



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

IDENTIFICACIÓN DE PENSAMIENTO FUNCIONAL EN UN GRUPO DE ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN PREESCOLAR

TESIS
PARA OBTENER EL TÍTULO DE
MAESTRA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

PRESENTA
YURY DANIELA QUENORÁN LUCANO

DIRECTOR DE TESIS
DR. HONORINA RUIZ ESTADA

CO-DIRECTOR DE TESIS
DR. JUAN NIETO FRAUSTO

PUEBLA, PUE. JUNIO2022



DR. SEVERINO MUÑOZ AGUIRRE
SECRETARIO DE INVESTIGACIÓN Y
ESTUDIOS DE POSGRADO, FCFM-BUAP
P R E S E N T E:

Por este medio le informo que la C:

YURI DANIELA QUENORAN LUCANO

Estudiante de la Maestría en Educación Matemática, ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 06 de junio de 2022, con la tesis titulada:

“IDENTIFICACIÓN DE PENSAMIENTO FUNCIONAL EN UN GRUPO DE ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN PREESCOLAR”

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

A T E N T A M E N T E.
H. Puebla de Z. a 07 de junio de 2022

DRA. LIDIA AURORA HERNÁNDEZ REBOLLAR
COORDINADORA DE LA MAestrÍA
EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA.



Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), por su apoyo económico durante los dos años de estudio en tan acreditada universidad.

Número (CVU) 1039811

Agradecimientos

Agradezco en primer lugar a Dios, por concederme salud, sabiduría para terminar con éxito la presente investigación y doy gracias por permitirme cumplir con una meta más.

Agradezco a la Dra. Honorina por su paciencia, dedicación, por compartir conmigo sus conocimientos y por instruirme para sacar adelante la investigación. También agradezco al Dr. Juan Nieto Fausto y Dr. Josip Slisko Ignjatov y la Dra. Patricia Mendoza por cada uno de sus sugerencias y aportes que hicieron enriquecer el trabajo.

A mi esposo, porque ha estado ahí desde el primer momento que inicié esta gran aventura, brindándome todo su apoyo incondicional, dándome ánimo en los momentos que sentía que me rendía. A mi bebé que es lo más maravilloso que hay en mi vida, es quien hace que me levante día a día con una sonrisa, con ganas de ser mejor, tanto como mamá como profesional.

A mi familia, papás y hermanos, porque desde la distancia estuvieron pendientes de mi bienestar y siempre colocándose en sus oraciones para que todo se diera de la mejor manera.

Al CONAFE, Puebla, por permitirme trabajar con los niños de la Comunidad de Santa Cruz la Ixtla, en particular gracias a las maestras Samantha Zepeda y Rosario por su amabilidad y confianza.

Gracias a mis profesores, colegas y amigos, especialmente gracias a América Analco, por compartir sus conocimientos e impulsarme para llegar hasta aquí y seguir avanzando.

A la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla por abrirme sus puertas. Es para mí todo un honor ser egresada de una de las mejores universidades de México.

TABLA DE CONTENIDO

Resumen	4
Introducción	5
CAPÍTULO 1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN	8
1.1 Objetivos	11
1.1.1 Objetivo general.....	11
1.1.2 Objetivos específicos.....	12
1.2 Justificación	12
CAPÍTULO 2. MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL	15
2.1 Early algebra	15
2.2 Pensamiento algebraico temprano	15
2.3 Pensamiento funcional	17
CAPÍTULO 3. MÉTODO	21
3.1 Tipo de investigación	21
3.2 Participantes	21
3.3 Instrumentos.....	21
3.3.1 Secuencia de tareas.	22
3.4 Prueba piloto	24
3.5 Procedimiento.....	26
3.6 Descripción de las entrevistas realizadas.....	27
CAPÍTULO 4. ENTREVISTAS Y SU ANÁLISIS.....	33
4.1 Tipos de pensamiento funcional identificados en las respuestas estudiantiles	34
4.2 Algunas evidencias representativas del pensamiento funcional identificado	37

4.3 Estrategias y tipos de pensamiento funcional involucrados en las respuestas estudiantiles.....	39
<i>4.3.1 Estrategias identificadas en las respuestas estudiantiles Tarea 1 (perros y colas)</i>	
.....	41
<i>4.3.2 Estrategias identificadas en las respuestas estudiantiles Tarea 2 (perros y ojos)</i>	
.....	44
<i>4.3.3 Estrategias identificadas en las respuestas estudiantiles Tarea 3 (perros y platos. Uno de comida y otro de agua)</i>	
.....	46
<i>4.3.4 Estrategias identificadas en las respuestas estudiantiles Tarea 4 (perros, ojos y colas)</i>	
.....	48
<i>4.3.5 Estrategias en las respuestas estudiantiles Tarea 5 (perros, platos de comida y uno de agua)</i>	
.....	50
CAPÍTULO 5. DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS Y CONCLUSIONES.....	52
Referencias	56
Anexos	59
Anexo 1. Prueba piloto	59
Anexo 2. Entrevistas realizadas a los estudiantes del CONAFE	67

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1.	Tareas y ejemplos de preguntas.....	22
Tabla 2.	Cronología de las entrevistas realizadas a 5 niños	27
Tabla 3.	Edad de los cinco estudiantes y el número que llegan contado de uno en uno 33	
Tabla 4.	Tipos de pensamiento funcional identificados en las cinco tareas.....	34
Tabla 5.	Estrategias identificadas en las soluciones estudiantiles	40
Tabla 6.	Estrategias elaboradas por los estudiantes en la tarea 1.....	41
Tabla 7.	Estrategias elaboradas por los estudiantes en la tarea 2.....	44
Tabla 8.	Estrategias elaboradas por los estudiantes en la tarea 3.....	46
Tabla 9.	Estrategias elaboradas por los estudiantes en la tarea 4.....	48
Tabla 10.	Estrategias elaboradas por los estudiantes en la tarea 5	50

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.	Marcas usadas para representar dos perros.....	9
Figura 2.	Relación funcional entre número de perros y cantidad de ojos (tomada de Pinto (2016))	19
Figura 3.	Perros y colas	28
Figura 4.	Perros y ojos.....	29
Figura 5.	Perros y platos, uno de comida y otro de agua	30
Figura 6.	Perros ojos y colas.....	31
Figura 7.	Perros, platos de comida y uno de agua	32

Resumen

El objetivo de esta investigación es identificar la presencia del pensamiento funcional en cinco estudiantes de tercero de Preescolar Comunitario de la Comunidad Santa Cruz La Ixtla, perteneciente al Consejo Nacional de Fomento Educativo (CONAFE), Puebla, México. Los datos se obtuvieron de entrevistas clínicas que comprenden cinco tareas que involucran la variación directamente proporcional y la lineal. Las tareas se sitúan en contextos cotidianos como: perros y colas, perros y ojos, perros y platos de comida, las cuales están basadas en un artículo de Blanton y Kaput (2004) y otro de Castro, Cañadas y Molina (2017), quienes trabajaron grupalmente. Se interrogó individualmente a los informantes, las sesiones fueron grabadas en audio y luego transcritas. Se observaron evidencias de pensamiento de recurrencia y correspondencia, pero no del covariacional.

Palabras clave: pensamiento funcional, variación lineal, variación directamente proporcional, educación preescolar

Abstract:

The objective of this research is to identify the presence of functional thinking in five third-year students of Communitarian Preschool of the Santa Cruz La Ixtla Community, belonging to the National Council for Educational Promotion (CONAFE), Puebla, Mexico. Data obtained from clinical interviews encompass five tasks involving directly proportional and linear variation. The tasks are located in everyday contexts such as: dogs and tails, dogs and eyes, dogs and food dishes, which are based on an article by Blanton and Kaput (2004) and another by Castro, Cañadas and Molina (2017), who worked on groups. The informants were questioned individually, the sessions were recorded in audio and then transcribed. Evidence of recurrence and correspondence thinking was observed, but not of covariational thinking.

Key words: functional thinking, linear variation, directly proportional variation preschool education

Introducción

El presente trabajo se enmarca en el enfoque de Early Algebra, que surgió como consecuencia de la separación entre la aritmética tradicional y el álgebra (Stephens et al. 2017; Kieran, 2004). Con este enfoque se busca que los estudiantes construyan su razonamiento informal de forma intuitiva sobre patrones y relaciones en el trabajo aritmético y experiencias cotidianas apropiadas como base para el pensamiento algebraico (Stephens et al. (2017)).

El pensamiento algebraico está basado en el desarrollo de formas de pensar sobre la relación entre cantidades, la identificación de estructuras, el estudio del cambio, la generalización, la resolución de problemas, la modelación, la justificación, la prueba y la predicción (Kieran, 2004). En este sentido, Carraher, Schliemann, Brizuela y Earnest (2006) señalan que la generalización es “el corazón del pensamiento algebraico”.

De acuerdo con Tanisli (2011), uno de los componentes del pensamiento algebraico es el pensamiento funcional, que ha cobrado gran relevancia en los últimos años al facilitar el estudio de la noción de función, que consiste en establecer una relación entre dos conjuntos de datos. El pensamiento funcional, de acuerdo con Smith, (2008), emerge y se desarrolla a partir de tres tipos de pensamientos: (a) pensamiento de recurrencia, es la relación que se define con base en los valores de un mismo conjunto de datos, (b) pensamiento covariacional, implica analizar la variación simultánea entre dos cantidades que cambian y (c) pensamiento de correspondencia, es la construcción de una regla que permita hallar el valor de una variable, a partir de un valor dado en la otra variable.

Autores como Blanton y Kaput (2004) y Castro et al. (2017) han indagado acerca del pensamiento funcional en niños de preescolar. Ellos atendieron la variación simultánea entre pares de cantidades proponiendo tareas que involucran: perros y ojos, perros y colas, perros y platos de comida, mismas que aplicaron a estudiantes de este nivel educativo. Reportaron que sus informantes mostraron evidencias del pensamiento de recurrencia, covariacional y de correspondencia.

Siguiendo a estos autores, nos interesamos en la búsqueda de evidencias de pensamiento funcional en niños de preescolar atendidos por el Consejo Nacional de Fomento Educativo (CONAFE) y establecemos el siguiente cuestionamiento: ¿qué evidencias de pensamiento funcional se identifican en estudiantes de preescolar comunitario del CONAFE cuando trabajan con tareas que involucran la variación directamente proporcional y la lineal? Para responder esta pregunta se implementaron dos instrumentos. El primero es una secuencia de tareas basadas en investigaciones de Blanton y Kaput (2004) y Castro et al. (2017). El segundo consiste en la construcción de entrevistas semiestructuradas. Ambos se aplicaron a 5 alumnos de tercero de preescolar de la escuela ubicada en Santa Cruz la Ixtla, zona rural del Estado de Puebla, en México, la cual atiende a 19 estudiantes en total.

Resumiendo, el presente trabajo espera aportar evidencias de pensamiento funcional en la educación preescolar, particularmente, el pensamiento de recurrencia y correspondencia, debido a que presenta características claves sobre el pensamiento funcional en la matemática escolar, tales como: la identificación de patrones, relación entre variables y la generalización en términos de variables, que son consideradas por los profesores de matemáticas para trabajarse en el aula de clases.

Para efectos de organización, el trabajo se divide en cuatro capítulos. En el primero, se describe el planteamiento del problema de investigación, en términos de *a*) contextualización y formulación del problema, *b*) objetivo general y específicos y *c*) justificación del problema. Básicamente se problematiza la identificación del pensamiento funcional y en correspondencia con la pregunta de investigación se plantea un objetivo general y tres objetivos específicos, cerrando el capítulo con algunas ideas que rescatan la importancia de abordar esta problemática.

El segundo capítulo aborda conceptualizaciones que están en correspondencia con el estudio del álgebra en la matemática escolar y se expone el pensamiento funcional desde la perspectiva de Smith (2008). De manera particular, se describen y ejemplifican, los tres tipos de este pensamiento.

En el tercer capítulo se discute el método de investigación, de corte cualitativo. En este apartado se especifica los participantes que integran el estudio, los instrumentos utilizados, el procedimiento y tiempos de implementación de entrevistas clínicas semiestructuradas.

En el capítulo cuatro se analizan las producciones estudiantiles de las cinco tareas que involucran la variación directamente proporcional y la lineal. Los resultados muestran semejanzas en cuanto a la forma en que transitan los estudiantes entrevistados por Castro et al. (2017) y los niños de tercero de preescolar comunitario del CONAFE.

Finalmente, se exponen las conclusiones del estudio y se proponen algunos interrogantes para futuras investigaciones.

CAPÍTULO 1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

En este primer capítulo se describe los antecedentes que dieron lugar al problema de investigación. Para ello, se sintetizan los resultados de los principales estudios previos y se plantea la presente investigación. Se presenta la pregunta de investigación, el objetivo general, los objetivos específicos y finalmente, se presenta la justificación del porqué se originó el presente estudio.

En relación con la lectura sobre pensamiento funcional en la educación preescolar se ha encontrado poca investigación, lo que hace que el presente trabajo sea novedoso y necesario. Cabe destacar que los hallazgos de investigaciones acerca del pensamiento funcional, con estudiantes de educación preescolar proporcionan evidencias sobre las habilidades, conocimientos generales y específicos que presentan para trabajar con problemas que involucran cantidades variables (Blanton y Kaput 2004; Castro et al. (2017).

Blanton y Kaput (2004) realizaron un estudio que se llevó a cabo en la University of Massachusetts Dartmouth, USA, que se enfocó en cómo los estudiantes de preescolar a quinto grado de educación primaria evidencian pensamiento algebraico a través de la generalización de patrones en la resolución de dos tareas, que involucran relaciones funcionales entre un cierto número de perros y el total de ojos y colas. El siguiente problema es uno de los planteados a los estudiantes.

Supongamos que estabas en un refugio para perros y querías contar todos los ojos de los perros que observaste. Si había un perro, ¿cuántos ojos había? ¿Y en dos perros? ¿En tres perros? ¿En 100 perros? ¿Ves alguna relación entre el número de perros y el total número de ojos? ¿Cómo describirías esta relación? ¿Cómo lo sabes? (p. 136)

Las respuestas de los estudiantes fueron grabadas en video y en hojas de trabajo proporcionadas. Los investigadores analizaron y presentaron las producciones de cada uno de los cursos por separado. En particular, el presente trabajo se interesa por los hallazgos de los estudiantes de educación preescolar (5 a 6 años). Así, Blanton y Kaput, exponen que los niños hallaron el número de ojos y colas para 10 perros, mediante el conteo de objetos visibles

o asignando un punto para cada ojo y una marca larga para cada cola, tal como se observa en la Figura 1.

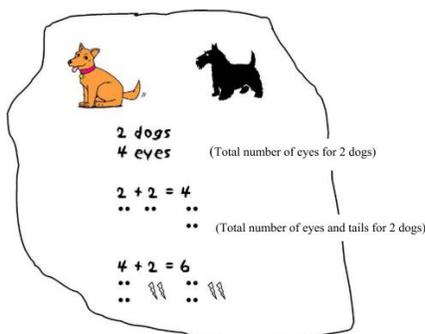


Figura 1. Marcas usadas para representar dos perros

Además, mencionan que algunos niños identificaron el patrón en la cantidad de ojos y comenzaron a pensar en cómo la cantidad varía. Describieron una relación aditiva entre el número de ojos y perros expresando que: “*cada vez que agregamos un perro más obtenemos dos ojos más*”, lo que indica que estaban atendiendo a la variación simultánea entre el número de perros y el número de ojos (pensamiento covariacional).

Castro et al. (2017) presentaron un estudio sobre el pensamiento funcional en un grupo de 12 estudiantes de educación preescolar (5-6 años) de un colegio privado de Granada, España. Trabajaron con ellos durante tres sesiones de aproximadamente una hora de duración. Plantearon tres situaciones sobre perros: (1) perros y collares, (2) perros y platos de comida, (3) perros, platos de comida y uno de agua. Dichas situaciones están inspiradas en los problemas presentados en el estudio de Blanton y Kaput (2004). Los investigadores presentaron el contexto de la situación empleando imágenes de perros, collares y platos en colores que se pegaron en la pizarra, seguido, se formularon preguntas relativas a casos particulares y a medida que los estudiantes entendían lo que se les preguntaba, iba aumentando la magnitud de los números propuestos, llegando a preguntar por la generalización y la expresión de dicha relación mediante una letra. Las sesiones se desarrollaron de forma colectiva y fueron grabadas con videocámara.

Las respuestas obtenidas por parte de los niños fueron orales durante las tres sesiones y en ellas se evidencia que los niños emplean pensamiento de covariación y correspondencia.

Por ejemplo, la segunda situación (perros y platos de comida), donde los investigadores manifiestan que, en primer lugar, mostraron un perro y dos platos de comida, luego dos perros con sus cuatro platos, posteriormente tres perros, pero antes de pegar los platos, los estudiantes mencionaron que necesitan seis platos, esto indicó que percibieron que el número de platos es el mismo que el número de perros, permitiéndoles a Castro y colaboradores preguntar para cuatro, cinco, siete y otros números de perros.

Los investigadores reconocieron que los estudiantes identificaron el patrón de la cantidad de platos. Por ejemplo, para hallar el resultado para cuatro y cinco perros algunos razonan de forma recurrente sumando dos al caso anterior, ya sea partiendo del resultado del caso particular previo o sumando dos veces el mismo número. También, señalan que algunos niños muestran dificultad cuando se pregunta por seis perros en adelante, mientras que otros estudiantes dan la respuesta rápidamente al preguntar por el número de platos para diez, cien y un millón de perros, explicando que: *“hay que ponerle dos platos a cada perro”*. Lo que quiere decir que el estudiante ha establecido la relación entre el número de perros y la cantidad de platos.

De esta manera, los estudiantes emplean pensamiento de covariación y correspondencia, el primero se ve reflejado cuando los estudiantes van sumando dos cada vez que se aumenta un perro, el segundo se evidencia cuando tienen en cuenta dos veces el mismo número de perros.

De este modo, Blanton y Kaput (2004) concluyeron que, aunque las matemáticas de la educación primaria incluyen nociones de patrones, no se presta atención al pensamiento funcional, especialmente en los primeros grados de escolaridad. Así mismo, señalan que la búsqueda de patrones en los datos de una sola variable tiene menos capacidad predictiva y es menos poderosa matemáticamente que el pensamiento funcional, deduciendo que es necesario incluir en el plan de estudios tareas que involucren dos cantidades variables.

Siguiendo esta misma línea, estudiosos como Beatty, Day-Mauro y Morris (2003) y Warren y Cooper (2008), aseveran que en los planes de estudio se hace poco énfasis al desarrollo del pensamiento funcional en los estudiantes, enfocándose solo en la variación de un solo conjunto de datos. Por otro lado, se evidencia la falta de experiencia por parte de los

maestros para trabajar con relaciones funcionales, limitándose al trabajo con patrones recursivos. En este sentido Smith (2007, como se citó en Stephens et al. (2017)) señala que:

“Los maestros de educación primaria pueden crear experiencias de clases ricas entorno a patrones, pero no tienen una idea de cómo este tema se relaciona con el desarrollo matemático continuo de sus estudiantes, y mucho menos con el tema de las funciones” (p.136).

Por otra parte, Castro et al. (2017) mencionan que se subestima a los estudiantes de corta edad al creer que no pueden trabajar con ideas algebraicas y por tanto se retrasa la enseñanza del álgebra al considerar que los niños no están preparados para aprenderla. No obstante, los resultados encontrados por estos investigadores señalan que los estudiantes desde muy pequeños piensan algebraicamente, tienen ideas intuitivas para trabajar con situaciones que involucran relaciones funcionales lineales, reconocen y generalizan relaciones en los datos de funciones y emplean pensamiento covariacional y de correspondencia.

A raíz de lo anterior, la presente investigación parte de la necesidad de potenciar el pensamiento algebraico (en particular, el pensamiento funcional) en edades tempranas y se plantea el siguiente cuestionamiento: ¿qué evidencias de pensamiento funcional se identifican en estudiantes de educación preescolar del CONAFE cuando trabajan con tareas que involucran la variación directamente proporcional y la lineal?

Teniendo en cuenta la pregunta de investigación se plantea los siguientes objetivos.

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivo general

Identificar evidencias de pensamiento funcional en un grupo de estudiantes de educación preescolar del CONAFE cuando trabajan con tareas que involucran la variación directamente proporcional y la lineal.

1.1.2 Objetivos específicos

Elaborar instrumentos de investigación que permitan identificar evidencias de pensamiento funcional en un grupo de estudiantes de educación preescolar.

Implementar los instrumentos elaborados en un grupo de estudiantes de educación preescolar del CONAFE.

Analizar las respuestas orales de los informantes, bajo las categorías propuestas en la presente investigación.

