



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Maestría en Educación Matemática

**PROCESOS COGNITIVOS EN EL APRENDIZAJE DEL
ÁLGEBRA ELEMENTAL EN ESTUDIANTES DE
EDUCACIÓN SECUNDARIA**

TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE
MAESTRA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

PRESENTA:

LIC. CESIA FABIOLA CRUZ CONCHA

DIRECTOR DE TESIS:

DR. JOSÉ GABRIEL SÁNCHEZ RUIZ

CO- DIRECTOR DE TESIS:

DRA. ESTELA DE LOURDES JUÁREZ RUÍZ

PUEBLA, PUE. JUNIO, 2022



DR. SEVERINO MUÑOZ AGUIRRE
SECRETARIO DE INVESTIGACIÓN Y
ESTUDIOS DE POSGRADO, FCFM-BUAP
P R E S E N T E:

Por este medio le informo que la C:

CESIA FABIOLA CRUZ CONCHA

Estudiante de la Maestría en Educación Matemática, ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 03 de diciembre de 2021, con la tesis titulada:

"PROCESOS COGNITIVOS EN EL APRENDIZAJE DEL ÁLGEBRA ELEMENTAL EN ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN SECUNDARIA"

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

A T E N T A M E N T E,
H. Puebla de Z. a 13 de junio de 2022

DRA. LIDIA AURORA HERNÁNDEZ REBOLLAR
COORDINADORA DE LA MAESTRÍA
EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA.



El llegar a la postre de lo que un día fue un sueño, no habría sido posible sin el apoyo financiero del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) durante dos años (enero 2020 – diciembre 2021).

CVU: 1028410

AGRADECIMIENTOS

“Mi esperanza es necesaria pero no es suficiente. Ella sola no gana la lucha, pero sin ella la lucha flaquea y titubea...”

Paulo Freire

Un día espere que llegará este momento y hoy no queda más que agradecer a quienes lo hicieron posible:

A la Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrado (VIEP) y a la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP) por haber confiado en mí y haberme dado la oportunidad de aprender, haciéndome parte de esta séptima generación de la Maestría en Educación Matemática, a quienes conforman el programa de Maestría en Educación Matemática; Aby por su guía en todo el proceso.

A mi director de tesis Dr. José Gabriel Sánchez Ruiz, por su disposición, su atención siempre humana y sus aportaciones que permitieron llevar a cabo cada fase de esta investigación. Dra. Estela de Lourdes Juárez Ruíz, por todas sus enseñanzas, por ser una inspiración y el ser tan humana; Dra. Honorina Ruíz Estrada, por sus enseñanzas y por permitirnos reflexionar, a ambas gracias por sus importantes aportaciones a este trabajo. Al Dr. José Antonio Juárez López por sus enseñanzas y experiencias en clase, y al Mtro. Pablo Rodrigo Zeleny Vázquez, por sus aportaciones en la elaboración y culminación de esta investigación.

A mi mamá, mi ejemplo, mi compañera, mi guía, mi paz, todo es posible si tú estás conmigo y crees en mí. Dios con nosotras.

A quienes su presencia ya no está, pero su esencia siempre estará, los llevo conmigo y esto es por ustedes, porque en lo último de ustedes me motivaron a seguir a estar aquí, espero ser al menos un poco de lo mucho que creían de mí: Oscar, hermano; Ely, amiga.

A Dann, gracias por motivarme, animarme y darle alegría a los días en los que sentía no podía.

Venus, desvelarte a mi lado y acompañarme en clase hizo el camino más llevadero.

ÍNDICE

Resumen	1
Introducción.....	2
Planteamiento del problema	3
Objetivos	6
Justificación.....	6
Hipótesis general	8
Viabilidad.....	8
Capítulo 1. Antecedentes	9
Capítulo 2. Marco teórico	21
2.1 Cognitivismo	22
2.2 Teoría de Piaget.....	25
2.3 Inteligencia	26
2.4 Memoria de trabajo	28
2.5 Razonamiento.....	32
2.6 Estilo cognitivo	35
Capítulo 3. Método	37
3.1 Sujetos	37
3.2 Técnicas y estrategias.....	38
3.4 Instrumentos	39
3.5 Procedimiento.....	43
Capítulo 4. Resultados	47
4.1 Clasificación de participantes por nivel de desempeño.....	47
4.2 Características de los procesos cognitivos por nivel de desempeño	49
4.2.1 Inteligencia	49
4.2.2 Razonamiento.....	51
4.2.3 Estilo cognitivo.....	53
4.2.4 Memoria de trabajo	54
Capítulo 5. Discusión.....	61
5.1 Perfil cognitivo de estudiantes con alto nivel de desempeño algebraico.....	62
Conclusiones	64
Referencias	66
ANEXO 1. Cuadernillo de evaluación.....	73
ANEXO 2: Descripción del desempeño algebraico de los participantes en entrevista clínica.....	93

ÍNDICE DE FIGURAS

Tabla 1 Objetivo de las actividades para entrevista clínica	40
Tabla 2 Observaciones de revisión por pares	44
Tabla 3 Clasificación de nivel de desempeño por niveles de RAE	48
Tabla 4 Análisis descriptivo de aciertos en Dominós por nivel	50
Tabla 5 Aciertos por estudiantes en test TOLT	53
Tabla 6 Estadístico H en subprueba de señalamiento autodirigido	55
Tabla 7 Prueba U de señalamiento autodirigido entre niveles de desempeño bajo y medio.....	56
Tabla 8 Estadístico H en subprueba de memoria de trabajo visoespacial.....	56
Tabla 9 Estadístico H en subprueba de ordenamiento alfabético	57
Tabla 10 Prueba U en ordenamiento alfabético entre niveles de desempeño medio y alto	57
Tabla 11 Estadístico H en subprueba de restas consecutivas	58
Tabla 12 Estadístico H en subprueba de sumas consecutivas	59
Tabla 13 Prueba U de sumas consecutivas entre niveles de desempeño bajo y alto	59
Tabla 14 Estadístico H en subprueba de metamemoria.....	60

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1 Distribución de grado académico por nivel de desempeño	49
Figura 2 Rangos de coeficiente intelectual por niveles de desempeño.....	50
Figura 3 Nivel de razonamiento por niveles de desempeño algebraico	51
Figura 4 Aciertos generales por nivel de desempeño.....	52
Figura 5 Estilo cognitivo por estudiante en cada nivel de desempeño.....	54

Resumen

En la perspectiva de la teoría cognitiva del aprendizaje, la relación que existe entre los procesos cognitivos y el aprendizaje de las matemáticas es innegable y de forma recíproca. En México durante la etapa de educación básica en el nivel de secundaria el área hegemónica de conocimiento en matemáticas es el álgebra, área que en sí misma produce una reorganización en los procesos del pensamiento, además de generar cambios cognitivos en los estudiantes. Esta investigación describe las características de los procesos cognitivos de los alumnos en proceso de formación del razonamiento algebraico elemental de nivel secundaria del Estado de Tlaxcala. Se hace una comparación entre alumnos con distinto nivel de desempeño algebraico. Mediante un análisis cuantitativo se hallaron diferencias significativas en algunos procesos cognitivos de los estudiantes con distintos niveles de desempeño, permitiendo comprender que características cognitivas del individuo favorecen el aprendizaje del algebra elemental en estudiantes.

