



# **BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA**

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS  
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

## **LA COMPRENSIÓN DEL COMPORTAMIENTO GRÁFICO DE LAS FUNCIONES LINEALES MEDIANTE EL USO DE HERRAMIENTAS TECNOLÓGICAS EDUCATIVAS**

**TESIS**  
PARA OBTENER EL TÍTULO DE  
**MAESTRO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA**

PRESENTA  
**LIC. DAVID VÁZQUEZ SERRANO**

DIRECTOR DE TESIS  
**DR. MANUEL PONCE DE LEÓN PALACIOS**

CO-DIRECTOR DE TESIS  
**DR. JOSÉ ANTONIO JUÁREZ LÓPEZ**

PUEBLA, PUE.

JUNIO\_2023



DR. SEVERINO MUÑOZ AGUIRRE  
SECRETARIO DE INVESTIGACIÓN Y  
ESTUDIOS DE POSGRADO, FCFM-BUAP  
P R E S E N T E:

Por este medio le informo que el C:

DAVID VÁZQUEZ SERRANO

Estudiante de la Maestría en Educación Matemática, ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 12 de mayo de 2023, con la tesis titulada:

"LA COMPRENSIÓN DEL COMPORTAMIENTO GRÁFICO DE LAS FUNCIONES  
LINEALES MEDIANTE EL USO DE HERRAMIENTAS TECNOLÓGICAS EDUCATIVAS"

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

A T E N T A M E N T E.  
H. Puebla de Z. a 26 de junio de 2023

DRA. LIDIA AURORA HERNÁNDEZ REBOLLEDO  
COORDINADORA DE LA MAestrÍA  
EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA.



Esta investigación se realizó gracias al financiamiento del  
Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT)

De enero de 2020 a diciembre de 2022

No de CVU: 1094258

## **Dedicatorias**

A mi esposa Dulce Yazmin Pérez Macias  
y a mi hija Dafne Sofía Vázquez Pérez  
que siempre estuvieron presentes conmigo.

A mis padres Oscar Rogelio Vázquez Cruz  
y Maribel Serrano Romero que los quiero mucho.

A la familia Pérez Macias con  
mucho cariño y aprecio.

## **Agradecimientos**

Al Dr. Manuel Ponce de León Palacios, mi asesor de tesis, por su dedicación y paciencia que siempre me mostro, ya que desde un inicio creyó en mí y en este proyecto, el cual supo guiar con mucho esmero y entusiasmo durante todo el proceso de mi tesis.

Al Dr. José Antonio Juárez López, mi codirector de tesis y profesor durante toda mi estancia en la maestría, admiro su profesionalismo y dedicación que siempre le pone a cada uno de sus proyectos, agradezco la visión que me compartió acerca del papel que debe tener el educador matemático en México.

A todo el cuerpo académico que compone la Maestría en Educación Matemática, en especial a la Dra. Estela de Lourdes Juárez Ruiz, a la Dra. Honorina Ruíz Estrada y al Dr. José del Carmen Orozco Santiago los cuales me guiaron en mi formación profesional durante toda mi estancia en la maestría. También a Abi, por su dedicación y atención que siempre me mostro.

A mis compañeros colombianos los cuales fueron un impulso a seguir, ya que vinieron a inyectar un extra a la maestría al compartirnos sus experiencias y la formación académica de su país. En especial a mis compañeros de clase del segundo año: Oscar Iván Paternina Borja, Ever José Pacheco Muñoz y Romario Montaña Ramos.

Al grupo colegiado de mi escuela donde laboro, por brindarme las facilidades para aplicar esta prueba, así como a los alumnos por su buena disposición que mostraron en el desarrollo de cada una de las actividades.

# “LA COMPRENSIÓN DEL COMPORTAMIENTO GRÁFICO DE LAS FUNCIONES LINEALES MEDIANTE EL USO DE HERRAMIENTAS TECNOLÓGICAS EDUCATIVAS”

## ÍNDICE

RESUMEN .....	5
ABSTRACT .....	6
Capítulo 1 .....	7
PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN.....	7
1.1. Introducción .....	7
1.2. Formulación y planteamiento del problema de investigación.....	8
1.3. Pregunta de investigación .....	10
1.3.1. Preguntas específicas .....	10
1.4. Objetivo de investigación .....	10
1.4.1. Objetivos específicos .....	10
1.5. Supuesto.....	11
1.6. Justificación .....	11
Capitulo 2 .....	13
MARCO TEÓRICO.....	13
2.1. La enseñanza de las matemáticas en el aula.....	13
2.2.- La teoría de los registros de representación semiótica (TRRS).....	14
2.3 La secuencia didáctica .....	19
2.4 Las herramientas tecnológicas educativas.....	22
Capítulo 3 .....	24
MARCO METODOLÓGICO.....	24
3.1 Paradigma de investigación.....	24
3.2.- Método.....	25
3.3.- Sujetos.....	26
3.4.- Descripción de los instrumentos de recolección de datos en el desarrollo de la investigación.....	26
3.5. Secuencia Didáctica.....	30
3.6. Evaluación.....	31
3.7. Recursos didácticos .....	31
3.8 Planeación de la Secuencia Didáctica.....	31
3.8.1 Sesión 1 Introdutoria: Función lineal y afín.....	32

3.8.2 Sesión 2 Desarrollo: Pendiente de una recta .....	33
3.8.3 Sesión 3 Conclusión: Función lineal y afín.....	35
Capítulo 4 .....	36
ANÁLISIS DE RESULTADOS.....	36
4.1. Diagnostico preliminar .....	36
4.2 El caso del equipo de Alma.....	38
4.3. El caso del equipo de Berenice.....	43
4.4 El caso del equipo de Carlos .....	48
4.5 El caso del equipo de Daniela.....	54
4.6. El caso del equipo de Esteban .....	58
4.7. Resumen de las observaciones más importantes .....	63
Capítulo 5 .....	65
CONCLUSIONES .....	65
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	69
ANEXOS .....	72

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Tarea de reconocimiento .....	9
Figura 2. Relación codificada.....	14
Figura 3. Tarea de reconocimiento .....	16
Figura 4. Características de oposición visual.....	17
Figura 5. Estructura de una tarea de coordinación.....	18
Figura 6. Esquema general de elaboración de una unidad didáctica.....	20
Figura 7. Representaciones auxiliares.....	21
Figura 8. Problema de función lineal.....	27
Figura 9. Video Multimedia sobre el llenado de recipientes .....	28
Figura 10. Juego de batalla naval diseñado en PowerPoint.....	32
Figura 11. Funciones en la vida cotidiana .....	33
Figura 12. Pendiente de una recta .....	34
Figura 13. Aterrizaje del avión. Desmos.....	35
Figura 14. Actividad grupal de batalla naval ejecutada en PowerPoint.....	36
Figura 15. Gráfica de presencia de los niveles de comprensión .....	37
Figura 16. Identificación de las operaciones que se realizan en una función.....	38
Figura 17. Graficación de funciones lineales negativas.....	40
Figura 18. Diferencia entre dos funciones distintas.....	41
Figura 19. Trazado de funciones lineales con base en un problema planteado .....	42
Figura 20. Problemas de funciones .....	44
Figura 21. Graficación de funciones lineales positivas.....	46
Figura 22. Construcción de funciones .....	47
Figura 23. Problemas de funciones II .....	49
Figura 24. Funciones positivas utilizando GeoGebra .....	50
Figura 25. Tarea de conversión entre el cambio de representación semiótica .....	52
Figura 26. Reconocimiento del coeficiente de posición.....	54
Figura 27. Funciones paralelas, ejemplo hecho a mano y en Geogebra.....	55
Figura 28. Construcción de funciones sin la utilización de GeoGebra .....	57
Figura 29. Reconocimiento del coeficiente de posición II.....	58
Figura 30. Tratamiento de funciones positivas .....	60
Figura 31. Tarea de conversión entre el cambio de representación semiótica II .....	62

## ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Fases para desarrollar una secuencia didáctica .....	22
Tabla 2. Tipos de aprehensión cognitiva de Duval (1995).....	29

## RESUMEN

El presente trabajo de investigación muestra el diseño e implementación de una secuencia didáctica, para el logro del aprendizaje de las representaciones graficas de las funciones lineales asistidas por el uso de herramientas tecnológicas o también llamadas TIC'S.

El objetivo principal fue analizar el efecto que tiene la aplicación de una secuencia didáctica basada en el uso de herramientas de graficación digital para la comprensión de las funciones lineales en estudiantes de educación secundaria. La investigación se fundamenta en la teoría del registro de representación semiótica de Duval (2006a), la cual hace hincapié en que los estudiantes puedan transitar de manera efectiva entre las diferentes formas de representación del objeto matemático. Es a través de esta teoría, que nos basamos para poder observar si los estudiantes son capaces de realizar tareas de tratamiento de la información y poder llegar a la conversión entre los distintos tipos de representación semiótica (lenguaje algebraico y sistema gráfico), los cuales son el umbral para la comprensión.

La investigación fue de corte cualitativo, utilizando el método de estudio de caso, en el cual se aplicaron pruebas y entrevistas semiestructuradas a un grupo de estudiantes que cursaron el noveno grado de educación básica. Los resultados que se obtuvieron permitieron observar las diferentes maneras en el que los alumnos comprenden el concepto de las funciones lineales, mediante el apoyo visual de algunas herramientas tecnológicas educativas tales como Geogebra y Desmos, sin la necesidad de realizar el proceso de la tabulación. Duval (2006b) alude que lo importante no es saber cuál es mejor sistema de representación semiótica de un concepto matemático, sino más bien, utilizar diversos y adecuados problemas de representación para coordinarlos entre sí, mediante el apoyo de las herramientas tecnológicas educativas las cuales permiten favorecer un adecuado manejo del tratamiento de la información y estimulen una conversión entre los diferentes sistemas semióticos, los cuales marcan la pauta hacia el logro de la comprensión.

**PALABRAS CLAVE:** comprensión, funciones lineales, herramientas tecnológicas educativas.

## **ABSTRACT**

The present research work shows the design and implementation of a didactic sequence, for the achievement of learning the graphic representations of linear functions assisted by the use of technological tools or also called ICTs.

The main objective was to analyze the effect of the application of a didactic sequence based on the use of digital graphing tools for the understanding of linear functions in secondary school students. The research is based on Duval's (2006a) semiotic representation register theory, which emphasizes that students can move effectively between the different forms of representation of the mathematical object. It is through this theory that we base ourselves to be able to observe if students are able to carry out information processing tasks and be able to convert between the different types of semiotic representation (algebraic language and graphic system), which are the threshold for understanding.

The research was qualitative, using the case study method, in which tests and semi-structured interviews were applied to a group of students who attended the ninth grade of basic education. The results obtained allowed us to observe the different ways in which students understand the concept of linear functions, through the visual support of some educational technological tools such as Geogebra and Desmos, without the need to carry out the tabulation process. Duval (2006b) alludes that the important thing is not to know which is the best semiotic representation system of a mathematical concept, but rather, to use various and appropriate representation problems to coordinate them with each other, through the support of educational technological tools which allow favor proper management of information processing and stimulate a conversion between the different semiotic systems, which set the tone towards the achievement of understanding.

**KEY WORDS:** comprehension, linear functions, educational technological tools.

## Capítulo 1

### PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

#### 1.1. Introducción

La presente investigación analizó del papel que juega el uso de las representaciones gráficas en el aula como método de enseñanza en las clases de matemáticas, así como el efecto que se tienen en la apropiación de los contenidos al utilizar los recursos gráficos y tecnológicos en las clases. El interés en investigar el tema de la comprensión del comportamiento gráfico de las funciones lineales surge a raíz de mi experiencia personal como alumno durante mi formación académica y de observar la labor docente en educación matemática que he podido constatar a lo largo de mi carrera profesional. En primera instancia logré identificar la dificultad que tienen los alumnos de nivel secundaria por poder aprender conceptos básicos del álgebra, ya que sufren de un conflicto de ideas y percepciones del pensamiento aritmético el cual se ve fuertemente influenciado en los años de su formación académica en el nivel de primaria. Actualmente en el Sistema Educativo Mexicano la SEP (2017) solo plantea el manejo de expresiones algebraicas en algunos temas de sexto grado de primaria mediante el uso de sucesiones de números y de figuras con progresión aritmética y geométrica. De tal forma, que el abordaje de los contenidos de temas algebraicos no es enseñado, sino hasta que el estudiante pasa al nivel de secundaria, lo que repercute en el aprendizaje que llegan a tener los estudiantes por poder comprender el cambio del uso del lenguaje algebraico con respecto a las operaciones aritméticas usadas en años anteriores.

En un segundo momento logré darme cuenta durante mi formación profesional, que hacen falta más esfuerzos para poder brindar y fortalecer a los maestros que se encuentran frente a grupo, para que mejoraran sus técnicas e instrumentos de enseñanza. Muñoz (2008) sugiere que la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas debería ir encaminado a despertar en el estudiante el agrado por descubrir, explorar, conocer y aprender de todo lo que nos rodea, de tal forma que a medida que pase el tiempo el aprendiente logré identificar las relaciones matemáticas implícitas que se logran ver en toda la naturaleza que nos rodea. De esta manera podemos coincidir con la frase del astrónomo Galileo Galilei: “Las matemáticas son el lenguaje con el que Dios ha escrito el universo”.

En un tercer momento, logré identificar a través de mi experiencia como docente en el aula que la manera de favorecer la transición del uso del lenguaje aritmético al algebraico podría

ser por medio del apoyo de las representaciones visuales mediante la graficación de las funciones lineales, dicho tema se ve identificado en varias de las secuencias didácticas de SEP (2019) de segundo grado, los cuales se abordan de una forma mecanizada que no favorece que el alumno identifique la relación que existe entre el objeto matemático (función) y la relación con su representación en la gráfica (plano cartesiano). De esta manera se espera que el estudiante vaya de un lado a otro entre el tipo de representación que se plantea con el valor de la función lineal y su representación semiótica en el plano cartesiano. Todo esto, con la finalidad de favorecer la comprensión de las funciones lineales sin tener que utilizar necesariamente el método de la tabulación para poder graficarlas. El estudio didáctico de esta propuesta promueve la utilización de la modelación matemática, la cual como alude Biembengut y Hein (2004) involucra una serie de procedimientos para poder leer, interpretar, formular y solucionar situaciones.

Por último, en un cuarto momento, para favorecer la representación gráfica de las funciones lineales y aprovechar el tiempo académico en clases se valió del uso de las TAC (Tecnologías de para el Aprendizaje y el Conocimiento), las cuales se emanan de las TIC (Tecnologías de la Información y Comunicación), ya que como alude Lozano (2011) se plantea cambiar el aprendizaje de la tecnología por el aprendizaje con la tecnología, con esto se busca incidir especialmente en los recursos sobre el uso que se le da a la tecnología y las bondades que está tiene para facilitar el aprendizaje. De manera que, para hacer uso de las TAC se utilizaran todos los medios y herramientas tecnológicas disponibles en el área de estudio en el que se aplicara la propuesta didáctica. Algunas de las herramientas tecnológicas que se utilizaran será el proyector, laptops, pantallas y a su vez se reforzaran con el uso de aplicaciones de graficación digital en dispositivos móviles utilizando programas como: GeoGebra, Desmos, entre otros.

## **1.2. Formulación y planteamiento del problema de investigación**

Existe una brecha entre la enseñanza de los contenidos de matemáticas que los estudiantes deberían aprender por razonamiento y de lo que solo realizan por mecanización. Los estudiantes de nivel secundaria generalmente aprenden el tema de la graficación de funciones lineales por medio de la imitación, la cual se da de la siguiente manera: el profesor ejecuta en el pizarrón una demostración de cómo se realiza la tabulación de una función lineal asignándole valores a la variable X para después calcular el valor de la variable Y de manera que se obtengan los valores

de las coordenadas, mismas que luego pasan a ser graficadas en el plano cartesiano, esto sin ningún tipo de interacción recíproca por parte de los estudiantes acerca de lo que representa cada uno de los valores de la función lineal dada. Así, la imitación y repetición es el medio más difundido de la enseñanza de este tema. Duval (2006a) identifica en un estudio realizado que cuando se les pide a los alumnos que realicen tareas de reconocimiento para poder identificar el valor de una función dada de una gráfica, estos mismos presentan dificultades para poder reconocer los sistemas de representación de cada función (Figura 1). Sin embargo, si se les pide a los estudiantes que realicen tareas de lectura, es decir, que construyan a través de una tabla de valores la representación gráfica del valor de una función, ellos lo ejecutan sin ningún problema. Pero, “convertir una representación semiótica en otra no puede considerarse ni una codificación, ni un tratamiento” (Duval, 2006a, p.113). Ya que, realizar tareas de codificación simplemente implica colocar los puntos donde indica la tabla y por su parte, ejecutar tareas de tratamiento involucra a que los estudiantes transiten entre las diferentes rectas de un mismo gráfico, es decir, se mantienen en un mismo sistema de representación semiótico.

Figura 1. Tarea de reconocimiento

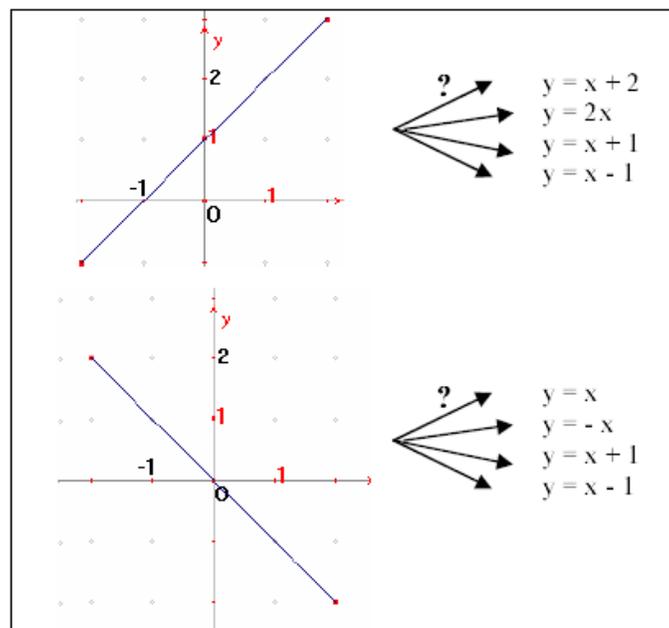


Figura 1. Tarea de reconocimiento en la representación gráfica de una función lineal (Duval, 2006a)

Por esta razón, tal como menciona Radford (2009), nace la necesidad de hacer explícito un modelo de enseñanza que estimule todo el potencial en la plasticidad del cerebro. De esta forma se asegura el pleno desarrollo del aprendizaje de los estudiantes y de esta manera facilitar

la comprensión del comportamiento gráfico de las funciones lineales apoyado por el uso dinámico de las herramientas tecnológicas educativas, dentro de las cuales están incluidas las aplicaciones de graficación digital.

### **1.3. Pregunta de investigación**

- ¿Cuál es el efecto que tiene la aplicación de una secuencia didáctica asistida por el uso de herramientas de graficación digital en la comprensión de las funciones lineales en estudiantes de educación secundaria?

#### 1.3.1. Preguntas específicas

- ¿Cómo puede favorecer el diseño de una propuesta didáctica basada en el desarrollo de actividades mediante el uso de herramientas de tecnológicas educativas en la comprensión de las funciones lineales?
- ¿Cuáles son las características de graficación digital que permiten un aporte hacia la comprensión de las funciones lineales?

### **1.4. Objetivo de investigación**

- Analizar el efecto de la aplicación de una secuencia didáctica basada en herramientas de graficación digital para la comprensión de las funciones lineales en estudiantes de educación secundaria.

#### 1.4.1. Objetivos específicos

- Diseñar una propuesta didáctica que favorezca la comprensión gráfica de las funciones lineales mediante el uso de herramientas tecnológicas educativas.
- Identificar las características de graficación digital que aportan a la comprensión de las funciones lineales.

### **1.5. Supuesto**

El presente trabajo muestra un método de enseñanza para tratar el tema de graficación de las funciones algebraicas, específicamente los que competen a las funciones lineales. Las herramientas tecnológicas educativas hoy en día son utilizadas como un estupendo laboratorio en el cual los estudiantes se pueden apoyar para poder deducir el valor de una función lineal solamente con observar la inclinación de la recta y comparándola con la gráfica de otras funciones para comprender los valores visuales cualitativos que están poseen.

Para esto se utilizarán las herramientas de graficación digital tales como GeoGebra y Desmos los cuales nos ayudarán a que los alumnos por sí mismos puedan comprender de forma intuitiva el comportamiento gráfico de las funciones lineales con base en su inclinación y su corte en el plano cartesiano. Se pretende acompañar al alumno en el tránsito del dinamismo y manipulación gráfica de las funciones lineales con su comprensión, el cual nos servirá de análisis acerca del papel que juega las representaciones visuales en el aula.