1.2 Justificación

En la investigación de Rojas y Vergel (2013) mencionan que, los estudiantes como los profesores hablan sobre la existencia de dificultades para aprender y enseñar álgebra en la Educación Secundaria. Estas dificultades están relacionadas con el uso de las “letras (variables)” y el significado de estas, en contextos matemáticos. Además, estos autores manifiestan que incluso estudiantes con un buen desempeño académico, se muestran inconformes por tener que trabajar con variables, expresando que: “... y por qué tengo que trabajar con letras”, o, “¿sí ve?, ¿de qué sirvió todo lo anterior? ... ¡para que ahora no entienda nada!, o, incluso, “aparecieron las malditas letras” (p. 761).

Otra de las dificultades que se menciona dentro de la literatura entorno al estudio el álgebra en la educación secundaria se refiere al conflicto para establecer la generalización debido al orden de enseñanza, primero aritmética y, luego álgebra, como si fueran dos materias distintas (Payne, 2012). En este sentido, y teniendo en cuenta, que el álgebra puede enseñarse gradualmente desde los primeros años de escolaridad, a través del pensamiento funcional (Tanisli, 2011), en esta investigación se toma en consideración la justificación y organización de la propuesta curricular del Preescolar Comunitario propuesto por el CONAFE. Esta propuesta le da una importancia al estudio sobre el álgebra temprana al propiciar el tránsito entre la aritmética y el álgebra en el currículo escolar (Monje, 2014). En este sentido, Monje expone que su interés no es que los estudiantes desde los primeros grados de escolaridad manejen una sintaxis algebraica, sino que construyan poco a poco las ideas algebraicas.

Tal como lo indica el CONAFE, no se pretende que los estudiantes desde los primeros años de escolaridad dominen los conceptos algebraicos, sino que se les brinde oportunidades sostenidas y longitudinales para interactuar sistemáticamente con ideas algebraicas, de manera que se les permita trabajar con cantidades que varían y establecer la relación de dichas cantidades (Monje, 2014). Al respecto, Stephens et al. (2017), sugieren que “los estudiantes necesitan oportunidades para participar en el pensamiento funcional durante un período de tiempo sostenido, y requieren apoyo en forma de tareas apropiadas y andamiaje de maestros para tener éxito” (P. 146). Por lo tanto, es a través del trabajo con tareas que involucran cantidades variables y con apoyo de los maestros que se puede forjar hábitos algebraicos en la mente de los estudiantes desde edades tempranas.

Es así como el CONAFE precisa que, el desarrollo del pensamiento algebraico es una actividad cognitiva distinta para acceder a la formalización algebraica. Por consiguiente, “requiere un proceso mucho más largo y complejo, que rebasa a las pretensiones y posibilidades de la educación básica, pero tener acceso al pensamiento algebraico en edades tempranas es posible” (Monje, 2014, p. 42). Por ello, Monje sostiene que es necesario disponer de tiempo y práctica porque cada estudiante aprende de acuerdo con la edad, conocimientos y experiencias previas. Así mismo, el ambiente de aprendizaje que se propicie en el aula de clase influye en el desarrollo del pensamiento matemático.

Por otra parte, Monje (2014) afirma que la resolución de un problema depende del tipo de actividades y el uso de materiales que se les propone a los estudiantes, para permitirles descubrir las características de los objetos y las relaciones que se pueden establecer entre ellos. En el aula de clase se puede pedir a los estudiantes que ordenen dos conjuntos de objetos en correspondencia uno a uno, por ejemplo, un lápiz con el 1, dos lápices con el dos, y así sucesivamente. Kaput (2002, como se citó en Wilkie y Clarke, 2016), recomienda el uso de contextos familiares para favorecer el aprendizaje de las relaciones funcionales en la vida real. Además, propone ejemplos como: “las alturas de las plantas o las personas, las temperaturas y el número de personas que cambian con el tiempo y el costo de un producto en función de número comprado” (p. 227).

Se resalta la importancia de la presente investigación, en primer lugar, porque las funciones como contenido clave del pensamiento funcional se utilizan para modelar las aplicaciones del mundo real y, en segundo lugar, el pensamiento funcional es relevante para el estudio de las matemáticas en todos los niveles de escolarización. Por tal razón, ayudar a los estudiantes a desarrollar dicho pensamiento dentro de una situación contextualizada, potencia la exploración de procesos de generalización. Así mismo, se contribuye al desarrollo de habilidades, destrezas y conocimientos de forma eficiente para resolver problemas que impliquen cantidades variables.

CAPÍTULO 2. MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL

En este capítulo se aborda las bases teóricas que sustentan la investigación. Con base en la literatura realizada sobre pensamiento funcional se consideran los siguientes aspectos: early algebra, pensamiento algebraico y pensamiento funcional.

2.1 Early algebra

Algunos autores consideran “el álgebra como una piedra angular de las matemáticas” (Stephens et al. 2017, p. 225). Sin embargo, para la mayoría de estudiantes la transición de la aritmética al álgebra es difícil, porque se requiere realizar diversos ajustes, entre ellos: a) centrarse en la relación entre dos cantidades que varían conjuntamente en lugar de enfocarse únicamente en el cálculo operacional; b) emplear registros de representación en la resolución de problemas y no solo resolverlos; y c) trabajar con números y letras en lugar de hacerlo solo con números (Kieran, 2004).

Un enfoque interesado en romper la brecha de la separación entre la aritmética y el álgebra, se denomina Early algebra. Este se entiende como un programa de investigación, enfocado a la enseñanza y práctica docente que se enmarca en los estudiantes más jóvenes y resalta el estudio del álgebra a lo largo de la educación matemática, y que merece un lugar en el currículo temprano (Carraher y Schliemann, 2014; Kieran, Pang, Schifter y Ng, 2016). Cabe mencionar que, este enfoque es un medio para ayudar a los estudiantes a pensar de forma más profunda sobre los contenidos de las matemáticas escolares existentes, dado que tiene el potencial de incorporar conceptos aritméticos en tareas algebraicas (Blanton et al. 2018).

La integración de este enfoque en los primeros grados de escolaridad prepara a los estudiantes para el estudio del álgebra en grados posteriores, lo cual ha llevado a que diferentes investigadores se interesen por profundizar y ampliar información enmarcada en este aspecto.

2.2 Pensamiento algebraico temprano

Investigaciones enmarcadas en el desarrollo del pensamiento algebraico temprano como la Radford, 2011 y 2012, revela que más allá de notaciones simbólicas, algoritmos para operaciones numéricas y respuesta numérica única, se busca que los estudiantes razonen,

analicen, predigan, conjeturen y expliquen sus procedimientos de diversas maneras ante un problema dado. En este sentido, Kieran considera que:

El pensamiento algebraico en los primeros grados implica el desarrollo de formas de pensar dentro de las actividades para las cuales el álgebra simbólico con letras se puede usar como una herramienta, pero que no son exclusivas del álgebra y que se pueden involucrar sin usar ningún álgebra simbólico con letras, tales como, analizar las relaciones entre cantidades, notar la estructura, estudiar el cambio, generalizar, resolver problemas, modelar, justificar, probar y predecir (p. 2004).

Siguiendo esta misma línea Kieran (2011) menciona que:

El pensamiento algebraico está arraigado y surge de los poderes naturales de los alumnos para tener sentido matemáticamente. En el corazón mismo del álgebra está la expresión de generalidad. La explotación del pensamiento algebraico dentro de la aritmética, a través de la expresión explícita de la generalidad, hace uso de los poderes de los alumnos para desarrollar su pensamiento algebraico y, por lo tanto, apreciar la aritmética más a fondo (p. 310).

En el libro editado por Cai & Knuth (2011) se muestra un amplio panorama sobre el pensamiento algebraico temprano. Allí, Kieran pone de relieve que el álgebra en la educación primaria consiste en las diferentes formas de pensar sobre: a) lo general y lo particular; b) las reglas sobre patrones; c) la relación entre cantidades, números y operaciones numéricas; d) la representación de las relaciones en situaciones problemáticas; e) la conceptualización en el procedimiento; f) la anticipación y justificación; g) los gestos, la visualización y la ejecución del lenguaje.

De igual modo, Kieran menciona que, no se trata de aplicar el contenido del álgebra que se presenta en la educación secundaria, sino el contenido de la aritmética incluido elementos de función y cambio. Además, se trata de reconocer su cara funcional, que implica patrones, identificar las cantidades variables en un problema, analizar la variación y establecer la correspondencia entre dichas cantidades. De esta manera, se habla del pensamiento funcional

como uno de los caminos clave del pensamiento algebraico y que su foco principal es el reconocimiento de la relación funcional entre dos cantidades que varían.

2.3 Pensamiento funcional

De acuerdo con la literatura sobre el estudio del pensamiento funcional, particularmente en la educación primaria, se observa que la definición abordada en los diferentes estudios guarda ciertas similitudes que remiten a la relación entre dos cantidades que varían y la generalización de las relaciones, sin embargo, también presentan matices distintos que dependen de los objetivos que las investigaciones quieren alcanzar.

En el estudio de Warren y Cooper (2005), el pensamiento funcional es definido como: a) las ideas de cambio (cualitativo y cuantitativo), b) las relaciones que hay entre ellas y c) la solución de problemas utilizando estas relaciones. Así mismo añaden que a través del pensamiento funcional se pueden establecer relaciones de dependencia entre valores de dos conjuntos en una situación cercana y cotidiana para el estudiante, lo que permite descubrir otras parejas de valores en la situación y la generalización que hay entre los conjuntos que se tienen.

Para Rico (2006), es una herramienta para la resolución de problemas, que puede resultar útil para pensar en las relaciones entre las cantidades que varían y debe considerarse como una meta disciplinar y fundamental en la enseñanza de las matemáticas.

Para Smith (2008), el pensamiento funcional se entiende como una actividad cognitiva que “se enfoca en la relación entre dos cantidades que varían, particularmente las formas de pensamiento que conducen desde las relaciones específicas (incidencias individuales) a generalizaciones de esas relaciones entre instancias” (p.145).

Blanton et al. (2015), refieren que en el estudio del pensamiento funcional es importante considerar las diferentes formas de representación (lenguaje natural, notación variable, tablas y gráficos), la justificación de las relaciones obtenidas de las diversas representaciones y el razonamiento sobre cómo las representaciones generalizadas juegan un papel fundamental para comprender y predecir el comportamiento funcional.

Pinto y Cañadas (2017) establecen que el pensamiento funcional tiene como base, la relación entre cantidades involucradas, la variación conjunta y el concepto de función, siendo un contenido matemático fundamental. Por otra parte, mencionan que es uno de los enfoques del álgebra adoptado en la Educación Primaria, cuyo objetivo es que los estudiantes se centren y desarrollen habilidades en cuanto al razonamiento sobre las relaciones entre cantidades que varían, la identificación de patrones que subyacen de las relaciones y sus representaciones y la realización de procesos de generalización con el fin de justificarlos.

De acuerdo a las posturas respecto al pensamiento funcional y de acuerdo a los objetivos del trabajo, la definición planteada por Smith (2008) presenta características más amplias sobre el pensamiento funcional, que se describen a continuación.

El autor distingue tres tipos de pensamiento funcional fundamentales en los procesos de generalización: 1) recurrencia, 2) correspondencia y 3) covariación.

El pensamiento funcional de recurrencia implica relacionar los valores de un mismo conjunto, describir la variación entre los valores de la secuencia y obtener un resultado a partir del número o números previos. El pensamiento de correspondencia se centra en la relación entre pares correspondientes de variables, implica establecer una regla que permita determinar un valor de una variable dado un valor en la otra variable. Finalmente, el pensamiento covariacional hace énfasis en la variación simultánea y coordinada de dos cantidades relacionadas entre sí, se enfoca en cómo el cambio de una cantidad produce un cambio en la cantidad relacionada.

En la figura 2 se presenta la tarea de “perros y ojos” para ilustrar, a manera de ejemplo, los tres tipos de pensamiento funcional.

Número de perros (x)	Cantidad de ojos (y)
1	2
2	4
3	6

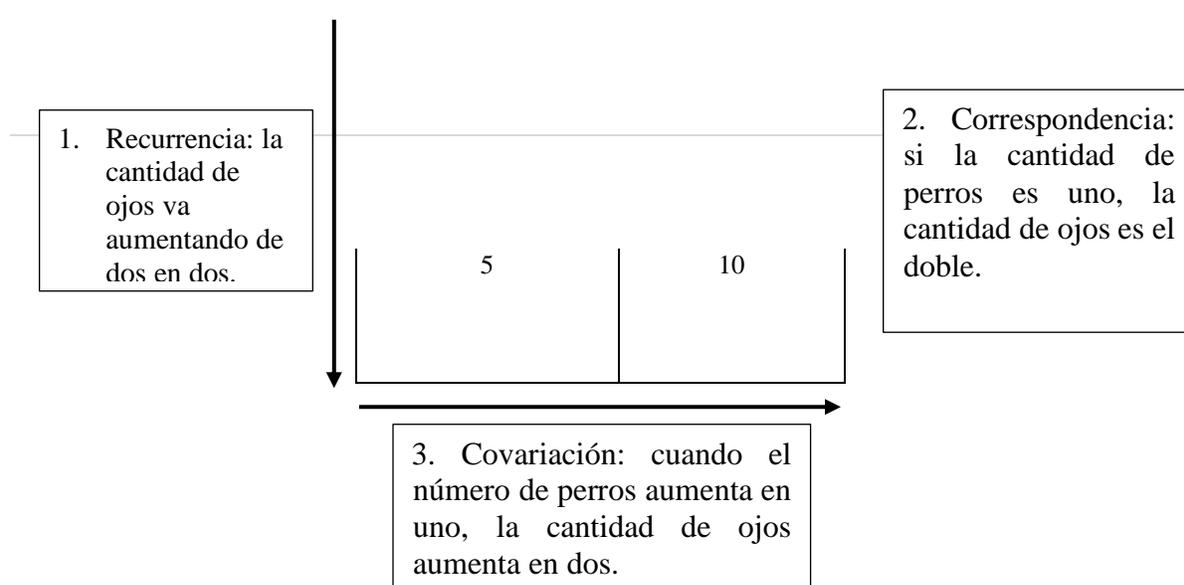


Figura 2. Relación funcional entre número de perros y cantidad de ojos (tomada de Pinto (2016))

Además, de acuerdo con Smith (2008), enfocarse en el pensamiento funcional implica construir una relación entre variables, que significa ir más allá de la construcción de registros (medios de apoyo para representar y expresar valores entre dos cantidades que varían). Por ejemplo, una tabla en la que se coloca dos valores en una misma fila para indicar que esos dos valores son los miembros correspondientes de los dos conjuntos. Smith destaca la importancia de trabajar con tareas que involucren relaciones funcionales para avanzar en la construcción de la noción de función. Igualmente, este autor enfatiza en la resolución de problemas contextualizados como un proceso individual, donde “la génesis del pensamiento funcional ocurre cuando un individuo se involucra en una actividad, opta por prestar atención a dos cantidades que varían, y luego comienza a centrarse en la relación entre estas cantidades” (p. 145).

Para ello, propone seis actividades que potencian el pensamiento funcional, las cuales están divididas en tres fases que se muestran a continuación:

Fase 1. *Participar en una problemática dentro de una situación funcional:* consiste en construir situaciones donde los estudiantes se enfoquen en la relación entre dos cantidades que varían. Las situaciones pueden ser reales o imaginarias, las cuales son construidas por el docente y/o investigador con el propósito de que el estudiante realice las siguientes actividades:

1. Participe en algún tipo de actividad física o conceptual.
2. Identifique dos cantidades que varían en el curso de esta actividad y enfoque la atención en la relación entre estas dos variables.

Fase 2. *Crear un registro:* consiste en que el estudiante construya medios de apoyo para representar y expresar los valores entre dos cantidades variables. La actividad se desarrolla a partir de:

3. La construcción de un registro de los valores correspondientes de estas cantidades, típicamente tabulares, gráficos o icónicos.

Fase 3. *Búsqueda de patrones y certeza matemática:* se lleva a cabo cuando el estudiante establece una relación entre dos cantidades variables. Esta fase refiere de 3 procedimientos:

4. Identificar patrones en los registros.
5. Coordinar los patrones identificados con las acciones involucradas en la realización de la actividad.
6. Usar esta coordinación para crear una representación del patrón identificado en la relación.

Smith (2008), señala que los estudiantes pueden no realizar estas actividades como una secuencia lineal, incluso no realizarlas en su totalidad. Esto no significa que no desarrollen pensamiento funcional, razón por la que en este estudio no se hace énfasis en las actividades 3 y 6, puesto que, no se busca que los estudiantes construyan registros mediante los cuales representen los valores entre dos cantidades.

CAPÍTULO 3. MÉTODO

En este capítulo se presentan los componentes del método que enmarcan esta investigación. Para ello, se describe el tipo de investigación, se caracteriza los sujetos participantes, los instrumentos para la recogida de datos y el procedimiento de la recolección de la información.

3.1 Tipo de investigación

La investigación reportada en este documento es de tipo cualitativo porque, permite entre otros aspectos, estudiar los fenómenos desde su contexto, dar una explicación detallada de los comportamientos y manifestaciones que ocurren dentro del mismo, describir los sucesos por medio de las acciones y producciones de los estudiantes, además de comprender e interpretar la forma en que los perciben y los experimentan (Hernández, Fernández y Baptista, 2014).

Específicamente, esta investigación es de carácter exploratorio y descriptivo (Hernández et al. 2014). Es exploratorio, porque se busca incrementar la escasa información que actualmente se conoce acerca del pensamiento funcional en estudiantes de educación preescolar. Es descriptivo, debido a que se considera necesario describir detalladamente las soluciones que brindan los estudiantes a las preguntas planteadas con el fin de identificar evidencias del pensamiento funcional.

3.2 Participantes

Los informantes son 5 estudiantes, dos niños y tres niñas (4 a 6 años) de la comunidad Santa Cruz La Ixtla, ubicada en una zona rural del Estado de Puebla, México. Son escolares de tercero de preescolar comunitario que forma parte del CONAFE.

3.3 Instrumentos

Para la recolección de datos se tuvo en cuenta dos instrumentos, (1) una secuencia de cinco tareas que involucran la variación directamente proporcional y la lineal y (2) entrevistas clínicas semiestructuradas, donde los estudiantes resuelven las tareas que se citan a continuación.

3.3.1 Secuencia de tareas.

Con el fin de identificar evidencias del pensamiento funcional, se toma en cuenta la primera fase (participar en una problemática dentro de una situación funcional) propuesta por Smith (2008), que debe ser presentada por el docente y/o investigador. A partir de esto, se tomó cinco tareas basadas en los artículos de Blanton y Kaput (2004) y Castro y colaboradores (2017).

En la tabla 1 se presenta el número de tarea, el tipo de variación que involucra cada tarea y ejemplos de preguntas que se pueden realizar a los estudiantes.

Tabla 1. Tareas y ejemplos de preguntas

Tipo de variación	Secuencia de tareas	Ejemplos de preguntas
$y = x$	<p>Tarea 1. Perros y colas: La relación entre el número de perros y el número de colas.</p> <p>Modificado de Castro et al. (2017).</p>	<p>En un perro hay una cola, ¿cuántas colas hay en dos perros?,</p> <p>En tres perros, ¿cuántas colas habría?</p> <p>Y en nueve perros, ¿cuántas colas habría?</p>
$y = 2x$	<p>Tarea 2. Perros y ojos: La relación entre el número de perros y el número de ojos.</p> <p>Tomada de Blanton y Kaput (2004).</p>	<p>En un perro hay dos ojos, ¿cuántos ojos hay en dos perros?,</p> <p>¿Cuántos ojos habría en tres perros?</p> <p>En cuatro perros, ¿cuántos ojos habría?</p>
$y = 2x$	<p>Tarea 3. Perros y platos. Uno de comida y otro de agua por perro: La relación entre el número de perros y el número de platos de comida y agua.</p> <p>Modificado de Castro et al. (2017).</p>	<p>Para un perro se necesita dos platos. Uno de comida y uno de agua. ¿cuántos platos se necesita para dos perros?</p> <p>¿Cuántos platos son necesarios para tres perros?</p> <p>¿Cuántos platos necesitarías para cuatro perros?</p>
$y = 2x$ y $y = x$	<p>Tarea 4. Perros, ojos y colas: La relación entre el número de perros y el número de ojos y colas.</p>	<p>Si en un perro hay dos ojos y una cola, ¿cuántos ojos y cuántas colas hay en dos perros?,</p>

	Tomada de Blanton y Kaput (2004).	¿Cuántos ojos habría en tres perros y cuántas colas? Y en cuatro perros, ¿cuántos ojos y colas habría?
$y = x + 1$	Tarea 5. Perros, platos de comida y uno de agua: La relación entre el número de perros y el número de platos de comida y un plato de agua. A cada perro le corresponde un plato de comida y todos beben agua de un solo plato. Tomada de Castro et al. (2017).	Para un perro se necesita dos platos, uno de comida y uno de agua. Para dos perros se necesita tres platos, dos de comida y uno de agua, porque todos toman de un solo plato. Para tres perros, ¿cuántos platos serían necesarios? ¿Cuántos platos son necesarios para cuatro perros?