INTRODUCCIÓN

¿Por qué procesos cognitivos? La base del conocimiento y del pensamiento humano se encuentra en los procesos cognitivos que lo sustentan, es innegable la existencia de procesos intrínsecos que permiten el comportamiento humano, incluida la adquisición del conocimiento. Los procesos cognitivos nos permiten comprender la naturaleza del ser humano y entender que estos están involucrados de forma particular en cada acción cognitiva y social, permite la visualización integral del ser humano en sus ámbitos de formación, en este caso, del aprendizaje de la matemática.

La idea de que el sustento del aprendizaje de las matemáticas se encuentra en los procesos cognitivos, no es nueva, Bruner basado en las ideas de Piaget investigó los procesos cognitivos propios del pensamiento y del aprendizaje (Armendáriz, et. al., 1993).

La Didáctica de la Matemática desde una perspectiva general y de acuerdo con Rico en *Didáctica de la Matemática* (D'Amore, 2011), delimita y estudia los problemas que surgen durante los procesos de organización, comunicación, transmisión, construcción y valoración del conocimiento matemático. Cuando se habla de problemas matemáticos, estos pueden ir desde la introducción del concepto de número en edad preescolar hasta la comprensión y aplicación de conceptos más complejos, también están las problemáticas relacionadas con los procesos de enseñanza o aquellas que hablan de actitudes. Existen investigaciones relacionadas con los procesos cognitivos involucrados en el aprendizaje de las matemáticas, por ejemplo, en la postura de las representaciones semióticas de Duval se hace énfasis en las actividades cognitivas relacionadas con la semiosis y que intervienen en la formación de un sistema semiótico, y desde el enfoque cognitivo se presentan investigaciones que muestran un acercamiento sobre qué procesos se relacionan con el pensamiento matemático.

La relación de los procesos cognitivos y el aprendizaje de las matemáticas se plantea que es innegable y recíproca, es decir, el proceso de enseñanza - aprendizaje puede impactar en el desarrollo y fortalecimiento de procesos cognitivos como la atención, la memoria y el pensamiento; así como la existencia de procesos cognitivos pueden determinar el proceso de aprendizaje en los estudiantes (Cabanés y Colunga, 2017). A partir de lo mencionado, la idea de poder identificar qué procesos cognitivos específicos intervienen en cada momento del aprendizaje de las matemáticas – sin admitir que todos los aprendizajes requieren en igual medida los procesos cognitivos - supone la posibilidad de disponer de un sustento teórico para el desarrollo de

situaciones didácticas y a-didácticas (Brousseau,1986) que favorezcan el aprendizaje de conceptos básicos y complejos de las diversas áreas de las matemáticas.

El interés de la presente investigación radica en identificar las características de la memoria de trabajo, razonamiento, inteligencia y estilo cognitivo en el proceso del aprendizaje del álgebra en estudiantes de educación secundaria, así como comparar las peculiaridades de estos procesos entre los alumnos con diferente nivel de desempeño algebraico. La etapa en el desarrollo humano, en la que se encuentran los estudiantes que participan en el estudio es por sí misma enigmática, al ser un punto de transición biológica, por tanto, sería deshumanizante pensar que esto no influye en su desarrollo cognitivo y la aprehensión de conocimientos matemáticos que implica un primer salto de lo aritmético a lo algebraico.

Partiendo de la comparativa cognitiva entre alumnos que muestran tres distintos niveles de desempeño algebraico se podrían determinar convergencias y diferencias que permitan establecer un perfil cognitivo que contemple los procesos cognitivos y sus características, para establecer cuáles son necesarios y favorables en el aprendizaje del algebra.

Planteamiento del problema

Con base en los datos reportados por el Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE), la evaluación de los aprendizajes y logros de los estudiantes mexicanos de educación básica con respecto al área de matemáticas, García (2015) plantea de manera alarmante que: “El Sistema Educativo Nacional no ha logrado que nuestros niños aprendan a resolver problemas con números naturales” (p.6).

Es preciso describir la organización del Sistema de Educación Básica de México, que incluye a la educación preescolar, primaria y secundaria, los cuales atienden a niños de los 3 hasta los 15 años. En el primer nivel se incluyen los niños de 3 a 6 años; el nivel primaria atiende a niños de 6 a 12 años y tiene como principal objetivo formar las habilidades básicas de lectoescritura y matemáticas, introducirlos a la ciencias y la formación de su identidad ciudadana; y el nivel secundaria, que es el último nivel con obligatoriedad en México, tiene como objetivo ofrecer conocimientos

avanzados que le permita a los estudiantes ingresar al nivel medio superior o incorporarse en el sector productivo (INEE, 2009).

Según los resultados de las evaluaciones del INEE y considerando los niveles de logro (NI – insuficiente, NII – apenas indispensable, NIII – satisfactorio, y NIV – sobresaliente), a nivel nacional en 6° de primaria el 60.5% se ubica en el NI, el 18.9 en NII, el 13.8 en NIII y el 6.8% en el NIV. En el mismo análisis, los resultados para el nivel secundaria muestran que el 65 % está en NI, el 24% en NII, el 7.5% en NIII, y el 3.1% en NIV. Al respecto García (2015) menciona que la interpretación que se puede hacer de estos datos es la siguiente: La mayoría de los alumnos evaluados no tuvo la oportunidad de desarrollar un pensamiento matemático, esto es parte del aspecto formativo de la enseñanza de esta asignatura.

De forma específica, en el nivel de secundaria, el 3.1% de los alumnos mostraron el desarrollo del pensamiento algebraico necesario en los alumnos de tercer grado de secundaria que logran resolver problemas que implican ecuaciones o sistemas de ecuaciones, seguido del 7.5 % de aquellos que logran identificar una ecuación o un sistema de ecuaciones que modelen una situación, el 24% resuelven problemas que impliquen ecuaciones lineales sencillas y el 65.4% no tiene los conocimientos necesarios.

Por otra parte, los resultados obtenidos en secundaria en el 2017 evidencian cambios poco alentadores: el 64.5% de los estudiantes se sitúan en el NI, el 21.7 % en el NII, 8.6 en el NIII, y 5.1% en el NIV. Un análisis comparativo indica que hubo un cambio 3 puntos positivos en el puntaje promedio.

Según la Secretaría de Educación Pública ([SEP], 2018) con base en los resultados obtenidos en la evaluación PLANEA 2018, lo deseable para un alumno, al concluir su educación primaria en cuanto a su perfil académico en el área de matemáticas, es lo siguiente:

- Sentido numérico y pensamiento algebraico: Los estudiantes logran comparar números decimales; resolver problemas aditivos con números naturales, decimales y fraccionarios que involucran dos o más transformaciones y los que implican dividir o multiplicar números fraccionarios por naturales; ubicar una fracción en la recta numérica; usar las fracciones para expresar el resultado de un reparto; identificar la sucesión geométrica dada su regla y el término siguiente en sucesiones especiales.

