bien. ¿Alguien más?
A24: Yo…. Creo…. Una caja que mide 84 cm cúbicos, le quitan 6 cajas con un valor indefinido, y a la caja grande le quedan 54 cm cúbicos ¿Cuánto mide cada caja pequeña?
Docente: Observen la propuesta de su compañero, consideró el tema de volumen, la resta la consideran como quitar…. Muy bien.

Después de realizar dichos comentarios y participaciones, los estudiantes realizaron sus planteamientos en las hojas de trabajo.

4.2.5 Sesión 8 y 9: Ecuaciones de la forma $Ax + B = Cx + D$.

Las últimas sesiones que se trabajaron corresponden a las expresiones $z + 14 = 2z + 10$ (Ecuación 1) y $10x + 6 = 2x - 2$ (Ecuación 2). Dichas sesiones se realizaron en el aula de manera grupal, dando oportunidad de que el alumno experimentara primero en sus procesos de resolución y planteamiento, para después revisarlos en conjunto y discutir resultados a los cuestionamientos propuestos.

Con base en ello, es importante resaltar las dificultades que estas ecuaciones presentaron en ambos procesos. En relación a la resolución de las ecuaciones se identificaron errores de signo en la transposición de términos, además de que esto conlleva a errores en el cálculo de su simplificación y por lo tanto a un resultado erróneo. En este momento se le sugirió al estudiante realizar su comprobación y determinar la pertinencia de la respuesta o bien corregirla si fuera necesario. Mientras que para el planteamiento de problemas se identifica aún más la dificultad de agrupar los términos semejantes, cada uno en un miembro de la igualdad. Para ello, en conjunto se discutieron los contextos propuestos: *igualdad de dinero obtenido por dos personas o bien, relación de áreas de figuras geométricas* haciendo más énfasis en relaciones de igualdad. Sin embargo, en el momento de plasmar dichas ideas, gran porcentaje de los estudiantes no lograron concretar incluso después de esta discusión.

Para la ecuación 1 corresponde un valor para la variable como entero positivo, mientras que para la ecuación 2 es un valor entero negativo. Dicha diferencia en el tipo de valores involucrados es también significativa, debido a que (de manera similar a lo analizado anteriormente) resulta más complicado determinar un contexto o darle sentido a la parte negativa, lo que ocasionó que la segunda expresión fuera aún más difícil de tratar. Además de ello, también es en la ecuación 2 cuando se pide al estudiante un planteamiento libre.

Así, aunque los estudiantes identifican que es una estructura algebraica diferente a las anteriores al considerar la existencia de un término más que tiene a la variable como incógnita, su proceso de resolución es similar dado que se requiere agrupar términos. También determinan que otra diferencia en las dos ecuaciones propuestas radica en los coeficientes y valores considerados en las ecuaciones y que para otros ejercicios análogos el procedimiento es semejante solo cuidando signos.

Por último, de manera general se pudo identificar que durante todas las sesiones con respecto a los ítems donde se solicitaba resolver el problema propuesto del planteamiento generado y analizar la pertinencia de este, los estudiantes asumían que debía cumplirse el requerimento, y realizaron su solución de manera algebraica. Por otro lado, se distinguió que hubo una participación activa por la mayoría de los estudiantes, identificando la variedad de ellos para cada ecuación. Esto reafirma la propuesta de que el planteamiento de problemas permite generar confianza y motivación a la matemática. Además de que las discusiones grupales permitían que los estudiantes por sí mismos pudieran discutir la pertinencia de resultados y corregir.

Aunque en muchos procesos se identificaron procedimientos incompletos, se resalta un avance significativo en la comprensión de las ecuaciones, tanto en su resolución como en el planteamiento de situaciones adecuadas, además de generar contextos novedosos. Con respecto al tipo de ecuaciones, la expresión que se facilitó fue $Ax = B$ donde se obtuvieron mayores resultados en ambos procesos, y la que presentó mayor dificultad fueron aquellas donde la variable estaba en al menos dos términos en uno o en ambos miembros de la igualdad.

4.3 Análisis del modelo de comprensión.

Con la finalidad de dar paso al análisis de la comprensión del uso de la variable como incógnita a la luz del modelo de comprensión de Pirie y Kieren, se tomaron dos estudiantes seleccionados intencionalmente para que mediante entrevistas semiestructuradas se pudiera analizar cada uno de los niveles y conocer cómo existe una evolución del conocimiento, cumpliendo con ello uno de los objetivos principales de la investigación. La selección de los informantes consistió en estudiantes con nivel de aprovechamiento medio-alto que mostraron una evolución significativa antes y después de la implementación de la secuencia didáctica.

Las entrevistas, además de permitir la distinción entre los niveles de razonamiento, permitieron verificar cómo el estudiante progresa en su comprensión, considerando sus creencias y concepciones así como las reflexiones y correcciones mediante sus propias respuestas. Dentro de las entrevistas se mostraron a cada estudiante sus cuestionarios contestados con la finalidad de profundizar o aclarar en algunos puntos importantes. La descripción realizada en cada uno mostrará la comparativa en ambos instrumentos: diagnósticos y finales.

4.3.1 Caso 1. Estudiante A13

El alumno considerado en este caso de manera general presenta un nivel de aprovechamiento regular en clase, sin embargo, con respecto a este tema inicialmente mostró resultados incorrectos o respuestas nulas. El alumno hizo un cambio de institución al ingresar a segundo grado de secundaria, por lo cual el acercamiento mediante la entrevista permitió distinguir que el contenido no había sido visto completamente por lo cual carecía de conocimientos y formalidad para abordar los problemas. Así, con base en este antecedente, es uno de los estudiantes que presentó un cambio significativo.

El conocimiento primitivo del estudiante mostró una evolución, pues aunque en ambos casos fue capaz de reconocer que existe una incógnita en la expresión $6x = 45$ (Ecuación 1), es en la evaluación final que le pudo dar sentido; a saber que esta incógnita representa un valor específico para que se cumpla la igualdad, es decir, crea la imagen del concepto. Así, se ve en la necesidad de saber cuanto vale la “x”, situación donde a pesar de encontrar correctamente el valor de la variable, el alumno utiliza una mutiplicación para determinar ese valor y siendo uno de los cuestionamientos que realiza el docente. Nótese el siguiente diálogo:

Docente: ¿Por qué multiplicación?

A13: Bueno, porque yo busque algun valor que multiplicado por el 6 diera el resultado.

Docente: ¿Y fue rápido encontrarlos así?

A13: No tanto, pues me iba acercando, probé con $6 \times 7 = 42$ *entonces era un poco más para acercarme al 45.*

Docente: ¿Y también hiciste intento con el punto decimal?

A13: Si

Docente: ¿Y fue inmediato considerar el 0.5?

A13: Si, a la primera, como que tome el de en medio

Docente: ¿Y crees que ahora podemos resolverla de otra manera? ¿O seguirías haciendo el mismo procedimiento?

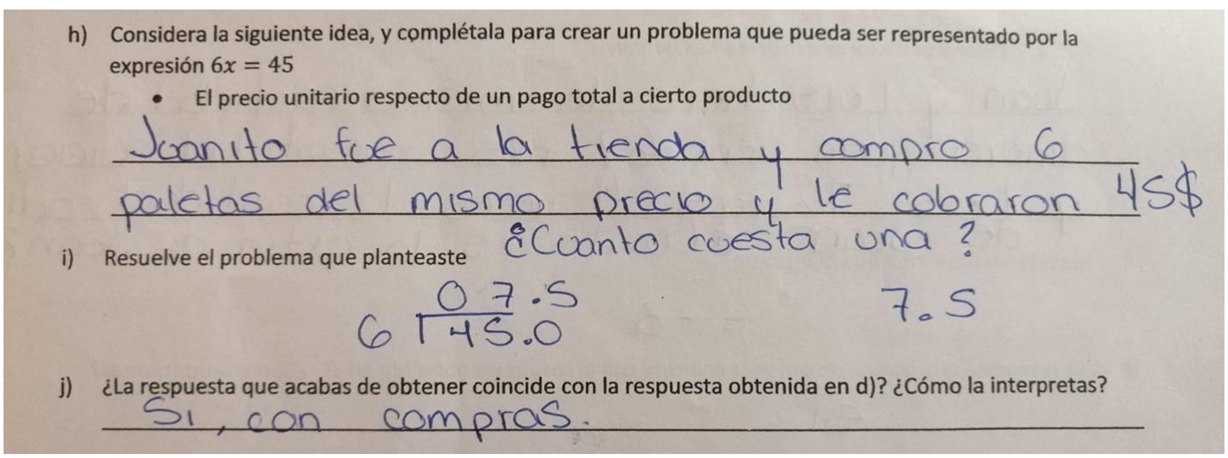
A13: Si se puede, bueno en estas cortas (refiriéndose a las expresiones de la forma $Ax = B$*) seguiría con el mismo.*

Es posible ver aquí, que el estudiante utiliza, en base a sus capacidades, estrategias para resolver el problema, incluso haciendo uso de un cálculo mental y aproximaciones. La imagen mental creada anteriormente se llevó a cabo de manera particular, es decir, realizó procedimientos orientados a obtener una respuesta que satistaga la propiedad que reconoció al inicio, es decir, la igualdad. En este paso de comprender la imagen mental, el estudiante fue capaz de reconocer la operación involucrada que permitía realizar las acciones previstas y con ello dicho cálculo.

Obsérvese que el docente intenta indagar en el motivo que orilló al estudiante a aplicar la operación mutiplicación como parte de su proceso, y sobre el cual, se distingue que esto se debe a la facilidad que le genera, pues como menciona, si las ecuaciones propuestas son del tipo $Ax = B$ es posibe resolverla mediante aproximaciones. Sin embargo, es importante hacerle notar al estudiante que este no es un criterio inmediato a aplicar sobre todo si los números involucrados en la expresión aumentan de valor. Con ello, el nivel de observación de la propiedad no se pudo completar satisfactoriamente, dado que bajo los descriptores propuestos es requerido que el estudiante tenga la capacidad de identificar un desarrollo de la expresión matemática y en este sentido resolver la ecuación, lo cual implicaría que las propiedades del concepto fueron generalizadas.

En relación con el siguiente nivel, que corresponde a la formalización, se hace notar que debido a que no se logró el nivel anterior relacionado con el desarrollo formal y general de la expresión, entonces ocasionó que el estudiante no trabajara con el concepto matemático como un objeto formal sino como imagen particular, dentro de los cuales, ahora las únicas propiedades que distingue son jerarquías, siendo en sus palabras “saber ordenar los pasos para sacar el resultado”, y lo que conlleva a que el nivel de estructuración tampoco fuera satisfactorio, pues no distingue sus generalidades.

Con respecto al último nivel que corresponde al proceso de invención, se enfatiza de igual forma la evolución que presentó el estudiante, puesto que en la evaluación final logró plantear un problema a diferencia de la evaluación diagnóstica donde omitió la respuesta. Así el problema es correcto, incluso con el análisis realizado en relación de validar la operación y en la coherencia con el problema propuesto, cumpliendo todos los ítems a este nivel, véase Figura 18.


h) Considera la siguiente idea, y complétala para crear un problema que pueda ser representado por la expresión $6x = 45$

- El precio unitario respecto de un pago total a cierto producto

Juanito fue a la tienda y compro 6 paletas del mismo precio y le cobraron 45$ ¿Cuanto cuesta una ?

i) Resuelve el problema que planteaste

$6 \overline{)45.0}$ 07.5

7.5

j) ¿La respuesta que acabas de obtener coincide con la respuesta obtenida en d)? ¿Cómo la interpretas?

Si, con compras.

Figura 18. Planteamiento de problema para la ecuación $6x = 45$ de la evaluación final.

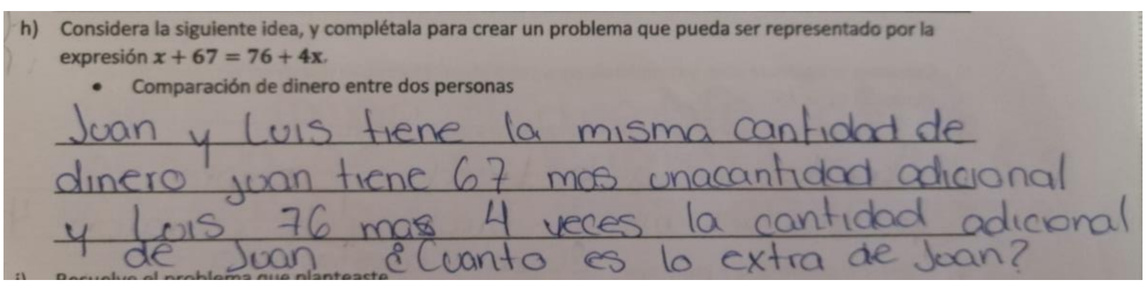
Finalmente, se hace notar el nivel correspondiente a la observación, que si bien es un nivel previo al caso antes descrito, se sugiere hablar de él en este momento, dado que es aquí donde el alumno es capaz de reflexionar y pensar metacognitivamente, desde el punto de vista analítico y emocional. Es decir, es capaz de percibir si su proceso es correcto y adecuado, situación que durante la entrevista fue mencionado, identificando que hubo una diferencia notoria entre sus respuestas inciales en contraste con las finales. Además, también se generó la confianza para que el estudiante pudiera establecer cómo se sentía en ambos momentos, recalcando que en un inicio la ecuación le parecía difícil, sin embargo, al final mediante el apoyo de la secuencia didáctica, logró cambiar esta perspectiva y ahora la consideraba bastante sencilla.