De acuerdo con Castro et al. (2017) los niños parecen tener más dificultades con tareas que involucran la variación de tipo $y = x + b$ y $y = mx$, que las del tipo $y = x$, por tanto, se considera que esta última sería un punto de partida más apropiado para el desarrollo del pensamiento funcional. Por lo anterior, la secuencia de tareas inicia con las que involucran la variación de tipo $y = x$ (tarea 1), para luego pasar a la variación del tipo $y = mx$ (tareas 2 y 3) y finalizar con una breve mirada a la variación del tipo $y = x + b$ (tarea 5).

La tarea 1 se modificó de Castro et al. (2017). Ellos propusieron la tarea perros y collares. Fue necesario hacer la modificación a perros y colas, porque se consideró que esto permitiría a los estudiantes comprender la secuencia de tareas e ir articulando las respuestas de las primeras preguntas con las posteriores.

La tarea 2 (perros y ojos) y la tarea 4 (perros, ojos y colas) se tomaron de Blanton y Kaput (2004).

La tarea 3 se modificó de Castro et al. (2017). Ellos trabajaron con perros y dos platos de comida para cada uno. En el presente trabajo se presentó un plato de comida y uno de agua.

Finalmente, la tarea 5 se tomó de Castro et al. (2017). Cabe mencionar que ellos preguntaron solo hasta doce perros. Mencionan que los estudiantes decían no entender lo que

se les estaba preguntando. A diferencia de la presente investigación, las respuestas de los estudiantes permitieron preguntar por un número mayor de perros, inclusive se realizaron preguntas que involucraron variables.

Con el fin de analizar la efectividad de las cinco tareas y preguntas correspondientes se realizó una prueba piloto que se discute a continuación.

3.4 Prueba piloto

Se aplicó las cinco tareas a un estudiante de tercero de educación preescolar (5 años), de una escuela privada de la ciudad de Puebla. Se llevó a cabo, de manera presencial, una entrevista clínica semiestructurada, que fue grabada en audio. La entrevista terminó en el momento que el estudiante no dio respuestas correctas a las preguntas realizadas.

Para el análisis de los datos, se transcribió las respuestas proporcionadas por el estudiante en cada una de las tareas.

A continuación, se muestran extractos de las soluciones obtenidas en el estudio piloto. El diálogo llevado a cabo con el informante se muestra en el Anexo 1. Para diferenciar el dialogo entre la investigadora y el estudiante se utiliza la etiqueta I para investigadora y E para el estudiante.

De acuerdo con las respuestas brindadas por el estudiante en la entrevista de la Tarea 1 (Perros y colas), se puede observar que desarrolla pensamiento funcional, específicamente pensamiento de correspondencia, puesto que identifica que el número de colas tanto en un número pequeño como en una gran cantidad de perros, corresponde al número de perros por el que se cuestiona. Así, a la pregunta, ¿cuántas colas hay en treinta perros?, el niño responde “treinta colas”. A continuación, se muestra el dialogo con el estudiante.

I: En doce perros ¿cuántas colas habría?

E: Doce.

I: ¿Por qué doce?

E: Doce colas, doce perros.

I: ¿Si tuviéramos treinta perros?

E: Treinta colas.

I: ¿Por qué treinta?

E: Treinta perros, treinta colas.

En cuanto a la Tarea 2 (Perros y ojos), el estudiante también da cuenta del pensamiento de correspondencia. Pues al responder “un perro tiene dos ojos, otro perro tiene dos y serían cuatro”. Y al preguntar por el número de ojos en tres perros, responde rápidamente que son seis ojos, lo mismo cuando se pregunta por cuatro perros. Se interpreta que establece la relación entre perros y ojos, al reconocer que cada perro tiene dos ojos. En el siguiente fragmento se puede ver el diálogo con el estudiante.

I: ¿cuántos ojos hay en tres perros?

E: seis

I: ahora pensemos en cuatro perros, ¿cuántos ojos habría en cuatro perros?

E: ocho

I: ¿qué hiciste para saber que son ocho ojos?

E: recordé

I: ¿qué recordaste?

E: recordé los círculos

I: ¿cómo eran los círculos?, ¿me quieres enseñar cómo eran los círculos?

E: los círculos eran así, (dibuja con el dedo un círculo) normales.

Las respuestas del estudiante en la Tarea 3 (Perros y platos. Uno de comida y otro de agua por perro), se aprecia el pensamiento de correspondencia. Pues, al preguntar por el número de platos para cinco perros, él contesta que “diez”, y a la pregunta ¿por qué diez?, aunque dice que contó en silencio, posteriormente menciona que “cinco más cinco diez”. Se interpreta que, tuvo en cuenta dos veces el número de perros. En el siguiente fragmento se puede observar lo expuesto por el estudiante.

I: cinco perros

E: diez

I: ¿por qué diez?

E: lo conté en silencio

I: ¿qué contaste en silencio

E: el número diez

I: ¿por qué pensaste en el número diez?

E: cinco más cinco son diez.

En la Tarea 4 (Perros, ojos y colas) el estudiante muestra pensamiento de correspondencia, porque identifica la relación entre perros, ojos y colas. Al preguntar, por el número de ojos y colas en cinco perros, él responde rápidamente, “diez ojos y cinco colas”, luego se preguntó por seis perros y de igual forma responde que son “doce ojos y seis colas”. En seguida se observa tal aseveración.

I: Cinco perros, ¿cuántos ojos y cuántas colas habría?

E: Diez ojos y cinco colas.

I: Si tuviéramos seis perros, ¿cuántos ojos y cuántas colas habría?

E: Doce ojos y seis colas.

Y finalmente, en la Tarea 5 (Perros, platos de comida y uno de agua), el estudiante presenta pensamiento de correspondencia, puesto que reconoce la relación entre perros y platos de comida y además tiene en cuenta el plato con agua. Al preguntar por el número de platos que se necesitan para treinta y tres perros, el niño responde: treinta y tres de comida y uno de agua, tal como se aprecia enseguida.

I: Si hubiese treinta y tres perros, ¿cuántos platos habría?

E: Treinta y tres de comida y uno de agua.

I: Y cincuenta y tres perros.

E: Cincuenta y tres de comida y uno de agua.

Las producciones orales expuestas por el estudiante en esta prueba piloto permitieron continuar con el desarrollo de las tareas con los estudiantes de tercero de preescolar comunitario del CONAFE.

3.5 Procedimiento

Para la implementación de la secuencia de tareas se realizaron entrevistas individuales de manera presencial en tres sesiones, de 10 a 25 minutos cada una y fueron grabadas en audio.

Dichas entrevistas se llevaron a cabo, en la escuela de preescolar comunitario del CONAFE de Santa Cruz la Ixtla.

En la Tabla 2 se puede ver el tiempo que duró la implementación de cada una de las tareas y las fechas que se realizaron.

Tabla 2. Cronología de las entrevistas realizadas a 5 niños

Sesión	Tareas	Duración	Fecha
1	Perros y colas	10 a 25 minutos	8 y 9 de junio del 2021
2	Perros y ojos	10 a 15 minutos	15 y 16 de junio del 2021
	Perros, y platos. Uno de comida y otro de agua por perro	10 a 15 minutos	
3	Perros, ojos y colas	10 a 15 minutos	22 y 23 de junio del 2021
	Perros, platos de comida y uno agua	10 a 25 minutos	

A continuación, se describe el proceso seguido en cada una de las entrevistas llevadas a cabo para cada una de las tareas.

3.6 Descripción de las entrevistas realizadas

Para la realización de cada entrevista se contó con material manipulable: 6 imágenes de perros y de platos, una hoja en blanco para adherir las imágenes y un marcador. Al inicio de cada entrevista, se recortó y pegó en la hoja en blanco una imagen de un perro y se explicó en qué consistía la tarea. Enseguida se pegó la segunda figura, se empezó a realizar preguntas y solo se utilizaron otras imágenes si la solución no era correcta.

Entrevista de la Tarea 1. Perros y colas

Material manipulable: 6 imágenes de perros, una hoja de papel en blanco, marcador y pegante.

Descripción de la entrevista

- Después del saludo, se mostró al estudiante una hoja con dos imágenes de perros y se mencionó:

- “vamos a trabajar con imágenes de perros y vamos a hallar el número de colas que hay en ellos, voy a recortar una imagen, observa cómo lo hago”.

- Seguidamente, se tomó unas tijeras y se recortó un perro frente al entrevistado, una vez recortada se expuso:

- “ya tengo una imagen de un perro y ahora la voy a pegar en la hoja en blanco”.

- Posterior a ello, se encerró con una curva la cola (ver Figura 3) y se dijo:

- “observemos que en un perro hay una cola. Ahora quiero averiguar cuántas colas hay en dos perros”.

- Con las tijeras se recortó nuevamente la imagen frente al entrevistado, se pegó en la hoja en blanco y se encerró su cola, y se expresó:

- “tenemos dos perros y he encerrado sus colas, ¿cuántas colas hay en los dos perros?”



Figura 3. Perros y colas

Una vez el estudiante halló el resultado a la pregunta ¿cuántas colas hay en los dos perros? sin mostrar figuras, se cuestionó por tres y luego por cuatro perros. La entrevista continuó dependiendo de las respuestas del estudiante, solo se mostró las imágenes restantes (4 figuras) si la respuesta era incorrecta.

Entrevista de la Tarea 2. Perros y ojos

Materiales: seis imágenes de perros, una hoja en blanco, tijeras, marcador y pegante.

Descripción de la entrevista

- Para llevar a cabo esta tarea, después del saludo, se presentó al entrevistado una hoja con una imagen de un perro y se expuso:

- ya tenemos un perro, (con el marcador se encerró con una curva cada uno de sus ojos) (ver Figura 4), miremos que en un perro hay dos ojos.

- Luego se dijo:

- voy a recortar otro perro,

- una vez recortado, pegado y encerrado con curvas los ojos, se preguntó:

- ¿cuántos ojos hay en dos perros? Y se esperó a que expresara el resultado.



Figura 4. *Perros y ojos*

Cuando el estudiante dio la solución a la pregunta, sin mostrar figuras, se preguntó: ¿cuántos ojos habría en tres perros? Después se cuestionó por cuatro perros. La entrevista finalizó en el momento que el alumno se mostró confundido.

Entrevista de la Tarea 3. Perros y platos. Uno de comida y otro de agua por perro

Materiales: seis imágenes de perros, seis imágenes de platos de comida y seis de agua, una hoja de papel en blanco y pegante.

Descripción de la entrevista

- Después de saludar, se mencionó al estudiante:

- “continuamos trabajando con perros y platos, pero esta vez cada perro tendrá un plato para comer y uno para beber agua” (se muestra las imágenes de dos perros y cuatro platos, dos de comida y dos de agua).

- Con las tijeras se recortó una imagen de un perro, un plato de comida y uno de agua frente al estudiante, los cuales se pegaron en la hoja en blanco, como se ve en la Figura 5.

- “Podemos observar que un perro necesita dos platos, uno de comida y otro de agua, ahora queremos averiguar cuántos platos son necesarios para dos perros, vamos a ver”,

- se recortó la segunda imagen de un perro, un plato de comida y otro de agua y se los pegó en la hoja, luego se dijo:

- “muy bien, ya tenemos dos perros y sus platos, ¿cuántos platos se necesitan para dos perros?”



Figura 5. Perros y platos, uno de comida y otro de agua

Posterior a la solución proporcionada por el estudiante, sin mostrar figuras, se preguntó por el número de platos para tres perros y ulteriormente para cuatro perros.

Entrevista de la tarea 4. Perros, ojos y colas

Materiales: seis imágenes de perros, una hoja de papel en blanco, tijeras, marcador y pegante.

Descripción de la entrevista

- Para el desarrollo de esta tarea se hizo la siguiente introducción después del saludo:

- “continuaremos trabajando con perros, en esta ocasión vamos a hallar la cantidad de ojos y colas que hay en algunos perros. Para ello, cuento con imágenes de perros, voy a recortar uno de ellos y lo voy a pegar en la hoja en blanco” (mostrándoles la hoja).

- Se pega la imagen de un perro y se expone:

- “bien, ya tengo un perro, ahora voy a encerrar con una curva sus ojos y su cola (ver Figura 6) para saber cuántos ojos y cuántas colas hay. Miremos entonces que, en un perro hay dos ojos y una cola. Ahora vamos a averiguar cuántos ojos y cuántas colas hay en dos perros, tengo acá otra imagen de un perro”,

- se pega en la hoja en blanco y se encierra nuevamente sus ojos y su cola, y se pregunta:

- “¿cuántas colas y ojos hay en dos perros?”.



Figura 6. Perros ojos y colas

Después que el informante expresara el resultado, se cuestionó por el número de ojos y colas en tres perros sin mostrar figuras. Una vez dada la solución se preguntó por cuatro perros y se continuó preguntado por otros valores, siempre y cuando los estudiantes se mostraron dispuestos a continuar y sus respuestas eran correctas.

Entrevista de la Tarea 5: Perros, platos de comida y uno de agua

Materiales: seis imágenes de perros, seis imágenes de platos de comida, una imagen de un plato con agua, tijeras, una hoja en blanco y pegante.

Descripción de la entrevista

- Para el desarrollo de esta última tarea, se pegó en la hoja en blanco una imagen de un perro, un plato de comida y uno de agua. Luego, se pegó un segundo perro y un plato de comida (ver Figura 7) y se le explicó que cada perro tendrá su plato de comida, pero habrá un solo plato con agua, se preguntó:

- “¿cuántos platos necesitamos para dos perros?”

- Y a medida que el o la estudiante hallara su respuesta se preguntó por un número mayor de perros.





Figura 7. *Perros, platos de comida y uno de agua*

Una vez el estudiante halló el resultado a la pregunta dada en la tarea, sin mostrar figuras, se cuestionó por tres y luego por cuatro perros. La entrevista continuó si las soluciones del estudiante eran correctas.

De esta manera, se culminó con la implementación de las entrevistas y ahora se procede a analizar las producciones orales de cada uno de los cinco estudiantes en el siguiente capítulo.

CAPÍTULO 4. ENTREVISTAS Y SU ANÁLISIS

En este apartado se muestra las respuestas orales presentadas por los 5 estudiantes de tercero de preescolar comunitario de Santa Cruz La Ixtla, CONAFE-Puebla, en las entrevistas de cada una de las cinco tareas. Para ejemplificar y diferenciar la actividad matemática puesta en juego por cada alumno, se los etiquetó con la letra E seguida de un número del 1 al 5 y la letra I se destina a la investigadora.

En la Tabla 3 se puede ver la edad de cada uno de los informantes y hasta que número cuenta de uno en uno.

Tabla 3. Edad de los cinco estudiantes y el número que llegan contado de uno en uno

Letra asignada	Edad	Cuenta de uno en uno hasta el número
E1	Entre 4 y 5 años	12
E2	Entre 5 y 6 años	13
E3	Entre 5 y 6 años	18
E4	Entre 5 y 6 años	23
E5	Entre 5 y 6 años	50

El análisis correspondiente se presenta a partir de la descripción de las soluciones brindadas por los alumnos a cinco tareas que involucran dos tipos de variaciones. Las tareas 1 a 3 son de variación directamente proporcional ($\frac{y}{x} = constante$), la primera con constante de proporcionalidad igual a 1 y las dos restantes con constante igual a 2. La tarea 4 es una mezcla de las variaciones $\frac{y}{x} = 1$ y $\frac{y}{x} = 2$. La tarea 5 es una variación lineal de la forma $y = x + 1$.

En los siguientes apartados se presenta el análisis de las producciones orales, yendo de lo general a lo particular. En primer lugar, se muestran los tipos de pensamiento funcional identificados en las soluciones estudiantiles de las cinco tareas. En segundo lugar, se dan algunos ejemplos de soluciones del pensamiento funcional detectado. En tercera instancia, se muestran las estrategias de solución que realizan los informantes y el tipo de pensamiento funcional que presentan en cada una de las tareas.

4.1 Tipos de pensamiento funcional identificados en las respuestas estudiantiles

Siguiendo a Pinto (2016), en este trabajo se considera que los estudiantes que evidencian pensamiento funcional son aquellos que presentan un tipo de pensamiento (recurrencia, correspondencia o covariación) en, al menos, una de las tareas propuestas. De las 25 respuestas orales, generadas por los 5 estudiantes encuestados, se identifica que, algunos alumnos evidencian la presencia de pensamiento funcional, ya sea de recurrencia (relación entre cantidades del mismo conjunto) o de correspondencia (relacionar pares de cantidades de los dos conjuntos involucrados) (Categoría 1). Y otros, no muestran ninguno de estos tipos de pensamiento funcional (Categoría 2).

En la Tabla 4 se detallan las dos categorías identificadas. En la Categoría 1, se muestra el número de respuestas y los estudiantes que presentan pensamiento de recurrencia (primera columna) y de correspondencia (segunda columna). En la Categoría 2 se exhibe el número de respuestas y los estudiantes que no evidencian ningún tipo de pensamiento funcional detectado en las cinco tareas.

Tabla 4. Tipos de pensamiento funcional identificados en las cinco tareas

Tareas	Categoría 1				Categoría 2	
	Recurrencia		Correspondencia		Ninguno	
	Número de respuestas	Estudiantes	Número de respuestas	Estudiantes	Número de respuestas	Estudiantes
Tarea 1 (perros y colas)	0	-----	3	E3, E4, E5	2	E1, E2
Tarea 2 (perros y ojos)	2	E4, E5	0	-----	3	E1, E2, E3
Tarea 3 (perros, y platos. Uno de	0	-----	3	E3, E4, E5	2	E1, E2

comida y otro de agua por perro)						
Tarea 4 (perros, ojos y colas)	0	-----	1	E5	4	E1, E2, E3, E4
Tarea 5 (perros, platos de comida y uno de agua)	0	-----	4	E2, E3, E4, E5	1	E1
Total	2		11		12	
Fración	2/25=0.08		11/25=0.44		12/25=0.48	

De la tabla 3 se observan cinco aspectos importantes que se mencionan a continuación:

a) El 8% de las 25 respuestas estudiantiles dan cuenta de pensamiento funcional de recurrencia, y 44% de correspondencia. Esto quiere decir que, en el 50% de las soluciones se evidencia el pensamiento funcional, siendo el de correspondencia el que más percibieron los alumnos. Y el 50% restante de las respuestas no muestran evidencias de los tipos de pensamiento funcional identificados. Lo anterior permite afirmar que hay dificultad en el desarrollo con de tareas que involucran la variación directamente proporcional y la lineal, lo que infiere que se debe a que los estudiantes no han tenido algún tipo de experiencia con el trabajo de las mismas.

b) La Tarea 2 (perros y ojos) fue la más difícil para los alumnos porque, ninguno alcanzó el pensamiento de correspondencia. Esto se debe a que el pensamiento operacional de los informantes aún es aditivo, lo que no les permite reconocer que el resultado es el doble o que pueden hallarlo multiplicando por dos (Castro et al. 2017). Pareciera que es difícil para algunos estudiantes sumar de dos en dos y se limitan a contar de uno en uno para hallar el número de ojos dado el número de perros. Esto no les permite reconocer que el patrón de la variable ojos es dos. Dos alumnos reconocieron este patrón y hallaron el número de ojos hasta 6 perros, sumando dos al valor anterior, lo que muestra pensamiento de recurrencia. Sin embargo, esto les impidió llegar al pensamiento de correspondencia porque, ellos no pudieron

hallar el número de ojos para cualquier cantidad de perros. Al preguntar por ocho perros su respuesta fue incorrecta, porque no sabían a qué número sumarle dos.

c) La Tarea 4 (perros, ojos y colas) que involucra las Tarea 1 y 2, se confirma que la tarea 2 fue la más difícil para los estudiantes. Aunque, la tarea 1 fue fácil para ellos, al trabajarse de forma conjunta, aumentó la complejidad de la Tarea 4, porque cuatro de los cinco alumnos no evidenciaron ningún tipo de pensamiento funcional al contar de uno en uno para hallar las soluciones a las preguntas planteadas y solo un estudiante llegó al pensamiento de correspondencia, al reconocer que el número de ojos es el doble que el de perros.

d) La Tarea 5 (perros, platos de comida y uno de agua) fue la más sencilla porque, cuatro de los cinco estudiantes alcanzaron el pensamiento de correspondencia. En efecto, reconocieron que el número de platos de comida es el mismo que el número de perros e identificaron que siempre se debe agregar un plato con agua.

e) La alumna E1 no evidencia pensamiento funcional en ninguna de las tareas debido que, contó de uno en uno, sin reconocer la relación entre las cantidades del mismo conjunto o entre las variables involucradas entre dos conjuntos. El estudiante E2 no muestra pensamiento funcional en las primeras cuatro tareas porque, halló las soluciones a través del conteo de uno en uno. Si bien, en la Tarea 2 en una pregunta sumó dos más dos para hallar el resultado y en la tarea 4 al preguntar por el número de ojos al aumentar un perro, el alumno tiene en cuenta que hay que sumar dos ojos más, aunque encuentra el resultado sumando de uno en uno, no se puede afirmar que emplea pensamiento funcional. No obstante, en la Tarea 5 presenta pensamiento de correspondencia, aunque primitivo, dado que encuentra el número de platos de comida y agua solo hasta seis perros. La alumna E3, en las Tareas 2 y 4 no evidencia pensamiento funcional, se entiende que se debe a que estas se consideran como las más difíciles. Mientras que en las Tareas 1, 3 y 5 da cuenta de pensamiento de correspondencia puesto que, identificó la relación entre las variables de los dos conjuntos en cada tarea.

