BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

¿CÓMO IMPACTA EL CONOCIMIENTO QUE TIENE UN PROFESOR ACERCA DE LA TEORÍA APOE SOBRE SU CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO?

TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE
MAESTRO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

PRESENTA
LIC. JOSÉ ANTONIO SÁNCHEZ GARCÍA

DIRECTOR DE TESIS
DR. ERIC FLORES MEDRADO

CO - DIRECTORA DE TESIS
DRA. LIDIA AURORA HERNÁNDEZ REBOLLAR

PUEBLA, PUE. MARZO 2022

BUAP

DR. SEVERINO MUÑOZ AGUIRRE
SECRETARIO DE INVESTIGACIÓN Y
ESTUDIOS DE POSGRADO, FCFM-BUAP
P R E S E N T E:

Por este medio le informo que el C:

LIC. JOSÉ ANTONIO SÁNCHEZ GARCÍA

Estudiante de la Maestría en Educación Matemática, ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 03 de diciembre de 2021, con la tesis titulada:

"¿CÓMO IMPACTA EL CONOCIMIENTO QUE TIENE UN PROFESOR ACERCA DE LA TEORÍA APOE SOBRE SU CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO?"

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

A T E N T A M E N T E.
H. Puebla de Z. a 25 de febrero de 2022

Lidia A. Hdez R.

DRA. LIDIA AURORA HERNÁNDEZ REBOLLAR
COORDINADORA DE LA MAESTRÍA
EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA.

DRA´LAHR/l´agm*

Facultad
de Ciencias
Físico Matemáticas

Av. San Claudio y 18 Sur, edif. FM1
Ciudad Universitaria, Col. San
Manuel, Puebla, Pue. C.P. 72570
01 (222) 229 55 00 Ext. 7550 y 7552

Tesis realizada gracias al financiamiento otorgado por el Consejo Nacional de Ciencias y Tecnología (CONACYT) con la beca asignada al CVU 1028924

AGRADECIMIENTOS

"Las metas, son el camino hacia tus sueños; pero no se pueden lograr sin disciplina y consistencia"

Denzel Washington

Sin duda, esta etapa que ahora culmina ha sido de las más complejas que he tenido hasta ahora, hubo momentos en los que la consistencia y la disciplina desaparecieron y con eso perdí por un momento el camino, pero, gracias a Dios y a las personas importantes en mi vida lo logré retomar y así poder llegar a esta meta.

Gracias a mi familia, por todo el apoyo brindado durante esta etapa, principalmente en los momentos difíciles. Gracias por su confianza y por su paciencia. Gracias por su compañía y preocupación en las noches de desvelo y en los días de escritura y lectura. Gracias por siempre estar presentes en todos los eventos académicos.

A ti, Lety, gracias por llegar a mi vida y no irte de ella. Gracias por tus porras, llamadas de atención, pero sobre todo por todo tu apoyo, gracias por mostrarme que la lealtad y la comunicación entre dos personas es parte fundamental del crecimiento en pareja. Gracias por complementarme, por guiarme y por apoyarme a crecer, sé que ambos continuaremos haciéndolo juntos. Gracias por tanto cariño.

A mi mejor amiga, Lucero, gracias por cada palabra de aliento. Gracias por formar parte de mi vida, por toda tu paciencia en mis momentos difíciles y por seguir incondicionalmente junto a mí. Gracias por siempre buscar las palabras adecuadas para poder regresarme al camino correcto, pero sobre todo, gracias por siempre confiar en mí y por no permitirme caerme.

Al Dr. Eric, por continuar guiándome en el camino de mi formación como parte de la comunidad de la Educación Matemática, por su apoyo personal en los momentos difíciles. Gracias también a la Dra. Lidia, por igual aceptar subirse a este barco y continuar guiándome en este camino, así como por su apoyo en todos los momentos complicados. A la Dra. Estela por sus comentarios de apoyo y sobre todo por contagiarme esas ganas de trabajar. Gracias a los tres por siempre haber estado ahí cuando los necesite, ya sea de manera académica como personal, pero, sobre todo, gracias por confiar en mí. Gracias a la Dra. Ivonne por aceptar formar parte del jurado, así como por sus comentarios y por el tiempo destinado para la lectura de este trabajo.

A mis compañeros de generación, gracias por cada momento vivido, por las risas, enojos, luchas conjuntas y sobre todos, por todo el apoyo brindado. Gracias Juan, Diana, Zitlaly y Ame por permitirme trabajar en conjunto con ustedes, por los proyectos que se generaron y concluyeron y por los que se encuentran en planes.

A mis amigos de la licenciatura, gracias por continuar aceptando que hable de educación y por darle el mismo valor que a las demás áreas de conocimiento, gracias por haber estado ahí junto a mi durante este tiempo. Gracias por sus porras para lo profesional y lo personal.

A Wendy, Mire, Aurora, Jaquie, Mariana, Joss, Eduardo y Uriel, por haber estado en todo momento acompañándome, por ayudarme a salir adelante en conjunto con Lucero, Lety y mi familia.

Al Instituto los Sauces, por su apoyo y por las facilidades brindadas para poder llevar a cabo la conclusión del posgrado. Gracias principalmente a Hugo, Víctor, Octavio, Jorge, Misael, Roberto, Osvaldo, Geoffrey y David por su apoyo, compañía y amistad, así como por sus palabras de aliento para concluir esta etapa.

A mi abuela Yiyi, que desde que ingresé a la maestría confió en mí, hoy ya no me acompañas físicamente, pero sé que, desde tu lugar junto a Dios, estas orgullosa de lo que he logrado, y que siempre me has acompañado. Este trabajo es para ti.

Y gracias a todas aquellas personas, que, aunque no fueron mencionadas, sé que estuvieron detrás de mí apoyándome y confiando en que esto lo lograría.

INDICE GENERAL

INDICE DE TABLAS

INDICE DE FIGURAS

RESUMEN

En este trabajo de investigación se explora, a partir del análisis de dos trabajos de grado de maestría, la influencia que tiene el conocimiento de una teoría institucionalizada de la educación matemática sobre el resto del conocimiento especializado del profesor de matemáticas.

Esta exploración se realizó teniendo como base metodológica y teórica el modelo *Mathematics Teachers Specialized Knowledge* (MTSK) y como teoría institucionalizada la APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema). Se analizaron, como ya se mencionó, dos trabajos de tesis de grado de la Maestría en Educación Matemática de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, que tuvieron como base teórica la APOE para el diseño y construcción de una secuencia de actividades.

A partir de este análisis, se concluye que el uso de la teoría APOE para el diseño de actividades ocasiona la puesta en práctica de conocimiento relacionado tanto con el conocimiento matemático como con el conocimiento didáctico del contenido, en particular, los relacionados con teorías de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, registros de representación, la práctica de demostrar, entre otras. Esto nos permite afirmar que conocer una teoría institucional repercute en el conocimiento especializado del profesor de matemáticas, al grado de poner en práctica conocimiento relacionado con cada subdominio descrito en el MTSK.

ABSTRACT

In this research work, the influence that knowledge of an institutionalized theory of mathematics education has on the rest of the specialized knowledge of the mathematics teacher is explored in two master's degree projects.

This exploration was carried out, having as a methodological and theoretical basis the Mathematics Teachers Specialized Knowledge (MTSK) model and the APOS as a specialized theory. As already mentioned, two thesis works of the Master's Degree in Mathematical Education of the Benemérita Universidad Autónoma de Puebla were analyzed, which had the APOS as a theoretical basis for the design and construction of a sequence of activities.

From this analysis, it is concluded that the use of APOE theory for the design of activities causes the implementation of knowledge related to both mathematical knowledge and didactic knowledge of the content those related to theories of teaching and learning of mathematics, representation records, the practice of demonstrating, among others. This allows us to affirm that knowing an institutional theory affects the specialized knowledge of the mathematics teacher, to the extent of putting into practice knowledge related to each subdomain described in the MTSK.

INTRODUCCIÓN

Una preocupación constante en la educación matemática es la relativa a la formación del profesorado, tanto en su fase inicial como en la permanente (Flores-Medrano, 2020). Esta formación requiere de una sistematización y el estudio que presentamos en esta tesis apunta hacia aportar en este sentido. Nos centramos en un programa de maestría profesionalizante en Educación Matemática, destinada a la formación permanente del profesorado de los distintos niveles educativos. En dicha formación se trabajan teorías institucionalizadas de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y hemos tomado como informantes a profesores cuyo trabajo para la obtención del grado fue realizado haciendo uso de la teoría APOE.

El *Mathematics Teachers Specialized Knowledge* (MTSK), es un modelo de conocimiento especializado, que nos permite analizar y comprender la manera en la que nuestros informantes al utilizar la teoría APOE, ponen en práctica diversos conocimientos relacionados con los subdominios del MTSK.

Nuestra investigación se reporta en este escrito en un total de 5 capítulos, los cuales se describen a continuación.

En el capítulo 1 se presenta el planteamiento del problema, en donde se aborda la problemática, la pregunta de investigación y se justifica dicha pregunta, concluyendo con la viabilidad de nuestra investigación.

En el capítulo 2 se presenta el marco teórico, en donde se comienza con un recorrido sobre la conformación del MTSK, así como una descripción de lo que para este modelo significa conocimiento y la diferencia entre éste y el especializado. De igual manera se presenta una subsección correspondiente a la teoría APOE, la cual nos ayuda a tener la sensibilidad teórica necesaria para realizar la investigación, y permitirá al lector comprender algunos términos a los que en el análisis referimos.

El capítulo 3 corresponde al método, en este se describe y justifica que nuestra investigación es de corte cualitativo basado en un estudio de caso instrumental, de igual manera se describen nuestros informantes, así como cada una de las etapas de nuestra investigación, para lo cual nos basamos en Escudero-Ávila et al. (2016).

En el capítulo 4 presentamos el análisis y discusión de cada una de las secuencias didácticas, el cual se presenta en dos secciones, una por cada informante, y para cada uno de ellos se analizan las evidencias de conocimiento correspondiente a cada dominio y subdominio por separado, mostrando, para cada uno, una tabla a manera de resumen y agregando comentarios, en caso de ser necesario, con respecto a las evidencias de conocimiento que se hallaron fuera del diseño de actividades. El análisis correspondiente se llevó a cabo utilizando lo marcado por Escudero-Ávila et al. (2016), en donde se describen las muestras de conocimiento en indicio, oportunidad de investigación y evidencia.

Al término del capítulo 4 se encuentra la sección de conclusiones las cuales se presentan por dominio y subdominio, concluyendo con una tabla donde se muestra el subdominio y dominio que mayores evidencias de conocimiento se presentaron por ambos informantes.

Capítulo 1. Planteamiento del problema

En Educación Matemática uno de los temas de investigación que en los últimos años ha comenzado a tener una gran atención por parte de los investigadores del área es el del desarrollo profesional docente y, muy en particular, en el conocimiento especializado del profesor de matemáticas (Carrillo et al., 2013).

Dentro de este trabajo abordaremos justamente este hecho particular del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, utilizando para esto el modelo creado por el grupo de Investigación en Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Huelva, España (SIDM), el *Mathematics Teachers Specialized Knowledge* (MTSK). Nos enfocaremos en identificar la manera en la que una teoría institucionalizada de la Educación Matemática, en particular, una enfocada en el aprendizaje de las matemáticas, la teoría APOE, repercute en los distintos subdominios y por tanto dominios del MTSK y así poder aportar al desarrollo teórico del modelo creado por el SIDM.

Objetivo

El objetivo que se plantea dentro de esta investigación es relacionar el conocimiento del profesor de matemáticas con respecto a teorías institucionalizadas, en particular la teoría APOE, con el desarrollo de los dominios y subdominios del conocimiento especializado del profesor de matemáticas y con esto poder aportar al desarrollo teórico del MTSK.

Pregunta de Investigación

Basándonos en el objetivo planteado, así como en la lectura desarrollada acerca del MTSK, se piensa lograr dicho objetivo y responder la siguiente pregunta:

¿Cómo repercute en el conocimiento especializado del profesor de matemáticas que el profesor conozca alguna teoría institucionalizada de la matemática educativa, en particular la teoría APOE?

Puesto que entendemos el verbo repercutir como la manera en la que se modifica o se desarrolla algún objeto con respecto a otro, el dar respuesta a dicha pregunta ayudará a entender cómo, el conocer una teoría institucionalizada y trabajar con ella modifica o desarrolla alguno(s) subdominio(s) del MTSK.

Justificación

En Montes y Contreras (eds.) (2017) se presenta una serie de ponencias y mesas de trabajo en torno a la mejora del MTSK, así como en la búsqueda de áreas de oportunidad del mismo modelo y de áreas de investigación de la Matemática Educativa donde el MTSK podría ayudar a resolver problemas. Dentro de una de las actas de dichas jornadas podemos encontrar que Sosa et al. (2017) mencionan que:

> *Estamos interesados en analizar qué conocimiento especializado se requiere para abordar determinadas situaciones de aprendizaje de temas matemáticos […] y cómo los estudiantes para profesor de Matemáticas (EPP) pueden desarrollar conocimiento especializado a partir del análisis de situaciones reales de aula* (Sosa et al., 2017, p. 72).

Es por esto por lo que se pretende que este trabajo ayude a comprender qué conocimiento especializado se requiere para abordar determinadas situaciones de aprendizaje, puesto que al dar respuesta a nuestra pregunta de investigación podríamos encontrar que el conocer una teoría institucionalizada puede o no ayudar a desarrollar el conocimiento especializado necesario y así poder tener alguna idea de cómo desarrollarlo.

Puesto que el SIDM puso como tema importante las limitaciones que el modelo MTSK podría llegar a tener (Sosa et al., 2017), el desarrollo de este trabajo podría ayudar a verificar si en el caso particular del KMT se encuentra alguna limitación o no.

De igual manera este trabajo surge de la modificación de una de las conclusiones de Sánchez-García (2018), donde se preguntaba si existía relación entre los efectos del contrato didáctico y el MTSK. La modificación se encuentra en la idea de atacar la relación entre una teoría institucionalizada y el MTSK desde la repercusión del primero en el segundo y se decide el cambio de los efectos del contrato didáctico a la teoría APOE por los trabajos realizados en la Maestría en Educación Matemática (MEM) de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP).

Capítulo 2. Marco Teórico

En este capítulo, abordaremos los dos constructos teóricos que basan nuestra investigación. Por un lado presentaremos a detalle el modelo MTSK y por otro exploraremos brevemente la teoría APOE.

Comenzaremos por una introducción a algunos conceptos que podrían ayudar a comprender mejor el desarrollo de nuestro análisis, es importante recalcar desde ahora que, este modelo no es el único que trata de explicar todos los conocimientos que un profesor de matemáticas tiene durante la planeación y ejecución de su clase.

Tampoco es un modelo que busca decir que todo profesor de matemáticas debe contener cada uno de los dominios y subdominios para ser considerado un buen profesor de la materia, es decir, que el MTSK es un modelo que recibe críticas y que también tiene autocríticas, puesto que los dominios que éste contiene se encuentran año tras año en constante mejoría para poder ser más específicos y así, lograr una mejor modelación del conocimiento especializado del profesor de matemáticas y de la misma forma hallar cómo se desarrolla y se ve afectado dicho conocimiento.

Introducción y Antecedentes

El MTSK es un modelo que se enfoca en el conocimiento del profesor de matemáticas que, además de ser una propuesta teórica, también es una herramienta metodológica. Dicha herramienta se utiliza para analizar las distintas prácticas que un profesor de matemáticas tiene dentro de la planeación y puesta en marcha de sus clases, todo este análisis basado en sus diferentes subdominios y categorías de los mismos (Flores-Medrano et al., 2014).

El MTSK surge a partir de los trabajos realizados por parte del grupo SIDM, comenzado con el interés de caracterizar el trabajo de Ball et al.(2008) del *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT) tratando de establecer categorías y descriptores del conocimiento para cada subdominio considerado en dicho modelo. Durante la tarea de establecer lo ya mencionado, el grupo del SIDM se encontró con la dificultad de delimitar los subdominios del MKT, de donde, como respuesta a dicha dificultad, surge el MTSK, tomando como base las virtudes que observaron en el MKT y en otros modelos que caracterizan el conocimiento (Flores-Medrano et al., 2014).

El MTSK es, entonces, un modelo que "considera el carácter especializado del conocimiento del profesor de manera integral en todas sus subdimensiones y evita hacer alusión a referentes externos" (Flores-Medrano et al., 2014, p.71).

Algunas Definiciones Necesarias

Es importante que establezcamos lo que, para este trabajo, significa hablar de conocimiento y conocimiento especializado, ya que aclarar a qué nos referimos cuando se utilizan estos conceptos ayuda a comprender de mejor manera la forma en la que fue utilizado el MTSK durante la investigación y en la presentación de resultados.

Para nuestro propósito es importante considerar que cada vez que se habla de conocimiento haremos referencia al conocimiento que tiene un profesor de matemáticas. Una vez aclarada la forma en la que se utiliza el *conocimiento* y lo que para nosotros representa, podremos caracterizar a aquel que es especializado para el profesor de matemáticas. En Montes et al. (2014) se explica que se busca que el concepto de conocimiento esté ligado al entendimiento, puesto que existen diversos grados de profundidad en la reflexión de lo que se refiere dicho concepto.

Por su parte Llinares (1998) llama conocimiento a aquello que:

> Incluye no sólo la información específica sobre datos y métodos de comprobación de resolución de problemas, sino también la información necesaria para definir y comprender los problemas con los que debe enfrentarse un profesional (p. 55).

Por otro lado, encontramos que Pajares (1992), para referirse a una amplia red de conceptos, imágenes y habilidades inteligentes que poseen los seres humanos utiliza al conocimiento.

Al respecto de la definición de conocimiento, Schoenfeld (2010) menciona que entiende:

> al conocimiento de un individuo como la información que tiene disponible para usar para resolver problemas, alcanzar metas o desarrollar cualquier tarea. ¡Nótese que, de acuerdo con esta definición, el conocimiento no ha de ser necesariamente correcto! (p. 25)

Cuando el grupo del SIDM encontró estas dos últimas definiciones sobre el conocimiento, hicieron una interpretación, de dicha interpretación surgieron puntos importantes que Montes et al. (2014) presentan y que resumimos a continuación:

- Las definiciones que nos aportan Pajares y Schoenfeld son compatibles, aunque se considera que la de Schoenfeld es más precisa.
- Gracias al punto anterior podemos comentar lo siguiente:
    - “Amplia red” para Pajares e “información disponible” para Schoenfeld se entiende que se refieren a acciones, comprensiones de distintos tipos y a diversas situaciones.
    - Al decir Pajares “conceptos, imágenes y habilidades inteligentes” y Schoenfeld “para usar” nos ayudan a comprender que toda información que no sea de utilidad en una actividad (en nuestro caso la enseñanza de las matemáticas) no tendrá lugar en la definición de conocimiento.
    - Schoenfeld al decir “no necesariamente correcto” ayuda a complementar la definición de Pajares, pues la diferencia entre conocimiento correcto e incorrecto es irrelevante para el MTSK, puesto que la intención de quien usa dicho modelo se espera sea siempre la de saber qué es lo que conoce el profesor para poder realizar ciertas acciones o proponer ciertas actividades.

Después de este pequeño recorrido sobre la búsqueda de una definición para conocimiento, podemos decir que, para este trabajo se adoptará, al igual que el SIDM, la definición de Pajares, pero haciendo énfasis en lo que Shoenfeld menciona acerca del conocimiento no necesariamente correcto y recalcando también que, entenderemos que la red mencionada en la definición también considera a las creencias y concepciones (y en nuestro caso, conocimiento de la teoría APOE) que tiene el sujeto y que gracias a ellas también dicha red se va construyendo (Montes et al., 2014).

Como se podrá notar dentro de la definición de conocimiento se recalca la importancia de considerar las creencias y concepciones del sujeto (en nuestro caso, el profesor).

Las creencias pueden ser entendidas como aquellas verdades personales, mantenidas de manera personal o colectivamente, que son naturales de la experiencia o de un pensamiento propio y que además contienen cierta componente efectiva y evaluativa y no son falsables, es decir, no hay capacidad formal de contradecirlas, pues son justificadas regularmente por argumentos que no responden a los cánones de evidencia o prueba (Ponte, 1994).

Por su lado entenderemos como concepciones a aquellas estructuras mentales generadas por definiciones, conceptos, reglas, imágenes, proposiciones, etc. (Thompson, 1992).

Basados en estas dos definiciones se puede entender que la diferencia entre estos dos constructos depende de los siguientes componentes, en el caso de las creencias, el componente principal es que es sostenido por cuestiones efectivas y, en el caso de las concepciones, por cuestiones racionales (Montes et al., 2014). Aunque, en cuanto al conocimiento del profesor se cree que ambos conceptos tienen una gran influencia en él.

Después de haber aclarado a qué nos referiremos al mencionar conocimiento y que además consideraremos a las creencias y concepciones como parte fundamental del mismo, es momento de diferenciar entre conocimiento común y conocimiento especializado, en particular, en el referido al profesor de matemáticas.

Basándonos en los trabajos de Flores et al. (2013) y Flores-Medrano et al. (2016) podemos distinguir las siguientes definiciones:

- Conocimiento común: Aquel que se espera que toda persona tenga sin importar la profesión que desarrolle.
- Conocimiento especializado: Aquel que tiene y desarrolla solamente el profesor por el hecho de ser profesor y que además no se desarrolla en alguna persona que no sea de dicha profesión, o dicho de otra forma aquel conocimiento que solo le hace sentido al profesor de matemáticas (Escudero et al., 2012).

Es importante recalcar que la diferencia entre el conocimiento común y el especializado está sujeto a las características del sujeto que los posee, así como del sujeto que lo analiza y del nivel académico en el que se enseña, de esto que, el conocimiento especializado de un profesor de matemáticas de la universidad puede y seguramente es distinto al de un profesor de bachillerato (Sosa, 2011).

El MTSK tiene como una potencialidad la oportunidad de reconocer el conocimiento del profesor de matemáticas, pero no se enfoca en solamente las matemáticas ni tampoco solamente en la parte didáctica o incluso en la parte matemática-didáctica, sino que considera como principal particularidad que el conocimiento especializado está conformado por los seis subdominios que componen al modelo y no elemento por elemento (Flores-Medrano, Sosa & Ribeiro, 2016), es decir el MTSK ve al conocimiento especializado como un todo influenciado por cada una de sus partes.

El Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas

El modelo MTSK se constituye a partir de una serie de adaptaciones al MKT. Es una reconfiguración del conocimiento matemático, reinterpretación de conocimiento pedagógico que se consideran y una nueva noción de conocimiento especializado (Carrillo-Yañez et al., 2018).

Basados en Shulman (1986) el grupo de investigación SIDM mantiene en su modelo la separación principal del conocimiento del profesor: conocimiento matemático y conocimiento didáctico del contenido y los vasta de tres subdominios y categorías internas a cada uno (Flores-Medrano et al., 2014).

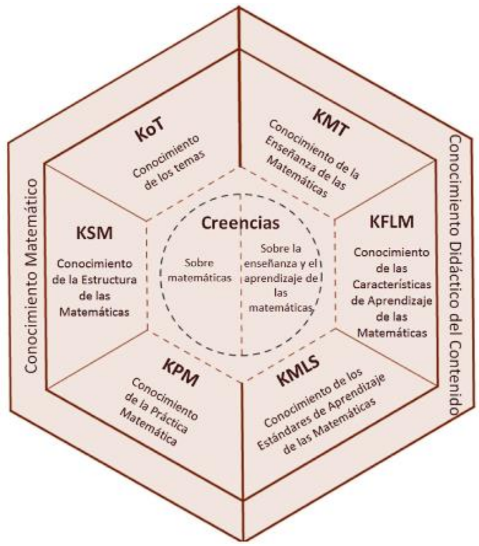
Estos dos subdominios junto con sus categorías buscan tener una mejor noción de aquello a lo que nos referimos como conocimiento especializado del profesor de matemáticas, basándose no solamente en lo que se espera que solo los profesores deberían conocer con respecto al área que enseñan sino también con respecto a la manera en la que la matemática puede enseñarse o aprenderse:

> En primera instancia, consideramos el conocimiento que posee un profesor de matemáticas en términos de una disciplina científica dentro de un contexto educativo: el dominio del Conocimiento Matemático (MK). [...] en que consideramos las características de las matemáticas como una disciplina científica, y al mismo tiempo reconocemos una diferenciación entre las Matemáticas per se y las Matemáticas Escolares. El otro dominio, el Conocimiento de Contenido Pedagógico (PCK), está compuesto por el conocimiento relacionado con el contenido matemático en términos de enseñanza del aprendizaje. (Carrillo-Yañez et al., 2018, p. 5).

Un esquema de este modelo (figura 1) se presenta en Flores-Medrano (2014) donde se puede observar estos dos dominios y los tres subdominios correspondientes a éstos.

Figura 1.

Modelo MTSK (Flores-Medrano et al., 2014)



Como podemos observar en la Figura 1, el modelo se encuentra dividido en tres dominios. Del lado derecho encontramos a la parte correspondiente al dominio del conocimiento didáctico del contenido (PCK, siglas en inglés) y del lado izquierdo encontramos al dominio del contenido matemático (MK, siglas en inglés). Al centro del modelo se encuentran las creencias de los profesores, tanto en matemáticas como en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, las cuales tienen influencia dentro de la forma en la que se puede presentar un conocimiento por parte del profesor, justo también por esta razón la tercera parte del modelo se encuentra delimitada por líneas punteadas (Carrillo-Yañez et al., 2018, Flores-Medrano et al., 2014, Sánchez et al., 2018).

Asimismo, podemos observar que del lado derecho encontramos los tres subdominios correspondientes al PCK: Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT, siglas en inglés), conocimientos de las Características de Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM, siglas en inglés) y conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS, siglas en inglés). Del lado izquierdo de igual forma encontramos a los tres subdominios del MK: Conocimiento de los temas (KoT, siglas en inglés), conocimiento de la estructura de las matemáticas (KSM, siglas en inglés), conocimiento de la práctica matemática (KPM, siglas en inglés).

Subdominios y Categorías

A continuación, ahondaremos en cada subdominio para poder comprender las características de éstos. Para dicho trabajo vamos a presentar por cada subdominio a las categorías que los conforman, además de presentar ejemplos para cada uno de ellos.

Conocimiento Didáctico del Contenido. Este dominio comprende al conocimiento que tiene relación con el contenido matemático, pero desde el punto de vista didáctico, es decir, en términos del proceso de enseñanza – aprendizaje de las matemáticas. El MTSK reconoce la importancia del PCK, pues se considera que este conocimiento junto con el relacionado con la matemática como ciencia guían las decisiones y acciones del docente durante el proceso de enseñanza. Es importante recalcar que este dominio considera a la parte didáctica que surge de la propia matemática como objeto de enseñanza y no como teorías pedagógicas aplicadas a la matemática (Carrillo-Yáñez et al., 2018).

Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas. Este subdominio engloba el conocimiento que tiene el profesor de matemáticas acerca de las características propias de los recursos que se utilizan para enseñar matemáticas o contenidos específicos de la matemática, estos recursos incluyen tareas, actividades, ayudas y ejemplos (Sosa et al., 2016). Cabe mencionar que este subdominio también contiene el conocimiento sobre las características del contenido matemático visto como objeto de enseñanza, lo cual nos hace pensar que los recursos que se utilizan son condicionados por la naturaleza misma del contenido matemático, por lo que, aunque están incluidas las tareas, actividades y ayudas, lo que importa reconocer en este subdominio es el conocimiento del profesor que se encierra en dichas acciones (Escudero-Ávila et al., 2016). Este conocimiento puede ser resultado de teorías extraídas de literatura de investigación, de la experiencia o de la reflexión de la propia práctica docente, todas como el nombre del subdominio marca, enfocadas en la enseñanza de las matemáticas (Carrillo-Yañez et al., 2018).

Conocimiento de las Características de Aprendizaje de las Matemáticas. Este dominio se refiere al conocimiento que prosee el profesor sobre el contenido matemático pero como objeto de aprendizaje, es decir, el conocimiento que el profesor tiene sobre los distintos fenómenos que se generan durante el proceso de aprendizaje de las matemáticas (Zakaryan, et al., 2018).

Es decir, podemos considerar que el KFLM considera al conocimiento específico que tiene el profesor de matemáticas centrado en el proceso de aprehensión de los objetos matemáticos y de los fenómenos generados por dicho proceso como errores comunes, obstáculos epistemológicos, concepciones asociadas a contenidos particulares, etc. (Sosa, Flores-Medrano, Carrillo, 2015).

El KFLM puede justificar la idea de que el profesor debe poseer un conocimiento que le ayude anticipar la forma de pensar del alumno en determinados temas y la forma en la que dicho pensamiento puede ser llevado para poder integrar y afrontar nuevos contenidos matemáticos (Sosa et al., 2015).

Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas. En cuanto al conocimiento curricular tenemos que Shulman (1986) y Escudero, Flores y Carrillo (2012) señalan que está compuesto por la diversidad de programas diseñados para la enseñanza de tópicos específicos para un nivel determinado, así como, materiales que sirven para dicha tarea, así como indicaciones y contraindicaciones que son marcadas por el currículum en circunstancias concretas.

El KMLS comprende lo que el profesor conoce acerca de los contenidos propuestos por las normativas correspondientes a cada nivel educativo, desde el punto de vista temporal como contextual respecto a cada contenido indicado (Carrillo et al., 2013).