En educación secundaria el ideal, que solo alcanza un 5% de los estudiantes, supone los siguientes logros (INEE, 2017):

- Sentido numérico y pensamiento algebraico: Resuelven problemas que combinan números fraccionarios y decimales y el uso de notación científica. Multiplican expresiones algebraicas, calculan términos de sucesiones y resuelven problemas que implican una ecuación lineal, cuadrática o sistema de ecuaciones

Durante la etapa de educación secundaria, el área de conocimiento en matemáticas que se vislumbra con mayor fuerza es el álgebra, comúnmente entendida como una generalización de patrones aritméticos que puede permitir la creación de modelos para situaciones cuantificables a través del uso de símbolos y abstracciones (Padilla y Mayoral, 2020), sin embargo, el álgebra va más allá de dar significado a los símbolos, ya que tiene que ver con los modos del pensamiento, desde comprender lo desconocido hasta una visión deductiva, por lo tanto, comprender los procesos de aprendizaje de las relaciones conceptuales y las dificultades que los estudiantes enfrentan, permitiría que se desarrollen sistemas de instrucción más efectiva, determinando las diferencias cognitivas y pedagógicas (Palarea y Socas, 1994).

Proponer acciones encaminadas a mejorar el aprendizaje de las matemáticas en los alumnos es uno de los objetivos primordiales en el desarrollo de investigación en la educación matemática, seguir basando las prácticas educativas en el paradigma estímulo – respuesta daría por hecho de que si hay un cambio en la enseñanza en automático se lograría el aprendizaje. O creer que el secreto está en las estrategias, sería convertir al estudiante en un ser pasivo y receptivo, y retomar la idea de los procesos cognitivos únicos y lineales, es decir, que son los mismo aplicados a cualquier circunstancia matemática o escolar, nos llevaría a desarrollar estrategias basadas en los mismos principios para los distintos niveles escolares y áreas disciplinares.

Considerando lo anterior, esta investigación tuvo como fin responder las siguientes preguntas ¿Qué características tienen los procesos cognitivos de memoria de trabajo, razonamiento, inteligencia y estilo cognitivo en estudiantes de secundaria del Estado de Tlaxcala, en el aprendizaje del álgebra elemental? y ¿existen diferencias en las características de estos procesos cognitivos de alumnos con distinto nivel de desempeño algebraico?

Las preguntas específicas, fueron:

1. ¿Qué características tienen la memoria, el razonamiento, la inteligencia y el estilo cognitivo, como procesos cognitivos comprometidos en el pensamiento algebraico de alumnos con alto rendimiento escolar en álgebra?
2. ¿Cuáles son las diferencias en estos procesos cognitivos entre alumnos con distinto nivel de desempeño algebraico?

Objetivos

Objetivo general: Describir las características de los procesos cognitivos de alumnos en el proceso de formación de pensamiento algebraico de nivel secundaria del Estado de Tlaxcala, a partir de la comparación entre alumnos con diferente nivel de desempeño algebraico.

- Objetivo específico 1: Evaluar, para caracterizar, la memoria de trabajo, el razonamiento, la inteligencia y el estilo cognitivo en alumnos de nivel secundaria en el proceso de aprendizaje del álgebra.
- Objetivo específico 2: Identificar posibles diferencias en las características de los procesos cognitivos en el aprendizaje del álgebra al contrastar alumnos con distinto desempeño matemático en álgebra.

Justificación

Aprender es más que la adquisición de la capacidad de pensar, es más bien el cúmulo de capacidades que nos permiten pensar, estas capacidades en el ser humanas presentan diferencias individuales respecto al cómo son utilizados los procesos básicos y cómo se llevan a cabo. Quizá una duda continua sea si el aprendizaje tiene relación con el desarrollo de los procesos cognitivos, en torno a esta cuestión el debate es polarizado, quienes lo niegan aseguran que no hay repercusiones generales cuando hay aprendizajes específicos y otros afirman que las adquisiciones específicas tienen impacto global. Pese a estas divergencias es innegable la relación que existe entre los procesos cognitivos y el aprendizaje. El ser humano a nivel neuronal y cognitivo no se puede considerar como una hoja en blanco, es decir, previo al contacto con la instrucción escolar, el niño posee características biológicas y cognitivas que van a ir adaptándose y reconstruyéndose a medida de su interacción con el medio ambiente (Bravo, 2015; D'Amore, 2011).

A pesar de que existen investigaciones que explican los factores que intervienen en el aprendizaje de las matemáticas (e.g., Bravo, 2015; Distéfano et al., 2014; Fernández, 2017; García, 2013; Gavilán, 2011; Jara, 2012; Kieran y Filloy, 1989; López y Morales, 2013; Massone y González, 2004; Torres y Gómez, 2019) y entre estos se enlisten los procesos cognitivos necesarios o intervinientes, en estas se da por hecho su existencia y su importancia se muestra indistinta haciendo alusión a ellos de forma general, como si en todas las acciones y aprendizajes intervinieran de igual forma los diferentes procesos cognitivos. Así la importancia de definir si existen procesos específicos o podríamos hablar de generalidades sin causar mayor discrepancia al respecto.

Es importante señalar que los procesos cognitivos mencionados, la memoria de trabajo, el razonamiento e inteligencia se han seleccionado porque en la literatura son los que más convergen respecto a su intervención en el pensamiento lógico – matemático, pero sin hacer énfasis en el área matemática, por tanto, se consideran para establecer cómo se presentan en el aprendizaje del álgebra, y en el caso del estilo cognitivo se retoma al ser considerado en investigaciones como la forma en que los sujetos hacen uso de estos procesos en circunstancias específicas y relacionarlo con la habilidad para resolver problemas matemáticos.

Ahora bien, ¿por qué el interés de enfocar esta investigación al área del álgebra? El álgebra requiere un cambio en el pensamiento, en el nivel de secundaria se conduce a los estudiantes hacia el primer contacto esta área, en esta etapa inicia la transición del pensamiento aritmético al algebraico que implica un traslado de las situaciones numéricas concretas a proposiciones más generales sobre números y operaciones. La transición implica que el alumno debe romper esquemas cognitivos y reformarlos, lo cual es común en el aprendizaje, por tanto, si tiene problemas para afrontar conceptos y esquemas, los tendrá posteriormente, ya que a nivel cognitivo no está preparado para afrontar cambios. MacGregor (2004, citado en Serres, 2011) menciona que el álgebra capacitará al estudiante en sus habilidades y seguridad para interpretar información, reconocer estructuras y patrones, conocer propiedades de funciones, usar notaciones y representaciones; todo esto influye directamente en el desarrollo del pensamiento y razonamiento, a través de la observación crítica y analítica, lo cual influenciará en su desarrollo en la matemática escolar, ya que las matemáticas no pueden ser comunicadas sin sistemas de representación y el álgebra pone en manifiesto las nociones de la abstracción y representación (Palarea y Socas, 1999; Serres, 2011).

Hipótesis general

Los estudiantes de nivel secundaria que inician su aprendizaje en álgebra elemental y presentan un alto desempeño en esta área muestran diferencias significativas en las características de los procesos cognitivos: memoria de trabajo, razonamiento, inteligencia y poseerán un tipo de estilo cognitivo independiente, en comparación con alumnos que muestran un nivel de desempeño algebraico más bajo.