De manera análoga, se continúa la entrevista con el análisis de la ecuación 2, siendo ahora la expresión $x + 67 = 76 + 4x$. Para las respuestas de la evaluación final se completaron todos los ítems correctamente a excepción del nivel de formalización. Para mostrar este análisis, se considera el siguiente diálogo:

> *Docente: Dime, ¿Qué observas de diferente de esta ecuación a la primera?*
> *A13: Que me esta dando un resultado aparte del 76. Que está poniendo dos incógnitas*
> *Docente: Y estas ¿Son diferentes?*
> *A13: Son x, son iguales*
> *Docente: Ok, (muestra que hizo el alumno) y pregunta ¿Qué debemos hacer cuando hay dos incógnitas?*
> *A13: No se cómo se llama, pero es separar las x (como me lo explicó mi mamá, niños con niños), entonces números con números y letras*
> *Docente: Ok, (muestra sus hojas) después de realizar tu procedimiento, obtienes el resultado de -3x*
> *A13: Es -3, no x*
> *Docente: Ok entonces corregimos, ¿Por qué?*
> *A13: La x no va, es la que quiero encontrar*
> *Docente: Ok, y ahora, con respecto a las operaciones ¿Cambian a la primera ecuación?*
> *A13: Si, aquí debemos hacer más operaciones, sumas, restas y división*

La descripción analizada muestra que el alumno fue capaz de distinguir que la expresión es diferente a la ecuación 1 (Nivel 1). En primer lugar, menciona que a pesar de que hay dos incógnitas, estas son iguales, y por ende, son términos que serán semejantes y se pueden agrupar (Nivel 2), y en segundo lugar que dado que la expresión involucra más términos, entonces se harán uso de más operaciones (Nivel 3), incluso, mencionando a la división como operación final. Esto bien, fue observado durante su tratamiento de proceso de solución de la ecuación de manera correcta, bajo un desarrollo algebraico de operaciones inversas, con lo cual se establece que satisface el nivel de observación de la propiedad (Nivel 4). Incluso en este momento el alumno fue capaz de analizar de manera autónoma el error que se presentó y sobre ello, hacer la corrección verbal pertinente, cumpliendo tambien el nivel de observación (Nivel 6). Con respecto al nivel siguiente, se puede decir que el alumno, bajo sus propias palabras, identificó que las operaciones involucradas para este tipo de expresiones son iguales, es decir, generales desde el punto de vista de agrupación de términos semejantes y que en todas hará este mismo proceso algebraico, lo que significa que el cumplimiento de este nivel está en desarrollo, si bien solo hace falta definirlo formalmente.

Por último, en el nivel que corresponde a la invención se identifica que el alumno es capaz de plantear un problema, sin embargo, resulta importante indagar con mayor detalle, cuál fue el análisis que guió dicho planteamiento. Así, durante la entrevista el alumno refuerza el nivel uno del modelo de comprensión, donde identifica que existe una equivalencia entre dos expresiones, donde la variable está en ambos lados, siendo en sus palabras " $67 + x$ es lo mismo que $76 + 4x$". Obsérvese en la Figura 19 el planteamiento escrito por el estudiante.


h) Considera la siguiente idea, y complétala para crear un problema que pueda ser representado por la expresión $x + 67 = 76 + 4x$.

- Comparación de dinero entre dos personas

Juan y Luis tiene la misma cantidad de dinero juan tiene 67 mas unacantidad adicional y Luis 76 mas 4 veces la cantidad adicional de Juan ¿Cuanto es lo extra de Joan?

Figura 19. Planteamiento de problema para la ecuación $x + 67 = 76 + 4x$ de la evaluación final.

A pesar de que el planteamiento es propuesto en relación con la igualdad que se debe cumplir, será importante recalcar que carece de interpretación al valor que toma la variable en relación al contexto propuesto. Y esto el alumno fue capaz de identificarlo reforzando nuevamente el nivel de observación para la comprensión del concepto, donde logró corregir y redireccionar respuestas. Esto se puede notar en el siguiente diálogo:

Docente: (Pide al alumno lea el problema)

A13: Juan y Luis tienen la misma cantidad de dinero. Juan tiene 67 pesos mas una cantidad adicional y Luis 76 + 4 veces la cantidad adicional de Juan ¿Cuánto es lo extra de Juan?

Docente: y tu resultado ¿Cuál fue?

A13: -3

Docente: ¿Por qué -3?

A13: Porque este es el resultado así, pero…

Docente: ¿Qué pasó? (Espera unos segundos) ¿Tiene sentido con tu problema?

A13: No

Docente: ¿Por qué no?

A13: Por el menos, el signo

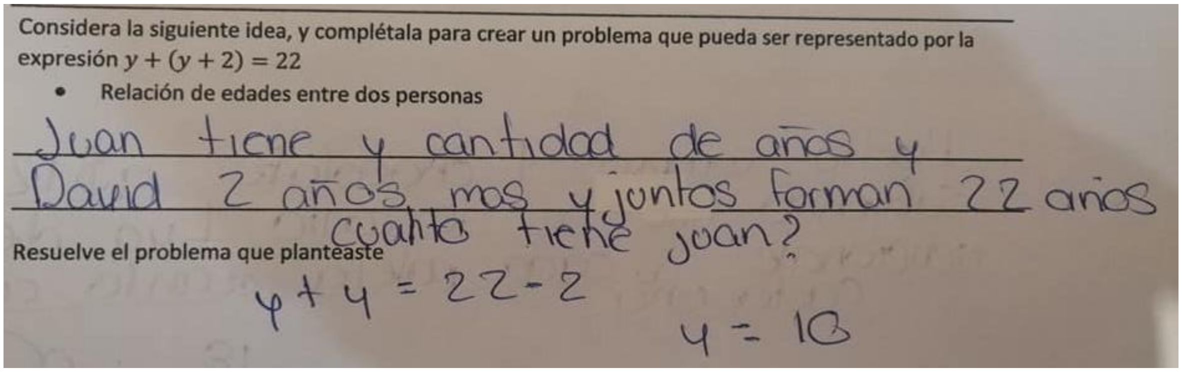
Docente: ok, tenemos un signo negativo. ¿Como interpretas ese signo en la vida real?

A13: Como tener menos cantidad

Con base en este análisis, se pudó lograr satisfactoriamente el nivel 8 del modelo de comprensión, donde pudo reestructurar y analizar de manera autónoma su planteamiento.

Para la ecuación 3 que es $y + (y + 2) = 22$, el análisis fue similar a la expresión anterior, donde de igual forma el nivel que queda sin completar es el nivel 5. El alumno identifica ahora el tratamiento con la variable "y" considerando a la incógnita solo en un miembro de la igualdad.

Así con base en ello, logró plantear satisfactoriamente el contexto sugerido de comparación de edades entre dos personas, incluso reafirmando que sí tiene sentido la respuesta con el problema planteado, véase la Figura 20.



Considera la siguiente idea, y complétala para crear un problema que pueda ser representado por la expresión $y + (y + 2) = 22$

- Relación de edades entre dos personas

Juan tiene y cantidad de años y David 2 años mas y juntos forman 22 años cuanto tiene juan?

Resuelve el problema que planteaste

$y + y = 22 - 2$

$y = 10$

Figura 20. Planteamiento de problema para la ecuación $y + (y + 2) = 22$ de la evaluación final. La ecuación fue considerada por el estudiante como sencilla y lo demuestra en sus procedimientos verbales expresados como sigue:

> *A13: Pues … yo lo saqué muy fácil, porque pues.. si son 22, son y + 2, y esta "y" (antes) debe ser lo mismo, son 20 -2 , no, 22-2 = 20 y entonces serían 10 cada una*
> *Docente: ¿Aquí hay mas operaciones?*
> *A13: No, bueno en estas, solo la suma y resta y al final la división*
> *Docente: ¿Tener un paréntesis afecta?*
> *A13: Si… bueno ….No, no afecta*

Se hace notar además, en palabras del estudiante que sus habilidades en la solución de este tipo de ecuaciones mejora, realizando de manera correcta la solución de la ecuación.

Por último, la ecuación analizada corresponde a la expresión $9(z + 2) = 126$. Aquí, el estudiante pierde la noción de las respuestas y omite contestar en su mayoría los ítems, solo se enfoca en la resolución y planteamiento del problema, que corresponden al nivel de observación de la propiedad e invención, respectivamente. Se hace notar que en la solución de la ecuación, el estudiante la resuelve mediante estrategias aritméticas, más no algebraicas, por lo cual fue identificado en este nivel de observación. Durante la entrevista el alumno indicó que este procedimiento resultaba más práctico para él, involucrando solo sumas y multiplicaciones y que en todos los casos similares realizaría algo análogo.

Y con respecto al planteamiento del problema solicitado, se identifica que el estudiante no consideró la idea sugerida, más bien, tomó otro criterio y así, realiza la siguiente descripción, véase Figura 21.

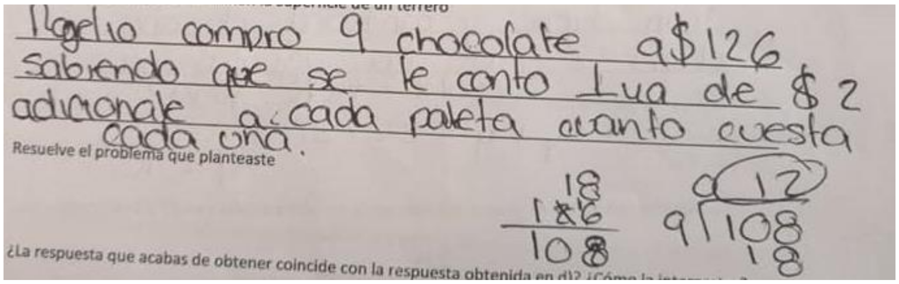


Figura 21. Planteamiento de problema para la ecuación $9(z+2) = 126$ de la evaluación final.

Se puede observar que el problema es correcto, sin embargo, sus operaciones aritméticas de comprobación carecen de orden y sentido al menos en el primer paso y dando por hecho que los resultados coinciden. El docente con la finalidad de retomar la idea base sugerida cuestiona al alumno y pide si en ese momento, podría realizar un planteamiento diferente con la idea que represente la superficie de un terrero, bajo lo cual planteó lo siguiente: *"Un terreno tiene un largo de 9 mts y un ancho de una cantidad más 2 mts adicionales. Y su área es de 196 ¿De cuánto es el ancho del terrero?"*. De esta forma el alumno es capaz de analizar contextos diferentes que guíen un planteamiento del problema para desarrollar la comprensión del concepto como algo desconocido y que satisface una igualdad.

Esta ecuación fue la única que presentó una respuesta en minoría con respecto a un análisis detallado en cada uno de los ítems como en los casos previos, mencionando que uno de los factores causantes de ello fue el tiempo. Además, el estudiante mencionó que para desarrollar un procedimiento algebraico formal se necesitaban algunos "pasos" que se habían visto durante las sesiones de intervención en el aula y que él no recordaba. Estos pasos corresponden a realizar la mutiplicación entre los términos, es decir, aplicar la propiedad de distribución, donde si bien el alumno recuerda que fue explicado en clase, no logra definirlo o bien aplicarlo de manera lógica. Finalmente, se rescata que el alumno no presentó dificultad al manipular a la variable, siendo en este caso ahora la literal "z".

Así, con relación a todo lo descrito anteriormente, se puede identificar que el estudiante presenta una evolución en su proceso de comprensión con el concepto de variable como incógnita, pues en contraste de la evaluación inicial donde solo dio respuesta a la ecuación 1 sin lograrla plantear, la evaluación final tuvo todas las expresiones resueltas y planteadas. Solo es importante formalizar en el estudiante conceptos, propiedades y atributos de manera formal al manejo de expresiones de este tipo.

Se resalta además que el alumno logró analizar y tratar expresiones del tipo $x + (x + A)$ pero no expresiones del tipo $A\ (x + B)$, es decir, no percibe la diferencia entre una suma y un producto. De esta manera se concluye que el estudiante A13 logró desarrollar todos los niveles de comprensión, excepto los niveles 4 y 7 que corresponde a los procesos de estructuración y formalización, respectivamente.

Con base en las características del modelo, con respecto a los límites de la falta de necesidad, el alumno fue capaz de traspasar la primera frontera ubicada entre la creación y comprensión de la imagen, ya que tiene la capacidad de pensar a través de la parte simbólica del concepto y reconocer operaciones implicadas en la mayoría de los casos. Sin embargo, la segunda y tercera frontera no fue consolidada ya que esta debe implicar una idea formal matemática que no necesita de una imagen, y con ello reconocer las propiedades globales del concepto a las acciones e imágenes creadas. Si bien fue capaz de ubicarse en niveles posteriores a estos límites se debe precisamente a las características dadas por el modelo, donde al no ser necesariamente líneal la evolución de la comprensión se puede saltar entre las diferentes etapas.

Con respecto a la otra característica del modelo, que corresponde a la complementariedad de acción y la expresión, se puede decir que es donde el alumno resalta la importancia de expresar sus procedimientos, quizás no esperados, pero que representen una actitud innovadora o el descubrimiento de relaciones matemáticas. Con ello el estudiante A13 logró identificar bajo este criterio al menos dos momentos que corresponden al nivel 3 y 4 del modelo, donde si bien su acción correspondía a identificar la operación matemática involucrada y dando como respuestas las concepciones que determinó, durante la expresión fue capaz de analizarlas y reafirmar que dichas operaciones sí eran o no aplicadas, ya sea descrita en palabras o mediante operaciones.

Finalmente se resalta que la cualidad de fractal del modelo de comprensión es esencial, porque es precisamente aquí que, el centro interno del modelo es el fondo de la comprensión matemática y claramente identificado en este estudiante, ya que al tener ahora en la evaluación final conocimientos primitivos pudo desarrollar un movimiento entre los demás niveles, mientras que en la evaluación inicial no, pues no había punto de partida.

4.3.2 Caso 2. Estudiante A26

El alumno considerado presenta un nivel de aprovechamiento alto en el aula de clases. Mostró el mayor desempeño en la evaluación diagnóstica, y pudo mejorar para la evaluación final. Además, es el alumno que pudo generar mayor diversidad de planteamientos durante la implementación de la secuencia didáctica. Con base en ello, se puede establecer que el alumno pudo concretar niveles de comprensión del concepto, aunque requiere aún niveles de formalización.

Al analizar los instrumentos de evaluación, se identificó que hubo una variación de respuestas al ítem 1 referente al nivel de conocimientos iniciales. En el diagnóstico el estudiante identificó que todas las expresiones propuestas representaban una ecuación con incógnita, de las cuales solamente variaba el grado de dificultad, mientras que en la evaluación final se concreta en decir que correspondía a una ecuación simple. Indagando en ello, durante la entrevista el alumno mencionó que una ecuación simple era una ecuación sencilla para él, donde solo se diferenciaban en la cantidad de pasos requeridos para darle solución. Sin embargo, se cuestionó al estudiante de manera que pudiera reformular su concepto:

> *Docente: Define que es una ecuación.*
> *A26: Averiguar el valor de una incógnita para plantear un problema.*
> *Docente: ¿Qué más puedes decir?*
> *A26: Es una equivalencia pero con varios términos, uno asemejando otro.*

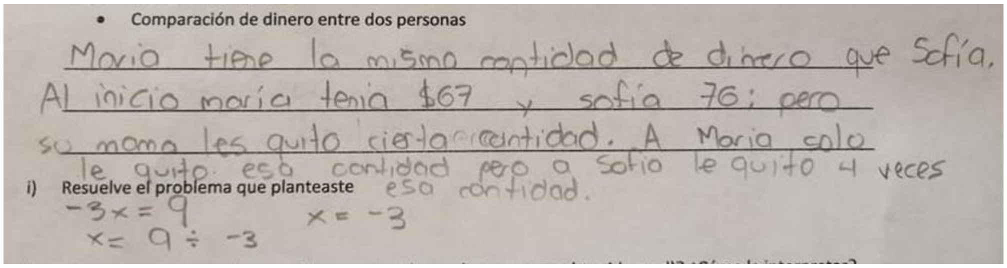
Lo anterior permitió distinguir que el alumno cambió su perspectiva de análisis de ecuaciones, que aunque en otras palabras, corresponde al conocimiento intuitivo que posee y cumple así nivel 1. Con respecto a los siguientes 2 niveles de creación y comprensión de la imagen donde se debe generar y aplicar las ideas relacionadas al concepto, en ambos casos el estudiante logró determinar que era requerido realizar un procedimiento para resolver la ecuación y hallar el valor de la incógnita. Así, las operaciones involucradas son determinadas por la cantidad de términos que se tengan.