Hasta el momento se puede asegurar que este subdominio es el menos explorado por parte del grupo SIDM en comparación con el KoT, KSM y KFLM (Escudero-Domínguez y Carrillo, 2016).

Conocimiento Matemático. El MTSK considera al igual que el MKT que el conocimiento acerca de la materia específica que el profesor enseña forma parte del conocimiento especializado, en nuestro caso, matemáticas, en el MKT aparece considerado en la parte del dominio Subjetc Matter Knowledge y en el caso del MTSK en el dominio MK (Flores-Medrano et al., 2014).

El grupo de investigación de la Universidad de Huelva, España, considera a la matemática como una red sistémica de conocimiento estructurado que contiene sus propias reglas. Es por ello que el conocimiento matemático es referido a conocer las características de dicha red, los nodos y las conexiones entre ellos, es decir, por medio de las reglas propias de las matemáticas como sus características y su validación (Carrillo-Yañez et al., 2018).

Dicho de otra forma, se puede decir que el MK está conformado por afirmaciones, postulados o principios fundamentales y centrales de la matemática que se conectan a través de la lógica natural y formal por parte del conocimiento del profesor de matemáticas (Liñán, Contreras y Barrera, 2016).

Conocimiento De Los Temas. Lo que en este subdominio se entiende por "temas" es lo que Carrillo-Yañez et al. (p. 7, 2018) explican: "El término tema se refiere a elementos de contenido dentro de las áreas de conocimiento definibles que componen el programa de estudios de matemáticas". También se entiende que es importante considerar que los temas que se consideran dentro del currículo son distintos según el país en que nos encontremos.

Se considera que el conocimiento especializado del profesor de matemáticas debería incluir el dominio de la materia que enseña, pero con un nivel de profundización, organización y estructuración mayor al que los estudiantes obtienen, esto con el propósito de poder tener una mejor organización del proceso de enseñanza – aprendizaje de las matemáticas (Liñan et al., 2016).

Por lo anterior se entiende que el KoT es el subdominio que describe el *qué* y de *qué manera* el profesor conoce los temas que enseña, incluye el conocimiento profundo del contenido, es decir, conoce conceptos, procedimientos, hechos, teoremas, reglas, etc., así como los significados de los mismos, de igual manera involucra el conocimiento que tiene el profesor acerca de lo que se espera que el alumno aprende desde un punto de vista profundo y riguroso, también se puede decir que el KoT incluye el conocimiento acerca del tipo de problemas a los que se aplican los contenidos, los contextos, significados asociados, propiedades, principios, definiciones y principios subyacentes, conexiones de elementos dentro de un mismo tema y sus formas de representaciones (Carrillo-Yañez et al., 2018).

Conocimiento de la Estructura de las Matemáticas. El KSM es el subdominio que busca describir el conocimiento que tiene el profesor acerca de las conexiones entre elementos matemáticos, esta idea de conexión la describe Carrillo-Yañez et al. (2018), puesto que describe que se tienen dos consideraciones que dan lugar a las conexiones, una temporal, que se refiere a la secuenciación que producen conexiones que refieren al aumento de la complejidad y la simplificación y la consideración de demarcación que es la que produce conexiones interconceptuales, las que se refieren a ideas matemáticas que permiten conectar diferentes representaciones de un mismo concepto o vinculan diferentes conceptos que se afrontan en un mismo momento (Flores-Medrano, et al., 2014). Así, en este subdominio se consideran las conexiones de complejización, simplificación, auxiliares y contenidos trasversales (Montes y Climent, 2016).

Conocimiento de la Práctica Matemática. Parte importante de la labor docente, corresponde a lo que conoce y realiza sobre la materia que imparte, en este caso, las matemáticas, todo el conocimiento que enmarca estas acciones corresponde al conocimiento relacionado con la práctica matemática.

Godino y Batanero (1998 citado en Flores-Medrano, 2016) utilizan práctica matemática para referirse a las actividades matemáticas que se realizan en una situación de problematización matemática, es decir, una situación problemática que necesita ser matematizada.

En el MTSK se define práctica matemática a aquella actividad matemática cuyo uso refiere al que hacer matemático con sustento lógico que permite abstraer reglas (Flores-Medrano, 2016).

Es así como este subdominio considera la importancia de que el profesor conozca no solo los resultados matemáticos, sino también la forma de proceder para llegar a ellos, así como las características del trabajo matemático, es decir, saber cómo se explora y cómo se genera el conocimiento matemático (Flores-Medrano et al., 2014). Es decir, el KPM es el subdominio que enmarca el conocimiento que tiene el profesor acerca de cómo hacer matemáticas y cómo proceder dentro de ellas para generar nuevo conocimiento y para comprender el ya estipulado.

Por lo anterior, podemos considerar que el KPM puede ser general o particular (específico de un tema), general, porque se considera el conocimiento de cómo se desarrollan las matemáticas más allá de cualquier concepto particular, es decir, de cómo se realizan tareas matemáticas generales (tipos de pruebas, aplicaciones de tipos de demostraciones específicas, ayudas heurísticas generales, conocimiento de diversas estructuras y sus conocimientos) y específico por el conocimientos de las peculiaridades del tema en cuestión, así como la transposición de las tareas matemáticas ya mencionadas en el tema que se está tratando.

Este es uno de los subdominios del MTSK del cual aún no se tiene una categorización como en los ya mencionados previamente. Campos-Cano y Flores-Medrano (2019) realizan una categorización del KPM, identificando una categoría para la práctica de demostrar y otra para la práctica de definir. Para este trabajo, nos enfocaremos en lo que los autores consideran como subcategorías para la práctica de demostrar.

La práctica de demostrar considera a las subcategorías que enmarcan al conocimiento por parte del profesor acerca del tipo de demostración, los métodos que se utilizan para demostrar, el uso de los distintos registros de representación para dicha práctica, los modos de demostración, así como las fases cognitivas por las que se pasa durante el proceso de demostrar y sus distintas funciones (Campos-Cano et al., 2019).

La Teoría APOE

La teoría APOE es una teoría institucionalizada, enfocada en el aprendizaje del alumno de objetos matemáticos. Tiene sus bases en lo que Dubinsky interpreta sobre la abstracción reflexiva de Piaget, que la considera como una herramienta para describir el desarrollo mental de los conceptos matemáticos del alumno.

Es conocido que, para Piaget, el desarrollo del conocimiento sobre un objeto se da a partir de la interacción del sujeto con el objeto y del objeto con el sujeto, esto a partir de una sucesión de acciones materiales en un sistema de operaciones interiorizadas, es decir, a lo que llama abstracción reflexiva (Arnon et al., 2014).

Dubinsky considera a las acciones materiales como las acciones que el sujeto lleva a cabo pero que además son externas a él, las operaciones interiorizadas las interpreta como el mecanismo mental de interiorización, es decir, en el proceso con el cual una acción física externa se convierte en la mente del sujeto en un proceso.

Dentro de la teoría APOE se consideran cinco mecanismos y cuatro estructuras mentales. En Arnon et. al (2014) y Villabona et al. (2016) encontramos una descripción de estos constructos. Para el caso de los mecanismos mentales:

- *Interiorización*: Es la transferencia de una actividad que se realiza en el entorno externo del individuo al entorno interno del mismo, es decir que el sujeto pasa a tener el control interno de la actividad, dicho de otra forma, el sujeto es capaz de imaginar los pasos a seguir con respecto a la actividad e incluso puede saltar pasos o revertirlos.
- *Coordinación*: Es el mecanismo que se refiere a todas las formas de emplear una o más acciones para formar nuevos objetos o acciones, es decir, se refiere a las formas en las que se pueden coordinar procesos para formar nuevos.

- *Encapsulación*: Se refiere a la transformación mental de un proceso en un objeto cognitivo, es decir, el proceso por el cual el sujeto convierte una estructura dinámica en una estructura estática, esta estructura estática puede ser física o mental y puede ser transformada por acciones y procesos.
- *Desencapsulación*: Consiste en revertir la encapsulación, es decir, que el sujeto regresa al proceso que generó un objeto siempre que lo desee.
- *Generalización*: Se refiere a la capacidad del individuo para aplicar un determinado esquema en un contexto distinto, este esquema no cambia, pero los objetos pueden ser asimilados por un esquema para ser contextualizados en otros contextos.

Para el caso de las construcciones mentales se puede decir lo siguiente:

- *Acción*: Se dice que un estudiante ya alcanzó esta concepción cuando realiza transformaciones a un objeto de manera dirigida, las acciones que se involucran en la realización de la transformación son externas puesto que se deben hacer de manera explícita y guiado por instrucciones.
- *Procesos*: En esta estructura mental se realiza la misma operación que se hizo en la acción, pero solamente en la mente del individuo, dejando la oportunidad de que el sujeto sea capaz de imaginar la realización de la transformación, pero sin llevar a cabo los pasos de manera explícita.
- *Objetos*: Es la construcción mental resultante de la reflexión por parte del sujeto acerca de las operaciones aplicadas a un proceso donde identifica las transformaciones y las construye, es decir, el proceso se ha encapsulado en un objeto estático, lo que implica que se posee una concepción objeto del concepto. De igual manera, es en esta construcción donde se lleva a cabo la desencapsulación. Se puede decir entonces que la naturaleza del objeto depende del proceso por el cual fue encapsulado
- *Esquema*: Es una colección coherente de estructuras de acción, proceso, objeto y de otros esquemas y las conexiones entre ellos. Y se caracterizan por ser dinámicas, gracias a la construcción y reconstrucción continua de la actividad matemática del sujeto en situaciones específicas.

Como se puede deducir de las definiciones ya mencionadas, todas estas construcciones se convierten en una base de las estructuras matemáticas que el sujeto construye a lo largo del proceso de aprendizaje. Los esquemas son estructuras dinámicas, puesto que durante todo el proceso evolucionan constantemente, puesto que se van agregando objetos matemáticos, creando así un refinamiento del esquema. Por tanto, el esquema contiene tanto a los mecanismos como a las estructuras mentales.

Capítulo 3. Método

En el siguiente capítulo se presentará el método que se utilizó durante la realización de esta investigación, se comenzará definiendo el tipo de investigación, continuando con la descripción de nuestros informantes y concluyendo con la explicación de cada una de las etapas de investigación.

Corte Cualitativo y Estudio de Caso

Según Strauss y colaboradores (2002), una investigación se considera de corte cualitativo cuando produce hallazgos a los cuales no se puede llegar por medio de procedimientos de cuantificación o estadísticos y que además la gran parte del trabajo se basa en la interpretación del investigador.

Por su lado Baptista et. al (2010) definen como enfoque cualitativo a la recolección de datos que tiene por objetivo afinar una pregunta de investigación a partir de un proceso de interpretación sin una medición numérica.

Considerando lo anterior, nuestra investigación es de tipo cualitativa, puesto que busca comprender el desarrollo y repercusiones en el conocimiento especializado del profesor de matemáticas a partir de la formación profesional en una teoría institucionalizada.

Stake (1995) menciona que un estudio de caso tiene como verdadero trabajo el de particularizar y no el de generalizar un fenómeno y que por tanto las conclusiones de éste invitan a modificar lo que se ha generalizado. Rosales (2018) complementa marcando que el caso puede corresponder a un solo elemento o varios que se encuentren en la población que es objeto de estudio.

De igual forma Stake (1995) explica que un estudio de caso puede caracterizarse como instrumental, cuando su propósito es comprender un fenómeno de un caso particular y por tanto sirve para comprender un fenómeno complejo. Es así como podemos situar a nuestra investigación cualitativa, como un estudio de caso instrumental.

Informantes

Los informantes para este trabajo son dos egresados del posgrado profesionalizante en Educación Matemática que se oferta en la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas en la BUAP, cuyo trabajo de grado fue realizado con la teoría APOE.

Es importante destacar que nuestros informantes basaron sus proyectos de tesis, así como su formación en esta teoría institucionalizada en diversos autores (e.g. Cottril, 1996, Pons, 2014, Borja, 2015), por lo que el primer acercamiento con ellos fue a través del análisis didáctico de sus trabajos de posgrado.

Nuestro primer informante, Adrián, es un docente que para el momento en el que realizó el diseño de actividades tenía 5 años de experiencia docente. Es licenciado en matemáticas y maestro en educación matemática y basó su trabajo de posgrado en una descomposición genética para el tema de límites (Cottril, 1996) y en una secuencia de actividades propuestas por Pons (2014).

Nuestro segundo informante, Fernando, es un docente que contaba con 10 años de experiencia docente para el momento en el cual diseñó las actividades. Es ingeniero agrónomo zootecnista y maestro en educación matemática. Basó su trabajo de maestría en la descomposición genética de Borja (2015), para sistemas de ecuaciones lineales y la complementó con la teoría de multi-representaciones.

Es importante mencionar, que, con el propósito de guardar el anonimato de nuestros informantes, sus trabajos de posgrado no serán referenciados durante este trabajo.

Etapas de la investigación

Al utilizar el modelo MTSK se abordó la investigación basándonos en las características metodológicas del mismo modelo, comenzado con el análisis didáctico, la obtención de información de los instrumentos, la organización de la información (evidencia, indicio y oportunidad para la investigación) la discusión y la presentación de los resultados (Escudero-Ávila et al., 2016)

En cuanto al análisis didáctico podemos decir que se puede utilizar con fines formativos e investigativos, puesto que ayuda a profundizar en aspectos del análisis de contenido (aspectos formales, significados y formas de representar un contenido matemático), el análisis cognitivo (objetivos y limitaciones que se presentan en la enseñanza de un tema) y el análisis de la instrucción (recursos, tipos de tareas y secuencias de estas).

Lo anterior ayuda al investigador a tener esa sensibilidad teórica al momento de categorizar, analizar e interpretar la información que se va recabando, por otra parte, el análisis didáctico también puede ser utilizado para fines metodológicos para comprender las manifestaciones que los profesores tienen y que están relacionados con su conocimiento. Esto ayuda al investigador a organizar y construir el conocimiento que un docente muestra a través de sus diversas acciones y por tanto acercándolo a una comprensión profunda y objetiva (Escudero-Ávila et al., 2016).

El análisis didáctico en nuestra investigación se llevó a cabo al realizar una revisión exhaustiva de la teoría APOE para, así, poder obtener la sensibilidad teórica necesaria para poder comprender e interpretar las secuencias de actividades diseñadas por nuestros informantes.

Por lo mencionado previamente, las investigaciones donde se utiliza el MTSK son estudios de caso instrumentales, puesto que la recopilación de información se da a partir de videograbaciones, grabaciones de clase, notas de campo, diseño de tareas, discusiones grupales, foros de discusión, cuestionarios y entrevistas semiestructuradas como complemento a los instrumentos ya mencionados (Sosa, Flores-Medrano y Carrillo, 2015).

En nuestro caso, la recopilación de la información se dará a partir del análisis del diseño de tareas que realizaron nuestros informantes complementando dicho análisis con una entrevista semiestructurada y un cuestionario. Para la organización de la información nos basaremos en la clasificación que Escudero-Ávila et al. (2016) mencionan que se ha utilizado en investigaciones previas con respecto al conocimiento especializado del profesor de matemáticas, dicha clasificación separa la información en evidencia, indicio u oportunidad de investigación, las cuales se explican a continuación:

- Evidencia de conocimiento: Son aquellos elementos que ayudan al investigador a afirmar que el profesor posee o no, cierto conocimiento, para garantizar que el elemento es una evidencia es necesaria una triangulación con respecto a la acción del sujeto, como en el contexto (basándose en la observación o sustentada en la entrevista semiestructurada) y la interpretación del investigador (ya con la sensibilidad teórica mencionada anteriormente).
- Indicio de conocimiento: Se refiere a aquellos elementos que causan cierta sospecha sobre la existencia o inexistencia de un conocimiento, esta sospecha regularmente es ocasionada por declaraciones o acciones del profesor, y esto nos indica que se requiere más información para que se conviertan en evidencia, dicha información se busca encontrar en otras acciones o incluso durante el desarrollo de una entrevista semiestructurada.

- Oportunidad de investigación: Son aquellos momentos ocasionados por el profesor o por el desarrollo de la clase, que sirven para explorar conocimiento que no tiene relación con el subdominio con el cual se identificó el momento principal.

La entrevista semiestructurada y el cuestionario, previamente mencionados, tuvieron como objetivo ayudar a confirmar las evidencias de conocimiento encontradas durante el análisis, o en su defecto, lograr cambiar los indicios de conocimiento en evidencias, esto se logra al hallar información que permita confirmar la sospecha de aparición de cierto conocimiento por parte de nuestros informantes.

Capítulo 4. Análisis

En este capítulo se presentará el análisis que se le realizó a las secuencias de actividades de nuestros informantes. Se mostrará un análisis por informante y cada uno se abordará por subdominio, mostrando aquellos extractos más significativos donde se observan conocimientos correspondientes a éstos, al final de cada subdominio se presentará un resumen.

Identificación de Conocimientos de Adrián

Recordemos que Adrián diseñó actividades para la construcción del concepto de límite basándose en una descomposición genética propuesta por Cottril et al. (1996) y el trabajo de Pons (2014). Para este caso se analizaron las descripciones de un total de 16 actividades, las cuales, como ya se mencionó, se encuentran reportadas en el trabajo de posgrado de Adrián.

Conocimiento Matemático

Conocimiento de los Temas. Recordemos que dentro de este subdominio encontramos las siguientes categorías: procedimientos, definiciones, propiedades y sus fundamentos, registros de representación y fenomenología y aplicaciones. A continuación, se presentan extractos donde podemos observar la aparición de dichas categorías.

El primer extracto (Figura 2) corresponde a una parte de la descripción que Adrián proporciona de las actividades 3, 4, 5. En dichas tareas se presenta una función y una tabulación con algunos valores de x cercanos a un x_0 específico. Dicha tabla debe ser completada por el estudiante y seguido de eso debe responder algunas preguntas con respecto al comportamiento de la función con relación al comportamiento de la variable x.

Figura 2

Parte de la descripción de las actividades 3, 4 y 5

> Las tareas 3, 4 y 5 se presentan en modo algebraico-numérico según los tipos de representación considerados en (Pons, 2014).
> Algebraico por la forma en que se presenta la función y numérico por los datos que necesita el estudiante para lograr responder la segunda pregunta. En las actividades 3 y

En dicho extracto Adrián presenta evidencia de conocimiento de las características que tienen los distintos tipos de representación de una función, esto se puede notar ya que Adrián justifica la razón por la que menciona que las tareas presentan una representación algebraica y otra numérica, es por ello por lo que este extracto es clasificado como una muestra de aparición de conocimiento de la categoría de registros de representación.

Los siguientes extractos se presentan en las descripciones de las actividades 6, 7 y 8 (la descripción es la misma para las tres actividades, la diferencia se encuentra en los valores x y la función a la que se hace referencia), en dichas actividades se presentan gráficas correspondientes a tres funciones distintas y para cada una de ellas se le pide al estudiante que responda preguntas con el objetivo de determinar el comportamiento de la función con relación al comportamiento de la variable x, esto solamente con la ayuda de la gráfica.

Figura 3.

Descripción del inciso a) de las actividades 6, 7 y 8.

> En el inciso a) que los estudiantes sean capaces de determinar el valor de la función en un punto dada su gráfica. (DG1) y (DG2)

En este extracto (Figura 3) se observa que Adrián espera que los estudiantes sean capaces de utilizar la gráfica para determinar el valor de dicha función en un punto x_0, lo cual nos muestra, en principio, un indicio de conocimiento por parte de Adrián con respecto al tratamiento que se da en el registro de representación gráfica correspondiente, es por ello que el extracto es clasificado como una muestra de indicios de conocimiento con respecto al tratamiento que se da en diversos registros de representación, en este caso en el registro gráfico de una función.

El siguiente extracto (Figura 4) también es un indicio del conocimiento que tiene Adrián de la categoría de registros de presentación, igual que en el anterior extracto, la descripción corresponde a las actividades 6, 7 y 8, en este caso se pide que los alumnos, a partir de la gráfica, determinen a qué valor numérico se acerca la función mientras la variable x se aproxima a un valor específico. Cuando Adrián menciona que los incisos estimulan la coordinación de ciertos procesos (uno en el dominio y otro en las imágenes) es porque en dichos incisos se le proporciona al alumno una lista de números cercanos al valor x_0 correspondiente y se espera que el alumno realice acciones similares a las realizadas en el inciso a, pues en dicho inciso se le da la libertad al alumno de seleccionar el valor de la x que guste y a partir de ella y con uso de la gráfica hallar el valor de $f(x)$.

Figura 4.

Descripción inciso b) y c) actividad 7.

• En el inciso b), estimular en los estudiantes la coordinación de la concepción proceso de la sucesión numérica en el dominio (DG3a) cuando x se aproxima a 2 por la izquierda con la concepción proceso de la sucesión numérica en las imágenes (DG3b) cuando $f(x)$ se aproxima a 3.	• En el inciso c), estimular en los estudiantes la coordinación de la concepción proceso de la sucesión numérica en el dominio (DG3a) cuando x se aproxima a 2 por la derecha con la concepción proceso de la sucesión numérica en las imágenes (DG3b) cuando $f(x)$ se aproxima a 3.

Los extractos anteriores son clasificados como indicios, ya que no es muy claro el conocimiento que tiene el docente con respecto al tratamiento que se tiene que realizar en el registro de representación gráfico.

Estos indicios son convertidos en evidencia gracias a la descripción que Adrián realiza para la actividad 9. En dicha actividad se le presenta al alumno una gráfica de cierta función y se le pide que encuentre el valor de la función para ciertos valores de x, y se le sugiere que se apoye de los trazos en la gráfica. En el siguiente extracto (Figura 5) se observa de manera explícita el conocimiento que tiene el docente sobre la forma en la que se realiza el tratamiento en la representación gráfica para poder hallar el valor de cierta función en un valor de x.

Figura 5.

Descripción actividad 9.

> Se busca que los estudiantes sean capaces de determinar el valor de la función en determinados puntos, dada su representación gráfica, mediante el apoyo de trazos de rectas, en otras palabras, se busca que el estudiante determine los valores de las imágenes de la función para ciertos valores del dominio con el apoyo de la gráfica. (DG1)

Gracias a que en la descripción previa (Figura 5) Adrián explica la forma en la que el uso de trazos de rectas ayuda a hallar la imagen de un punto bajo una función, se asegura que Adrián pone en práctica la categoría de registros de representación, pues conoce uno de los tratamientos que se le da al registro geométrico de una función, en este caso, un tratamiento que ayuda a hallar el valor de una función $f(x)$ para un valor de x específico, dicho tratamiento es el de "trazo de rectas".

Otra evidencia de conocimiento por parte de Adrián con respecto a los conocimientos sobre registros de representación lo observamos en el siguiente extracto (Figura 6), éste forma parte de la descripción de la actividad 10, en dicha actividad se le presenta al estudiante una función por partes junto con una tabla donde se observan para determinados valores de x (los cuales se aproximan a 2) su imagen bajo la función, así como el valor absoluto de la diferencia entre dichos valores de x y 2 y el valor absoluto entre los correspondientes valores de $f(x)$ y 3 (donde $3 = f(2)$), la actividad consiste en que el alumno, con apoyo de la tabla ya mencionada, relacione los valores absolutos de las diferencias descritas con el límite de la función, es decir, busca favorecer la concepción métrica de límite.

Figura 6.

Descripción de la pregunta 1 de la actividad 10.

> En la pregunta 1 se busca que los estudiantes coordinen las aproximaciones en el dominio con las aproximaciones de las imágenes en términos de desigualdades, para que logren observar que los valores de x deben estar 0.0001 de 2, o que los valores de x que debe tomar deben ser mayores que 1.999 y menores que 2.0001, para que la distancia de $f(x)-3$ en valor absoluto sea menor que 0.004 (DG5)

En la descripción (Figura 6) Adrián, explica la relación que tienen los valores absolutos con las distancias, de igual forma explica la relación entre el valor absoluto que involucra a la variable x con el que involucra a $f(x)$, esta relación genera la transformación que este registro aritmético tiene hacia el registro algebraico representado por las desigualdades, lo que ayuda a clasificar este extracto como una muestra de conocimiento por parte de Adrián perteneciente a la categoría de conocimientos sobre registros de representación.

El siguiente extracto (Figura 7) corresponde a una parte de la descripción para las actividades 3,4 y 5, en dichas actividades se les pide a los alumnos llenar una tabla donde se realiza la tabulación de ciertas funciones y a partir de ella responder algunas preguntas con respecto al comportamiento de la función en relación con el comportamiento de la variable independiente.

Figura 7.

Inicio de la descripción de las actividades 3, 4 y 5.

> Las actividades 3, 4 y 5 pretenden que los estudiantes logren lo siguiente:
>
> - Al solicitar que completen la tabla pretendemos que el estudiante recupere de sus conocimientos previos la manera de evaluar diversos valores en una función, lo que le permitirá desarrollar una concepción acción del concepto de límite. (DG1)

Como se puede notar, Adrián menciona que al pedirle a los alumnos que completen las tablas correspondientes se pretende que éstos recuperen la manera de evaluar una función en valores específicos, lo cual muestra evidencia de que Adrián tiene conocimiento acerca del cómo y por qué el alumno debe utilizar como procedimiento la evaluación de la función en determinados valores para poder desarrollar las actividades, lo cual corresponde a la categoría de conocimiento sobre procedimientos.

El siguiente extracto (Figura 8), correspondiente a la descripción de las mismas actividades 3, 4 y 5, Adrián muestra evidencia de conocimiento sobre procedimientos, pues conoce el significado del resultado obtenido al completar la tabulación correspondiente y responder las preguntas.

Figura 8

Extracto de la descripción de las actividades, 3, 4 y 5.

Que el estudiante asocie la aproximación en las imágenes de una sucesión numérica a un número, en el caso de la actividad 3 es a 3 y en la actividad 4 es a -2; además esperamos que note que, en la actividad 4, las imágenes $f(x)$ son constantes. Finalmente, en la actividad 5 se busca que observe que la sucesión numérica e aproxima a 1 por la izquierda y a -3 por la derecha. (DG3b)

La evidencia del conocimiento del significado del resultado es sustentada en los siguientes extractos.

Figura 9.

Descripción de actividad 3.

En la actividad 3 se busca estimular la capacidad de coordinar la concepción proceso de las sucesiones de números en el dominio cuando x tiende a 2, con la concepción proceso de las sucesiones de números en las imágenes cuando $f(x)$ tiende 3, empleando la sucesión numérica que previamente haya encontrado. (DG3c)

Figura 10.

Descripción actividad 4.

De la misma manera, en la actividad 4 pretendemos estimular la capacidad de coordinar la concepción proceso de las sucesiones numéricas en el dominio, cuando x tiende a 4, con la concepción proceso de las sucesiones numéricas en las imágenes cuando $f(x)$ tiende a -2. Finalmente, en la

Figura 11.

Descripción actividad 5.

cuando $f(x)$ tiende a -2. Finalmente, en la actividad 5 se pretende estimular la capacidad de coordinar la concepción proceso de las sucesiones numéricas en el dominio, cuando x tiende a 0 con la concepción proceso de las sucesiones numéricas en las imágenes $f(x)$ y note que las imágenes se aproximan a dos números. (DG3c)

En cada uno de los extractos previos (Figura 9, Figura 10 y Figura 11), Adrián menciona que con dichas actividades se pretende estimular la capacidad de coordinar la concepción proceso en el dominio y la concepción proceso en las imágenes, lo que significa en este caso que, el estudiante sea capaz de imaginar la relación que existe entre las aproximaciones a un valor x_0 y las aproximaciones a su imagen respectiva, no solamente con los valores dados en la tabulación, sino también con una cantidad infinita de valores para la variable x. Lo anterior nos muestra evidencia de conocimiento por parte de Adrián acerca del significado de los resultados obtenidos en las tabulaciones y por tanto de las respuestas de las preguntas correspondientes a cada actividad, lo cual forma parte de los conocimientos acerca de procedimientos.

Otro extracto (Figura 12) en donde se muestra no solamente evidencia del conocimiento mencionado previamente por parte de Adrián, sino también evidencia del cómo se realiza dicho proceso, pero ahora auxiliado por el registro algebraico, lo encontramos en la descripción de la actividad 11, donde se le presenta al alumno la función $f(x) = -2$ y se le pide que responda algunas preguntas después de que complete una tabla, donde debe colocar los valores de las distancias representadas en valor absoluto, entre valores de x y 4, y los respectivos valores de $f(x)$ y -2.

Figura 12.

Descripción actividad 11.

> La pregunta 3 busca que los estudiantes coordinen las aproximaciones en el dominio con las aproximaciones en sus imágenes en términos de desigualdades, guiándolos a la reflexión de que para cualquier valor que tome x en la tabla siempre se cumplirá que la distancia en valor absoluto de $f(x)$ y 4 es menor que 0.0001.

La evidencia del conocimiento de cómo realizar el proceso que consiste en imaginar la relación que existe entre las aproximaciones a un valor x_0 y las aproximaciones a su imagen respectiva a un valor determinado, se muestra en el momento en el que Adrián menciona que, los estudiantes lograrán coordinar las aproximaciones en el dominio con las aproximaciones en las imágenes al observar los valores de la tabla, dicha observación es guiada por las preguntas de la misma actividad.

A continuación, se presentan extractos donde se muestra evidencia de conocimiento por parte de Adrián con respecto a la categoría de definiciones, propiedades y sus fundamentos.

Figura 13.

Inicio de la descripción de la actividad 4.

> En la actividad 4 pretendemos que el estudiante observe que la imagen de cualquier elemento del dominio evaluado en la función siempre será constante.