### **1.6. Justificación**

El estudio didáctico acerca del uso de las representaciones gráficas en el aula favorece en gran medida la asimilación y comprensión de los conceptos matemáticos de los estudiantes. Esta visión se fundamenta en el estudio del ser biológico y social del ser humano, ya que como lo menciona Arcavi (2003) el nervio óptico contiene más de un millón de fibras en comparación con 50 mil del nervio auditivo, de hecho, sabemos más sobre la función que ejecuta nuestro cerebro en el nervio óptico que sobre cualquier otro sistema sensorial. Por tal motivo, promover el razonamiento y la reflexión sobre conceptos matemáticos mediante la comprensión visual de los objetos matemáticos forma parte de las representaciones semióticas en el desarrollo de las clases de matemáticas. Se requieren más esfuerzos de indagación en el estudio acerca de la dificultad que existe en la transición del aprendizaje de los contenidos aritméticos que se enseñan en el nivel de primaria y los contenidos algebraicos que se enseñan en el nivel de secundaria.

Por tal motivo, se pretende acompañar al alumno en el proceso de la comprensión de las funciones lineales con la asimilación de su representación gráfica en el plano cartesiano asistido por el uso de herramientas tecnológicas educativas, específicamente mediante el uso de aplicaciones de graficación digital tales como GeoGebra y Desmos para así, poder generar una

mayor interacción dinámica y didáctica en el comportamiento de las funciones lineales. La finalidad de esta propuesta radica en un beneficio más amplio, porque se requiere que la matemática sea accesible para todos y cada uno de los estudiantes de nivel secundaria. El beneficio pedagógico será que más profesores contemplen la utilización de esta propuesta didáctica, lo cual logrará cambiar el paradigma con el que habitualmente se enseña el tema de funciones o sistema de ecuaciones lineales. Por último, el estudio de esta propuesta considerara los beneficios didácticos que puede lograr el uso adecuado de las representaciones visuales en las clases lo que conllevara a que más estudiantes logren una mejor comprensión de los contenidos matemáticos y como consecuencia se logré un mejor rendimiento escolar.

## Capítulo 2

### MARCO TEÓRICO

#### 2.1. La enseñanza de las matemáticas en el aula

La tarea del docente en la enseñanza de los temas de matemáticas no es nada sencillo. En primera instancia, requiere de un estudio propio y dominio del contenido, para después poder aplicar diversas técnicas de enseñanza las cuales puedan ser utilizadas por los estudiantes para que se apropien del conocimiento. Esto no es una tarea fácil, ya que requiere de un estudio previo acerca de las formas de aprendizaje. Cabe mencionar que el aprendizaje de las matemáticas muchas veces es abstracto y se requiere la necesidad de utilizar apoyos visuales que permitan el entendimiento del objeto matemático que se estudia. Es por ello que, como menciona Duval (2006) no se puede realizar ningún tipo de procesamiento matemático sin utilizar un sistema semiótico de representación, es decir, lo que importa no son las representaciones matemáticas que se realicen en el salón de clases, sino su transformación e interpretación del objeto matemático en sí. Tradicionalmente la enseñanza de las matemáticas se da de forma lineal, tal como lo señala Balacheff (2000) en el que generalmente se hacen demostraciones o ejemplos de ejercicios en el pizarrón delante de los estudiantes y luego se les pide hacer lo mismo y repetir la acción con otros ejercicios.

De tal forma que la imitación es el medio más difundido de la enseñanza de las matemáticas lo que da como resultado que los estudiantes muestren conciencia de la necesidad de hacer explícito un procedimiento para poder establecerlo en los ejercicios, pero se agobian por su incapacidad de comprenderlo como parte de su proceso formativo del conocimiento. Por tal motivo, se resalta la importancia de hacer una estimulación adecuada y constante de la plasticidad del cerebro que pertenece al tratamiento de la información que pasa a través de nuestros ojos ya que de lo contrario “podemos conjeturar que la enseñanza tradicional no va en la dirección de un crecimiento favorable de las funciones ejecutivas que sirven de fundamento al pensamiento matemático abstracto” (Radford y André, 2009, p. 221).

Podemos afirmar que para asegurar que un alumno haya aprendido un tema o contenido matemático no basta con solo con explicar el conocimiento de este, sino más bien implica la capacidad de crear un tipo de relación con el aprendizaje el cual cause cambios internos o habilidades nuevas en el estudiante. “Enseñar puede equivaler a transmitir solo información, si

por aprender se entiende memorizar esa información” (Saint-Onge y Hurtado, 1997, p. 15). No cabe duda de que el papel que juegan los maestros frente a grupo en las clases es de suma importancia la cual puede o no repercutir en la educación de los aprendientes. Por tal motivo, como menciona Radford (2009) se necesita diseñar un modelo de enseñanza que estimule, adecuada y constantemente la plasticidad del cerebro para explotarla con provecho para que las conexiones neurológicas de integración que pertenecen a la corteza temporal superior alcancen su nivel máximo de desarrollo.

Es por ello que, Ponce de León & Juárez (2023) apuntan a que el uso de representaciones diagramáticas permite al estudiante facilitar sus procesos de comprensión y resolución de los problemas, ya que se logra identificar con mayor facilidad la información que se muestra. El uso de la codificación de la representación gráfica de una función es parte del modelo de enseñanza que propone Acuña (2001), donde menciona que hace falta hacer explícitos los elementos visuales significativos de la recta. Esta codificación proporciona una representación del sistema semiótico, que guía el tránsito entre las representaciones algebraicas y las gráficas de las rectas (Figura 2).

Figura 2. Relación codificada

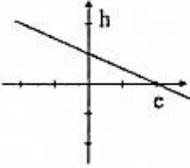
Representación gráfica	Representación algebraica
 <p data-bbox="332 1407 795 1480">Si los puntos <math>(e,0)</math> y <math>(0,h)</math> están sobre la recta, entonces.....</p>	<p data-bbox="836 1207 1291 1270">La ecuación de la recta puede tomar la forma:</p> $y = m x + b \text{ donde } m \text{ es } h / e$ $y \quad b = h$

Figura 2. Relación codificada de las representaciones (Acuña, 2001)

## 2.2.- La teoría de los registros de representación semiótica (TRRS)

De acuerdo con Duval (1999) la representación y la visualización pertenecen al núcleo de la comprensión en matemáticas. Para el autor, el uso de los registros representación son de suma importancia en la enseñanza de las clases, ya que, por ejemplo, para representar los números

naturales, los alumnos se pueden valer de distintos modos, desde utilizar materiales como cerillos, hasta la utilización de puntos o signos (Duval, 2006a). De esta forma, los estudiantes deberán de ser capaces de reconocer el objeto matemático y utilizarlo en diferentes contextos los sistemas de representación.

En el contexto de la resolución de problemas, Duval (1999) distingue dos tipos de representaciones, la interna y la externa. Una representación interna es la forma en que el solucionador de problemas almacena los componentes del problema en su mente; y una representación externa es algo que significa, simboliza o representa objetos y/o procesos, que pueden ser expresados por medio de palabras, diagramas, ecuaciones, gráficos y bocetos. A este último, Duval (2006a) lo define como sistema de representación semiótica, ya que es la coordinación de dos objetos totalmente diferentes, el objeto matemático y la representación que se le asigna a este último a través del uso de los signos.

Se pueden distinguir diferentes sistemas semióticos, pero no todos los sistemas semióticos son, los llamados, *registros de representación*. Para Duval (2006a), en la TRRS existen dos tipos de transformaciones de representaciones semióticas diferentes que resultan obvias en la actividad matemática: *Tratamiento* y *Conversión*. Por un lado, las transformaciones por tratamiento ocurren cuando no hay un cambio de registro, es decir, que las representaciones semióticas ocurren en el mismo registro. En un estudio realizado por Duval en 1988 se identificó que cuando se le pidió a un grupo de estudiantes de entre 15 y 16 años que reconocieran el valor de la función lineal de una gráfica, no encontraron mayor dificultad al elegir las posibles expresiones dadas (por ejemplo,  $y=x$ ,  $y=0-x$ ,  $y=-1x$ ). Pero, cuando se les cambia el sentido de dirección en el registro, la condición que ellos identificaron anteriormente deja de ser suficiente para poder ahora reconocer el valor de la función de la nueva gráfica (Figura 3).

Figura 3. Tarea de reconocimiento

Estudiantes de 15-16 años después de una clase sobre funciones lineales

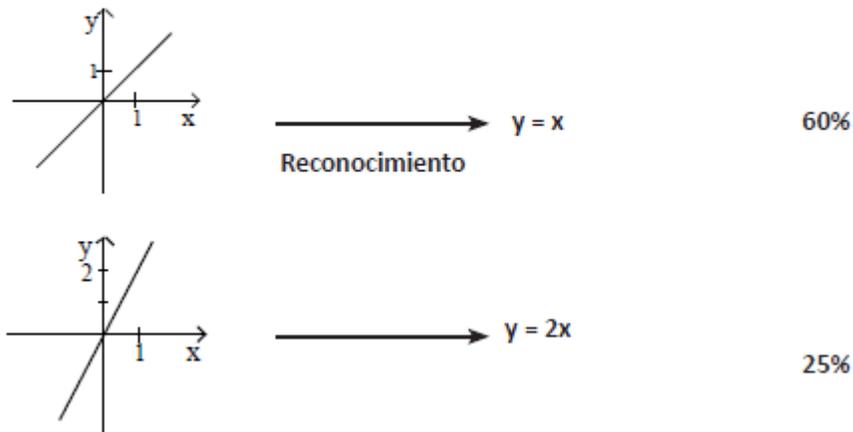


Figura 3. Tarea de reconocimiento. Duval (2006b)

Se deja evidenciado que en una tarea de reconocimiento los alumnos no son capaces de diferenciar las propiedades de los registros de representación semiótica de las gráficas, ya que tal como menciona Duval (2006b), los estudiantes están acostumbrado a tareas de lectura. Por otro lado, se busca que los alumnos utilicen tareas de conversión, para lo cual es necesario usar dos, o incluso tres registros de representación juntos de forma interactiva.

Para poder observar las características semánticas de una función, se tienen que entender algunos aspectos que menciona Duval (2006b), los cuales son: a) la característica visual particular de una función puede ser comparada a través de la oposición de dos gráficas; b) cada característica visual observada se combina con la semántica de la ecuación y no con la función representada; c) es mediante el reconocimiento de estas diferencias visuales, que los alumnos pueden convertir fácil y significativamente gráficas y funciones en los tipos de presentación semiótica que se requiere. Sin embargo, tal como menciona Duval (2006b) existe una tendencia en la forma en que se abordan los contenidos matemáticos en los estudiantes, la cual hace que las representaciones gráficas se presentan a través de la solución de un problema planteado o de un ejercicio en particular y no a través de la comparación de gráficos, los cuales para los estudiantes pueden parecer visualmente semejantes, pero representan funciones totalmente diferentes. Es por ello, que se debe trabajar en la mejora de los procesos de tratamiento del contenido matemático en las representaciones, para que de esta manera la comprensión del conocimiento de los estudiantes pueda darse mediante el proceso cognitivo de la conversión (Duval, 2006b).

Para Duval (2006a), en la TRRS la conversión en el tratamiento de la información es el resultado de la comprensión conceptual. Pero para poder lograr que eso suceda, se deben tener en cuenta varios aspectos, el primero es que el objeto matemático de estudio es intangible, a diferencia de otras disciplinas, como, por ejemplo: la astronomía, la biología y la química; donde los objetos de estudio se pueden evidenciar directa o indirectamente a través del uso de instrumentos. En la matemática, la única manera de poder acceder a esta ciencia es a través de los signos y representaciones semióticas, pero su papel no radica en poder ejemplificarlos, sino más bien en el tratamiento que se realice con ellos. Por ejemplo, el principal papel de los números no es saber representarlos de una manera u otra, sino más bien saber utilizarlos en algoritmos aritméticos o algebraicos. Es por ello, que el manejo de la conversión juega un papel importante en la representación semiótica de las funciones lineales, ya que se busca cambiar de un sistema a otro (gráfico), pero sin cambiar las propiedades matemáticas representadas (Figura 4).

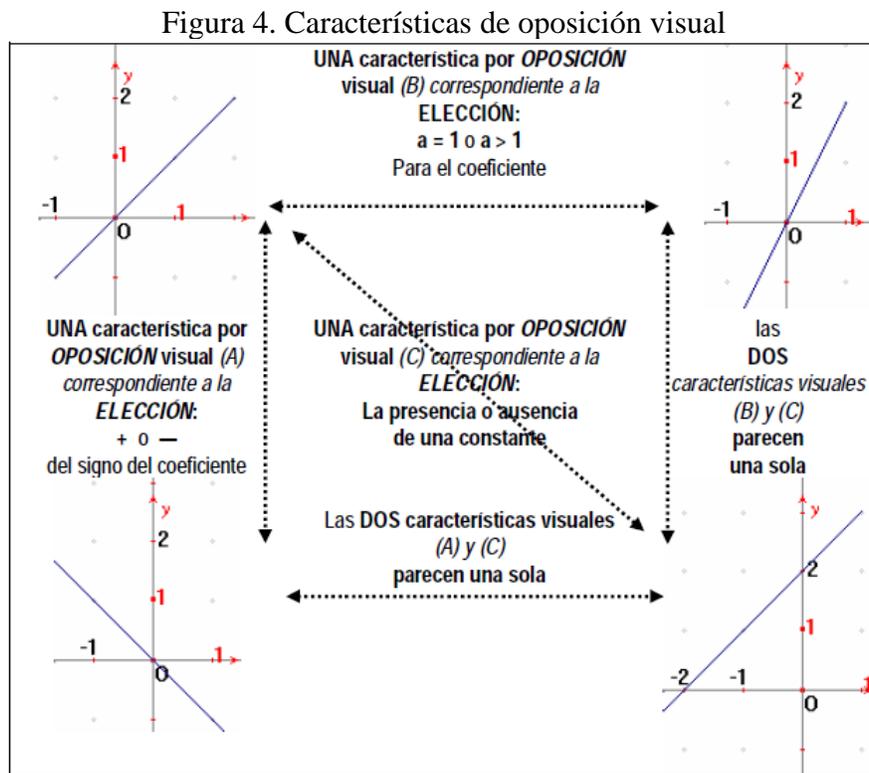


Figura 4. Características de oposición visual requeridas para una conversión entre gráficas y funciones (Duval, 2006a)

En el esquema anterior (figura 4) se puede identificar que existen ciertas características de oposición visual que se realizan para lograr la conversión entre el tratamiento de la

representación semiótica de las gráficas y el valor de las funciones, la cual se da a través de la comparación de las características visuales que se observan entre una representación y otra. De igual forma, lograr una efectiva conversión requiere ir ubicando las características de oposición visual a los cambios que se realizan en las gráficas, como resultado de los cambios en la representación algebraica. Del mismo modo Duval (2016) menciona que solo “a través de los varios tipos de conversiones, más que a través de tratamientos, tocamos la complejidad cognitiva de la comprensión en el aprendizaje de las matemáticas” (p.75).

Duval (2006a) aclara que para que se lograr una comprensión matemática, se requiere de una coordinación interna entre los sistemas de representación semiótica que se desarrollan. Esta comprensión conceptual surge a raíz del desarrollo de poder relacionar diferentes maneras de representar los contenidos matemáticos y no necesariamente de elegir el mejor sistema de representación. Con ello, se busca proponer a los estudiantes tareas que tengan al menos “dos dimensiones semánticas tomando como variable independiente la variación de contenido visual del registro inicial” (Duval, 2006a, p. 160). El uso de esta coordinación de tareas permitirá a los alumnos controlar sus registros de representación semiótica sobre las funciones lineales y el manejo de la conversión de la información según el contexto en el que se le presenta, todo esto en beneficio para poner en evidenciada en una efectiva comprensión conceptual (Figura 5).

Figura 5. Estructura de una tarea de coordinación

Variación según el objeto matemático representado	Representación inicial	Representación final
1. Contexto de un problema o ejercicio		$y = x + 1$ (dato) $0$ $y = \dots$ (escribir la ecuación)
2. Contexto de otro problema o ejercicio		$y = -2x$ (dato) $0$ $y = \dots$ (escribir la ecuación)

Figura 5. Estructura de una tarea de coordinación (Duval, 2006a)

Duval (1995) resalta aspectos importantes en el proceso de visualización de un sujeto, donde describe diferentes tipos de aprehensiones cognitivas al tratar con figuras geométricas. Según el autor, hay varias formas de ver un dibujo o matriz de estímulos visuales, y define cuatro tipos de aprehensiones cognitivas: aprehensión perceptiva, aprehensión secuencial, aprehensión discursiva y aprehensión operativa.

Para la enseñanza de las representaciones de las ecuaciones lineales en el plano cartesiano se requiere el uso de al menos 2 sistemas de conceptualización, uno para la expresión verbal y escrita de las ecuaciones lineales mediante la representación numérica y el otro para la visualización del objeto matemático plasmado en el plano cartesiano. Por lo que, Duval (2006a) hace hincapié en que los estudiantes vayan de un lado a otro entre el tipo de representación que se plantea con el objeto matemático que son las ecuaciones lineales y la asociación visual que forma su representación en el plano cartesiano. Se debe acompañar al alumno para asimile de una forma correcta la conversión congruente del signo matemático con su representación visual, ya que de lo contrario imposibilitara la aprehensión cognitiva del conocimiento matemático.

### **2.3 La secuencia didáctica**

El diseño de la secuencia didáctica está fundamentado por la aportación de Fernández et al. (2002). Para los autores, una unidad didáctica está condicionada por las ideas o formas de pensar de los docentes que la elaboran, por lo cual para su diseño deben de estar contenidas los siguientes elementos en el formato de planeación: título del tema, aprendizaje esperado, recursos didácticos, actividades secuenciales de los alumnos, momentos de la secuencia (inicio, desarrollo y cierre), productos y evaluación. Fernández et al. (2002) proponen un esquema general para la elaboración de una unidad didáctica, los cuales son considerados para el diseño de las actividades de aprendizaje (Figura 6).

Figura 6. Esquema general de elaboración de una unidad didáctica

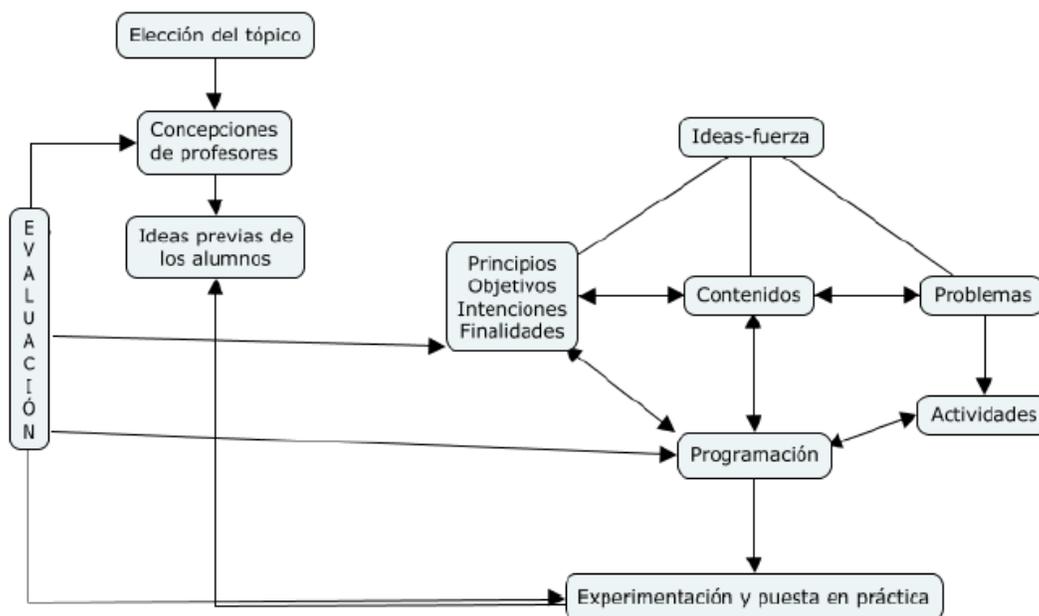


Figura 6. Esquema general de elaboración de una unidad didáctica. Fernández et al. (1999)

El Nuevo Modelo Educativo 2016 (NME) plantea una Reforma Educativa, la cual está basada en el aprendizaje por competencias, misma que propone que el alumno ponga en juego sus conocimientos, habilidades y actitudes frente a la resolución de problemas, para esto pretende eliminar las barreras de aprendizaje que limitan u obstaculizan el aprendizaje constructivista. En esta secuencia didáctica se tomaron en cuenta el diseño de actividades que estén relacionados con el contexto inmediato de los estudiantes, con la finalidad de que estos puedan encontrar un significado a las problemáticas que se les presentan con algunos aspectos de su vida cotidiana con los que interactúan.

Tal como lo menciona la SEP (2011), es muy importante garantizar en nuestras clases que los alumnos vayan encontrándole sentido a lo que aprenden y puedan emplear diferentes recursos, de lo contrario se corre el riesgo de que lleguen a utilizar procedimientos sin saber por qué o para qué sirven. Duval (2006), también concuerda en que, para resolver los problemas de la vida real que se les plantea, se requiere que los estudiantes utilicen sus experiencias y representaciones mentales para poder aplicar los procedimientos matemáticos en dicha tarea. Pero descubrir la operación aritmética correcta y llevarla a cabo requiere de un dominio entre saber escoger el tipo de representación auxiliar que sea idónea para poder plantear y resolver el

problema, además, de saber discriminar la información que se presenta y utilizar la conversión en expresiones simbólicas para después encontrar la solución por medio del tratamiento en la representación de un mismo registro (Figura 7).