La estudiante E4 evidencia pensamiento de correspondencia en todas las tareas excepto en la tarea 4. Para ella, esta tarea aumentó el nivel de dificultad al presentarse dos tareas al mismo tiempo y encontró los resultados contando de uno en uno. El estudiante E5 muestra

pensamiento funcional en las cinco tareas. En la Tarea 2 muestra pensamiento de recurrencia, aquí el alumno halló el patrón de la variable ojos y al preguntar de forma consecutiva (3, 4, 5, 6 perros) lo agregó al resultado encontrado previamente. En las Tareas 1, 3, 4 y 5 se identifica el pensamiento de correspondencia, el trabajo realizado en la Tarea 2, ayudó a E5 a reconocer que el número de ojos es el doble que el número de perros, de esta manera halló la solución sin sumar de dos en dos como lo hizo en la Tarea 2.

A continuación, se muestra con mayor detalle las categorías identificadas en este apartado.

4.2 Algunas evidencias representativas del pensamiento funcional identificado

Es preciso mencionar que los tipos de pensamiento funcional identificados en las soluciones de los cinco estudiantes, emergieron de dos formas diferentes, usando figuras y sin usar figuras. Algunos de ellos requirieron imágenes para contestar las preguntas que se plantearon y otros no. Como se mencionó en el Capítulo 3, en la introducción de cada tarea se presentaron dos figuras de perros a cada estudiante y solo se utilizaron otras imágenes si la solución por parte de ellos no era correcta.

En esta sección se exponen tres ejemplos de respuestas orales. Los dos primeros, corresponden a la Categoría 1 y el tercero a la Categoría 2. Los ejemplos son extractos de los diálogos entre los estudiantes E5, E2 y E1 y la investigadora, cuyas intervenciones se presentan en el Anexo 2.

Los tres estudiantes se seleccionan por tres razones: 1) el estudiante E5 es el único que muestra el pensamiento funcional en las cinco tareas, E2 presenta pensamiento funcional en la última tarea, específicamente el de correspondencia y E1 no muestra pensamiento funcional en las respuestas proporcionadas en las cinco tareas

Ejemplo 1. Evidencia de pensamiento de recurrencia (Tarea 2: perros y ojos)

El pensamiento de recurrencia se evidencia cuando el estudiante E5 identifica que el patrón de la variable número de ojos (en un perro) es dos. Pues, al preguntarle por tres perros el estudiante menciona que son seis perros y al mostrarle la tercera imagen, él expone que son seis perros. Luego, a la pregunta ¿cuántos ojos habría en cuatro perros? responde: “ocho”

¿Cómo lo hizo? E5 menciona que “son dos ojos, otros dos, otros dos y otros dos, son ocho”. Finalmente, al preguntar por el número de ojos en diez perros, E5 respondió: “once” y luego dice “doce ojos”. En sus respuestas se evidencia que hizo grupos de dos y sumó de dos en dos hasta llegar a diez y luego agregó dos para un total de doce ojos. Aquí el diálogo sostenido con este estudiante.

I: [...] Aaah son diez, ¿qué tal si hubiese un perrito más?, ¿cuántos ojos más habría?

E5: Once.

I: ¿Once?

E5: Y doce ojos.

I: ¿Cómo sabes que son doce?

E5: Porque son dos, dos, dos, dos, dos, entonces son diez y acá son doce (señalando la hoja con el dedo índice como si mirara las figuras de los perros).

Ejemplo 2. Evidencia de pensamiento de correspondencia (Tarea 5: perros, platos de comida y uno de agua)

El pensamiento de correspondencia se refleja al relacionar los pares de cantidades de los dos conjuntos involucrados (perros, platos de comida y uno con agua). El alumno E2, reconoció el patrón de tomar el mismo número de platos y de perros al preguntar por tres, cuatro y seis perros. A la pregunta ¿cuántos platos se necesitan para cuatro perros?, habiendo explicado al comienzo de la tarea que para cada perro hay un plato de comida y un solo plato de agua para todos los perros, E2 dice inmediatamente: “cuatro platos de comida y luego, uno de agua”, igualmente al preguntar para seis perros, responde: “seis de comida y uno de agua”. En el siguiente fragmento se evidencia lo anterior.

I: Si tuviéramos cuatro perros, ¿cuántos platos necesitaríamos?

E2: Cuatro platos de comida.

I: ¿Y cuántos de agua?

E2: Uno.

I: ¿Y si tuviéramos seis perros?

E2: Seis platos de comida y un plato de agua.

Ejemplo 3. No hay evidencia de pensamiento funcional (Tarea 1: perros y colas)

Este ejemplo no da cuenta de evidencia pensamiento funcional. Al preguntarle a la estudiante E1, ¿cuántas colas habría en cuatro perros?, al parecer, E1 no comprendió la pregunta, porque, contó de uno en uno hasta el número diecisiete. Igualmente, al preguntar por cuatro, cinco y seis perros. Dicha dificultad fue superada con ayuda de figuras de perros. Aunque, E1 reconoce el patrón como un proceso de conteo (uno, dos, tres, cuatro) no establece la relación general (por ejemplo, “es uno más cada vez”). Esto no permite relacionar los valores de un conjunto de una misma variable o la relación entre las dos variables (Blanton et al. 2015). Este es un extracto de la conversación entre la investigadora y la estudiante E1.

I: En cuatro perros, ¿cuántas colas habría?

E1: Una, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez, once, doce, trece, catorce, quince, dieciséis, diecisiete.

I: Vamos a ver cuántas colas hay en cuatro perros (se pega una cuarta imagen).

E1: Una, dos, tres, cuatro (cuenta las colas de los perros con su dedo índice).

I: Y en cinco perros, ¿cuántas colas habría?

E1: Una, dos, tres, cinco, seos, siete, ocho.

I: Mira, ahora tenemos cinco perros (después de haber pegado una imagen más), ¿cuántas colas hay?

E1: Una, dos, tres, cuatro, cinco (cuenta las colas de los perros con su dedo índice).

Cabe mencionar que, las figuras fueron el único medio de apoyo que tuvieron a la mano para contestar las preguntas planteadas y a través de la visualización de dichas imágenes, los estudiantes emplearon diferentes estrategias en cada una de las cinco tareas. En el siguiente apartado se puntualiza este hecho.

4.3 Estrategias y tipos de pensamiento funcional involucrados en las respuestas estudiantiles

Como se mencionó anteriormente, los tipos de pensamiento funcional detectados en las producciones de los estudiantes, surgieron a partir del uso y sin usar figuras. Desde la

visualización de las figuras, se manifiestan nueve estrategias de solución, que a su vez permiten reconocer qué tipo de pensamiento funcional está presente en los estudiantes.

En la Tabla 5 se discuten las estrategias identificadas y la descripción de cada una de ellas.

Tabla 5. Estrategias identificadas en las soluciones estudiantiles

Figuras	Estrategias de solución	Descripción de la estrategia
Usando figuras	C1: conteo de uno en uno para un número pequeño de perros.	Cuentan de uno en uno con la ayuda de figuras (uno, dos, tres, etc.).
Sin usar figuras	C2: conteo de uno en uno para un número pequeño de perros.	Cuentan de uno en uno sin ayuda de figuras
	C3: sin contar de uno en uno en preguntas que involucran un gran número de perros.	Establecen la relación entre perros y colas. Es decir, los estudiantes comprenden que por cada perro hay una cola, lo que permite hallar la solución rápidamente para un determinado número de perros (diez, doce, quince, etc.).
	C4: uso de variables	Acepta las variables (m , x , z) como representes de números de perros.
	C5: operan haciendo grupos de dos.	Realiza grupos de dos para hallarla la solución (dos, dos, dos, dos, ocho ojos).
	C6: suma el patrón al valor anterior.	Identifica que el patrón de la variable ojos es dos y lo agrega al valor previo (son diez y acá son doce).
	C7: separa la variable platos de comida y de la de agua.	En lugar de hallar el número total de platos, da el número de platos de comida por un lado y el plato de agua por otro (cuatro platos de comida y cuatro platos de agua).
	C8: suman dos veces el mismo número de perros.	Reconoce que puede hallar el resultado sumando dos veces el mismo número (diez más diez son veinte).
	C9: a los platos de comida agrega el plato con agua.	Identifica que para cualquier número de perros siempre va a haber un plato con agua.

A continuación, se muestra de forma detallada un ejemplo de las estrategias descritas en la Tabla 4 y el análisis correspondiente.

4.3.1 Estrategias identificadas en las respuestas estudiantiles Tarea 1 (perros y colas)

En la Tabla 6 se puede ver cuatro de las nueve estrategias de solución. La estudiante E1 siguió la estrategia C1 y el alumno E2 elaboró C2. Los dos estudiantes no muestran pensamiento funcional, dado que hallaron los resultados contando de uno en uno. Con respecto a los alumnos E3, E4 y E5, construyeron las estrategias C3 y C4, ellos dan cuenta de pensamiento de correspondencia, porque identificaron que el número de colas, corresponde al número de perros, lo que les permitió encontrar la solución tanto en preguntas que involucran una determinada cantidad de perros como variables (m , x y z).

Tabla 6. Estrategias elaboradas por los estudiantes en la tarea 1

Estrategias	Estudiantes	Tipo de pensamiento funcional evidenciado
C1 (conteo de uno en uno para un número pequeño de perros).	E1	Ninguno
C2 (conteo de uno en uno para un número pequeño de perros)	E2	Ninguno
C3: sin contar de uno en uno en preguntas que involucran un gran número de perros.	E3, E4, E5	Correspondencia
C4: uso de variables.	E3, E4, E5	Correspondencia

Las respuestas de la estudiante E1 se ubican en la estrategia C1 (conteo de uno en uno con ayuda de figuras), y no da cuenta de pensamiento funcional. En el Ejemplo 3, en la sección 4.2, se observa que al preguntar por el número de colas en cuatro perros ella contó de uno en uno hasta el número diecisiete y cuando se preguntó por cinco perros E1 contó hasta ocho, en efecto E1 halló la respuesta correcta con ayuda de figuras.

De acuerdo con las producciones del estudiante E2, utilizó la estrategia C2 (conteo de uno en uno sin ayuda de figuras), y no presenta pensamiento funcional. Porque a la pregunta, si hubiese cuatro perros, ¿cuántas colas habría? Él niño contó de uno en uno hasta cuatro. Enseguida, se preguntó por ¿cuántas colas habría en seis perros?, halló el resultado contando de uno en uno hasta seis. Esta es la interlocución entre I y el estudiante E2.

I: [...] Si hubiese cuatro perros, ¿cuántas colas habría?

E2: Habría más colas, una cola, dos colas, tres colas, cuatro colas.

I: Qué tal si hubiese seis perros, ¿cuántas colas habría?

E2: Hay más colas, una cola, dos colas, tres colas, cuatro colas, cinco colas, seis colas.

El proceso del conteo de uno en uno sin ayuda de figuras continuó al preguntar por siete, ocho y diez perros. Al cuestionar por doce perros, E2 expone que “*serían muchos perros*”, “*siete más siete*”, esta respuesta indica que el estudiante no había identificado que el número de colas es el mismo número de perros, lo que no le permitió hallar la solución. Y al preguntar por ¿cuántos perros habría si mirara una cola? E2 respondió: “*once*”. Luego, se cuestionó por dos colas y no dio respuesta alguna. El estudiante no entendió lo que se estaba preguntando.

En relación a las respuestas de los estudiantes E3, E4 y E5 se observa que, sin usar figuras hallaron las soluciones a través de las estrategias C3 (sin contar de uno en uno en preguntas que involucran un gran número de perros) y C4 (uso de variables) al preguntar por el número de colas dado un número de perros y dada una cantidad de colas encontrar el número de perros. Además, muestran evidencias de pensamiento de correspondencia. La estrategia C3, se observa al cuestionar por: tres, cuatro, ocho, diez, veinticinco, setenta perros, y otros valores como quinientos y un millón de perros, ellos no tuvieron problema en contestar rápidamente y de manera acertada el número de colas. De esta manera se deduce que relacionaron perros y colas e identificaron la regla que les permitió hallar el número de colas dado un número de perros. El siguiente fragmento es el diálogo entre I y E3.

I: En quinientos perros, ¿cuántas colas habría?

E3: Quinientas colas.

I: ¿Cómo sabes que son quinientas colas?

E3: Porque son quinientos perros.

I: Qué tal un millón, ¿cuántas colas habría?

E3: Un millón de colas.

I: Por qué un millón de colas.

E3: Porque es un millón de perros.

Y la estrategia C4 se aprecia al preguntar por casos que involucran variables. Los tres estudiantes no tuvieron dificultad en aceptar las letras como representantes de valores de perros (Castro et al. 2017). Es decir, ellos transitaron de situaciones particulares a la generalización considerando las variables m , x y z . Así, cuando se preguntó por el número de colas cuando hay m perros, E3, E4 y E5 respondieron que m colas. A continuación, se muestra la intervención entre I y E3.

I: Si tenemos m perros, ¿cuántas colas habría?

E3: ¿ m colas?

I: ¿Por qué m colas?

E3: Porque son m perros.

I: ¿Cuántas colas habría en x perros?

E3: x colas.

I: ¿Y en z perros?

E3: z colas.

I: ¿Cómo sabes que son z colas?

E3: Porque son z perros.

Así mismo, cuando se preguntó por m , x y z colas, los niños contestaron: m , x y z perros.

I: En m colas, ¿cuántos perros habría?

E3: ¿ m perros?

I: ¿Por qué m perros?

E3: Porque son m colas.

I: ¿Cuántos perros habría en x colas?

E3: x colas.

I: ¿Y en z colas?

E3: z perros.

I: ¿por qué z perros?

E3: Porque son m colas.

Para concluir el análisis de la primera tarea, al comparar las respuestas entre los niños del CONAFE y los niños entrevistados por Castro et al. (2017), quienes aplicaron la tarea perros y collares (tarea de tipo $y=x$), se evidenció que, tanto en el estudio de Castro y colaboradores como en algunos niños del CONAFE (E3, E4 y E5) muestran evidencias de pensamiento algebraico, porque no tuvieron dificultades en pasar de situaciones particulares a la generalización en términos de variables.

4.3.2 Estrategias identificadas en las respuestas estudiantiles Tarea 2 (perros y ojos)

En la Tabla 7 se observan 4 de las 9 estrategias de solución. Los estudiantes E1, E2 y E3 no muestran pensamiento funcional. E1, encontró las soluciones contando de uno en uno con ayuda de figuras y los alumnos E2 y E3 lo hicieron sin ayuda de figuras. En relación a E4 y E5 muestran pensamiento de recurrencia porque, relacionaron las cantidades del mismo conjunto. Se puede ver que E4 empleó las estrategias C2 y C6. En C2 contó de uno en uno sin ayuda de figuras y en C6 identificó que el número de ojos varía de dos en dos y agregó dos al siguiente valor basándose en el que había encontrado previamente. Por último, E5 sumó de dos en dos (C5) y posteriormente agregó dos al valor previo (C6).

Tabla 7. Estrategias elaboradas por los estudiantes en la tarea 2

Estrategias de la tarea propuesta	Estudiantes	Tipos de pensamiento evidenciado
C1 (conteo de uno en uno para un número pequeño de perros con ayuda de figuras).	E1	Ninguno
C2 (conteo de uno en uno para un número pequeño de perros sin ayuda de figuras).	E2, E3, E4	Ninguno
C5 (operan haciendo grupos de dos).	E5	Recurrencia
C6 (suma el patrón al valor anterior).	E4, E5	Recurrencia

De la Tabla 7, hay que mencionar que no se hablará de las estrategias C1 y C2 porque, en la Tarea 1, se hizo el respectivo análisis.

En cuanto a las estrategias empleadas por E4 se observa que, en primer lugar, halló las respuestas utilizando la estrategia C2. Ella contó de uno en uno sin ayuda de figuras hasta seis perros, la estudiante encontró el número de ojos moviendo la cabeza de un lado a otro, como si imaginara los ojos de los perros. Dado que, sus respuestas fueron dadas a través del conteo se decidió preguntar “cuando ves un perrito más, ¿cuántos ojos aumenta?”, en lugar de ¿cuántos ojos hay en siete perros?, esto con el fin de identificar si estaba reconociendo el patrón de la variable ojos. A esta pregunta la estudiante responde “dos”. Esto indica que ella reconoció el patrón (dos) de la variable ojos. Posteriormente, se cuestionó por cuántos ojos aumentaría si se pegara dos figuras más (al decir si se pegara un perrito más, cabe aclarar que no se pegó ninguna otra figura), la respuesta esperada sería cuatro, sin embargo, la alumna respondió que “seis”, lo que se puede inferir que empezó a contar a partir de un perro y fue agregando dos al número anterior. De este modo, ella empleó la estrategia C6, pues reconoció que, al aumentar un perro, el número de ojos se incrementa en dos. A continuación, se presenta el diálogo entre I y E4.

I: Cuando tú ves un perrito más, ¿cuántos ojos aumenta?

E4: Dos.

I: Sí pegara dos perritos más, ¿cuántos ojos aumentaría?

E4: Seis.

I: Si pegamos otro perrito, ¿cuántos ojos más habría?

E4: Ocho.

I: ¿Y un perrito más?

E4: Diez.

La estrategia C5, elaborada por E5, se puede observar en el ejemplo 2 presentado en la sesión 4.2. Ahí se aprecia que el estudiante hizo grupos de dos en dos para encontrar el número de ojos.

Si bien, las soluciones dadas por E4 y E5 evidencian pensamiento de recurrencia al indagar por el número de ojos, dado un número de perros, no se identificó lo mismo al cuestionar de

forma inversa (dado un número de ojos, hallar el número perros). A la pregunta ¿cuántos perros habría si miraras dos ojos?, los dos estudiantes (cada uno en el momento de su entrevista) manifestaron que “uno”. Y al preguntar por ¿cuántos perros estarías viendo si miraras cuatro ojos?, respondieron enseguida: “cuatro”. Al parecer para ellos es difícil pensar primero en los ojos y luego en los perros.

De esta forma, se concluye que tanto los informantes del estudio de Blanton y Kaput (2004) como dos niños del CONAFE (E4 y E5) reconocieron el patrón en la variable ojos y operaron a partir de ello. Este aspecto es importante, porque los estudiantes identificaron la variación en la variable ojos. Aunque, no establecieron la relación en términos de generalización, tal como: “siempre que agregamos un perro más, obtenemos dos ojos más”, que fue la respuesta colectiva proporcionada por los niños en el estudio de Blanton y Kaput (2004).

4.3.3 Estrategias identificadas en las respuestas estudiantiles Tarea 3 (perros y platos. Uno de comida y otro de agua)

En la Tabla 8 se denotan cuatro de las nueve estrategias de solución. Los estudiantes E1 y E2 no muestran pensamiento funcional. E1, encontró las soluciones contando de uno en uno con ayuda de figuras y el alumno E2 lo hizo sin ayuda de figuras. En cuanto a los alumnos E3, E4 y E5 evidencian pensamiento de correspondencia. En el caso de E3, se evidencia que, antes de utilizar la estrategia C7, empleó C1. Con ayuda de figuras encontró las soluciones hasta cuatro perros, la visualización de las imágenes ayudó a que la estudiante reconociera que el número de platos de comida y agua corresponde al número de perros (C7). La estudiante E4 elaboró la estrategia C7 en todas sus respuestas y el estudiante E5, además de utilizar esta estrategia pasó a emplear la estrategia C4.

Tabla 8. Estrategias elaboradas por los estudiantes en la tarea 3

Estrategias	Estudiantes	Pensamiento funcional evidenciado
<i>C1</i> : conteo de uno en uno	E1, E3	Ninguno
<i>C2</i> : conteo de uno en uno.	E2	Ninguno

C7: separa la variable platos de comida y agua.	E3, E4, E5	Correspondencia
C4: uso de variables.	E5	Correspondencia

De las estrategias evidenciadas en esta tarea, se hablará particularmente de la estrategia C7.

Aunque E3, E4 y E5 no hallaron el total de número de platos para un determinado número de perros, sí identificaron que el número de platos de comida y el número de platos de agua es el mismo que el número de perros, lo que les permitió hallar la solución al preguntar tanto por un número pequeño de perros (cuatro perros) como por un número grande (quinientos perros); y E5 halló la solución a preguntas que involucran variables. En las soluciones proporcionadas por E5 se observa la estrategia C7 al separar la variable platos de comida y agua. Al preguntar por el número de platos que se necesitan para quinientos perros, el estudiante respondió en seguida: “quinientos platos de comida y quinientos platos de agua”. A continuación, se muestra el diálogo entre I y E5.

I: [...] Y para 500 perros, ¿cuántos platos se necesitaría?

E5: Son 500 perros, 500 platos de comida y 500 platos de agua.