El extracto anterior (Figura 13) corresponde a la actividad 4, donde se le pide al estudiante que realice una tabulación para la función $f(x) = 2$, se observa que Adrián posee conocimiento acerca de la definición de una función constante, pues en el extracto notamos que Adrián menciona que "la imagen de cualquier elemento del dominio evaluado en la función dada siempre será constante", lo cual corresponde a la definición de la función contante.

Los siguientes extractos son una muestra de la descripción que Adrián realiza de las actividades 10, 11 y 12, así como del cuestionario final (CF1, CF2, CF3 y CF4), el cual consiste en 4 actividades. En las actividades ya mencionadas, se le pide al alumno, que indique a partir de la tabulación, la cual se pide en las actividades, y de preguntas enfocadas a reflexionar la relación entre las aproximaciones de valores x a un valor x_0 específico y las aproximaciones de los respectivos valores de $f(x)$ a un valor específico L (que corresponde al límite de la función), que indique y justifique el límite de la función correspondiente.

Este primer extracto (Figura 14) corresponde a la pregunta 2, donde se le pide al estudiante que reflexione sobre la proximidad que deben tener los valores de x de un x_0, para que las diferencias de $f(x)$ y L sea menor que cierto valor.

Figura 14.

Descripción de la pregunta 2 de la actividad 10.

> La pregunta 2 busca que los estudiantes manifiesten la existencia del límite, ya sea mediante argumentación de las aproximaciones laterales coincidentes, pero que sean capaces de desarrollar un argumento más mediante la coordinación de las aproximaciones métricas en el dominio y codominio de la función, en otras palabras, se busca que los estudiantes noten que los valores de las diferencias en valor absoluto entre los valores de x y 2 se aproximan a 0, cando x se aproxima a 2. Una interpretación similar puede surgir con las distancias en valor absoluto de $f(x)$ y 3, y que por lo tanto, si determinamos que tan próximos deben estar los valores de $f(x)$ a 3 en valor absoluto, esto determina que siempre es posible hallar un conjunto de valores de x en términos de desigualdades en el dominio que satisfacen la condición solicitada en el codominio. Por lo tanto, en caso de que no se cumpla la restricción solicitada para ningún conjunto de valores de x en términos de desigualdades, podemos decir que la función no tiene límite en el punto determinado. (DG5)

En este extracto notamos que Adrián muestra evidencia de conocimiento acerca de la definición formal de límite, pues explicitó que “siempre es posible hallar un conjunto de valores de x en términos de desigualdades en el dominio que satisfacen la condición solicitada en el codominio”, lo que corresponde a los cuantificadores involucrados en dicha definición, además de mostrar que en caso de que no se cumpla lo que menciona, se dice que el límite no existe en el punto x_0.

El siguiente extracto (Figura 15) corresponde de igual manera a las descripciones de las actividades 10, 11 y 12, así como del cuestionario final.

Figura 15.

Descripción actividad 13.

> este caso 5. Por otro lado, deberá asociar la aproximación de una sucesión numérica por la derecha y por la izquierda en las imágenes a un número fijo, en este caso 10. Esto le permitirá manifestar la existencia o no existencia del límite de una función en un punto.

En el extracto notamos que, Adrián muestra evidencia de conocimiento acerca de la propiedad de los límites que menciona que, al ser los límites laterales iguales significa que el límite de la función existe y además es igual a los límites laterales.

En general, notamos que Adrián, pone en marcha solamente conocimientos correspondientes a las categorías: procedimientos, definiciones, propiedades y sus fundamentes y registros de representación., pues no mostró en sus descripciones conocimientos acerca de la fenomenología del tema de límite.

Adrián muestra evidencia de conocimiento con respecto a procedimientos, al explicar de manera detallada lo que se desea que el estudiante realice para cada actividad, así como el significado de cada uno de los resultados que tienen las actividades.

De igual forma Adrián muestra evidencia de conocimiento correspondiente a definiciones, propiedades y sus fundamentos, al explicar el razonamiento deseado del estudiante para relacionar, en principio las aproximaciones en el dominio con las respectivas en el codominio, seguido de utilizar dicha relación para asegurar o no la existencia del límite.

Por otro lado, Adrián también muestra evidencia de conocimiento correspondiente a los registros de representación, pues durante sus descripciones, explica los tratamientos y conversiones que son necesarios que el estudiante realice para poder concluir las actividades de manera satisfactoria.

Lo mencionado previamente, se observa en la Tabla 1, donde se presenta qué categorías del conocimiento de los temas puso en marcha Adrián en las descripciones de las actividades. Esta tabla nos ayuda a mostrar a qué categoría pertenecen los conocimientos correspondiente a los temas que muestra Adrián, de igual forma, nos permite asegurar que nuestro informante pone en práctica el subdominio correspondiente al conocimiento de los temas, pues se muestra que en todas las descripciones apareció conocimiento correspondiente a al menos una categoría del KoT.

Tabla 1.

Distribución de los conocimientos de Adrián en las categorías de KoT

Actividad	P	DPyF	RR	FyA
1 y 2	E			
3, 4 y 5	E	E	E	
6			E	
7	E		E	
8		E	E	
9			E	
10	E	E	E	
11	E		E	
12	E		E	
13		E		
14		E		
15		E		
16		E		

Nota. P: Procedimiento, DPyF: Definiciones, propiedades y sus fundamentos, RR: Registros de representación, FyA: Fenomenología y aplicaciones y E indica que en las descripciones se encuentra evidencia de conocimiento correspondiente a alguna categoría.

Conocimiento De La Estructura De Las Matemáticas. Recordemos que este subdominio involucra el conocimiento del profesor en el uso de conexiones de complejización, auxiliares, simplificaciones y transversales.

Durante las descripciones que Adrián realiza de las actividades, podemos notar conocimiento en el uso de las conexiones auxiliares y de complejización, algunos ejemplos de esto lo mostramos a continuación.

Para las actividades 10, 11 y 12, Adrián explica que tienen como objetivo principal favorecer la concepción métrica del límite de una función, en dichas actividades, se les pide a los alumnos que completen una tabla donde se incluyen columnas donde deben colocar los valores absolutos de las diferencias, uno entre los valores de x y un x_0 y otro entre los respectivos valores de $f(x)$ y un determinado valor L. Los extractos que se presentan a continuación corresponden a las descripciones de las actividades ya mencionadas.

Por el objetivo ya descrito de las actividades 10, 11 y 12, en las descripciones de dichas actividades Adrián utiliza el concepto de valor absoluto mostrando un indicio de una conexión con el concepto de métrica, un ejemplo de esto, lo observamos en el siguiente extracto (Figura 16).

Figura 16.

Descripción pregunta 1 de la actividad 10.

> En la pregunta 1 se busca que los estudiantes coordinen las aproximaciones en el dominio con las aproximaciones de las imágenes en términos de desigualdades, para que logren observar que los valores de x deben estar 0.0001 de 2, o que los valores de x que debe tomar deben ser mayores que 1.999 y menores que 2.0001, para que la distancia de $f(x) - 3$ en valor absoluto sea menor que 0.004 (DG5)

Lo catalogamos como indicio, ya que no es muy claro la manera en la que Adrián relaciona dichos objetos matemáticos con el concepto de métrica. El siguiente extracto (Figura 17) muestra de nueva cuenta el uso del término valor absoluto.

Figura 17.

Descripción de la pregunta 2 actividad 10.

La pregunta 2 busca que los estudiantes manifiesten la existencia del límite, ya sea mediante argumentación de las aproximaciones laterales coincidentes, pero que sean capaces de desarrollar un argumento más mediante la coordinación de las aproximaciones métricas en el dominio y codominio de la función, en otras palabras, se busca que los estudiantes noten que los valores de las diferencias en valor absoluto entre los valores de x y 2 se aproximan a 0, cando x se aproxima a 2. Una interpretación similar puede surgir con las distancias en valor absoluto de $f(x)$ y 3, y que por lo tanto, si determinamos que tan próximos deben estar los valores de $f(x)$ a 3 en valor absoluto, esto determina que siempre es posible hallar un conjunto de valores de x en términos de desigualdades en el dominio que satisfacen la condición solicitada en el codominio. Por lo tanto, en caso de que no se cumpla la restricción solicitada para ningún conjunto de valores de x en términos de desigualdades, podemos decir que la función no tiene límite en el punto determinado. (DG5)

Este extracto a diferencia del mostrado previamente nos muestra evidencia acerca de la conexión del concepto de métrica y el concepto valor absoluto, ya que en la descripción mostrada en el extracto anterior hace explicita dicha relación, al mencionar “qué tan próximo deben estar los valores de $f(x)$ a 3”, ya que la palabra próximo hace referencia a que tan cercano deben estar los valores mencionados, logrando con esto último hacer evidente que Adrián reconoce el valor absoluto como una métrica.

Los siguientes extractos son evidencia de conocimiento por parte de Adrián, sobre conexiones auxiliares:

Figura 18.

Descripción de pregunta 1 actividad 10, evidencia de conexión auxiliar.

> En la pregunta 1 se busca que los estudiantes coordinen las aproximaciones en el dominio con las aproximaciones de las imágenes en términos de desigualdades, para que logren observar que los valores de x deben estar 0.0001 de 2, o que los valores de x que debe tomar deben ser mayores que 1.999 y menores que 2.0001, para que la distancia de $f(x) - 3$ en valor absoluto sea menor que 0.004 (DG5)

Este extracto (Figura 18), es una muestra de conocimiento por parte de Adrián sobre el uso de las desigualdades como auxiliar para marcar proximidad (excluyendo la posibilidad de igualdad) entre dos valores, en este caso, representada por distancias, esto se observa cuando en las descripciones Adrián menciona “se busca que los estudiantes coordinen las aproximaciones en el dominio con las aproximaciones de las imágenes en términos de desigualdades”. De igual forma es una muestra del uso de la desigualdad y el valor absoluto como auxiliar para determinar entre que valores se debe encontrar cierta cantidad, en este caso dicha cantidad es referente a la distancia, esto se observa cuando Adrián menciona “que los valores de x que debe tomar deben ser mayores que 1.999 y menores que 2.0001, para que la distancia de $f(x)$ a 3 en valor absoluto sea menor que 0.004”.

El siguiente extracto (Figura 19) también es una muestra de conocimiento de Adrián con respecto a conexiones auxiliares:

Figura 19.

Descripción inicial de la actividad 12.

> En la pregunta 1 y 2 se busca que los estudiantes reconozcan las nuevas sucesiones de valores que resultan de las diferencias en valor absoluto entre 2 y x por una parte y de 3 con $f(x)$ por otra.

Este extracto es una muestra del uso del concepto de sucesión como auxiliar por parte de Adrián, para referirse a una lista de números, dado que la palabra sucesión es utiliza con el sentido ya mencionado, se decide clasificarlo como auxiliar, ya que, si Adrián hubiera mostrado evidencia de utilizarlo con base a la definición formal de sucesión, entonces se hubiera clasificado como conexión de compeljización.

En la Tabla 2, se muestra un resumen de aquellas descripciones en donde se encontró información acerca del conocimiento de Adrián correspondiente al KSM en relación con cada una de sus categorías.

Tabla 2.

Distribución de los conocimientos de Adrián en las categorías del KSM

Actividad	CC	CA	CS	CT
1 y 2		E		
3, 4 y 5		E		
6		E		
7		E		
8		E		
9				
10	E	E		
11	E	E		
12	E	E		
13		E		
14		E		
15		E		
16		E		

Nota. CC: Conexiones de complejización, CA: Conexiones auxiliares, CS: Conexiones de simplificación, CT: Conexiones transversales y E indica que en las descripciones se encuentra evidencia de conocimiento correspondiente a alguna categoría.

Aunque en la Tabla 2 se muestra que existe evidencia de conocimiento sobre conexiones auxiliares, dichas conexiones corresponden al uso de solamente la idea de sucesión como una lista de números y el valor absoluto como una métrica, es por ello que al no observar otro tipo de conexiones (incluso auxiliares) durante la descripción de las actividades, es que se considera que existe una aparición discreta de conocimiento con respecto al subdominio de la estructura de la matemática.

Conocimiento De La Práctica Matemática. Recordemos que este subdominio incluye las categorías: demostrar, definir, uso de heurísticos, y ejemplos y contraejemplos.

Por otro lado, notamos que Adrián, muestra evidencia de conocimiento también con respecto a la categoría de demostración. Los siguientes extractos que, corresponden a la descripción que da Adrián para la actividad 11, son muestra de dicho conocimiento.

Figura 20.

Descripción pregunta 3 actividad 11.

> La pregunta 3 busca que los estudiantes coordinen las aproximaciones en el dominio con las aproximaciones en sus imágenes en términos de desigualdades, guiándolos a la reflexión de que para cualquier valor que tome x en la tabla siempre se cumplirá que la distancia en valor absoluto de $f(x)$ y 4 es menor que 0.0001.

Figura 21.

Descripción pregunta 4 actividad 11.

> La pregunta 4 busca que el estudiante manifieste formalmente la existencia del límite, teniendo en cuenta que cuando los valores de las diferencias en valor absoluto entre los valores de x y 4 se aproximan a 0, los valores de las diferencias en valor absoluto entre los valores de $f(x)$ y -2 son cero, por lo tanto cuando x tiende a 4, el límite de la función $f(x)$ es 4. (DG5)

En estos extractos (Figura 20 y Figura 21), se puede notar evidencia de conocimiento por parte de Adrián con respecto a la demostración de la existencia de un límite, ya que en el primer extracto, se muestra conocimiento acerca del antecedente en la definición de límite, incluyendo el significado de los cuantificadores correspondientes y en el segundo extracto se observa que Adrián explica la razón por la que se afirma que 4 es el límite de la función f, dicha explicación correspondiente a la condicional que se debe demostrar para que un número L sea el límite de una función f cuando x tiende a un x_0.

Ambas evidencias previas de conocimiento se sustentan en lo que Campo-Cano y Flores-Medrano (2019) mencionan acerca de la práctica de demostrar, en particular, en la subcategoría del uso de los distintos registros de representación dentro de la demostración, en ese caso, el registro numérico y algebraico.

De igual manera, como ya se mencionó, se pude observar otra subcategoría propuesta por Campos-Cano y Flores-Medrano (2019), la correspondiente al tipo de demostración, donde nuestro descriptor, en el caso del primer extracto, corresponde a la relación de los cuantificadores y en el segundo extracto a la relación de la implicación.

Por lo anterior afirmamos que Adrián muestra conocimiento sobre la demostración de un límite y como se lleva a cabo, pues muestra conocer la interpretación de lo que se involucra en la definición, lo cual es necesario para poder realizar dicha demostración.

En la Tabla 3, se presenta de manera general las descripciones de las actividades que presentan evidencia de conocimiento con respecto a las categorías del KPM.

Tabla 3.

Distribución de los conocimientos de Adrián en las categorías del KPM

Actividad	Dm	Df	UH	EyC
1 y 2				
3, 4 y 5				
6				
7				
8				
9				
10	E			
11	E			
12	E			
13				
14				
15				
16				

Nota. Dm se refiere a la categoría Demostrar, Df a la categoría Definir, UH a la categoría uso de heurísticos, EyC a la categoría Ejemplos y contraejemplos y E indica que en las descripciones se encuentra evidencia de conocimiento correspondiente a alguna categoría.

Como se puede notar en la Tabla 3, el conocimiento por parte de Adrián con respecto al conocimiento correspondiente a las demostraciones es discreto, ya que se puede observar que solamente se encontró evidencia en tres de las actividades reportadas. Recordemos que el KPM es un subdominio relacionado con un metaconocimiento acerca de las matemáticas, y puesto que las actividades son diseñadas para nivel bachillerato, es de esperarse que dicho metaconocimiento no se mostrara de manera contundente.

Conocimiento Didáctico Del Contenido

Conocimiento De Las Características De Aprendizaje De Las Matemáticas. Recordemos que este subdominio involucra conocimiento con respecto a las categorías: teorías de enseñanza, fortalezas y dificultades, interacción del estudiante con el contenido e intereses y expectativas de aprendizaje.

De igual forma recordemos que el diseño de actividades que realizó Adrián tuvo como base principal la descomposición genética de Cottril et al. (1996) así como las modificaciones y sugerencias de actividades de Pons (2014). Es por ello que, las descripciones que Adrián proporciona para cada una de sus actividades muestran evidencia de conocimiento con respecto a teorías de aprendizaje, en particular de la teoría APOE, enfocada en la construcción del concepto de límite en sus distintas concepciones, la evidencia de dicho conocimiento radica en tres razones, la primera en que, en cada una de las descripciones, Adrián menciona las construcciones mentales de la descomposición genética que la actividad pretende desarrollar, la segunda, en la respuesta que Adrián proporcionó a la pregunta 1 del cuestionario que se le aplicó, pues en ella Adrián explica la medida en la que la propuesta de Pons aportó en el diseño de las actividades.

> Pregunta 1: Hemos notado que Pons (2014) es el principal referente en tu tesis e incluso notamos que tu diseño tiene aportes de su trabajo. ¿Hasta qué punto el diseño es fiel a lo propuesto por Pons y en qué medida propusiste modificaciones en su diseño? Por favor, comenta con detalle todos aquellos elementos que permitan comprender a profundidad tus propuestas o modificaciones.
>
> Adrián: Pons aporta en el diseño de las actividades de la secuencia didáctica. Digamos que la mayor aportación que tiene Pons dentro de mi tesis es, precisamente, en el diseño de las actividades, ya que, en el diseño de sus actividades involucra los primeros tres pasos de la descomposición genética de Cottril. Además, hay una adaptación del cuarto paso y un acercamiento al quinto paso, a lo que él llama la concepción métrica, una de las aportaciones que también en el trabajo de tesis es [considerado como] los modos de representación […] mismas que también fueron consideradas en el diseño de la secuencia didáctica.

Y la tercera razón se encuentra, de igual forma, en la respuesta que Adrián proporciona a la pregunta 2 del mismo cuestionario, pues en ella Adrián menciona la influencia de la descomposición genética de Cottril en el diseño de las actividades.

> Pregunta 2: ¿Cómo influyó la Descomposición Genética en la generación de los objetivos que mencionas en tus actividades y qué elementos de los objetivos no se relacionan con la Descomposición Genética?
>
> Adrián: La descomposición genética es la herramienta teórica que permite diseñar las actividades de la secuencia didáctica, y por ende de los

objetivos de cada una de ellas, por lo tanto, no puede haber objetivos en dichas actividades que no estén en la descomposición genética.

Algunos ejemplos de descripciones donde se muestra dicho conocimiento son las siguientes descripciones.

El primer ejemplo (ver Figura 22) corresponde a la introducción de la descripción de las actividades 3, 4 y 5, en estas actividades se le solicita al alumno que, dada una función, complete una tabla con las imágenes de determinados valores de x, con el propósito de que esta tabla ayude a responder las preguntas que se le plantean en cada actividad.

Figura 22.

Descripción de las actividades 3, 4 y 5.

> Las tareas 3, 4 y 5 se presentan en modo algebraico-numérico según los tipos de representación considerados en (Pons, 2014).
> Algebraico por la forma en que se presenta la función y numérico por los datos que necesita el estudiante para lograr responder la segunda pregunta. En las actividades 3 y 5, están expresados en una tabla y se diferencian en la coincidencia o no coincidencia de las aproximaciones laterales de sus imágenes.

Como se puede notar en la Figura 22, Adrián muestra conocimiento, no solamente de los tipos de representación que Pons propone en su trabajo de 2014, sino también muestra conocimiento sobre cómo diferenciar uno del otro y la forma en la que éstos se presentan en sus actividades.

El ejemplo de la Figura 23 corresponde a la introducción de las actividades 10, 11 y 12, en éstas, se le solicita al alumno responder preguntas sobre proximidades en el dominio y la imagen a partir de una tabla dada, correspondiente a los valores que toma una función en ciertos valores de x, así como los valores absolutos entre el x_0 y el valor que se espera que el estudiante identifique como el límite de la función en el punto x_0

Figura 23.

Introducción a las actividades 10, 11 y 12.

Las actividades del 10 al 12 se presentan en modo numérico y buscan favorecer la concepción métrica del límite de una función en un punto a través de las aproximaciones laterales, tanto en el dominio como en el rango, en términos de desigualdades, según la propuesta de Pons (2014).

En la Figura 23 se observa conocimiento por parte de Adrián acerca de lo mencionado por Pons (2014) sobre cómo se favorece la concepción métrica de límite a partir de las representaciones que son consideradas por este.

Con respecto a los conocimientos de Adrián relacionados con la Descomposición Genética, podemos observar el siguiente ejemplo. La Figura 24 muestra la descripción que Adrián da para los objetivos de la actividad 8, en esta se le presenta al alumno la gráfica de una función constante y se le realizan preguntas sobre el comportamiento de dicha función.

Figura 24.

Descripción de objetivos actividad 8.

Los objetivos de la actividad 8 son:

- En el inciso a), que los estudiantes sean capaces de determinar el valor de la función en un punto dada su representación gráfica. (DG1) y (DG2)
- En el inciso b), estimular en los estudiantes la coordinación de la concepción proceso de la sucesión numérica en el dominio (DG3a) cuando x se aproxima a 2 por la izquierda con la concepción proceso de la sucesión numérica en las imágenes (DG3b) cuando $f(x)$ es igual a 5.
- En el inciso c), estimular en los estudiantes la coordinación de la concepción proceso de la sucesión numérica en el dominio (DG3a) cuando x se aproxima a 2 por la derecha con la concepción proceso de la sucesión numérica en las imágenes (DG3b) cuando $f(x)$ es igual a 5.
- Finalmente, en el inciso d, que los estudiantes coordinen la concepción proceso de la sucesión numérica en el dominio cuando x se aproxima a 2, con la concepción proceso de la sucesión numérica en las imágenes, cuando $f(x)$ es igual a 5. (DG3c)

Como se observa en la Figura 24, Adrián explica el objetivo particular para cada uno de los incisios que conforman a la actividad, y al final de cada descripción menciona la estructura mental de la descompocisión genética que dicho inciso pretende desarrollar, lo que demuestra por parte de Adrián un conocimiento acerca de la relación entre sus actividades y cada uno de los apartados de la descompocisión genética correspondiente.

Por otro lado, con respecto al conocimiento relacionado con la interacción del estudiante con el contenido, Adrián muestra evidencia de dicho conocimiento, pues, duante la descripción de cada una de las actividades, Adrían explica lo que se desea que el alumno realice o deduzca a partir de cada una de ellas. La evidencia de dicho conocimiento radica en la respuesta de Adrian a la pregunta 3 del cuestionario, como se puede observar a continuación.

> Pregunta 3: ¿Cómo se relacionan las actividades y sus objetivos con lo que se espera en el aprendizaje e interacción del alumno?
>
> Adrián: Que los alumnos construyan su aprendizaje de acuerdo a la secuencia trazada, ya que una actividad va ligada con la otra, además de que no se les complique trabajar en algunas de las representaciones en las que se presentan dichas actividades

En lo anterior se observa que las actividades fueron diseñadas y ajustadas con la intención de que al interactuar el alumno con cada una de ellas, las representaciones utilizadas, así como las preguntas, apoyaran el desarrollo de las estructuras mentales de la descompocisión genética, así como evitar dificultades conforme van avanzando en ellas.

Por otro lado, en las descripciones de las actividades, Adrián explicita la manera en la que se espera que el alumno interactue con las actividades y, por lo descrito en el párrafo previo, Adrián muestra conocimiento acerca de que dicha interacción se desea generar con la intencionalidad de la secuencia, incluyendo la forma en la que se presentan las actividades así como de las diferentes representaciones utilizadas en cada una.

Un ejemplo de descripciones de actividades, donde se muestra el conocimiento acerca de la interacción del alumno con el contenido se presenta en la realizada para las actividades 1 y 2 (Ver Figura 25), en estas se les pide a los alumnos que respondan preguntas a partir de la presentación de una tabla donde se muestran los valores de una función acercándose a uno determinado, mientras los valores de x se acercan a un x_0.

Figura 25.

Descripción de actividades 1 y 2.

Las actividades 1 y 2 se presentan en modo numérico y se diferencian en la coincidencia y en la no coincidencia de las aproximaciones laterales.

Las dos actividades anteriores pretenden que los estudiantes logren lo siguiente:

- Que el estudiante observe que las sucesiones numéricas en el dominio se aproximan a un número, en el caso de la actividad 1 es a 3, y en la segunda actividad es a 4. (DG3a)
- Que el estudiante asocie la aproximación en las imágenes de una sucesión numérica a un número fijo, en el caso de la actividad 1 es a 15 y para la actividad 2 se busca que observe que la sucesión numérica se aproxima a 15.5 por la izquierda y a 14 por la derecha. (DG3b)
- En la actividad 1 se pretende desarrollar la coordinación de la concepción proceso en el dominio cuando x tiende a 3, con la concepción proceso en las imágenes cuando $f(x)$ tiende a 15. En la actividad 2, pretendemos que el estudiante observe que las imágenes se aproximan a dos números. (DG3c)

En la Figura 25 se muestra cómo Adrián justifica la interacción deseada del alumno a partir de la manera en la que se presentan las actividades así como de su intención, pues al inicio menciona que ambas actividades se presentan de forma numérica y explica la diferencia entre ellas, así como su intencionalidad con respecto a los números a los que se aproximan y las estructuras mentales de la descomposición genética que se promueven en dichas actividades.

Otro ejemplo de evidencia de conocimiento por parte de Adrián con respecto a la interacción del alumno con el contenido se encuentra en su respuesta a la pregunta 6 del cuestionario, en ella, Adrián hace explícita la forma en la que un alumno logra contruir la concepción proceso de límite a partir de las contrucción de la concepción proceso de las suscesiones numéricas en el dominio como en las imágenes, lo anterior se observa en la siguiente transcripción:

Pregunta 6: Varias veces en tu explicación de las actividades (p.e. páginas 27, 28, 29) mencionas "concepción proceso en el dominio" o "concepción proceso en las imágenes". ¿Podrías explicarnos a qué te refieres?

Adrián: Hay dos construcciones mentales que el estudiante debe realizar para construir una concepción proceso de límite, estas dos construcciones mentales son la concepción proceso de las sucesiones numéricas tanto en el dominio como en las imágenes, en otras palabras, pues, esto sucede

> cuando el estudiante desarrolla la habilidad de no solo calcular un número finito de valores aproximándose a un valor fijo, sino que puede realizar cálculos e imaginar lo que sucede con un número infinito de valores.

De igual manera como se puede observar en la transcripción, Adrián describe la manera en la que el alumno interactua con el contenido para mostrar que ya cuenta con las construcciones mentales que menciona, son necesarias para la concepción proceso de limite, dicha descripción la realiza al mencionar que “puede realizar cálculos e imaginar lo que sucede con un número infinito de valores”.

Otra manera en la que Adrián muestra evidencia de conocimiento con respecto a la interacción del estudiante con el contenido, se encuentra en su descripción de la actividad 9 (Ver Figura 26), en dicha actividad se le solicita al alumno que a partir de la gráfica de una función determine el valor de dicha función en ciertos puntos.

Figura 26.

Descripción actividad 9.

La actividad 9 se presenta de manera gráfica y se busca que los estudiantes refuercen las ideas centrales de las actividades que realizaron previamente.

- Se busca que los estudiantes sean capaces de determinar el valor de la función en determinados puntos, dada su representación gráfica, mediante el apoyo de trazos de rectas, en otras palabras, se busca que el estudiante determine los valores de las imágenes de la función para ciertos valores del dominio con el apoyo de la gráfica. (DG1)

Como ya se menionó, la descripción previa es una evidencia de conocimiento sobre la itneracción del alumno con el contenido, pues Adrián explica la forma en la que se desea que el alumno interactue con la actividad, en particular con la gráfica, para poder dar respuesta a lo solicitado, en este caso, dicha interacción se realiza con el trazo de rectas como apoyo para determinar el valor de cierta función en un punto dado.

En la Tabla 4 se muestra de manera resumida el conocimiento por parte de Adrián con respecto al conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas en las descripciones de las 16 actividades, recordando que las actividades 13, 14, 15 y 16 corresponden al cuestionario final propuesta por Adrián.

Tabla 4.

Distribución de los conocimientos de Adrián en las categorías del KFLM

Actividad	TA	FyD	IEC	IyE
1 y 2	E*		E*	
3, 4 y 5	E*		E	
6	E*		E*	
7	E*		E*	
8	E*		E*	
9	E*		E	
10	E*		E	
11	E*		E	
12	E*		E*	
13	E*		E	
14	E*		E	
15	E*		E	
16	E*		E	

Nota. TA se refiere a la categoría teorías de aprendizaje, FyD a la categoría fortalezas y dificultades, IEC a la categoría interacción del estudiante con el contenido, IE a la categoría intereses y expectativas de aprendizaje, E hace referencia a evidencia de conocimiento y E* a una descripción que se volvió evidencia de conocimiento gracias a las respuestas de Adrián en el cuestionario.

Como se observa en la Tabla 4, Adrián no muestra conocimiento acerca de las categorías fortalezas y dificultades, así como en la categoría de intereses y expectativas de aprendizaje, contrario a las categorías teorías de enseñanza e interacción del estudiante con el contenido, lo cual se esperaba, pues al tener como base la teoría APOE, la cual es una teoría de enseñanza, para diseñar las actividades, se considera una descomposición genética que marca la forma en la que se desea que el estudiante interactúe con el contenido para que logre la construcción del conocimiento sin tantas dificultades, pues estas se consideran durante la creación de la descomposición genética.