Figura 7. Representaciones auxiliares

Las diversas representaciones semióticas necesitadas para plantear el problema (sus condiciones, datos y pregunta) y resolverlo	Tres clases de representaciones auxiliares posibles para resolver el problema	El problema del aprendizaje con el que se enfrenta el profesor
<p><b>FASE I</b></p> <p>Los problemas para aplicar los procedimientos matemáticos en los problemas de la vida real: <i>(problemas verbales con datos, pertinentes o no)</i></p>	<p>A. Dibujos de una situación de la vida real</p>	
<p><b>FASE II</b></p> <p>La conversión en expresiones simbólicas que encajen con el procedimiento matemático pertinente</p>	<p>B. Bidimensional y organización semántica para discriminar lo que es relevante de lo que no lo es en expresiones verbales describiendo la situación</p>	<p>¿Qué tipo de REPRESENTACIÓN AUXILIAR y para qué?</p>
<p><b>FASE III</b></p> <p>Solución por tratamiento (La transformación de representaciones dentro del mismo registro)</p>	<p>C. La visualización matemática para comprender el procedimiento (Las líneas numéricas, los diagramas,...)</p>	

Figura 7. Representaciones auxiliares para resolver problemas de la vida real

El uso de representaciones auxiliares puede ayudar a los estudiantes a entender la forma en que se representa un objeto de estudio. Pero tal como menciona Duval (2006a), lo importante no es saber cuál es la mejor representación semiótica de la información, sino más bien, utilizar las diversas y adecuadas representaciones para coordinarlas. Para poder lograr que los alumnos alcancen una comprensión conceptual del objeto matemático, se necesita la coordinación de los diferentes sistemas semióticos que se plantean.

Para el diseño de la secuencia didáctica, Fernández et al. (1999) recomiendan que se empiece por explicar los conceptos que se abordaran en las actividades. Se busca que, al poder diseñar la procesión de las actividades, se logró un control en la manera de poder dirigir el avance de los aprendizajes por el alumno. Para ello, se tomaron en cuenta cuatro fases para el diseño de esta secuencia didáctica (ver Tabla 1).

Tabla 1. Fases para desarrollar una secuencia didáctica

FASES	ACTIVIDADES
ANÁLISIS	Análisis del perfil del aprendiz y análisis del problema Búsqueda de objetivos de aprendizaje que se ajusten los aprendizajes esperados según el modelo educativo.
DISEÑO	Análisis de la tarea y del contenido Identificar la estructura de los objetos de aprendizaje. Establecer la secuencia de la instrucción Categorizar y especificar los objetos de aprendizaje. Mantener en el diseño del contenido. Modelar al usuario para diseñar la interfaz de los objetivos de aprendizaje.
IMPLEMENTACIÓN	Seleccionar la estrategia para integrar los objetos de aprendizaje en un producto. Seleccionar el modo de entrega más adecuado. Crear un plan de gestión. Ejecutar el producto con la estrategia de entrega seleccionada. Hacer seguimiento del progreso
EVALUACIÓN	Llevar a cabo una evaluación formativa a lo largo de las sesiones de la secuencia didáctica.

## 2.4 Las herramientas tecnológicas educativas

En estos tiempos hemos podido ser testigos del avance tecnológico que se ha tenido con la modernización de las máquinas, las nos sirven día a día para facilitarnos diversas tareas cotidianas que no se podrían hacer fácilmente. Por ejemplo: en el área de la salud se utilizan máquinas para los rayos X, ultrasonidos, entre otros; en la industria el avance de las máquinas automatizadas permite que la producción sea más eficiente, de mejor calidad y aún menor precio; así también en el área educativa, la transformación tecnológica nos ha permitido avanzar en la creación de oportunidades en la transferencia de información, a grandes velocidades y en cantidades cada vez mayores (López et al., 2013). Así, las oportunidades pedagógicas en el uso de las TIC son muy amplias y diversas, por lo que la aplicación de las herramientas tecnológicas con los objetos de aprendizaje cobra especial importancia hoy en día en la enseñanza de las clases de matemáticas.

López et al. (2013) menciona que las características de un objeto de aprendizaje podrían resumirse en que su contenido será educativo, deberá ser reutilizable, modificable, interactivo, con formatos y caracterización estandarizados. Por lo que Lozano (2011), hace hincapié en utilizar de forma óptima el uso de las Tecnologías del Aprendizaje y el Conocimiento (TAC) los cuales pueden servir de apoyo para facilitar los procesos de enseñanza y aprendizaje en los salones de clase.

## Capítulo 3

### MARCO METODOLÓGICO

#### 3.1 Paradigma de investigación

El paradigma de investigación según Escudero (2015) se define como una forma particular de entender la realidad que se analiza, tanto por parte del investigador como por la comunidad científica a la que este pertenece, lo cual da sentido al tipo de conocimiento que se pretende crear y a la comprensión del mundo que intenta observar e interpretar. Es entonces, que el paradigma debe estar intrínsecamente relacionado con cada uno de los aspectos de la investigación: planteamiento del problema, los objetivos, el marco teórico y la metodología. Por ello, se eligió para esta investigación el paradigma interpretativo, puesto que su finalidad es interpretar, comprender y describir los fenómenos educativos a partir de los significados que tienen los alumnos de las representaciones gráficas de las funciones lineales y su relación con las representaciones semióticas del objeto de estudio. Lo que conlleva a identificar la calidad del aprendizaje que obtienen los alumnos.

Ahora bien, Escudero (2015) menciona que la perspectiva ontológica se refiere a la interpretación particular que el investigador hace de la realidad, la forma en la que la enfrenta y lo que considera posible saber sobre ella. Por tal motivo, se adopta un enfoque ontológico relativista, entendido como el que interpreta los fenómenos sociales y su significado en un proceso de definición constante por parte de los actores sociales, además de verlos como construcciones sociales soportadas sobre la base de las percepciones y acciones de los participantes, es decir, lo que actualmente conocemos como constructivismo. Para ello debemos de tener en cuenta la realidad que tiene nuestros estudiantes de los objetos de estudio y los significados que se construyen al momento de realizar la propuesta didáctica.

En cuanto a la perspectiva epistemológica, nos referimos al conocimiento que resulta de la investigación, a cómo podemos conocer la realidad y a cuál es la base de ese conocimiento (Escudero, 2015). Estas perspectivas nos permiten entender la naturaleza de la relación entre lo que se sabe y lo que se puede saber o lo que es posible saber sobre la realidad que se estudia. Por lo tanto, el presente trabajo se basa en el enfoque epistemológico del interpretativismo, a través del cual se interpretan y reconstruyen los significados implicados en el proceso en el que el

estudiante adquiere el conocimiento, para lo cual se debe tener muy en cuenta la relación que se tenga entre el investigador y el o los investigados.

Por último, la perspectiva metodológica se define como la toma de decisiones en cuanto a las formas de proceder, para intentar dar respuesta a las preguntas de investigación y así alcanzar los objetivos trazados (Escudero, 2015). Se refiere a cómo se construye conocimiento respecto de la realidad que se analiza y a la manera en que puede obtenerse dicho conocimiento. Por ello, es de suma importancia recabar de forma coherente la información que se obtenga de la interpretación de la realidad o los objetos de estudio que tienen los estudiantes acerca de la propuesta didáctica que se les planteara.

### **3.2.- Método**

Para iniciar con el estudio de esta propuesta didáctica, se planteó realizar el estudio instrumental de casos de Stake (1999), el cual fue dividido en 2 fases, el primero fue la observación de la aplicación de la secuencia didáctica la cual fue efectuada en parejas para facilitar el trabajo colaborativo, lo que permitió la manipulación de un equipo de cómputo con las hojas de trabajo de la secuencia didáctica. En una segunda fase se efectuaron entrevistas semiestructuradas a un grupo reducido de 5 alumnos, los cuales nos ayudaron a recopilar con mayor detalle el análisis de la observación de la secuencia didáctica.

La investigación se realizó desde un enfoque de tipo cualitativo, ya que se pretende comprender los fenómenos o situaciones que realicen los participantes en un ambiente natural de trabajo y en concordancia con su contexto, el cual sea lo más real posible al trabajo que realizan diariamente los estudiantes en la escuela (Sampieri, et. al. 2014). Este trabajo tuvo como objetivo principal el diseño e implementación de una propuesta didáctica que favorezca la comprensión gráfica de las funciones lineales, para ello fue necesario identificar, tal como menciona Duval (2006) las representaciones semióticas que hacen los estudiantes al observar el objeto matemático en sí, con los sistemas de presentación lineal de las gráficas. Es por ello que, el tipo de investigación cualitativo contribuye a analizar las respuestas que generan los estudiantes al realizar las actividades de la secuencia didáctica las cuales se pretenden se realicen en un ambiente armónico y óptimo para la mejora de los resultados. Las categorías de análisis que se estudiaron en esta secuencia didáctica son: la comprensión de la representación de una función

lineal, el tratamiento de los valores de la gráfica con respecto al valor de la función y la conversión entre el cambio de representación semiótica de la función lineal.

### **3.3.- Sujetos**

El grupo de informantes estuvo conformado por 10 estudiantes de tercer año de educación secundaria, de los cuales sus edades oscilan entre los 13 y 14 años, la escuela tiene la modalidad de pertenecer al sistema de telesecundaria, la cual se encuentra ubicada en la comunidad de Vicente Guerrero, del municipio de Chilchotla, Puebla, por lo tanto cabe recalcar que el grupo de estudio al que se le aplicó la propuesta didáctica se encuentra en una zona rural de alta marginación, los cuales no cuentan con todos los servicios públicos como son: drenaje, agua potable, red de internet, entre otros. Aunque, como se encuentra en una zona de paso hacia otras comunidades, las comunicaciones viales les permiten poder trasladarse de un sitio a otro para estudiar, trabajar o poder tener un rato de esparcimiento con la familia.

Cabe destacar que los informantes fueron seleccionados a partir de una muestra intencional, ya que, por las características de la escuela, esta solo cuenta con un grupo reducido de alumnos por grado escolar, lo que nos indica que sería del todo favorable la aplicación de la propuesta a los 12 alumnos que componen el grupo de 3° A.

La mayoría de los alumnos cuentan con dispositivos móviles lo que permite tener una comunicación efectiva con ellos. Cabe resaltar que recientemente la escuela muestra fue beneficiada con el programa federal “La escuela es nuestra” con el cual se pudo mejorar la infraestructura de la institución y a su vez dotar con equipos de cómputo, pantallas, proyectores, bocinas y red de internet los cuales servirán para el aprovechamiento de las clases y de la puesta en marcha de la propuesta didáctica.

### **3.4.- Descripción de los instrumentos de recolección de datos en el desarrollo de la investigación.**

Una vez seleccionado el paradigma de investigación y especificado el método de investigación, se eligieron las técnicas e instrumentos para la recolección de datos acordes con el enfoque cualitativo. Estos fueron las pruebas diagnósticas, el análisis de la aplicación de la secuencia didáctica, la cual fue apoyada por el uso de diversas herramientas tecnológicas, como, por

ejemplo: el proyector o televisor en el aula y la utilización de los equipos de cómputo para la manipulación de las aplicaciones de GeoGebra y Desmos, los cuales fueron de gran utilidad para facilitar la graficación de las funciones lineales. Finalmente, para la aplicación de las entrevistas semiestructuradas se escogió a un grupo de alumnos, que fueron previamente elegidos (Anexo 1). Para la recogida y recolección de datos se tomaron en cuenta las sugerencias planteadas por Rodríguez et al. (2022) en el apartado de instrumentos, datos e información. Como, por ejemplo: estar atentos a que un mismo conjunto de datos podría dar origen a otras nuevas investigaciones según el enfoque desde el que se analice.

Cabe señalar que en el libro de texto para el alumno de educación secundaria (Sep, 2017) se define a la función como la relación de dependencia que existe entre dos variables, “porque a cada valor asignado a la variable independiente le corresponde un único valor de la otra variable, la cual es dependiente de la primera” (p52). Además, cuando se aborda el tema de graficación de ecuaciones lineales, se precisa que existen dos tipos de funciones que gráficamente se representan con líneas rectas, las cuales están dadas por la forma  $y = ax$  que representa una variación lineal proporcional y la forma  $y = ax + b$  que representa una variación lineal no proporcional. Por lo que la propuesta didáctica que se desarrolló aborda la temática de las funciones lineales y afines para poder potencializar los contenidos que se abordan en clases con los libros de texto.

En el inicio del estudio se aplicó una prueba diagnóstica que consistió en la resolución de un problema matemático contextualizado el cual está relacionado con el tema de las funciones y se analizaron las preguntas que los estudiantes respondieron al planteamiento del problema. (Figura 8).

Figura 8. Problema de función lineal

1. Trabajen en pareja las actividades de esta sesión. Amalia y su madre se mudan de Tijuana a Cancún. Para ello, consultan la página de la Secretaría de Comunicaciones y Transportes y encuentran una ruta que implica recorrer 4 350 km. Trazan la gráfica que ves aquí y que representa el kilometraje que recorrerán por cada hora de viaje si mantienen una velocidad constante. Con base en ella, respondan las preguntas que aparecen enseguida.

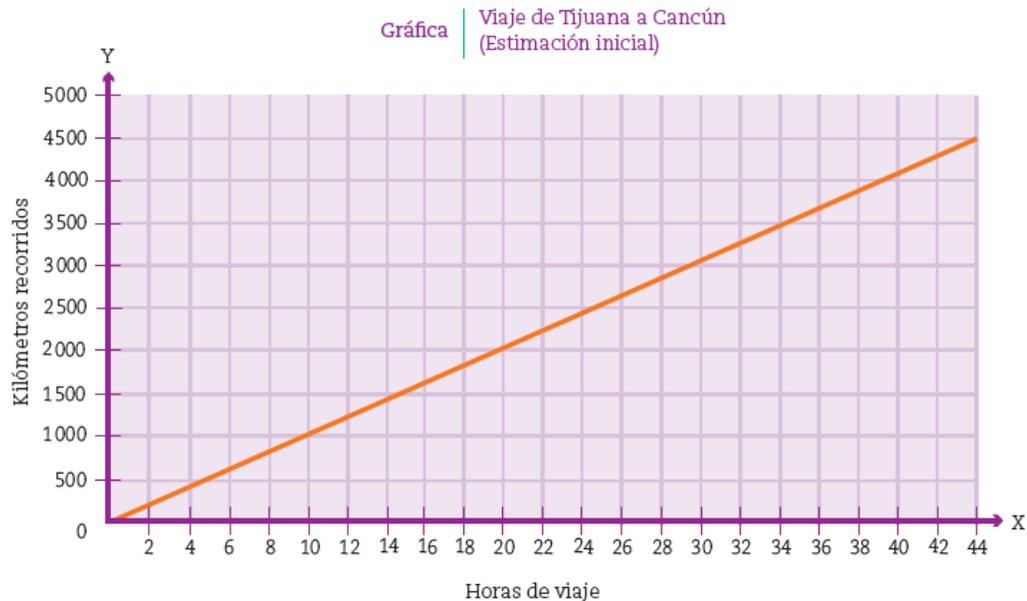


Figura 8. Problema de función lineal. SEP (2019)

Después, se les aplicó una prueba utilizando un video multimedia acerca del llenado de diferentes recipientes, para lo cual se les pidió que relacionaran la gráfica que correspondía con el llenado de cada uno de los recipientes (Figura 9). En esta aplicación se obtuvieron resultados, los cuales sirvieron de análisis para acotar el marco teórico de la investigación, para ello se identificó la presencia de los tipos de aprehensión cognitiva de Duval (1995), que se organizan en cuatro indicadores para cada una de las diferentes maneras de visualización de la geometría de los estudiantes (Tabla 2).

Figura 9. Video Multimedia sobre el llenado de recipientes

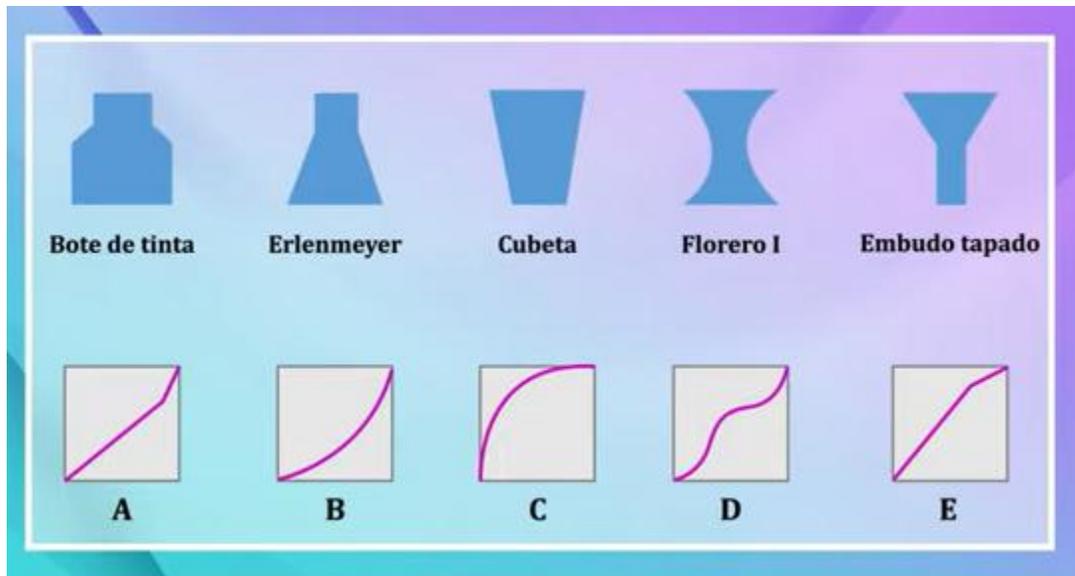


Figura 9. Video Multimedia sobre el llenado de recipientes. SEP (2019)

Tabla 2. Tipos de aprehensión cognitiva de Duval (1995)

Cuatro aprehensiones cognitivas de Duval		Indicadores de presencia en los alumnos
Aprehensión perceptiva	Responde a las leyes de organización figurativa e identificación de la forma	El estudiante es capaz de reconocer figuras geométricas planas, como cuadrados, triángulos, círculos, a partir de la figura compuesta presentada en el problema.
Aprehensión secuencial	Se requiere cada vez que uno debe construir una figura o describir su construcción. Aquí las subfiguras emergen en un orden específico, dependiendo de la construcción geométrica, de las limitaciones técnicas del	El estudiante es capaz de construir una figura geométrica, a partir de las figuras observadas y las propiedades matemáticas que dominen hasta ese momento.

	instrumento utilizado y de las propiedades matemáticas	
Aprehensión discursiva	Son las indicaciones dadas a través del habla nos ayudan a identificar propiedades de una figura geométrica percibida.	El estudiante es capaz de expresar las propiedades que reconoce de las figuras geométricas asignadas, así como su interpretación.
Aprehensión operativa.	Esta aprehensión depende de diferentes formas de modificar una figura que ocurren solo dentro del registro figural y que son independientes del conocimiento matemático.	El estudiante es capaz de reconfigurar el registro figural, manteniendo las propiedades identificadas en el escaneo visual.

Ahora bien, en relación con el análisis de la prueba diagnóstica que se aplicó, se diseñó una secuencia didáctica basada en el esquema general de una unidad didáctica sugerida por Fernández et al. (1999). Esta práctica fue asistida por las plataformas de graficación digital tales como GeoGebra, Desmos, así como de PowerPoint el cual sirvo de gran ayuda para la puesta en marcha del inicio de la secuencia didáctica.

### 3.5. Secuencia Didáctica

Con base en la propuesta del diseño de una unidad didáctica de aprendizaje según Fernández et al. (1999), se consideraron varios aspectos los cuales ayudaran a lograr un efecto positivo en los estudiantes, para ello se tomaron en cuenta las categorías de análisis las cuales son: la comprensión de la representación de una función lineal, el tratamiento de los valores de la gráfica con respecto al valor de la función y la conversión entre el cambio de representación semiótica de la función lineal. Por lo que la interacción dinámica y didáctica, de programas de graficación digital tales como: GeoGebra y Desmos, ayudarán a facilitar la construcción de las funciones lineales, ya que como menciona Lozano (2011) se pretende favorecer el aprendizaje a través del uso de las herramientas Tecnológicas del Aprendizaje y el Conocimiento (TAC), las cuales a través se verán favorecidas mediante su manipulación real y fluida dependiendo del valor que se inserte en la función del graficador.

### **3.6. Evaluación**

La evaluación es parte fundamental en la elaboración de la unidad didáctica, ya que para Fernández et al. (1999) este elemento debe ser la dirección por la que debe centrarse el diseño de las actividades, de este modo se debe adoptar la evaluación desde un enfoque formativo para el alumno, que sirva como proceso para la mejora de los aprendizajes esperados. A su vez, se enfatiza que se tomaron en cuenta los productos elaborados por los alumnos, los cuales forman parte fundamental de la evidencia de las actividades de la secuencia, los cuales nos sirven para medir el alcance los aprendizajes esperados. Para ello se tomará en cuenta el esquema de la Figura 5, la cual servirá de base para tomar en cuenta cada uno de los aspectos que los autores proponen, así como enfatizar que la etapa de la evaluación está presente en cada uno de los procesos del diseño y experimentación de la secuencia didáctica.