I: ¿en un millón de perros cuántos platos necesitaríamos?

E5: Un millón de platos de comida y un millón de platos de agua.

I: ¿Cómo sabes que son un millón de platos de comida y de agua?

E5: Porque son un millón de perros.

Hay que destacar que solo el alumno E5 no presentó ninguna dificultad en responder a las preguntas inversas. Él estableció la relación entre el número de platos y perros. Así, al preguntar para cuántos perros alcanzarían si se tuviera m platos de comida y m platos con agua, el alumno respondió: “ m perros”. De la misma forma contesto al preguntar por x y z platos. A continuación, se evidencia lo anterior.

I: Y en m platos de comida y m platos con agua, ¿para cuántos perros alcanzarían?

E5: m perros

I: Si tuviéramos x platos de comida y x platos con agua.

E5: x perros.

I: ¿Por qué x perros y no m ?

E5: Porque son x platos de comida.

I: En z platos de comida y z platos con agua, ¿cuántos perros podrían comer?

E5: z perros.

I: ¿cómo sabes que son z perros?

E5: Porque son z perros.

Para concluir con el análisis, cabe mencionar que, en el tipo de soluciones proporcionadas por los estudiantes en la entrevista de esta tarea, no se evidencia relación alguna con aquellas respuestas obtenidas en la investigación de Castro et al. (2017). Quizá porque, en Castro y colaboradores presentaron la tarea, perros y platos de comida, donde a cada perro le corresponde dos platos de comida y en este caso cada perro necesita un plato de comida y uno de agua.

4.3.4 Estrategias identificadas en las respuestas estudiantiles Tarea 4 (perros, ojos y colas)

En la Tabla 9 se aprecia tres de las nueve estrategias de solución. Los estudiantes E1, E2, E3 y E4 no muestran pensamiento funcional. E1, encontró las soluciones contando de uno en uno con ayuda de figuras y los alumnos E2, E3 y E4 lo hicieron sin ayuda de figuras. En relación a E5 es el único estudiante que construyó la estrategia C9, por lo que reconoció que el número de ojos es el doble que la cantidad de perros y evidenció pensamiento de correspondencia.

Tabla 9. Estrategias elaboradas por los estudiantes en la tarea 4

Estrategias	Estudiantes	Pensamiento funcional evidenciado
C1: conteo de uno en uno	E1	Ninguno
C2: conteo de uno en uno.	E2, E3, E4	Ninguno
C9: suman dos veces el mismo número.	E5	Correspondencia

El análisis de esta tarea se enfocará en la estrategia C9.

Como ya se mencionó, las producciones de E5 se relacionan con la estrategia C9 (suman dos veces el mismo número). A la pregunta: ¿cuántos ojos y cuántas colas hay en diez perros? El estudiante menciona “diez colas” y “veinte ojos” y más adelante expone que “los perros tienen dos ojos y son diez, entonces son veinte ojos”. Esto significa que, el estudiante suma dos veces el mismo número Castro et al. (2017). El diálogo entre I y E5, permite evidenciar el paso del empleo del pensamiento de recurrencia al de correspondencia. Pues, en la Tarea 2 (Perros y ojos) el estudiante evidenció pensamiento de recurrencia al ir sumando de dos en dos.

I: [...] ¿Y en 10 perros?

E5: Diez colas.

I: ¿Y cuántos ojos habría?

E5: Veinte ojos.

I: ¿Cómo sabes que son veinte ojos?

E5: Porque en diez perros son veinte ojos.

I: Pero, por qué veinte ojos.

E5: Porque los perros tienen dos ojos y son diez entonces son veinte ojos.

Para esta tarea, ninguno de los cinco estudiantes halló el resultado al preguntar por el número de perros, dado el número de ojos y colas. En el caso de E5 respondió correctamente al preguntar por el número de perros dado dos ojos y una cola. Sin embargo, a la pregunta ¿cuántos perros habría si mirara cuatro ojos y dos colas?, el estudiante expone: “cuatro perros”. Se interpreta que le es difícil pensar en más de dos ojos y colas, y por ende en los perros. Enseguida se el diálogo entre I y E5.

Al comparar las soluciones estudiantiles de esta tarea, particularmente, la expuesta por E5, “los perros tienen dos ojos y son diez entonces son veinte ojos” se relaciona con la respuesta proporcionada por los niños objeto de estudio en Castro et al. (2017), en la tarea perros y platos de comida (dos platos de comida por cada perro). Estos autores preguntaron por, ¿cuántos platos se necesitan para cinco perros? Ellos señalan que un estudiante respondió que se necesitan diez platos, porque sumó cinco más cinco.

4.3.5 Estrategias en las respuestas estudiantiles Tarea 5 (perros, platos de comida y uno de agua)

En la Tabla 10 se discuten tres de las nueve estrategias de solución. La estudiante E1 se ubica en la estrategia C1 y no muestra pensamiento funcional. Mientras que los alumnos E2, E3, E4 y E5, elaboraron la estrategia C9 (agrega el plato con agua) y evidencian pensamiento de correspondencia. Además, E4 y E5 pasaron de situaciones que involucran un determinado número de perros a la generalización en términos de variables (C4)

Tabla 10. Estrategias elaboradas por los estudiantes en la tarea 5

Estrategias	Estudiantes	Pensamiento funcional evidenciado
C1: conteo de uno en uno	E1	Ninguno
C10: agrega el plato con agua.	E2, E3, E4, E5	Correspondencia
C4: uso de variables.	E4, E5	Correspondencia

Los estudiantes E2, E3, E4 y E5 evidencian pensamiento de correspondencia. Ellos emplearon la estrategia C9 al reconocer el patrón de tomar el mismo número de platos que de perros y tener en cuenta que los perros tomarían agua del mismo plato. E2 halló el número de platos hasta seis perros, E3 hasta veinte. En tanto que, E4 y E5 hallaron el número de platos a preguntas que involucraron valores específico como variables. En el siguiente fragmento se evidencia que la estudiante E4, al preguntarle ¿cuántos platos se necesitaría si se tuviera m perros, la estudiante responde enseguida “ m platos de comida”, y al preguntar cuántos de agua, responde “uno” A continuación, se transcribe la conversación del investigador con la estudiante E4.

I: Para m perros.

E4: m platos de comida.

I: ¿Y cuántos platos de agua?

E4: Uno, todos toman de un solo plato.

I: Y para z para perros.

E4: z platos de comida.

I: ¿Y cuántos de agua?

E4: Uno.

En relación a las preguntas inversas, únicamente los estudiantes E4 y E5 hallaron el número de perros dado un número de platos. La alumna E4 encontró la solución al cuestionar por el número de perros, dado tres y cuatro platos. El estudiante E5 no tuvo dificultad en contestar de forma correcta al preguntar por el número de perros, dado tres, cinco, ocho, once y quince platos. A la pregunta: ¿si tuviéramos once platos para cuántos perros nos alcanzaría?, el niño manifestó enseguida: “diez perros” y al preguntar como lo supo, respondió “diez platos de comida y uno de agua”.

Para concluir, Castro et al. (2017) mencionan que en esta tarea obtuvieron poca información debido a que, muy pocos estudiantes habían identificado el patrón de tomar el mismo número de platos que de perros y agregarle el plato con agua. A diferencia de ellos, en esta investigación, hallaron la solución cuando se preguntó por un número determinado de perros como en casos que involucraron variables.

CAPÍTULO 5. DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Los resultados presentados anteriormente permiten observar que:

Solo una de los cinco estudiantes (E1) de tercero de preescolar comunitario pertenecientes al subsistema educativo CONAFE no proporcionó evidencias de pensamiento funcional en sus respuestas orales. La estudiante no logró establecer la relación entre la variable de un mismo conjunto (pensamiento de recurrencia) o entre las variables de dos conjuntos diferentes (pensamiento de correspondencia), dado que se limitó al conteo de uno en uno. Esta situación posibilita interpretar que podría deberse a la edad de la alumna (entre 4 y 5 años) y que sus conocimientos aún se basan en el conteo de uno en uno, como se presentó en el ejemplo 3, sesión 4.2

Las estrategias están relacionadas con el tipo de pensamiento funcional que los estudiantes alcanzan. Así, hallar el resultado a través de C1 (conteo de uno en uno con ayuda de figuras) y C2 (conteo de uno en uno sin ayuda de figuras) no posibilitan el desarrollo del pensamiento funcional.

En relación a la elaboración de soluciones por medio de C5 (operan haciendo grupos de dos) y C6 (suma el patrón al valor anterior) permiten dar cuenta del pensamiento de recurrencia. Puesto que el estudiante ha identificado el patrón de una de las variables puestas en juego y suma teniendo en cuenta dicho patrón, como es el caso de la Tarea 2 (Perros y ojos) en que los estudiantes E4 y E5 van encontrando el resultado al sumar dos al valor previo.

En cuanto a las estrategias C3 (sin contar de uno en uno en preguntas que involucran un gran número de perros), C4 (uso de variables), C7 (separa la variable platos de comida y agua), C8 (suman dos veces el mismo número) y C9 (agrega el plato con agua) están relacionadas con el pensamiento de correspondencia. Dado que, al hallar las soluciones considerando alguno de estas estrategias, los estudiantes identificaron una regla que les permitió hallar el resultado dado un determinado número de perros en cualquiera de las cinco tareas.

Los estudiantes que cuentan de uno en uno hasta un número mayor que 26 y 50, caso de E4 y E5, tienen más habilidades para trabajar con las tareas que involucran la variación

directamente proporcional y la lineal. Ellos, construyeron tres estrategias diferentes de solución (C5, C6 y C8) que los estudiantes que solo cuentan hasta un número menor que 20 (E1, E2 y E3).

De esta forma, este trabajo aporta evidencia acerca del pensamiento de recurrencia y correspondencia en cuatro de los cinco niños de tercero de preescolar. Para ello, se siguió el tránsito de los informantes a través del pensamiento de recurrencia y correspondencia, analizando sus respuestas orales a cinco tareas del tipo $y = x$ (tarea 1), $y = 2x$ (tarea 2 y 3), $y = x$ y $y = 2x$ (tarea 4) y, $y = x + 1$ (tarea 5). Estas tareas se basan en los trabajos pioneros de Blanton y Kaput (2004) y Castro et al. (2017).

Es oportuno mencionar que, a diferencia del presente estudio, estos autores hablan de resultados colectivos proporcionados por los niños que ellos interrogaron. En particular, reportaron evidencias de pensamiento de correspondencia y covariacional en escolares de este mismo nivel educativo. Aquí, no se observó pensamiento covariacional en los niños de CONAFE que participaron en esta investigación.

Los informantes del presente trabajo dan evidencias de pensamiento de recurrencia en la Tarea 2, perros y ojos (de tipo $y = 2x$), dos estudiantes (E4 y E5) hallaron el número de ojos, considerando hasta seis perros. Ellos se dieron cuenta que, un perro tiene dos ojos y para un número mayor de perros agregaron dos ojos por cada perro que consideraban.

El pensamiento de correspondencia se evidencia, concretamente, en la tarea 1 (perros y colas), al hallar el número de colas, teniendo en cuenta un número de perros y dada una cantidad de colas encontrar el número de perros. Tres alumnos (E3, E4 y E5) identificaron que el número de colas corresponde al mismo número de perros, pasando de situaciones particulares a la generalización en términos de variables, m perros, m colas. Y en la tarea 6 (perros, platos de comida y uno de agua), de tipo $y = x + 1$, cuatro estudiantes (E2, E3, E4 y E5) identificaron el patrón, “mismo número de platos de comida que de perros”, y tuvieron en cuenta el plato con agua, “seis platos de comida y un plato de agua”.

Estos hallazgos confirman lo mencionado por Monje (2014), quien señala que “tener acceso al pensamiento algebraico en edades tempranas es posible”. Como lo menciona Pinto

(2011), el pensamiento funcional es un camino para llegar al pensamiento algebraico y en esta investigación se observa que, desde la educación preescolar los estudiantes tienen habilidades para trabajar con tareas que involucran la variación directamente proporcional y la lineal.

Los hallazgos de este trabajo, resultarán útiles para la comunidad de investigadores interesados en el estudio del pensamiento funcional, primero por los resultados obtenidos y segundo por las inquietudes que se plantean para llevarse a cabo en futuras investigaciones. El cierre de este trabajo es la apertura de un nuevo estudio, puesto que es importante seguir contribuyendo al enriquecimiento de este pensamiento y las alternativas prometedoras para trabajarse en el sistema escolar.

Algunas recomendaciones para futuras investigaciones

Desarrollar nuevas investigaciones que se ocupen del diseño de tareas o estrategias de aprendizaje que promuevan el pensamiento funcional (recurrencia, correspondencia y covariación) entre los escolares de preescolar, en particular, del subsistema CONAFE. Esto ampliaría las oportunidades de participación de los futuros ciudadanos en sus comunidades de origen.

La secuencia de tareas presentada demostró ser factible y fructífera, pero inconsistente en algunas preguntas que podrían llevar a los estudiantes al desarrollo del pensamiento covariacional. Del mismo modo, es necesario que en estudios posteriores se indaguen sobre qué tipo de preguntas pueden ayudar a los estudiantes a desarrollar este tipo de pensamiento.

El trabajo con tablas ayuda a los estudiantes, desde los primeros grados de escolaridad, a reconocer la relación entre dos variables. Es deber del docente/investigador orientar a los niños que miren las dos columnas en lugar de subir y bajar una columna en particular, para ello, se recomienda subrayar los datos codificados con colores para ayudar a visualizar las dos cantidades que varían (Blanton, et al. 2015). Se considera que esto, permitiría a los estudiantes a que transiten del conteo de uno en uno a reconocer la relación entre los valores de los dos conjuntos, empezando con tareas con constante de proporcionalidad igual a 1, dado

que podrían identificar que los valores que están en la columna izquierda son los mismos que están en la columna derecha, cinco-cinco.

Referencias

- Beatty, R., Day-Mauro, M., & Morris, K. (2013). Young Students' Explorations of Growing Patterns: Developing Early Functional Thinking and Awareness of Structure. *North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*.
- Blanton, M., Brizuela, B. M., Gardiner, A. M., Sawrey, K., & Newman-Owens, A. (2015). A Learning Trajectory in 6-Year-Olds' Thinking About Generalizing Functional Relationships. *Journal for Research in Mathematics Education*, 46(5), 511–558.
- Blanton, M., Brizuela, B. M., Stephens, A., Knuth, E., Isler, I., Gardiner, A. M., ... & Stylianou, D. (2018). Implementing a framework for early algebra. In *Teaching and learning algebraic thinking with 5-to 12-year-olds* (pp. 27-49). Springer, Cham.
- Blanton, M., & Kaput, J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. In M. Johnsen, & A. Berit (Eds.), *Proceedings of the 28th international group of the psychology of mathematics education* (pp. 135–142). Bergen, Norway: Bergen University College
- Castro, E., Cañadas, M., y Molina, M. (2017). Pensamiento funcional mostrado por estudiantes de Educación Infantil. *Educación Matemática En La Infancia*, 6(2), 1–13.
- Carraher, D. W., Schliemann, A. D., Brizuela, B. M., & Ernest, D. (2006). Arithmetic and algebra in early mathematics education. *Journal for Research in Mathematics education*, 37(2), 87-115.
- Carraher, D., & Schliemann, A. (2014). Early algebra teaching and learning. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 193-196). Dordrecht, Países Bajos: Springer.
- Cai, J., & Knuth, E. (Eds.) (2011). *Early algebraization*. New York, NY: Springer.
- Hernández, R, Fernández, C y Baptista, P (2014). *Metodología de la Investigación 6ª edición*. México, DF: McGraw-Hill / Interamericana Editores, S.A. DE C.V. Recuperado de <http://uca.ac.cr/wp-content/uploads/2017/10/Investigacion.pdf>

- Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it. *The Mathematics Educator*, 8(1), 139–151.
- Kieran, C. (2011). Overall commentary on early algebraization: Perspectives for research and teaching. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization* (pp. 579-593). New York, NY: Springer.
- Kieran, C., Pang, J., Schifter, D., & Ng, S. F. (2016). *Early Algebra. Research into its Nature, its Learning, its Teaching*. ICME-13 Topical Surveys. Springer International Publishing
- Monje, C. (2014). *Informe final de la consultoría: Diseño del currículo para preescolar en educación básica comunitaria*. 2285.
- Morales, R., Cañadas, M. C., Brizuela, B. M. y Gómez, P. (2016). Relaciones funcionales identificadas por estudiantes de primero de educación primaria y estrategias de resolución de problemas que involucran funciones lineales. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 365-375). Málaga: SEIEM
- Payne, N. (2012). *Tasks that promote functional reasoning in early elementary school students* (Trabajo de doctorado). The University of North Carolina at Greensboro.
- Pinto, E. (2016). *Relaciones funcionales, sistemas de representación y generalización en estudiantes de tercero de primaria* (Trabajo de fin de máster). Universidad de Granada, España
- Pinto, E. y Cañadas, M.C. (2017). Estructuras y generalización de estudiantes de tercero y quinto de primaria: un estudio comparativo. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 407-416). Zaragoza: SEIEM.
- Pinto, E., Cañadas, M. C., Moreno, A. y Castro, E. (2016). Relaciones funcionales que evidencian estudiantes de tercero de educación primaria y sistemas de representación que usan. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández,

- C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 417-426). Málaga: SEIEM
- Radford, L. (2011). Grade 2 students' non-symbolic algebraic thinking. In *Early algebraization* (pp. 303-322). Springer, Berlin, Heidelberg
- Radford, L. (2012). On the development of early algebra thinking. *PNA*, 6(4), 117–133.
- Rico, L. (2007). La competencia matemática en PISA. *PNA. Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, 1(2), 47-66
- Rojas, P., y Vergel, R. (2013). Procesos de Generalización y Pensamiento Algebraico. *Educación Científica y Tecnológica*.
- Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. En J. Kaput, W. Carraher y M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 133-160). Nueva York, NY: Lawrence Erlbaum Associates.
- Stephens, A. C., Fonger, N., Strachota, S., Isler, I., Blanton, M., Knuth, E., & Murphy Gardiner, A. (2017). A Learning Progression for Elementary Students' Functional Thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, 19(3), 143–166. Doi: 10.1080/10986065.2017.1328636
- Tanisli, D. (2011). Functional thinking ways in relation to linear function tables of elementary school students. *Journal of Mathematical Behavior*, 30(3), 206–223. Doi: 10.1016/j.jmathb.2011.08.001
- Warren, E., & Cooper, T. O. M. (2005). Introducing Functional Thinking in Year 2: a case study of early algebra teaching. *Contemporary Issues in Early Childhood*, 6(2), 150-162
- Warren, E., & Cooper, T. (2008). Generalising the pattern rule for visual growth patterns: Actions that support 8 year olds' thinking. *Educational Studies in Mathematics*, 67(2), 171–185. Doi: 10.1007/s10649-007-9092-2
- Wilkie, K. J. (2014). Learning to Like Algebra through Looking: Developing Upper Primary Students' Functional Thinking with Visualisations of Growing Patterns. *Australian*

Primary Mathematics Classroom, 19(4), 24-33

Anexos

Anexo 1. Prueba piloto

TAREA 1. PERROS Y COLAS

Vamos a pensar que en nuestra casa tenemos perros, mira tengo imágenes, (interrumpe el niño) ¿de dos perros? Sí, dos perros. Lo que voy hacer es recortar una de ellas, voy a recortar la imagen (recorta), mira ya tengo mi primer perro, ahora vamos a utilizar la pizarra, vamos a utilizar cinta (recortando un pedazo de cinta), (se coloca un pedazo de cinta en la imagen del perro que recorta) se pega la imagen en la pizarra y pregunta al niño si se alcanza a ver bien, pues la imagen no es muy grande porque se pensaba trabajar con una pizarra pequeña, lo que quiero saber es cuántas colas hay en un perro, el niño interviene y dice “una” ¿tiene una cierto? Entonces mira la voy a marcar, mira he marcado su cola, ahora vamos a pensar en dos perros, vamos hacer lo mismo, vamos a marcar su cola, acá hay un perro y tiene una cola, mostrando dos perros, acá hay dos perros y hay... interviene el niño diciendo dos colas. Ahora quiero que tú hagas lo que yo acabo de hacer, te voy a entregar estas cuatro imágenes de perros y los otros materiales (tijeras, cinta, marcador y una hoja de papel).

I: Ahora quiero saber cuántas colas hay en tres perros

E: ¿tres perros?

I: sí.

E: tres colas

I: ¿cómo sabes que son tres?

E: en la escuela

I: ¿por qué dices que son tres colas?

E: tres perros.

I: tres perros, ah bueno.

I: qué tal si tuviéramos cuatro perros, ¿cuántas colas habría en cuatro perros?

E: cuatro

I: ¿en cinco?

E: cinco

I: ¿en ocho?

E: ¿ocho? Ocho

I: en diez

E: diez

I: ¿por qué diez?

E: diez colas, diez perros.

I: ¿qué tal si tuviéramos quince perros?

E: quince colas

I: ¿cómo sabes que son quince colas?