Es importante aclarar que, para nosotros, Adrián muestra indicio de conocimiento acerca de las dificultades y fortalezas que involucran el proceso de aprendizaje del concepto de límite, para mostrar esto se presente la respuesta de Adrián a la pregunta 3 del cuestionario.

> Pregunta 3: ¿Cómo se relacionan las actividades y sus objetivos con lo que se espera en el aprendizaje e interacción del alumno?
>
> Adrián: Que los alumnos construyan su aprendizaje de acuerdo con la secuencia trazada, ya que una actividad va ligada con la otra, además de que no se les complique trabajar en algunas de las representaciones en las que se presentan dichas actividades

Como se observa, Adrián muestra saber que existen dificultades al mencionar “no se les complique trabajar en algunas representaciones”, pero no las explicita, por lo que no se considera que muestre evidencia de dicho conocimiento, además de que Adrián no diseñó la descomposición genética utilizada, sino que se basó en la creada por Cottril y en las actividades de Pons. Este indicio de conocimiento no se muestra en la Tabla 4, pues en ninguna descripción se encontró referencia a dichas dificultades o fortalezas.

Conocimiento De Los Estándares De Aprendizaje De Las Matemáticas. Recordemos que este subdominio incluye conocimientos relacionados con las categorías: contenidos que se requieren enseñar, nivel de desarrollo conceptual y procedimental y secuenciación de los temas.

En cuanto a los conocimientos relacionados con la categoría, contenidos que se requieren enseñar, afirmamos que Adrián muestra evidencia de poseer elementos correspondiente a dicha categoría, pues durante la descripción de las actividades, así como de sus objetivos, Adrián menciona en diversas ocasiones lo que se desea que los alumnos aprendan, es decir, dicho de otra forma, lo que se les debe enseñar. Es importante destacar que, aunque en las descripciones Adrián hace explícito el contenido que se desea enseñar con las actividades, la evidencia de dicho conocimiento por parte de Adrián se encuentra en la descripción de la población a la que se le aplico la secuencia de actividades (Ver Figura 27).

Figura 27.

Descripción de los temas por parte de Adrián.

> El programa de estudios para Bachillerato Tecnológico para cuarto semestre marca la materia de Cálculo Diferencial y los temas a abordar se presentan en el siguiente orden: Pre-cálculo (Números reales, intervalos, desigualdades), Funciones (Dominio y contra dominio, clasificación, comportamiento, operaciones), Límites (Límite de una función, propiedades, continuidad de una función) y Derivada (Razón de cambio promedio de interpretación geométrica, derivación de funciones, derivadas sucesivas, comportamiento). Cabe señalar que el programa de estudios menciona "Tratamiento intuitivo: numérico, visual y algebraico de los límites" (SEP, 2017, p.13). Podemos decir que se espera que el tema de límites se aborde desde una concepción dinámica, que no considera la concepción métrica, no obstante, consideramos que si se guía a los estudiantes a la construcción del concepto de límite incluyendo la concepción métrica estarían más próximos a la comprensión de la definición formal del límite.

Nota. SEP significa Secretaría de Educación Pública, institución en México encargada de normar la educación.

Como se puede observar en la Figura 27, Adrián hace explícita que en el programa de estudios se considera como contenido al tratamiento intuitivo: numérico, visual y algebraico de los límites, así como los temas específicos que corresponden a todos los temas considerados en la materia de Cálculo Diferencial. Lo anterior, ayuda a justificar la evidencia de conocimiento por parte de Adrián con respecto a los contenidos que se desea enseñar. Otro elemento que ayuda a evidenciar este conocimiento es la propia descomposición genética, la cual se construye teniendo como parte central el concepto que se desea construir, así como todo lo que lo rodee.

Por otro lado, como ya se mencionó, durante las descripciones de las actividades, Adrian también hace mención sobre los contenidos que se desean enseñar. En un principio todas estas menciones fueron catalogadas como indicio de conocimiento, pero después de lo descrito con la Figura 27 y en la descomposición genética utilizada por Adrián fueron cambiadas a evidencia de conocimiento.

A continuación, se muestran algunos ejemplos de dichas descripciones. Los ejemplos se presentarán en orden con respecto a las actividades que corresponde, y conforme se vayan presentando los ejemplos, el lector podrá observar que dichas descripciones también muestran el proceso por el cual se pretende que el alumno construya el concepto de límite, dicho proceso corresponde a la enseñanza y construcción de conceptos que se necesitan para comprender las concepciones de límite que Adrián espera construir con los alumnos.

Este primer ejemplo (Ver Figura 28) corresponde a una parte de la descripción de las actividades 1 y 2. En dichas actividades se le proporcionan al alumno tablas donde se muestra la imagen de algunos valores próximos a 3 bajo ciertas funciones y se le pide que responda preguntas a partir de dicha tabla.

Figura 28.

Parte de la descripción de las actividades 1 y 2.

Las dos actividades anteriores pretenden que los estudiantes logren lo siguiente:

- Que el estudiante observe que las sucesiones numéricas en el dominio se aproximan a un número, en el caso de la actividad 1 es a 3, y en la segunda actividad es a 4. (DG3a)
- Que el estudiante asocie la aproximación en las imágenes de una sucesión numérica a un número fijo, en el caso de la actividad 1 es a 15 y para la actividad 2 se busca que observe que la sucesión numérica se aproxima a 15.5 por la izquierda y a 14 por la derecha. (DG3b)

En la Figura 28 se observa que el contenido al que se refiere en dicha descripción y que se pretende atacar con las actividades 1 y 2 es la idea de aproximación incluyendo la aproximación lateral, y dichos contenidos forman parte del tema límite de una función y sus propiedades.

El siguiente ejemplo (Ver Figura 29) corresponde a una parte de la descripción de las actividades 3, 4 y 5, en particular a las actividades 4 y 5, en dicha actividad, se le pide al estudiante completar una tabla con las imágenes de números próximos a 4 (en la actividad 4) y a 0 (en la actividad 5) bajo ciertas funciones y a partir de esto responder preguntas.

Figura 29.

Descripción de actividad 4 y 5

De la misma manera, en la actividad 4 pretendemos estimular la capacidad de coordinar la concepción proceso de las sucesiones numéricas en el dominio, cuando x tiende a 4, con la concepción proceso de las sucesiones numéricas en las imágenes cuando $f(x)$ tiende a -2. Finalmente, en la actividad 5 se pretende estimular la capacidad de coordinar la concepción proceso de las sucesiones numéricas en el dominio, cuando x tiende a 0 con la concepción proceso de las sucesiones numéricas en las imágenes $f(x)$ y note que las imágenes se aproximan a dos números. (DG3c)

En este ejemplo, como se puede notar en la Figura 29, Adrián explica que con la actividad se desea estimular la coordinación entre las concepciones procesos en el dominio y en las imágenes, es decir, se pretende lograr que el alumno a partir de esta actividad comprenda la relación que existe entre las aproximaciones que se observan en el dominio y las aproximaciones que se observan en la imagen, lo cual es un contenido que se requiere enseñar para poder comprender la definición formal de límite.

Otro momento donde se observa el conocimiento acerca de lo contenidos que se requieren enseñar, lo encontramos en una parte de la descripción de la actividad 6 (Ver Figura 30), en esta actividad se le proporciona al alumno la gráfica de una función y se le pide responder preguntas a partir de dicha gráfica, este ejemplo muestra que Adrián sabe que se debe enseñar la relación que hay entre un punto, su imagen bajo una función y su gráfica.

Figura 30.

Parte de la descripción de la actividad 6

> La finalidad de la actividad 6 es:
>
> - En el inciso a) que los estudiantes sean capaces de determinar el valor de la función en un punto dada su gráfica. (DG1) y (DG2)

El siguiente ejemplo, corresponde a una parte de la descripción de la actividad 8 (Ver Figura 31), en dicha actividad, de igual forma se le proporciona al alumno una gráfica, en este caso de un función constante, y se le pide responder preguntas utilizando dicha gráfica, en este caso, el contenido que se muestra que se requiere enseñar corresponde a la definición de una función constante y que se observe gráficamente que en efecto, a cada valor del dominio le corresponde siempre el mismo valor en las imágenes.

Figura 31.

Parte de la descripción de la actividad 8

> La actividad 8, al igual que la actividad 4, pretende que el estudiante observe que cualquier elemento del dominio evaluado en la función siempre va a tener una imagen constante.

Un ejemplo más donde Adrián muestra conocimiento de conocer contenido que se requiere enseñar se encuentra en la descripción que introduce a las actividades 10, 11 y 12 (Ver Figura 32)

Figura 32.

Descripción de introducción a las actividades 10, 11 y 12.

> Las actividades del 10 al 12 se presentan en modo numérico y buscan favorecer la concepción métrica del límite de una función en un punto a través de las aproximaciones laterales, tanto en el dominio como en el rango, en términos de desigualdades, según la propuesta de Pons (2014).

En la descripción de la Figura 32, Adrián explica la representación que es utilizada en las actividades 10, 11 y 12 así como el contenido que se busca enseñar o construir con estas actividades, el cual corresponde al concepto de aproximación, pero ahora de manera métrica, utilizando las desigualdades.

El siguiente ejemplo (Ver Figura 33), corresponde a una parte de la descripción de la actividad 12, en ella se le presenta al alumno una tabla con cuatro columnas, la cual debe completar, la primera y la segunda columnas ya se encuentran llenas y corresponden a algunos valores cercanos a 2 y a sus imágenes bajo la función $x^2 - 1$, las columnas que el alumno debe completar corresponden a las métricas entre los próximos a 2 y las imágenes próximas a 3.

Figura 33.

Parte final de la descripción de la actividad 12

> La pregunta 4 busca que el estudiante manifieste formalmente la existencia del límite teniendo en cuenta, que cuando los valores de las diferencias en valor absoluto entre los valores de x y 2 se aproximan a 0, los valores de las diferencias en valor absoluto entre los valores de $f(x)$ y 3 también se aproximan a 0, por lo tanto cuando x tiende a 2, el límite de la función $f(x)$ es 3. (DG5)

En la Figura 33, Adrián muestra conocimiento acerca del contenido que se espera construir, en este caso el del uso de la relación entre las aproximaciones en el dominio y las aproximaciones en las imágenes, como justificación de la existencia de un límite, lo que ayudará a comprender los cuantificadores y su relación en la definición formal de límite.

Como se mencionó antes de comenzar a presentar los ejemplos previos, la forma en la que fueron presentados corresponde al orden de las actividades, y se puede notar que las descripciones también muestran el proceso por el cual se pretende que el alumno construya el concepto de límite, es decir la secuenciación de los temas y contenidos necesarios para concluir con la identificación y afirmación de que un número sea o no sea el límite de una función, lo cual nos permite afirmar que existe evidencia de conocimiento por parte de Adrián correspondiente a la categoría secuenciación de los temas.

Otra evidencia sobre conocimiento en la secuenciación de los temas también se encuentra en la descripción que da Adrián con respecto a los planes y programas de la SEP (Ver Figura 34), pues en ella hace explícita dicha secuenciación, ya que presenta el contenido de la materia de cálculo diferencial.

Figura 34.

Descripción del contenido de la materia de cálculo diferencial

> El programa de estudios para Bachillerato Tecnológico para cuarto semestre marca la materia de Cálculo Diferencial y los temas a abordar se presentan en el siguiente orden: Pre-cálculo (Números reales, intervalos, desigualdades), Funciones (Dominio y contra dominio, clasificación, comportamiento, operaciones), Límites (Límite de una función, propiedades, continuidad de una función) y Derivada (Razón de cambio promedio de interpretación geométrica, derivación de funciones, derivadas sucesivas, comportamiento). Cabe señalar que el programa de estudios menciona "Tratamiento intuitivo: numérico, visual y algebraico de los límites" (SEP, 2017, p.13).

Con respecto a la categoría que incluye el conocimiento acerca del nivel de desarrollo conceptual y procedimental esperado, podemos afirmar que Adrián muestra evidencia del conocimiento correspondiente a esta categoría, pues recordemos que, la secuencia de actividades se encuentra basada en una Descomposición Genética que marca la forma en la que se construye el concepto de límite desde su concepción métrica y dinámica.

La evidencia de dichos conocimientos se encuentra justificada en la misma Teoría APOE y en la Descomposición Genética utilizada (Ver Figura 35), pues, en ella se encuentra de manera explícita en términos de la Teoría APOE (acción, proceso, objeto, esquema, encapsulación y desencapsulación) el nivel conceptual y procedimental esperado con respecto a la construcción del concepto de límite. Esto lo podemos encontrar en todas las descripciones de las actividades, pues al final de cada una de ellas Adrián menciona la parte de la descomposición genética a la que se desea atacar.

Figura 35.

Descomposición Genética utilizada por Adrián

1.- La acción de evaluar f en un solo punto x que se considera cercano o incluso igual a a.

2.- La acción de evaluar la función f en algunos puntos, cada uno sucesivamente más cercano a a que el anterior.

3.- Construcción de un esquema coordinado de la siguiente manera.

a) Interiorización de la acción del Paso 2 para construir un proceso en el dominio en el cual x se aproxima a a.
b) Construcción de un proceso en el rango en el cual $f(x)$ se aproxima a L.
c) Coordinación de (a), (b), mediante f. Es decir, la función f se aplica al proceso de x aproximándose a a para obtener el proceso de $f(x)$ aproximándose a L.

4.- Realizar acciones sobre el concepto de límite hablando, por ejemplo, sobre límites de combinaciones de funciones. De esta manera, el esquema de 3 se encapsula para convertirse en un objeto.

5.- Reconstruir los procesos de 3 (c) en términos de intervalos y desigualdades. Esto se realiza introduciendo estimaciones numéricas de la cercanía de las aproximaciones, en símbolos, $0 < |x-a| < \delta$ y $|f(x)-L| < \varepsilon$.

6.- Aplicar el esquema de los cuantificadores para reconstruir el proceso de los niveles anteriores para obtener la definición formal de límite.

7.- Una concepción completa de $\epsilon - \delta$ aplicada a situaciones específicas.

Para poder mostrar de mejor manera esta evidencia de conocimiento acerca del nivel de desarrollo conceptual y procedimental, mostraremos a continuación las descripciones que Adrián da con respecto a lo que en su trabajo se entenderá como concepción acción, concepción objeto y concepción proceso.

Con respecto a la concepción acción, Adrián describe lo que se tiene en la Figura 36.

Figura 36.

Descripción de Adrián sobre la concepción acción

> Si un estudiante desarrolla la capacidad de realizar un número finito de cálculos, de manera externa, utilizando una función algebraica o gráfica, habrá construido una concepción acción.
>
> En otras palabras, un individuo presenta una concepción acción de límite, cuando no puede ir más allá de calcular un número finito de valores de la función en puntos cercanos a a, cuando una variable se aproxima a una cantidad fija.

Una descripción de actividades donde Adrián refiere a esta concepción acción, la encontramos para la actividad 16 (Ver Figura 37), en esta se le proporciona al alumno la gráfica de una función por partes, donde a partir de indicaciones donde se le pide que tome valores determinados de x cercanos a 1 y mencione a donde se aproximan sus imágenes y así pueda determinar el límite de la función cuando x tiende a 1.

Figura 37.

Descripción de actividad 16.

> Finalmente, el cuarto problema se presenta de manera gráfica.
> Para que el estudiante resuelva el problema, debe ser capaz de determinar el valor aproximado de la imagen para cada valor que toma x en el dominio, apoyándose en la gráfica de la función. Por lo tanto, si el estudiante es capaz de determinar los valores aproximados de las imágenes para cada valor de x en el dominio, diremos que el estudiante posee una concepción acción del concepto límite. (DG3c)

Adrián afirma que en esta actividad que para que el alumno resuelva la actividad 16, debe poseer la concepción acción porque durante la descripción de la Descomposición Genética Adrián comenta lo siguiente (Ver Figura 38):

Figura 38.

Actividades que permiten la concepción acción.

Para Pons (2014) las actividades que permiten desarrollar este tipo de concepción en los estudiantes son en las que se les pide que realicen actividades como "completa la tabla" o "Elige un valor de la x, y calcula el valor de la función $f(x)$ en ese punto". Finalmente, un estudiante desarrolla una concepción acción al realizar actividades donde se le exige realizar un cálculo simple.

Con respecto a la concepción proceso de límite, Adrián nos describe lo siguiente (Ver Figura 39):

Figura 39.

Descripción de la concepción proceso.

Si un estudiante desarrolla la habilidad de ir más allá del cálculo de un número finito de valores aproximándose a un valor fijo, es decir, si es capaz de realizar cálculos e imaginar lo que sucede con un número infinito de pasos, entonces habrá alcanzado una concepción proceso. Por lo tanto, los estudiantes deben desarrollar una concepción proceso de las sucesiones de números en el dominio y una concepción proceso de las sucesiones de números en las imágenes de la función. En este caso, según Arnon et al. (2013) se pueden crear nuevos procesos al coordinar dos o más procesos.

Un estudiante desarrolla una concepción proceso del límite cuando logra coordinar dos concepciones proceso de las sucesiones numéricas (la del dominio, con la de las imágenes de la función) empleando la función para coordinarlos mentalmente. En la descomposición genética se encuentra en el paso 3 denominado "esquema coordinado".

Un ejemplo de lo mencionado en la Figura 39 se encuentra en la descripción de la actividad 6, en ella, se le proporciona al alumnos la gráfica de una función por partes, y se le pide que responda preguntas a partir de dicha gráfica, con el objetivo de que afirme la no existencia del límite al no ser iguales las aproximaciones laterales (Ver Figura 40).

Figura 40.

Descripción actividad 6

En el inciso a) que los estudiantes sean capaces de determinar el valor de la función en un punto dada su gráfica. (DG1) y (DG2)

En el inciso b) que los estudiantes coordinen la concepción proceso de la sucesión numérica en el dominio (DG3a) cuando x se aproxima a 0 por la izquierda con la concepción proceso de la sucesión numérica en las imágenes (DG3b) cuando $f(x)$ se aproxima a 1.

En el inciso c) se busca estimular en los estudiantes la coordinación de la concepción proceso de la sucesión numérica en el dominio (DG3a) cuando x se aproxima a 0 por la derecha con la concepción proceso de la sucesión numérica en las imágenes (DG3b) cuando $f(x)$ se aproxima a -3.

En el inciso d) se busca estimular en los estudiantes la coordinación de la concepción proceso de la sucesión numérica en el dominio (DG3a) cuando x se aproxima a 0, con la concepción proceso de la sucesión numérica en las imágenes $f(x)$ (DG3b) y note que las imágenes se aproximan a dos números diferentes. (DG3c)

Como se observa, en esta descripción Adrián muestra lo que refería en su explicación de la concepción proceso, pues menciona lo referente a esta concepción tanto para el dominio como para las imágenes, así como la coordinación de estas dos concepciones para lograr la concepción proceso del límite.

Las razones de las afirmaciones que Adrián realiza en aquellas actividades que promueven la construcción de esta concepción proceso, se encuentran en lo menciona durante la descripción de la descomposición genética (Ver Figura 41).

Figura 41.

Descripción de la construcción de la concepción proceso.

Pons (2014) menciona que las tareas o actividades que les permiten a los estudiantes desarrollar una concepción proceso de las sucesiones de números, tanto en el dominio como en las imágenes, son en las que se les pide que respondan preguntas como "¿A qué número se aproxima x?" "¿A qué número se aproxima la función $f(x)$?"

En otras palabras, un estudiante desarrolla una concepción proceso de las sucesiones numéricas, al realizar actividades en las que se les exige hacer un cálculo que va más allá de calcular un número finito de valores de la función.

Un estudiante desarrolla una concepción proceso del límite cuando logra coordinar dos concepciones proceso de las sucesiones numéricas (la del dominio, con la de las imágenes de la función) empleando la función para coordinarlos mentalmente. En la descomposición genética se encuentra en el paso 3 denominado "esquema coordinado".

Para Pons (2014) las tareas o actividades que les permiten a los estudiantes desarrollar una concepción proceso del límite, son en las que se les pide "Describe el comportamiento de la función $f(x)$ con relación al comportamiento de la variable x".

En cuanto a la concepción objeto, Adrián en la Figura 42 nos explica a qué se refiere.

Figura 42.

Descripción de la concepción objeto

Además, se dice que un estudiante ha construido una concepción de objeto de límite cuando logra pensar en el límite en un punto de la suma de dos funciones como objetos, forma la suma coordinado los procesos de las dos funciones y encapsula el proceso resultante para obtener el límite de la función suma.

Para este caso no se encontró algún ejemplo en la descripción de las actividades, pero aun así se considera, pues en la Figura 42 Adrián explicita a que se refiere en términos de la teoría APOE y de la Descomposición Genética la concepción objeto del límite.

En la Tabla 5, se muestra de manera resumida el conocimiento por parte de Adrián con respecto al conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas

en las descripciones de las 16 actividades, recordando que las actividades 13, 14, 15 y 16 corresponden al cuestionario final propuesto por Adrián.

Tabla 5.

Distribución de los conocimientos de Adrián en las categorías del KMLS

Actividad	CRE	NDCP	ST
1 y 2	E*	E*	
3, 4 y 5	E*	E*	
6	E*	E*	
7	E*	E*	
8	E*	E*	
9	E*	E*	
10	E*	E*	
11	E*	E*	
12	E*	E*	
13	E*	E*	
14	E*	E*	
15	E*	E*	
16	E*	E*	

Nota. CRE se refiere a la categoría contenido que se requiere enseñar, NDCP a la categoría nivel de desarrollo conceptual y procedimental, ST a la categoría secuenciación de los temas y E* a una descripción que se volvió evidencia de conocimiento gracias lo descrito por Adrián previo a la descripciones de las actividades.

Como se puede observar en la Tabla 5, aunque las actividades están ordenadas de manera secuencial, ninguna actividad presenta conocimiento con respecto a la secuenciación de los temas, esto debido a que, la secuenciación de las actividades está basada en la descomposición genética y además la evidencia de conocimiento con respecto a esta categoría se encuentra en la descripción que realiza Andrés sobre la materia del cálculo diferencial en bachillerato. Por otro lado, con respecto a la categoría de contenidos que se requieren enseñar, todas las actividades muestran ser evidencia de conocimiento, pues en todas las descripciones Adrián hace explicito el contenido que se desea que el alumno construya, y dichas evidencias son apoyadas por la descripción de la materia de la materia de cálculo, lo mismo sucede con la categoría nivel de desarrollo conceptual y procedimental esperado, solamente que en este caso, la evidencia es apoyada por la descomposición genética de Cottril y la propuesta de Pons.

Conocimiento De La Enseñanza De Las Matemáticas. Recordemos que este subdominio incluye el conocimiento que se identifica con las categorías teorías de enseñanza de las matemáticas, recursos digitales y físicos para la enseñanza y estrategias, técnicas, tareas y ejemplos para la enseñanza

Con respecto a la categoría teorías de enseñanza, se considera que Adrián presenta evidencia de conocimiento, pues la descomposición genética y la propuesta de Pons que utiliza como base para su diseño, es considerada en el trabajo como un modelo de enseñanza, pues se convierte en una guía que marca las características que las actividades deben tener para poder lograr los objetivos marcados en la descomposición genética.

La evidencia de conocimiento mencionada en el párrafo previo se encuentra principalmente en las respuestas de Adrián dadas en el cuestionario, en particular a las preguntas 1, 2 y 3. Dichas preguntas y respuestas se presentan a continuación.

Pregunta 1: Hemos notado que Pons (2014) es el principal referente en tu tesis e incluso notamos que tu diseño tiene aportes de su trabajo. ¿Hasta qué punto el diseño es fiel a lo propuesto por Pons y en qué medida propusiste modificaciones en su diseño? Por favor comenta con detalle todos aquellos elementos que permitan comprender a profundidad tus propuestas o modificaciones.

Adrián: Pons aporta en el diseño de las actividades de la secuencia didáctica, digamos que es la mayor aportación que tiene Pons dentro de mi tesis, es precisamente en el diseño de las actividades, ya que, en el diseño de sus actividades involucra los primeros tres pasos de la descomposición genética de Cottril, además hay una adaptación del paso cuarto paso y un acercamiento al quinto paso, a lo que el llama la concepción métrica, una de las aportaciones que también en el trabajo de tesis es los modos de representación […] mismas que también fueron consideradas en el diseño de la secuencia didáctica.

Pregunta 2: ¿Cómo influyó la Descomposición Genética en la generación de los objetivos que mencionas en tus actividades y qué elementos de los objetivos no se relacionan con la Descomposición Genética?

Adrián: La descomposición genética, es la herramienta teórica que permite diseñar las actividades de la secuencia didáctica, y por ende de los objetivos de cada una de ellas, por lo tanto, no puede haber objetivos en dichas actividades que no estén en la descomposición genética.

Pregunta 3: ¿Cómo se relacionan las actividades y sus objetivos con lo que se espera en el aprendizaje e interacción del alumno?

Adrián: Que los alumnos construyan su aprendizaje de acuerdo a la secuencia trazada, ya que una actividad va ligada con la otra, además de que no se les complique trabajar en algunas de las representaciones en las que se presentan dichas actividades

Como se observa, en la respuesta de la pregunta 1, Adrián hace explícita la influencia que tiene la propuesta de Pons en el diseño de las actividades, así como los objetivos particulares con respecto a la concepción métrica de límite que se espera alcanzar con dichas actividades. En la pregunta 2, se hace explícita la importancia de la descomposición genética, y como el hecho de que esta es la base principal para las actividades y sus objetivos, tomando así el papel de guía que se mencionó previamente. Para la pregunta 3, Adrián explica la relación entre los objetivos y las actividades, haciendo explícito que la intencionalidad de la secuencia de las actividades y de las representaciones en las que se presentan cada una de ellas, es la de lograr la construcción del aprendizaje y evitar complicaciones en el proceso. Es por ello que en conjunto, estas tres respuestas confirman la evidencia de conocimiento por parte de Adrián con respecto al uso de la propuesta de Pons y la descomposición genética como parte de una teoría de enseñanza.

Por otro lado, dado que las actividades son diseñadas con un propósito específico, y que este propósito se encuentra relacionado con la descomposición genética y su intención, es justificado a partir de que se basaron de la propuesta de Pons, todas las actividades se consideran como evidencia de conocimiento por parte de Adrián con respecto a la categoría de estrategias, técnicas, tareas y ejemplos para la enseñanza.

Un ejemplo de este conocimiento lo podemos observar en el inicio de la descripción de las actividades 3, 4 y 5 (Ver Figura 43).

Figura 43.

Inicio de la descripción 3, 4 y 5.

> Las tareas 3, 4 y 5 se presentan en modo algebraico-numérico según los tipos de representación considerados en (Pons, 2014).
> Algebraico por la forma en que se presenta la función y numérico por los datos que necesita el estudiante para lograr responder la segunda pregunta. En las actividades 3 y 5, están expresados en una tabla y se diferencian en la coincidencia o no coincidencia de las aproximaciones laterales de sus imágenes.
> En la actividad 4 pretendemos que el estudiante observe que la imagen de cualquier elemento del dominio evaluado en la función siempre será constante.

Como se observa en la Figura 43, Adrián afirma que las actividades 3,4 y 5 se diseñaron a partir de los tipos de representación que Pons considera, de igual forma, justifica lo que se espera lograr con cada actividad, es por ello que esto se considera como evidencia de conocimiento acerca de actividades y ejemplos para la enseñanza.

Otro ejemplo de evidencia de conocimiento con respecto a esta misma categoría la encontramos en la descripción de las actividades 10, 11 y 12 (Ver Figura 44)

Figura 44.

Inicio de la descripción a las actividades 10, 11 y 12

> Las actividades del 10 al 12 se presentan en modo numérico y buscan favorecer la concepción métrica del límite de una función en un punto a través de las aproximaciones laterales, tanto en el dominio como en el rango, en términos de desigualdades, según la propuesta de Pons (2014).

En la Figura 44 observamos que Adrián describe el registro en el que se presentan las actividades 10, 11 y 12, además de explicitar lo que se busca favorecer al presentar dichas actividades de esa forma a partir de la propuesta de Pons. Esta descripción es considerada como evidencia de conocimiento sobre la categoría de actividades y ejemplos para la enseñanza, pues, Fernando justifica la razón por la que ese tipo de actividades presentadas de esa forma ayuda a alcanzar los objetivos de la descomposición genética, en particular la concepción métrica de límite.

De igual manera, notamos que Adrián no solamente muestra evidencia de conocimiento con respecto a ejemplos que sirven para la enseñanza, sino también de contraejemplos relacionados con el tema de límites, ya que, en las actividades diseñadas por Adrián, se presentan ejemplos de funciones que tienen límite cuando x tiene a un x_0 específico, de igual forma se presenta una función donde se afirma que el límite no existe, dado que los límites laterales son distintos. Es por ello por lo que en todas las descripciones se puede encontrar dicho conocimiento, pues en cada descripción correspondiente a una actividad, Adrián explica, la intencionalidad de la actividad con respecto a la función considerada en la misma.

En las siguientes descripciones que se presentan a continuación, se muestran algunas donde se encuentra la evidencia de lo mencionado previamente con respecto a las características de ciertas funciones y de la existencia del límite.

En esta descripción (Figura 45) se hace referencia a una función constante presentada en la actividad 4:

Figura 45.

Inicio de la descripción de la actividad 4.

En la actividad 4 pretendemos que el estudiante observe que la imagen de cualquier elemento del dominio evaluado en la función siempre será constante.

Lo que corresponde a un ejemplo de evidencia de conocimiento sobre ejemplos que sirven para enseñar funciones, pues durante la descripción se observa que Adrián explicita la forma en la que la actividad ayudará al alumno a comprender la definición de una función constante.