### **3.7. Recursos didácticos**

Estos recursos son los indicadores o instrumentos que nos permitirán conocer lo que se pretende realizar en cada una de las actividades, así como las características de los materiales y las instalaciones que se necesitan para la implementación. Por tal motivo, es importante diferenciar los tipos de recursos didácticos que denomina Fernández et al. (1999), entre los cuales se encuentran:

- Los relacionados con las fuentes de información. – Documentos, bibliografía, libros de texto, material audiovisual (diapositivas, videos, programas, etc.)
- Los relacionados con la dinámica de trabajo. – Recurso metodológico, tal como la planeación que sirve de guía en las actividades de la secuencia didáctica; materiales necesarios para la dinámica del grupo, tales como libreta, pluma, lápiz, colores, entre otros; Materiales específicos para el trabajo en el aula, tales como las actividades impresas; Mobiliario en el aula, tales como las butacas, proyectores, computadoras, entre otros.

### **3.8 Planeación de la Secuencia Didáctica**

Tema: Funciones lineales

Objetivo General: Facilitar la comprensión del comportamiento gráfico de una función lineal mediante el uso e interacción de algunas herramientas tecnológicas educativas.

Aprendizaje esperado: Lee y representa, gráfica y algebraicamente, funciones lineales.

Intención Didáctica: Facilitar el tránsito entre el registro y las representaciones gráficas de las funciones lineales.

Fases de desarrollo: El desarrollo de la secuencia didáctica estará gradualmente marcado por el inicio, desarrollo y cierre, para poder ir involucrando al estudiante en el uso y manipulación de algunas aplicaciones y herramientas tecnológicas tales como: GeoGebra y Desmos, los cuales ayudaran a facilitar el proceso de comprensión del comportamiento gráfico de la función lineal.

### 3.8.1 Sesión 1 Introdutoria: Función lineal y afín.

Objetivo: Identifica los cuadrantes en un plano cartesiano y la diferencia de una función lineal de una afín.

Actividades:

La instrucción del alumno es:

- ✓ Realiza en PowerPoint el juego de batalla naval en equipos para identificar y recordar los cuadrantes o puntos en un plano cartesiano (Figura 10).

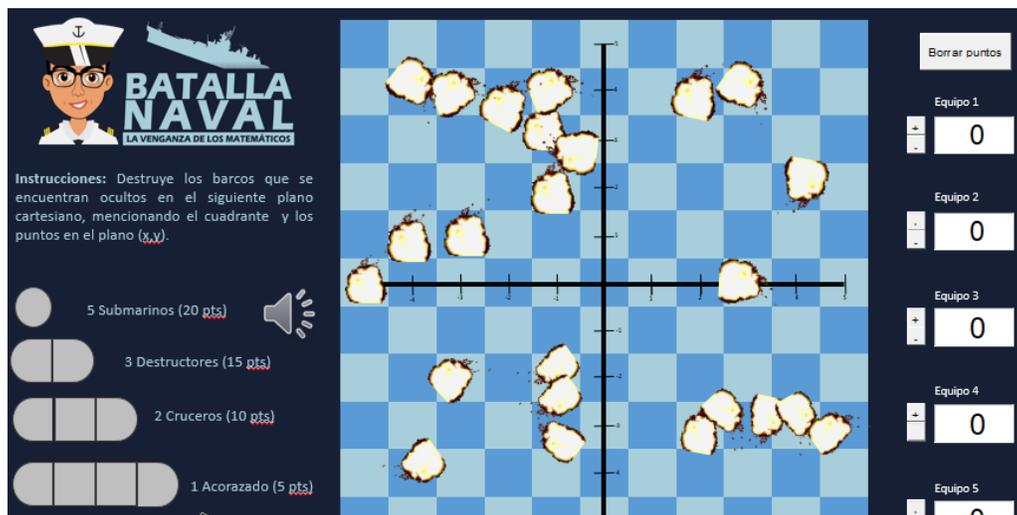


Figura 10. Juego de batalla naval diseñado en PowerPoint

- ✓ Observa el video de YouTube: ¿Funciones matemáticas en la vida diaria?; para entender el tema de funciones y después comenta de manera grupal el concepto de función. (link del video: <https://www.youtube.com/watch?v=-YCr-fmS-Q>)
- ✓ Utiliza las hojas de trabajo para identificar algunas funciones contextualizadas y al final responde las preguntas que se te plantean (Figura 11).

Figura 11. Funciones en la vida cotidiana

## FUNCIONES EN LA VIDA COTIDIANA

1) Existe una relación entre el número de megabytes que utilizamos cuando utilizamos el servicio de internet y el monto de dinero que debemos pagar. En cierta compañía si utilizamos un megabyte debe pagar \$0.80, si utilizamos 2 megabytes \$ 1.60, y así sucesivamente.

Esta situación se puede representar como una función que relaciona la variable «número de megabytes utilizados» con la variable «monto que pagamos a la compañía».



En este caso, el número de minutos hablados será la variable independiente  $x$ , y el monto que cancelaremos será la variable dependiente  $y = f(x)$ , porque depende del número de minutos que hablamos.

Al representar esta situación como una función tenemos:

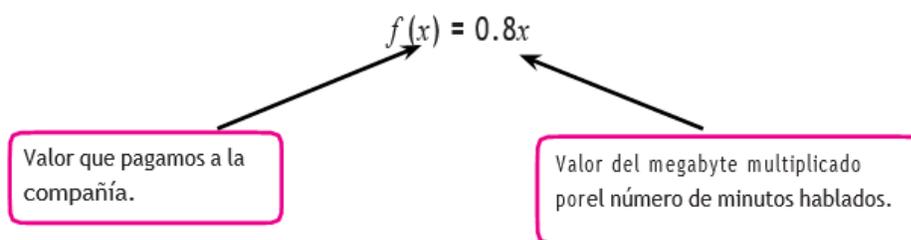


Figura 11. Funciones en la vida cotidiana. Huircán y Carmona (2013)

Con el desarrollo de esta actividad se espera en una primera instancia recuperar conocimientos previos acerca del uso de coordenadas en el plano cartesiano, después, introducir al estudiante en el tema de las funciones lineales relacionadas con problemas de la vida cotidiana. El desarrollo de estas actividades está basado en el trabajo de Huircán y Carmona (2013), en el cual se presenta la definición de una función lineal y una afín con ejemplos contextualizados de esta manera se puede empezar a trabajar con el desarrollo de los conceptos de las funciones, así como el efecto que produce en los estudiantes el poder relacionar problemas contextualizados con el uso de la graficación de una función lineal.

### 3.8.2 Sesión 2 Desarrollo: Pendiente de una recta

Objetivo: Identifica el concepto y la inclinación de una pendiente a partir de su inclinación en el plano cartesiano.

La instrucción del alumno es:

- ✓ Socializa de forma grupal el concepto acerca de la pendiente de una recta y explica algunos ejemplos.

- ✓ Utiliza la aplicación de GeoGebra para identificar de manera visual las características en común que tienen distintos grupos de gráficas con su expresión algebraica y anota en las expresiones en la aplicación para que las grafique automáticamente. Después contesta las preguntas que se te plantean en las hojas de trabajo para su análisis y socialízalo con el grupo (Figura 12).

Figura 12. Pendiente de una recta

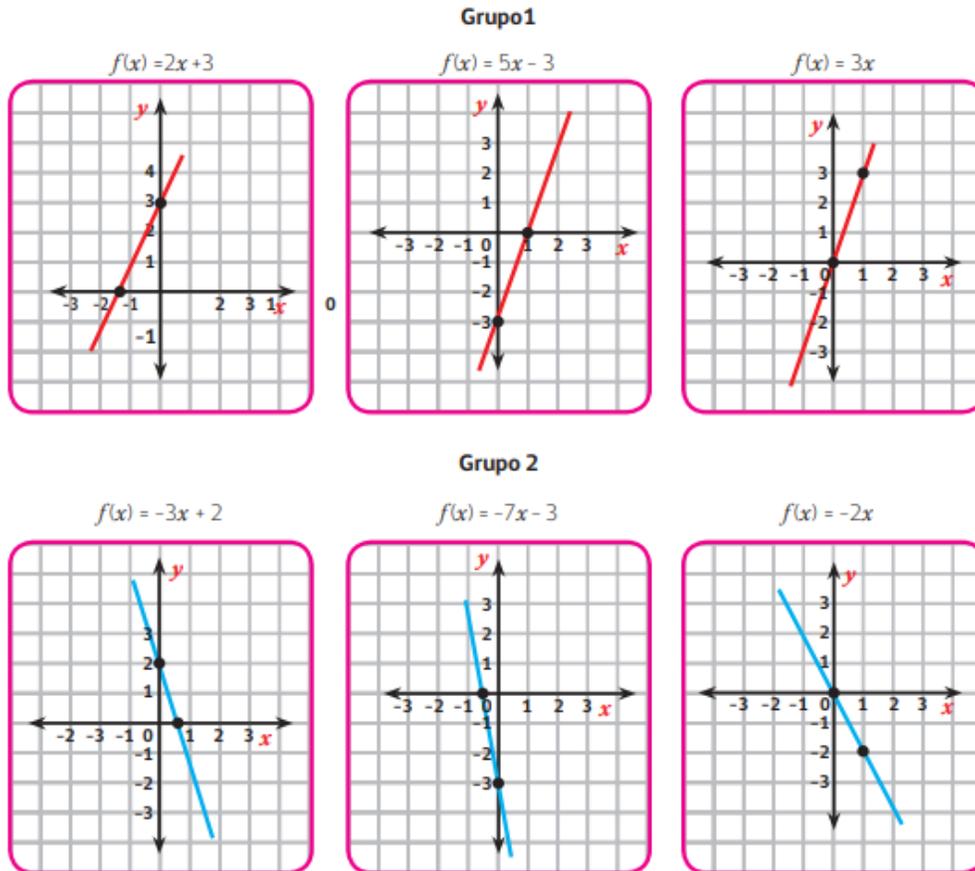


Figura 12. Pendiente de una recta. Huircán y Carmona (2013)

Preguntas:

1. ¿Qué tienen en común las pendientes de las funciones del grupo 1?
2. ¿Qué tienen en común las pendientes de las funciones del grupo 2?
3. ¿Qué relación observas entre las gráficas y sus pendientes con respecto a la función?
4. ¿Cuándo una función es negativa?
5. ¿Cuándo una función es positiva?

A partir del desarrollo de esta actividad se espera que el alumno diferencie la inclinación de la pendiente de una función, a partir, del valor del coeficiente de posición que se le asigna a los términos del valor independiente, de tal forma que se aprecie visualmente la diferencia de la inclinación de la pendiente de diferentes funciones lineales.

### 3.8.3 Sesión 3 Conclusión: Función lineal y afín

Objetivo: Manipular los valores de una función lineal para contextualizarlos al resolver un problema presentado.

La instrucción del alumno es:

- ✓ Utiliza la aplicación de Desmos para lanzar un avión la cual pase por los puntos señalados en el plano cartesiano, para ello deberás escribir y modificar el dominio de la función para lograr alcanzar el objetivo de cada ejercicio. Posteriormente anota en tu hoja de trabajo la diferencia entre una función lineal y una afín (Figura 13).
- ✓ Compara tus funciones con los demás compañeros y corrobóralos de forma grupal con tus demás compañeros graficándolos con ayuda de la plataforma de Geogebra.

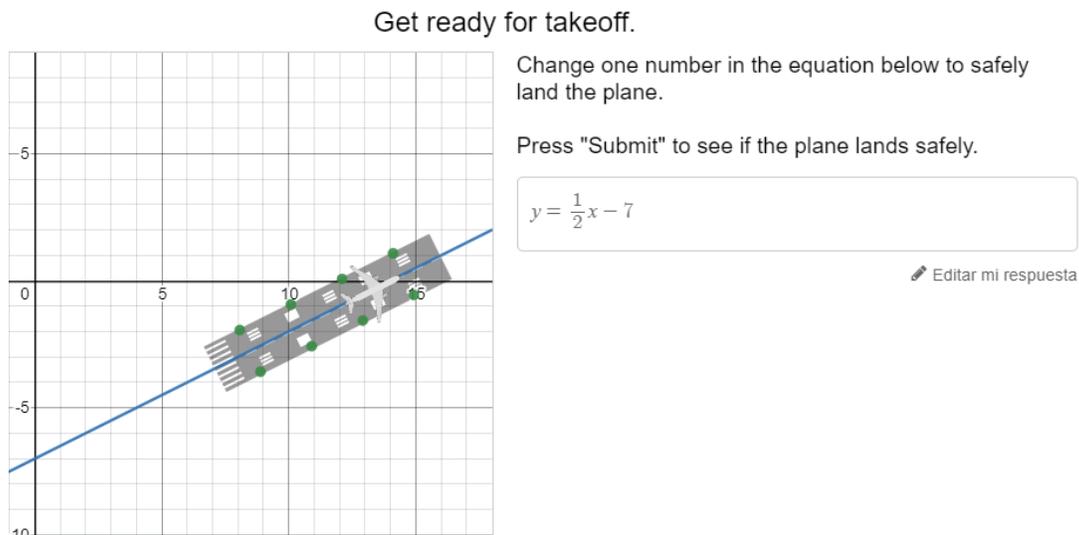


Figura 13. Aterrizaje del avión. Desmos

Al término de esta secuencia didáctica se espera que los estudiantes utilicen el cambio del dominio de una función lineal para poder corregir el rumbo, dirección e inclinación de la pendiente dada en el aterrizaje del avión, de tal forma que puedan lograr aterrizar con éxito, indicando el valor de la función lineal.

## Capítulo 4

### ANÁLISIS DE RESULTADOS

#### 4.1. Diagnostico preliminar

Después de haber aplicado la secuencia didáctica se procedió a la recolección de los productos elaborados por los estudiantes, para poder hacer el análisis cualitativo de dichos resultados. Cabe destacar que se mostró un buen desempeño por parte de los aprendientes para el desarrollo de cada una de las actividades, por ejemplo, para la actividad inicial del juego de batalla naval, los jóvenes pudieron recordar el tema de puntos cardinales a través de la manipulación de las coordenadas que mostraban en el programa de PowerPoint. Esta actividad fue un buen punto de partida, ya que se pudo retroalimentar el tema de ubicación de las coordenadas en el plano cartesiano, con lo cual se evita un posible obstáculo en la realización de las actividades de la secuencia didáctica. La actividad inicial de Batalla Naval fue desarrollada y ejecutada en el programa de PowerPoint bajo una computadora, para después ser plasmada en un proyector dentro del salón de clases para que todo el grupo de alumnos tuviera una buena visibilidad y pudieran participar en la dinámica (Figura 14).

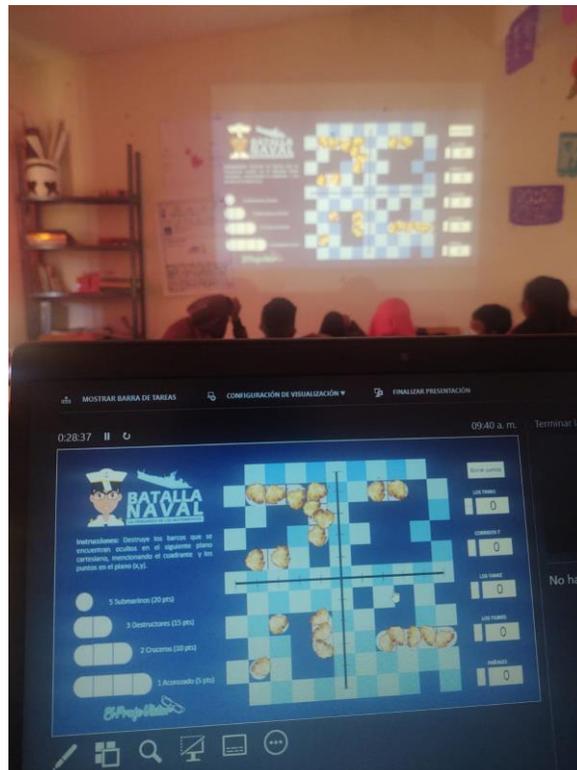


Figura 14. Actividad grupal de batalla naval ejecutada en PowerPoint

Al término de la elaboración de los productos del desarrollo de las actividades de la secuencia didáctica, se procedió a su recolección y discriminación, para poder clasificar cada una de las actividades en las tres categorías de análisis que se establecieron, las cuales recordemos son: comprensión de la representación de una función lineal, tratamiento de los valores de la gráfica con respecto al valor de la función y conversión entre el cambio de representación semiótica de la función lineal. Con ese mismo parámetro se procedió a calificar bajo una rúbrica de análisis, las respuestas dadas por los estudiantes a los que se les aplicó la entrevista semiestructurada, recordando que estos se eligieron de manera aleatoria, de tal forma que se entrevistara un representante de cada equipo de trabajo que se realizó la secuencia didáctica. La siguiente gráfica muestra los resultados encontrados en las respuestas dadas por los estudiantes y comparadas con los productos elaborados por cada uno de los cinco equipos de trabajo en los cuales se midió el nivel de presencia o de representación semiótica dependiendo cada categoría de análisis, los cuales fueron evaluados mediante una rúbrica de valoración (Anexo 2). En este aspecto, la primera barra representa la existencia de una baja o nula presencia de comprensión de la representación de la función lineal, la segunda barra una mediana o parcial presencia y la tercera una alta demostración de presencia de comprensión (Figura 15).

Figura 15. Gráfica de presencia de los niveles de comprensión

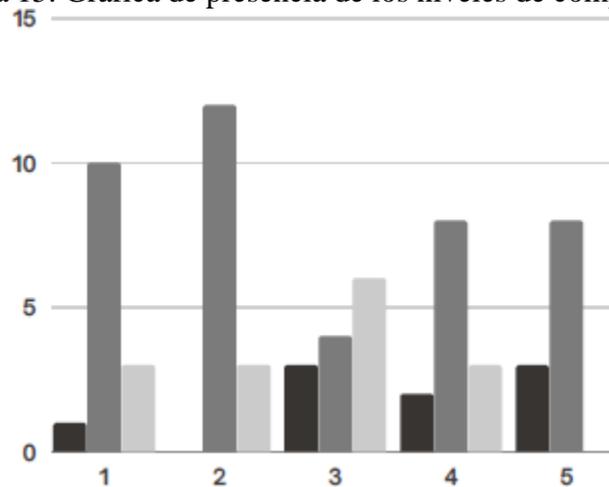


Figura 15. Gráfica de presencia de los niveles de comprensión de la representación de una función lineal

Esta clasificación permitió establecer una comparativa de estudio para determinar el nivel de avance en la comprensión semiótica de los registros de representación de las funciones lineales

en los estudiantes con respecto a las categorías de análisis y el objetivo principal de este estudio. Para ello, se presentarán algunas de las evidencias principales de los productos elaborados por los equipos de trabajo con su explicación de análisis. Cabe señalar que los nombres de los estudiantes fueron cambiados por un pseudónimo con el fin de proteger sus datos personales.

Para el desarrollo de la explicación de los productos elaborados y las respuestas dadas en las entrevistas, se abordarán las evidencias clasificadas en las categorías de análisis que se establecieron. Para ello, empezaremos con las evidencias de la primera categoría la cual es la comprensión del comportamiento gráfico de la función lineal, la segunda es el tratamiento de los valores de la gráfica con respecto al valor de la función y la tercera es la conversión entre el cambio de representación semiótica de una función lineal. A continuación, se mencionarán en cada apartado los equipos de trabajo que elaboraron los productos y algunos extractos de entrevista que se le realizó a un representante de cada equipo.

#### 4.2 El caso del equipo de Alma

. La primera actividad fue definir las operaciones básicas que se tienen que hacer al establecer una función dada (Figura 16).

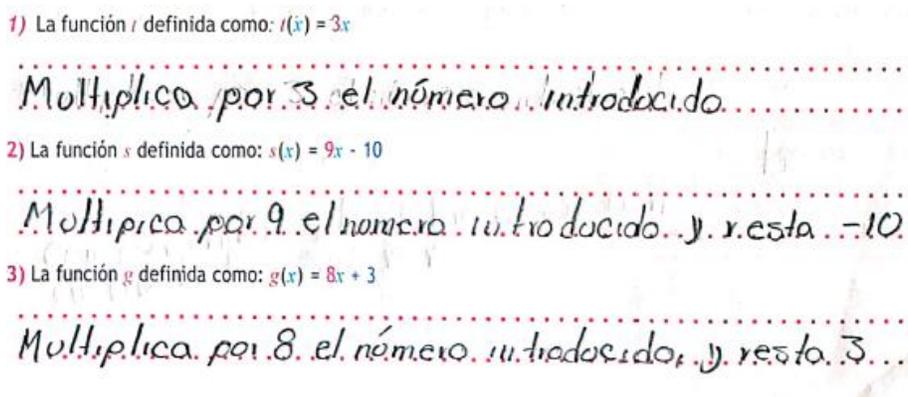


Figura 16. Identificación de las operaciones que se realizan en una función

En esta actividad se muestra el uso del lenguaje aritmético como medio introductorio para adentrarse en el tema de la representación algebraica de una función lineal. El equipo logra identificar con claridad las partes que componen a una función, anotando en forma multiplicativa el valor del coeficiente de posición y como suma y resta el valor del término independiente de la función afín, la cual más adelante se desarrollará en la secuencia didáctica.