En relación con el proceso de resolución de la ecuación, que corresponde al nivel de observación de la propiedad bajo el modelo de comprensión de Pirie y Kieren, se observa que el estudiante concretó satisfactoriamente todas en la evaluación final, al realizar las operaciones planteadas previamente. Además, fue capaz de mostrar un desarrollo más claro, ordenado y completo mediante un procedimiento formal, situación que satisface el descriptor del nivel 7 que corresponde al nivel de estructuración. La única ecuación que en un inicio estaba incorrecta era la expresión $9(z+2)=126$, donde el alumno no consideró los signos de agrupación, sin embargo, de manera posterior logró aplicar la propiedad distributiva y resolver la ecuación mediante operaciones inversas. Se hace notar que a pesar de ello, el alumno no logra distinguir de manera adecuada las propiedades matemáticas implicadas en dicho proceso, de manera verbal se dio la siguiente justificación:

> *Docente: ¿Qué propiedad matemática estás utilizando? ¿Hubo dificultad?*
> *A26: Pues encontrar como tal una respuesta que fuera correcta. Si tuve que pensar un poco, pero al final, puse el valor de una incógnita.*
> *Docente: Dime, para ti ¿Qué es una propiedad?*
> *A26: Como la ley que se debe hacer en todos los casos, como una regla*
> *Docente: En este caso ¿Tu regla sería hallar el valor de la incógnita?*
> *A26: Si*

Nótese que el alumno a pesar de que identifica que una propiedad matemática es una regla por aplicar a la expresión, no logra formalizar específicamente cuáles corresponden para cada ecuación. Sus respuestas están más encaminadas al nivel 2 correspondiente a la creación de la imagen, dado que solo identifica las acciones que se requieren aplicar. Por lo tanto, no satisface el nivel de formalización.

Por otro lado, cuando se le solicita realizar un análisis de sus procedimientos, es capaz de distinguir que a pesar de ser cuestionamientos similares, resultó más sencillo abordarlos en la evaluación final. En las hojas de trabajo determina que todas las ecuaciones son bastante sencillas y que posee los conocimientos suficientes para abordar estos problemas. Aunado a esto, este nivel también se distinguió al finalizar los planteamientos de problemas generados, ya que el estudiante pudo percatarse de que en una ecuación de la evaluación diagnóstica faltó la interrogante y no logró así completar el problema. Además, la redacción del problema también se vio modificada. Esto se puede notar en la figura 22.



• Comparación de dinero entre dos personas

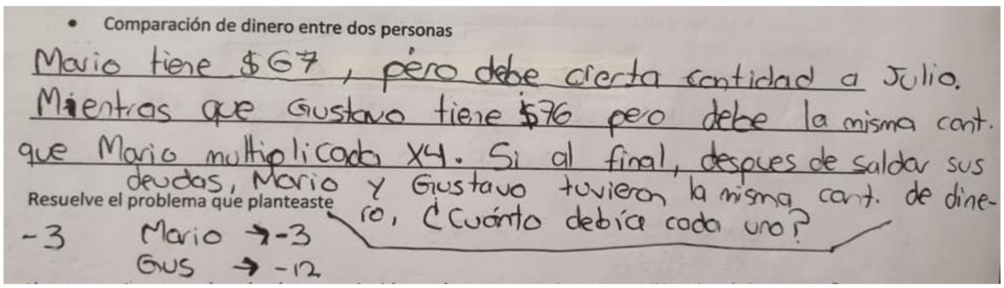
Mario tiene la misma cantidad de dinero que Sofía, Al inicio maría tenia $67 y sofía 76; pero su mamá les quito cierta cantidad. A Maria solo le quito esa cantidad pero a Sofía le quito 4 veces esa cantidad.

i) Resuelve el problema que planteaste

$-3x = 9$ $\quad x = -3$

$x = 9 \div -3$

a) Planteamiento presentado en evaluación diagnóstica



• Comparación de dinero entre dos personas

Mario tiene $67, pero debe cierta cantidad a Julio. Mientras que Gustavo tiene $76 pero debe la misma cant. que Mario multiplicada X4. Si al final, despues de saldar sus deudas, Mario y Gustavo tuvieron la misma cant. de dinero, ¿Cuánto debía cada uno?

Resuelve el problema que planteaste

-3 Mario → -3

Gus → -12

b) Planteamiento presentado en la evaluación final

Figura 22. Planteamientos diagnósticos y finales del alumno A26 para la ecuación

$$x + 67 = 76 + 4x$$

Con respecto al último nivel del modelo de comprensión, que corresponde al análisis de la invención de problemas, el alumno se mostró interesado en realizar en todos los casos intentos de sus planteamientos, y de los cuales se distingue un buen razonamiento del sentido de las variables y la descripción de los problemas. La diferencia entre ambas evaluaciones se puede observar en relación con la interpretación que es requerida y que por sí mismo el alumno es capaz de identificar en sus palabras como: "*Básicamente es lo mismo, solo que aquí no interprete y aquí si*".

Podemos observar en la Figura 23 ejemplos de lo antes mencionado.

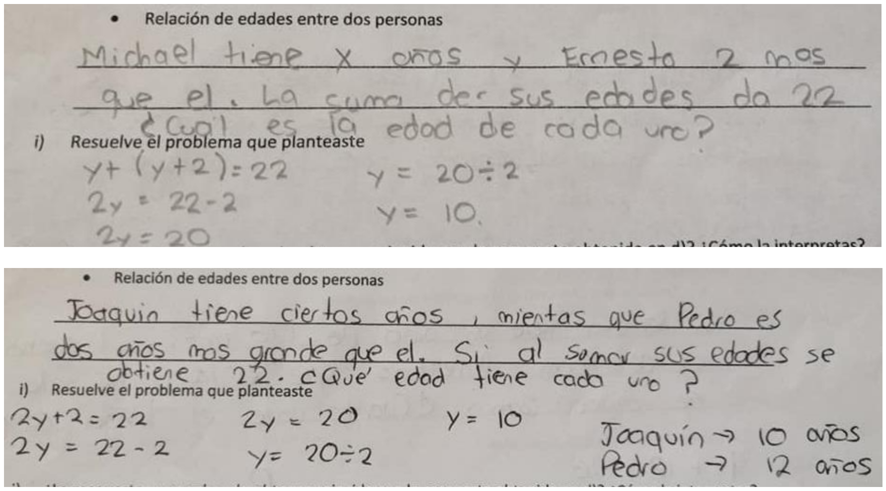
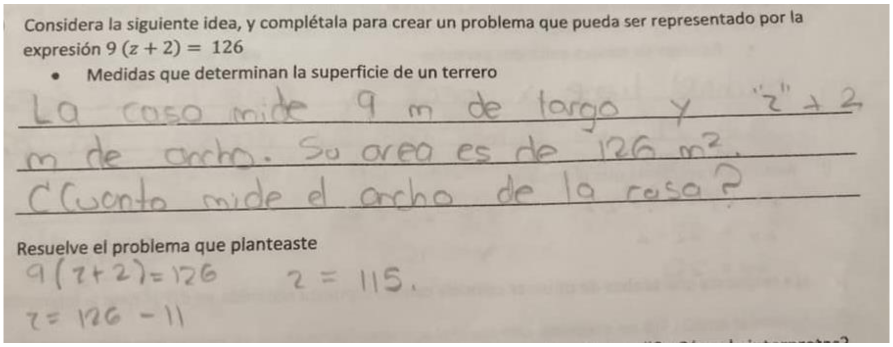


Figura 23. Planteamientos diagnósticos y finales del alumno A26 para la ecuación $y + (y + 2) = 22$.

También se puede notar, que al comparar ambos planteamientos, el estudiante en la evaluación final no menciona explícitamente a la variable involucrada, es decir, el planteamiento final es mejor.

Por último, como se mencionó antes, la ecuación $9(z + 2) = 126$ fue la única que no logró tener una solución correcta en la evaluación diagnóstica, a pesar de que el planteamiento del problema fue correcto y completo, véase a) Figura 24. Así, en este momento el alumno tenía la oportunidad de *redoblar en su proceso* (retroceder a niveles anteriores) para asegurar su conocimiento y la comprensión del concepto, sin embargo, no lo logró en esta evaluación. Es decir, el alumno no fue capaz de identificar que ante la dificultad presentada en el problema, podía retroceder y corregir. Con respecto a la evaluación final que se puede distinguir en b) Figura 24, el alumno en esta ecuación mostró una evolución de la comprensión de manera lineal, es decir, pasó del proceso de resolución de manera correcta al nivel final de invención del problema.


Considera la siguiente idea, y complétala para crear un problema que pueda ser representado por la expresión $9(z+2) = 126$

- Medidas que determinan la superficie de un terreno

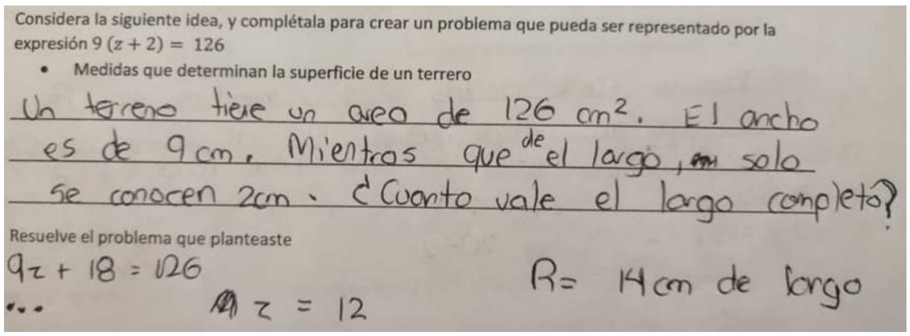
La caso mide 9 m de largo y "z" + 2 m de ancho. Su area es de 126 m². ¿Cuanto mide el ancho de la caso?

Resuelve el problema que planteaste

9(z+2)=126   z = 115.

z= 126 − 11

a) Planteamiento y solución de la ecuación en evaluación diagnóstica


Considera la siguiente idea, y complétala para crear un problema que pueda ser representado por la expresión $9(z+2) = 126$

- Medidas que determinan la superficie de un terreno

Un terreno tiene un area de 126 cm². El ancho es de 9 cm. Mientras que de el largo, solo se conocen 2cm. ¿Cuanto vale el largo completo?

Resuelve el problema que planteaste

9z + 18 = 126

z = 12   R= 14cm de largo

b) Planteamiento y solución de la ecuación en evaluación final

Figura 24. Comparación de planteamiento de problemas y solución para la ecuación

$$9(z+2) = 126$$

De esta manera, se puede decir que el alumno presentó un conocimiento avanzado desde la evaluación diagnóstica, pues fue el que tuvo mayor habilidad en la invención de problemas para el concepto de variable, sin embargo, a través del tratamiento con la secuencia didáctica logró concretar niveles de comprensión importantes como el de estructuración o bien el mismo nivel de invención, donde los planteamientos de problemas generados fueron reescritos de manera más precisa o bien con las interrogantes correspondientes. Se resalta también la dificultad por concretar niveles de formalización en el sentido abstracto y formal del manejo de una ecuación lineal.

Finalmente, con respecto a las fronteras no necesarias del modelo de comprensión, es clara la evolución del estudiante en concretar ideas matemáticas, inclusive en el tercer tipo de frontera que corresponde a estructuración e invención, puesto que el estudiante con una estructura matemática bien desarrollada, no necesita el significado traído a ella por ninguno de los niveles anteriores.

4.4 Análisis de creatividad.

En este apartado se presenta un análisis de los resultados de la investigación acerca del planteamiento de problemas basados en el pensamiento creativo de los estudiantes, mediante la fluidez, flexibilidad y originalidad de los mismos.

Se muestran a continuación los resultados por sesión para cada tipo de ecuación. Cada estudiante debía plantear problemas diferentes para las ecuaciones presentadas. Primero debía utilizar alguna idea base sugerida (situaciones estructuradas y semiestructuradas) para después plantear situaciones con total libertad (situaciones libres). Sin embargo, en todas las sesiones, las ecuaciones presentaron porcentajes de planteamientos nulos, incorrectos o incompletos.

4.4.1. Sesión 2 y 3. Ecuación de la forma $Ax = B$.

Las ecuaciones que se dieron al estudiante fueron $8x = 96$ (Ecuación 1) y $6x = 27$ (Ecuación 2). Para este tipo de ecuaciones se les sugirió a los estudiantes cuatro situaciones en las que podían basarse para generar el planteamiento de sus problemas: área de una figura geométrica (idea 1), valor unitario (idea 2), repartición (idea 3) y total de días de ahorro (idea 4). En la Figura 25, se pueden observar las frecuencias de los planteamientos de problemas de los estudiantes por categorías. Para la ecuación 1, se les solicitó que plantearan dos problemas diferentes (P1 y P2) y uno para la ecuación 2. Los estudiantes hicieron uso de todas las ideas sugeridas con diferentes porcentajes, sin embargo, es la idea de valor unitario la que predominó tanto en el problema P1 como en la ecuación 2, ya que como lo mencionaron los estudiantes durante las sesiones, les presentó mayor facilidad. Asimismo, es en el problema P2 cuando los alumnos generaron mayor variedad de ideas en contextos nuevos, como son: perímetro de una figura, total de días de pago y monto a pagar en días determinados. Es en este problema donde también existe un mayor porcentaje de ejercicios sin contestar (22 %) en comparación con los otros problemas, debido a que la situación fue de tipo libre.