E: en la escuela

I: ¿si tuvieras veinte perros?

E: veinte colas

I: ¿si tuviéramos treinta perros?

E: treinta colas

I: por qué treinta

E: treinta perros, treinta colas

I: qué tal si hubiese 8 colas

E: ¿ocho colas?, ¿ocho perros?

I: ocho perros, ¿cómo sabes que son ocho perros?

E: en la escuela aprendí, uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, bueno se hasta el sesenta.

I: entonces si hubiera quince colas

E: quince perros

I: veinticinco colas

E: veinticinco perros

I: cómo le dirías a tu papá, ¿qué hay que hacer para saber cuántas colas hay en unos perros?

E: ¿unos perros?

I: si tuviéramos cincuenta y siete perros, ¿cuántas colas habría?

E: cincuenta y siete colas

I: ¿por qué cincuenta y siete?

E: cincuenta y siete, me sé hasta el sesenta, (cuenta los números hasta el sesenta)

I: ahora dime un número

E: ¿sesenta?

I: cuántas colas habría en sesenta perros

E: sesenta colas

I: si hubiera sesenta y cinco colas, ¿cuántos perros habría?

E: sesenta y cinco perros

I: si tuviéramos ciento cincuenta perros

E: ciento, ciento, ciento cincuenta colas

I: si hubiera doscientos perros

E: ¿doscientos?, ¿doscientas colas?

TAREA 2. PERROS Y OJOS

Continuamos trabajando con perros, esta vez quiero averiguar cuántos ojos hay en un perro, recorta la imagen y la pega en la pizarra y dice:

I: ya pegué una imagen, entonces miremos que en un perro hay dos ojos, seguidamente dice vamos a averiguar cuántos ojos hay en dos perros, recorta una segunda imagen y la pega, cuando termina de pegarla el niño dice

E: cuatro

I: entrega el material al niño y pregunta: cuántos ojos hay en tres perros

E: seis

I: ahora pensemos en cuatro perros, ¿cuántos ojos habría en cuatro perros?

E: ocho

I: qué hiciste para saber que son ocho ojos

E: recordé

I: qué recordaste

E: recordé los círculos

I: ¿cómo eran los círculos, me quieres enseñar cómo eran los círculos?

E: los círculos eran así, (dibuja con el dedo un círculo) normales.

I: pregunta, qué tal si tuviéramos seis perros

E: ¿seis perros?

I: ¿cuántos ojos habría en seis perros?

E: se queda pensando un momento y dice, no sé

I: ¿no sabes?

I: 5 perros

E: ocho

I: ¿ocho?

TAREA 4. PERROS OJOS Y COLAS

El estudiante recorta las imágenes y las pega en la pizarra

I: cuántos ojos y cuantas colas hay en un perro

E: dos y uno

I: ¿dos ojos y una cola?

E: sí.

I: ¿cuántos ojos y cuántas colas hay en dos perros?

E: cuatro ojos y dos colas

I: cómo sabes que son cuatro ojos y dos colas

E: recordé de la escuela

I: si hay tres perros, ¿cuántos ojos y cuántas colas hay?

E: seis ojos y tres colas

I: qué hiciste

E: recordé de la escuela, hice círculos y los ojos son círculos

I: para saber el número de colas que hay en tres perros, ¿cómo lo hiciste?

E: lo recordé, en vez de círculos, colas

I: cuatro perros, ¿cuántos ojos y cuántas colas habría?

E: ¿ocho ojos y cuatro colas?

I: ocho ojos y cuatro colas, cómo lo hiciste

E: nada

I: si tuviéramos seis perros, ¿cuántos ojos y cuántas colas?

E: doce ojos y seis colas

I: ocho perros

E: ¿trece?

I: recuerdas las tareas que hicimos ayer
E: recordé las colas y de los ojos
I: cómo eran esas tareas
E: mmm ¿cuántos ojos había en cuatro perros? Y ¿cuántas colas?
I: ¡qué bien! Cuántas colas hay en un perro
E: ¿dos?..
E: una
I: preguntábamos por cinco perros, ¿cuántas colas hay en 5 perros?
E: cinco
I: ¿si hay 17 perros?
E: 17 colas
I: ¿si hay 32 perros?
E: 32 colas
I: si hay 53 colas
E: 53 perros
I: dime un número
E: mmmm ¿el 30?
I: 30 perros, ¿cuántas colas habría en 30 perros
E: ¿30 perros?, ¿30 colas?
I: te acordaste de la primera tarea, ¿cuál era la segunda tarea?
E: la de los ojos
I: qué se preguntaba ahí
E: un perro tiene dos ojos, otro perro tiene dos y serían cuatro
I: cuántos ojos habría en tres perros
E: seis ojos
I: cuatro perros
E: ocho

I: ayer te pregunté cómo lo habías hecho, ahora me quieres decir cómo lo hiciste, cómo sabes que son 8

E: conté en silencio

I: qué estás contando en silencio

E: uno, dos, tres (cuenta despacio)

I: lo puedes hacer en voz alta

E: uno, dos, tres (cuenta en voz alta) tres (despacio)...diez (pronuncia el número en voz alta y en vos baja)

I: ¿por qué repites dos veces, siete (voz alta) siete (voz baja)?

E: como se escucha en voz fuerte y en vos baja

I: cuando estas contando, ¿qué es lo que imaginas?

E: nada

I: no sé los ojos de los perros

E: los ojos de los perros

I: ayer me dijiste que cinco más cinco diez, te acuerdas, ¿en qué piensas cuando me dices cinco más cinco, diez

E: conté en silencio

I: si hubiera seis perros

E: seis perros, doce

I: lo hiciste mucho más rápido que antes, ¿qué hiciste ahora?

E: conté en silencio

I: si hay ocho perros

E: ¿ocho perros?, ¿veinte?

I: mmm noo

E: ¿catorce?

I: noo

E: 16

I: por qué 16

E: no sé

I: en qué piensas

E: cómo se cuenta en silencio

I: ya recordaste cuál fue la primera y segunda tarea, ¿recuerdas cuál fue la tercera?

E: mmmm no

I: la tercera tarea era hallar el número de colas y de ojos, recuerdas, cuántos ojos hay en un perro y cuántas colas

I: preguntábamos, cuántas colas hay cuántos ojos hay en dos perros

E: cuatro ojos y dos colas

I: cómo lo hiciste

E: en silencio

I: qué hiciste en silencio

E: uno, dos, tres, cuatro (en voz baja).

TAREA 5. PERROS, PLATOS DE COMIDA Y UNO DE AGUA

I: ¿Tú has llegado a ver muchos, muchos perros?

E: muchos platos.

I: has visto en alguna casa bastantes perros

E: aaah no.

I: vamos a pensar que en una casa hay muchos perros, la dueña de los perros no quiere colocarles un plato con agua para cada uno, un plato de comida sí, porque generalmente los perros cuando son grandes no comen en el mismo plato, porque se pelean. Entonces la señora les va a colocar un plato de comida y un solo plato de agua para todos. (se recorta un perro, un plato de comida, uno de agua y se los pega en la pizarra), miremos que un perro tiene su plato de comida y también hay un plato con agua (indicando las imágenes pegadas en la pizarra).

I: ahora la señora tiene dos perros, al segundo perro también le va a colocar su plato de comida, este también va a beber agua del plato que bebe agua el anterior. Entonces hay dos perros, se necesita saber cuántos platos se necesita para dos perros, se necesitan tres platos, dos de comida y uno de agua.

I: qué pasaría si la señora tuviera tres perros, ¿cuántos platos se necesitaría?

E: tres

I: los tres son solo de comida o hay uno de agua

E: tres de comida

I: y el plato con agua

E: ¿el plato con agua?

I: cuántos platos necesitaría la señora

E: dos

I: cuatro perros

E: cuatro platos de comida y uno de agua

I: seis perros

E: seis platos de comida y uno de agua

I: ocho perros

E: ocho platos de comida y uno de agua

I: diez perros

E: diez platos de comida y un plato de agua.

I: cómo sabes que son diez

E: constando en silencio

I: si son doce perros, ¿cuántos platos se necesita?

E: doce platos de comida y uno de agua

I: dieciséis perros

E: dieciséis platos de comida y uno de agua.

I: diecinueve perros

E: diecinueve platos de comida y uno de agua.

I: cuéntame qué hiciste para darme tu respuesta

E: contando

I: qué contaste

E: conté con los dedos (muestra con sus dedos que contó de uno en uno)

I: si la señora tuviera cincuenta y seis perros

E: cincuenta y seis de comida y uno de agua

I: ochenta y tres perros

E: ochenta y tres de comida y uno de agua

I: por qué son ochenta y tres platos de comida y uno de agua.

E: ochenta y tres perros.

Anexo 2. Entrevistas realizadas a los estudiantes del CONAFE

Perros y colas

Respuesta proporcionada por E5

I: ¿Recuerdas que trabajamos con perros? Habíamos dicho que en un perro hay una cola (pegando y encerrando con una curva la cola)

I: ¿En dos perros cuántas colas habría?

E5: Dos colas.

I: ¿Y en tres perros?

E5: ¿En tres?

I: Sí.

E5: Tres colas.

I: En cuatro perros, ¿cuántas colas habría?

E5: Cuatro colas.

I: ¿Y en seis perros?

E5: Seis colas

I: ¿En ocho perros?

E5: Ocho colas.

I: ¿Cómo sabes que son ocho?

E5: Porque son ocho perros.

I: Y si tuviéramos once perros, ¿cuántas colas habría?

E5: Once colas.

I: ¿Quince perros?

E5: Quince colas.

I: ¿cómo sabes que son quince colas?

E5: Son quince perros.

I: ¿En veinte?

E5: Veinte colas.

I: ¿Por qué veinte colas?

E5: Porque son veinte perros.

I: Y en veinticinco perros, ¿cuántas colas habría?

E5: Veinticinco colas.

I: ¿En qué piensas cuando dices veinticinco colas?

E5: En veinticinco colas.

I: Ahora pensemos en 35 perros, ¿cuántas colas habría?

E5: treinta y cinco colas.

I: ¿Cómo lo supiste?, ¿qué haces para dar la respuesta inmediatamente?

E5: No sé.

I: ¿Y en cuarenta y cinco perros?

E5: Cuarenta y cinco colas.

I: ¿Por qué?

E5: Porque hay cuarenta cinco perros.

I: En setenta perros, ¿cuántas colas habría?

E5: Setenta colas.

I: ¿Por qué setenta colas?

E5: Porque son setenta perros.

I: Qué tal si hubiese cien perros, ¿cuántas colas habría?

E5: Cien colas.

I: ¿Por qué cien colas?

E5: Porque son cien perros.

I: ¿Y en ciento cincuenta perros?

E5: Ciento cincuenta colas.

I: ¿Cómo sabes que son ciento cincuenta colas?

E5: Porque son ciento cincuenta perros.

I: ¿Qué tal si hubiese quinientos perros?

E5: Quinientas colas y quinientos perros.

I: ¿Qué tal si hubiese un millón?, ¿cuántas colas habría?

E5: Un millón.

I: ¿Un millón de qué?

E5: De colas.

I: ¿Y si hubiese infinitos perros?

E5: Infinitas colas.

I: Si tenemos x perros, ¿cuántas colas habría?

E5: x colas.

I: ¿Si tenemos z perros?

E5: z colas.

I: ¿Si hay m perros?

E5: m colas.

I: ¿Por qué m colas?

E5: No sé.

I: Si hay dos colas, ¿cuántos perros habría?

E5: Dos perros.

I: ¿Y si hay cinco colas?

E5: Cinco perros.

I: En ocho colas, ¿cuántos perros habría?

E5: Ocho perros.

I: ¿Por qué ocho perros?

E5: Porque son ocho colas y ocho perros.

I: ¿Y en doce colas?

E5: Doce perros.

I: En veinte colas, ¿cuántos perros habría?

E5: Veinte perros.

I: ¿Cómo sabes que son veinte perros?

E5: Porque son veinte perros.

I: ¿Si son treinta colas?

E5: Treinta perros y treinta colas.

I: En cuarenta y cinco colas, ¿cuántos perros habría?

E5: Cuarenta y cinco colas y cuarenta cinco perros.

I: ¿Y en cincuenta y cinco colas?

E5: Cincuenta y cinco perros y cincuenta y cinco colas.

I: En cien colas, ¿cuántas perros habría?

E5: Cien perros.

I: Ahora doscientas colas.

E5: Doscientas colas y doscientos perros.

I: Quinientas colas.

E5: quinientas colas y perros.

I: Un millón.

E5: Un millón de perros.

I: Infinitas colas, ¿cuántos perros habría?

E5: Infinitos perros.

I: ¿Por qué infinitos perros?

E5: Porque son infinitos.

I: Infinitos qué.

E5: Colas.

I: m colas.

E5: m colas de perros.

I: Si hay x colas, ¿cuántos perros habría?

E5: x perros.

I: z colas.

E5: z colas, digo z perros.

Fin.

Respuestas proporcionadas por E4

I: ¿Recuerdas que trabajamos con perros?

E4: Sí.

I: Habíamos dicho que en un perro hay una cola (pegando y encerrando con una curva la cola), ¿En dos perros cuántas colas habría?

E4: Dos colas.

I: ¿Y en tres perros?

E4: Tres colas.

I: En cuatro perros, ¿cuántas colas habría?

E4: Cuatro colas.

I: ¿Y en seis perros?

E4: Seis colas.

I: ¿Cómo sabes que son seis colas?

E4: Porque van a haber seis perros.

I: Ocho perros, ¿cuántas colas habría en ocho perros?

E4: Ocho.

I: ¿Por qué ocho?

E4: Ocho colas.

I: Si miraras once perros, ¿cuántas colas habría?

E4: Once.

I: Once, ¿qué?

E4: Once colas.

I: ¿Por qué once colas?

E4: Porque hay once perros, hay más perros.

I: ¿Quince perros?

E4: Quince.

I: Quince, ¿qué?

E4: Quince colas.

I: ¿Y cómo sabes que son quince colas?

E4: Porque va a haber más colas.

I: En veinte perros, ¿cuántas colas habría?

E4: Veinte.

I: Veinte, ¿qué?

E4: Veinte colas.

I: ¿Qué tal si miráramos veinticinco perros?

E4: Veinticinco.

I: Veinticinco, ¿qué?

E4: veinticinco colas.

I: Y en 35 perros, ¿cuántas colas habría?

E4: Treinta y cinco.

I: Treinta y cinco, ¿qué?

E4: Treinta y cinco colas.

I: ¿Por qué?

E4: Porque hay muchos.

I: ¿Muchos qué?

E4: Muchos perros.

I: Y en cuarenta y cinco perros, ¿cuántas colas habría?

E4: Cuarenta y cinco.

I: Cuarenta y cinco qué.

E4: Cuarenta y cinco colas.

I: En setenta perros, ¿cuántas colas habría?

E4: Setenta colas.

I: Qué tal si hubiese cien perros, ¿cuántas colas habría?

E4: Cien colas.

I: ¿Y en ciento cincuenta perros?

E4: Ciento cincuenta colas.

I: En quinientos perros, ¿cuántas colas habría?

E4: Quinientas colas.

I: ¿Por qué quinientas colas?

E4: Porque va a haber quinientas colas.

I: ¿Qué tal si hubiese un millón de perros?, ¿cuántas colas habría?

E4: Un millón.

I: Y si hubiese infinitos perros, ¿cuántas colas habría?

E4: Muchos.

I: Si tenemos x perros, ¿cuántas colas habría?

E4: Sería x.

I: x qué.

E4: x colas.

I: z perros, ¿cuántas colas habría en z perros?

E4: z colas.

I: ¿Si hay m perros?

E4: sería m colas.

I: ¿Por qué m colas?

E4: m de perros.

I: Si miráramos dos colas, ¿cuántos perros habría?

E4: Dos colas.

I: Estás viendo dos colas, tú dices, hay... ¿cuántos perros habría?

E4: Dos perros.

I: ¿Y si hay cinco colas?

E4: Habría cinco perros y colas.

I: En ocho colas, ¿cuántos perros habría?

E4: Ocho.

I: Ocho qué.

E4: Ocho perros.

I: ¿Por qué ocho perros?

E4: Porque hay ocho colas.

I: Si ves doce colas, ¿cuántos perros habría?

E4: Doce colas.

I: En veinte colas, ¿cuántos perros habría?

E4: Veinte.

I: Veinte qué.

E4: Veinte perros con colas.

I: ¿Si son treinta colas?

E4: Sería treinta perros.

I: En cuarenta y cinco colas, ¿cuántos perros habría?

E4: Cuarenta y cinco.

I: Cuarenta y cinco qué.

E4: Cuarenta y cinco colas.

I: ¿Y en cincuenta y cinco colas?

E4: Cincuenta y cinco colas.

Fin.

Respuestas proporcionadas por E1

I: ¿Recuerdas que habíamos trabajado con perros?

E1: Sí.

I: Muy bien, tenemos un perro y miremos que en un perro hay una cola (después de pegar y encerrar con una curva la cola), ¿Cuántas colas hay en dos perros? (después de pegar y encerrar con una curva la cola).

E1: Dos.

I: Y en tres perros, ¿cuántas colas habría?

E1: mmmm 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25.

I: ¿Cuántas colas hay en tres perros? (Indicando las tres figuras que se ha pegado)

E1: una, dos, tres.

I: En cuatro perros, ¿cuántas colas habría?

E1: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17.

I: Vamos a ver cuántas colas hay en cuatro perros (se pega una cuarta imagen).

E1: una, dos, tres, cuatro (contando las colas de los perros).

I: Y en cinco perros, ¿cuántas colas habría?

E1: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

I: Mira ahora tenemos cinco perros.

E1: 1, 2, 3, 4, 5 (contando las colas de los perros).

I: Si pegáramos otro perro, cuántas colas habría.

E1: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

I: Ahora cuántos perros tenemos en la hoja.

E1: 1, 2, 3, 4, 5, 6.

I: Y cuántas colas hay en los 6 perros.

E1: 1, 2, 3, 4, 5, 6.

I: Si hubiese siete perros aquí (señalando la hoja), ¿cuántas colas habría?

E1: 1, 2, 3, 4, 5.

Fin.

Respuestas proporcionadas por E2

I: ¿Recuerdas que trabajamos con perros?

E2: Sí.

I: Habíamos dicho que en un perro hay una cola (marcando su cola con una curva) y si tenemos dos perros, ¿cuántas colas habría?

E2: una cola, otra cola.

I: Y si tuviéramos tres perros, ¿cuántas colas habría?

E2: Una, una y una, habría tres colas.

I: Si hubiese cuatro perros.

E2: habría más colas, una cola, dos colas, tres colas, cuatro colas.

I: Qué tal si hubiese seis perros, ¿cuántas colas habría?

E2: Una, dos tres, cuatro, cinco.

I: Vamos a ver cuántas colas hay en cinco perros (¿se pega tres figuras más, para un total de cinco?

E2: Una cola, dos colas, tres colas, cuatro colas, cinco colas.

I: En seis perros.

E2: Hay más colas, una cola, dos colas, tres colas, cuatro colas, cinco colas, seis colas.

I: Qué tal si tuviéramos siete perros.

E2: Entonces sería más colas.

I: ¿Cuántas colas serían?

E2: Una cola, dos colas, tres colas, cuatro colas, cinco colas, siete colas.

I: Y en siete perros, ¿cuántas colas habría?

E2: Una cola, dos colas, tres colas, cuatro colas, cinco colas, siete colas, ocho colas.

I: Ahora en diez perros, ¿cuántas colas habría?

E2: Una cola, dos colas, tres colas, cuatro colas, cinco colas, siete colas, ocho colas, nueve colas, diez colas.

I: Y en doce perros.

E2: ya serían muchos perros.

I: ¿Cuántos habría?

E2: sería siete más siete.

I: Si miras una cola, ¿cuántos perros habría?

E2: Once.

Respuestas proporcionadas por E3

I: ¿Recuerdas que trabajamos con perros?

E3: sí.

I: Habíamos dicho que en un perro hay una cola (pegando en una hoja y encerrando con una curva la cola), ¿Cuántas colas hay en dos perros?

E3: Dos colas.

I: ¿Qué tal si tuviéramos tres perros?

E3: Tres colas.

I: Y si tuviéramos cuatro perros aquí, indicando la hoja ¿cuántas colas habría?

E3: Cuatro colas.

I: ¿Cómo sabes que son cuatro colas?

E3: Porque son cuatro perros y cuatro colas.

I: ¿Y en seis perros?

E3: Seis colas

I: ¿Cómo sabes que son seis colas?

E3: Sí porque, son seis perros, son seis colas.

I: En ocho perros, ¿cuántas colas habría?

E3: Ocho colas.

I: ¿Por qué ocho colas?

E3: Porque son ocho perros.

I: Y si tuviéramos once perros, ¿cuántas colas habría?

E3: Once colas.

I: ¿Qué hiciste para saber que son once colas?

E3: Porque son once perros.

I: ¿Quince perros?

E3: Quince colas.

I: ¿Cuántas colas habría en veinte perros?

E3: Veinte colas.