Viabilidad

La investigación tiene como fin definir un perfil cognitivo de los alumnos evaluados, respetando sus particularidades y contemplando la oportunidad de vislumbrar los procesos cognitivos necesarios en el pensamiento algebraico, permitiendo disponer de información que será útil para definir acciones dentro del aula, ya sea desde la postura que indica que los procesos cognitivos permiten el aprendizaje, o desde la perspectiva que propone que las situaciones de aprendizaje pueden estimular los procesos cognitivos y metacognitivos (Armendáriz et al., 1993; Bravo, 2015; Cabanes y Colunga, 2017; Rivas, 2008), en ambas perspectivas, el aprendizaje es interdependiente de los procesos cognitivos, es decir, no es posible decir que la adquisición de conocimiento puede suceder sin memoria y de igual forma la memoria requiere ser estimulada. Por lo tanto, definir qué procesos intervienen en la formación del pensamiento algebraico puede permitir que en la práctica docente se realicen situaciones didácticas y a-didácticas que promuevan recíprocamente el aprendizaje y el fortalecimiento de procesos cognitivos.

Capítulo 1

ANTECEDENTES

En México desde los inicios de la investigación en educación matemática, en la década de los 80's del siglo pasado, la investigación en estudiantes de secundaria se dirigió al análisis curricular para la identificación de errores en el uso del álgebra, especialmente en lo referente a la adquisición del lenguaje algebraico y el tránsito de la aritmética al álgebra y las estrategias planteaban la utilización de entornos computacionales o calculadoras. En la primera década del siglo XXI se amplía la mirada científica para analizar los procesos cognitivos en el pensamiento algebraico, la comprensión de variables y el uso de las TIC, además, un avance notable en la investigación de la educación matemática fue el interés en el docente y los conocimientos que este tiene respecto a las clases que imparte, por lo que se implementó el acompañamiento en docentes y la puesta en marcha de cursos que proponen situaciones de aprendizaje (Ávila, 2016).

El interés en la educación secundaria deriva de la evidente e importante transición cognitiva durante la etapa de educación primaria a secundaria, periodo caracterizado por la introducción progresiva al álgebra en el contexto escolar que posibilitará más adelante el acceso comprensivo de los estudiantes a conceptos algebraicos más avanzados. El aprendizaje del álgebra se ha relegado a la escolaridad de nivel secundaria y en diversos estudios han demostrado las enormes dificultades que tienen los adolescentes cuando comienzan a aprender álgebra.

Una de las dificultades se refiere a las complicaciones en el razonamiento, ya que en la iniciación del álgebra hay una falta de pensamiento abstracto formal en los estudiantes (Brizuela y Blanton, 2014). El álgebra se ha entendido como una generalización de patrones aritméticos y esta perspectiva puede constituir una herramienta para la modelación de situaciones cuantificables (Padilla y Mayoral, 2020), sin embargo, el álgebra va más allá de generalizaciones o de dar significado a los símbolos, ya que tiene que ver con los modos del pensamiento, desde comprender lo desconocido hasta una visión deductiva.

Como se ha mencionado, comprender los procesos de aprendizaje de las relaciones conceptuales y las dificultades que los estudiantes enfrentan en el aprendizaje de las matemáticas, determinando

las diferencias cognitivas, es el interés en esta investigación en el ámbito del aprendizaje del álgebra permitiría que se desarrollen sistemas de instrucción y pedagógicas más efectivas (Palarea y Socas, 1994).

De acuerdo con Baldor (citado en García, 2013) el álgebra es la rama de las matemáticas que estudia las cantidades del modo más general posible, no solamente con números, sino también con letras. Palarea y Socas (Serres, 2011) consideran al álgebra como la rama de las matemáticas que pretende la simbolización de las relaciones numéricas generales, las estructuras matemáticas y las operaciones de esas estructuras, lo cual se puede definir como una aritmética generalizada, sin embargo, aunque la aritmética es antecesora del álgebra, no es una generalización de esta, ya que el álgebra implica un cambio en el pensamiento del estudiante y la transición del modo informal de representación y solución de problemas, al modo formal. De acuerdo con Brizuela y Blanton (2014) las prácticas del pensamiento algebraico son la generalización, la representación y el razonamiento, lo referente al razonamiento es lo que permite analizar las representaciones.

El álgebra no es solo una generalización de la aritmética o hacer explícito lo que estaba implícito en la aritmética, más bien, requiere un cambio en el pensamiento del estudiante respecto a situaciones numéricas concretas y proposiciones sobre números y operaciones, sin embargo, a pesar de ser un cambio, muchos estudiantes siguen usando los métodos que eran funcionales en la aritmética, entre los cambios más importantes, se pueden mencionar los siguientes (Kieran y Filloy, 1989):

- Forma de ver el signo igual: “hacer algo” a un símbolo de equivalencia
- Dificultades con las convenciones de notación
- Métodos de simbolizar
- Variables
- Expresiones y ecuaciones
- Resolución de ecuaciones
- Funciones y gráficas

La importancia del álgebra escolar se constituye al ser de los elementos fundamentales de las matemáticas ya que influye en la formación y desarrollo del pensamiento variacional, que es una manera de pensar de forma dinámica que intenta producir sistemas de relación. Debido a su nivel de abstracción y dificultad, además de la falta de adecuadas introducciones al álgebra en grados

previos, suele marcar como una transición negativa al desarrollo del pensamiento variacional de los estudiantes (Padilla y Mayoral, 2020). El objetivo del álgebra escolar es desarrollar el pensamiento algebraico, que le permitirá al estudiante formular expresiones, patrones, ecuaciones y funciones para resolver problemas dentro de la matemática y en situaciones reales de la vida cotidiana, además de ello se puede considerar al álgebra como una área de la matemática que consiste en la capacidad de manipular relaciones entre variables y comprender un sistema algebraico puede hacer que comprenda los propios caminos de solución a nivel cognitivo (Eudave, 1998; Serres, 2011).

El desarrollo del pensamiento algebraico permite desarrollar ciertas habilidades tales como el pensamiento simbólico para comprender igualdades, ecuaciones y conjuntos, y para comprender funciones, patrones y modelos matemáticos (Serres, 2011). El álgebra se puede entender como una serie de adaptaciones proceso - objeto, por lo que resulta importante que en su proceso de aprendizaje los estudiantes lleguen a comprender el aspecto estructural del álgebra (Palarea y Socas, 1999). Cuando comienza el aprendizaje de esta área, el desarrollo del pensamiento algebraico temprano se enfoca en el pensamiento funcional, el cual implica la generalización de relaciones entre cantidades que covarían, la representación y justificación de relaciones múltiples a través del lenguaje natural y el uso de las letras para representar cantidades y el razonamiento con fluidez de las representaciones generalizadas a fin de comprender y predecir el comportamiento funcional (Brizuela y Blanton, 2014).