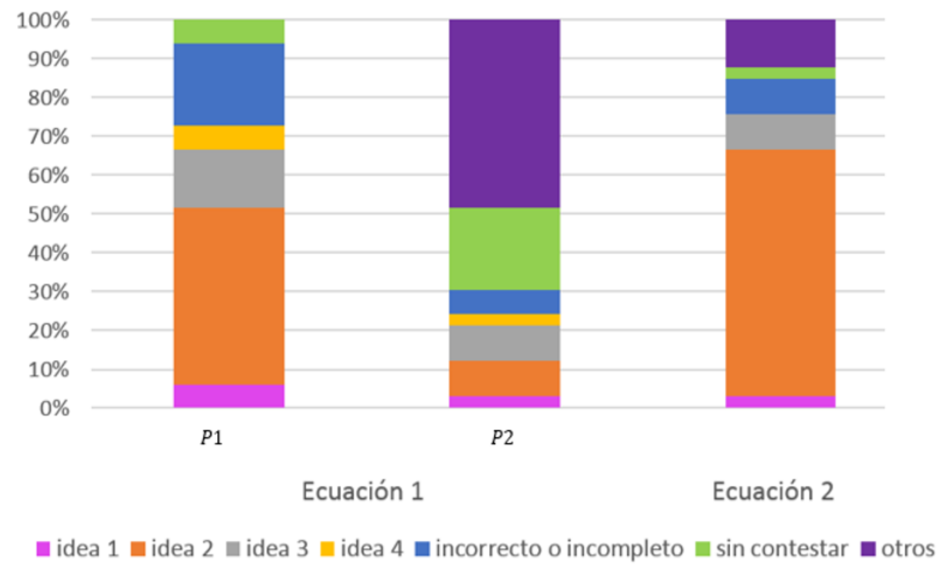
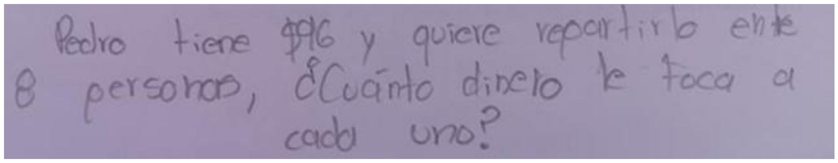
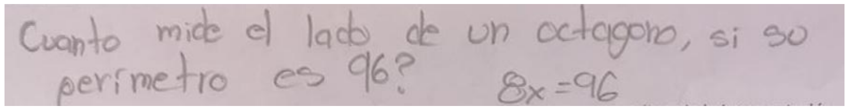


Figura 25. Planteamientos para ecuaciones de la forma $Ax = B$.
P1) planteamientos con situaciones estructuradas o semi-estructuradas
P2) planteamientos con situaciones libres.
Fuente: Elaboración propia

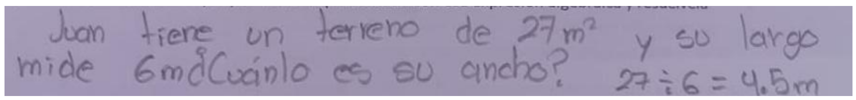
En esta sesión, solo cuatro estudiantes lograron presentar los 3 problemas planteados en contextos diferentes, cumpliendo así, el componente de fluidez y flexibilidad. Dichas dimensiones se consideran completas puesto que, los estudiantes plantearon todos los ejercicios solicitados tomando ideas propuestas y creando categorías nuevas. Asimismo, la dimensión de originalidad se cumplió dado que los estudiantes analizaron de manera crítica durante la sesión oral el contexto nuevo propuesto, así como también incluyeron datos adicionales al problema como son el uso de personajes, escenarios o preguntas adicionales. De esta manera, los alumnos fueron catalogados con un pensamiento creativo ya que cumplieron con las tres dimensiones de creatividad. El resto de la clase solo mostró el desarrollo de dos dimensiones, esto al no lograr un cambio de contexto del problema o no construirlo correctamente. En la Figura 26 se muestran los problemas planteados por uno de ellos. El inciso a) corresponde con una situación estructurada, basado en una idea sugerida por el facilitador. Los incisos b) y c) son problemas de categorías nuevas del tipo libre.


Pedro tiene $96 y quiere repartirlo ente 8 personas, ¿Cuánto dinero le toca a cada uno?

a) Planteamiento P1 Ecuación 1


Cuanto mide el lado de un octagono, si su perímetro es 96? $8x=96$

b) Planteamiento P2 Ecuación 1


Juan tiene un terreno de $27m^2$ y su largo mide 6m ¿Cuánlo es su ancho? $27 \div 6 = 4.5m$

c) Planteamiento Ecuación 2

Figura 26. Planteamientos de un alumno para las ecuaciones de la forma $Ax = B$.

Fuente: Elaboración propia

4.4.2. Sesión 4 y 5. Ecuación de la forma $\boldsymbol{Ax + B = C}$.

En las siguientes sesiones se abordaron las ecuaciones $2x - 7 = -15$ (Ecuación 1) y $x + (x + 6) = 28$ (Ecuación 2). Se hace notar al lector que estas ecuaciones involucran la solución con números enteros negativos y positivos, respectivamente. Asimismo, la estructura sintáctica que tienen permite manipularlas de acuerdo con las habilidades de cada estudiante, a pesar de tener la misma estructura base.

Para la ecuación 1 se sugirieron las siguientes situaciones: deuda o pérdida de dinero (idea 1), número de productos defectuosos (idea 2) y descender tantos metros de profundidad en el sentido de interpretar resultados negativos (idea 3). Para la ecuación 2, se presentaron ideas respecto a: relación entre edades de dos personas (idea 1), suma de números cualquiera (idea 2), agrupar cantidades (idea 3), o área de un terrero (idea 4) para el caso de solución positiva.

En la Figura 27 se puede observar el porcentaje de los diferentes planteamientos realizados por los estudiantes. Evidentemente, las ecuaciones resultaron difíciles para plantear un problema, generando que estuvieran incompletos e incorrectos o bien, omitiendo contestar. Sin embargo, se resalta que la ecuación 1 presentó aun mayor complejidad al interpretar un número negativo. Es así como únicamente en la ecuación 2 se presentaron categorías y contextos nuevos a los sugeridos: comparación de dinero y multa.

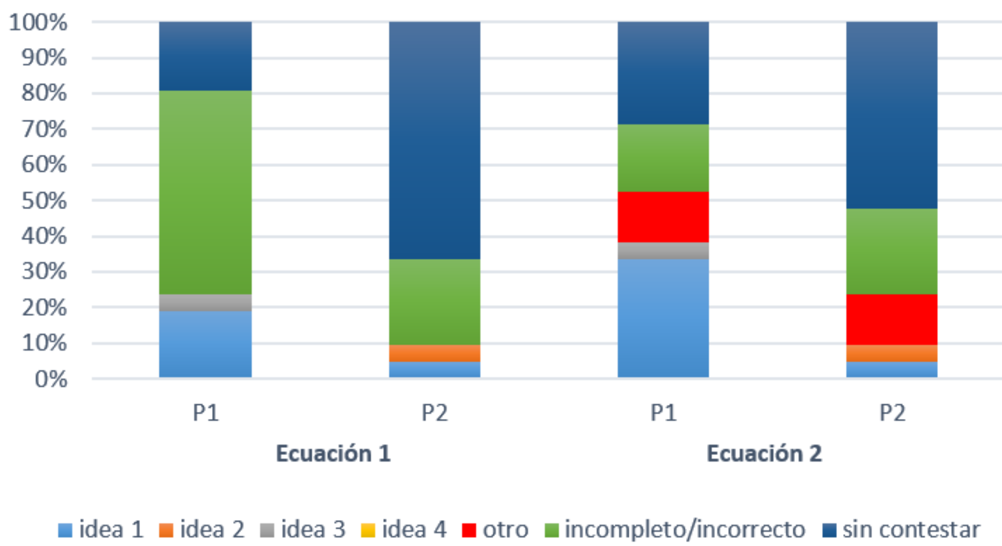


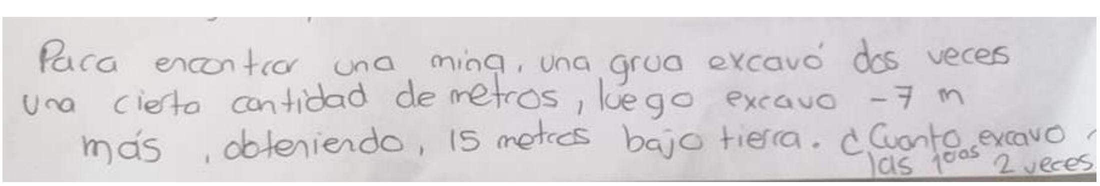
Figura 27. Planteamientos para ecuaciones de la forma $Ax + B = C$.

P1 son planteamientos con ideas estructuradas y semiestructuradas y P2 son situaciones libres.

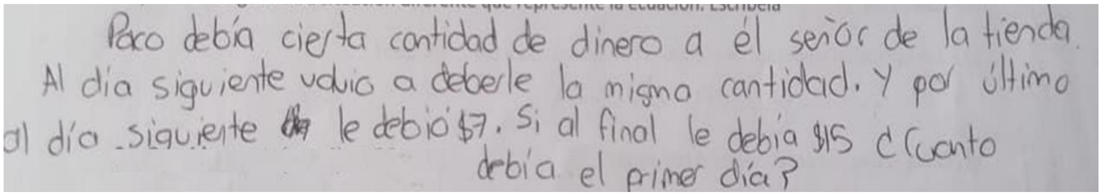
Fuente: Elaboración propia

De estos resultados, solo un alumno pudo plantear los 4 problemas diferentes correctamente, dos alumnos pudieron plantear 3 problemas, seis alumnos plantearon 2 y una alumna solo 1 problema, y el resto presentaron planteamientos nulos o incorrectos.

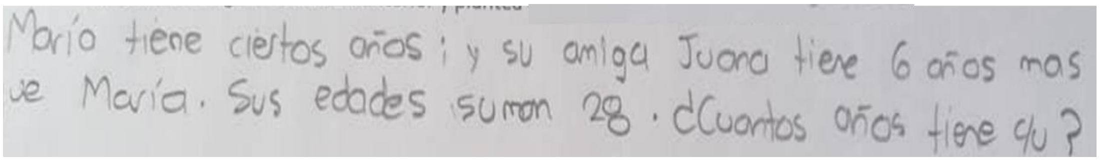
En la Figura 28 se muestran los cuatro planteamientos (fluidez) del único estudiante que cumplió con las cuatro categorías distintas (flexibilidad). Los incisos a) y c) fueron situaciones estructuradas o semiestructuradas y el b) y d) totalmente nuevas. Para el análisis de la originalidad, se considera que el alumno incluye personajes al contexto del problema, así como genera preguntas más allá del solo valor de la incógnita. De esta manera el estudiante se considera creativo, pues cumple con las dimensiones correspondientes de flexibilidad, fluidez y originalidad. Este estudiante no es el mismo de los planteamientos de la sesión 1 descritos en la Figura 26.



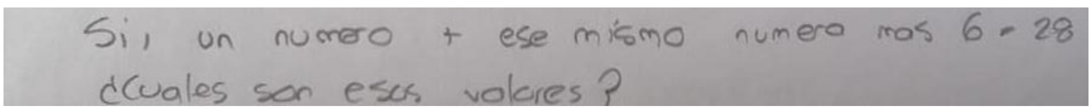
a) Planteamiento P1 Ecuación 1


Paco debía cierta cantidad de dinero a él señor de la tienda. Al día siguiente volvio a deberle la misma cantidad. Y por último al día siguiente le debió \$7. Si al final le debía \$15 ¿Cuanto debía el primer día?

b) Planteamiento P2 Ecuación 1


María tiene ciertos años; y su amiga Juana tiene 6 años mas ue María. Sus edades suman 28. ¿Cuantos años tiene c/u?

c) Planteamiento P1 Ecuación 2


Si, un numero + ese mismo numero mas 6 = 28 ¿Cuales son esos valores?

d) Planteamiento P2 Ecuación 2

Figura 28. Ejemplos de Planteamiento de problemas de un alumno para ecuaciones de la forma $Ax + B = C$.

Fuente: Elaboración propia

4.4.3. Sesión 6 y 7. Ecuaciones de la forma $\boldsymbol{Ax + B = C}$.

Las ecuaciones presentadas en esta sesión fueron de estructura similar a la anterior, solo que de estructura sintáctica diferente nuevamente, con el fin de que el alumno pudiera manipular y transformar las ecuaciones y realizar un planteamiento distinto a las ideas sugeridas. Las ecuaciones planteadas fueron $15(y + 4) = 111$ y $84 - 6x = 54$, que presentan soluciones con números positivos tanto decimales como enteros. Están numeradas como 1 y 2, respectivamente.

Los resultados se presentan en la Figura 29. Los estudiantes mostraron dificultad en el planteamiento de problemas bajo esta estructura, pero no en la resolución algebraica de estos. Las situaciones sugeridas a los estudiantes para la ecuación 1 consistían en: ahorro por quincena (idea 1), superficie de un terrero (idea 2) y valor unitario de un producto (idea 3). Para la ecuación 2 la situación fue totalmente abierta, es por ello que, se puede notar una mayor habilidad para plantear un problema con un contexto diferente. Solo cuatro alumnos mostraron la construcción de los 2 problemas solicitados, donde tres de ellos consideraron la misma idea para ambos, y solo uno de ellos fue quien los planteó bajo condiciones distintas.

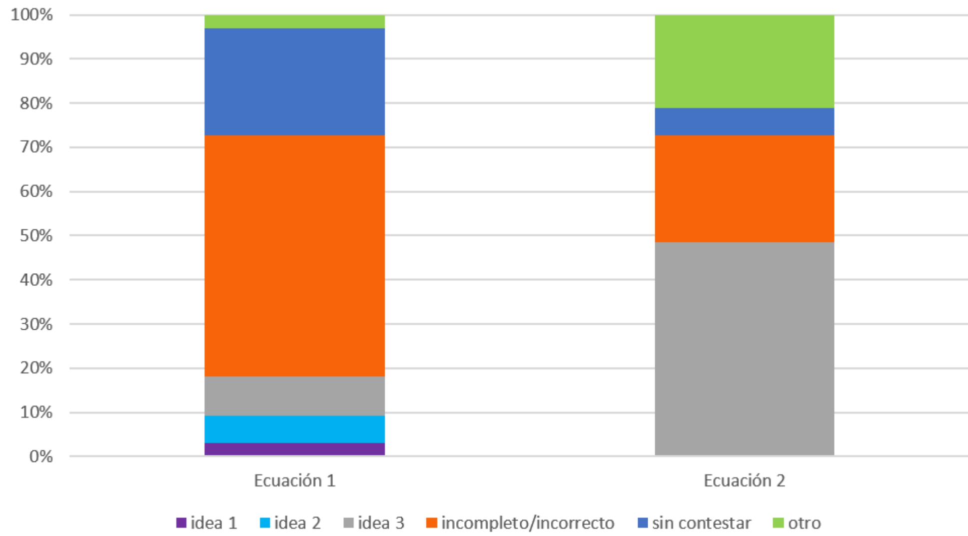


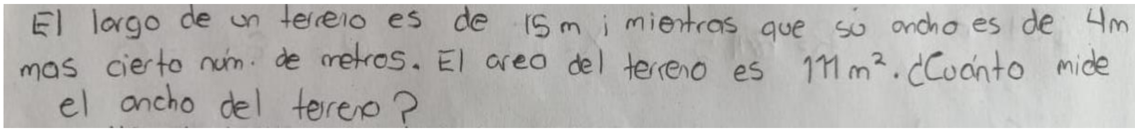
Figura 29. Planteamientos para ecuaciones de la forma $Ax + B = C$.