I: Y en veinticinco perros, ¿cuántas colas habría?

E3: Veinticinco colas.

I: Por qué veinticinco colas.

E3: Porque son veinticinco perros.

I: Qué tal si hay 35 perros, ¿cuántas colas habría?

E3: Treinta y cinco colas.

I: ¿Y en cuarenta y cinco perros?

E3: Cuarenta y cinco colas.

I: ¿Por qué?

E3: Porque son cuarenta cinco perros.

I: En setenta perros, ¿cuántas colas habría?

E3: Setenta colas.

I: ¿Por qué setenta colas?

E3: Porque son setenta perros.

I: En cien perros, ¿cuántas colas habría?

E3: Cien, cien colas.

I: ¿Cómo sabes que son cien colas?

E3: Porque son cien perros.

- I: ¿Y en ciento cincuenta perros?
E3: Ciento cincuenta colas.
- I: En quinientos perros, ¿cuántas colas habría?
E3: Quinientas colas.
- I: ¿Cómo sabes que son quinientas colas?
E3: Porque son quinientos perros.
- I: Qué tal un millón, ¿cuántas colas habría?
E3: Un millón de colas.
- I: Por qué un millón de colas.
E3: Porque es un millón de perros.
- I: ¿Y qué tal si hay infinitos perros?
E3: Infinitas colas.
E3: m colas.
- I: ¿Cómo sabes que son m colas?
E3: Porque son m perros.
- I: Si tenemos x perros, ¿cuántas colas habría?
E3: ¿ x colas?
I: Por qué x colas
E3: Porque son x perros.
- I: ¿Cuántas colas habría en z perros?
E3: z colas.
- I: ¿Y en m perros?
- I: Si tu miraras una cola, ¿cuántos perros habría?
E3: Un perro.
- I: Si miraras dos colas.
E3: Dos perros.
- I: ¿Por qué dos perros?
E3: Porque son dos colas.
- I: ¿Y si hay cinco colas?

E3: Cinco perros.

I: En ocho colas, ¿cuántos perros habría?

E3: Ocho perros.

I: ¿Por qué ocho perros?

E3: Porque son ocho colas.

I: ¿Qué tal si miramos once colas?

E3: Once perros.

I: En quince colas, ¿cuántos perros habría?

E3: Quince perros.

I: Por qué quince perros.

E3: Porque son quince perros.

I: Qué imaginas cuando dices quince perros.

E3: Tenerlos.

I: Si tu vez veinte colas, ¿cuántos perros estarías viendo?

E3: Veinte perros.

I: ¿Cómo hiciste para saber que son veinte perros?

E3: Porque vi veinte colas.

I: Y en veinticinco colas.

E3: Veinticinco perros.

I: ¿Si son treinta colas?

E3: Treinta perros.

I: Por qué treinta y cinco perros.

E3: Porque son treinta y cinco colas.

I: En cuarenta y cinco colas, ¿cuántos perros habría?

E3: Cuarenta y cinco perros.

I: ¿Y en setenta colas?

E3: Setenta perros.

I: Por qué setenta perros.

E3: Porque son setenta colas.

I: En cien colas, ¿cuántos perros habría?

E3: Cien perros.

I: ¿Cómo sabes que son cien perros?

E3: Cien, porque vi sus colas.

I: Ahora ciento cincuenta colas.

E3: Ciento cincuenta perros.

I: Quinientas colas.

E3: Quinientas perros.

I: Por qué quinientos perros

E3: Porque hay quinientas colas.

I: Un millón de colas.

E3: Un millón de perros.

I: Infinitas colas, ¿cuántos perros habría?

E3: Infinitos perros.

I: Y en m colas, ¿cuántos perros habría?

E3: m perros.

I: Si hay x colas, ¿cuántos perros habría?

E3: x perros.

I: Por qué x perros.

E3: Porque son x colas.

I: En z colas, ¿cuántos perros habría?

E3: z perros.

Fin.

TAREA 2. PERROS Y OJOS

Respuestas proporcionadas por E3

I: ¿Recuerdas que algún momento contamos los ojos de los perros?

E3: No.

I: Entonces miremos que en un perro hay dos ojos (mostrando una imagen), y en dos perros (mostrando una segunda imagen) ¿cuántos ojos hay?

E3: Uno, dos, tres, cuatro ojos (contando los ojos).

I: ¿Entonces cuántos ojos hay en dos perros?

E3: Cuatro.

I: Ahora, ¿cuántos ojos habría en tres perros?

E3: Seis ojos.

I: ¿Cómo lo hiciste?

E3: Contándolos.

I: Y en cuatro perros, ¿cuántos ojos habría?

E3: Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete.

I: Vamos a ver si en cuatro perros hay siete ojos (se pega dos figuras más de las que ya se había pegado). ¿cuántos perros tenemos ahí? (después de haber pegado tres perros).

E3: Tres.

I: ¿Cuántos ojos hay?

E3: Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis.

I: Ahora, ¿cuántos perros tenemos?

E3: Uno, dos tres, cuatro.

I: ¿Cuántos ojos hay?

E3: Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho.

I: Si pegara un perrito más, ¿cuántos ojos más habría?

E3: mmm (se queda callada).

I: Miremos cuántos ojos hay en cinco perros.

E3: Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez ojos.

I: En seis perros, ¿cuántos ojos habría?

E3: No sé.

I: Vamos a ver, (se pega seis figuras), ¿cuántos ojos hay en seis perros?

E3: Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez, once, doce ojos.

I: ¿Y en siete perros?

E3: Mmmm no sé (después de un momento de silencio).

I: Si tu ves dos ojos, ¿cuántos perros estarías mirando?

E3: Uno.

I: Si ves cuatro ojos, ¿cuántos perros habría?

E3: ¿Cuatro?

I: Sí, cuatro.

E3: Dos.

I: ¿Cómo sabes que son dos?

E3: Porque son dos perros.

I: Si ves seis ojos, ¿cuántos perros habría?

E3: Seis.

I: Si ves ocho ojos, ¿cuántos perros habría?

E3: Ocho.

Respuestas proporcionadas por E2

Mira para un perro hay dos ojos (y se pega una figura). Si pegamos, interrumpe E2 diciendo dos perros, tres perros.

I: Sí, ¿cuántos ojos habría en dos perros?

E2: Uno, dos, tres, cuatro ojos (contando los ojos de las figuras que se pegó).

I: Qué tal si tuviéramos tres perros, ¿cuántos ojos habría?

E2: Uno, dos, tres, cuatro, cinco seis.

I: ¿Y en cuatro perros?

E2: Uno, dos, tres, cuatro, cinco seis, siete, ocho.

I: ¿Cuántos ojos habría en seis perros?

E2: Uno, dos, tres, cuatro, cinco seis, siete, ocho, nueve, diez.

I: Miremos (se pega tres figuras más a las dos que se había pegado), ¿Cuántos perros hay?

E2: Uno, dos, tres, cuatro, cinco.

I: ¿Y cuántos ojos?

E2: Uno, dos, tres, cuatro, cinco seis, siete, ocho, nueve, diez.

I: (Se pega una imagen más) Ahora cuántos perros tenemos?

E2: Seis.

I: ¿Cuántos ojos hay?

Iker: Uno, dos, tres, cuatro, cinco seis, siete, ocho, nueve, diez, once, doce.

I: Si pegáramos otro perrito.

E2: Uno, dos, tres, cuatro, cinco seis, siete, ocho, nueve, diez, once, doce, catorce.

I: Y en ocho perros.

E2: Uno, dos, tres, cuatro, cinco seis, siete, ocho, nueve, diez, once, doce, catorce, dieciséis, diecisiete, dieciocho, muchos ojos.

Respuestas proporcionadas por E1

I: ¿Recuerdas que estábamos trabajando con perritos?

E1: Sí.

I: Miremos que en el perrito que acabo de pegar hay dos ojos, ahora, voy a pegar otro perrito (se pega una segunda figura), ¿cuántos ojos hay en los dos perros?

E1: Uno, dos, tres, cuatro (cuenta los ojos de los perros).

I: Si tuviéramos tres perros, ¿cuántos ojos habría?

E1: Cinco.

I: ¿Cinco?, vamos a ver si eso es cierto, (se pega una tercera imagen)..

E1: Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis.

I: aaaah, entonces en tres perros hay...

E1: Seis ojos.

I: Y en cuatro perros, ¿cuántos ojos habría?

E1: Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho (cuenta como si hubiera cuatro figuras).

I: En cinco perros, ¿cuántos ojos habría?

E1: Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve.

I: Miremos, ahora tenemos cuatro perritos (después de haber pegado dos figuras más), ¿cuántos ojos hay en los cuatro perritos?

E1: Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho.

I: Ahora vamos a ver, ¿cuántos ojos hay en cinco perros? (se pega una quinta figura).

E1: Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez.

I: Y si tuviéramos seis perros.

E1: Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve.

I: ¿Si tú ves dos ojos, ¿cuántos perros estarías viendo?

E1: Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve.

I: Tú ves solo dos ojos, ¿cuántos perros estarías viendo?

Respuestas proporcionadas por E5

I: Vamos a seguir trabajando con perros, entonces en un perro hay (interrumpe Cristian: dos ojos). Muy bien, ahora pegamos un perro más, ¿cuántos ojos hay?

E5: Uno, dos, tres, cuatro ojos.

I: Si tuviéramos tres perros, ¿cuántos ojos habría?

E5: Cinco.

I: ¿Cinco? Vamos a ver (se pega tres perros en la hoja de papel), ¿cuántos ojos hay en tres perros?

E5: Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis.

I: Aaah correcto, son seis.

I: y en cuatro perros, ¿cuántos ojos habría?

E5: Ocho ojos.

I: ¿Cómo sabes que son ocho?

E5: Porque son dos ojos, otros dos, otros dos y otros dos son ocho.

I: Y si tuviéramos cinco perros, ¿cuántos ojos habría?

E5: Siete (después de un momento).

I: Vamos a ver si eso es cierto, (se pega cuatro figuras), ya dijiste que en cuatro perros hay ocho ojos y acá tenemos cinco perros (mostrándole cinco figuras), ¿cuántos ojos hay?

E5: Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez (contando los ojos de los perros).

I: Aaah son diez, ¿qué tal si hubiese un perrito más?, ¿cuántos ojos más habría?

E5: Once.

I: ¿Once?

E5: Y doce ojos.

I: ¿Cómo sabes que son doce?

E5: Porque son dos, dos, dos, dos, dos, entonces son diez (señalando las figuras) y acá son doce (señalando la hoja como si hubiese una figura más).

I: ¿Y qué tal si hubiera ocho perros?

E5: Trece perros.

I: ¿Y en siete perros?

E5: trece

I: ahora, si yo tengo un perro y pego un perro más, ¿cuántos ojos más habría?

E5: Uno, dos, tres, cuatro.

I: ¿Qué pasa cada vez que pego un perrito más?

E5: Más ojos.

I: ¿Cuántos más?

E5: Cuatro.

I: Sí tú ves dos ojos ¿Cuántos perros estás viendo?

E5: Dos ojos mmm, un perro.

I: Y si ves cuatro ojos.

E5: Cuatro perros (9 segundos después).

I: Ahora si ves cuatro ojos ¿cuántos perros estás viendo?

E5: Cuatro perros.

I: ¿Cuántos ojos tiene un perro?

E5: Dos.

I: Si ves cuatro ojos.

E5: No responde.

Respuestas proporcionadas por E4

I: Vamos a seguir trabajando con perros y vamos a ver cuántos ojos hay en los perros.

Vamos a ver entonces, ¿cuántos ojos hay en un perro? (se pega una imagen) mira en un perro hay... (interrumpe Camila, dos ojos).

I: Muy bien, ahora vamos a pegar otro perrito, ¿cuántos ojos hay en los dos perros?

E4: Cuatro ojos.

I: ¿Y si tuviéramos 3 perros, ¿cuántos ojos habría?

E4: Seis ojos.

I: ¿Cómo sabes qué son seis?

E4: Es que como conté uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis (mueve la cabeza, como si mirara una tercera figura).

I: ¿Cuántos ojos habría en cuatro perros?

E4: Ocho ojos.

I: ¿Cómo sabes qué son ocho?

E4: También los conté acá (señalando la hoja).

I: ¿Qué tal si tuviéramos seis perros, ¿cuántos ojos habría en 6 perros?

E4: ¿Seis? (Camila no responde).

I: ¿Cuántos ojos habría en cinco perros?

E4: Diez ojos.

I: (Pegamos seis imágenes en total), ¿cuántos ojos hay en los 6 perros?

E4: Doce ojos.

I: ¿Qué tal si hubiese 7 perros, ¿cuántos ojos habría?

E4: Dieciséis.

I: Cuando tú ves un perrito más, ¿cuántos ojos aumenta?

E4: Dos.

I: Sí pegara dos perritos más, ¿cuántos ojos aumentaría?

E4: Seis, (Camila tiene en cuenta la primera imagen que se había pegado y en total son tres perros).

I: Si te pegamos otro perrito, ¿cuántos ojos más habría?

E4: Ocho.

I: ¿Y un perrito más?

E4: Diez.

I: Si tú vez dos ojos, ¿cuántos perros estás viendo?

E4: Uno.

I: Si ves cuatro ojos, ¿cuántos perro estarías viendo.

E4: Dos.

I: Si ves seis ojos, ¿cuántos perros estarías viendo?

E4: Seis.

TAREA 3. PERROS Y PLATOS. UNO DE COMIDA Y OTRO DE AGUA

Respuestas proporcionadas por E5

I: Entonces vamos a seguir trabajando con perros, plato de comida y platos con agua.

Entonces mira, para un perro necesita un plato de comida y un plato de agua.

I: ¿Cuántos platos necesitamos para un perro?

E5: dos platos.

I: Si tuviéramos dos perros, ¿cuántos platos necesitaríamos?

E5: Dos platos de comida y dos platos de agua

I: ¿Cuántas platos en total?

E5: Uno, dos, tres cuatro platos.

I: Si tuviéramos tres perros, ¿Cuántas platos necesitaríamos?

E5: tres platos de comida y tres platos de agua.

I: ¿cuántos platos en total?

E5: Un plato de comida y uno de agua.

I: Si tuviéramos cuatro perros, ¿cuántos platos necesitamos?

E5: ¿Cuatro perros?

I: Sí.

E5: Cuatro platos de comida y cuatro platos de agua.

I: ¿En 6 perros?

E5: Seis platos de comida y seis platos de agua.

I: Y en ocho perros ¿Cuántos platos necesitaríamos?

E5: Ocho de comida y ocho platos de agua.

I: ¿Y en 11 perros?

E5: 11 platos de comida y 11 vasos de agua

I: ¿En 15 perros?

E5: 15 platos de comida y 15 platos de agua.

I: ¿Por qué?

E5: Porque son 15 perros, 15 platos de comida y quince platos de agua.

I: Y para 20 perros ¿Cuántos platos se necesita?

E5: veinte platos de comida y veinte platos de agua.

I: ¿Cómo sabes qué son 20 de comida y 20 de agua?

E5: Porque son 20 perros y son 20 platos de agua y también 20 de comida.

I: ¿25 perros?

E5: 25 platos de comida y 25 platos de agua.

I: ¿Para 35 perros?

E5: 35 platos de comida y 35 platos de agua.

I: Para 45 perros, ¿Cuántos platos se necesita?

E5: 45 platos de comida y 45 platos de agua.

I: ¿Cómo supiste que son 45 platos de comida y 45 platos de agua?

E5: Porque son 45 perros

I: Para 70 perros.

E5: 70 platos de comida y 70 platos de agua.

I: 100 perros

E5: 100 platos de comida y 100 de agua.

I: Ahora 150 perros.

E5: 150 platos de comida y 150 platos de agua.

I: ¿Por qué?

E5: Porque son 150 perros.

I: ¿Y para 500 perro?

E5: 500 perros, 500 platos de comida y 500 platos de agua.

I: Okay, y en 1000000 de perros, ¿Cuántos platos necesitamos?

E5: 1000000 de platos de comida y 1000000 de platos de agua

I: ¿Cómo sabes qué son 1000000 de platos de comida y un millón d platos con agua?

E5: Porque son \$1000000

I: Infinitos perros.

E5: Infinitos perros, infinitos platos de comida y infinitos platos de agua.

I: Okay, ¿y para m perros?

E5: M platos de comida y m platos de agua.

I: Y para x perros, ¿Cuántos platos necesitamos?

E5: X platos de comida y x platos de agua.

I: ¿Cómo lo supiste?

E5: Porque son x perros.

I: Y para z perros, ¿Cuántos platos necesitamos?

E5: Z platos de comida y z platos de agua.

I: Muy bien, Ahora sí miramos dos platos aquí, ¿para cuántos perros nos alcanzaría?

E5: Para uno.

I: Si tuviéramos dos platos de comida y 2 platos con agua, ¿para cuántos perros nos alcanzaría?

E5: Para dos.

I: Si tuviéramos tres de comida y tres de agua.

E5: Tres perros.

I: Si tuviéramos 8 platos, cuatro platos de comida y 4 de agua, ¿para cuántos perros nos alcanzaría?

E5: Cuatro perros

I: Si tuviéramos 12 platos.

E5: Doce perros.

I: Si tuviéramos doce platos, seis platos son de comida y seis de agua, ¿para Cuántos perros nos alcanzaría?

E5: Para seis.

I: ¿Por qué para seis?

E5: Porque son seis platos de comida y seis platos con agua.

I: Y qué tal si tenemos ocho platos de comida y ocho platos con agua.

E5: Ocho perros.

I: ¿Cómo sabes que son ocho?

E5: Porque son ocho perros.

I: Tenemos 22 platos 11 son de comida y 11 son de agua ¿para cuántos perros alcanza?

E5: Para ocho perros

I: Tenemos 11 platos de comida y 11 platos con agua.

E5: Once perros.

I: ¿Por qué?

E5: Porque son 11 platos de comida y 11 platos de agua

I: Tenemos 15 platos de comida y 15 de agua, en total son 30 platos ¿para cuántos perros nos alcanza?

E5: Para treinta.

I: Acuérdate que son quince de agua y quince de comida

E5: Entonces son quince perros.

I: Tenemos 20 platos de comida y 20 de agua.

E5: 20 perros.

I: Si tuviéramos veinticinco platos de comida y veinticinco de agua, en total son cincuenta platos, ¿para cuántos perros nos alcanza?

E5: Para 25 perros.

I: 35 platos de comida y 35 de agua.

E5: Para 35 perros.

I: ¿Por qué?

E5: 35 platos de agua y 35 de comida

I: Y 45 platos de comida y 45 de agua

E5: Para 45 perros.

I: 70 platos de comida y 70 de agua, ¿para cuántos perros nos alcanza?

E5: Para 70 perros.

I: ¿Cómo saber si son 70 perros?

E5: Porque son 70 platos de comida y 70 platos de agua.

I: Si tuviéramos 100 platos de comida y 100 platos de agua.

E5: 100 perros

I: 150 platos de comida y 150 de agua ¿para cuántos perros nos alcanza?

E5: para 150 perros.

I: 500 platos de comida y 500 platos con agua.

E5: Para 500 perros.

I: ¿Por qué?

E5: Porque son 500 platos de comida y 500 de agua.

I: Tenemos 1000000 de platos de comida y 1000000 de platos de agua, ¿para cuántos perros nos alcanza?

E5: Para un millón de perros.

I: ¿Cómo sabes que son un millón?

E5: porque son un millón de perros y un millón de platos de comida y de agua

I: Si tuviéramos infinitos platos de comida e infinitos platos con agua.

E5: infinitos perros.

I: Y en m platos de comida y m platos con agua, ¿para cuántos perros alcanzaría?

E5: m perros

I: Si tuviéramos x platos de comida y x platos con agua.

E5: x perros.

I: ¿Por qué x perros y no m ?

E5: Porque son x platos de comida.

I: En z platos de comida y z platos con agua, ¿cuántos perros podrían comer?

E5: z perros.

I: ¿cómo sabes que son z perros?

E5: Porque son z perros.

Respuestas proporcionadas por E2

I: Seguimos trabajando con perros y platos de comida, (después de pegar un perro un plato de comida y otro de agua) tenemos un perro con dos platos, uno de comida y otro de agua, ahora para dos perros cuántos platos necesitamos (se pregunta después de pegar el segundo perro con dos platos más).

E2: Uno y dos.

I: ¿Cuántos platos necesitamos en total para dos perros?

E2: Uno de agua y uno de croquetas.

I: O sea que cuántos platos son en total.

E2: Dos platos, uno de agua y croquetas.

I: ¿Cuántos platos hay en total para los perros?

E2: Dos más dos, hay cuatro.

I: Okay, ¿qué tal si tuviéramos tres perros?

E2: Más que cinco más que cuatro.

I: ¿Cuántos platos se necesitaría?

E2: No sé, eso no me han enseñado.

I: Vamos a averiguarlo, (se pega una tercera imagen)

E2: Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis (cuenta, inmediatamente se pega la imagen, señalando con su dedo índice los ojos de los perros)

I: Entonces, cuántos platos necesitaríamos para tres perros

E2: Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis platos

I: ¿Qué tal si tuviéramos otro perrito aquí?, ¿cuántos platos habría? (señalando con el dedo índice la hoja)

E2: Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho.