Socas, et al. (1998, citados en Padilla y Mayoral, 2020) afirman que la complejidad y las dificultades que los alumnos presentan en el aprendizaje del álgebra se relaciona, con: la complejidad de los objetos y los procesos del pensamiento algebraico, el desarrollo cognitivo de los alumnos, los métodos de enseñanza y las actitudes afectivas y emocionales que los alumnos desarrollan hacia el álgebra. Siendo en general, un sistema que no propicia el adecuado aprendizaje del álgebra.

De acuerdo con Palarea y Socas (1994), el álgebra presenta importantes dificultades en los estudiantes y para poder entender esta situación es necesario considerar los obstáculos y errores presentes en el aprendizaje temprano de álgebra, que son:

- Obstáculos cognitivos en el álgebra, lo cual se refiere a conocimientos que han sido satisfactorios por un periodo considerable de tiempo, pero resultan inadecuados. Por ejemplo, Collis (1974) señaló que los estudiantes principiantes de álgebra tendían a observar las expresiones algebraicas como enunciados incompletos. Por su parte, Davis (1975) planteó que las dificultades aparecen cuando los alumnos intentan dar respuestas correctas sin distinguir entre las diferencias de la aritmética con el álgebra, lo cual llamó dilema proceso - producto.
- Errores del álgebra que están en la aritmética: El álgebra no está separada de la aritmética, por ello que se pueda considerar la idea de generalizarla, por tanto, las dificultades del álgebra pueden tener su génesis en problemas sin corregir de la aritmética, por ejemplo, el uso inadecuado de fórmulas o reglas se debe a que los alumnos las usan inadecuadamente y la adaptan incorrectamente a nuevas situaciones haciendo falsas generalizaciones.
- Errores del álgebra debido a las características propias del lenguaje algebraico: Estos errores no tienen referencia aritmética. Por ejemplo, el signo = tiene un cambio importante. Otro error es el problema de la sustitución formal que se extiende más allá de la generalización.

Desde la perspectiva de Padilla y Mayoral (2020) se plantea que algunas situaciones que influyen en el aprendizaje del álgebra son:

- Los alumnos tienen la tendencia a dejarse llevar por la intuición más que desarrollar el pensamiento abstracto para traducir números a situaciones reales.
- Ausencia del sentido numérico.
- Inapropiado uso de reglas, fórmulas y procesos.
- Dificultades para representar problemas matemáticos.
- Malos hábitos en la toma de notas y poca concentración.
- Participación y acompañamiento de los padres.
- Desarrollo de habilidades cognitivas y motivacionales.
- Una realidad distante de la metodología docente.

Hablar de adecuadas o inadecuadas formas instruccionales de la enseñanza obliga a mirar el aprendizaje de las matemáticas desde dos perspectivas, la social, que debe ir más allá de las exigencias aritméticas y los currículos escolares pues tiene como finalidad que el humano pueda

emplear las matemáticas a su realidad y generar conocimientos dentro del mismo entorno en el que se desarrolle. La otra perspectiva surge de la realidad educativa, la cual responde a las necesidades meramente curriculares, desde esta forma de ver la enseñanza del álgebra se vuelve necesaria la búsqueda de un aprendizaje funcional y con sentido social, que promueva el desarrollo de una nueva forma de pensar. La transición de los estudiantes de la aritmética al álgebra, además de suponer cambios cognitivos importantes también resulta el cambio de lo útil a lo completamente escolar, ya que los alumnos no logran darle una perspectiva social y solo lo visualizan como algo meramente curricular, sin embargo, el álgebra elemental requiere una revalorización de la aritmética, ya que cuando el alumno logre comprender los aspectos formales del álgebra también desarrollará una comprensión completa de la aritmética, el conocimiento pre-algebraico y la extensión de dominios en números de los niños (Eudave,1998; Torres y Gómez, 2019).

Como se puede observar, son varias las investigaciones que mencionan a los procesos cognitivos como un factor de relevancia e influencia en el aprendizaje del álgebra. Por lo tanto, tiene sentido la pregunta ¿qué son los procesos cognitivos? Hablar de procesos cognitivos obliga a comprender los cimientos claves de la corriente cognitiva o cognoscitiva. Este enfoque estudia las manifestaciones psicológicas y conductuales como resultado del procesamiento, la integración e interpretación de la información que el sujeto recibe. Los estudios de esta corriente van dirigidos hacia el conocimiento y el procesamiento de la información, por lo que estas ideas han sido retomadas en el ámbito educativo (García, 2019).

Cualquier área de conocimiento debe considerarse como un sistema y no solo como una acumulación de datos. Entendemos a este sistema de aprendizaje como un entramado interrelacionado de elementos que intervienen en este. La idea de que el sustento del aprendizaje de las matemáticas se encuentra en los procesos cognitivos no es nueva, Bruner, basado en las ideas de Piaget, investigó los procesos cognitivos propios del pensamiento y del aprendizaje (Armendáriz, Azcárate y Deulofeu, 1993). Para Martelo y Arévalo (2017) los procesos cognitivos se relacionan con la maduración del sistema nervioso y son funciones cognitivas – conductuales elementales para el aprendizaje.

Los procesos cognitivos, también denominados procesos psicológicos, son todos aquellos que nos permiten acceder al conocimiento. No existe un consenso sobre la cantidad de procesos cognitivos que existen, sin embargo, es posible hacer una distinción entre los procesos psicológicos básicos y

superiores. Bajo la perspectiva de Vigotsky, los procesos superiores son aquellos que requieren de la integración de la corteza cerebral y debido a su relación con el desarrollo social son solo de índole humano, a diferencia de los básicos que serían compartidos con algunas especies de animales, por lo que los humanos somos poseedores de procesos superiores ya que su proceso de formación es mediante la interacción social. Es preciso distinguir que los procesos básicos son la atención, percepción y memoria, y los superiores son el lenguaje, razonamiento, abstracción, resolución de problemas, entre otros (García, 2019; Vergel, 2014). Bajo este entendido, los procesos cognitivos son aquellos procesos psicológicos básicos y superiores que permiten al humano conocer y comprender.

Azcárate (1998, citado en Distéfano, et al., 2014) describe que un proceso cognitivo es cualquier procedimiento que se lleva a cabo para adquirir e incorporar conocimiento y aquellos que se han relacionado con el pensamiento matemático, son: representación, clasificación, abstracción, generalización y formalización.

La relación de los procesos cognitivos y el aprendizaje con las matemáticas ha sido innegable y de forma recíproca, es decir, el proceso de enseñanza aprendizaje puede impactar en el desarrollo y fortalecimiento de proceso cognitivos, tales como la atención, la memoria y el pensamiento; así como la existencia de procesos cognitivos pueden determinar el proceso de aprendizaje en los estudiantes (Cabanés y Colunga, 2017).