En el siguiente extracto (Figura 46) se hace referencia a la función por partes presentada en la actividad 6 de forma gráfica.

Figura 46.

Finalidad de la actividad 6.

La finalidad de la actividad 6 es:

- En el inciso a) que los estudiantes sean capaces de determinar el valor de la función en un punto dada su gráfica. (DG1) y (DG2)
- En el inciso b) que los estudiantes coordinen la concepción proceso de la sucesión numérica en el dominio (DG3a) cuando x se aproxima a 0 por la izquierda con la concepción proceso de la sucesión numérica en las imágenes (DG3b) cuando $f(x)$ se aproxima a 1.
- En el inciso c) se busca estimular en los estudiantes la coordinación de la concepción proceso de la sucesión numérica en el dominio (DG3a) cuando x se aproxima a 0 por la derecha con la concepción proceso de la sucesión numérica en las imágenes (DG3b) cuando $f(x)$ se aproxima a -3.
- En el inciso d) se busca estimular en los estudiantes la coordinación de la concepción proceso de la sucesión numérica en el dominio (DG3a) cuando x se aproxima a 0, con la concepción proceso de la sucesión numérica en las imágenes $f(x)$ (DG3b) y note que las imágenes se aproximan a dos números diferentes. (DG3c)

En la figura 46 Adrián hace explicita la intencionalidad de la actividad, tanto para ejemplificar la inexistencia de un límite a raíz de que sus límites laterales sean distintos, como para hallar el valor de una función en un punto dado a partir de su gráfica. Es por ello por lo que, esto es considerado como ejemplo de evidencia de conocimiento relacionado a la categoría de actividades para la enseñanza.

Con respecto a evidencia de conocimiento correspondiente a estrategias y técnicas para la enseñanza, dicha evidencia se encontró en las conclusiones del trabajo de Adrián, específicamente en la sección de sugerencias pedagógicas, un ejemplo de evidencia relacionado con este conocimiento lo podemos encontrar en la Figura 47, donde Adrián realiza sugerencias con respecto al refuerzo de conocimientos.

Figura 47.

Reflexiones finales de Adrián correspondientes al refuerzo de conocimientos.

Señalamos que es de suma importancia que los profesores consideren reforzar las construcciones de conceptos previos como lo es el concepto de función, trabajar con actividades en las que se aborden diferentes tipos de funciones como la constante y las definidas por partes. También recomendamos abordar el concepto de valor absoluto y la comparación de cantidades decimales, ya que, sin ellas, los estudiantes no lograrán concepciones sólidas de objetos matemáticos más complejos como lo es el límite de una función.

Otro ejemplo, de sugerencias pedagógicas, es la presentada en la Figura 48, en este caso, corresponde a sugerencias relacionadas con modificaciones en la secuencia de actividades diseñada.

Figura 48.

Reflexiones finales de Adrián con respecto a modificaciones en la secuencia

Lo anteriormente expuesto nos orientó a reflexionar que las actividades propuestas resultaron adecuadas para la construcción de la concepción proceso de la noción dinámica del límite funcional, pero consideramos que es necesario cambiar el orden de implementación de algunas actividades de la secuencia. Una propuesta es el intercambio de la actividad 6 por la actividad 7, y de la actividad 10 por la actividad 12. También, consideramos que la actividad 9 puede ser resuelta antes de abordar la actividad 6. Recomendamos incorporar tareas para casa con ejercicios similares, para reforzar y encaminarlos hacia la definición formal de límite.

En ambas (Figuras 47 y 48) Adrián menciona estrategias o acciones que sugiere al docente realizar para complementar la secuencia, o incluso para realizar modificaciones en el orden de las actividades para lograr reforzar la construcción de los objetivos de la descomposición genética, dado que estas reflexiones por parte de Adrián fueron reportadas después de aplicar la secuencia de actividades y de analizar las respuestas de los estudiantes a las mismas, se consideran dichas reflexiones como evidencia de conocimiento con respecto a estrategias y técnicas de enseñanza.

En la Tabla 6, se presenta un resumen sobre los conocimientos que Adrián puso en juego durante el diseño de la secuencia de actividades, todos estos relacionados a las categorías del KMT.

Tabla 6.

Distribución de los conocimientos de Adrián en las categorías del KMT

Actividad	**TEM**	**RDyFE**	**ETTyEE**
1 y 2	E*		E
3, 4 y 5	E*		E
6	E*		E
7	E*		E
8	E*		E
9	E*		E
10	E*		E
11	E*		E
12	E*		E
13	E*		E
14	E*		E
15	E*		E
16	E*		E

Nota. TEM se refiere a la categoría teorías de enseñanza de las matemáticas, RDyFE refiere a la categoría recursos digitales y físicos para la enseñanza, las siglas ETTyEE se refiere a la categoría estrategias, técnicas, tareas y ejemplos para la enseñanza, la sigla E hace referencia a las descripciones que muestran evidencia de conocimiento y la sigla E* a las descripciones que dicha evidencia de conocimiento es confirmada por las respuestas de Adrián en el cuestionario.

En la Tabla 6, se puede observar que, durante el diseño de la secuencia de actividades, Adrián solamente mostró evidencia de conocimiento en las categorías correspondientes a teorías de enseñanza y a estrategias, técnicas, tareas y ejemplos de enseñanza, aunque en esta última, la evidencia de conocimientos solamente corresponde a tareas y ejemplos de enseñanza, pues la evidencia de conocimiento con respecto a estrategias y técnicas de enseñanza, no se encontró en la descripción de las actividades, pero sí, en las conclusiones del trabajo de Adrián.

Por otro lado, es importante mencionar que la razón por la que no se presente conocimiento correspondiente a la categoría de recursos digitales y físicos para la enseñanza radica en que no se consideró utilizar algún recurso digital y físico en la secuencia de actividades, pues todas estas corresponden a actividades que se realizan a lápiz y papel.

Identificación de Conocimientos de Fernando

Recordemos que Fernando, diseñó actividades para la construcción del concepto de sistemas de ecuaciones lineales y su conjunto solución basándose en una descomposición genética propuesta por Borja (2015). Fernando diseño actividades apoyadas por applets en GeoGebra. Para este caso se analizaron las descripciones de un total de 21 actividades, las cuales, como ya se mencionó, se encuentran reportadas en el trabajo de grado de Fernando.

Conocimiento Matemático

Conocimiento de los Temas. Recordemos que este subdominio del MTSK considera a los conocimientos del profesor relacionados con los procedimientos, la fenomenología, los registros de representación, las definiciones, propiedades y sus fundamentos, en este caso con respecto a los sistemas de ecuaciones lineales y su conjunto solución.

Con respecto al conocimiento de las definiciones, propiedades y sus fundamentos, Fernando muestra evidencia de conocimiento con respecto a las definiciones de conjunto solución de un sistema de ecuaciones, parámetro, variable libre, incógnita, gráfica de una función, sistema de ecuaciones lineales, sistema de ecuaciones equivalente, y tipos de sistemas de ecuaciones. La evidencia radica en las descripciones de las actividades, pues en ellas, junto con la presentación de las mismas actividades se hace mención literal de dichas definiciones, así como en su formación profesional.

A continuación, se presentan ejemplos de este conocimiento por parte de Fernando.

Durante la descripción de la actividad 1, en la cual se le presenta al alumno de manera literal la definición de conjunto solución y un ejemplo concreto, Fernando describe lo siguiente (Ver Figura 49)

Figura 49.

Evidencia de conocimiento sobre el concepto de conjunto solución.

> Se introduce el concepto de conjunto solución de una ecuación lineal, se presenta una definición formal del concepto y se da un ejemplo del conjunto solución de una ecuación lineal en $\mathbb{R}^2$, también se muestra la representación paramétrica del conjunto solución.

Como se observa, Fernando hace explícita que durante la actividad se le presentó la definición formal de conjunto solución a los alumnos, es por ello por lo que se considera como evidencia de conocimiento por parte de Fernando, además de que en diferentes explicaciones Fernando hace referencia a ella y algunas de sus propiedades, lo que también confirma la evidencia de dicho conocimiento, un ejemplo de esto se presenta en la actividad 3, la cual es complementaria a la actividad 1, pues en ella se le solicita al alumno que encuentre soluciones particulares a partir de mover el deslizador del applet proporcionado en la actividad 2, la cual corresponde a la representación geométrica del ejemplo dado en la actividad 1 acerca de conjunto solución o a partir de la representación de pareja ordenada del conjunto solución (Ver Figura 50).

Figura 50.

Evidencia de conocimiento sobre propiedades del conjunto solución.

En la primera tarea se pretende que el estudiante "deslice" el punto A en la construcción y seleccione tres soluciones particulares e identifique que el punto siempre está en la recta.

En la segunda tarea se espera que el estudiante verifique que dichas coordenadas del punto son solución de la ecuación lineal original (*Acción*), es decir sustituya los valores de las variables y verifique si la ecuación es un enunciado verdadero (I3).

En la tercera tarea el estudiante deberá verificar cuáles de las parejas ordenadas dadas corresponden a soluciones de la ecuación lineal y cuáles no, nuevamente mediante sustitución directa en la ecuación lineal (*Acción*). Nuevamente deberá sustituir los valores de las variables y verificar si la ecuación es un enunciado verdadero (I3), si es así, la pareja ordenada será solución de la ecuación.

Por último se busca verificar que el estudiante es capaz de identificar la n-ada genérica dada como una relación funcional entre las variables x y y, y de encontrar el valor de la variable x dando valores al parámetro r; esta tarea involucra identificar al parámetro r como número general, y por lo tanto, asigne los valores propuestos, y determine el valor de la variable dependiente dado un valor de la independiente (F2).

En la Figura 50, Fernando hace referencia a la propiedad geométrica del conjunto solución, en este caso, a una recta, es decir, Fernando sabe que cualquier punto que pertenece a la recta forma parte del conjunto solución, lo que significa que, al sustituir las coordenadas de un punto de la recta, este punto va a satisfacer la ecuación. Por otro lado, también hace explicito el conocimiento correspondiente a soluciones particulares de un sistema de ecuaciones a partir del valor del parámetro, cuando dicho conjunto solución se encuentra dado en su representación como pareja ordenada. De igual manera, en la Figura 50, notamos que Fernando posee evidencia de conocimiento acerca de la definición de relación funcional, pues al final hace referencia a una relación funcional y menciona "determine el valor de la variable dependiente dado un valor de la independiente".

Con respecto al conocimiento que involucra a la definición y propiedades de parámetro, en la descripción de la actividad 4, la cual, es continuación de las actividades 1, 2 y 3, en esta ocasión se le solicita a los alumno, encontrar la representación paramétrica del conjunto solución, Fernando explica lo siguiente (Ver Figura 51).

Figura 51.

Evidencia de conocimiento sobre parámetro.

> Por último, esperamos que el estudiante pueda proporcionar tres soluciones particulares. Para esta tarea el estudiante deberá interpretar el parámetro como la representación de una entidad general indeterminada que puede asumir cualquier valor (G2), una vez identificado esto el estudiante deberá asignar distintos valores al parámetro y encontrar el valor de la otra variable (I4); en

En la descripción de la Figura 51, se observa que Fernando da la definición de parámetro, cuando menciona "interpretar al parámetro como la representación de una entidad general indeterminada", también notamos que Fernando conoce propiedades del parámetro, en particular el papel que juega en el conjunto solución para determinar soluciones particulares según su valor. Es por ello por lo que se considera que Fernando muestra evidencia de conocimiento sobre definiciones y propiedades del parámetro.

Con respecto al conocimiento relacionado a la variable libre, la evidencia de conocimiento la encontramos durante la descripción (Ver Figura 52) de la actividad 6, (la cual es una continuación de la actividad 5, donde se explica como determinar lo que representa en $\mathbb{R}^3$ la ecuación $x + 2y = 4$ con ayuda de su representación paramétrica) donde se le pide al alumno que proporcione soluciones particulares de la ecuación lineal proporcionada en la actividad 5 y se le pregunta si algunas ternas forman parte del conjunto solución de la misma ecuación.

Figura 52.

Evidencia de conocimiento sobre la variable libre

> Esperamos que realizar la *acción* de evaluar las ternas proporcionadas ayude al estudiante a identificar que el coeficiente numérico 0 (cero) que debió capturar en la construcción permite asignar a la variable z cualquier valor.

En la descripción de la Figura 52, Fernando hace explicito que al ser z una variable libre, se le puede asignar cualquier valor, además de mencionar la razón por la cual a z se le considera como variable libre, lo que indica evidencia de conocimiento acerca de la definición y propiedades relacionados con el concepto de variable libre.

Otra descripción donde se encuentra conocimiento sobre propiedades que generan a una variable libre por parte de Fernando es en la descripción de la actividad 13 (Ver Figura 53), dicha actividad corresponde a un applet diseñado para que el alumno resuelva un sistema de ecuaciones consistente con infinitas solución y observe las modificaciones en su representación gráfica al realizar las operaciones entre reglones determinadas por el método de Gauss – Jordán.

Figura 53.

Evidencia de conocimientos de propiedades que generan a una variable libre

> Aquí el estudiante se enfrenta a un SEL con tres incógnitas y dos ecuaciones $\mathfrak{M}_{3x2}$, lo cual obligará a tener al menos una variable libre como es el caso.

La propiedad a la que se hace referencia corresponde a identificar que cuando se tiene un sistema de ecuaciones con más incógnitas que ecuaciones en automática se sabe que se tendrá una variable libre, en la Figura 53, Fernando hace explicito dicho conocimiento, ya que lo describe.

Con respecto al conocimiento relacionado con la definición de gráfica de una función, la evidencia de dicho conocimiento se encuentra en la siguiente descripción de la actividad 8 (Ver Figura 54), la cual corresponde al applet diseñado para ser auxiliar a la actividad 7, donde se presenta un problema que puede ser resuelto por un sistema de ecuaciones.

Figura 54.

Evidencia de conocimiento del concepto de gráfica de una función

> La construcción presenta las gráficas de las funciones f(x) y g(x), el deslizador "Km ciudad" modifica los valores de la variable x , y por lo tanto, la ubicación de cada uno de los puntos que se encuentran en sus respectivas gráficas, los puntos están determinados como (x, f(x)) y (x, g(x)), por lo que el estudiante deberá manipular el deslizador hasta que los puntos se unan en la intersección de las rectas.

La evidencia mencionada se observa cuando Fernando menciona "los puntos que se encuentran en sus respectivas gráficas, los puntos están determinados como $(x, f(x))$ y $(x, g(x))$", pues ve a la gráfica de f como el conjunto de puntos de la forma $(x, f(x))$ y a la gráfica de g como el conjunto de puntos de la forma $(x, g(x))$.

Con respecto a los conocimiento que involucran a las definiciones y propiedades de los sistemas de ecuaciones, así como de los diferentes tipos de sistemas de ecuaciones, se presentan algunos ejemplos de descripciones de actividades donde se observan dichos conocimientos por parte de Fernando

Este primer ejemplo corresponde a una parte de la descripción de la actividad 7 (Ver Figura 55), en ella se le presenta al alumno un problema que es resuelto por un sistema de ecuaciones lineales.

Figura 55.

Evidencia de conocimiento relacionado con la creación de un sistema de ecuaciones.

> Debido a que el objetivo del presente estudio no es la modelación, se orienta al estudiante para plantear un sistema de ecuaciones lineales tomando en cuenta las restricciones que proporciona el problema.

El conocimiento relacionado con los sistemas de ecuaciones que se presenta en la Figura 55, corresponde al conocimiento que permite modelar un problema como un sistema de ecuaciones considerando las restricciones, la evidencia radica en que Fernando, hace explícita esta característica, como se observa al final de la descripción.

Por otro lado, también se encuentra evidencia de conocimiento acerca de tipos de sistemas de ecuaciones y de propiedades que corresponden a cada uno de estos tipos, un ejemplo de ello, lo encontramos en la descripción de la actividad 9 (Ver Figura 56), donde se le pide al alumno que resuelva un sistema de ecuaciones que es proporcionado en su representación como n-adas.

Figura 56.

Evidencia de conocimiento sobre tipos de sistemas de ecuaciones y sus propiedades.

> En esta actividad se presentan dos sistemas de ecuaciones lineales, el primero inconsistente y el segundo consistente con infinitas soluciones.
>
> Esperamos que tras la comparación de los conjuntos solución de cada una de las ecuaciones el estudiante pueda establecer una igualdad e intente resolver la ecuación lineal encontrada; debido al tipo de sistemas propuestos el estudiante se enfrentará a situaciones como:
>
> 0 = -6, en el primer sistema
>
> 0 = 0, en el segundo sistema
>
> Debido a que puedan ser los primeros acercamientos a sistemas de ecuaciones inconsistentes o consistentes con infinitas soluciones es probable que el estudiante deba recurrir a la representación gráfica del sistema para encontrar que:
>
> En el primer caso, no es posible encontrar un punto de intersección debido a que las rectas son paralelas.
>
> En el segundo caso, que ambas expresiones algebraicas tienen la misma representación geométrica, es decir, que ambas corresponden a la misma recta, por lo que el conjunto solución puede ser cualquiera de las parejas ordenadas dada.

En la Figura 56, observamos que Fernando sabe que hay sistemas de ecuaciones inconsistentes y consistentes con infinitas soluciones, la evidencia de este conocimiento se encuentra, en que reconoce lo que este tipo de ecuaciones representa en términos algebraicos al mencionar que en el primer sistema se encontrará "la situación 0=-6" y en la segunda "0=0" así como las características geométricas, pues menciona que "en el primer coso, no es posible encontrar un punto de intersección debido a que las rectas son paralelas" y que "en el segundo caso, que ambas expresiones algebraicas tiene la misma representación geométrica".

En cuanto al conocimiento relacionado con sistemas de ecuaciones equivalentes y operaciones elementales con renglones, el ejemplo correspondiente, lo encontramos en la descripción de las actividades 10 y 11 (Ver Figura 57), donde en ambas se le pide al alumno resolver un sistema de ecuaciones ya establecido, en el caso de la actividad 10 se le pide hacerle a lápiz y papel y en el caso de la 11 con ayuda de un applet.

Figura 57.

Evidencia de conocimiento sobre sistemas de ecuaciones equivalentes y operaciones elementales.

Se introduce el concepto de operaciones elementales con renglones para el método de Gauss – Jordan y el de sistema de ecuaciones equivalentes; esta actividad se diseñó para promover la coordinación de registros mediante el uso de la multi-representación que permite el uso de tecnología, no se espera que sea una actividad de introducción al algoritmo de Gauss – Jordan.

Con el desarrollo de esta actividad esperamos que los estudiantes mediante la comprobación repetitiva de verificar la validez del conjunto solución de los sistemas de ecuaciones equivalentes encontrados, interioricen que un sistema de ecuaciones equivalentes comparte el mismo conjunto solución, pero que el sistema es equivalente mas no igual, y que lo visualice a través de las transformaciones que implican las operaciones realizadas.

En la Figura 57, se nota, que Fernando posee conocimiento acerca de las operaciones elementales así como de un sistema de ecuaciones equivalente, pues hace explicito que se presentan dichas definiciones durante la actividad, en este caso la actividad 10, por otro lado, también se observa evidencia de conocimiento acerca de propiedades sobre ecuaciones equivalentes, pues menciona que "un sistema de ecuaciones equivalentes comparte el mismo conjunto solución pero que el sistema es equivalente mas no igual".

Por último, el ejemplo donde se muestra conocimiento por parte de Fernando, sobre la definición y propiedades de sistemas de ecuaciones homogéneos, se encuentra en la descripción de la actividad 16 (Ver Figura 58), donde se le introduce al alumno dicha definición además de un teorema donde se afirma que si un sistema es homogéneo y dicho sistema tiene más ecuaciones que incógnitas, entonces el sistema tiene una cantidad infinita de soluciones.

Figura 58.

Evidencia de conocimiento sobre sistemas homogéneos.

> La actividad inicia presentando el concepto de SEL Homogéneo esto con la intensión de que el estudiante verifique incluso geométricamente este teorema al menos en $\mathbb{R}^3$.

La evidencia de lo mencionado previamente es clara en la Figura 58, pues ahí Fernando explicita que la definición de sistema de ecuaciones lineales se da en la actividad además de que menciona que el teorema puede ser verificado por el estudiante de manera geométrica, lo que implica evidencia de conocimientos sobre propiedades relacionadas a los sistemas de ecuaciones homogéneos.

Con respecto a los conocimientos por parte de Fernando relacionados con los registros de representación, se tiene como evidencia de dicho conocimiento dos elementos, el primero corresponde a una respuesta dada por Fernando durante la entrevista que se le realizó y la segunda al conjunto de descripciones donde menciona los tipos de representación que se utilizan en la secuencia de actividades.

La respuesta dada por Fernando que ayuda a confirmar la evidencia de este conocimiento se presenta en el siguiente extracto.

Investigador: Durante la explicación de los objetivos de cada una de las actividades, mencionas cosas sobre registros de representación, entonces, no preguntábamos ¿en qué medida alguna teoría de registros de representación es considerada para el diseño de las actividades?

Fernando: Nosotros, consideramos un poco de esto de registros de representación de Duval, pero más que nada, utilizamos este constructo de multi representación de la tecnología, (…) en otro tipo de construcciones

> (refiriéndose a los applets) ellos tienen tres representaciones del mismo objeto, una algebraica, una matricial, que ahí habría discusiones si es otro tipo de registro o es el mismo, y la geométrica o gráfica, por eso utilizamos, más bien el constructo de multi representaciones.

La evidencia de conocimiento se encuentra en la descripción previa, pues Fernando explicita el uso de una teoría de representación para diseñar las actividades de la secuencia, en particular las multi representaciones, lo que es evidencia de que Fernando debe conocer las distintas representaciones que se utilizarán en las actividades, esto se confirma con las descripciones de las actividades de la secuencia, algunos ejemplos de estos se presentan a continuación.

En este primer ejemplo (Ver Figura 59) se muestra evidencia de conocimiento por parte de Fernando con respecto a las distintas representaciones que tiene la ecuación lineal, en particular, la representación paramétrica de la recta, este ejemplo corresponde a una parte de la descripción de la actividad 1.

Figura 59.

Evidencia de conocimiento sobre representaciones de la ecuación lineal.

> Consideramos que esta actividad permitirá a los estudiantes conocer una representación de la ecuación lineal diferente a las utilizadas de manera convencional en la matemática escolar, la representación vectorial de una recta o representación paramétrica. La intención es establecer esta representación como punto de partida de las construcciones que se promoverán con el resto de las actividades.

Como ya se mencionó, esta descripción forma parte de la dada para la actividad 1, en ella, se le presenta al estudiante un ejemplo de un conjunto solución de una ecuación particular, en este caso, dicho conjunto solución corresponde a una recta, y como lo describe Fernando, en la misma actividad se proporciona la representación paramétrica de dicha recta, es por ello por lo que esto se considera como evidencia de conocimientos sobre representaciones. Otra evidencia de conocimiento sobre distintas representaciones del concepto conjunto solución de ecuación lineal (recta) se presenta en la descripción de la actividad 3, que corresponde a la misma ecuación dada en la actividad 1, pero ahora con otra representación, en este caso, visto como par ordenado (Ver Figura 60).

Figura 60.

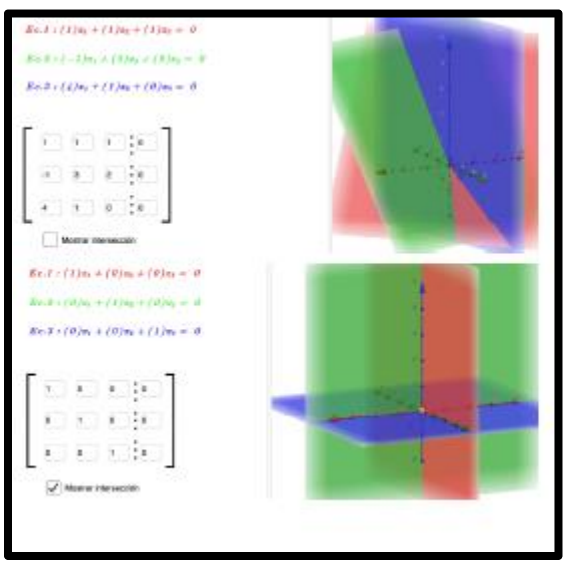
Evidencia de conocimiento de otra representación de una recta.

Inicialmente se presenta al estudiante otra representación del conjunto solución, como pareja ordenada.

Por otro lado, para ejemplificar lo mencionado por Fernando con respecto a las multi representaciones utilizadas en las actividades, a continuación, se muestra una de las actividades de la secuencia, donde se observan estas multi representaciones (Ver Figura 61).

Figura 61.

Ejemplo de actividad donde se utilizan multi representaciones.



Esto corresponde al applet diseñado para la actividad 16, donde se le presenta al estudiante un sistema de ecuaciones homogéneo con única solución, el objetivo es que el alumno opere sobre el sistema de ecuaciones para hallar un sistema equivalente que le permita observar que en efecto el conjunto solución sigue es el mismo, aunque el sistema ya no, esto a partir de las diferencias en las distintas representaciones, particularmente en la gráfica. Al considerar e incluir estas representaciones en las actividades se considera como evidencia de conocimiento sobre las representaciones, en este caso de un sistema de ecuaciones.

Con respecto a los conocimientos relacionados con la categoría de procedimientos, se encontraron diversas evidencias de conocimiento por parte de Fernando. Un ejemplo de esto, lo encontramos en la descripción de la actividad 15, esta corresponde a un applet de GeoGebra, donde se le proporciona al alumnos dos representaciones sobre la intersección de dos planos, una de ellas es la representación vectorial y la otra la representación gráfica de dicha intersección. Durante la descripción Fernando menciona lo siguiente (Ver Figura 62).

Figura 62.

Evidencia de conocimiento con respecto a procedimiento.

> Para este caso el estudiante deberá identificar el espacio mínimo común que es $\mathbb{R}^3$, por lo que es necesario contar con una concepción *Objeto* de SEL, e identificar que existe una variable libre, en este caso z. Para construir el CS-SEL el estudiante deberá *desencapsular* el Sistema en cada una de las ecuaciones que lo conforman y establecer una relación funcional para cada una de las variables que cuentan con pivote y posteriormente sustituir la variable libre por un parámetro, en este caso r e identificar que con los elementos disponibles es posible construir la ecuación de la recta en $\mathbb{R}^3$ con un punto y un vector director, los cuales deberá capturar en la construcción y verificar que la recta propuesta es verdaderamente la intersección entre los planos.

Como se observa en la Figura 62, Fernando explicita el procedimiento que se debe realizar para poder identificar la intersección de dos planos y generar su representación algebraica de la misma, es por ello por lo que esto se considera como evidencia de conocimiento por parte de Fernando acerca de procedimientos con respecto al conjunto solución de un sistema de ecuaciones. Otro ejemplo de conocimiento, con respecto a procedimientos relacionados con el conjunto solución, corresponde a la forma de hallarlo, así como lo que este proceso genera en las representaciones geométricas, esta evidencia la encontramos en la descripción que Fernando realiza para la actividad 17 (Ver Figura 63), en ella se le proporciona al estudiante un sistema de ecuaciones homogéneo con infinitas soluciones en un applet, y se le pide resolverlo con la intención de que verifique si el origen pertenece o no al conjunto solución y que proporcione soluciones particulares.

Figura 63.

Evidencia de conocimiento sobre como hallar el conjunto solución.

> Ahora el estudiante se enfrenta a un SEL Homogéneo con infinitas soluciones, en este caso al aplicar el algoritmo de Gauss–Jordan se enfrentarán a la "eliminación" de una ecuación, por lo que el sistema tendrá infinitas soluciones (es necesaria la concepción *Objeto* de sistema de ecuaciones lineales para escalonar el sistema correctamente).

La evidencia de conocimiento radica, en que en la Figura 63, se observa que Fernando refiere al algoritmo de Gauss-Jordan como el algoritmo a seguir para hallar el conjunto solución, además de mencionar las situaciones a las que se enfrentara el alumno durante la aplicación de dicho algoritmo.

Con respecto a los conocimientos relacionados a la fenomenología del concepto de sistema de ecuaciones lineales, Fernando muestra evidencia de dicho conocimiento, pues como parte de sus actividades se incluyen tres actividades de aplicación de los sistemas de ecuaciones y para cada uno ellos, Fernando explica la manera de resolverlos haciendo explicita la forma de utilizar los sistemas de ecuaciones para su solución. Además de ello, la evidencia de este conocimiento también radica en una de la respuestas dadas por Fernando durante la entrevista, a continuación, se presenta dicha respuesta.

Investigador: Al final, pones ejemplos de aplicación, ¿qué consideraste para seleccionarlos y diseñarlos?

Fernando: Muchos de estos problemas son los que aparecen en los libros de texto que utilizamos regularmente en las carreras de ingeniería, realmente, la tesis esta enfocada para estudiantes de ingeniería (...) son los problemas típicos que se presentan en los libros de texto que utilizamos.

Como se observa, el conocimiento de Fernando con respecto a la fenomenología radica principalmente en lo mostrado en los libros de texto que se utilizan en las carreras de ingeniería, y dado que en el MTSK se considera también la experiencia y creencias de los docentes, esto se considera como evidencia de conocimiento acerca de la fenomenología correspondiente a los sistemas de ecuaciones lineales.

En la Tabla 7, se muestra un resumen sobre las categorías correspondientes al conocimiento de Fernando enmarcado en el subdominio del conocimiento de los temas.

Tabla 7.