Fuente: Elaboración propia

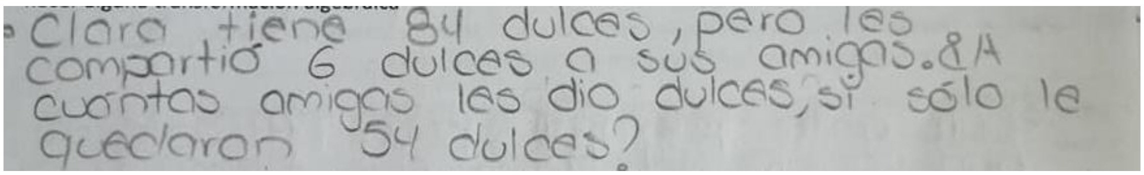
La ecuación 1 presentó una mayor dificultad de interpretación para lograr el planteamiento de un problema correctamente. Ningún estudiante realizó alguna manipulación algebraica para transformarla. Sin embargo, al menos un alumno logró crear un problema de estructura libre respecto a ganancia. Para la ecuación 2, se presentaron tres problemas nuevos: pérdida, descuento y repartición.

Se muestra en la Figura 30 ejemplos de dos planteamientos realizados por alumnos distintos, los cuales son de categorías diferentes: a) de cálculo de una superficie y b) de repartición. Se hace notar que el primer planteamiento fue con base en una situación estructurada, mientras que el segundo fue una situación libre.

Así, el estudiante que realizó el planteamiento a) se considera creativo, porque además de construir los dos problemas solicitados, lo hace en diferentes categorías, lo que lleva a completar la fluidez y flexibilidad, respectivamente. Con respecto a la originalidad, además, dichos problemas fueron creados con preguntas adicionales, resaltando también la reestructuración del contexto de repartición, donde en la ecuación $Ax = B$ presentaba una idea diferente. El alumno que realiza el planteamiento b) solo fue capaz de cumplir la dimensión de originalidad, porque fue el único problema que construyó.



a) Ejemplo de Planteamiento Ecuación 1



b) Planteamiento P2 Ecuación 1

Figura 30. Planteamiento de problemas de ecuaciones de la forma $Ax + B = C$.
Fuente: Elaboración propia

4.4.4. Sesión 8 y 9. Ecuaciones de la forma $Ax + B = Cx + D$.

Las ecuaciones que se trabajaron en esta sesión fueron $z + 14 = 2z + 10$ y $10x + 6 = 2x - 2$, identificadas como ecuación 1 y 2, respectivamente.

Ante estas ecuaciones se les sugirió a los estudiantes las siguientes ideas para plantear sus problemas: Igualdad de dinero entre dos personas (idea 1) y relación entre áreas de figuras geométricas (idea 2). Se puede observar en la Figura 31 que este tipo de ecuaciones presentó mayor índice de problemas sin contestar. Los alumnos mostraron dificultades para interpretar una relación de igualdad donde la variable aparecía en ambos miembros. Inclusive los alumnos que realizaron el intento de planteamiento no lograron completarlo por la noción de comparación. Solo una estudiante pudo plantear 3 problemas diferentes, mientras que cinco alumnos más plantearon entre uno y dos problemas. Los demás omitieron o fallaron al contestar.

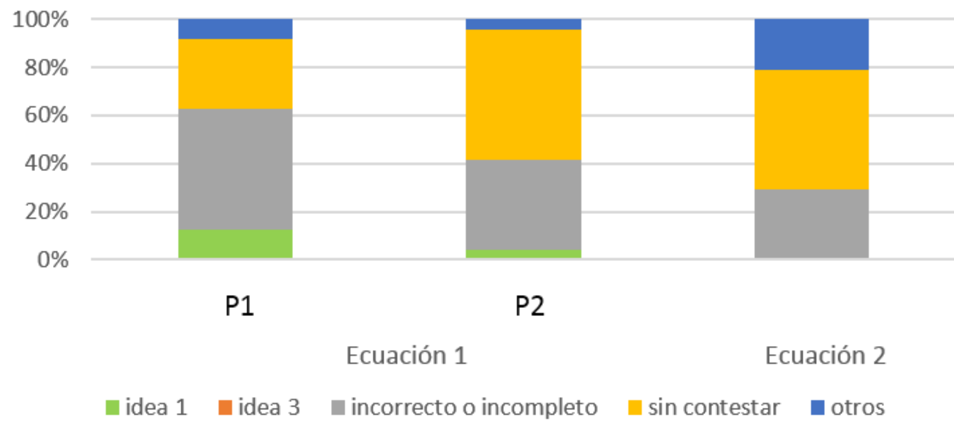
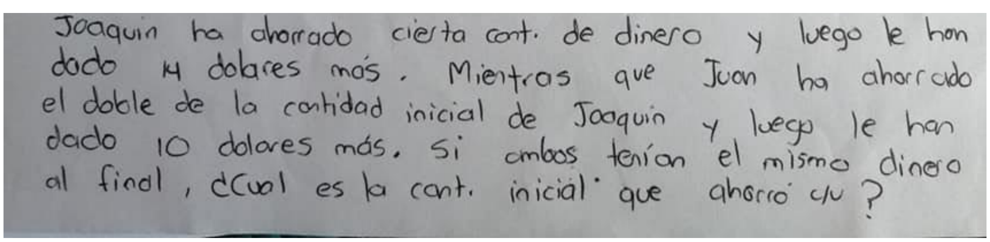


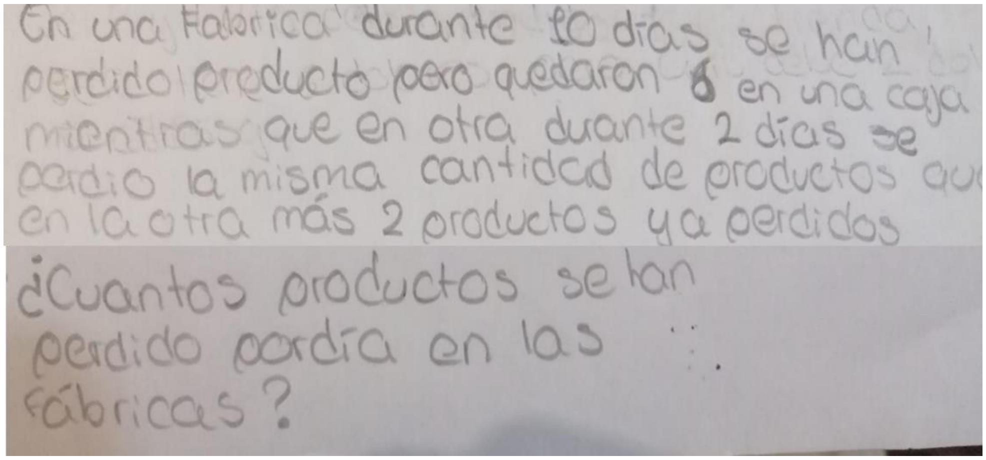
Figura 31. Planteamientos para ecuaciones de la forma $Ax + B = Cx + D$.

Fuente: Elaboración propia

Se muestran ejemplos de planteamientos de problemas para las ecuaciones correspondientes en la Figura 32, los cuales son situaciones semiestructuradas. El planteamiento a) que corresponde a la primera ecuación lo realiza un alumno que en la sesión 2 fue considerado de alto nivel de creatividad, y que en esta sesión no completó la dimensión de fluidez, pues faltó de completar problemas, solo creo dos. Mientras que la alumna del planteamiento b) presenta un nivel alto en las tres dimensiones: fluidez, flexibilidad y originalidad, pues logra construir problemas muy completos en diferentes categorías y generando preguntas adicionales. Es importante mencionar que esta estudiante en las sesiones anteriores no logró el nivel de pensamiento creativo porque falló en el planteamiento de alguno de los problemas solicitados.


Joaquin ha ahorrado cierta cant. de dinero y luego le han dado 14 dolares más. Mientras que Juan ha ahorrado el doble de la cantidad inicial de Joaquin y luego le han dado 10 dolares más. Si ambos tenían el mismo dinero al final, ¿Cual es la cant. inicial que ahorró c/u?

a) Ejemplo de Planteamiento Ecuación 1



b) Ejemplo de Planteamiento Ecuación 2

Figura 32. Planteamientos de problemas de ecuaciones de la forma $Ax + B = Cx + D$.
Fuente: Elaboración propia

En síntesis, los resultados generales obtenidos en este trabajo son, con respecto a la fluidez, que al menos cada estudiante pudo plantear entre 1 y 2 problemas correctamente; con respecto a la flexibilidad, el grupo mostró en promedio uso y creación de 7 categorías o contextos de problemas, mientras que con respecto a la originalidad se pudieron distinguir al menos 3 problemas novedosos, al involucrar una categoría diferente a la sugerida, así como agregando detalles adicionales específicos. Estos resultados coinciden con los obtenidos por Bonotto (2013), que en su estudio de planteamiento de problemas para la comprensión de números decimales en dos instituciones obtuvo, con respecto a la fluidez, que cada estudiante en la escuela uno inventó 2 problemas en promedio, mientras que en la segunda inventó 3. Con respecto a la flexibilidad, los problemas creados por las clases de la primera escuela se dividieron en 11 categorías, y los de la segunda escuela en 16 categorías, y al evaluar la originalidad, observó que se crearon 3 problemas originales en la primera escuela y 10 en la segunda.

4.5 Analisis cuantitativo

Con respecto al análisis cuantitativo, se analizó la normalidad de los datos correspondientes a cada tipo de ecuación que permitiera realizar una prueba de hipótesis de medias. Sin embargo, se presentó evidencia de no normalidad a través de las pruebas de Shapiro-Wilk, Kolmogorov-Smirnov y Jarque Bera, donde el postest arrojó valores de $p < .05$. Por lo anterior, se aplicó la prueba de hipótesis no paramétrica para muestras relacionadas de Wilcoxon con un nivel de significancia del 95%, por lo que se tuvo evidencia suficiente para rechazar la hipótesis nula que afirma que la mediana de los resultados del pretest es igual a los resultados del postest y aceptar la hipótesis alternativa de que son distintas y con ello, determinar que las observaciones del postest superen a las del pretest en forma significativa.

Tabla 2. Resultados de las pruebas de hipótesis en cada ecuación.

		Wilcoxon		
Ecuación		W	P	95% IC
Ecuación 1	$\boldsymbol{6x = 45}$	230	0.546	[-.66, 1.00]
Ecuación 2	$\boldsymbol{x + 67 = 76 + 4x}$	205	0.273	[-1.5, .49]
Ecuación 3	$\boldsymbol{y + (y + 2) = 22}$	101	**0.020**	[-3.3, -.33]
Ecuación 4	$\boldsymbol{9(z + 2) = 126}$	79.5	**0.045**	[-3.49, -3.62]

Como podemos observar en la Tabla 2 se realizaron las pruebas de hipótesis no paramétricas para cada tipo de ecuación propuesta, donde la ecuación 3 y 4 muestran diferencias significativas entre el pretest y el postest al considerar un nivel de significancia del 95%, y valores de p<.05. Además, la prueba de Wilcoxon también se aplicó al análisis de planteamientos de problemas y con ello se obtuvo un valor de W = 60, un valor de $p = 0.002$ y un IC de $[-1.16, -0.33]$, por lo que también se rechazó la hipótesis nula y se aceptó la hipótesis alternativa que afirma que la probabilidad de que las observaciones del postest superen a las del pretest difiere en forma importante.

Capítulo 5. Conclusiones

En este apartado se presentan las conclusiones correspondientes al trabajo de tesis desarrollado, dando respuesta a cada una de las preguntas específicas propuestas.

Con respecto a *¿Cuáles son los procesos de planteamiento y resolución de problemas que los estudiantes llevan a cabo al enfrentarse a una ecuación lineal en el análisis de la evaluación diagnóstica?* Se puede decir lo siguiente: Para la ecuación 1 dada de la forma $Ax = B$ los procesos para resolverla desarrollados por los estudiantes consistieron en su mayoría en operaciones inversas, implicando operaciones sobre coeficientes. Mientras que la segunda estrategia para hallar el valor de la incógnita fue utilizar una multiplicación a manera de aproximarse al valor que cumpliera la igualdad. De esta forma, esta expresión algebraica resultó ser la de mayor porcentaje de respuestas correctas.

Para las ecuaciones restantes, era requerido realizar un tratamiento de desarrollo superior a un paso implicando agrupación de términos semejantes, manipulación de signos de agrupación, leyes de signos, entre otros procesos, por lo cual resultó de mayor complejidad para los alumnos. De esta forma, los procedimientos aplicados por los estudiantes mostraron gran cantidad de errores o bien se distinguió la dificultad que implicaba el trato con la variable en ambos miembros de la igualdad o con varios términos algebraicos.

Si bien la ecuación de la forma $x + (x + A) = B$ fue la segunda ecuación con más respuestas correctas, esto se logró debido a la manipulación aritmética desarrollada, pues algebraicamente los estudiantes confundían la operación suma con un producto o viceversa.

Por otro lado, para el proceso de planteamiento de problemas para una ecuación lineal se observó la baja experiencia que tienen los estudiantes al enfrentarse al reto de invención de problemas en comparación con su proceso de solución. Así, para este proceso, la única ecuación que presentó una cantidad de respuestas considerable nuevamente fue la ecuación 1, con casi el 50 % de planteamientos correctos. Se resalta también que la situación sugerida para plantear el problema fue importante para fomentar la comprensión e interacción de los estudiantes con la invención solicitada, debido a la cercania y facilidad de la idea, la cual fue “el precio unitario respecto a un pago total a cierto producto”, del tipo situación semiestructurada.