El considerar a los procesos cognitivos como parte indudable del aprendizaje matemático se ha demostrado en diversas investigaciones, que si bien no están insertas en el ámbito algebraico nos permiten conocer cómo han sido estudiados los procesos cognitivos y cuáles han sido aquellos con mayor relación en el aprendizaje de las matemáticas. En un estudio sobre la discalculia del desarrollo y los mecanismos cognitivos que subyacen esta situación, Castro-Cañizares et al (2009) hacen un análisis del papel de los factores biológicos como determinantes en el rendimiento académico señalando que no hay consenso respecto a los mecanismo cognitivos implicados en la adquisición y desarrollo de la capacidad numérica, en su investigación se determina que la discalculia deriva del déficit en algunos procesos cognitivos generales, como: la memoria de trabajo, el razonamiento verbal y las habilidades visoespaciales. En la misma investigación se señaló que los niños que presentan problemas numéricos y errores aritméticos manifiestan problemas en numerosas tareas no verbales que incluyen organización visoperceptual,

funcionamiento psicomotor, habilidades perceptivotáctiles y razonamiento no verbal (vinculado probablemente a una disfunción del hemisferio derecho).

Stelzer et al. (2018) destaca la importancia de los procesos cognitivos en el pensamiento matemático, específicamente en niños que están aprendiendo a dividir y da relevancia a la inhibición, que permite el control en el pensamiento consciente de la información y suprime aquella irrelevante; la memoria de trabajo verbal y visoespacial; y la inteligencia fluida, tomando como referente a Catell (1987) quien la concibe como la capacidad de razonamiento abstracto y solución de problemas independiente al conocimiento previo, además de la capacidad de identificar y procesar patrones de relaciones abstractas entre representaciones espaciales, verbales o numéricas.

Massone y González (2004), también hacen referencia a los procesos cognitivos considerándolos dentro de las estrategias de aprendizaje que son vitales en el rendimiento escolar, ya que en la ejecución de estas estrategias intervienen funciones cognitivas, tales como: selección, comprensión, memoria, integración y monitoreo cognoscitivo, las cuales garantizan un procesamiento profundo y eficaz de la información, así, los procesos implicados en el aprendizaje pondrían en marcha los mecanismos cognitivos y metacognitivos.

De acuerdo con Armendáriz et al. (1993), algunos modelos de los procesos cognitivos implicados en el aprendizaje de conceptos matemáticos son:

- Imagen conceptual y visualización: Vinner (1983) definió una imagen mental como el conjunto de imágenes asociadas al concepto que hay en la mente de la persona, puede incluir símbolos. La visualización, Zimmermann y Cunningham (1991) la definen como el proceso de formación de imágenes mentales o materiales cuya utilización permite la comprensión y el descubrimiento matemático. La visualización puede producir interpretación y comprensión o traduce a imagen la información simbólica.
- Esquema y definición conceptual: la definición del concepto es la sucesión de palabras para explicar un concepto con precisión, y un esquema conceptual es la descripción de la estructura cognitiva de un individuo asociada a un concepto matemático, puede incluir imágenes mentales y procesos.
- Conceptos y concepciones: las concepciones son el conjunto de significantes asociados al concepto, son todas las representaciones y asociaciones internas del individuo que evoca el concepto.

La importancia que tienen los procesos cognitivos en las matemáticas resulta al entender que el cálculo al igual que la lectoescritura no son habilidades innatas del individuo, sino que son las habilidades que resultan del aprendizaje, para el cual es necesario el trabajo conjunto de los procesos cognitivos, como: la memoria, atención, percepción, lenguaje, resolución de problemas, gnosias, praxias y funciones ejecutivas (Martelo y Arévalo, 2017).

En relación con las funciones ejecutivas, Canet-Juric et al (2015) resalta a la memoria de trabajo y la inhibición como parte de las funciones ejecutivas que están vinculadas con actividades cognitivas como: razonamiento, comprensión verbal, habilidades matemáticas y regulación de las emociones. La memoria de trabajo (MT) es una función cognitiva encargada del almacenamiento y procesamiento simultáneo de información en periodos cortos la información puede ser verbal o viso espacial. Canet-Juric (2015) , utilizó el modelo de Baddeley y colaboradores, que considera a la MT como un sistema de almacenamiento y procesamiento conjunto compuesto por un procesador ejecutivo central y dos almacenes de dominio específico, el central es un sistema de funciones atencionales que se encarga de controlar los dos almacenes que se encargan, uno de información verbal y otro de información visoespacial (el recuerdo verbal se ve afectado de forma selectiva por tareas verbales secundarias más que por tareas espaciales secundarias y el rendimiento en memoria viso-espacial es más afectado por tareas secundarias espaciales que verbales).

Weijer-Bergsma et al. (2015), igual consideran el modelo de Baddeley y colaboradores, dando especial reconocimiento a la memoria de trabajo en la resolución de un problema de matemáticas ya que esto implica sostener y manipular información relevante, asegurando que los niños con mayor capacidad de memoria tiene una ventaja matemática, en especial lo relacionado a la agenda visoespacial y el bucle fonológico se han asociado con el rendimiento y el aprendizaje de las matemáticas en niños, empero esta varía de acuerdo con la edad, ya que los niños más pequeños confían más en la memoria de trabajo visoespacial y conforme van creciendo dependen de la memoria de trabajo verbal, esto es porque los niños más pequeños dependen de representaciones visuales y a medida de que crecen asocian los problemas matemáticos y sus respuestas a la memorización verbal ya que se basan en estrategias y representaciones.

La memoria de trabajo visoespacial también puede variar su presencia en las distintas acciones matemáticas, por ejemplo, en el caso de la adición y la resta pueden realizarse mediante manipulación y visualización de objetos que se refiere a la información visoespacial, mientras que la multiplicación y los problemas de división se resuelven con mayor frecuencia representando y recuperando hechos memorizados verbalmente.

Como ha sido posible notar, diversas investigaciones (Castro-Cañizares et al, 2009; Stelzer et al., 2018; Massone y González, 2004; Canet-Juric et al,2015; Weijer-Bergsma et al, 2015) señalan a la memoria de trabajo en relación con la capacidad matemática, sin embargo, no se ha llegado a converger sobre la manera que influye, ya que algunas investigaciones lo atribuyen al registro fonológico y otros al visoespacial.

Además de los estudios para determinar aspectos cognitivos involucrados en las matemáticas una línea de investigación sugiere la diferencia cognitiva en el género de los estudiantes, Rosselli et al (2009), consideran entre las habilidades cognitivas que se involucran en el procesamiento numérico y que también son importantes para adquirir habilidades aritméticas, a la memoria de trabajo, la cognición espacial y las habilidades lingüísticas, encontrando que la capacidad para resolver problemas mejora secuencialmente a lo largo de la infancia lo cual parece coincidir con el aumento de mielinización y brotes de crecimiento durante la maduración de la corteza cerebral, respecto al género encontró que la diferencia de que la materia gris y el aumento de la materia blanca es más disminuida en los niños que las niñas, es decir, las modificaciones tienen lugar más lento en los niños, además, destacó la importancia de la información verbal en la contribución al desempeño aritmético ya que la resolución de problemas no sólo se ve afectada por las habilidades visoespaciales, sino también por las verbales.

Cuando se refieren a la resolución de problemas matemáticos, Cabanes y Colunga (2017) señalan la importancia de los procesos cognitivos y metacognitivos, dando mayor énfasis a los segundos, debido a la relación que tienen con las funciones ejecutivas, que permiten controlar y regular los procesos cognitivos además de organizar, manipular e integrar información necesaria para la resolución de problemas, mediante el conocimiento metacognitivo, la monitorización cognitiva y la regulación de estrategias resolutivas.