Distribución de los conocimientos de Fernando en las categorías del KoT

Actividad	**P**	**DPyF**	**RR**	**FyA**
1, 2, 3 y 4	E	E	E*	
5 y 6	E		E*	
7, 8 y 9	E	E	E*	
10 y 11	E	E	E*	
12 y 13	E	E	E*	
14 y 15	E	E	E*	
16 y 17	E	E	E*	
18	E	E	E*	
19, 20 y 21	E	E	E*	E*

Nota. P hace referencia a la categoría de procedimientos, DPyF hace referencia a la categoría definiciones, propiedades y sus fundamentos, RR a la categoría de registros de representación y FyA a la categoría fenomenología y aplicaciones, E hace referencia a evidencia de conocimiento y E* a una descripción que fue confirmada como evidencia de conocimiento gracias a las respuestas de Fernando en la entrevista

Conocimiento De La Estructura De Las Matemáticas. Recordemos que este subdominio considera el conocimiento del profesor en el uso de conexiones de complejización, auxiliares, simplificaciones y transversales.

Durante las descripciones de las actividades que Fernando diseño, solamente se pudo encontrar evidencia de conocimiento sobre conexiones auxiliares, y dichas conexiones relacionadas con el conocimiento del modelo 3 UV (3 usos de la variable), pues las conexiones que utiliza están relacionadas con estos usos, en particular el uso de incógnita y el de relación funcional.

Con respecto al primer uso, el de incógnita, la evidencia de conocimiento de su uso como conexión auxiliar se encuentra en la descripción de la actividad 7 (Ver Figura 64), en este problema se le plantea al alumno un problema que puede ser resuelto con un sistema de ecuaciones y se propone una solución utilizando el método de igualación y se le pide al alumno concluir la última parte de dicho método.

Figura 64.

Evidencia de conocimiento del uso de la incógnita como conexión auxiliar.

En este caso buscamos indagar sobre el dominio que tiene sobre el uso de la variable como incógnita, específicamente los siguientes aspectos del modelo 3UV:

(I1) Reconocer e identificar en una situación problemática la presencia de algo desconocido que puede ser determinado considerando las restricciones del problema.

(I4) Determinar la cantidad desconocida que aparece en ecuaciones o problemas, realizando las operaciones algebraicas o aritméticas.

Como se nota en la Figura 64, Fernando hace referencia al modelo 3UV, (Ursini et al., 2016) en específico al uso de la variable como incógnita, lo que permite asegurar que existe evidencia de conocimiento por parte de Fernando del uso de la incógnita como conexión auxiliar para poder modelar de forma correcta un problema y así generar el sistema de ecuaciones que ayudará a resolverlo, además de que al conocer Fernando la forma de utilizar a la variable como incógnita le ayuda a indagar sobre el nivel de dominio de los alumnos con respecto a este uso.

Por otro lado, otro uso de la variable que se observa como conexión auxiliar por parte de Fernando, es el correspondiente al uso como relación funcional, un ejemplo de esto lo podemos observar en la descripción de la actividad 15 (Ver Figura 65), en ella se le presenta al alumno los sistemas de ecuaciones lineales donde se conforman por más incógnitas que ecuaciones y se le proporciona un ejemplo junto con su solución y un applet, para que el alumno identifique geométricamente el conjunto solución.

Figura 65.

Evidencia de conexión auxiliar del uso de la variable como relación funcional.

Para este caso el estudiante deberá identificar el espacio mínimo común que es $\mathbb{R}^3$, por lo que es necesario contar con una concepción *Objeto* de SEL, e identificar que existe una variable libre, en este caso z. Para construir el CS-SEL el estudiante deberá *desencapsular* el Sistema en cada una de las ecuaciones que lo conforman y establecer una relación funcional para cada una de las variables que cuentan con pivote y posteriormente sustituir la variable libre por un parámetro, en este caso r e identificar que con los elementos disponibles es posible construir la ecuación de la recta en $\mathbb{R}^3$ con un punto y un vector director, los cuales deberá capturar en la construcción y verificar que la recta propuesta es verdaderamente la intersección entre los planos.

En la figura 65, se observa, que Fernando se apoya del uso de la variable como relación funcional, para poder lograr la conexión entre el registro algebraico y el registro geométrico del conjunto solución, y dado que esta conexión se observa de manera explícita, es considerada como evidencia de conocimiento acerca de dichas conexiones auxiliares.

La Tabla 8 muestra un resumen de los conocimientos puestos en marcha por parte de Fernando correspondientes al KSM durante el diseño de la secuencia de actividades.

Tabla 8.

Distribución de los conocimientos de Fernando en las categorías del KSM

Actividad	CC	CA	CS	CT
1, 2, 3 y 4		E		
5 y 6		E		
7, 8 y 9		E		
10 y 11				
12 y 13				
14 y 15		E		
16 y 17				
18				
19, 20 y 21				

Nota. CC hace referencia a las conexiones de complejización, CA a las auxiliares, CS a las de simplificación y CT a las, E hace referencia a evidencia de conocimiento

Conocimiento De La Práctica Matemática. Recordemos que, este subdominio considera los conocimientos relacionados con las categorías definir, demostrar, uso de heurísticos y, ejemplos y contraejemplos.

Para el caso de Fernando, se encontró indicio de conocimiento solamente a la categoría que corresponde a la acción de demostrar, dicho indicio radica en que, Fernando parece conocer distintas formas en las que se puede presentar una demostración y por ende identifica lo que podría llegar a convertirse en una.

Un ejemplo de esto corresponde a una parte de la descripción de la actividad 16, en donde al inicio de ésta, se le proporciona a alumno un teorema acerca de la cantidad de ecuaciones e incógnitas en un sistema homogéneo y la relación de esto con la cantidad de soluciones de dicho sistema (Ver Figura 66).

Figura 66.

Parte de la descripción a la actividad 16.

> La actividad inicia presentando el concepto de SEL Homogéneo esto con la intensión de que el estudiante verifique incluso geométricamente este teorema al menos en $\mathbb{R}^3$.

En la Figura 66, Fernando menciona que el alumno puede verificar geométricamente el teorema mencionado, lo cual nos muestra indicio de conocimiento sobre las diferentes formas en las que un teorema puede ser verificado, aunque sabemos que, en matemáticas una demostración no puede ser geométrica, pero si puede ayudar a comprender el camino de dicha demostración, además de que esto puede ayudar a la comprensión del mismo teorema.

Basados en Campos-Cano y Flores-Medrano(2019) considerar el extracto previo como evidencia de conocimiento, pues ellos marcan en la práctica de demostrar una subcategoría relacionada con el uso de los registros de representación como parte o apoyo de dicha práctica, en este caso, el registro geométrico. De igual manera se observa la subcategoría correspondiente a las funciones de la demostración, en particular a la fase de verificación.

Como ya se mencionó previamente, no se encontraron evidencias de conocimiento por parte de Fernando con respecto al KPM. Esto se puede notar de mejor manera en la Tabla 9.

Tabla 9.

Distribución de los conocimientos de Fernando en las categorías del KPM

Actividad	**Dm**	**Df**	**UH**	**EyC**
1, 2, 3 y 4				
5 y 6				
7, 8 y 9				
10 y 11				
12 y 13				
14 y 15				
16 y 17	E			
18				
19, 20 y 21				

Nota. Dm se refiere a la categoría Demostrar, Df a la categoría Definir, UH a la categoría uso de heurísticos, EyC a la categoría Ejemplos y contraejemplos e I refiere a un indicio de conocimiento.

Se cree que los observado en la Tabla 9, corresponde a que, como el KPM refiere a un metaconocimiento, dicho metaconocimiento puede ser difícil de mostrarse en las descripciones de Fernando, pues las actividades que se diseñaron son para una ingeniería, en donde la formalidad matemática no es necesaria.

Conocimiento Didáctico Del Contenido

Conocimiento de las Características de Aprendizaje de las Matemáticas. En esta sección presentaremos los conocimientos relacionados con las categorías que este subdominio considera, recordemos que dichas categorías son; teorías de aprendizaje de las matemáticas, fortalezas y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, interacción del estudiante con el contenido e intereses y expectativas del aprendizaje de las matemáticas.

Con respecto a la categoría que involucra conocimiento relacionado con las teorías de aprendizaje, se tiene evidencia de conocimiento por parte de Fernando en esta categoría, pues recordemos que, las actividades de Fernando están basadas en la Descomposición Genética de Borja (2015) así como en los constructos de representación múltiple o multi-representaciones, y los correspondientes a la teoría de los 3 usos de la variable (3UV), estas herramientas proveyeron información a Fernando sobre cuestiones a considerar para lograr la construcción del objeto matemático en cuestión, el sistema de ecuaciones y su conjunto solución.

Dicha evidencia de conocimiento radica principalmente en que, durante las descripciones de Fernando, explicita las razones por las que se presentan distintas representaciones de un mismo objeto dentro de la actividad, así como de su intencionalidad con respecto a los objetivos de la Descomposición Genética y el modelo 3UV.

Un ejemplo de esto se presenta en la descripción de la actividad 2 (Ver Figura 67), la cual, es una continuación de la actividad 1 donde se le pide al alumno que introduzca en un applet de GeoGebra los coeficientes numéricos de la representación paramétrica del conjunto solución de una ecuación lineal hallado en la actividad 1.

Figura 67.

Descripción actividad 2.

> La intención es que el estudiante realice acciones en la representación analítica (vectorial) que le permitan obtener la representación gráfica de la recta que representa (conversión) En caso de que sus resultados no coincidan con la recta solicitada deberá verificar y proponer nuevamente otra combinación lineal para obtener la gráfica correcta.

En la descripción (Figura 67), se observa que Fernando explicita la intencionalidad de que en esta actividad se le presente al alumno un applet, justificando esto en términos de la teoría de registros de representación, pues hace mención que se busca que el alumno realice una conversión de la representación analítica a la geométrica, buscando que durante dicha conversión el alumno observe si su respuesta es correcta o no, y en su defecto, realizar de nuevo el ejercicios para verificar la solución. Es por ello por lo que, esto es una muestra de evidencia de conocimiento con respecto a teorías de aprendizaje.

Otra descripción donde se observa evidencia de conocimiento acerca de teorías de enseñanza, corresponde a la de la actividad 3 (Ver Figura 68), en ella se le da al alumno la representación en pareja ordenada del conjunto solución de la actividad 1 y se le pide que proporcione tres soluciones particulares y por otro lado se le pide que identifique de una lista de parejas ordenadas, aquellas que sean soluciones y también se le solicita que halle el valor de la variable dependiente a partir de varios valores para el parámetro.

Figura 68.

Descripción actividad 3.

En la segunda tarea se espera que el estudiante verifique que dichas coordenadas del punto son solución de la ecuación lineal original (*Acción*), es decir sustituya los valores de las variables y verifique si la ecuación es un enunciado verdadero (**I3**).

En la tercera tarea el estudiante deberá verificar cuáles de las parejas ordenadas dadas corresponden a soluciones de la ecuación lineal y cuáles no, nuevamente mediante sustitución directa en la ecuación lineal (*Acción*). Nuevamente deberá sustituir los valores de las variables y verificar si la ecuación es un enunciado verdadero (**I3**), si es así, la pareja ordenada será solución de la ecuación.

Por último se busca verificar que el estudiante es capaz de identificar la n-ada genérica dada como una relación funcional entre las variables x y y, y de encontrar el valor de la variable x dando valores al parámetro r; esta tarea involucra identificar al parámetro r como número general, y por lo tanto, asigne los valores propuestos, y determine el valor de la variable dependiente dado un valor de la independiente (**F2**).

En la descripción que se muestra en la Figura 68, se observa como durante la descripción Fernando hace referencias a procesos conocidos de la Teoría APOE, en particular a la concepción acción, ambas veces que esto sucede refiere a la verificación en primer lugar que las soluciones que propone si corresponden a una solución particular, y en un segundo momento que las parejas dadas sean de igual forma una solución particular. Por otro lado, también se puede notar que, Fernando utiliza las siglas I3 y F2 durante su descripción, y estas haciendo referencia a los usos de la variable como incógnita al sustituir la variable y como relación funcional al determinar valores de la variable independiente, respectivamente.

Así como el ejemplo previo, el recurso de Fernando, de describir la intencionalidad de las actividad en términos de la Teoría APOE y del modelo 3UV, es utilizado en todas las descripciones de las actividades, lo cual justifica la evidencia de conocimiento por parte de Fernando.

Otro ejemplo de descripción donde se muestra evidencia de conocimiento sobre teorías de enseñanza por parte de Fernando, la encontramos en las actividades que corresponden a la manipulación de un applet de GeoGebra por parte del alumno, en todas ellas, se encuentra la siguiente parte de la descripción (Ver Figura 69).

Figura 69.

Descripción de las actividades con GeoGebra

> Esperamos que el presentar al estudiante el mismo objeto matemático en tres distintos registros de representación semiótica (algebraico, gráfico y como combinación lineal) se favorezca la construcción del concepto.

En esta descripción, Fernando, explicita la intencionalidad de las multi-representaciones, dichas multi-representaciones se presentan en cada uno de los applets de GeoGebra, la intencionalidad de presentarlo en un applet, la explica Fernando en un comentario durante la entrevista.

Fernando: Estabamos buscando, que con el uso de tecnología, que fue uno de los aportes del trabajo, hicieramos actividades que pudieran motivar la reflexión en los muchachos.

Lo que ayuda a confirmar la evidencia de conocimiento acerca del uso de las multi-representaciones en el diseño de las actividades, de igual forma durante la entrevista, Fernando también explicita la intencionalidad de algunas actividades para lograr objetivos marcados en la Descomposición Genética. Esto lo podemos notar en el siguiente comentario:

Fernando: En la Descomposición, por ejemplo, una de las cosas que los muchachos deben reflexionar es con el espacio en el que debe vivir un sistema de ecuaciones, o sea, reconocer que, aunque las variables no estén de manera explícita en una ecuación, si el sistema está en $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^4$ o $\mathbb{R}^5$, que las variables ahí pueden quedar libres.

Una de las actividades que se encuentran con esta intencionalidad es la actividad 14 (Figura 70), pues en ella se le proporciona al alumno en principio un sistema de ecuaciones de dos ecuaciones y tres incógnitas, y seguido de eso se le proporcional el sistema escalonado y se le pide que encuentre la ecuación vectorial de la intersección de los dos planos, lo que hace pensar que se espera que el alumno identifique que, aunque el sistema ya esta escalonado sigue viviendo en $\mathbb{R}^3$.

Figura 70.

Actividad 14.

Un sistema de ecuaciones lineales con menos ecuaciones que incógnitas ocasionalmente se denomina sistema subdeterminado.

Encuentre la recta de intersección de los planos:

$$x + 2y + z = 3$$
$$2x + 3y + z = 1$$

Al aplicar la eliminación de Gauss-Jordan a la matriz aumentada y al sustituir variables se tiene:

$$x - z = -7$$
$$y + z = 5$$

Encuentre la ecuación vectorial de la recta de intersección de los dos planos y compruebe su respuesta en la siguiente construcción:

La forma vectorial de la ecuación de una recta en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ es:

$$x = td + p$$

donde p es un punto específico sobre ℓ y $d \neq 0$ es un vector director para ℓ.

Las ecuaciones que corresponden a los componentes de la forma vectorial de la ecuación se llaman ecuaciones paramétricas de ℓ.

Con respecto a la categoría de interacción del alumno con el contenido, afirmamos que se tiene evidencia de que Fernando posee conocimientos relacionados con esta categoría. Un ejemplo de esto, lo encontramos en la descripción de la actividad 2 (Figura 71), en donde, como ya se ha mencionado, se le proporciona al alumno un applet en GeoGebra, en donde podrá verificar y manipular el conjunto solución de la ecuación lineal propuesta en la actividad 1.

Figura 71.

Descripción de la actividad 2 de Fernando.

> Aquí el estudiante deberá capturar los coeficientes numéricos correspondientes dados en la representación paramétrica, además de poder verificar si los coeficientes son correctos al mostrar la recta y la solución (seleccionando las casillas de verificación correspondientes).
>
> La intención es que el estudiante realice acciones en la representación analítica (vectorial) que le permitan obtener la representación gráfica de la recta que representa (conversión) En caso de que sus resultados no coincidan con la recta solicitada deberá verificar y proponer nuevamente otra combinación lineal para obtener la gráfica correcta.

En esta descripción (Figura 71), se observa como Fernando describe, la forma en la que se espera que alumno se enfrente al contenido, incluso la forma en la que éste debe interactuar con el applet para poder obtener la representación gráfica del conjunto solución (realizar una conversión de registro de representación). Es por ello por lo que se considera que hay evidencia de conocimiento por parte de Fernando con respecto a la interacción del alumno con el contenido.

Otro ejemplo de evidencia de conocimiento relacionado a esta misma categoría, la encontramos en la descripción siguiente (Figura 72), la cual corresponde a la actividad 4, que es una actividad complementaria a la actividad 1, pues en esta actividad a los alumnos se les pide que encuentren la representación paramétrica del conjunto solución y que lo representen como pareja ordenada de y en función de x y con base en esta representación se les pide que den tres soluciones particulares.

Figura 72.

Parte de la descripción de la actividad 4.

> Por último, esperamos que el estudiante pueda proporcionar tres soluciones particulares. Para esta tarea el estudiante deberá interpretar el parámetro como la representación de una entidad general indeterminada que puede asumir cualquier valor (G2), una vez identificado esto el estudiante deberá asignar distintos valores al parámetro y encontrar el valor de la otra variable (I4); en este caso si el estudiante necesita realizar todos los cálculos para encontrar los valores de la variable dependiente en función de la independiente nuevamente consideramos una concepción *Acción*. En caso de que el estudiante identifique que las soluciones particulares que encontró en las actividades realizadas en el salón de clases también son solución de la ecuación, no importando como se establezca la relación, consideramos que se encuentra en un nivel *Proceso*.

En esta parte de la descripción de la actividad 4 (Figura 72), Fernando explicita la interacción que se espera que el alumno tenga al momento de responder la tercera parte de dicha actividad, dicha interacción es explicada en términos del modelo 3UV, pues menciona que el estudiante debe realizar una interpretación del parámetro como una entidad general y así poder darle valores específicos para generar las soluciones particulares.

Al realizar el análisis del trabajo de Fernando, se observó que, al igual que en las descripciones mostradas previamente, en todas las demás, se describe de manera explicita la forma en la que se espera que el estudiante se desenvuelva y por tanto interactúe con cada una de las actividades, tanto si se resuelven a lápiz y papel (Figura 72) o con ayuda de un applet (Figura 71), es por ello que se considera tener evidencia suficiente para firmar conocimiento por parte de Fernando correspondiente a la categoría de interacción del estudiante con el contenido; más aún dicha evidencia es confirmada por un comentario que nuestro informante realiza durante la entrevista.

Fernando: Estabamos buscando, que con el uso de tecnología, que fue uno de los aportes del trabajo, hicieramos actividades que pudieran motivar la reflexión en los muchachos (…) Por ejemplo, en la primera actividad que esta reportada, lo que es sistema de ecuaciones equivalentes (…), por ejemplo se espera que, el estudiante entienda que es un sistema de ecuaciones equivalente, porque comparte el conjunto solución, entonces después de esta interacción [refiriéndose a capturar en la representación matricial dentro del applet los coeficientes del sistema escalonado] hace una operación aquí, y deberian interpretar que si hicieron bien la operación, por la definición de sistema de ecuaciones equivalentes, entiendiendo que la intersección es el conjunto solución (…), esperamos que ellos interioricen este concepto.

En este comentario, hace explicita la intención de generar la reflexión de los estudiantes a partir del uso de la tecnología y menciona un ejemplo de reflexión que se espera que los alumnos realicen a partir de la interacción con el contenido, particularmente con el applet de GeoGebra. Es por esto, que este comentario ayuda a confirmar la evidencia de conocimiento.

Con respecto a la categoría relacionada con los conocimientos de fortalezas y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, también Fernando presenta evidencia de conocimiento relacionado con esta categoría, principalmente con relación a las dificultades.

Un ejemplo de esto lo encontramos en la descripción de la actividad 6 (Figura 73), la cual, es complementaria a la actividad 5, en ella se le presenta una ecuación lineal y se le pregunta al alumno que es lo que dicha ecuación lineal representa en R3, en primera instancia se le presenta al alumno la representación paramétrica correspondiente al conjunto solución en R3, seguido de esto, se le presenta al alumno otra representación del mismo conjunto, correspondiente ahora en su forma de terna ordenada, y en la actividad 6, se le pide al alumno que proporcione tres soluciones particulares después de manipular en el applet lo presentado con la ecuación paramétrica y verificar que en efecto corresponde a un plano.

Figura 73.

Explicación de la actividad 6.

> En esta actividad esperamos que el estudiante sea capaz de proporcionar soluciones particulares a partir de la terna proporcionada $(-2r + 4, r, s)$, asignando inicialmente valores al parámetro r, y encontrando el valor correspondiente a la coordenada en x , en este caso se espera que los estudiantes superen el obstáculo que puede representar el tener la variable libre z, representada por el parámetro s.
>
> Esperamos que realizar la *acción* de evaluar las ternas proporcionadas ayude al estudiante a identificar que el coeficiente numérico 0 (cero) que debió capturar en la construcción permite asignar a la variable z cualquier valor.

Como se puede ver en la descripción (Figura 73), Fernando explicita una de las dificultades que pueden presentar los alumnos, en este caso el significado tanto algebraico como geométrico que corresponde de tener una variable libre que es generada por el hecho de tener una ecuación lineal con dos incógnitas y buscar su conjunto solución en un espacio de dimensión tres, lo que obliga la aparición de un parámetro que represente a dicha variable libre. Es por ello que este es un ejemplo de evidencia de conocimiento por parte de Fernando con respecto a la categoría de dificultades y fortalezas en el aprendizaje de las matemáticas.

Por otro lado, durante la entrevista, también se encontró evidencia de conocimiento con respecto a esta categoría, para mostrar dicha evidencia se presenta un extracto de la respuesta que Fernando da a una de las preguntas.

Investigador: Con respecto a dificultades de los alumnos, ¿se consideraron algunos para el diseño de las actividades?

Fernando: Pues digamos que la dificultad más grande que tenemos, es un bajo dominio del uso de la variable y del álgebra el general, (…), la representación de la recta, por ejemplo si tu les dices en $\mathbb{R}^2$ $x = 1$ ¿qué es? Y los tienes 15 minutos rompiendose la cabeza no, y ya les dices, metelos en Geogebra ¿qué te dibuja?, una recta. (…), también los vectores, más ficifultades, creo que no, no consideré más.

En el extracto previo se observa que Fernando identifica dificultades que los alumnos presentan durante el proceso de aprendizaje de un sistema de ecuaciones, particularmente el relacionado con un dominio bajo del uso de la variable y la representación geométrica en un espacio con mayor dimensión que incógnitas en una ecuación. Este extracto, permite confirmar la evidencia de conocimiento por parte de Fernando en la categoría de dificultades y fortalezas en el aprendizaje de las matemáticas.

En la Tabla 10, se presenta un resumen, la distribución de conocimiento por parte de Fernando en las descripciones de las actividades diseñadas correspondientes a las categorías del KFLM.

Tabla 10.

Distribución de los conocimientos de Fernando en las categorías del KFLM

Actividad	**TA**	**FyD**	**IEC**	**IyE**
1, 2, 3 y 4	E		E	
5 y 6	E*	E*	E*	
7, 8 y 9	E*		E*	
10 y 11	E*		E*	
12 y 13	E*		E*	
14 y 15	E*		E*	
16 y 17	E*		E*	
18	E*		E*	
19, 20 y 21	E*		E	

Nota. TA se refiere a la categoría teorías de aprendizaje, FyD a la categoría fortalezas y dificultades, IEC a la categoría interacción del estudiante con el contenido, IyE a la categoría intereses y expectativas de aprendizaje, E hace referencia a evidencia de conocimiento y E* a una evidencia que es confirmada por respuestas de Fernando en la entrevista.

Como se observa en la Tabla 10, Fernando presenta conocimiento relacionado con las categorías de teorías de aprendizaje y la de interacción del estudiante con el contenido, este fenómenos, era uno que se esperaba, pues la Teoría APOE es una teoría en aprendizaje, y al basar el diseño de las actividades en una descomposición genética, se esperaba encontrar evidencia en las descripciones con respecto a esta teoría, en el caso de Fernando, también se encontró el uso de otras teorías de la educación matemática, como lo es la teoría del modelo 3UV y la teoría de multi representaciones, de igual manera, se esperaba una gran presencia de conocimiento con respecto a la interacción del alumno, pues al recurrir a las multi representaciones, se esperaba que Fernando explicitara la forma en la que se deseaba que el estudiante interactuara con todas estas representaciones en pro de su aprendizaje, esto se pudo notar, pues Fernando acudía a explicar esta interacción en términos de la teoría de representaciones (tratamiento, conversión).

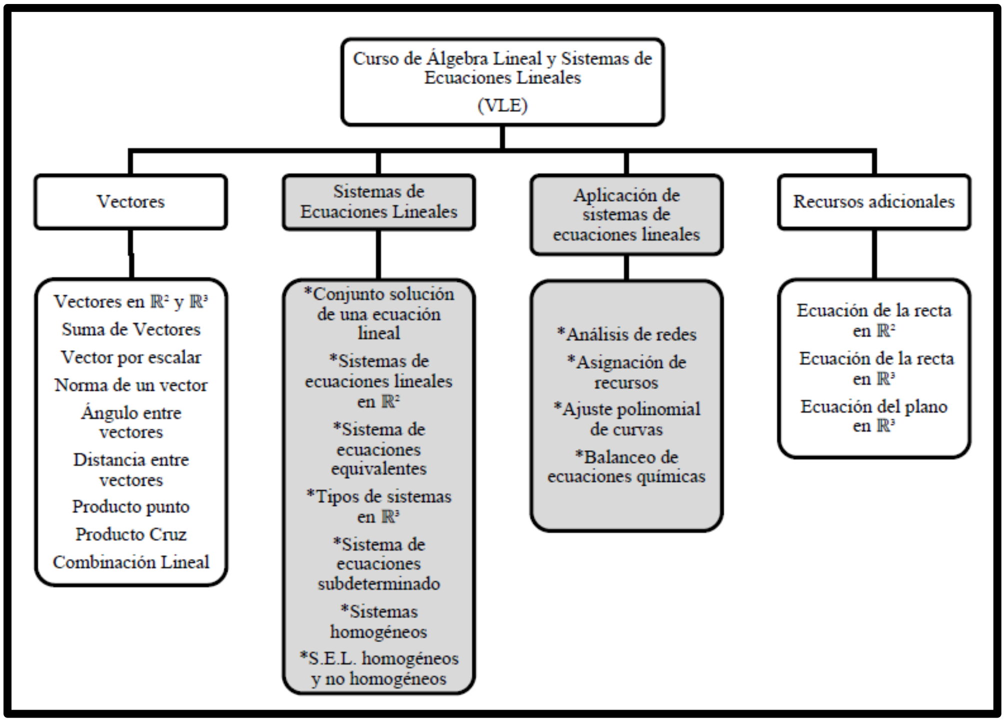
Por otro lado, la razón por la que en la categoría de dificultades y fortalezas en el aprendizaje de las matemáticas solamente se presenta un evidencia en todas las actividades, corresponde a que, de cierta manera, dichas dificultades son consideradas en el diseño de la descomposición genética, lo que de manera implícita ocasiona que se consideren en el diseño, lo que explicaría que no apareciera evidencia sobre esto en las descripciones de Fernando más que en una de ellas, pero gracias a la entrevista y la respuesta ya presentada por parte de Fernando a la pregunta relacionada con las dificultades, se puede asegurar que Fernando tiene conocimiento sobre esto, además de si considerarlo dentro del diseño de las actividades.

Conocimiento De Los Estándares De Aprendizaje De Las Matemáticas. Recordemos que este subdominio considera los conocimientos relacionados con las categorías: contenidos que se requieren enseñar, nivel de desarrollo conceptual y procedimental esperado y secuenciación de los temas.

Con respecto a la categoría contenidos que se requieren enseñar, se encuentra evidencia de conocimiento por parte de Fernando, pues durante la descripción del método que utilizó en su trabajo de investigación, muestra el mapa de sitio correspondiente al ambiente virtual de aprendizaje que diseño para fines de su trabajo (Figura 74).

Figura 74.

Mapa de sitio del ambiente virtual de aprendizaje diseñado por Fernando



Como se observa en el mapa de sitio (Figura 74), en el, Fernando explicita los contenidos que se requieren enseñar con respecto al curso de álgebra lineal en donde se aplicó la secuencia de actividades, de igual forma aparecen en orden dichos temas acompañados de sus subtemas, la parte sombreada corresponde a los temas que se consideran en la descomposición genéticas y de las actividades reportadas en su trabajo de investigación.

Por otro lado, en un comentario de Fernando durante la entrevista, hace mención sobre algunos temas que no se consideran en el plan de estudios y su relación con el curso.

Fernando: El tema de vectores, no está considerado en el programa, pero nosotros sabemos que es indispensable para trabajar con sistema de ecuaciones lineales, por ejemplo, no esta considerado en el programa pero nosotros la incoporamos, por eso no esta reportado en la tesis, pero dentro de la práctica, cuando estas utilizando el diseño utilizas el tema de vectores (…) por ejemplo, en el programa no se considera combinacion lineal de

> vectores pero tambipen es necesario que los estudiantes lo puedan hacer, o sea si hay varias actividades que incluyen varios conceptos en el plan original pero que si se necesitan, pero el más visible es el de vectores (…), algunas cosillas que tuvimos que meter de geometría analítica, por ejemplo, que tampoco se consideran en el plan, por ejemplo, como encontrar la ecuacion de un plano, (…), la ecuación vectorial de una recta tampoco se considera, eso también lo tuvimos que meter, pues no se esta considerado en el plan, (…) no es común que en la matemática escolar vean este tipo de represnetaciones.