Otro dato relevante, es la parte de la entrevista semiestructurada, en la cual se ve reflejada parte del aprendizaje del estudiante con respecto al concepto de función lineal, en los fragmentos de las entrevistas se señalará con una “P” al profesor y “A” al alumno.

*P.- ¿Para ti qué es una función lineal?*

*A.- Una función lineal es cuando, este, una sucesión va en orden, por ejemplo, de 3 en 3, o de 2 en 2, para que en la gráfica se puede hacer una función lineal.*

*P.- ¿Cuál es la diferencia entre una función lineal y una afín en su representación en la gráfica?*

*A.- Una afín empieza de diferentes puntos y su sucesión no es como de 3 en 3, o así números que se puedan... proporcional, mientras la lineal si es proporcional porque va de 2 en 2, 3 en 3, 5 en 5 y así.*

En este fragmento se puede identificar que el estudiante tiene una noción de lo que para ella significa una función lineal, aunque aún no logra definir claramente el concepto, sí logra explicar con sus propias palabras algunos de ejemplos de la diferencia entre función lineal y una función afín. Por ejemplo, menciona que una función afín empieza en diferentes puntos y lo que probablemente quiso decir, es que su representación en la gráfica no corta en el origen. Además, mencionó que una función lineal es proporcional porque va en seriación. Y efectivamente una función lineal si es proporcional y una función afín no lo es.

Para exponer las evidencias de los productos elaborados de la segunda categoría de análisis, identificaremos las muestras donde se evidencia la presencia del tratamiento de los valores de la gráfica con respecto al valor de la función. Con ello, se elaboró el siguiente producto que forma parte del desarrollo de la secuencia didáctica (Figura 17).

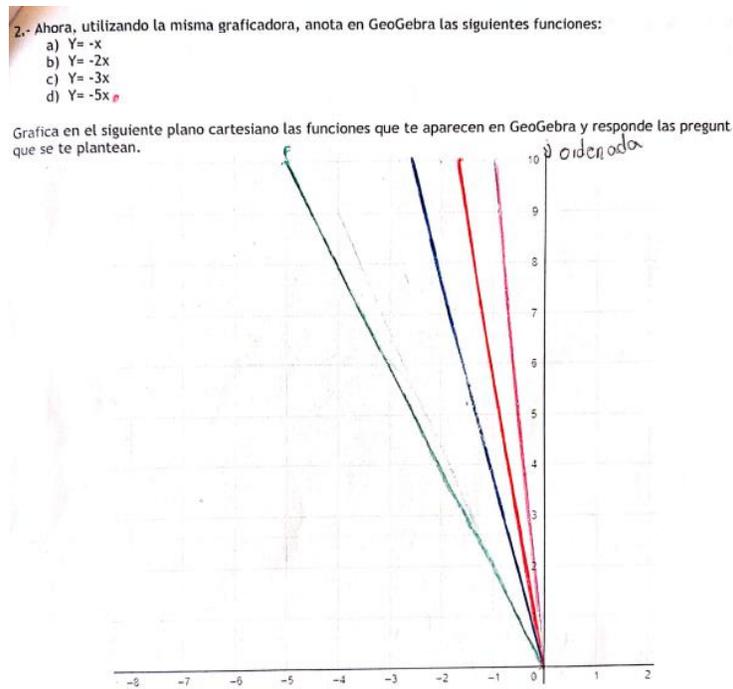


Figura 17. Graficación de funciones lineales negativas

En este ejercicio se logra observar, que el equipo pudo utilizar parte del manejo del tratamiento de la representación semiótica que menciona Duval (2006a) en la TRRS, ya que al utilizar la herramienta tecnológica de GeoGebra, se puede graficar las funciones lineales logrando una interacción dinámica en tiempo real de forma rápida y sencilla, consiguiendo que los alumnos observen la comparativa de las diferentes coordenadas con las que se gráfica cada valor de la función, que de otra manera, se observarían de forma más lenta y mecanizada a través de la tabulación y la graficación con papel y lápiz. Cabe señalar que, aunque en la graficadora digital

se observan las rectas infinitas, los alumnos solo trazan las rectas de las funciones en un solo cuadrante del plano cartesiano, lo que da pauta a investigar acerca del concepto que ellos manejan.

Por otra parte, en la entrevista cuando se le pregunta a la alumna que identificará el valor de una función, se le puso en la aplicación de Geogebra dos funciones distintas para observar las rectas en la gráfica (Figura 18), esto fue lo que respondió:

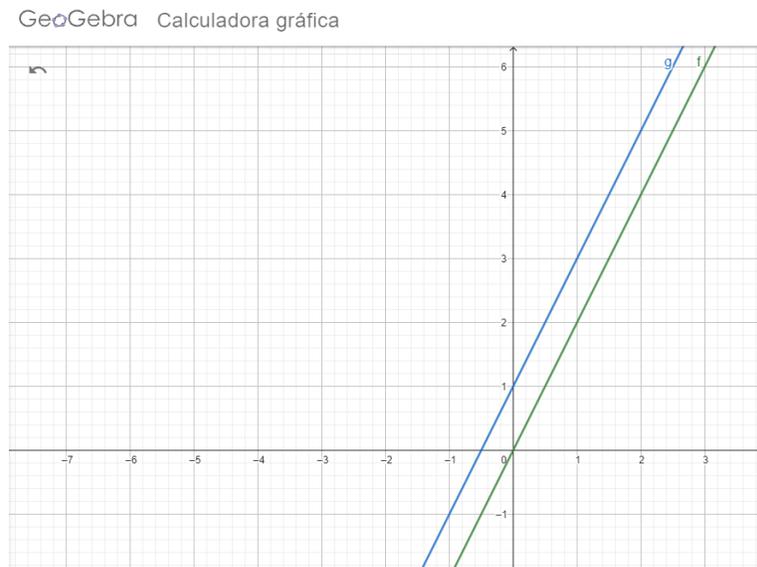


Figura 18. Diferencia entre dos funciones distintas

*P.- En la gráfica, ¿cuál es la función de  $y=2x$ ?*

*A.- La de  $Y=2x$  es la verde.*

*P.- ¿Por qué?*

*A.- Porque en el punto donde ahí dice 2 y abajo tiene el 1.*

*P.- ¿Se te facilita el estudio de una función lineal si se utilizan aplicaciones de graficación digital?*

*A.- Con la calculadora gráfica es más fácil.*

Con base en las respuestas se puede observar que la estudiante logra identificar en la gráfica las coordenadas de uno de los puntos por donde pasa de dicha función, ella menciona de forma acertada que para la función  $y=2x$ , un punto pasa por 2 y “*abajo tiene el 1*”. Lo que ella hace referencia es a la primera coordenada de la función que representa el valor 2 para el eje de las ordenadas y 1 para el eje de las abscisas. Cabe resaltar, que ella misma menciona que el uso de una “*calculadora gráfica es más fácil*”, lo que nos indica el fuerte potencial que tiene el uso y

dominio de dichas herramientas tecnológicas educativas en el desarrollo de las clases de matemáticas.

Por último, para mostrar las evidencias de los productos de la tercera categoría de análisis, se señalarán una de las muestras donde se ejemplifica el uso de la conversión entre el cambio de representación semiótica de una función lineal. Para ello, se muestra el siguiente producto (Figura 19).

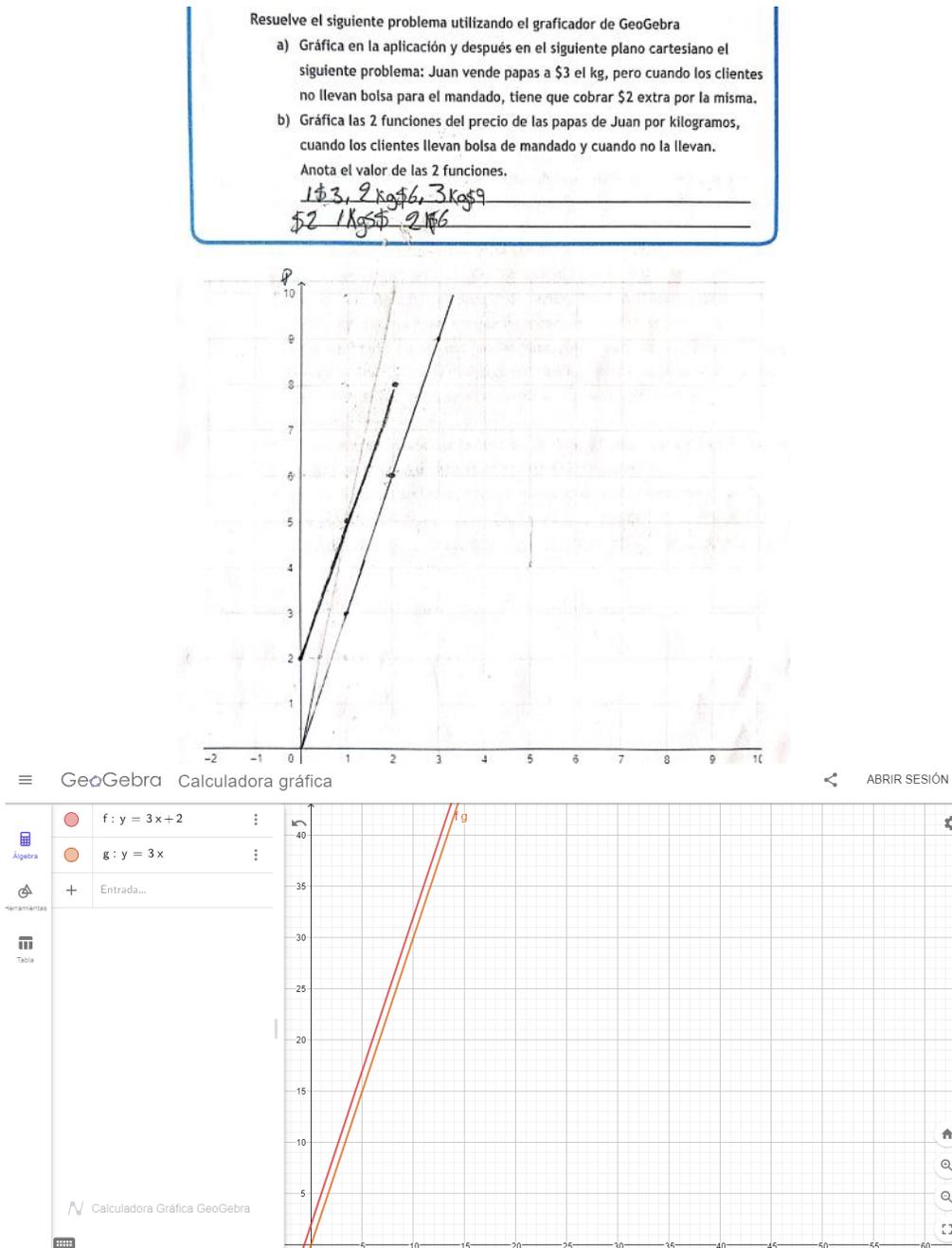


Figura 19. Trazado de funciones lineales con base en un problema planteado

En este ejemplo, se puede evidenciar que el equipo de trabajo logró plasmar correctamente el valor de las dos funciones que se plantearon. Además, el manejo de la conversión entre el tipo de representación semiótica se consiguió cuando el equipo logró identificar en primera instancia los valores semióticos del problema que se les plantea y después estableció una relación con su representación en la gráfica. Esto se pudo obtener gracias al manejo de los ejercicios anteriores con los que se trabajó. No obstante, aunque se logra evidenciar el manejo de los registros de representación semiótica, aún se observa que los alumnos utilizan el uso de representación por medio del lenguaje aritmético, en lugar de empezar a utilizar un lenguaje formal o algebraico. Lo que nos indica que aún tienen arraigada la forma coloquial de representar con signos aritméticos el valor de las funciones.

Cabe destacar, que al igual que el equipo anterior, los alumnos trazaron las funciones en un solo cuadrante del plano cartesiano, ellos únicamente tomaron en cuenta los datos positivos, ignorando los demás puntos por donde pasa la gráfica. Aunque el objetivo de la investigación no tomo en cuenta esta característica sobre el uso de rectas cortadas en un solo cuadrante, da pie a investigar sobre las representaciones mentales que tiene los alumnos al resolver este tipo de problemas.

#### **4.3. El caso del equipo de Berenice**

Como primera evidencia de la categoría de análisis: la comprensión de la representación de una función lineal, tenemos que la estudiante Berenice junto con su compañero de trabajo anotaron el valor de las funciones respecto a un problema planteado (Figura 20).

a) Escriba una función que represente la altura del nivel del agua, considerando el tiempo transcurrido.  
 $f(x) = 3$

b) ¿Es una función lineal o afín?  
 lineal

c) En esta situación ¿qué significa  $f(4)$ ?  
 Los minutos

d) Al cabo de 6 minutos, ¿cuál es la altura del nivel del agua?  
 18 cm

7) Un recipiente que contiene 100 mm de agua (1 cm de altura), comienza a llenarse a un ritmo constante de 3 cm por minuto. Responda:

a) ¿Cuál es la función que representa el nivel del agua en cada instante?  
 $f(x) = 3 - 1$

b) ¿Es una función lineal o afín?  
 afín

c) En esta situación ¿qué significa  $f(4)$ ?  
 Los minutos

d) A los 6 minutos desde que el recipiente comienza a llenarse, ¿cuál es la altura del nivel del agua?  
 18 cm

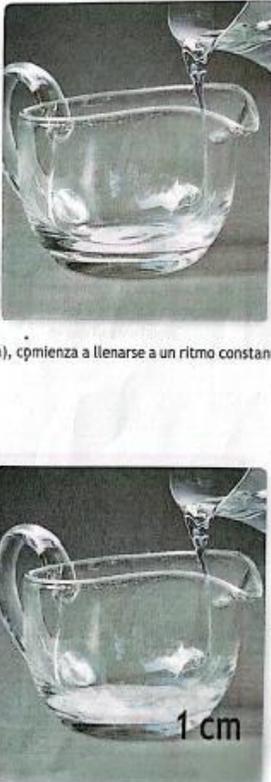


Figura 20. Problemas de funciones

Como podemos observar en la imagen, se puede destacar que el equipo supo resolver y anotar los datos correctos que corresponden a la primera parte de la actividad, con esto, ellos lograron dar un significado a los valores de la función, la cual era determinada por los minutos en que se llenaba el recipiente. Además de que lograron diferenciar cuál de las dos situaciones era una función lineal y cual una afín. Cabe destacar que al final de la segunda actividad cuando se les pide determinar la altura del agua, el equipo cae en una confusión y no toma en cuenta la función que ellos previamente ya habían escrito la cual fue:  $f(x) = 3 - 1$ . Esto explica lo que Duval (2006a) investigó acerca de que lo que pareciera una simple tarea de reconocimiento, dificulta la comprensión del concepto en sí, ya que solo basto con cambiar o añadir el valor el dato de la función para que los estudiantes no pudieran responder correctamente el valor de las últimas preguntas. Duval (2006a) añade, que naturalmente sí a los jóvenes los hubiéramos puesto a construir una tabla de valores para cada problema el porcentaje de aciertos se acercaría al 100%, pero como se trata de involucrar a los jóvenes en la construcción de sistemas de representación semiótica, ellos aún tienen dificultades por lograr identificar esos sistemas y como consecuencia

utilizarlos en el tratamiento de la información. En la entrevista que se le realizó a la integrante del equipo, ella menciona lo siguiente:

P.- ¿Para ti qué es una función lineal?

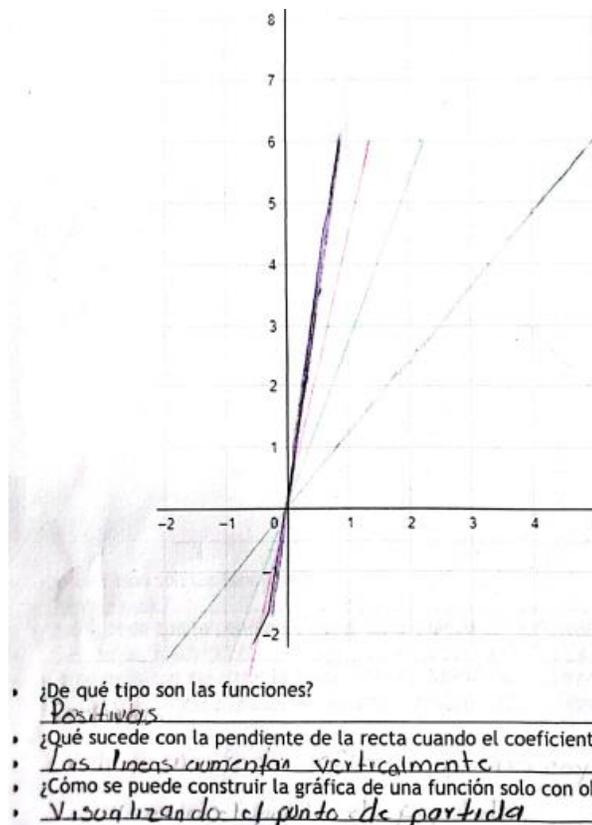
B.- Son las líneas que empiezan de cero y las que tienen una relación entre la variable dependiente e independiente

P.- ¿Cuál es la diferencia entre una función lineal y una función afín en su representación en la gráfica?

B.- Que la afín no empieza desde cero y la lineal empieza de cero

En este extracto de entrevista, se logra identificar que la estudiante tiene una noción parcial de la representación gráfica de una función lineal, ella reconoce que las funciones lineales empiezan desde cero (origen) y, además, recuerda que existen términos de una función lineal, los cuales son: variable dependiente e independiente.

Como parte de las evidencias de la segunda categoría de análisis, se tiene que el equipo de trabajo logró utilizar el tratamiento de la representación semiótica en la fase de desarrollo de la secuencia didáctica (Figura 21), esto fue lo que realizaron:



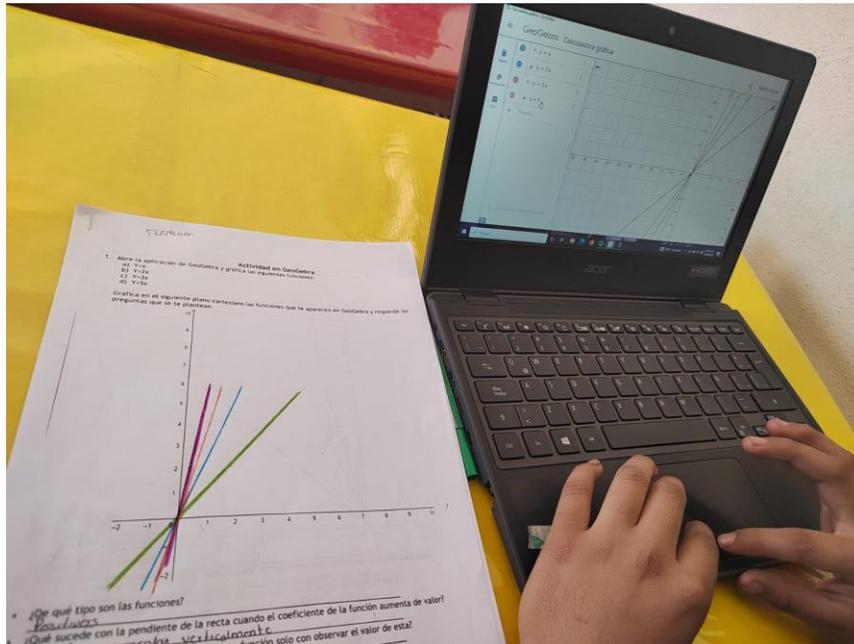


Figura 21. Graficación de funciones lineales positivas

En este producto realizado, se pueden observar varios aspectos que aportan a la investigación. El primero de ellos es resaltar la concordancia que se tuvo al poder graficar en la aplicación de GeoGebra las funciones lineales dadas y su construcción en la hoja de trabajo. Esto confirma las características de oposición visual que menciona Duval (2006a) donde resalta que, para alcanzar la conversión entre el tratamiento de la representación semiótica de las gráficas, primero debe de haber una comparación entre las características visuales que se observan entre una representación y otra (ver Figura 3). Esta intención de trabajo precisamente se logra con la interacción dinámica que se realiza al momento de manipular los datos que se ingresan en el programa de GeoGebra y que, a su vez, se mantiene a través de la discriminación de información, mediante la comparación que se realiza visualmente cuando se ingresan los valores de la función y son ejecutados en el programa, los cuales a su vez son identificados por los alumnos en el plano cartesiano digital que muestra la aplicación.

La conexión de red cognitiva se refuerza cuando existe una coordinación de lo que se representa en el contenido matemático entre los diferentes registros de representación (Duval 2006a). Por lo tanto, los estudiantes establecen las diferencias entre los registros de representación entre una función lineal y otra, cuando construyen dichas funciones en la hoja de trabajo, consiguiendo así concretar el primer paso hacia el logro de la comprensión gráfica de las funciones lineales. Como menciona Duval (2016) es a través de la interacción entre varios tipos de conversiones, más que a través de tratamientos, cuando se toca la complejidad cognitiva de la

comprensión en el aprendizaje de las matemáticas. Cabe destacar que esta conexión se refuerza cuando se observa que los estudiantes dibujan en las hojas de trabajo las rectas prolongadas, demostrando así el concepto del infinito en las rectas.