I: ¿Qué tal si tuviéramos seis perros?

E2: Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez.

I: Vamos a ver cuántos plátanos está para 5 perros.

E2: Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez (contando los platos que hay en la hoja en blanco)

I: Vamos a ver para seis perros

E2: Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez, once, doce, trece.

Respuestas proporcionadas por E3

I: Vamos a trabajar con platos de comida y con platos de agua para un perro se necesitan dos platos uno de comida y uno de agua, ahora para dos perros ¿cuántos platos necesitamos? (después de pegar sus dos platos).

E3: Otro plato de comida y otro plato con agua

I: ¿Cuántos platos sería en total?

E3: cinco,

I: Vamos a ver si son cinco, ¿cuántos platos hay en total? (después de pegar los dos platos)

E3: Uno, dos, tres, cuatro.

I: Aaaah entonces cuántos platos hay para los perros

E3: Cuatro platos.

I: ¿Cuántos platos necesitamos para tres perros?

E3: Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete (cuenta en voz baja), siete (dice en voz alta)

I: Vamos a ver si eso es cierto, ¿cuántos perros tenemos ahí? (pegar una tercera imagen)

E3: Tres.

I: ¿Cuántos platos necesitamos?

E3: Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis (contando los platos de los perros).

I: Okay, tres de comida y tres de agua.

I: Si tuviéramos cuatro perros, ¿cuántos platos necesitaríamos?

E3: Siete platos (después de 15 segundos).

I: ¿Por qué siete?

E3: Otros dos.

I: Ajá ya tenemos cuatro, más los dos que tú dices, ¿cuántos platos sería?

E3: Otros dos, otros dos y otros dos (después de doce segundos).

I: ¿Cuánto platos en total?

E3: Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho (contando los platos que se había pegado).

I: Entonces cuántos perros y cuántos platos tenemos

E3: Cuatro perros 8 platos.

I: Qué tal si tuviéramos cinco perros

E3: Cinco platos de comida y cinco de agua.

I: ¿Por qué cinco?

E3: Porque son cinco perros.

I: Sí tenemos 8

E5: 8 platos de comida y 8 platos de agua.

I: Y para 11

E5: Once de comida y así de agua

I: ¿Por qué?

E5: Porque son 11 perros

I: Y para 15 Cuántos platos necesitaríamos

E5: 15 platos de comida y 15 de agua

I: Y para 20 perros

E5: 20 platos de comida y 20 de agua.

I: ¿Cómo sabes qué son 20 de comida y 20 de agua?

E5: Porque son 20 perros.

I: Sí tenemos 35 perros

E5: 35 de comida y 35 de agua.

I: ¿Por qué?

E5: Porque son 35 perros, 35 platos de comida y 35 de agua.

I: Para cien perros.

E5: 100 de agua y 100 de comida

I: ¿Cómo sabes qué son 100?

E5: Son bien perros 100 de comida y 100 de agua.

I: Y para 500 perros.

E5: 500 platos de comida y 500 de agua

I: y para un millón de perros.

E5: 1000000 de agua y 1000000 de comida.

I: Y para infinitos perros

E5: Infinitos platos de comida y de agua.

I: Y para m perros Cuántos platos necesitamos

E5: m platos de comida y m platos de agua porque

E5: porque son m perros.

I: Para x perros Cuántos platos se necesita.

E5: x comidas y x agua.

I: Y para z perros.

E5: z platos de comida y z platos de agua

I: Y por qué no m

I: ¿Sí tuviéramos dos platos para cuántos perros nos alcanzaría?

E3: Para dos.

I: ¿Segura?, cada perro tiene su plato de comida y su plato de agua.

E3: Para una.

I: Y si tuviéramos cuatro platos, dos de comida y dos con agua para cuántos perros nos alcanzaría.

E3: Para cuatro.

I: Vamos a ver cuántos perros podrían comer y beber en cuatro platos.

E3: Dos.

I: Entonces para Cuántos perros nos alcanzaría si tuviéramos seis platos.

E3: Para seis perros.

Respuestas proporcionadas por E4

I: Vamos a continuar trabajando con perros y platos entonces para un para un perro se necesita un plato de comida y un plato de agua ahora pegamos 2 perritos, ¿Cuántos platos vamos a necesitar?

E4: Otros más.

I: ¿Cuántos más?

E4: Como dos.

I: Y cuánto serían en total

E4: Cuatro.

I: Y qué tal si tuviéramos tres perros, ¿cuántos platos necesitaríamos?

E4: Tres de comida y uno de agua.

I: ¿Y cuántos en total?

E4: Seis.

I: ¿Cómo sabes qué son seis?

E4: Porque los conté

I: Cómo los contaste, quieres decirme.

E4: Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis.

I: Y para cuatro perros, ¿Cuántos platos se necesita?

E4: Otros dos.

I: Y cuánto serían en total.

E4: Ocho (5 segundos)

I: ¿Cómo sabes qué son 8?, ¿cómo le hiciste?

E4: Pensé

I: Y qué fue que pensaste para hallar la respuesta

E4: Contarlos aquí (Señalando con el dedo índice la hoja en blanco)

I: ¿Y qué contaste?

E4: Los platos.

I: y qué tal para 6 perros ¿Cuántos platos necesitaríamos?

E4: Otros dos (5 segundos)

I: ¿Cuánto serían en total?

E4: Diez.

I: vamos a ver si son diez (Se pega en la hoja 6 imágenes de platos de comida y seis de agua). ¿Cuántos platos necesitamos entonces para 6?

E4: Seis de comida y 6 de agua.

I: Qué tal si tuviéramos 7 perros ¿Cuántos platos necesitaríamos?

E4: 7 platos de comida y 7 de agua

I: Y si tenemos 8 perros ¿Cuántos platos necesitamos?

E4: 8 platos de comida y 8 de agua.

I: ¿Y para 11 perros?

E4: 11 platos de comida y 11 de agua

I: Y para 15 perros

E4: Habría 15 platos de comida y 15 de agua.

I: 20 perros.

E4: 20 platos de agua y 20 de comida

I: Y para 25

E4: 25 platos de comida y agua.

I: Y qué tal para 70 perros.

E4: 70 platos de comida y 70 de agua.

I: ¿Por qué?

E4: Porque tienen que comer todos.

I: Y qué tal 100 perros ¿Cuántos platos necesitaríamos?

E4: 100 platos de agua y 100 de comida.

I: Cómo sabes qué son 100

E4: Porque son 100 perros, 100 platos de agua y 100 de comida, debe haber para todos.

I: Y qué tal si 500 perros, ¿Cuántos platos necesitaríamos?

E4: 500 platos de comida y 500 de agua.

I: Y para un millón de perros

E4: 1000000 platos de comidas de 1000000 platos de agua

I: Para infinitos perros ¿Cuántos platos necesitarías?

E4: Infinitos de agua infinitos de comida

I: ¿Cómo sabes qué son infinitos?

E4: (5 segundos) (No responde)

I: Para m perros ¿Cuántos platos necesitaríamos?

E4: m platos de comida y m de agua

I: Y para x perros

E4: z platos de agua y z de comida.

I: ¿Por qué?

E4: no responde.

I: ¿Y para z perros?

E4: z platos de comida y z platos de agua.

I: Y si tuviéramos dos platos para cuántos perros nos alcanzaría

E4: Para dos.

I: Recuerda que cada perro tiene un plato de comida y uno de agua, ¿para cuántos perros te alcanzaría, si tuvieras dos platos?

E4: Para dos,

I: Sí tenemos 4 platos, dos de comida y dos de agua, ¿para cuántos perros nos alcanza?

E4: Para cuatro.

Respuestas proporcionadas por E1

I: Vamos a seguir trabajando con perros, vamos a trabajar con perros, platos de comida y agua. Miremos que un perro tiene su plato de comida y su plato con agua, para un total de dos platos (después de haber pegado en la hoja en blanco una figura de un perro con un plato de comida y un plato con agua). Ahora vamos a ver cuántos platos se necesita para dos perros (se pega una segunda figura de un perro con su plato de comida y otro de agua).

E1: Uno, dos, tres, cuatro.

I: y para 3 perros, ¿cuántos platos necesitaríamos?

E1: Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis.

I: Para cuatro perros, ¿cuántos platos necesitaríamos?

E1: Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho (señalando con el dedo índice, como si hubiese imágenes de comida y agua)

I: ¿Cuántos platos necesitaríamos para cinco perros?

E1: Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete.

I: Vamos a ver cuántos platos necesitamos para cinco perros (se pega tres imágenes de perros adicionales a las dos que se había pegado, junto con dos platos para cada uno, uno de comida y otro de agua).

E1: Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez (cuenta, señalando con su dedo índice, después de haber pegado las imágenes).

I: Para seis perros, ¿cuántos platos necesitaríamos?

E1: Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis.

TAREA 4. PERROS, OJOS Y COLAS

Respuestas de E2

I: (Al pegar una imagen de un perro en una hoja en blanco, Iker menciona:

E2: Un perro y una cola.

I: ¿Qué más tiene?

E2: Dos ojos.

I: Ok, ¿y si pegamos otro perro? (se pega una segunda figura).

E2: Hay otra cola y otros ojos.

I: ¿Cuántos ojos y cuántas colas hay en total?

E2: Una, dos, tres, cuatro (lo hace contando los ojos de las figuras de los perros).

I: Cuatro qué.

E2: Cuatro ojos.

I: ¿Y cuántas colas?

E2: Dos.

I: Si pegáramos un perro más, ¿cuántos ojos y cuántas colas habría?

E2: Cinco, (luego cuenta los ojos de los perros), Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, (cuenta tal como si hubiese tres perros).

I: Seis qué.

E2: Seis ojos y tres colas.

I: Si pegáramos otro perro, ¿cuántos ojos habría?

E2: Muchos.

I: ¿Cuántos?

E2: Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez.

I: Vamos a ver, (se pega dos figuras más). ¿ahora cuántos ojos hay?

E2: Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho y 4 colas.

I: Ok, si tenemos otro perrito, ¿cuántos ojos aumentaría?

E2: Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez (contando los ojos de las figuras que hemos pegado e imagina una más).

I: ¿Y cuántas colas?

E2: Uno, dos, tres, cuatro, cinco (también lo hace contando las colas de los perritos e imaginando que hay un perro más).

I: Si tuviéramos otro perrito, ¿cuántos ojos habría?

E2: Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez, once, doce, trece, catorce.

E2: Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis.

I: ¿Qué pasa cada vez que pego un perrito más?

E2: Habría más colas.

I: ¿Cuántas colas aumenta si colocó un perito más aquí (señalando la hoja)

E2: Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho.

I: Si miraras dos ojos y una cola, ¿cuántos perros estarías viendo?

E2: Solo uno.

I: Y si miraras cuatro ojos y dos colas.

E2: Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez.

Respuestas de E1

I: Miremos que en un perro hay dos ojos y una cola, (se pega una figura) ¿cuántos ojos y colas hay en dos perros? (se pregunta después de pegar una segunda figura).

E1: Uno, dos, tres, cuatro ojos (contando los ojos de los perros).

I: ¿Y cuántas colas?

E1: Una, dos (contando las colas de los perros).

I: Y para tres perros, ¿cuántos ojos y cuántas colas habría?

E1: Uno, dos, tres ojos.

I: Miremos si en tres perros hay tres ojos, ¿cuántos ojos hay en los tres perros que he pegado? (se pregunta una vez se pega la tercera figura).

E1: Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis.

I: Si tuviéramos un perrito más aquí.

E1: Uno, dos, tres, cuatro, cinco.

I: Vamos a ver, (se pega una cuarta figura), ¿cuántos ojos y cuántas colas ves en los cuatro perros?

E1: Uno, dos, tres, cuatro colas.

I: ¿Y cuántos ojos hay?

E1: Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho ojos.

I: Entonces en un perro hay dos ojos y una cola, en dos perros hay cuatro perros y dos colas, ¿cuántos hay en tres perros?

E1: Uno, dos, tres, cuatro.

I: En seis perros, ¿cuántos ojos habría?

E1: Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve.

I: veamos (se le presenta cinco imágenes en total y se pregunta por el número de ojos y colas para cinco perros), ¿cuántos ojos hay?

E1: Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez ojos.

I: ¿Y en seis perros? (se pega otra figura).

E1: Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez, once, doce.

I: ¿Y cuántas colas?

E1: Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete ocho.

Respuestas de E5

I: Ahora mira en un perro hay dos ojos y una cola, (pegando la figura en la hoja en blanco) y pego otra figura, ¿cuántos ojos y cuántas colas hay?

E5: Uno, dos, tres, cuatro ojos.

I: ¿Y cuántas colas hay?

E5: Dos.

I: Si yo pego un perrito más, ¿cuántos ojos habría?

E5: Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis ojos (contando como si hubiese una tercera figura).

I: ¿Y cuántas colas?

E5: Tres colas.

I: ¿Qué tal si tuviéramos cuatro perros?

E5: Ocho, porque un tiene dos.

I: ¿Y cuántas colas?

E5: Cuatro colas.

I: y si pegáramos un perrito más, ¿cuántos ojos habría?

E5: Cinco colas.

I: ¿Y cuántos ojos?

E5: Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez (contando los ojos como si hubiera cinco figuras).

I: ¿Y en seis perros?

E5: ¿Seis?

I: Sí, ¿cuántos ojos habría seis perros?

E5: Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez, once, doce.

I: ¿Y cuántas colas?

E5: Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis colas

I: Si hay 8 perros, ¿cuántas colas y cuántos ojos habría?

E5: Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez, once, doce trece, catorce.

I: ¿Y cuántas colas?

E5: Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho.

I: ¿Y en 10 perros?

E5: 10 colas

I: ¿Y cuántos ojos habría?

E5: 20 ojos.

I: ¿Cómo sabes qué son 20 ojos?

E5: Porque en 10 perros son 20 ojos.

I: Pero porque 20 ojos.

E5: Porque los perros tienen dos ojos y son 10 entonces son 20 ojos.

I: ¿Y qué tal en 13 perros?

E5: 13 colas.

I: ¿Y cuántos ojos habría?

E5: 13 ojos.

Respuestas de E4

I: Ahora miremos que en un perro hay dos ojos y una cola (se pega en la hoja en blanco un perro y se marca con una curva los ojos y la cola). Ahora pegamos otro perrito, ¿cuántos ojos colas hay en dos perros?

E4: Cuatro.

I: Cuatro qué.

E4: Cuatro ojos.

I: ¿Y cuántas colas?

E4: Dos.

I: Si tuviéramos tres perros, ¿cuántos ojos habría?

E4: Seis ojos.

I: ¿Y cuántas colas?

E4: Tres colas.

I: En cuatro perros, ¿cuántos ojos y cuántas colas habría?

E4: Ocho ojos y cuatro colas.

I: ¿Cómo lo sabes?

E4: contando aquí (señalando la hoja donde se pegó las dos primeras imágenes).

I: Si tuviéramos 5 perritos, ¿cuántos ojos habría en 5 perros?

E4: Seis.

I: Miremos si en cinco perros hay seis ojos (pegamos 3 figuras más), ¿cuántos ojos hay en cinco perros?

E4: Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez.

I: ¿Diez qué?

E4: Diez ojos.

I: ¿Y cuántas colas?

E4: Cinco colas.

I: Y en seis perros, ¿cuántos ojos y cuántas colas habría?

E4: Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez, once, doce ojos y uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis colas.

I: ¿Y en siete perros?

E4: Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez, once, doce, trece.

TAREA 5. PERROS, PLATOS DE COMIDA Y UNO DE AGUA

Respuestas proporcionadas por E2

I: Observemos que tenemos un perro y su plato de comida un plato de agua del cual todos los perritos que haya van a tomar de este. Ahora tenemos dos perros, este también tiene su plato de comida, pero va a tomar agua de este plato de acá (señalando con el dedo índice el plato con agua). Entonces tenemos tres platos para los dos perros. Si tuviéramos tres perros, ¿cuántos platos necesitaríamos?

E2: Tres platos de comida.

I: ¿Y cuántos de agua?

E2: Uno.

I: ¿Y si tuviéramos cuatro perros?

E2: cuatro platos de comida y un plato de agua

I: Y para 6 perros, ¿cuántos platos habría?

E2: seis platos de comida y uno de agua

I: Para ocho perros, ¿cuántos platos necesitaríamos?

E2: Muchos, un plato dos platos tres platos.

Respuestas proporcionadas por E3

I: Tenemos un perro, este tiene su plato de comida y también hay un plato con agua. Todos los perros van a tener un plato de comida, pero todos van a compartir el plato con agua. Ahora mira que tenemos dos perros, los dos tienen sus platos de comida (indicando en la hoja), pero comparten el mismo plato con agua.

I: Si tuviéramos tres perros, ¿cuántos platos necesitaríamos?

E3: Tres platos de comida

I: y cuántos de agua.

E3: Uno

I: Y para cuatro perros, ¿cuántos platos necesitaríamos?

E3: Cuatro de comida y uno de agua.

I: Y si tuviéramos otro perrito.

E3: Otro plato de comida y uno de agua.

I: ¿Si tuviéramos 6 perritos?

E3: Seis de comida

I: ¿Y cuántos de agua?

E3: Uno.

I: Y si tuviéramos ocho perritos, ¿cuántos platos necesitaríamos?

E3: Ocho platos de comida y uno de agua.

I: Y para 11 perros.

E3: Once platos de comida.

I: Y cuántos de agua.

E3: Uno.

I: Y para 15 perros.

E3: Quince platos de comida y uno de agua.

I: Y para 20 perros

E3: Veinte platos de comida y de agua.

I: Si tuviéramos dos platos, uno de comida y uno de agua para ¿cuántos perros nos alcanzaría?

E3: Para dos.

I: ¿Y si tuviéramos tres platos de comida para cuántos perros nos alcanzaría?

E3: No contesta.

Respuestas proporcionadas por E4

I: Mira tenemos un perro y un plato tiene un plato de comida y también tenemos un plato con agua todos los perros van a tener su plato de comida, pero todos van a compartir el plato con agua, por lo que solo va a haber un solo plato con agua.

I: Entonces dos perros tienen su plato de comida cada uno (indicando en la hoja donde está pegado las imágenes), los dos perros van a tomar agua de este plato, ahora, sí tenemos 3 perros ¿cuántos platos necesitamos?

E4: Tres platos de agua, pero no hay platos de agua solo hay uno.

I: para cuatro perros Cuántos platos necesitamos

E4: Hay 4 platos de comida y uno de agua.

I: ¿Qué tal si tuviéramos 6 perros, ¿Cuántos platos de comida y cuántos platos de agua habría?

E4: 6 platos de comida y 6 de agua, pero solo hay uno

I: y para ocho perros ¿Cuántos platos habría?

E4: 8 platos de comida 8 platos de agua, pero solo toman agua de un solo plato.

I: Y qué tal 11 perros Cuántas platos necesitamos.

E4: 11 platos de comida y hay un solo plato con agua.

I: Y para 20 perros Cuántos platos necesitaríamos

E4: 20 platos de comida y de agua solo hay uno.

I: Y para 45 perros.

E4: 45 platos de comida.

I: Y cuántos de agua.

E4: solo hay uno de los que toman.

I: y para 500 perros

E4: 500 platos de comida y también de agua, pero solo hay uno.

I: Para infinitos perros.

E4: Infinito es platos de comida y uno de agua.

I: Y cuántos de agua

E4: x de agua, pero solo hay uno.

I: Y para x perros.

E4: z platos de comida y de agua pero, solo hay uno.

I: Tenemos tres platos (señalando las figuras con el dedo índice) para cuántos perros nos alcanza.

E4: Para dos perros.

I: Si tuviéramos tres platos de comida y uno de agua para cuántos perros nos alcanzaría

E4: Para 3 perros.

I: ¿Por qué para tres?

E4: No responde.

Respuestas proporcionadas por E5

I: Observa que este perro tiene un plato de comida y un plato de agua y acá tenemos otro perro que también tiene su plato de comida, pero, este va a tomar agua de ese mismo plato. En total tenemos 3 platos, 2 de comida y uno de agua todos los perros van a tomar agua de ese mismo plato (indicando con el dedo índice el plato con agua).

I: Para dos perros ¿Cuántos platos habría?

E5: Dos platos de comida y uno de agua.

I: Okay, para 3 perros ¿Cuántos platos se necesitaría?

E5: tres platos de comida y tres platos de agua.

I: Acuérdate que cada perro tiene su plato de comida, pero ellos comparten el plato con agua. Entonces para 3 perros Cuántos platos había

E5: tres platos de comida y un plato de agua.

I: y para cuatro perros Cuántos platos habría

E5: 4 platos de comida y un plato de agua.

I: ¿Cuántos platos en total habría para los cuatro perros?

E5: Son cuatro platos de comida y un plato de agua.

I: Y para 6 platos Cuántos platos se necesitaría

E5: 6 platos de comida y un plato de agua.

I: Para 8 perros Cuántos platos necesitaríamos.