Por otro lado, se resalta también que para el estudio del planteamiento de problemas fue conveniente definir categorías del proceso obtenido por los estudiantes, a recordar: planteamientos correctos, en proceso, incorrectos o sin contestar. Esto permitió que en la evaluación diagnóstica se distinguiera que a pesar de que algunos estudiantes no lograban concretar su problema, se mostraba un interés en generarlo y este estuviera *en proceso*, situación que se pudo notar para las ecuaciones 1, 2 y 4, a pesar de ser minoría. Finalmente, también es importante resaltar que hubo gran cantidad de estudiantes que para estas mismas ecuaciones presentaron la categoría de *sin contestar*, situación que se debe precisamente a la dificultad de integrarse a la actividad de planteamiento de problemas con mas de un término algebraico. De esta forma, es claro que el tipo de expresión algebraica juega un rol importante para los tratamientos en ambos procesos.

Para la siguiente interrogante *¿Cuál es el efecto de la estrategia de introducir las tres situaciones de planteamiento de problemas en el uso de la variable como incógnita durante la implementación de la propuesta didáctica?* Se concluyó que las tres situaciones del planteamiento de problemas jugaron un rol importante. Para los alumnos que requerían de apoyo para plantear el problema, resultó ser un auxiliar, mientras que para otros establecer los detalles solicitados resultó complicado. Además, se pudo identificar que las situaciones libres permitieron al alumno generar aún ideas novedosas y creativas que él debía razonar y argumentar.

También es importante mencionar que al introducir la situaciones de planteamientos de problemas: estructuradas, semiestructuradas y libres durante la secuencia didáctica se pudo desarrollar la interacción y discusión grupal, actividad que fue muy enriquecedora e interesante debido a los diferentes análisis desarrollados por cada estudiante, es decir, se distinguió que hubo una participación activa por la mayoría de ellos para todas las ecuaciones tratadas. Así, estas discusiones grupales permitieron que los estudiantes por sí mismos pudieran discutir la pertinencia de resultados y corregir si era requerido.

Por otro lado, se hace notar que para las actividades diseñadas en la intervención en el aula, surgieron entre 3 o 4 situaciones de problemas diferentes que los estudiantes debían reflexionar y marcar como posibles ideas para generar los planteamientos solicitados. Así, en su mayoría todas las situaciones fueron seleccionadas aunque no planteadas, lo que permitió identificar que los estudiantes optaron por tomar situaciones sencillas de modelar, y en especial del tipo semiestructuradas, las cuales se presentaron con mayor frecuencia.

Con lo anterior, también se pudo distinguir que el planteamiento de problemas al considerar detalles específicos dados, como son este tipo de situaciones, permite que el estudiante se encuentre en un razonamiento elevado porque deberá relacionar el valor de la incógnita (ya previamente conocida) con el problema al contexto solicitado, y lo cual implica que si existe un buen uso de la situación y un planteamiento correcto entonces ayudará para la comprensión de la variable como incógnita.

Con respecto a *¿Qué cambios se observan en el análisis comparativo de la evaluación diagnóstica y final de la comprensión y uso del concepto de variable como incógnita?* Después de analizar los resultados diagnósticos y finales, de manera grupal se observó un avance considerable en el aumento de respuestas correctas para la solución de todas las ecuaciones lineales propuestas, así como para las ecuaciones 1, 3 y 4 en el planteamiento de problemas. Se resalta también que hubo mayor participación y motivación por parte de los estudiantes a la actividad. Incluso aunque no lograron concretar completa o correctamente el planteamiento, hubo mayor número de intentos, indicando que los estudiantes se encontraban en un proceso de adquisición del conocimiento. Con ello, se identificó una disminución de preguntas sin contestar, lo que también nos permite concluir que los estudiantes se encontraron motivados e interesados por realizar dicha actividad. Además, se resalta efectivamente lo sugerido por Silver y Cai (1996), al distinguir que los estudiantes considerados buenos resolutores son capaces de plantear más y mejores problemas y viceversa, los que son capaces de plantear un problema correctamente pueden resolverlo fácilmente. Añadimos a este punto que el aprovechamiento académico también es un factor importante, pues los estudiantes con alto promedio son más hábiles para plantear problemas y proponerlos en sentido de la variable como incógnita, al representar algo desconocido.

Finalmente, para dar respuesta a la pregunta *¿Cuántos aspectos de creatividad logran desarrollar los estudiantes de secundaria en el planteamiento de problemas en ecuaciones lineales?* Se puede decir que depende de su experiencia en el aprendizaje de las matemáticas, sus habilidades y razonamiento, así como de su conocimiento del tema. Sin embargo, se observa que al menos en cada tipo de ecuación hay un alumno con alto nivel de creatividad, mientras que el resto del grupo presenta al menos dos dimensiones. Esto se establece dado, al parecer, gran parte de los errores se debieron a que los alumnos no están familiarizados con el tema de *crear sus problemas*, así como de realizar la interpretación y preguntas adecuadas. Así, en general se puede concluir que 7 estudiantes lograron demostrar un pensamiento creativo en al menos una sesión.

Por último, se hace notar, que el rendimiento académico también se considera un factor importante a la hora de plantear problemas, puesto que la mayor parte de alumnos que presentan altos niveles de creatividad son alumnos que muestran resultados favorables en clases de matemáticas.

Con base en los resultados obtenidos en este estudio, se puede decir que el planteamiento de problemas resultó favorable para que los estudiantes sientan más cercana la matemática, generen interés de construir sus propios problemas matemáticos y asuman un reto de comprender lo que desean plantear.

Finalmente, se refuerza la idea de la gran aportación que tienen en los estudiantes las tareas de planteamiento de problemas, pues se logra desarrollar la creatividad, imaginación y razonamiento lógico y crítico. En este sentido, nuestros resultados coinciden con lo afirmado por Singer y Voica (2015), quienes concluyeron en su estudio que el planteamiento de problemas se ha convertido en una herramienta para identificar y desarrollar la creatividad matemática. De esta manera, creemos que es conveniente seguir investigando esta línea y diseñar actividades que puedan ser implementadas en el aula, por ejemplo, abordar el planteamiento de problemas en diversos contenidos tales como geometría, aritmética o álgebra y con diversos grados de dificultad a consideración del docente conforme a la evolución de los estudiantes, explorar los beneficios y mejora de actitudes, así como estudiar la relación que presenta esta actividad con la resolución de problemas. Asimismo, resultará relevante estudiar y profundizar en el planteamiento de problemas como aspecto base de la formación docente.

Referencias

Abramovich, S. (2015). Mathematical Problem Posing As a Link Between Algorithmic Thinking and Conceptual Knowledge. *The Teaching of Mathematics, 18*(2), 45-60.

Aiken, L. R. (1985). Three Coefficients for Analyzing the Reliability and Validity of Ratings. *Educational and Psychological Measurement, 45*(1), 131-142.

Ayllón, M. F., y Gómez, I. A. (2014). La invención de problemas como tarea Escolar. *Escuela Abierta: Revista de Investigación Educativa, 17*, 29-40.

Ayllón, M., Gómez, I., & Ballesta-Claver, J. (2016). Mathematical thinking and creativity through mathematical problem posing and solving. *Propósitos y Representaciones, 4*(1), 169-218.

Arenas, J. A. (2018). *Comprensión del concepto de fracción como razón a través del modelo de Pirie y Kieren*. Tesis de Maestría. Universidad Autónoma de Guerrero, México.

Bonotto, C. (2013). Artifacts as sources for problem-posing activities. *Educational Studies in Mathematics, 83*(1), 37-55. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9441-7

Bonotto, C., & Dal Salto, L. (2015). On the relationship between problema posing, problema solving, and creativity in the primary school. In F. M. Singer, N. F. Ellerton, & J. Cai (Eds.), *Mathematical Problem Posing. From research to effective practice* (pp. 103-121). New York: Springer.

Cai, J., Hwang, S., Jiang, C., & Silber, S. (2015). Problem posing research in mathematics: Some answered and unanswered questions. In F. M. Singer, N. Ellerton, & J. Cai (Eds.), *Mathematical problem posing: From research to effective practice* (pp. 3–34). New York: Springer

Cañadas, M. C., Molina, M., & del Río, A. (2018). Meanings given to algebraic symbolism in problem-posing. *Educational Studies in Mathematics*, *98*(1), 19–37. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9797-9

Cifarelli, V., & Cai, J. (2005). The evolution of mathematical explorations in open ended problem solving situations. *The Journal of Mathematical Behavior, 24*(3-4), 302–324.

Diantari, M. (2017). Efektivitas Model Pembelajaran Problem Posing dan Mind Mapping Ditinjau dari Keterampilan Berpikir Kreatif Siswa pada Materi Sistem Persamaan Linear Dua Variabel. *(Skripsi)*. Universitas Nusantara PGRI Kediri

Escobar-Pérez, J., y Cuervo-Martínez, Á. (2008). Validez de contenido y juicio de expertos: una aproximación a su utilización. *Avances en medición*, *6*(1), 27-36.

Espinoza G., J., Lupiañez G., J. L., y Segovia A., I. (2015). La invención de problemas y sus ámbitos de investigación en educación matemática. *Revista Digital: Matemática, Educación e Internet*, *14*(2). https://doi.org/10.18845/rdmei.v14i2.1664

Espinoza, J. (2017). La resolución y planteamiento de problemas como estrategia metodológica en clases de matemática. *Atenas, 3(39)*. Disponible en https://atenas.reduniv.edu.cu/index.php/atenas/article/view/311

Fernández, E., & Molina, M. (2017). Secondary Students' Implicit Conceptual Knowledge of Algebraic Symbolism. An Exploratory Study through Problem Posing. *IEJME - Mathematics Education, 12*(9), 799–826.

Filloy, E. (1999). *Aspectos teóricos del álgebra educativa.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Godino, J. D. (1996). Mathematical concepts: their meanings and understanding. In L. Puig & A. Gutierrez (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 417-424). Valencia, España: Universidad de Valencia.

Instituto Nacional de Estadística, Geografía e Informática. (2005). *Síntesis sociodemográfica municipal de Apizaco, Tlaxcala.* México.

Londoño, D., Villa, D., y Morales, S. (2013). C*omprensión del concepto de la derivada en su componente geométrica sobre la base del modelo de Pirie y Kieren*. Tesis de Maestría. Universidad de Medellín, Colombia.

Meel, D. E. (2003). Modelos y teorías de la comprensión matemática: Comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre el crecimiento de la comprensión matemática y la Teoría APOE. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME, 6*(3), 221-278.

Mestre, J. P. (2002). Probing adults' conceptual understanding and transfer of learning via problem posing. *Journal of Applied Developmental Psychology*, *23*(1), 9–50.

National Council of Teachers of Mathematics (2014). *Algebra as a Strand of School Mathematics for All Students*. Reston, VA.

Ngah, N., Ismail, Z., Tasir, Z., & Mohamad Said, M. N. H. (2016). Students' ability in free, semi-structured and structured problem posing situations. *Advanced Science Letters*, *22*(12), 4205–4208. https://doi.org/10.1166/asl.2016.8106

Nurasih, S. (2017). Penerapan Model Pembelajaran Problem Posing Tipe Pre Solution Posing untuk Meningkatkan Kemampuan Pemecahan Masalah Matematis Siswa SMPN 1 Prambon Kelas VIII pada Pokok Bahasan Operasi Aljabar. *(Skripsi)*. Universitas Nusantara PGRI Kediri. Kediri

Pedrosa, I., Suárez-Álvarez, J., & García-Cueto, E. (2013). Content Validity Evidences: Theoretical Advances and Estimation Methods. *Acción Psicológica, 10*(2), 10-20. http://dx.doi.org/10.5944/ap.10.2.11820

Penalva, M. C., Posadas, J. A., y Roig, A. I. (2010). Resolución y planteamiento de problemas: Contextos para el aprendizaje de la probabilidad. *Educación Matemática*, *2*(3), 23–54.

Penfield, R. D., & Giacobbi, Jr, P. R. (2004). Applying a score confidence interval to Aiken's item content-relevance index. *Measurement in Physical Education and Exercise Science, 8*(4), 213-225.

Pirie, S., & Kieren, T. (1989). A recursive theory of mathematical understanding. *For the Learning of Mathematics*, *9*(3), 7-11

Pirie, S., & Kieren, T. (1992). Creating constructivist environments and constructing creative mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *23*(5), 505-528.

Pirie, S., & Kieren, T. (1994). Growth in mathematical understanding: How can we characterise it and how can we represent it?. *Educational Studies in Mathematics. 26,* 165–190. https://doi.org/10.1007/BF01273662

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

Rendón, R. y Londoño, R. (2013). La comprensión del concepto de continuidad en el marco de la teoría de Pirie y Kieren. *Uni-pluri/versidad*, *13*(3), 1-10. Recuperado a partir de https://revistas.udea.edu.co/index.php/unip/article/view/18631

Rizvi, N. F. (2004). Prospective teachers' ability to pose word problems. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning, 12*, 1-22.

Rodríguez, D., & Valldeoriola, J. (2009). *Metodología de la investigación*. Cataluña, España: Universitat Oberta de Catalunya.

Sampieri, R. H., Collado, C. F. y Lucio, P. B. (1997). *Metodología de la Investigación*. Colombia: McGraw-Hill.

Santos, L. M. (1997). *Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas*. Mexico: Grupo Editorial Iberoamérica.

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in mathematics*. London: The Falmer Press.

Silver, E. A., & Cai, J. (1996). An Analysis of Arithmetic Problem Posing by Middle School Students. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(5), 521-539. https://doi.org/10.2307/749846

Silver, E. A. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *ZDM-International Journal on Mathematics Education, 29*(3), 75-80.

Singer, F. M., & Voica, C. (2015). Is problem posing a tool for indentifying and developing mathematical creativity?. In F. M. Singer, N. F. Ellerton, & J. Cai (Eds.), *Mathematical Problem Posing. From research to effective practice* (pp. 103-121), New York: Springer

Shriki, A. (2013). A model for assessing the development of students' creativity in the context of problem posing. *Creative Education, 4*(07), 430-439.

Siswono, T.Y. E. (2010). Levelling students' creative thinking in solving and posing mathematical problem. *Journal on Mathematics Education, 1*(1), 17-40.

Siswono, T. Y. E. (2011). Level of student's creative thinking in classroom mathematics. *Educational Research and Review, 6* (7), 548-553.

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics*

Teaching, *77*(1), 20-26.

Stoyanova, E. N. (1997). *Extending and exploring students' problem solving via problem posing*. Joondalup, Australia: Edith Cowan University. Recuperado de https://ro.ecu.edu.au/

Ursini, S., Escareño, F., Montes, D., y Trigueros, M. (2005). *Enseñanza del Álgebra elemental. Una propuesta alternativa*. México: Trillas.

Van Harpen, X. Y., & Presmeg, N. C. (2013). An investigation of relationships between students' mathematical problem-posing abilities and their mathematical content knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, *83*(1), 117–132. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9456-0

Villa-Ochoa, J. A. (2011). *La comprensión de la tasa de variación como una manera de aproximarse al concepto de derivada*. Tesis doctoral no publicada. Facultad de Educación-Universidad de Antioquia, Medellín.