Por otra parte, existen evidencias que manifiestan el dominio de la comprensión del comportamiento gráfico de las funciones lineales cuando los alumnos responden a los planteamientos que se les proponen, estos nos indican que existe un alto nivel de razonamiento, ya que el equipo de trabajo identifica primero los tipos de función lineal que se les presentan (positiva), después cuando logra identificar el comportamiento gráfico que sufre una función lineal a la que se le aumenta el valor de coeficiente de posición y por último, cuando el equipo de trabajo menciona que se debe prestar atención a visualizar el punto de partida cuando se construya la gráfica de una función.

Asimismo, la única manera de poder identificar las muestras o evidencias que reflejen un alto grado de comprensión de la información es a través de los productos elaborados y de las respuestas escritas o verbales que nos informan los alumnos. Es por ello, que para el estudio de la tercera categoría de análisis se mostrara el siguiente producto elaborado (Figura 22).

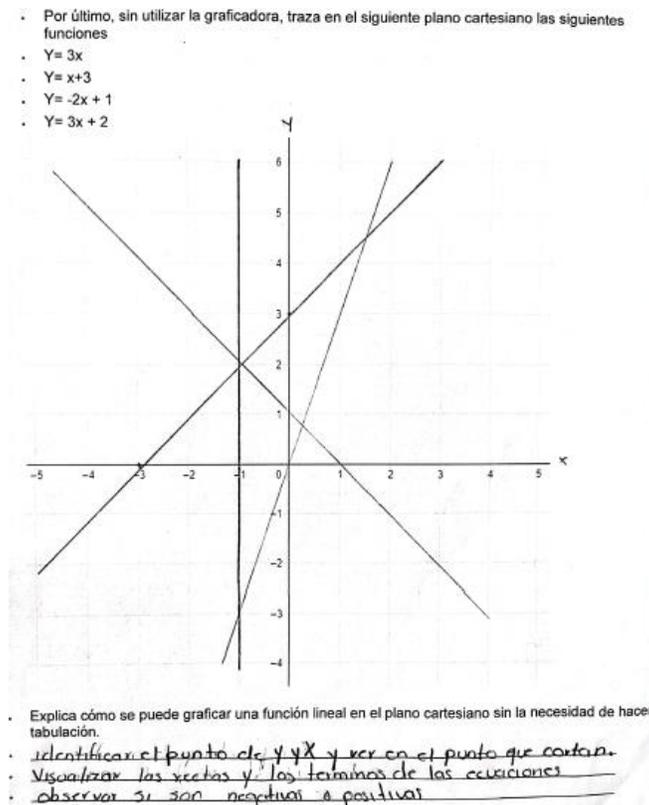


Figura 22. Construcción de funciones

En este ejercicio hecho por el equipo de trabajo encabezado por Berenice, se pueden señalar al menos dos aspectos importantes. El primero, se logra destacar una evidencia entre el tratamiento de la información que se les presentó respecto al valor de las funciones lineales y afines, para después lograr una conversión entre un sistema de representación (signos) y otro sistema (líneas en la gráfica). Esto se logra gracias a lo que alude Duval (2016), en el desarrollo de la capacidad cognitiva de discernir la diferencia entre dos registros monofuncionales, el no discursivo (gráficas) y el discursivo (escritura algebraica de la función).

Por otra parte, la estudiante Berenice logra relacionar el tema de funciones lineales con problemas de la vida real, ella menciona lo siguiente:

*P.- ¿Se te facilita el estudio de una función lineal si se utilizan aplicaciones de graficación como Geogebra?*

*B.- Sí*

*P.- ¿Por qué?*

*B.- Porque ya nada más es de ir sacando en la computadora la ecuación y se trazan las líneas*

*P.- ¿Qué utilidad le puedas dar a las gráficas de una función lineal en la vida cotidiana?*

*B.- Se pueden utilizar por ejemplo si alguien propone un tema que pueda beneficiar al pueblo, con las gráficas se puede hacer un comparativo de que beneficios tendría y cuáles no.*

En este caso, se puede identificar el beneficio que menciona Duval (2006a), donde subraya que “la aplicación de procedimientos y operaciones matemáticas a problemas prácticos da significado al aprendizaje de las matemáticas” (p.163). En ese sentido, involucrar a los alumnos en tareas donde se pueda generar el empleo del uso de representaciones semióticas en otros contextos brinda una comprensión en la manera en que se realizan las operaciones matemáticas. Solo hace falta que los profesores frente a grupo guíen adecuadamente el proceso de comprensión mediante la implementación adecuada de ejemplos contextualizados los cuales despierten el potencial cognitivo de los estudiantes.

#### **4.4 El caso del equipo de Carlos**

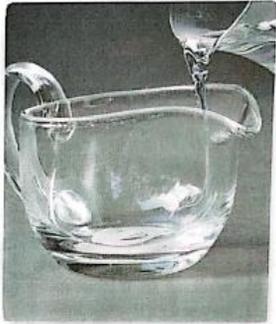
Siguiendo con la temática de trabajo, tenemos algunos de los principales productos que se realizaron, para lo cual mostraremos los que competen a la primera categoría de análisis (Figura 23).

a) Escriba una función que represente la altura del nivel del agua, considerando el tiempo transcurrido.  
 $f(x) = 3$

b) ¿Es una función lineal o afín?  
 lineal

c) En esta situación ¿qué significa  $f(4)$ ?  
 Son los minutos

d) Al cabo de 6 minutos, ¿cuál es la altura del nivel del agua?  
 de 18cm



7) Un recipiente que contiene 100 mm de agua (1 cm de altura), comienza a llenarse a un ritmo constante de 3 cm por minuto. Responda:

a) ¿Cuál es la función que representa el nivel del agua en cada instante?  
 $f(x) = 3 - 1$

b) ¿Es una función lineal o afín?  
 afín

c) En esta situación ¿qué significa  $f(4)$ ?  
 Son los minutos

d) A los 6 minutos desde que el recipiente comienza a llenarse, ¿cuál es la altura del nivel del agua?  
 17cm

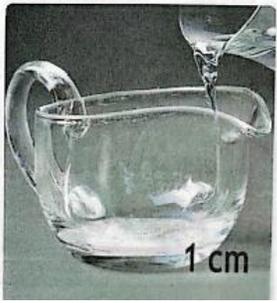
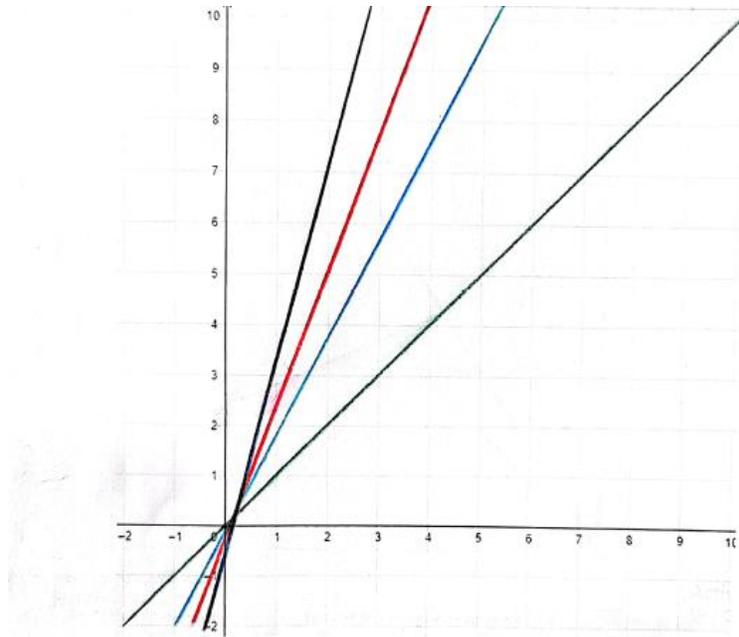


Figura 23. Problemas de funciones II

Analizando las respuestas escritas, se puede destacar que en la primera parte del producto el equipo de trabajo pudo identificar los valores de la función lineal, explicando que los minutos significaban el valor del término independiente de la función. Otro punto para señalar es que el equipo logró diferenciar en las dos situaciones cual corresponde a una función lineal y cual a una función afín. Sin embargo, en la segunda parte de las actividades, el equipo escribió el valor de la función afín como:  $f(x) = 3 - 1$ . Lo que nos indica, que al igual que el equipo anterior, no supieron reconocer los datos gráficos que se les presentan, cayendo en una confusión y obteniendo una respuesta errónea en el resultado.

Como parte de las evidencias de trabajo de la segunda categoría de análisis, se obtuvo el siguiente producto, el cual nos muestra el trabajo en GeoGebra con funciones positivas (Figura 24).



¿De qué tipo son las funciones?

positiva

¿Qué sucede con la pendiente de la recta cuando el coeficiente de la función aumenta de valor?

Se va haciendo cada vez más inclinada

¿Cómo se puede construir la gráfica de una función solo con observar el valor de esta?

revisando los puntos en que cortan (donde empiezan)

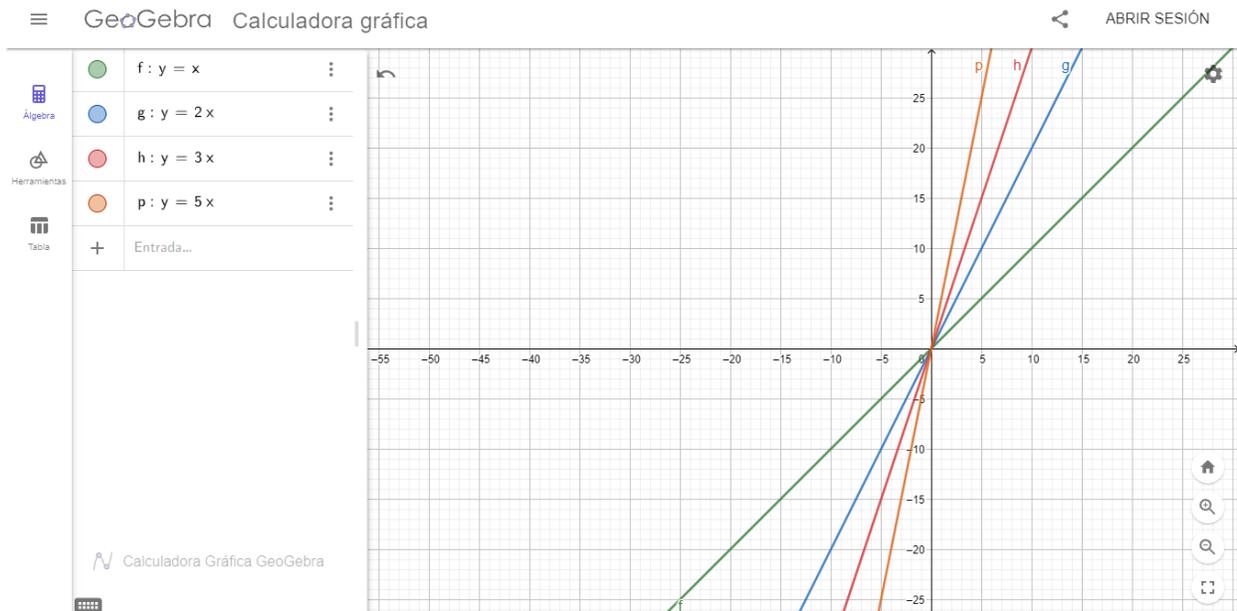


Figura 24. Funciones positivas utilizando GeoGebra

En esta actividad se puede observar que el equipo de trabajo identificó las características de oposición visual mencionadas por Duval (2006a) y señaladas en la figura 3, donde se explica que cada característica visual particular puede ser distinguida solamente a través de la oposición de dos o más gráficos. Lo anterior se puede confirmar cuando en la segunda pregunta se les pide que escriban lo que sucede con la pendiente de una función cuando aumenta de valor, a lo que

ellos responden: *se va haciendo cada vez más inclinada*. Logrando así, identificar la coordinación que existe entre las gráficas de las funciones lineales positivas con el tratamiento de un mismo registro de representación semiótica. De manera similar, cuando se le pregunto al estudiante representante del equipo acerca de la definición de una función lineal, esto fue lo que respondió:

*P.- ¿Para ti qué es una función lineal?*

*C.- Es una línea que sale de una gráfica, que sale de cero, tiene que ser del punto desde cero*

*P.- ¿La línea que sale de la gráfica tiene que ser recta o puede ser curva?*

*C.- Tiene que ser recta*

*P.- ¿Cuál es la diferencia entre una función lineal y una afín en la gráfica?*

*C.- La afín pasa por cualquier número y la lineal tiene que ser en el origen.*

En el extracto de entrevista se puede observar que el alumno tiene una noción clara de lo que significa una función lineal en su representación gráfica, que forma parte del proceso de representación semiótica del objeto matemático. Cabe señalar que cuando se le cuestiono acerca de sí la línea de la gráfica pudiera ser curva, el confirmo que no, que tiene que ser recta. Esta afirmación la concreta al afirmar que todas las funciones lineales pasan por el origen y determina de una manera menos explícita que las funciones afines pasan por cualquier otro punto (número). La discriminación que se el alumno explica de la diferencia entre una función lineal y afín se logra gracias a las tareas de comparación que propone Duval (2006a) donde menciona que una verdadera comprensión conceptual se alcanza al establecer una coordinación entre los cambios de registro y su pertinencia.

Un dato interesante que se puede notar en la gráfica de la figura 24, donde las funciones lineales del equipo no empiezan en el origen, sino en un punto más arriba correspondiente al cuadrante: (1, 1). Lo anterior, repercute significativamente en la representación gráfica de cada función lineal, ya que al construirlas se desplazan de forma diferente, afectando a las coordenadas exactas por las que debería pasar según el valor de cada función lineal. Lo que nos indica, que la parte del reconocimiento visual de lo que se ejecuta en el programa de Geogebra no es la misma con la que se construye en la hoja de trabajo, identificando la falta de codificación entre el manejo de dos diferentes registros de representación semiótica. En contraste con esta actividad, se realizó una tarea donde puede verse el manejo de conversión entre el cambio de representación semiótica (Figura 25).

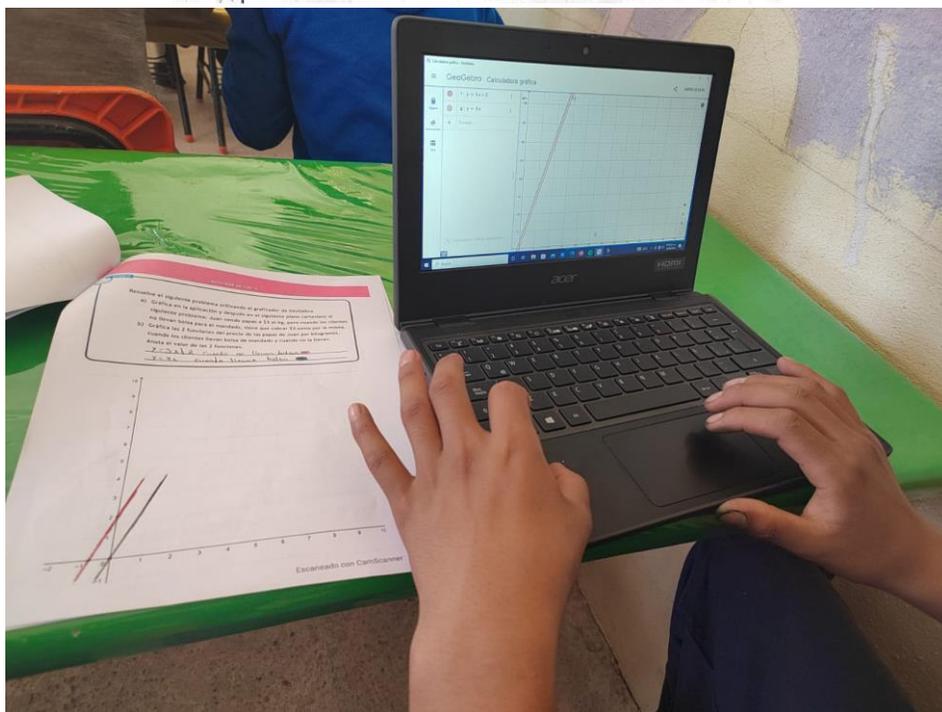
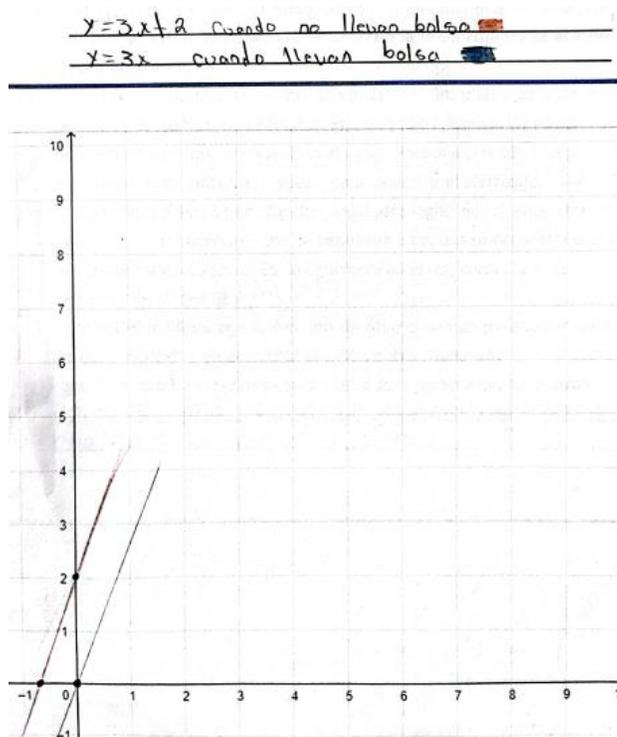


Figura 25. Tarea de conversión entre el cambio de representación semiótica

En esta actividad podemos identificar que el equipo logro plasmar las gráficas de las funciones lineales de las dos situaciones que se les planteo. Logrando evidenciar el manejo de conversión entre las expresiones algebraicas y sus representaciones semióticas en la gráfica. Por lo que Duval (2006a) menciona que el proceso de comprensión “no significa dar un salto desde el

contenido de una representación hasta el concepto puramente matemático representado, sino en relacionar diversos contenidos de representación del mismo concepto” (p.158). De tal manera, que lograr una comprensión matemática, requiere de una coordinación interna entre los diversos sistemas de representación semióticos, sin embargo, representar las rectas cortadas no nos indica que se carece de una comprensión del comportamiento gráfico de las funciones, sino más bien, que esa es su forma de representar los datos del problema, valdría la pena profundizar en otra investigación el concepto que tiene los estudiantes sobre las rectas infinitas.

De igual forma, es importante mencionar que, para el uso de representaciones auxiliares, Duval (2006a) propone utilizar dibujos de una situación de la vida real, para que los estudiantes utilicen sus experiencias y representaciones mentales en el manejo de conversión de expresiones simbólicas que encajen con el procedimiento matemático pertinente. Una vez aplicado de forma adecuada la conversión de un sistema semiótico (problema verbal) a otro (graficación), se procede a realizar la solución o manejo de la información por tratamiento, que es la transformación de representaciones dentro del mismo registro. Efectivamente, eso fue lo que se buscó al proponer dicha actividad, que se conectaran los saberes previos de los alumnos, con el contexto inmediato, logrando así, una demostración del uso de la conversión entre los sistemas de presentación semióticas de las funciones lineales con su representación semiótica de la realidad. Del mismo modo, cuando se le pregunto al alumno representante del equipo acerca de la utilidad que le pudiera dar a las funciones lineales en otros campos, esto fue lo que respondió:

*P.- ¿Puedes dar un ejemplo de la vida cotidiana donde se pueda graficar una función lineal?*

*C.- Sí*

*P.- ¿Cómo cuál?*

*C.- Como un taxista, de los kilómetros que recorre, te empieza a cobrar*

En la anterior afirmación se puede observar como el alumno conceptualiza con entidades mentales el concepto de función lineal, parte del contenido en general y lo relaciona con un ejemplo de su vida cotidiana. En gran medida, esta tendencia de relacionar situaciones de la vida cotidiana con problemas matemáticos, solo se puede dar, si a los alumnos se les brinda diversos procedimientos matemáticos donde se involucren situaciones de la vida real con expresiones simbólicas que encajen con el procedimiento matemático pertinente, logrando así una solución por tratamiento (Duval 2006a).

#### 4.5 El caso del equipo de Daniela

Como primera evidencia de la categoría de análisis: la comprensión de la representación de una función lineal. Tenemos que la estudiante Daniela junto con su compañero de trabajo realizaron el siguiente producto (Figura 26).