Como se observa en el comentario de Fernando, es evidente que Fernando posee conocimiento sobre contenido que se requiere enseñar con respecto al tema de sistema de ecuaciones lineales, es por ello por lo que se afirma tener evidencia de conocimiento por parte de Fernando con respecto a la categoría de contenidos que se requieren enseñar, además de confirmar dicha evidencia encontrada en las descripciones de Fernando, pues como ya se ha mencionado previamente, en todas las descripciones Fernando explicita lo que se desea que el alumno construya.

En cuanto a la categoría correspondiente al nivel de desarrollo conceptual y procedimental esperado, se presentan evidencias de conocimiento a lo largo de las descripciones de Fernando. Algunos ejemplos de estas evidencias son las siguientes.

En la Figura 75, se presenta una parte de la descripción de la actividad 3, en dicha descripción, Fernando indica lo que espera que el alumno comprenda, así como la forma en la que se espera que proceda con respecto a la relación entre una pareja ordenada y el conjunto solución de una ecuación.

Figura 75.

Nivel conceptual y procedimental relacionado con el conjunto solución y las parejas ordenadas.

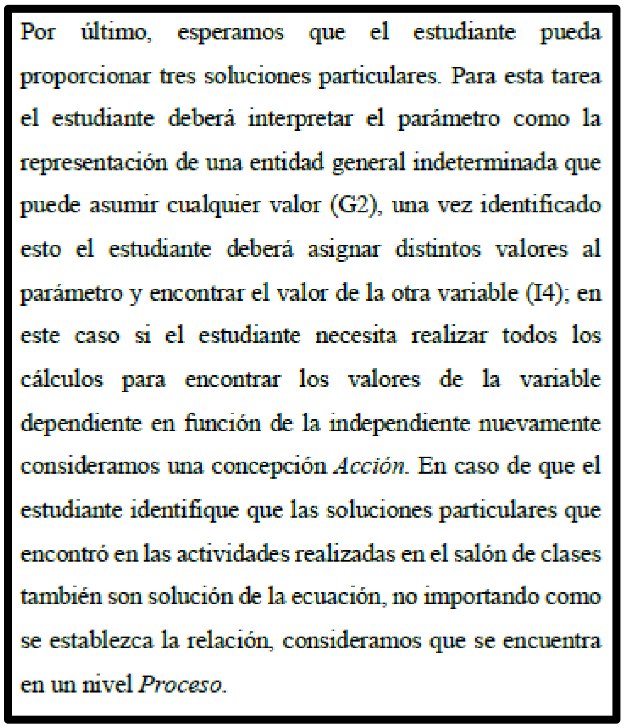
> En la segunda tarea se espera que el estudiante verifique que dichas coordenadas del punto son solución de la ecuación lineal original (*Acción*), es decir sustituya los valores de las variables y verifique si la ecuación es un enunciado verdadero (**I3**).
>
> En la tercera tarea el estudiante deberá verificar cuáles de las parejas ordenadas dadas corresponden a soluciones de la ecuación lineal y cuáles no, nuevamente mediante sustitución directa en la ecuación lineal (*Acción*). Nuevamente deberá sustituir los valores de las variables y verificar si la ecuación es un enunciado verdadero (**I3**), si es así, la pareja ordenada será solución de la ecuación.
>
> Por último se busca verificar que el estudiante es capaz de identificar la n-ada genérica dada como una relación funcional entre las variables x y y, y de encontrar el valor de la variable x dando valores al parámetro r; esta tarea involucra identificar al parámetro r como número general, y por lo tanto, asigne los valores propuestos, y determine el valor de la variable dependiente dado un valor de la independiente (**F2**).

En la Figura 75, se observa que Fernando describe que se desea que el alumno comprenda dos cosas con respecto a las parejas ordenadas, en una primera instancia que estas pueden o no ser soluciones particulares de una ecuación, y en este caso el proceso que se espera que alumno realice para verificar lo mencionado; en una segunda instancia, identificar este mismo par ordenado como una relación funcional entre sus elementos así como la relación del parámetro con esta relación funcional, así como la manera en la que se espera que el alumno proceda una vez comprendida las relaciones mencionadas. Dado que esta descripción es muy explícita con lo mencionado previamente, es que es considerada como evidencia de conocimiento.

Otra evidencia de conocimiento por parte de Fernando correspondiente al nivel de desarrollo conceptual y procedimental, lo encontramos en la descripción de la actividad 4 (Figura 76), en esta descripción, Fernando menciona lo que se espera que el alumno adquiera y realice con respecto al parámetro que se encuentra en la ecuación paramétrica de un conjunto solución (en este caso una recta) y presentada en forma de pareja ordenada.

Figura 76.

Nivel conceptual y procedimental esperados para el parámetro.



Por último, esperamos que el estudiante pueda proporcionar tres soluciones particulares. Para esta tarea el estudiante deberá interpretar el parámetro como la representación de una entidad general indeterminada que puede asumir cualquier valor (G2), una vez identificado esto el estudiante deberá asignar distintos valores al parámetro y encontrar el valor de la otra variable (I4); en este caso si el estudiante necesita realizar todos los cálculos para encontrar los valores de la variable dependiente en función de la independiente nuevamente consideramos una concepción *Acción*. En caso de que el estudiante identifique que las soluciones particulares que encontró en las actividades realizadas en el salón de clases también son solución de la ecuación, no importando como se establezca la relación, consideramos que se encuentra en un nivel *Proceso*.

En la descripción (Figura 76), se observa que Fernando, describe lo que espera que el alumno construya (tanto conceptual como procedimentalmente) con respecto a las soluciones particulares y el papel que tiene en ellas el parámetro, es decir, que a partir de comprender al parámetro como una entidad general indeterminada y a la relación que tiene el parámetro para hallar soluciones particulares como una relación funcional, podrá asignarle valores específicos al parámetro para poder hallar dichas soluciones particulares, este proceso, Fernando lo describe en términos de la Teoría APOE.

Otra descripción donde Fernando explicita el nivel conceptual y procedimental esperado con respecto al parámetro y su relación con las soluciones particulares se presenta en la de la actividad 6 (Figura 77), pero ahora correspondiente a un plano, donde tiene una variable libre.

Figura 77.

Nivel conceptual y procedimental esperados para el parámetro en $\mathbb{R}^3$.

En esta actividad esperamos que el estudiante sea capaz de proporcionar soluciones particulares a partir de la terna proporcionada $(-2r + 4, r, s)$, asignando inicialmente valores al parámetro r, y encontrando el valor correspondiente a la coordenada en x, en este caso se espera que los estudiantes superen el obstáculo que puede representar el tener la variable libre z, representada por el parámetro s.

Esperamos que realizar la *acción* de evaluar las ternas proporcionadas ayude al estudiante a identificar que el coeficiente numérico 0 (cero) que debió capturar en la construcción permite asignar a la variable z cualquier valor.

Por ejemplo, el evaluar la pareja ordenada (6,-1), la cual es solución en $\mathbb{R}^2$ pero no en $\mathbb{R}^3$, obliga a los estudiantes a evaluar la función en las variables del espacio dominio.

Estas actividades toman en cuenta que la construcción del concepto de una solución a una ecuación lineal se logra con la vinculación de dos esquemas, por un lado el de n-ada y por otro lado el de variable, mediante las acciones de escribir la ecuación como una función condicionada y la de evaluar la función en las variables del espacio dominio, esperamos que con el desarrollo de estas actividades se favorezca en los estudiantes una concepción *Proceso* del conjunto solución y permitan más adelante encapsular el concepto cuando necesiten operar sobre el conjunto solución de cada ecuación lineal, como por ejemplo, encontrar sistemas de ecuaciones equivalentes.

En esta descripción (Figura 77), se observa como Fernando explica lo que se espera que el alumno adquiera con respecto al parámetro pero ahora en R3, y aquí se incluye también lo que se espera que el alumno construya tanto procedimental como conceptualmente con respecto a las variables libres y su relación con el concepto de parámetro, al final Fernando menciona que lograr esa nivel procedimental y conceptual con respecto al parámetro y la relación funcional ayuda en la construcción del concepto de conjunto solución, todo esto es explicado en la descripción (Figura 77) en términos de la Teoría APOE.

Un ejemplo más, donde se encuentra evidencia de conocimiento con respecto al nivel conceptual y procedimental esperado, también se encuentra en un comentario de Fernando en la entrevista.

Fernando: En la Descomposición, por ejemplo, una de las cosas que los muchachos deben reflexionar es con el espacio en el que debe vivir un sistema de ecuaciones, o sea, reconocer que, aunque las variables no estén de manera explícita en una ecuación, si el sistema está en $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^4$ o $\mathbb{R}^5$, que las variables ahí pueden quedar libres.

El comentario previo de Fernando confirma la evidencia de conocimiento encontrada con respecto a la identificación por parte del alumno de la representación geométrica en un espacio con mayor dimensión que el número de incógnitas de la ecuación, un ejemplo de esto se observó en la Figura 77 y también la observamos en la Figura 78.

Figura 78.

Identificación de un plano.

En esta actividad se busca que el estudiante identifique la ecuación $x + 2y = 4$ en $\mathbb{R}^3$ como un plano, para esto se presenta la representación paramétrica del conjunto solución como la combinación lineal de dos vectores.

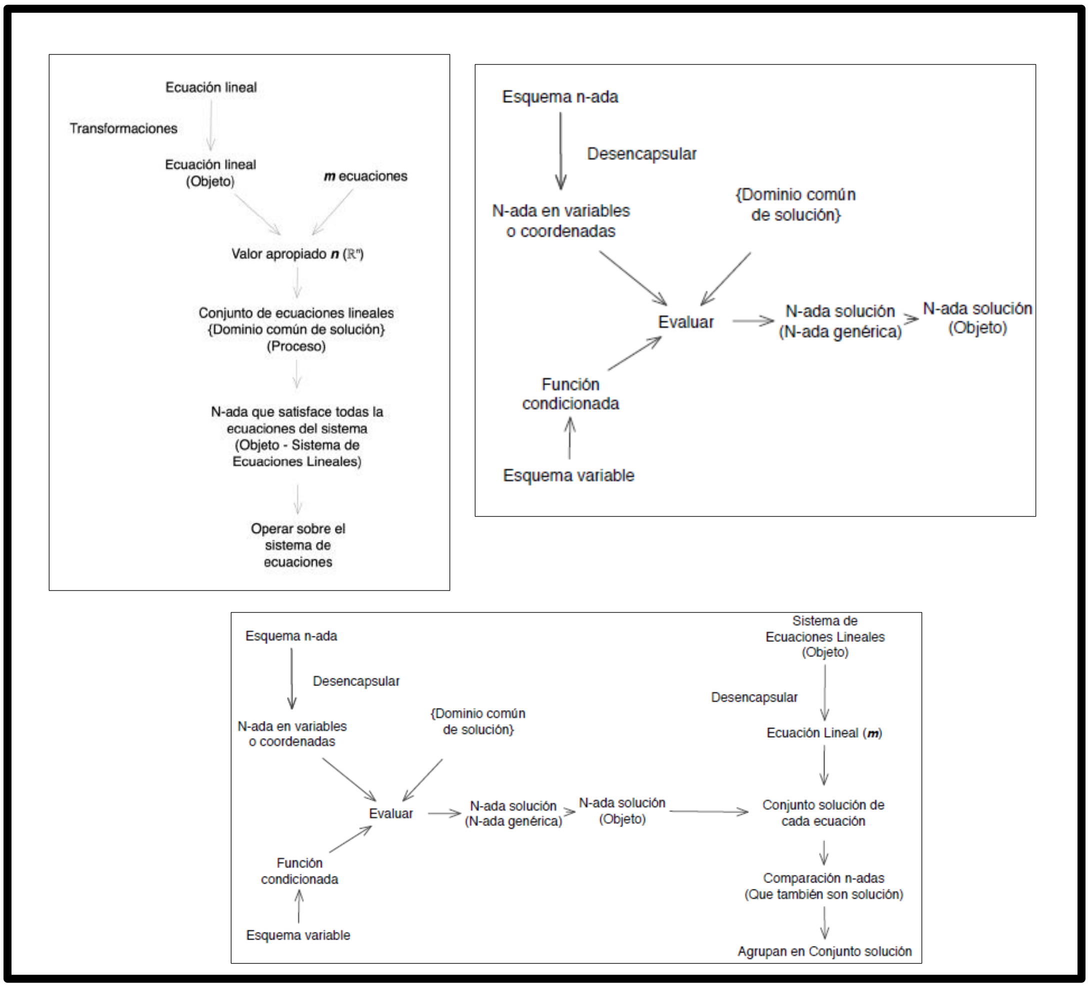
Posteriormente se presenta el conjunto solución como terna ordenada.

Las Figuras 77 y 78, pero principalmente el extracto presentado anteriormente, son herramientas que nos permiten afirmar la evidencia de conocimiento por parte de Fernando con respecto al nivel de desarrollo conceptual y procedimental esperado en relación con la identificación de la representación geométrica que corresponde un conjunto solución.

Todas las evidencias relacionadas a el nivel conceptual y procedimental esperado, también es apoyada por la misma descomposición genética de Borja (2015) y lo que en ella se menciona sobre la construcción de los conceptos, dicha descomposición genética, Fernando la presenta en su trabajo a partir de diversos esquemas creados por él, dichos esquemas se presentan a continuación (Ver Figura 79).

Figura 79.

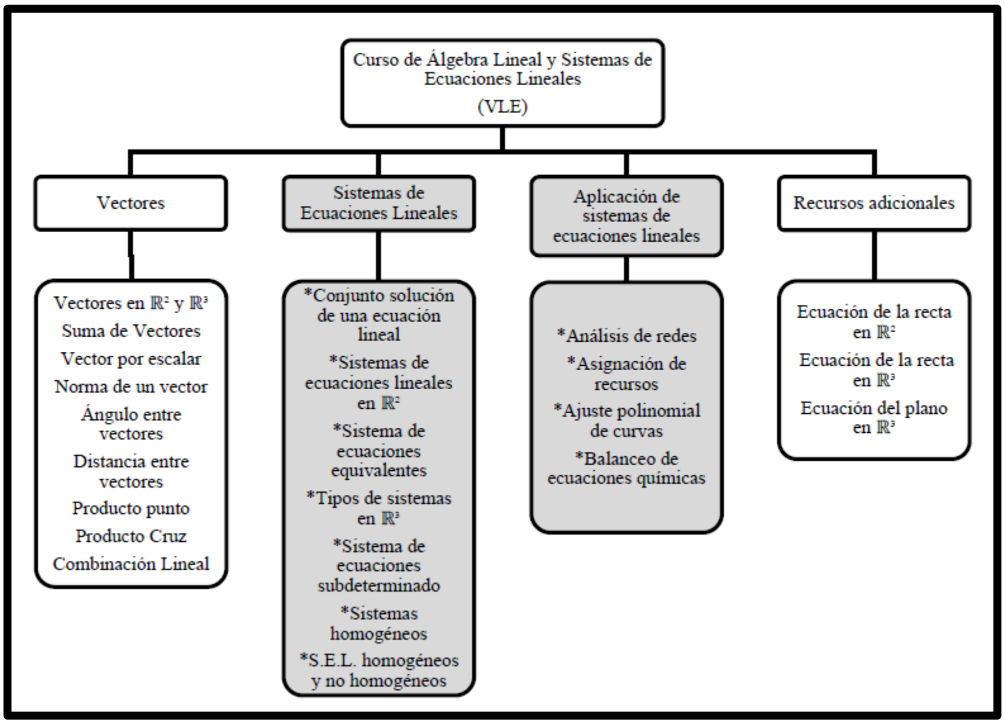
Descomposición genética utilizada por Fernando



Con respecto a la categoría de secuenciación de los temas, la evidencia de conocimiento encontrada por parte de Fernando se encuentra en el mapa de sitio del entorno virtual de aprendizaje diseñado por el (Figura 80), pues en él, los temas aparecen en el orden en el que se presenta, recordando que este orden es basado en la descomposición genética de Borja (2015).

Figura 80.

Mapa de sitio como evidencia de conocimiento sobre secuenciación de los temas



Por otro lado, dicha evidencia de conocimiento también es confirmada por comentarios realizados por Fernando durante la entrevista, dichos comentarios se presentan a continuación.

> Fernando: El tema de vectores, no está considerado en el programa, pero nosotros sabemos que es indispensable para trabajar con sistema de ecuaciones lineales, (…) en el programa no se considera combinacion lineal de vectores pero también es necesario que los estudiantes lo puedan hacer, o sea si hay varias actividades que incluyen varios conceptos en el plan original pero que si se necesitan, (…) algunas cosillas que tuvimos que meter de geometría analítica, por ejemplo, que tampoco se consideran en el plan, por ejemplo, como encontrar la ecuacion de un plano, (…), la ecuación vectorial de una recta tampoco se considera, eso también lo tuvimos que meter, pues no se esta considerado en el plan.

En el extracto previo, Fernando hace referencia a temas previos que son necesarios para el tema de sistema de ecuaciones lineales, incluso hace mención que esto no se considera en el plan, pero que sabe que dichos temas son indispensables.

En otro momento de la entrevista Fernando describe de manera general la organización de los temas en el cuso donde se aplicó la secuencia diseñada.

> Fernando: Para el programa son como tres unidades, una creo que es operaciones con los reales, después es un repaso de álgebra en general y la última unidad es justamente la de álgebra lineal, donde vemos estas cosas.

Ambos extractos nos permiten afirmar que hay evidencia de conocimiento por parte de Fernando con respecto a la categoría de secuenciación de los temas.

En la Tabla 11 se presenta un resumen del conocimiento por parte de Fernando correspondiente al KMLS

Tabla 11.

Distribución de los conocimientos de Fernando en las categorías del KMLS

Actividad	**CRE**	**NDCP**	**ST**
1, 2, 3 y 4	E*	E*	
5 y 6	E*	E*	
7, 8 y 9	E*	E*	
10 y 11	E*	E*	
12 y 13	E*	E*	
14 y 15	E*	E*	
16 y 17	E*	E*	
18	E*	E*	
19, 20 y 21	E*	E*	

Nota. CRE se refiere a la categoría contenido que se requiere enseñar, NDCP a la categoría nivel de desarrollo conceptual y procedimental, ST a la categoría secuenciación de los temas, E hace referencia a evidencia de conocimiento y E* a una evidencia que es confirmada por respuestas de Fernando en la entrevista o por otro elemento de su trabajo fuera de la descripción de las actividades

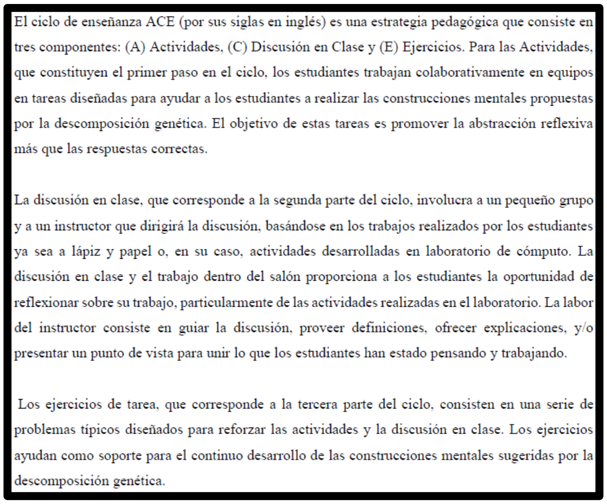
Como se puede observar en la Tabla 11, aunque las actividades diseñadas están ordenadas de manera secuencial, ninguna actividad presenta conocimiento con respecto a la secuenciación de los temas, esto debido a que, la secuenciación de las actividades está basada en la descomposición genética y además la evidencia de conocimiento con respecto a esta categoría se encuentra en los comentario que Fernando realizó durante la entrevista. Por otro lado, con respecto a la categoría de contenidos que se requieren enseñar, todas las actividades muestran ser evidencia de conocimiento, pues en todas las descripciones Fernando hace explicito el contenido que se está o se desea que el alumno construya, y dichas evidencias son apoyadas por la descomposición genética y los comentarios de Fernando, lo mismo sucede con la categoría nivel de desarrollo conceptual y procedimental esperado.

Conocimiento De La Enseñanza De Las Matemáticas. Recordemos que este subdominio considera a las categorías que identifican el conocimiento del profesor con respecto a teorías de enseñanza, recursos materiales o virtuales de enseñanza y estrategias, técnicas y tareas para la enseñanza.

Con respecto a la categoría teorías de enseñanza, se encuentra evidencia de conocimiento acerca de esta categoría en el trabajo de Fernando, pues en la sección correspondiente al marco teórico, menciona al ciclo en enseñanza ACE (por sus siglas en inglés, actividades, discusión en clase y ejercicios), la descripción de dicho ciclo es explicado por Fernando en la Figura 81.

Figura 81.

Ciclo de enseñanza ACE, explicado por Fernando.



El ciclo de enseñanza ACE (por sus siglas en inglés) es una estrategia pedagógica que consiste en tres componentes: (A) Actividades, (C) Discusión en Clase y (E) Ejercicios. Para las Actividades, que constituyen el primer paso en el ciclo, los estudiantes trabajan colaborativamente en equipos en tareas diseñadas para ayudar a los estudiantes a realizar las construcciones mentales propuestas por la descomposición genética. El objetivo de estas tareas es promover la abstracción reflexiva más que las respuestas correctas.

La discusión en clase, que corresponde a la segunda parte del ciclo, involucra a un pequeño grupo y a un instructor que dirigirá la discusión, basándose en los trabajos realizados por los estudiantes ya sea a lápiz y papel o, en su caso, actividades desarrolladas en laboratorio de cómputo. La discusión en clase y el trabajo dentro del salón proporciona a los estudiantes la oportunidad de reflexionar sobre su trabajo, particularmente de las actividades realizadas en el laboratorio. La labor del instructor consiste en guiar la discusión, proveer definiciones, ofrecer explicaciones, y/o presentar un punto de vista para unir lo que los estudiantes han estado pensando y trabajando.

Los ejercicios de tarea, que corresponde a la tercera parte del ciclo, consisten en una serie de problemas típicos diseñados para reforzar las actividades y la discusión en clase. Los ejercicios ayudan como soporte para el continuo desarrollo de las construcciones mentales sugeridas por la descomposición genética.

De igual forma, en la Figura 81, se observa que Fernando describe la relación de este ciclo de enseñanza con la descomposición genética, también durante el proceso de análisis de las descripciones de Fernando, se logró observar que las actividades se presentan utilizando este ciclo de enseñanza, pues varias actividades corresponden a un mismo problema o tarea específica, y para cada actividad se busca desarrollar uno de los momentos del ciclo de enseñanza, es por ello que esto corresponde a una evidencia de conocimiento con respecto a teoría de enseñanza.

Por otro lado, al igual que con Adrián, consideramos que Fernando, también hace uso de la Teoría APOE como referente para la enseñanza y en su caso, también el modelo 3UV y la teoría de multi representaciones, pues los constructos de estas tres teorías en unión con el ciclo de enseñanza ACE y el entorno visual de aprendizaje, conforman la base del diseño instruccional e intencional de cada una de las actividades planteadas en la secuencia, así como en la aplicación de estas. Las evidencias con respecto a la descomposición genética, el modelo 3UV y la teoría de multi representaciones ya han sido presentadas previamente, así como con respecto al ciclo de enseñanza ACE. En cuanto al entorno virtual de aprendizaje, Fernando justifica su uso para la enseñanza en la Figura 82.

Figura 82.

Justificación de Fernando para utilizar un entorno virtual de aprendizaje

Dentro de las tendencias de desarrollo discutidas en su artículo encontramos aspectos de interés para esta investigación. Por ejemplo, la disponibilidad de recursos de aprendizaje de matemáticas en línea (como las bibliotecas digitales y los objetos de aprendizaje) permite que muchos estudiantes ahora puedan recurrir a estas herramientas antes de consultar a un maestro o un libro de texto. Esto plantea preguntas sobre cómo organizar los recursos para facilitar el acceso y cómo diseñarlos pedagógicamente para fomentar la comprensión de los conceptos. Por otra parte, el uso de propuestas de aprendizaje mixto (*blended learning*) para ampliar y complementar el aprendizaje en el aula, con exploración y discusión en línea, o para emplear un modelo de aula invertido para hacer que el aula sea un lugar de extensión y elaboración, en lugar de instrucción directa, plantea preguntas sobre la necesidad de investigar los diversos modelos utilizados en educación matemática (Borba et al., 2016).

El presente trabajo contiene elementos que podemos enmarcar en el diseño de un Ambiente Virtual de Aprendizaje, VLE por sus siglas en inglés, utilizando un modelo de aprendizaje mixto, ya que se contará con sesiones en el salón de clases, en laboratorio de cómputo acompañados por el docente y tareas a realizar en línea fuera de clase. El ambiente virtual de aprendizaje cuenta con applets desarrollados en la plataforma *GeoGebra*.

Esta justificación con respecto al uso de un ambiente virtual de aprendizaje es basada en un artículo de Borboa et al. (2016), lo descrito en la Figura 82, se considera como evidencia de conocimiento con respecto a Teorías de enseñanza, pues en ella se observa que Fernando menciona su uso pedagógico para lograr ampliar y complementar el aprendizaje a partir de la organización de las actividades.

Por otro lado, dado que las actividades son diseñadas con un propósito específico, y que este propósito se encuentra justificado con la descomposición genética, así como en el modelo 3UV y pensadas para incorporar el ciclo de enseñanza ACE y el entorno virtual, todas las actividades se consideran como evidencia de conocimiento por parte de Adrián con respecto a la categoría de estrategias, técnicas, tareas y ejemplos para la enseñanza.

Ejemplos de esta evidencia de conocimiento se presentan a continuación, el primero corresponde a la descripción de la actividad 1, donde se le presenta al alumno la definición de conjunto solución (Ver Figura 83).

Figura 83.

Evidencia de conocimiento acerca de ejemplos relacionados con el conjunto solución

Se introduce el concepto de conjunto solución de una ecuación lineal, se presenta una definición formal del concepto y se da un ejemplo del conjunto solución de una ecuación lineal en $\mathbb{R}^2$, también se muestra la representación paramétrica del conjunto solución.

Como se observa en la Figura 83, Fernando hace explicito que se usará un ejemplo de conjunto solución relacionado a una ecuación lineal en $\mathbb{R}^2$, lo que también es evidencia de conocimiento por parte de él con respecto a ejemplos de ecuaciones en $\mathbb{R}^2$.

Otro ejemplo relacionado a esta categoría la encontramos en la descripción de la actividad 9 (Ver Figura 84), donde se le presentan al alumno n-adas que representan a un sistema de ecuaciones y se les pide resolverlo.

Figura 84.

Evidencia de conocimiento relacionado a los ejemplos de tipos de sistema de ecuaciones

En esta actividad se presentan dos sistemas de ecuaciones lineales, el primero inconsistente y el segundo consistente con infinitas soluciones.

Se puede observar que, Fernando durante la descripción explicita la evidencia de conocimiento con respecto a los tipos de sistemas de ecuaciones, consistente e inconsistente. Por otro lado, en la Figura 85, se observa conocimiento por parte de Fernando, pero ahora con respecto a ejemplos correspondientes a sistemas de ecuaciones homogéneos con única y con infinita solución.

Figura 85.

Evidencia de conocimiento sobre ejemplos de sistemas de ecuaciones homogéneos

> La actividad inicia presentando el concepto de SEL Homogéneo esto con la intensión de que el estudiante verifique incluso geométricamente este teorema al menos en $\mathbb{R}^3$.
>
> Se pide al estudiante que resuelva dos sistemas homogéneos, uno con única solución y otro con infinitas soluciones, el estudiante deberá resolver el sistema a lápiz y papel y posteriormente utilizar el applet para capturar los coeficientes numéricos en la representación matricial del sistema de ecuaciones y observe las transformaciones que sufren los planos después de las operaciones realizadas sobre el sistema.

De igual forma, se puede observar en la descripción previa que Fernando posee conocimiento también sobre ejemplos que ayudan a mostrar un teorema con respecto a sistema de ecuaciones homogéneos, pues por lo mencionado al inicio de la descripción, la actividad 16 fue diseñada con la intensión de que el ejemplo, junto con el applet ejemplificaran dicho teorema.

En los ejemplos mostrados previamente, se ejemplifica como es que las actividades son utilizadas como estrategias, técnicas y tareas para la enseñanza, pues se logra observar la aparición de todos los elementos que basaron el diseño de la secuencia de actividades con el fin de perseguir los objetivos planteados en la descomposición genética.

Con respecto a la categoría recursos materiales y virtuales de enseñanza, se esperaba hallar evidencia de conocimiento relacionado a esta categoría, pues como ya se ha mencionado, Fernando utilizó un entorno virtual de aprendizaje mixto, dentro del cual utilizo GeoGebra, un programa que es considerado como software de matemática dinámico.

En principio de identifico indicio de conocimiento sobre esta categoría, pues las actividades van acompañadas de applets diseñadas por Fernando para enriquecer las reflexiones de los alumnos, pero dicho indicio se convierte en evidencia, gracias a que Fernando durante la entrevista menciona diversas características sobre la razón por la que se decidió utilizar GeoGebra y muestra conocer el software incluyendo las limitaciones que este tiene. Todo lo anterior lo podemos observar en los siguientes extractos.