ANEXO 1

BENEMERITA UNIVERSIDAD AUTONOMA DE PUEBLA

Facultad de Ciencias Físico Matemática

Maestría en Educación Matemática

Juicio de Expertos para la Evaluación de instrumento diagnóstico y descriptores del proceso de comprensión de la variable como incógnita

Respetado juez: Usted ha sido invitado para evaluar el instrumento Diagnóstico que analiza el proceso de comprensión del concepto de variable como incógnita en nivel básico a través del modelo establecido por Pirie y Kieren[1] y que es parte de la investigación Planteamiento de Problemas como Estrategia para la Comprensión del Concepto de Variable como Incógnita. La evaluación de los instrumentos es de gran relevancia para lograr que sean válidos y que los resultados obtenidos a partir de éstos sean utilizados eficientemente. Agradecemos su valiosa colaboración.

Nombres y apellidos: ____

Formación académica: ____

Areas de experiencia profesional: ____________________________________

Cargo actual: ____

Antigüedad en el cargo: ____

Institución: ____

Objetivo de la investigación: Analizar cómo es el proceso de comprensión y uso de la variable como incógnita de estudiantes de secundaria al resolver y plantear problemas de ecuaciones lineales de nivel básico.

Objetivo del juicio de expertos: Evaluar el grado de claridad, coherencia y relevancia de cada ítem de la evaluación diagnóstica para estudiantes de segundo grado de secundaria.

Objetivo de la prueba: Examinar el proceso de comprensión que realizan los estudiantes al resolver ecuaciones lineales de nivel básico.

[1] Meel, D. E. (2003). Modelos y teorías de la comprensión matemática: Comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre el crecimiento de la comprensión matemática y la Teoría APOE. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME, 6*(3), 221-278.

Objetivo del juicio de expertos: Evaluar el grado de claridad, coherencia y relevancia de cada ítem de la evaluación diagnóstica para estudiantes de segundo grado de secundaria.

Objetivo de la prueba: Examinar el proceso de comprensión que realizan los estudiantes al resolver ecuaciones lineales de nivel básico.

De acuerdo con la siguiente tabla califique cada uno de los ítems según corresponda:

Categoría	Calificación	Descripción de la clasificación
CLARIDAD El ítem se comprende fácilmente, es decir, su sintáctica y semántica son adecuadas.	1. No cumple con el criterio	El ítem no es claro
	2. Bajo Nivel	El ítem requiere bastantes modificaciones o una modificación muy grande en el uso de las palabras de acuerdo con su significado o por la ordenación de las mismas.
	3. Moderado nivel	Se requiere una modificación muy especifica de algunos de los términos del ítem.
	4. Alto nivel	El ítem es claro, tiene semántica y sintaxis adecuada.
COHERENCIA El ítem tiene relación lógica con la dimensión o indicador que está midiendo.	1. No cumple con el criterio	El ítem no tiene relación lógica con la dimensión
	2. Bajo Nivel	El ítem tiene una relación tangencial con la dimensión.
	3. Moderado nivel	El ítem tiene una relación moderada con la dimensión que está midiendo.
	4. Alto nivel	El ítem se encuentra completamente relacionado con la dimensión que está midiendo.
RELEVANCIA El ítem es esencial o importante, es decir debe ser incluido.	1. No cumple con el criterio	El ítem puede ser eliminado sin que se vea afectada la medición de la dimensión.
	2. Bajo Nivel	El ítem tiene alguna relevancia, pero otro ítem puede estar incluyendo lo que mide este.
	3. Moderado nivel	El ítem es relativamente importante.
	4. Alto nivel	El ítem es muy relevante y debe ser incluido

Finalmente, le agradeceremos abunde con algún comentario para que entendamos por qué la calificación en alguna de las categorías anteriores para que de esta manera nos beneficiemos de su retroalimentación.

Indicador a evaluar con el ítem	Descriptores	Ítem	CLARIDAD	COHERENCIA	RELEVANCIA
Conocimiento primitivo Es toda la información que el estudiante atrae a la situación de aprendizaje, llamado también conocimiento intuitivo, situado o previo. Se refiere al punto inicial, no a un bajo nivel de matemáticas.	*Reconoce/Identifica* Reconoce la expresión como algo que le es familiar	1. ¿Qué reconoces de la expresión matemática $6x = 45$?			
Observaciones:					

Indicador a evaluar con el ítem	Descriptores	Ítem	CLARIDAD	COHERENCIA	RELEVANCIA
Creación de la imagen El sujeto muestra capacidad para usar su conocimiento primitivo a través de imágenes, no necesariamente pictóricas, para que por medio de una acción física o mental generar una idea sobre el concepto.	*Expresa/ Describe* Describe que ideas genera una expresión	2.- Describe que ideas te genera la expresión $6x = 45$			
Observaciones:					

Indicador a evaluar con el ítem	Descriptores	Ítem	CLARIDAD	COHERENCIA	RELEVANCIA
Comprensión de la imagen Las imágenes asociadas con una sola actividad se reemplazan por una imagen mental. El	*Representa* Necesidad de realizar acciones físicas matemáticas	3. Explica que operación matemática podrías			

desarrollo de estas imágenes mentales libera las matemáticas del estudiante a partir de la necesidad de realizar acciones físicas particulares, estos procesos físicos realizados con libertad provocan que la imagen sea exitosa en relación con la evolución del conocimiento matemático debido a que el estudiante comienza a reconocer propiedades globales obvias de imágenes matemáticas inspeccionadas.	que están involucradas con la expresión	realizar al ver esta expresión $6x = 45$			
Observaciones:					

Indicador a evaluar con el ítem	Descriptores	Ítem	CLARIDAD	COHERENCIA	RELEVANCIA
Observación de la propiedad El sujeto puede analizar una imagen mental y obtener de ella sus atributos, diferenciarlos y relacionarlos con los de otras imágenes mentales. Estas propiedades se combinan para construir definiciones que evolucionan y que tienen características particulares, ignorando otros elementos del	*Identifica propiedades* 1. Tiene la habilidad de identificar un proceso que lleva a un desarrollo de la expresión matemática	4. Realiza la operación matemática que planteaste en el inciso anterior en la expresión $6x = 45$			

concepto. Para Pirie y Kieren, "*La diferencia entre la obtención de una imagen y la observación de la propiedad es la capacidad de observar una conexión entre las imágenes y explicar cómo verificar la conexión.*" (p.237).					
Observaciones:					

Indicador a evaluar con el ítem	**Descriptores**	**Ítem**	**CLARIDAD**	**COHERENCIA**	**RELEVANCIA**
Formalización El estudiante es capaz de conocer las propiedades para abstraer las cualidades comunes de las clases de imágenes. La descripción de estos objetos mentales de clases similares tiene como resultado la producción de definiciones matemáticas completas, no necesariamente en lenguaje matemático formal pero si equivalente a una definición matemática adecuada.	*Define/ Resuelve* Explica con sus propias palabras propiedades o leyes que están involucradas en el desarrollo de la ecuación	5. Explica con tus propias palabras qué propiedad matemática utilizaste en el proceso que acabas de realizar			
Observaciones:					

Indicador a evaluar con el ítem	Descriptores	Ítem	CLARIDAD	COHERENCIA	RELEVANCIA
Observación El estudiante es capaz de observar, estructurar y organizar sus procesos de pensamiento meta cognitivamente, así como reconocer las ramificaciones de dichos procesos. Puede producir verbalizaciones relacionadas con la cognición sobre el concepto formalizado	*Analiza* Analiza meta cognitivamente los procesos que llevó a cabo	6. ¿Como consideras tus conocimientos para este tipo de expresiones? 7.-Con base en la siguiente escala, selecciona cómo te sientes al ver este tipo de expresiones (se le ofrece una escala de 5 caras desde la más triste a la más feliz que indica grado de dificultad del problema)			

Observaciones:

Indicador a evaluar con el ítem	Descriptores	Ítem	CLARIDAD	COHERENCIA	RELEVANCIA
Estructuración El estudiante puede explicar la	*Formaliza*	7. Explica que proceso matemático			

interrelación de observaciones formales mediante un sistema axiomático	1. Explica el proceso que realizó a través de propiedades matemáticas formales. 2. Realiza el procedimiento formal de solución de la ecuación.	se realiza en este tipo de expresiones en general.			
Observaciones:					

Indicador a evaluar con el ítem	Descriptores	Ítem	CLARIDAD	COHERENCIA	RELEVANCIA
Invención Capacidad de liberarse del conocimiento estructurado que representa la comprensión total y crear preguntas totalmente nuevas, por ejemplo, ¿Qué pasaría si?	*Crea* 1.- Identifica la relación de la expresión algebraica con posibles situaciones de la vida real. 2. Propone una situación o problema relacionado a su entorno que pueda ser representado mediante la expresión matemática. 3. Interpreta la solución del problema coherentemente	8. Considera la siguiente idea y complétala para crear un problema que pueda ser representado por la expresión 6x=45 9. Resuelve el problema que planteaste 10. ¿La respuesta que acabas de obtener coincide con la respuesta obtenida en d)? Justifica tu respuesta			

Observaciones:					

Nota: Los 10 ítems mencionados describen el proceso de solución y planteamiento de problemas de una ecuación lineal básica, sin embargo, se le comenta al juez que el instrumento diagnóstico incluye el mismo análisis para 3 ecuaciones más, que se muestran a continuación. La selección de dichas ecuaciones se basa en Ursini[2] en relación a ecuaciones lineales sencillas y Filloy[3] bajo el cual se distingue diferencia entre no operacionalizar la incógnita (ecuación 1, 3 y 4) y si hacerlo (ecuación 2). Además, de distinguir el valor de la incógnita al proponer resultados enteros positivos, enteros negativos, y número decimal.
Adicionalmente, cuando el alumno se enfrente al caso de modelaje de situaciones reales con dichas expresiones, se le da algunas ideas respecto a un contexto que pueda tomar de referencia para construir su planteamiento de problema, esto con la finalidad de que no exista una carga cognitiva demandante. Esto es conocido como situaciones de planteamiento de problema y del cual se tomará el caso de problemas semiestructurados. (Cañadas, Molina, y del Río)[4].

2.- $x + 76 = 68$

3.- $x + (x + 2) = 22$

4.- $9\,(x + 2) = 126$

Por último, ¿Usted considera que los 40 ítems son <u>suficientes</u> para evaluar el proceso de comprensión y uso de la variable como incógnita de estudiantes de secundaria al resolver y plantear problemas de ecuaciones lineales de nivel básico? ______________________________

Puede justificar su respuesta

____

____

[2] Ursini, S., F. Escareño, D. Montes y M. Trigueros (2005), Enseñanza del Álgebra elemental. Una propuesta alternativa, México, Trillas.
[3] Filloy, E. (1999). Aspectos teóricos del álgebra educativa. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
[4] Cañadas, M. C., Molina, M., & del Río, A. (2018). Meanings given to algebraic symbolism in problem-posing. Educational Studies in Mathematics, 98(1), 19–37.

ANEXO 2

Sesión 1.

Objetivo: Que el alumno formalice el concepto de ecuación, identifique características, propiedades, representaciones, etc. y que analice situaciones planteadas y procedimientos relacionados

Conocimientos previos:

Nociones de traducción de lenguaje común a lenguaje algebraico

Propiedades y/o características de las ecuaciones lineales

Instrucciones: Analiza cada situación planteada.

1.- De las siguientes expresiones clasifícalas bajo algún criterio que consideres. Puedes marcarlas con distintos colores

$2n + 6$	$3.2x = 20$	$5x = 6y$
$4x + 9 = 15$	$3x + 6y = 4$	$8 + n$

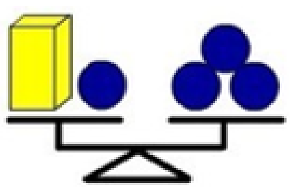
a) Describe que criterios utilizaste para la clasificación de expresiones

b) ¿En cuál de los casos se desea encontrar un valor específico?

c) ¿Cómo se le llama a esta expresión?

d) Escribe algunas ideas que recuerdes acerca de este concepto

2.- Observa las siguientes balanzas que están en equilibrio. Representa una balanza diferente que cumpla esta misma condición combinando objetos. Los valores que tomen las figuras son números enteros



3.- Identifica para cada caso si el procedimiento matemático realizado es correcto. Si no es así, marca con rojo donde este el error.

$x+5=16$ $x=16+5$ $x=21$ ○ correcto ○ Incorrecto	$y-6=10$ $y=6+10$ $y=16$ ○ correcto ○ Incorrecto	$14x=7$ $x=\frac{7}{14}$ $x=2$ ○ correcto ○ Incorrecto
$11-2z=6z+3$ $-2z-6z=3+11$ $8z=14$ $z=\frac{14}{8}$ $z=1.75$ ○ correcto ○ Incorrecto	$5x+30=10$ $5x=10-30$ $5x=-20$ $x=\frac{-20}{5}$ $x=-4$ ○ correcto ○ Incorrecto	$2(y+6)=120$ $2y+12=120$ $2y=120-12$ $y=\frac{108}{2}$ $y=54$ ○ correcto ○ Incorrecto

4.- Identifica la expresión algebraica que simule cada situación

- La suma de las edades de Ana y Liliana son 36. Si Ana es menor por 5 años que Liliana.

a) $x+x+5=36$ b) $x+36=5$ c) $x+x-5=36$

- El perímetro de un rectángulo es 20. El largo es el doble de su ancho.

a) $x+x+4x=20$ b)$x+20=2x$ c) $4x=20$

- Hallar dos números consecutivos cuya suma sea 103.

a) $x+x+1=103$ b) $x+2x=103$ c) $x+1=103$

- Se compró una mesa, un sillón y una alacena por $35, 000. El sillón costo el triple de la mesa, y la alacena el doble de la mesa. Identifica la ecuación que representa la situación

a) $m+3m+2m=35000$ b) $m+m+m=35000$ c) $3m+2m=35000$

- Un comerciante vende varios kilos de manzana de $12 pesos. Al terminar el día revisa su caja registradora y tenía $312 pesos. Sin embargo recuerda que tenía inicialmente $36 pesos. El desea saber ¿Cuántos kilos vendió?

a) $12+x=312$ b) $12x=312$ c) $12x+36=312$

Nombre del alumno: ____

Sesión 2 -3

Objetivo: Que el alumno identifique y reconozca ecuaciones de primer grado de la forma $Ax = B$, que resuelva y analice sus resultados y las relacione con una situación cercana a su entorno

Instrucciones: Analiza cada uno de los siguientes puntos y contesta

1.- Considera $8x = 96$

a) ¿Qué operación u operaciones tendrías que realizar para darle solución?

b) ¿Cuántos pasos procedimentales realizarías?

c) Lleva acabo tus planteamientos anteriores y obtén el resultado

d) ¿Qué tipo de número fue la respuesta que obtuviste?

e) ¿Estas utilizando alguna propiedad o ley matemática para darle solución? ¿Cual?

f) ¿Tus conocimientos actuales te permiten resolver correctamente la ecuación? ¿Por qué?

g) ¿De qué manera podrías comprobar que tu respuesta fue correcta? De ser así, realízalo

h) ¿Crees que sea posible que esta expresión pueda representar una situación de la realidad?