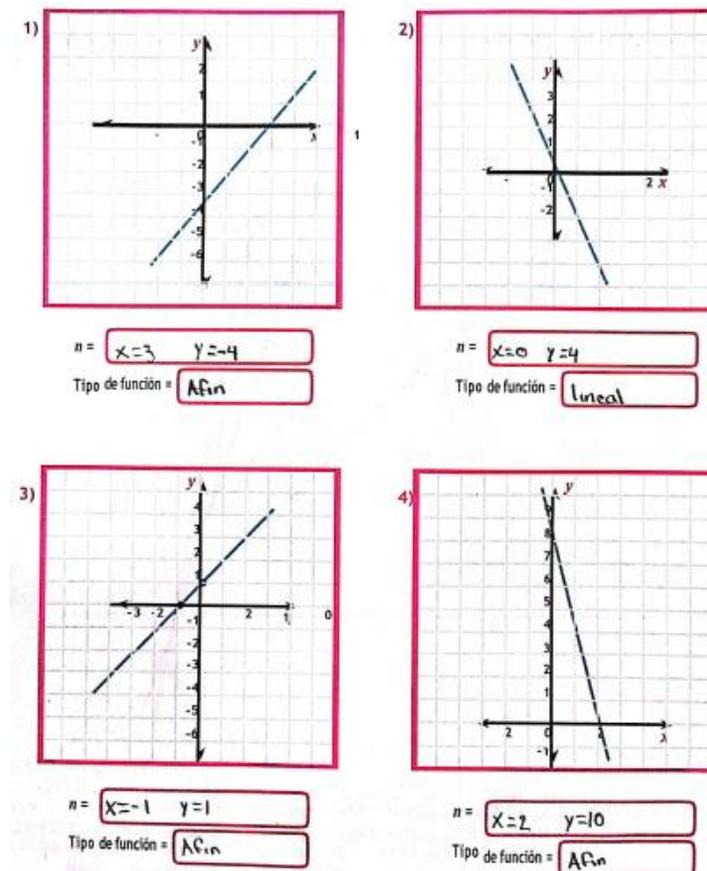


Figura 26. Reconocimiento del coeficiente de posición

En esta evidencia de trabajo, se puede identificar que al equipo de trabajo se les dificultó realizar una simple tarea de reconocimiento, aunque lograron diferenciar una función lineal y una afín, el coeficiente de posición lo determinan como el punto en el que el eje Y corta en la gráfica. Lo anterior nos indica la existencia de confusión entre los registros de representación semiótica que se utilizan para representar el valor de una función lineal con el coeficiente de posición, que es la coordenada donde la recta corta al eje de las ordenadas (Y). Siendo que, si el coeficiente de

oposición es cero, la función es lineal y si corta en otro punto del eje de las ordenadas la función es afín.

Como parte de las evidencias de trabajo de la segunda categoría de análisis, se obtuvo el siguiente producto, el cual nos muestra el trabajo realizado en GeoGebra con funciones paralelas (Figura 27).

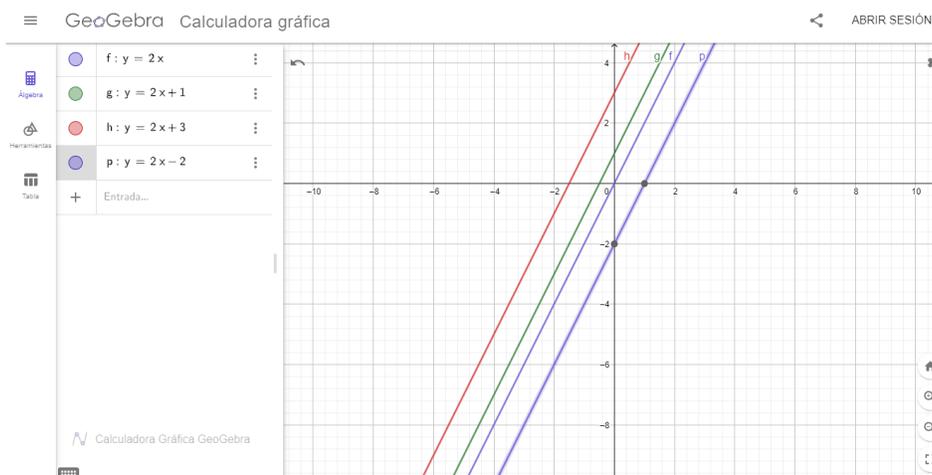
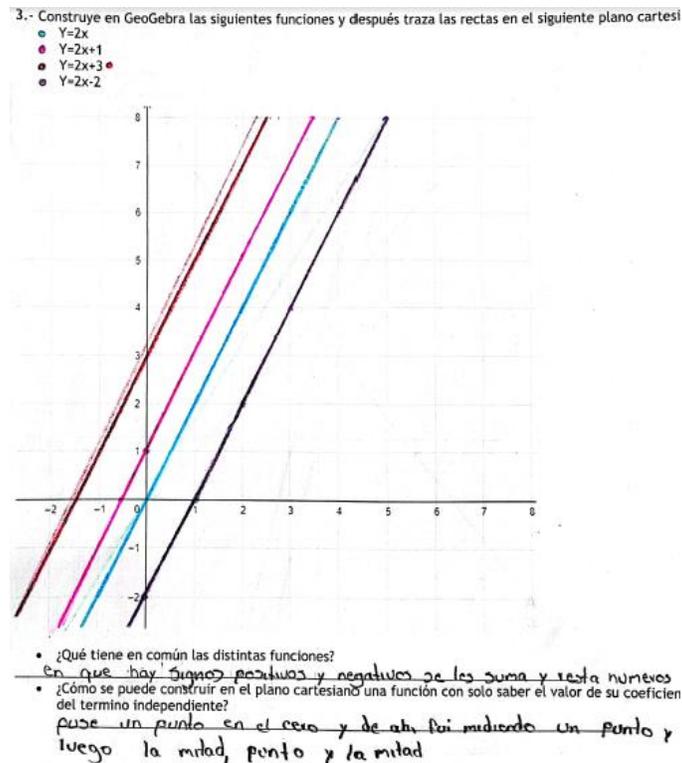


Figura 27. Funciones paralelas, ejemplo hecho a mano y en Geogebra

En esta actividad podemos destacar que los alumnos no son capaces de poder distinguir y definir que todas las funciones que se graficaron son paralelas entre sí. Esta capacidad de distinción lo explica Duval (2006b), ya que los alumnos están acostumbrados a tareas de lectura, de tal manera que en estas actividades solo requieren del proceso de colocación de puntos guiados por la comprensión local, haciendo énfasis en la falta de comprensión por las variables visuales cualitativas de cada función en la gráfica. El anterior análisis se fundamenta al observar cómo solo mecánicamente trazan las rectas de las funciones al observar su comportamiento en la aplicación de Geogebra, esto se comprueba ya que en la segunda respuesta del equipo, ellos explican que, para poder construir las gráficas de las funciones, van colocando un punto en la coordenada que corresponde: una mitad de la unidad a la derecha (abscisas) y una unidad hacia arriba en las ordenadas (0.5,1); y así sucesivamente hasta construir una recta en cada valor de la función. Naturalmente este proceso de construcción de gráfica no favorece la capacidad de construcción semiótica de la representación de una función lineal, sino todo lo contrario, tal como menciona Balacheff (2000), solo mecaniza el trabajo que se realiza en el aula, dejando así una enseñanza de manera tradicional, sin estimular algún proceso cognitivo por el estudiante. Del mismo modo, la alumna menciona lo siguiente en la entrevista:

*P.- ¿Podrías decirme el valor de la función solamente observando la gráfica?*

*D.- No*

*P.- ¿Qué te faltaría para que pudieras dar el valor de la función?*

*D.- Todavía marcar a dónde quiere llegar y ahí donde se cruzan.*

*P.- ¿Qué es la pendiente de una función lineal?*

*D.- Es como que está inclinado*

Se puede observar que la estudiante tiene arraigado el modelo de enseñanza tradicional que menciona Balacheff (2000), donde menciona que solo puede construir la gráfica de una función si se le marcan los valores por donde va a cruzar. Cabe destacar que, aunque persiste la forma mecánica de representar las funciones lineales, la estudiante entiende a través de la comparación de oposición de las gráficas que el valor de la pendiente está determinado por la inclinación de esta. Como evidencia de la tercera categoría de análisis, observaremos el siguiente producto elaborado (Figura 28).

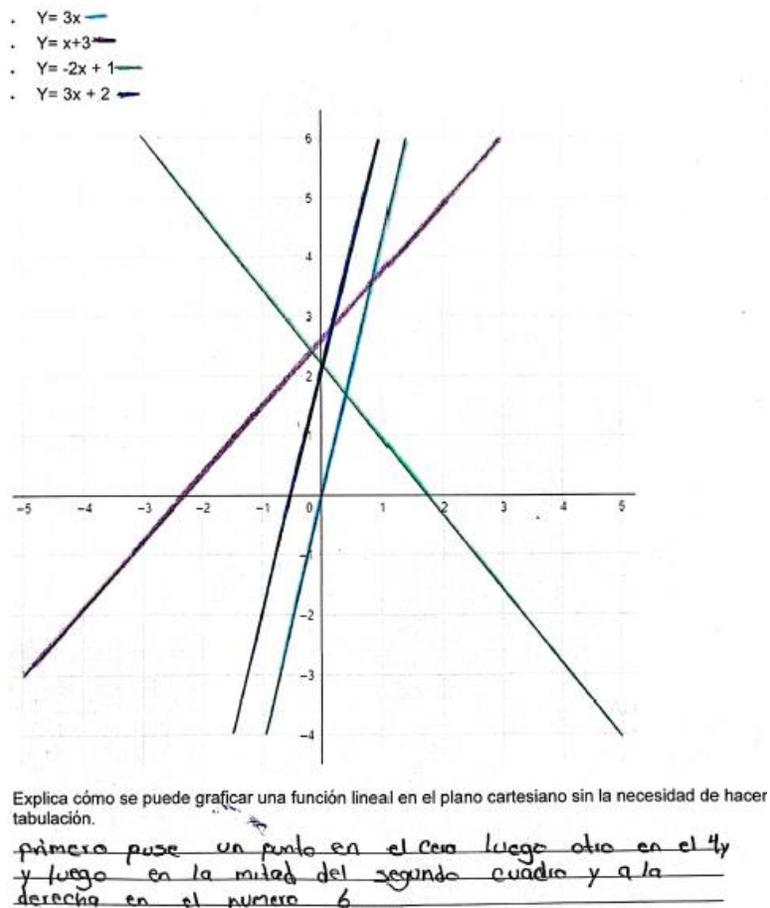


Figura 28. Construcción de funciones sin la utilización de GeoGebra

En esta actividad, podemos destacar que existe una baja presencia que demuestra la comprensión gráfica de una función, ya que en la explicación textual que brinda el equipo, solo nos muestran de forma superficial algunas representaciones externas, las cuales son completamente alejadas de lo que significaría una comprensión matemática (Duval, 2006a). Cabe mencionar que, aunque se evidencia un bajo nivel de tratamiento de las representaciones semióticas de las funciones, se observa que, en la parte de la construcción gráfica, los estudiantes lograron construir funciones lineales y afines las cuales estaban acorde a la pendiente de cada función. Del mismo modo, aunque se logra evidenciar algunas muestras del manejo de comprensión del comportamiento gráfico de las funciones lineales, se carece de una evidencia clara sobre el manejo adecuado del tratamiento de las representaciones semióticas. Lo anterior puede verse en el siguiente extracto de entrevista que se le realiza:

P.- ¿Qué utilidad le puedas dar a las gráficas de una función lineal en la vida cotidiana?

D.- Como aquí, por ejemplo, si se necesita algo en el pueblo propone propuestas y pues ahí se vería si la propuesta les conviene o no

P.- ¿Podría haber otro ámbito en el que se pueda aplicar?

D.- Las cosechas de maíz, pues como en mi caso, estoy en una siembra, la mitad no se dio bien y la otra mitad no, identificar que tanto sí y que tanto no

Se puede observar que la estudiante trata de relacionar las representaciones semióticas de las funciones lineales con problemas contextuales de su vida cotidiana, pero para lograr obtener esa comprensión se tiene que trabajar en la coordinación de actividades, en las cuales se ejemplifique el tipo de tareas que son pertinentes para la representación gráfica de las funciones lineales y en otras para las funciones afines.

#### 4.6. El caso del equipo de Esteban

Como primera evidencia de la categoría de análisis: la comprensión de la representación de una función lineal. Tenemos que el estudiante Esteban junto con su compañero de trabajo realizaron el siguiente producto (Figura 29).

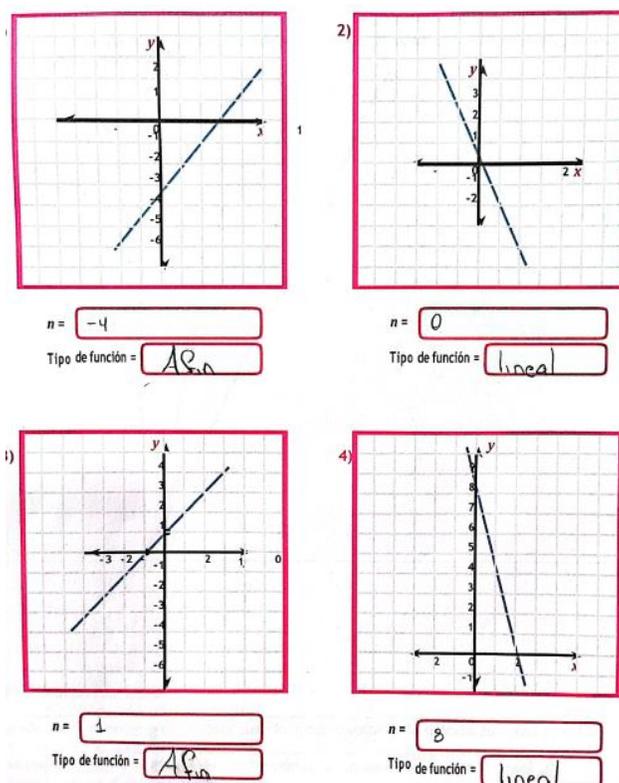


Figura 29. Reconocimiento del coeficiente de posición II

En el anterior producto se puede observar que el equipo de trabajo identificó bien los valores del coeficiente de posición de cada función respecto a la gráfica, pero al momento de anotar el tipo de funciones que se presentaban, los estudiantes se equivocaron en una, logrando evidenciar, la parcial comprensión que tiene acerca del manejo de las representaciones semióticas de las funciones. Estas actividades resultan ser tareas de reconocimiento, ya que como se ha mencionado antes, los alumnos están acostumbrados a realizarlas, pero fracasan al no ser capaces de diferenciar las propiedades de cada tipo de representación semiótica de una función. La anterior se explica al observar el siguiente extracto de entrevista que se le realiza al estudiante:

*P.- ¿Cuál es la diferencia entre una función lineal y una afín en la gráfica?*

*E.- Una función lineal es la que pasa por el origen y la afín que toma otros lados*

*P.- ¿Cuál sería la diferencia de una función positiva y una negativa en la gráfica?*

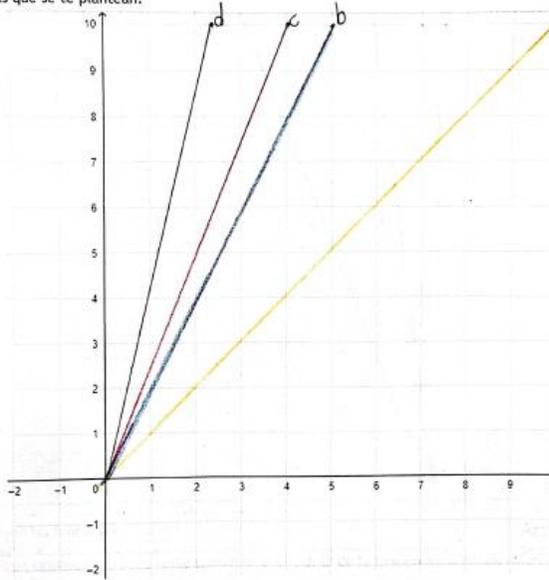
*E.- Como que va subiendo la positiva y la negativa va bajando*

Como puede verse, el alumno tiene una idea clara de lo que significa gráficamente una función lineal y una función afín, inclusive describe que una función positiva va subiendo y una negativa va bajando, esta descripción la realiza al establecer condiciones cognitivas más profundas, mediante la capacidad de contrastar cada expresión algebraica junto con su gráfico (Duval, 2016). Aunque cabe señalar que la diferencia entre una función positiva y negativa no es precisamente la respuesta dada, pero nos da una idea acerca del concepto que tienen sobre valor de la pendiente de una función, la cual está ligado con su representación de la recta en la gráfica.

Por esta razón Duval (2006a) sugiere que, para proponer tareas de conversión, resulta necesario utilizar dos o tres registros de representación que deban utilizarse juntas de forma interactiva. Este dinamismo se encuentra presente en algunas de las tareas del manejo de tratamiento de representación semiótica (Figura 30).

- a)  $Y=x$
- b)  $Y=2x$
- c)  $Y=3x$
- d)  $Y=5x$

Grafica en el siguiente plano cartesiano las funciones que te aparecen en GeoGebra y respon preguntas que se te plantean.



¿De qué tipo son las funciones?

positivo

¿Qué sucede con la pendiente de la recta cuando el coeficiente de la función aumenta de valor?

va menos inclinada

¿Cómo se puede construir la gráfica de una función solo con observar el valor de esta?

Basándose en la colección función

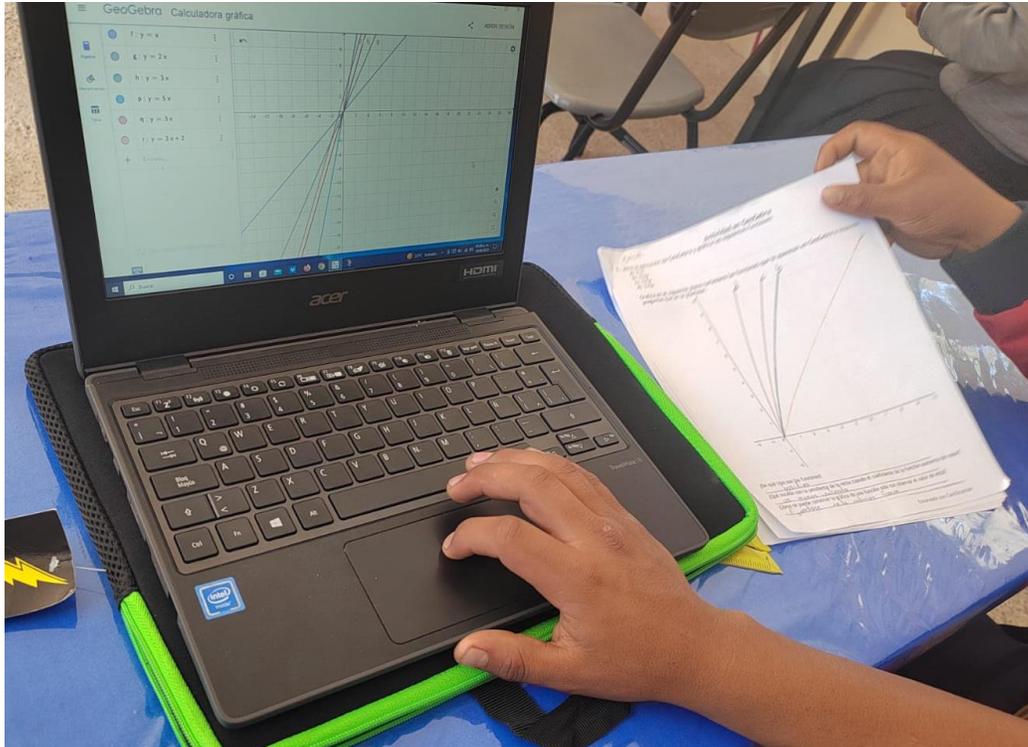


Figura 30. Tratamiento de funciones positivas

En el producto elaborado se puede observar el buen manejo de la identificación gráfica de cada función lineal, esto gracias a la correcta manipulación que se realizó en el programa de GeoGebra, permitiendo que los estudiantes observen las diferencias de características de oposición visual de cada función lineal. Lo anterior, se logra concretar cuando en las preguntas del ejercicio el equipo responde que las funciones son positivas y que existe una diferencia entre la pendiente de una función lineal y otra. Ellos responden: *fijándose en la anterior función*, lo que indica que existe evidencia de un manejo en el tratamiento del registro de representación semiótica de las funciones lineales, ya que los estudiantes logran darse cuenta de que la diferencia entre una gráfica y otra depende del grado de inclinación de cada función. Cabe señalar nuevamente que, aunque en la graficadora digital se observan las rectas prolongadas, ellos en sus hojas de trabajo solo trazan las rectas en un solo cuadrante del plano cartesiano, lo que da pauta a analizar las similitudes que existen con las respuestas en los trabajos de los demás equipos para averiguar si solo se trata de un caso aislado o es parte de la representación gráfica del concepto matemático que ellos tienen del tema de funciones.