González (2005, citado por Cabanes y Colunga, 2017) sugiere que en la resolución de problemas los procesos cognitivos involucrados son: análisis, síntesis, generalización, abstracción y el pensamiento heurístico, reflexivo y creativo.

De una forma más específica, en el área de álgebra, se ha investigado sobre la idea de que el pensamiento algebraico es la generalización de la aritmética, o bien, puede sustituir lo que se considere la base del pensamiento algebraico, también es importante resaltar la participación de otros procesos cognitivos, como son la reversibilidad, seriación, argumentación y representación (García, 2013). Entendiendo que el álgebra no es solo una generalización conceptual y operativa de la aritmética, se deben considerar las rupturas cognitivas que en este trance acontecen. De acuerdo con Torres y Gómez (2019) algunos de los procesos cognitivos que permiten desarrollar el pensamiento algebraico son el pensamiento racional, el sentido estructural, la generalización y simbolización.

El álgebra escolar tiene como objetivo desarrollar el razonamiento y el pensamiento algebraico, permitiendo al estudiante formular expresiones algebraicas, patrones, ecuaciones y funciones para resolver problemas y diseñar modelos matemáticos, por lo que se debe entender que el lenguaje algebraico es un instrumento del pensamiento algebraico, ya que éste se desarrollará en medida de qué lenguaje se ha comprendido.

Filloy (1999, citado por Serres, 2011) estudió cómo se adquiere el lenguaje algebraico desde dos estrategias, la primera es el modelaje de situaciones abstractas en lenguajes concretos desarrollando habilidades sintácticas y la segunda es la producción de códigos para desarrollar habilidades de resolución de los problemas.

Masón (1999, citado por Serres, 2011), en el estudio de los factores cognitivos que intervienen en el aprendizaje del álgebra, plantea que la capacidad de detectar patrones y expresar una generalidad es una habilidad presente en los niños desde que ingresan a la escuela, sin embargo, esa capacidad tiene que agudizarse, ya que aquellos estudiantes que logran expresar generalidades son aquellos que logran darle un sentido al uso de la variable. Las variables en el aprendizaje del álgebra desde

el modelo de Ursini, deben visualizarse desde tres perspectivas: como un número general que representa alguna situación y que permite al alumno reconocer patrones y reglas, la variable como una incógnita específica la cuál es desconocida y debe hallarse su valor específico y la variable en una relación funcional en la que debe de reconocer que existe correspondencia entre los valores de dos variables (Ursini et al., 2016).

La investigación de los procesos cognitivos que intervienen en el aprendizaje de las matemáticas ha sido extensa, sin embargo, no se ha llegado a una precisión respecto a los procesos que intervienen en cada etapa de aprendizaje, o bien, si lo procesos cognitivos básicos como la memoria, la percepción, la atención (inhibición) y el pensamiento están de forma unívoca en todo el aprendizaje de las matemáticas sin importar el área específica (geometría, aritmética, álgebra, entre otros) o el nivel de desarrollo del estudiante. Ramos y Casas (2018), se referían a esto como la demanda cognitiva en la profundidad de conocimiento (Depth of knowledge) también conocida como DOK, lo cual implica clasificar el aprendizaje por niveles de profundidad de conocimiento considerando lo que es capaz de hacer el estudiante integrando sus niveles de pensamiento y sus procesos de conocimiento como la memoria, comprensión, el análisis, la síntesis y la evaluación. De acuerdo con esta perspectiva valorar la demanda cognitiva de una tarea o actividad implica conocer el esfuerzo mental que supone resolverla con éxito. Además de la demanda cognitiva necesaria en la resolución de una tarea, también se ha considerado el estilo cognitivo como clave para comprender el desempeño de los estudiantes.

Cuando se habla de desempeño académico es inevitable hablar de la inteligencia, motivación, creatividad, incluso condiciones sociales y culturales, sin embargo, cuando se habla de procesos cognitivos un enfoque cualitativo orientado a explicar la forma en cómo se utilizan o se explora la propia inteligencia, se estaría hablando de un estilo de pensamiento o cognitivo, este no es una habilidad, más bien es el modo en el que el sujeto elige cómo utilizar sus habilidades cognitivas. Es importante precisar que el estilo cognitivo no tiene que ver con la capacidad ya que el sujeto puede tener la capacidad para realizar una tarea, pero resolverla implica comprender qué usar y el modo de hacerlo (Montero et al., 2005). Este aspecto ha causado interés en el ámbito escolar, en un estudio de niños superdotados de entre 6 y 9 años de primero a tercero de educación primaria, se encontró que el estilo cognitivo característico era lento eficaz y no rápido eficaz como comúnmente se podría pensar, ya que evidentemente la resolución de tareas tiene poca o nula

relación con el cociente intelectual. Alsina en 1990 tras un estudio mostró evidencias de que hay una mejor ejecución en estudiantes de estilo independiente, ya que emplean más estrategias de planificación construyen modelos analogías y verifican más que aquellos alumnos con estilo dependiente. Encontrando una correlación positiva entre el estilo cognitivo y la resolución de problemas matemáticos, Blake (1976) de igual forma señaló que hay una relación positiva entre el estilo cognitivo independiente y la resolución de problemas matemáticos ya que aplican con mayor variedad los procesos heurísticos en la resolución de un problema (Montero et al., 2005; Sánchez, 1999).

Tomando en cuenta las investigaciones revisadas, no es posible determinar cuál es la demanda cognitiva del álgebra, por lo que es posible investigar al respecto y describir los procesos específicos en alumnos de secundaria que inician su aprendizaje en álgebra, además es importante considerar el estilo cognitivo, y definir cómo podría influir en elaboración de programas de intervención educativa.

Capítulo 2

MARCO TEÓRICO

A lo largo de este capítulo se presentan las principales aportaciones de la teoría cognitiva que brinda el sustento teórico a la idea de colocar como protagonistas a los procesos cognitivos en el proceso de aprendizaje. Este paradigma surge como antagonista a la teoría conductista que considera al ser humano como un ente pasivo resultado de los estímulos exteriores, en la década de 1950 surge la corriente cognitiva que considera al humano como un ser activo, cuyas estructuras y habilidades mentales resultan fundamentales para la apropiación del conocimiento. En contradicción con el modelo conductista E – R, donde el individuo sólo actuaba ante un estímulo, para el cognitivismo, el modelo sería E – O –R, entendiendo a O, como el organismo, es decir, aquello que no es directamente observado, pero que interviene directamente en los procesos que llevan al sujeto a organizar el conocimiento y la información que recibe (García, 2019; Zhong -Lin y Doshier, 2007).

La corriente cognitiva abarca todos los estudios dedicados a explicar los procesos que conducen al conocimiento y el procesamiento de la información, poniendo ahínco en lo que sucede en el organismo más que la simple descripción de las conductas que se pueden observar en torno a ello (García, 2019).