I) Analiza y determina si la ecuación planteada puede representar alguna de las situaciones siguientes. Marca con una X

- Área de una figura geométrica ______
- Valor unitario respecto a un pago total ___________
- Repartición del total de productos entre una cantidad de personas ______________
- Total de días de ahorro al conocer el monto obtenido _____

j) Considera alguna situación anterior y plantea detalladamente una situación de contexto

k) Resuelve el problema anterior detallando aspectos importantes y realizando la interpretación

l) La solución que diste a la ecuación en el inciso c) ¿tiene coherencia con el problema que planteaste y la solución obtenida anteriormente?

m) Puedes sugerir otra situación diferente que represente la ecuación. Escríbela

2.- Ahora, considera $6x = 27$

a) ¿Qué operación u operaciones tendrías que realizar para darle solución?

b) ¿Cuántos pasos procedimentales realizarías?

c) Lleva acabo tus planteamientos anteriores y obtén el resultado

d) ¿Qué tipo de número fue la respuesta que obtuviste?

e) ¿Estas utilizando alguna propiedad o ley matemática para darle solución? ¿Cuál?

f) ¿Tus conocimientos actuales te permiten resolver correctamente la ecuación? ¿Por qué?

g) ¿La ecuación es semejante a la planteada en el problema 1 o existen diferencias? De ser así, ¿Cuál es la expresión general? Explica por qué.

h) ¿Consideras que para tu respuesta anterior, todas las expresiones de este tipo pueden ser resueltas mediante el mismo método?

i) Plantea una situación que pueda ser representada con esa expresión algebraica y resuélvela

j) ¿Tu solución matemática es coherente con la solución a tu problema planteado?

Nombre del alumno: ____

Sesión $4-5$

Objetivo: Que el alumno identifique y reconozca ecuaciones de primer grado de la forma $Ax + B = C$, que resuelva y analice sus resultados y las relacione con una situación cercana a su entorno

Instrucciones: Analiza cada uno de los siguientes puntos y contesta

1.- Considera $2x - 7 = -15$

a) ¿Qué operación u operaciones tendrías que realizar para darle solución?

b) ¿Cuántos pasos procedimentales realizarías?

c) Lleva acabo tus planteamientos anteriores y obtén el resultado

d) ¿Qué tipo de número fue la respuesta que obtuviste?

e) ¿Estas utilizando alguna propiedad o ley matemática para darle solución? ¿Cuál?

f) ¿Tus conocimientos actuales te permiten resolver correctamente la ecuación? ¿Por qué?

g) ¿De qué manera podrías comprobar que tu respuesta fue correcta? De ser así, realízalo

h) ¿Crees que sea posible que esta expresión pueda representar una situación de la realidad?

I) Analiza y determina si la ecuación planteada puede representar alguna de las situaciones siguientes. Marca con una X

- Total de Productos defectuosos en cada paquete menos productos individuales ______
- Descender tantos metros de profundidad ___________
- Deuda total o pérdida de dinero ______________

j) Considera alguna situación anterior y plantea detalladamente una situación de contexto

k) Resuelve el problema anterior detallando aspectos importantes y realizando la interpretación

l) La solución que diste a la ecuación en el inciso c) ¿tiene coherencia con el problema que planteaste y la solución obtenida anteriormente? ¿Por qué?

m) Puedes sugerir otra situación diferente que represente la ecuación. Escríbela

2.- Considera $x + (x + 6) = 28$

a) ¿Qué operación u operaciones tendrías que realizar para darle solución?

b) ¿Cuántos pasos procedimentales realizarías?

c) Lleva acabo tus planteamientos anteriores y obtén el resultado

d) ¿Qué tipo de número fue la respuesta que obtuviste?

e) ¿Estas utilizando alguna propiedad o ley matemática para darle solución? ¿Cual?

f) ¿Tus conocimientos actuales te permiten resolver correctamente la ecuación? ¿Por qué?

g) ¿De qué manera podrías comprobar que tu respuesta fue correcta? De ser así, realízalo

h) ¿Crees que sea posible que esta expresión pueda representar una situación de la realidad?

I) Analiza y determina si la ecuación planteada puede representar alguna de las situaciones siguientes. Marca con una X

- Relación entre las edades de dos personas, siendo mayor una de ellas por 6 años ______
- La suma de dos números que tienen diferencia de 6 unidades ________
- Juntar cierta cantidad de dulces entre dos personas ____________
- El área de un terrero _______

j) Considera alguna situación anterior y plantea detalladamente una situación de contexto

k) Resuelve el problema anterior detallando aspectos importantes y realizando la interpretación

l) La solución que diste a la ecuación en el inciso c) ¿tiene coherencia con el problema que planteaste y la solución obtenida anteriormente?

m) Puedes sugerir otra situación diferente que represente la ecuación. Escríbela

Sesión 6-7

3.- Considera $\mathbf{15(y+4)=111}$

a) ¿Qué operación u operaciones tendrías que realizar para darle solución?

b) ¿Cuántos pasos procedimentales realizarías?

c) Lleva acabo tus planteamientos anteriores y obtén el resultado

d) ¿Qué tipo de número fue la respuesta que obtuviste?

e) ¿Estas utilizando alguna propiedad o ley matemática para darle solución? ¿Cual?

f) ¿Tus conocimientos actuales te permiten resolver correctamente la ecuación? ¿Por qué?

g) ¿De qué manera podrías comprobar que tu respuesta fue correcta? De ser así, realízalo

h) ¿Crees que sea posible que esta expresión pueda representar una situación de la realidad?

I) Analiza y determina si la ecuación planteada puede representar alguna de las situaciones siguientes. Marca con una X

- Ahorro en una quincena _____
- Representación de la superficie de un terreno, donde el largo es mayor que el ancho ______
- Conocer el precio unitario de la venta de una cantidad de artículos _________

j) Considera alguna situación anterior y plantea detalladamente una situación de contexto

k) Resuelve el problema anterior detallando aspectos importantes y realizando la interpretación

l) La solución que diste a la ecuación en el inciso c) ¿tiene coherencia con el problema que planteaste y la solución obtenida anteriormente?

m) Puedes sugerir otra situación diferente que represente la ecuación. Escríbela

Ahora, considera $\mathbf{84 - 6x = 54}$

a) ¿Qué operación u operaciones tendrías que realizar para darle solución?

b) ¿Cuántos pasos procedimentales realizarías?

c) Lleva acabo tus planteamientos anteriores y obtén el resultado

d) ¿Qué tipo de número fue la respuesta que obtuviste?

e) ¿Estas utilizando alguna propiedad o ley matemática para darle solución? ¿Cual?

f) ¿Tus conocimientos actuales te permiten resolver correctamente la ecuación? ¿Por qué?

g) ¿La ecuación es semejante a la planteada en el problema 1,2 y 3 o existen diferencias? Explica por qué.

h) ¿Consideras que para tu respuesta anterior, todas las expresiones de este tipo pueden ser resueltas mediante el mismo método?

i) Plantea una situación que pueda ser representada con esa expresión algebraica y resuélvela. Puedes hacer alguna transformación algebraica

j) ¿Tu solución matemática es coherente con la solución a tu problema planteado?

Sesión 8 - 9

Objetivo: Que el alumno identifique y reconozca ecuaciones de primer grado de la forma $Ax + B = Cx + D$, que resuelva y analice sus resultados y las relacione con una situación cercana a su entorno

Conocimientos previos:

Nociones de traducción de lenguaje común a lenguaje algebraico

Propiedades y/o características de las ecuaciones lineales

Instrucciones: Analiza cada uno de los siguientes puntos y contesta

1.- Considera $\boldsymbol{z + 14 = 2z + 10}$

a) ¿Qué operación u operaciones tendrías que realizar para darle solución?

b) ¿Cuántos pasos procedimentales realizarías?

c) Lleva acabo tus planteamientos anteriores y obtén el resultado

d) ¿Qué tipo de número fue la respuesta que obtuviste?

e) ¿Estas utilizando alguna propiedad o ley matemática para darle solución? ¿Cual?

f) ¿Tus conocimientos actuales te permiten resolver correctamente la ecuación? ¿Por qué?

g) ¿De qué manera podrías comprobar que tu respuesta fue correcta? De ser así, realízalo

h) ¿Crees que sea posible que esta expresión pueda representar una situación de la realidad?

I) Analiza y determina si la ecuación planteada puede representar alguna de las situaciones siguientes. Marca con una X

- Igualdad de dinero obtenido por dos personas al realizar un ahorro y recibir dinero _______
- Relación entre áreas de figuras geométricas ____

j) Considera alguna situación anterior y plantea detalladamente una situación de contexto

k) Resuelve el problema anterior detallando aspectos importantes y realizando la interpretación

l) La solución que diste a la ecuación en el inciso c) ¿tiene coherencia con el problema que planteaste y la solución obtenida anteriormente?

m) Puedes sugerir otra situación diferente que represente la ecuación. Escríbela

2.- Ahora, considera $10x + 6 = 2x - 2$

a) ¿Qué operación u operaciones tendrías que realizar para darle solución?

b) ¿Cuántos pasos procedimentales realizarías?

c) Lleva acabo tus planteamientos anteriores y obtén el resultado

d) ¿Qué tipo de número fue la respuesta que obtuviste?

e) ¿Estas utilizando alguna propiedad o ley matemática para darle solución? ¿Cual?

f) ¿Tus conocimientos actuales te permiten resolver correctamente la ecuación? ¿Por qué?

g) ¿La ecuación es semejante a la planteada en el problema 1 o existen diferencias? Explica por qué.

h) ¿Consideras que para tu respuesta anterior, todas las expresiones de este tipo pueden ser resueltas mediante el mismo método?

i) Plantea una situación que pueda ser representada con esa expresión algebraica y resuélvela

j) ¿Tu solución matemática es coherente con la solución a tu problema planteado?

ANEXO 3

Evaluación Diagnóstico y Final

Nombre del alumno: ______________________________ Edad: ______________

Instrucciones: Intenta responder cada uno de los puntos siguientes

1. $6x = 45$

a) ¿Qué reconoces de la expresión matemática?

b) Describe qué ideas te genera la expresión

c) Explica que operación matemática podrías realizar al ver esta expresión

d) Realiza la operación matemática que planteaste en el inciso anterior en la expresión

e) Explica con tus propias palabras qué propiedad matemática utilizaste en el proceso que acabas de realizar

f) ¿Cómo consideras tus conocimientos para este tipo de expresiones? ______________________________

Con base en la siguiente escala, selecciona con una X. ¿Cómo consideras el problema?

Complejo	Difícil	Simple	Fácil	Bastante sencillo

g) Explica que proceso matemático se realiza en este tipo de expresiones en general.

h) Considera la siguiente idea, y complétala para crear un problema que pueda ser representado por la expresión $6x = 45$

- El precio unitario respecto de un pago total a cierto producto

i) Resuelve el problema que planteaste

j) ¿La respuesta que acabas de obtener coincide con la respuesta obtenida en d)? ¿Cómo la interpretas?

2. $\boldsymbol{x + 67 = 76 + 4x}$

a) ¿Qué reconoces de la expresión matemática?

b) Describe qué ideas te genera la expresión

c) Explica que operaciones matemáticas podrías realizar al ver esta expresión

d) Realiza las operaciones matemáticas que planteaste en el inciso anterior en la expresión

e) Explica con tus propias palabras qué propiedad matemática utilizaste en el proceso que acabas de realizar

f) ¿Cómo consideras tus conocimientos para este tipo de expresiones?

Con base en la siguiente escala, selecciona con una X. ¿Cómo consideras el problema?

Complejo | Difícil | Simple | Fácil | Bastante sencillo

g) Explica qué proceso matemático se realiza en este tipo de expresiones en general.

h) Considera la siguiente idea, y complétala para crear un problema que pueda ser representado por la expresión $\boldsymbol{x + 67 = 76 + 4x}$

- Comparación de dinero entre dos personas

i) Resuelve el problema que planteaste

j) ¿La respuesta que acabas de obtener coincide con la respuesta obtenida en d)? ¿Cómo la interpretas?

3.- $y + (y + 2) = 22$

a) ¿Qué reconoces de la expresión matemática?

b) Describe qué ideas te genera la expresión

c) Explica que operaciones matemáticas podrías realizar al ver esta expresión

d) Realiza las operaciones matemáticas que planteaste en el inciso anterior en la expresión

e) Explica con tus propias palabras qué propiedad matemática utilizaste en el proceso que acabas de realizar

f) ¿Cómo consideras tus conocimientos para este tipo de expresiones?

Con base en la siguiente escala, selecciona con una X. ¿Cómo consideras el problema?

Complejo	Difícil	Simple	Fácil	Bastante sencillo

g) Explica que proceso matemático se realiza en este tipo de expresiones en general.

h) Considera la siguiente idea, y complétala para crear un problema que pueda ser representado por la expresión $y + (y + 2) = 22$

- Relación de edades entre dos personas

i) Resuelve el problema que planteaste

j) ¿La respuesta que acabas de obtener coincide con la respuesta obtenida en d)? ¿Cómo la interpretas?

4.- $9\ (z+2) = 126$

a) ¿Qué reconoces de la expresión matemática?

b) Describe qué ideas te genera la expresión

c) Explica que operaciones matemáticas podrías realizar al ver esta expresión

d) Realiza las operaciones matemáticas que planteaste en el inciso anterior en la expresión

e) Explica con tus propias palabras qué propiedad matemática utilizaste en el proceso que acabas de realizar

f) ¿Cómo consideras tus conocimientos para este tipo de expresiones?

Con base en la siguiente escala, selecciona con una X. ¿Cómo consideras el problema?

Complejo | Difícil | Simple | Fácil | Bastante sencillo

g) Explica qué proceso matemático se realiza en este tipo de expresiones en general.

h) Considera la siguiente idea, y complétala para crear un problema que pueda ser representado por la expresión $9\ (z+2) = 126$

- Medidas que determinan la superficie de un terrero

i) Resuelve el problema que planteaste

j) ¿La respuesta que acabas de obtener coincide con la respuesta obtenida en d)? ¿Cómo la interpretas?