Por tal razón, el manejo de las características de oposición visual que menciona Duval (2006a) permite lograr una conversión entre los cambios de la representación algebraica y los de representación gráfica. Para ello, se muestra el siguiente producto elaborado donde se menciona que escriban y grafiquen las dos funciones de un problema planteado (Figura 31).

b) Gráfica las 2 funciones del precio de las papas de Juan por kilogramos, cuando los clientes llevan bolsa de mandado y cuando no la llevan. Anota el valor de las 2 funciones.

$$Y = 3x$$

$$Y = 3x + 2$$

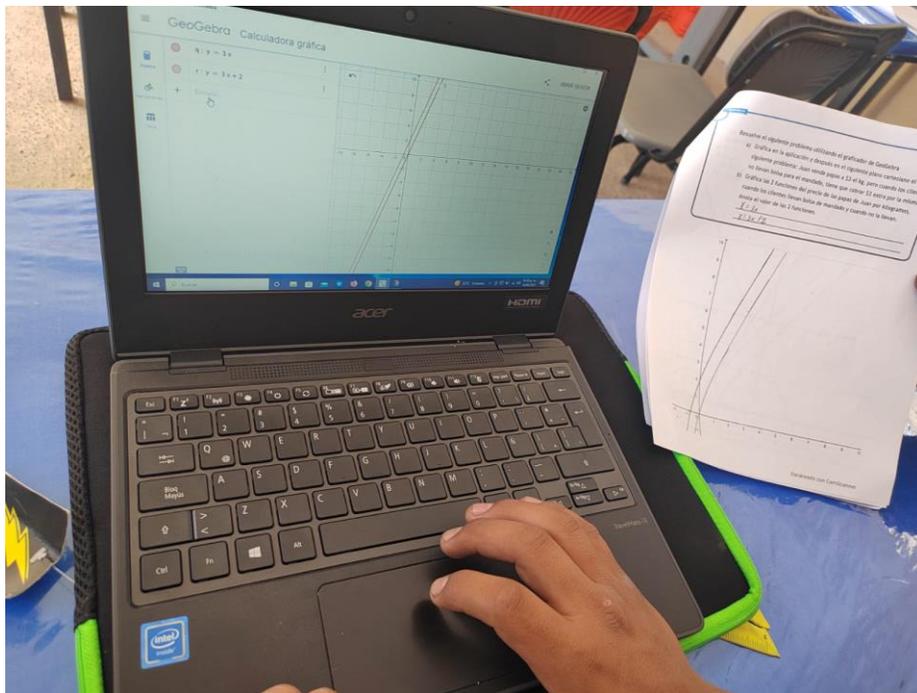
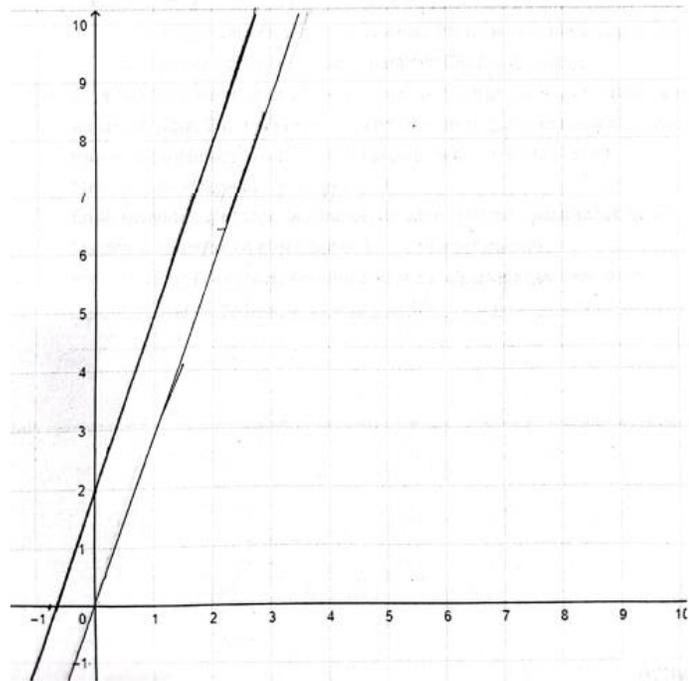


Figura 31. Tarea de conversión entre el cambio de representación semiótica II

En la anterior actividad se puede observar que el equipo estableció de forma adecuada una relación entre la representación gráfica del valor de las funciones de la tarea que se les planteó. Con ello, se demuestra la capacidad cognitiva que menciona Duval (2016) acerca de “discernir como dos gráficos que visualmente son parecidos, matemáticamente son diferentes” (p. 87). Sin lugar a duda, si se ejecutan tareas donde se involucren las imágenes mentales que tienen los estudiantes de su contexto inmediato y se relacionan con las representaciones semióticas del objeto matemático (funciones lineales), se podrán obtener excelentes resultados que den muestras claras de la comprensión conceptual matemática, la cual se obtiene a través de la coordinación de los diferentes sistemas semióticos empleados.

#### **4.7. Resumen de las observaciones más importantes**

Al concluir el análisis de cada uno de los productos elaborados y de las entrevistas semiestructuradas se pueden destacar varios aspectos los cuales son relevantes para esta investigación. Por ejemplo, se logra identificar que cuando se trabajan adecuadamente las tareas de comprensión del concepto de funciones lineales con su representación en la gráfica, el manejo del tratamiento de las representaciones semióticas en el plano cartesiano se ejecuta de una mejor manera, facilitando mejorar la habilidad para cambiar el registro de una representación a otra (Duval, 2006a).

Por otra parte, no basta con saber distinguir la representación gráfica de una función lineal, el tratamiento de la información tal como menciona Duval (2016) consta de saber discernir cómo dos gráficas que visualmente son parecidas, matemáticamente son diferentes entre sí y constituyen características particulares que las hacen únicas. Por ejemplo, en la figura 27 de la actividad 3 de la secuencia didáctica, se les pide a los alumnos que determinen la similitud que guardan las funciones que tienen el mismo coeficiente, pero diferente punto de corte, el cual es determinado por el valor del término independiente. El desarrollo de la capacidad de distinción se basa en el hecho de poder diferenciar como las funciones que son paralelas entre sí, matemáticamente son diferentes al momento del corte con el eje de las ordenadas en el plano cartesiano.

Consecuentemente, si además del desarrollo de estas actividades implementamos problemas de la vida real, tal como lo propone Duval (2006b) los estudiantes le darán un sentido o significado a comprender los conceptos matemáticos y por lo tanto un sentido a las

representaciones semióticas empleadas. Ejemplo de ello, se muestra en las Figuras 19, 25 y 31 que corresponden al ejercicio de dos equipos de trabajo donde responden la última actividad de la secuencia didáctica, ahí se logra identificar cómo los alumnos emplearon las tareas de conversión de dos registros de representación semiótica, el problema matemático empleado y su representación en el plano cartesiano. De esta forma, se favorece la conversión de los diferentes sistemas de representación, los cuales son el resultado de una manifestación de la comprensión conceptual del objeto matemático estudiado.

## Capítulo 5

### CONCLUSIONES

Esta investigación ha servido de ayuda para poder profundizar en algunos de los aspectos que conllevan al quehacer que tenemos los maestros en la enseñanza de las matemáticas. De acuerdo con la pregunta de investigación que se planteó acerca del efecto que tiene la aplicación de una secuencia didáctica, la cual es asistida por el uso de herramientas de graficación digital en la comprensión de las funciones lineales en estudiantes de educación secundaria, se pudieron identificar varios aspectos los cuales fueron mencionados al inicio de esta investigación.

Como primer aspecto, se puede destacar, que si se sigue con el modelo de enseñanza tradicional para enseñar el tema de graficación de funciones lineales mediante el uso de la tabulación (imitación y repetición), disminuirá la probabilidad de éxito para que los estudiantes se apropien del conocimiento, ya que no potencializará los procesos cognitivos visuales en los estudiantes. Esta afirmación se fundamenta en el trabajo realizado por Duval (2006b), donde identifica que los estudiantes no tienen problema con relacionar el valor de una función determinada con su representación en la gráfica, pero que solo basta con cambiar algunos valores de la gráfica para poner a los estudiantes en una situación de conflicto (Figura 3), ya que aunque parezcan tareas simples de reconocimiento, se logra evidenciar la falta del manejo de tratamiento entre los sistemas de representación semiótica que conlleva la graficación de las funciones lineales. Esto mismo se logró identificar en varios de los equipos de trabajo cuando se les planteó una actividad referente a la función que representa una jarra de agua al llenarse, pero solo bastó con cambiar uno de los datos, en los que se les indicaba que representarían la función de la misma jarra pero que ya contenía 1 cm de agua al inicio. Este cambio de situación produjo que mucho de los equipos pensarán de la misma manera, que se trataba de una misma función para los dos problemas planteados.

Es por ello, que previendo la situación anterior se desarrollaron actividades en la secuencia didáctica encaminadas a que los alumnos supieran codificar los datos de la representación gráfica y relacionándolos con su representación algebraica (Acuña, 2001). A su vez, basándome en la TRRS de Duval (2006b) se buscó desarrollar actividades encaminadas a que los estudiantes fueran de un lugar a otro entre el cambio de representación semiótica que ocurre cuando se grafican digitalmente una función y otra. Este tipo de tareas son definidas por

Duval (2006b) como transformaciones por tratamiento, ya que solo son transformaciones de representaciones que ocurren dentro de un mismo registro (gráfica).

De esta manera, se atendió a la segunda cuestión de la pregunta específica que se planteó, acerca de las características de graficación digital que permitieron un aporte hacia la comprensión de las funciones lineales. Para ello, se valió de las bondades que tienen el uso de las herramientas tecnológicas educativas en el salón de clases, dentro de las cuales están las aplicaciones de graficación digital como Geogebra y Desmos, los cuales sirvieron como un estupendo laboratorio para poder graficar en tiempo real el valor de las funciones presentadas en la secuencia didáctica, que de otro modo alentarían el trabajo en el aula y no permitirán que los alumnos observaran detalladamente el cambio de representación gráfica de una función y otra en un mismo plano cartesiano.

Por otro lado, se puede identificar el beneficio de la recomendación dada por Duval (2006b), donde menciona que para favorecer la conversión entre los diferentes sistemas de representación se tienen que valer de problemas contextualizados o de la vida real, para que los alumnos comprendan los conceptos matemáticos empleados y por lo tanto les den sentido a las representaciones semióticas empleadas. Prueba de ello, se demostró al final de la secuencia didáctica, cuando se les planteó a los equipos de trabajo que graficaran dos funciones en relación a un problema de la vida real, logrando así evidenciar que cuando se trabajan con objetos matemáticos relacionados con temas de la vida cotidiana los alumnos logran establecer una conexión mejorando sus procesos de pensamiento matemático y estableciendo tareas de conversión entre los diferentes sistemas de representación semiótica (lenguaje algebraico y representación gráfica).

Esta investigación permitió afirmar que la capacidad de producción Duvaliana en la TRRS es diferente la enseñanza mecánica o tradicional, ya que permite al estudiante acceder a la conversión de los diferentes sistemas de representación semiótica cuando se moviliza el trabajo, esto se logró evidenciar en varias de las respuestas de las entrevistas clínicas cuando los alumnos definieron que una función lineal siempre pasa por el origen del plano cartesiano y que por lo tanto sus valores son proporcionales, en cambio las funciones afines pasan por otro punto de la recta y por lo tanto no son proporcionales. La anterior afirmación se logró identificar ya que los alumnos que mostraron un mejor nivel de comprensión de la representación semiótica de una

función lineal lograron contestar acertadamente los ejercicios que se plantearon en la secuencia didáctica

Como menciona Duval (2006b), estos procesos de transformación son el umbral para favorecer la comprensión de los registros de representaciones semióticas los cuales favorecen el estudio de las funciones lineales con su representación en la gráfica. A su vez, esta indagación da lugar a otras líneas de exploración que se pudieron encontrar, por ejemplo, determinar si es adecuado incluir el tema de funciones lineales con el de funciones afines o si es mejor separar dichos conceptos para evitar confusiones en los estudiantes. También abre una puerta para poder enseñar el tema de representación gráfica de las funciones cuadráticas y cúbicas. Por otra parte, valdría la pena investigar sobre el concepto que tiene los alumnos de las rectas prolongadas o infinitas en la representación gráfica de las funciones lineales, ya que como se pudo observar en varios ejercicios de los productos realizados, que algunos trazaron rectas cortadas, mientras que otros sí ocuparon todo el espacio del plano cartesiano.

Cabe señalar que, aunque existen excelentes bondades que nos brindan las aplicaciones de graficación digital, ocurren algunas dificultades las cuales no son tomadas en cuenta en el diseño de una secuencia didáctica, como, por ejemplo: el fallo en el sistema operativo de una computadora o la deficiente red de internet al utilizar la aplicación de Desmos en el navegador. Por tal motivo, se recomienda prever estas y algunas otras situaciones que retrasen o entorpezca la dinámica de trabajo en el aula. Otro punto para destacar al inicio de la planificación de la secuencia didáctica es tomar en cuenta el contexto social de los alumnos y la infraestructura con la que cuenta la institución, ya que estas limitaciones pueden entorpecer el trabajo en el aula, lo que conlleva a la utilización de otros medios digitales y rudimentarios para la graficación de las funciones lineales.

Finalmente, se busca obtener mejores resultados en los procesos de enseñanza de las clases de matemáticas, Duval (2006b) recomienda que lo importante no es averiguar cuál es un buen problema de representación, sino más bien, utilizar diversos y adecuados problemas de representación para coordinarlos entre sí, los cuales favorezcan el adecuado manejo del tratamiento de la información y estimulen una conversión de los diferentes sistemas semióticos, razón por la cual esta última marca el paso que determina la existencia de una comprensión en el aprendizaje matemático. De tal forma, que depende uno como profesor saber qué tipo de

representaciones implementaremos, sus características y como las utilicen (Ponce de León & Juárez, 2023). Si se logra favorecer la comprensión matemática en los estudiantes ellos lograrán utilizar un adecuado registro de representación en cada etapa de su formación académica (Duval, 2006b). Es por ello, me quedo con la siguiente frase:

A través de los varios tipos de conversiones, más que a través de tratamientos, tocamos la complejidad cognitiva de la comprensión en el aprendizaje de las matemáticas y en los procesos de pensamiento específicos requeridos por la actividad matemática. (Duval, 2016, p.76)

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Acuña, C. (2001). Conversión entre gráficas y ecuaciones a través de la descripción de semiplanos. *Educación Matemática*, 13(3), pp. 75-92.
- Arcavi, A. (2003). “The role of visual representations in the teaching and learning of mathematics” *Educational Studies in Mathematics*. 52 (3), 215-241.
- Balacheff, N. (2000) Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas. una empresa docente, pp.200
- Biembengut, M. y Hein, N. (2004). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática. *Educación matemática*, 16(2), 105-125.
- Duval, R. (1999). Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning. En *Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*.
- Duval, R. (2006a). A cognitive analysis of problems. Of comprehension in a learning of mathematics. *Educational studies in mathematics*.
- Duval, R. (2006b). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 9(1), 143-168.
- Duval, R. (2016). Un análisis cognitivo de problemas de comprensión en el aprendizaje de las matemáticas.
- Fernández, J., Elortegui, N., Rodríguez, J., y Moreno, T. (1999). ¿Cómo hacer unidades didácticas innovadoras? España: Díada Editora.
- Huircán, M. y Carmona, K. (2013). Guía de aprendizaje n° 4: Funciones lineales y afín, ángulos y rectas. *Educación matemática*, primer ciclo de educación media de adultos
- López, E., Cámara, M., Mendivil, M., Valdez, L., Gutiérrez, H., Ávila, L., y Arrollo, R. P. (2013). Desarrollo de un objeto de aprendizaje para la enseñanza de las matemáticas: el caso de las funciones. In *11th Latin American y Caribbean Conference for Engineering y Technology, Cancún, México*.
- Lozano, R. (2011). De las TIC a las TAC: tecnologías del aprendizaje y del conocimiento. *Anuario ThinkEPI*, 5(1), 45-47.

- Medina, M. y Ríos, Y. (2013). Representaciones externas usadas por los docentes para enseñar el tema de funciones. En Parra, Hugo; Noguera, Alexandra; Serres, Yolanda (Eds.), VIII Congreso Venezolano de Educación Matemática (pp. 238-246). Santa Ana de Coro: ASOVEMAT.
- Muñoz, M. y Ríos, C. (2008). Nociones Básicas sobre Álgebra: Análisis de las dificultades presentadas por los estudiantes en los procesos de aprendizaje de los conceptos básicos sobre Álgebra. Comunicación presentada en 9° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa. Valledupar, Colombia.
- Ortega, F. (2017) Principios e implicaciones del Nuevo Modelo Educativo. Revista Latinoamericana de Estudios Educativos, México.
- Ponce de León, M. & Juárez, J. (2023). La influencia de las características diagramáticas de los dibujos de los estudiantes en la matematización para la resolución de problemas geométricos. Educación Matemática, 35(1).
- Radford, L. y André, M. (2009) Cerebro, Cognición y matemáticas, Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, vol. 12, núm. 2, julio, 2009, pp. 215-250.
- Rodríguez, M., Barreiro, P., Leonian, P., Marino, T., y Pochulu, M. (2022). *Perspectivas metodológicas en la enseñanza y en la investigación en educación matemática*. Universidad Nacional de General Sarmiento.
- Saint-Onge, M., y Hurtado, E. (1997). Yo explico, pero ellos... ¿aprenden? Bilbao: Mensajero.
- Sampieri, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación*. México D.F, México: McGRAW-HILL
- SEP (2011) Programas de estudio, Guía para el Maestro, Matemáticas.
- SEP (2017) Aprendizajes clave, Plan y programas de estudios, Matemáticas.
- SEP (2019) Matemáticas, Segundo grado de telesecundaria. Dirección general de materiales educativos.
- Solaz-Portolés, J., & López, V. (2007). Representations in problem solving in science: Directions for practice. En Asia-Pacific Forum on Science Learning and Teaching (Vol. 8, No. 2, pp. 1-17). The Education University of Hong Kong, Department of Science and Environmental Studies.

- Soler, E. (2006) Constructivismo, innovación y enseñanza efectiva. Caracas, Equinoccio.
- Stake, R. (1999). Investigación con estudio de casos. *Investigación con estudio de casos*, 1-156.

## ANEXOS

### ANEXO 1

#### FORMATO DE ENTREVISTA SEMIESTRUCTURADA

#### LA COMPRENSIÓN DEL COMPORTAMIENTO GRÁFICO DE LAS FUNCIONES LINEALES MEDIANTE EL USO DE HERRAMIENTAS TECNOLÓGICAS EDUCATIVAS

CATEGORÍAS DE ANÁLISIS	Pregunta	PREGUNTAS DE ENTREVISTA
Comprensión de la representación de la función lineal en la gráfica.	¿Cómo favorecer la comprensión del comportamiento gráfico de las funciones lineales?	<p>¿Qué es una función lineal?</p> <p>¿Cuál es la diferencia entre una función lineal y una afín en su representación en la gráfica?</p> <p>¿Cuál es la diferencia de una función positiva y una negativa en la gráfica?</p> <p>¿identificas el valor de una función lineal solo con observar su dirección en la gráfica?</p> <p>¿Cómo podrías construir la gráfica de una función lineal en el plano cartesiano si solo te dan el valor de la función? Por ejemplo: <math>y=2x</math> y <math>Y=2x+1</math></p>
Tratamiento de los valores de la gráfica con respecto al valor de la función.	¿Qué efecto tiene el uso de la gráfica en la capacidad de tránsito de las representaciones semióticas?	<p>¿Qué es la pendiente en una función lineal?</p> <p>¿Se puede calcular el valor de la pendiente de una función lineal solo con observar su inclinación en la gráfica?</p> <p>¿Se te facilita el estudio de una función lineal si se utilizan aplicaciones de graficación digital?</p>
Conversión entre el cambio de representación semiótica de la función lineal	¿Qué tipo de conversión se emplea entre los problemas que se plantean y las gráficas que se construyen?	<p>¿Qué utilidad le puedes dar a gráficas de una función lineal en la vida cotidiana?</p> <p>¿Puedes dar un ejemplo de la vida cotidiana donde se pueda graficar una función lineal?</p>

## ANEXO 2

### Rúbrica

DESCRIPTORES	1 POCO O NADA	2 MEDIANAMENTE	3 TOTALMENTE	SUMATORIA
<b>Describe del concepto de una función lineal.</b>	No describe el concepto	Brinda algunas características del concepto	Describe claramente el concepto	3
<b>Reconoce la diferencia de una función lineal y una afín.</b>	No reconoce la diferencia	Brinda algunas características de una función, pero no utiliza un lenguaje formal	Reconoce claramente la diferencia entre una y otra con lenguaje formal.	2
<b>Identifica la posición y el comportamiento de una función lineal en la gráfica</b>	No ubica su posición en la gráfica	Manifiesta algunas características de la posición del valor de la función	Identifica en la gráfica los valores de la función lineal en la gráfica	2
<b>Describe la forma para construir una función lineal en la gráfica.</b>	No describe ningún ejemplo	Describe algunas características para la construcción de una función lineal en la gráfica.	Explica claramente los pasos para la construcción de una función la gráfica	2
<b>Interpreta el valor de la pendiente de una función lineal a través de la observación.</b>	Carece de interpretación de la función lineal	Brinda algunas características del valor de la pendiente de una función lineal en la gráfica	Reconoce el valor de la pendiente con su inclinación en la gráfica	1
<b>Reconoce el valor de la función lineal con su comportamiento en la gráfica</b>	Carece de información para el reconocimiento de la función lineal	Identifica solo algunas características de las funciones lineales en la gráfica	Reconoce la similitud entre el valor de una función y su comportamiento con su inclinación en la gráfica.	2
<b>Traslada el concepto de una función lineal a otro contexto</b>	No brinda algún ejemplo	Menciona un ejemplo, pero sin relacionarlo claramente con el concepto de funciones lineales	Proporciona un ejemplo contextualizado relacionado con el concepto de funciones lineales.	2
<b>TOTAL</b>	1	8	6	15