En este primer extracto mostramos la respuesta de Fernando con respecto a una de las preguntas que se le plantearon, el objetivo de esta pregunta era investigar sobre los conocimientos de Fernando con respecto a GeoGebra.

Investigador: ¿Qué conocimientos acerca de GeoGebra pusiste en juego durante el diseño de las actividades?

Fernando: Mucho de las construcciones, fueron prueba y error, y estar trabajando muchísimo (…). Yo tomé un diplomado en el INAOE (…) sobre el uso de tecnología y la primera parte es con GeoGebra, ahí aprendi bastantes cosillas, pero todo lo demás pues fue, estar trabajando de manera autodidácta, para hacer esto, tuve que aprender a escribir en latex, yo no sabía que se podía meter latex en GeoGebra, sabía que se pueden meter casillas de entrada, fue mucho estar probando y mucho estar también explorando que más se podía hacer (…). La página de GeoGebra tiene un wiki que te ayuda bastante, en como ocupar algunos comandos y cosas así (…) realmente no es muy complicada la construcción, solamente es mucha talacha.

Como se observa en la descripción previa, Fernando explicita los conocimientos que ya tenía sobre GeoGebra y las dificultades a las que se enfrentó para lograr diseñar las actividades. Más adelante, durante la entrevista Fernando muestra el applet correspondiente a la actividad 13, en donde se le presenta al alumno la representación matricial, algebraica y geométrica de un sistema de ecuaciones inconsistente y se le pide aplicar el método de Gauss-Jordán para resolverlo y que a la par vaya observando lo que sucede en la representación geométrica. Mientras lo muestra Fernando menciona lo siguiente.

Fernando: Aquí en esta hay un punto en el que, bueno en esta no tarda tanto, te muestro, porque esto por ejemplo falta, hay algunas cosillas que aún le podrían faltar ¿no? [comienza a resolver la actividad], pero por ejemplo, algo que falta, es que despues d ehaber hecho dos operaciones, ya tienes un par de planos paralelos y en la siguiente operación, pues tendrías la incosistencia, algo que todavía le hace falta es esto, como esta incosistencia 0=-2 nos devolviera algo en la parte geométrica, no se me

> ha ocurrido como, no debe de sar tan complicado, pero debes poner algún objeto que este condicionado a que no fuera una fila nula.

El extracto previo, también nos muestra más sobre el conocimiento de Fernando acerca de GeoGebra, pues aunque describe una dificultad en uno de sus diseños, hace explicito que tiene alguna idea de cómo mejorar, además de que seguido de ese comentario, Fernando mostró el código de dicho applet y menciono como es que los profesores pueden editar dicho applet, lo cual también forma parte del uso de dicha herramienta.

Más adelante en la entrevista, mientras Fernando explica algunas actividades que se tuvieron que considerar para ayudar con los conocimientos necesario de los alumnos para su objetivo, muestra un applet en donde se construye un plano a partir de la combinación lineal de 3 vectores, y dicho applet es animado, pues tiene la opción de activar un deslizador que ayude a generar distintas combinaciones lineales, mientras muestra este applet Fernando menciona.

> Fernando: Los deslizadores despues de asígnar valores aleatorios a los escalares de la combinación lineal, van a generar un plano, la intenicón es que si se deja esto mucho tiempo [refieriéndose a la animación], ya se puede ver de alguna manera que todos esos pequeños puntitos que se estan mostrando están contenidos o deberían estar contenidos en el plano [mientras esto menciona, en el applet activa mostrar el plano que se genera], aquí el plano bueno, las restricciones de la tecnología, pues esta marcado ahí en un espacio muy pequeño.

Este extracto, nos permite afirmar que Fernando conoce algunas de las restricciones que el mismo GeoGebra puede tener, lo cual también confirma el conocimiento con respecto a esta categoría, de igual forma, algo que también ayuda a confirmar la evidencia de conocimiento con respecto a los recursos materiales o virtuales de enseñanza, es que gracias a GeoGebra Fernando pudo incorporar en el diseño de las actividades la teoría de multi representaciones, pues como ya se ha mencionado, le permitió presentar en un mismo applet la representación algebraica, matricial y gráfica y se esperaba que esto ayudara a la construcción de los objetos matemáticos, dado que esto lo explicita en las actividades donde hay un applet (Figura 86)

Figura 86.

Evidencia del uso de multi representaciones en la descripción de actividades.

> Esperamos que el presentar al estudiante el mismo objeto matemático en distintos registros de representación semiótica (algebraico, matricial, como combinación lineal y geométrico) favorezca la construcción del conocimiento.

Por las respuestas de Fernando presentadas previamente y por lo mostrado en la Figura 86, se considera que las actividades que son conformadas por un applet también forman parte de la evidencia de conocimientos acerca de Fernando con respecto a la categoría de recursos materiales o virtuales de enseñanza.

En la Tabla 12, se presenta un resumen sobre los conocimientos que Fernando puso en juego durante el diseño de la secuencia de actividades, todos estos relacionados a las categorías del KMT.

Tabla 12.

Distribución de los conocimientos de Fernando en las categorías del KMT

Actividad	TEM	RDyFE	ETTyEE
1, 2, 3 y 4	E*	E*	E*
5 y 6	E*	E*	E*
7, 8 y 9	E*	E*	E*
10 y 11	E*	E*	E*
12 y 13	E*	E*	E*
14 y 15	E*	E*	E*
16 y 17	E*	E*	E*
18	E*	E*	E*
19, 20 y 21	E*	E*	E*

Nota. TEM se refiere a la categoría teorías de enseñanza de las matemáticas, RDyFE refiere a la categoría recursos digitales y físicos para la enseñanza, las siglas ETTyEE se refiere a la categoría estrategias, técnicas, tareas y ejemplos para la enseñanza, la sigla E* a las descripciones que dicha evidencia de conocimiento es confirmada o apoyada por las respuestas de Fernando en la entrevista o por otros elementos del trabajo de Fernando diferentes a las descripciones de las actividades.

Como se observa en la Tabla 12, Fernando conocimiento muy marcado con respecto al KMT, aunque toda la evidencia de conocimiento se encuentra justificada de mejor manera por las respuestas de la entrevista y otras secciones de su trabajo que por las descripciones de las actividades, pero dichos elementos que sirven para apoyar o confirmar la evidencia fueron considerados por Fernando para el diseño de la secuencia de actividades y todos ellos basados principalmente en los constructos de la Teoría APOE.

Conclusiones

Durante el análisis, para cada uno de nuestros informantes, después de presentar las evidencias e indicios de conocimiento, se presentó una tabla que resume la aparición de conocimiento correspondiente a cada subdominio durante el diseño de las actividades. Dichas tablas nos permiten afirmar que ambos informantes ponen de manifiesto conocimiento didáctico del contenido, así como del matemático.

Apoyados en estas tablas, junto con los comentarios correspondientes a evidencias de conocimiento encontrados fuera del diseño de actividades, se presentan las siguientes conclusiones.

Durante nuestro análisis podemos afirmar que, diseñar una secuencia de actividades basas en la teoría APOE, pone en práctica conocimiento relacionado con el conocimiento de los temas, ya que, se presenta conocimiento relacionado a la categoría de procedimientos. Esto en el hecho de que la teoría APOE es una teoría constructivista y las actividades basadas en ella permiten proponer procedimientos que favorecen la construcción de los conceptos

De igual manera, se presenta conocimiento con respecto a la categoría definiciones, propiedades y sus fundamentos, particularmente en lo referido a definiciones y propiedades, puesto que, conocer las definiciones matemáticas del objeto a estudiar, así como sus propiedades, permiten que el docente piense de mejor manera las actividades, así como su intencionalidad, también basadas en la descomposición genética.

Por otro lado, podemos afirmar que al trabajar con la teoría APOE para diseñar actividades a partir de una descomposición genética, permite la puesta en práctica de conocimientos relacionados con los registros de representación del objeto a estudiar y que permiten su construcción. En el caso de nuestros informantes, en todas sus actividades se logró encontrar evidencia de conocimiento con respecto a lo mencionado, esto justificado en que, Adrián complementó su diseño con los registros de representación mencionado en Pons y Fernando en los considerados en el constructo de multi-representaciones, en ambos casos haciendo énfasis en los registros gráficos, algebraicos y numéricos. Además, ambos mencionan la importancia de la presentación de estos registros en un mismo ejercicio en el proceso de construcción del conocimiento.

Con respecto a la categoría de fenomenología y aplicaciones, podemos afirmar que la presencia de dicho conocimiento es muy débil, puesto que, de nuestros dos informantes, solamente uno de ellos presentó evidencias de conocimiento con respecto a esta categoría, la razón a la que le atribuimos dicho fenómeno, corresponde a que en el caso de Adrián, su secuencia didáctica es enfocada al nivel de bachillerato y en el caso de Fernando, es dirigida a estudiantes de ingeniería. Esto permite que Fernando, pueda incursionar más a fondo en la fenomenología y aplicación del concepto que trato, los sistemas de ecuaciones.

Refiriéndonos al subdominio del conocimiento de la estructura de las matemáticas, podemos afirmar que es uno de los subdominios que presenta una práctica discreta, puesto que, solamente se encontró evidencia de conocimiento en ambos informantes, para conexiones auxiliares y en uno de ellos en conexiones de complejización. Adrián utiliza como conexiones auxiliares la idea de sucesión como lista de números y el valor absoluto como métrica, para el caso de Fernando la idea de variable a partir del modelo 3UV (Ursini et al., 2016).

El fenómeno descrito previamente se lo atribuimos al hecho de que ambos informantes solamente explicaron en su trabajo la forma en la que estas actividades apoyaban a la descomposición genética en la que se basaron y que las instrucciones son dirigidas a estudiantes en formación en el área de las matemáticas, particularmente a nivel bachillerato e ingeniería.

Por otro lado, con respecto a la práctica matemática, se observó que la única práctica matemática considerada durante el diseño y durante la descripción de la secuencia didáctica, corresponde a la práctica de demostrar.

Las evidencias de conocimiento mencionadas se sustentan en el intento de categorización del KPM realizado por Campos-Cano y Flores-Medrano (2019), donde caracterizan a dicha práctica, con subcategorías como usos de los registros de representación en la demostración, fases cognitivas de la demostración, funciones de la demostración, entre otros, siendo estas subcategorías las que nos permiten afirmar que existe evidencia de conocimiento por parte de nuestros informantes.

Es importante mencionar que la aparición de este conocimiento es muy discreta, esto se lo atribuimos al hecho de que, ambos informantes dedicaron sus diseños para niveles educativos (bachillerato e ingeniería) donde la formalidad matemática no es considerada como prioridad.

Con respecto al dominio del conocimiento didáctico del contenido, también podemos afirmar que, durante el diseño de actividades que tienen como base una descomposición genética construida a partir de la teoría APOE, se ponen en práctica conocimiento relacionado a dicho dominio, mencionando que dicho dominio tiene mayor presencia que el correspondiente al conocimiento matemático.

Refiriéndonos al subdominio de las características de aprendizaje de las matemáticas, se afirma que existe evidencia suficiente de conocimiento, puesto que, para el caso de ambos informantes, se presentan evidencias con respecto a las categorías, teorías de aprendizaje, interacción del estudiante con el contenido y dificultades y fortalezas.

Con respecto a la categoría teorías de aprendizaje, se esperaba encontrar evidencia suficiente de conocimiento en nuestros informantes por dos razones, la primera, que la teoría APOE es una teoría institucionalizada relacionada con el aprendizaje de las matemáticas y la segunda, que las secuencias de actividades están basadas en una descomposición genética, y esta es creada considerando el proceso de aprendizaje basado en el constructivismo. Lo anterior se observa en ambas secuencias, pues el orden de las actividades va en relación a las descomposiciones genéticas y éstos basados en el proceso de construcción del conocimiento relacionado con el objeto matemático en cuestión.

En cuanto a la categoría interacción del estudiante con el contenido, la evidencia de conocimiento por parte de nuestros informantes corresponde a que, durante las descripciones de las actividades, como se pudo observar, cada uno de ellos describía, no solamente la actividad, sino también su intención y al describirla también mencionaban la manera en la que se esperaba que el alumno se involucrara con cada uno de estos y por tanto con el contenido a aprender-enseñar.

Algo importante de mencionar es que, aunque en las tablas correspondientes al KFLM no se encuentra marcada la evidencia con respecto a la categoría de dificultades y fortalezas, dichas evidencias existen dentro de otras secciones del trabajo de nuestros informantes. Como se mencionó, estas se encuentran descritas previamente y durante la presentación de la descomposición genética, ya que la construcción de dicha descomposición se basa principalmente en estas dificultades y fortalezas, por lo que también de manera indirecta fueron consideradas en el diseño de las actividades. De igual manera, nuestros informantes mostraron conocimiento con respecto a las fortalezas y dificultades en sus respuestas dadas ya sea para el cuestionario o la entrevista que se les realizó.

Pasando ahora, al subdominio correspondiente al conocimiento relacionado con las características de aprendizaje de las matemáticas, que recordemos, hace alusión a todo lo marcado en el currículo de matemáticas, podemos afirmar que también se hace presente durante el diseño de actividades basadas en la teoría APOE.

Lo anterior, enmarcó principalmente en las categorías contenido que se requiere enseñar, desarrollo conceptual y procedimental esperado y secuenciación de los temas. Como se observó durante el análisis, ambos informantes presentaron evidencia de conocimiento en todas las categorías ya mencionadas.

Con respecto a la categoría de desarrollo conceptual y procedimental esperado, ya se pensaba hallar dicha evidencia de conocimiento, pues la descomposición genética tiene marcada en cada uno de sus pasos el nivel de desarrollo cognitivo que se desea del concepto junto con el proceso, esto en sus propios mecanismos y estructuras mentales, las cuales podemos considerar como una profundización de lo que en el currículo se propone como aprendizajes esperados.

De igual manera podemos decir que la evidencia de conocimiento correspondiente a la categoría del contenido que se requiere enseñar se encuentra justificada tanto por la descomposición genética como por los programas de las materias. También es importante mencionar que estas evidencias de conocimiento fueron confirmadas y apoyadas por los comentarios de nuestros informantes durante la entrevista y el cuestionario correspondiente.

Con respecto a la categoría secuenciación de los temas, como se mencionó durante el análisis, no se encontró evidencia de conocimiento durante el diseño de actividades, pero si fuera de ella. Dicha evidencia se encontró en el trabajo de nuestros informantes previo a que comenzaran a presentar y describir su secuencia de actividades. Lo anterior nos permite confirmar que se pone en práctica conocimiento en relación con esta categoría, puesto que es importante conocer los conocimientos previos necesarios para el tema y así poder realizar un buen diseño, además de que estos conocimientos previos son considerados en el diseño de la descomposición genética.

Pasando ahora al subdominio del conocimiento de la enseñanza de las matemáticas, es importante mencionar que, durante el proceso de análisis, pudimos observar que nuestros informantes no solamente utilizaron algunas teorías auxiliares en relación con la enseñanza (modelo 3UV, registros de representaciones semióticas, multi-representaciones), sino también interpretaron a la teoría APOE como una teoría de enseñanza.

Lo anterior basado en el ciclo de enseñanza ACE (actividades, discusión en clase y ejercicios). Este fenómeno es más claro en la secuencia de Fernando, puesto que en ella se explicita el momento del ciclo de enseñanza al que se hace referencia, en el caso de Adrián, no es muy claro puesto que no se da referencia de manera explícita, pero al revisar las actividades y los comentarios se puede observar que se pasa por cada uno de los momentos del ciclo de enseñanza.

Con respecto a la categoría de recursos digitales y físicos (recordemos que se hace referencia a material didáctico) solamente se halló evidencia de conocimiento por parte de uno de nuestro informantes (Fernando), puesto que utilizó a GeoGebra como complemento en todas sus actividades, esto basado en la teoría de multi-representaciones que utiliza en su marco teórico. Es importante mencionar que, en el caso de Adrián, se considera que no se encuentra evidencia con respecto a esta categoría, puesto que su diseño de actividades se centra en comprender la definición de límite con ayuda de gráficas y tablas que se le presentan al alumno en papel.

En contraste, la categoría estrategias, técnicas, tareas y ejemplos correspondiente al KMT, también tiene una puesta en práctica muy presente durante el diseño, y consideramos que es una de las más importantes, puesto que nuestros informantes tuvieron que proponer actividades que no solamente permitieran la construcción de procesos y su coordinación, sino también la interiorización de acciones y que se ajustaran a la descomposición genética en cuestión. Lo anterior implicaba buscar ejemplos que evidenciaran ciertas propiedades (existencia o no de un límite, existencia o no del conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales) de los conceptos a trabajar y ejercicios y tareas que propiciaran el aprendizaje de los alumnos.

Como se mencionó al principio de esta sección, nuestros informantes presentaron conocimiento con respecto a todos los subdominios que se enmarcan en el MTSK, algunos con mayor presencia que otros. Esto último se presenta en las siguientes tablas de colores (Ver Tablas 13 y 14).

Tabla 13.

Distribución de los conocimientos en el MK

Dominio	Subdominio	Categoría
Conocimiento Matemático (MK)	Conocimiento de los temas (KoT)	Procedimientos
		Definiciones, propiedades y fundamentos
		Registros de representación
		Fenomenología y aplicaciones
	Conocimiento de la estructura de las matemáticas (KSM)	Conexiones de simplificación
		Conexiones de complejización
		Conexiones auxiliares
		Conexiones transversales
	Conocimiento de la práctica matemática (KPM)	Demostrar
		Otras prácticas (definir, ejemplificar)

Como se observa en la Tabla 13, el subdominio con mayor presencia corresponde al KoT, seguido del KSM y terminando con el KPM, teniendo como categorías más presentes, como ya se describió, las de definiciones, propiedades y fundamentos, registros de representación y conexiones auxiliares.

Por otro lado, podemos observar que hay presencia nula de las categorías correspondientes a conexiones de simplificación, transversales y otras prácticas matemáticas como la de definir y ejemplificar.

Lo anterior ocasionado porque ambas secuencias de actividades están dirigidas a niveles donde la formalidad matemática no es necesaria ni solicitada en el plan de estudios.

Tabla 14.

Distribución de los conocimientos en el PCK

Dominio	Subdominio	Categoría
Conocimiento didáctico del contenido (PCK)	Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT)	Teorías de enseñanza de la matemática
		Recursos de enseñanza (físicas y digitales)
		Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos
	Conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM)	Teorías de aprendizaje de las matemáticas
		Fortalezas y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas
		Interacción del estudiante con el contenido
		Intereses y expectativas del aprendizaje de las matemáticas
	Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS)	Contenidos que se requieren enseñar
		Nivel de desarrollo conceptual y procedimental esperado
		Secuenciación de los temas

En la Tabla 14 se puede observar que, a diferencia del MK, se tiene presencia en principio del KFLM seguido del KMT y KMLS, lo que nos permite afirmar que existe, aunque con una pequeña diferencia, mayor presencia del PCK que del MK en nuestros informantes.

Las categorías que se involucran con mayor fuerza son las correspondientes a las teorías de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, las estrategias, técnicas, tareas y ejemplos, así como la de contenidos que se requieren enseñar junto con la de nivel de desarrollo conceptual y procedimental esperados. La razón por la que se atribuye la mayor presencia de estas categorías es porque todo lo que se considera en ellas también se considera en la construcción de la descomposición genética y, por tanto, en las secuencias de actividades, por esto, podemos afirmar que el utilizar la teoría APOE pone en práctica con mayor fuerza a los conocimientos relacionados con las categorías ya mencionadas.

La razón por la que el conocimiento en relación con los recursos de enseñanza, no tiene una mayor presencia, es porque solamente uno de nuestros informantes utilizó herramientas de este tipo, aseguramos que si ambos informantes hubieran utilizado algún recurso didáctico esta categoría tendría la misma presencia que las ya mencionadas en el párrafo previo.

Otra cosa importante de mencionar es que, durante nuestro análisis, pudimos observar que nuestros informantes interpretan y ponen en práctica una descomposición genética en una tendencia de enseñanza de tipo tecnológica, ya que, como ya se ha mencionado en varias ocasiones, la misma descomposición genética guía el diseño de las actividades para lograr la construcción del conocimiento.

Por tanto, se afirma que, con lo descrito en los párrafos previos se describe la manera en la que el uso de la teoría APOE repercute en el desarrollo y práctica del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, dando así respuesta a nuestra pregunta de investigación.

A partir de lo ya reportado durante este trabajo, podemos reflexionar acerca de futuras investigaciones que partan de este trabajo. Uno de los temas que llegaron a causar interés, es el relacionado con lo que podría pasar con el conocimiento especializado del profesor después de haber tenido una formación formal en una teoría institucionalizada, ya que el objetivo de este trabajo fue solamente caracterizar el conocimiento que se pone en práctica durante el diseño de actividades, es decir, mientras aún se tenía la formación formal en la teoría, más no en la práctica diaria del docente. Esto podría permitir modificar o confirmar las conclusiones que en este trabajo se reportaron.

De igual manera, para poder dar respuesta a una pregunta más general acerca de la repercusión de una teoría institucionalizada en el conocimiento especializado del profesor de matemáticas, sería necesario realizar un estudio similar, pero utilizando otra teoría, ya sea de enseñanza o aprendizaje, aplicada por el docente, ya sea durante el diseño de actividades o durante el proceso de enseñanza. Realizarla durante el diseño de actividades permitiría completar este trabajo, puesto que, permitiría hacer más explícito el conocimiento utilizado al basarse en la Teoría APOE.

Otra reflexión que surgió durante la investigación hace referencia al conocimiento especializado que un profesor de matemáticas pone en práctica al diseñar una descomposición genética, se piensa que dicho conocimiento, en contraste con los resultados obtenidos en este trabajo, tendrá más presencia del conocimiento matemático que del conocimiento didáctico del contenido. Dicha investigación también podría ser una que podría complementar este trabajo.

Referencias

Arnon, I., Cottril, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Fuentes, S. R., Trigueros, M., y Weller, K. (2014). *APOS theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education*. Springer Science & Business Media.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389–407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Baptista, P., Fernández, C., y Hernández, R. (2010). *Metodología de la investigación*. Mc Graw Hill.

Campos-Cano, M., y Flores-Medrano, E. (2019). Prácticas matemáticas: un avance en su caracterización. En J. Carrillo, M. Codes y L. C. Contreras (Eds.), *IV Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 87-94). Universidad de Huelva Publicaciones.

Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, Á., Ribeiro, M., y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, *20*(3), 236–253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Carrillo, J., Flores, E., Climent, N., Contreras, L., Aguilar, Á., Escudero, D., y Montes, M. (2013). Investigación sobre el profesor de matemáticas en la Universidad de Huelva (España). En C. Dolores, M. del S. García, H. Judith, & L. Sosa (Eds.), *Matemática educativa: la formación de profesores* (Díaz de Sa, pp. 97–116)

Escudero-Ávila, D., Contreras, L. C., & Vasco, D. (2016). Conocimiento de la Enseñanza de las matemáticas (KMT). En J. Carrillo, M. Á. Montes, & L. C. Contreras-Gónzalez (Eds.), *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 35–41).

Escudero-Ávila, D., Gomes Moriel, J., Muñoz-Catalán, M. C., Flores-Medrano, E., Flores, P., Rojas, N., & A., A. (2016). Aportaciones metodológicas de investigaciones con mtsk. En *eflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Seminario de*

Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva (pp. 60–68).

Escudero-Domínguez, A., & Carrillo, J. (2016). Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS). En J. Carrillo, M. Á. Montes, & L. C. Contreras-Gónzalez (Eds.), *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 49–54).

Escudero, D. I., Flores, E., & Carrillo, J. (2012). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas. *Memorias de La XV Escuela de Invierno En Matemática Educativa*, 35–42. https://www.researchgate.net/publication/235932712%0AEL

Flores-Medrano, E., (2016). Conocimiento de la práctica matemática (KPM). En J. Carrillo, M. Á. Montes, & L. C. Contreras-Gónzalez (Eds.), *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 30–34).

Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Montes, M., Aguilar, Á., & Carrillo, J. (2014). Nuestra modelación del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, el MTSK. En Á. Aguilar, E. Carmona, J. Carrillo, L. C. Contreras, N. Climent, D. Escudero-Ávila, E. Flores-Medrano, P. Flores, J. L. Huitrado, M. Montes, M. Muñoz-Catalán, N. Rojas, L. Sosa, D. Vasco, & D. Zakaryan (Eds.), *Un marco teórico para el Conocimiento especializado del Profesor de Matemáticas* (1st ed., pp. 71–93). Universidad de Huelva. https://doi.org/10.13140/2.1.3107.4246

Flores, E., Escudero, D. I., & Carrillo, J. (2013). A theoretical review of specialised content knolwedge. *Proceedings of the VIII Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 8)*, *8*, 3055–3064.

Flores-Medrano, E., Sosa, L., & Ribeiro, C. M. (2016). Tránsito desde el MKT al MTSK. En J. Carrillo, M. Á. Montes, & L. C. Contreras-Gónzalez (Eds.), *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 7–11).

Flores-Medrado, E., Hernandez, L. A., & Sánchez-Ruíz, J. G. (2020). Discusión de una propuesta de doctorado profesionalizante en Educación Matemática, *Educação Matemática Debate* 4(10). https://doi.org/10.46551/emd.e202048

Ponte, J. P. (1994). Mathematics teachers' professional knowledge (Plenary lecture). En J. P. Ponte & J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the XVIII International Conference for the Psychology of Mathe- matics Education (PME)* (pp. 195–2010).

Liñán, C., Contreras, L. C., & Barrera, V. J. (2016). Conocimiento de los temas (KoT). En J. Carrillo, M. Á. Montes, & L. C. Contreras-Gónzalez (Eds.), *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 12–20).

Llinares, S. (1998). Conocimiento profesional del profesor de matemáticas y procesos de formación. *Revista UNO*, *17*, 51-63

Montes, M. A., Climent, N., (2016). Conocimiento de la estructura matemática (KSM). En J. Carrillo, M. Á. Montes, & L. C. Contreras-Gónzalez (Eds.), *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 21–29).

Montes, M., Flores-Medrano, E., Carmona E., Huitrado, J. L., & Flores, P. (2014). Reflexiones sobre la naturaleza del conocimiento, las creencias y las concepciones. En Á. Aguilar, E. Carmona, J. Carrillo, L. C. Contreras, N. Climent, D. Escudero-Ávila, E. Flores-Medrano, P. Flores, J. L. Huitrado, M. Montes, M. Muñoz-Catalán, N. Rojas, L. Sosa, D. Vasco, & D. Zakaryan (Eds.), *Un marco teórico para el Conocimiento* Universidad *especializado del Profesor de Matemáticas* (1st ed., pp. 4–28). de Huelva. https://doi.org/10.13140/2.1.3107.4246

Pajares, F. (1992). Teachers' beliefs and educational research: Cleaning up a messy construct. *Review of Educational Research*. *62* (39), 307-332.

Rosales, B. (2018). *Instrumento para explorar la caracterización que hace el profesor de matemáticas del aprendizaje basado en proyectos* Tesis de maestría inédita. Puebla, México: BUAP.

Schoenfeld, A.H. (2010). *How we think*. Nueva York: Routledge.

Sánchez-García, J. A. (2018). *Los efectos del contrato didáctico y su repercusión en la gestión de una situación didáctica*. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.

Sánchez, N., Sosa, L., & Contreras, L. C. (2018). *El conocimiento del profesor de matemáticas* *visto desde el uso de ejemplos. Una propuesta de investigación*.

Shulman, L. S. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14. https://doi.org/10.3102/0013189X015002004

Sosa, L. (2011). *Conocimiento matemático para la enseñanza en bachillerato. Un estudio de dos casos.* Tesis doctoral. Huelva, España: Universidad de Huelva.

Sosa, L., Contreras, L. C., Gómez-Chacon, I. M., Flores-Medrano, E., Montes, M. A. (2017). Sintesis, problemas abiertos, preguntas para la reflexión. En J. Carrillo & L. C. Contreras-Gónzalez (Eds.), *Avances, utilidades y retos del modelo MTSK. Actas de las III Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 71–79)

Sosa, L., Flores-Medrano, E., & Carrillo, J. (2015). Teacher Knowledge about the features of learning algebra in high school. *Enseñanza de Las Ciencias*, *33*(2), 173–189. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1522

Sosa, L., Flores-Medrano, E., & Carrillo, J. (2016). Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas del profesor cuando ejemplifica y ayuda en clase de álgebra lineal. *Educacion Matematica*, *28*(2), 151–174. https://doi.org/10.24844/em2802.06

Stake, R. (1995). *The Art of case study*. USA: SAGE.

Strauss, A. L., Corbin, J., y Zimmerman, E. (2002). *Bases de la investigación cualitativa: técnicas y procedimientos para desarrollar la teoría fundamentada*. Medellín: Universidad de Antioquia.

Thompson, A.G. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of research. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 127-146).

Villabona, D.P. y Roa, S. (2016). Procesos iterativos infinitos y objetos trascendentes: un modelo de construcción del infinito matemático desde la teoría APOE. *Educación matemática*, 28(2), 119-150. https://doi.org/10.24844/EM2802.05

Zakaryan, D., Estrella, S., Espinoza-Vásquez, G., Morales, S., Olfos, R., Flores-Medrano, E., & Carrillo, J. (2018). Connections between knowledge of mathematics teaching and knowledge of features of learning mathematics: The case of a high-school teacher. *Ensenanza de Las Ciencias*, *36*(2), 105–123. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2260