Para Bruner (citado en Pozo, 2006), la teoría cognitiva surge como respuesta a las demandas tecnológicas de la Revolución Postindustrial, concibiendo al humano como un procesador de información, aunque en un primer momento la psicología cognitiva surgió para revolucionar el pensamiento hegemónico - la psicología conductista -, actualmente no se considera revolucionario, sin embargo, en el ámbito educativo ha presentado conceptos importantes, además, de esta subyacen distintas teorías que buscan complementarse, como la neuropsicología y de algunas otras teorías que surgieron de la idea cognitiva (Bruning et al. 2012).

2.1 Cognitivismo

El término cognición proviene del vocablo latino “cognosere” que significa saber, y comenzó a usarse con la publicación del libro “Cognitive Psychology”, por Neisser, en 1967, sin embargo, el desarrollo del paradigma cognitivo toma aportaciones de diversas teorías científicas y tecnológicas, como la teoría de la información de Shannon y Weaver (1949), en la que se explicaba mediante un estudio matemático el procesamiento de la información, comparando el canal de comunicación con la mente humana. Otras teorías de las cuales se toman aportaciones es la cibernética de Wiener (1948) que sugiere la regulación y control de sistemas orgánicos y sociales; de igual manera la teoría general de sistemas de Bertalanffy (1950) considera la conducta humana como el resultado de la interacción de los componentes cognitivos; la teoría de la lingüística generativa y transformacional de Chomsky (1959) señala que el lenguaje no es un simple aprendizaje asociativo de estímulos, sino que da protagonismo a los procesos mentales. Una teoría de especial influencia en la teoría cognitiva es la de Turing (1936), en la que se hace una analogía entre una máquina con el sistema nervioso (Rivas, 2008; Zhong -Lin y Doshier, 2007).

La base del pensamiento cognitivista plantea que el sujeto es un ser cognitivo y activo en constante adquisición de conocimiento mediante la interacción de estructuras cognitivas pre –existentes, procesos mentales e información, que van modificando continuamente sus esquemas (Cáceres y Munévar, 2016).

En el ámbito cognitivo, la teoría del psicólogo suizo Jean Piaget es de vital importancia al proponer la génesis y desarrollo de las estructuras cognitivas en niños y adolescentes e insertar conceptos como la asimilación (interiorización o internalización de un objeto o un evento a una estructura cognitiva preestablecida), la acomodación (proceso mediante el cual el sujeto modifica sus estructuras cognitivas) para poder incorporar a esa estructura cognoscitiva nuevos objetos) y la equilibración, siendo procesos necesarios en la organización cognitiva y el aprendizaje constructivo. Piaget planteó a la epistemología como el estudio de la constitución de conocimientos, definiendo al conocimiento como el producto de un proceso mediado por el docente quien deberá tener conocimiento de la organización cognitiva de los alumnos (Cáceres y Munévar, 2016; Rivas, 2008).

Conforme a la teoría de Piaget, la construcción del conocimiento es la adaptación constituida por los dos procesos básicos mencionados - la asimilación y la acomodación - en el caso de la asimilación se adopta el conocimiento como relación indisociable del sujeto y el objeto en la que predomina la actividad del sujeto, ya que el objeto modifica la asimilación a través de la acomodación (Corredor de Porras, 2011).

La psicología cognitiva busca dar una perspectiva científica que explique las respuestas observables de los individuos infiriendo acerca de los factores subyacentes que no se pueden observar, pero que pueden explicar las acciones que observamos, tales factores son el pensamiento, el lenguaje, el significado, las imágenes mentales, entre otras (Bruning et al., 2012).

Las aportaciones recientes a esta teoría son de la neurociencia, mediante el análisis de la actividad cerebral en relación con los diferentes procesos cognitivos a través de técnicas de neuroimagen que permiten tener la información de dónde y cuándo ocurre actividad cerebral (Rivas, 2008). El estudio de la conducción nerviosa en los procesos cognitivos ha sido objetivo para esta área. En 1956 se funda la neurociencia cognitiva con el objetivo de comprender cómo se relacionan las funciones psicológicas con la función cerebral, sin embargo, no debe ser considerada como una disciplina sino como un conjunto de ciencias cuyo objeto de investigación es comprender cómo la actividad del cerebro se relaciona con la conducta y el aprendizaje, por lo que se ha puesto especial énfasis en el estudio de ambientes que estimulen las conexiones cerebrales arrojando resultados interesantes sobre el aprendizaje (Cáceres y Munévar, 2016).

Explicar la cognición humana, nos remite a hablar de los procesos de adquisición, transformación, organización, retención, recuperación y uso de la información, para los cuales son necesarios los procesos específicos como la atención, percepción, memoria, solución de problemas, entre otros.

Antes de continuar es necesario definir qué es un *proceso cognitivo*, para Rivas (2008) es una serie de operaciones mediante las que una cosa logra transformarse en otra; Azcárate (1998, citado en Distéfano y Pochulu, 2014), describe un proceso cognitivo es cualquier procedimiento que se lleva a cabo para poder incorporar conocimientos, permite asociar al pensamiento matemático, la representación, clasificación, abstracción, generalización y formalización.

Como se ha podido describir brevemente en los párrafos anteriores, la relevancia de las aportaciones del cognitivismo al ámbito educativo bajo la perspectiva del cognitivismo resulta imperante que en el proceso de aprendizaje haya estimulación cognitiva, de tal forma que el

estudiante logre la comprensión, organización y elaboración de la información que recibe (Cáceres y Munévar, 2016).

A continuación, se describen las ideas centrales de la psicología cognitiva en la educación (Bruning, et al., 2012: Cáceres y Munévar, 2016):

- El aprendizaje es un proceso constructivo y no receptivo, es decir, el aprendizaje es el resultado de una interacción entre lo que el alumno ya conoce, la información que se le da y lo que hace mientras aprende. Para la psicología cognitiva no es simplemente adquirirlo, más bien el conocimiento se crea y se recrea. El alumno activamente relaciona información nueva con conocimientos previos.
- Las estructuras mentales organizan la memoria y orientan el pensamiento, es decir, mediante los esquemas mentales que son estructuras que utilizamos para organizar la información del conocimiento recibido se dirige la percepción y la atención, facilitando la comprensión y el pensamiento, todos estos procesos se organizan para mejorar el procesamiento de la información recibida, por lo que se vuelve importante el uso de estrategias (mnemónicas, metáforas y otras) que ayuden a organizar la información.
- La práctica frecuente es necesaria para desarrollar habilidades cognitivas, entendiendo que al igual que las habilidades físicas, es necesario desarrollar y perfeccionar las habilidades cognitivas que permitan que los procesos automatizados, como la atención, la percepción, la memoria y la solución de problemas, se fortalezcan y nos permitan realizar actividades cognitivas complejas, con poco esfuerzo, rapidez y sin prestar mucha atención en los detalles. Entonces, el desarrollo de los procesos automatizados depende de la experiencia.
- El desarrollo de la autoconciencia es esencial para el desarrollo cognitivo que se ha planteado bajo la idea de metacognición, la cual hace referencia a la capacidad humana de reconocer su propio pensamiento y de utilizar esa conciencia para regular sus procesos cognitivos, es decir, sea consciente de las capacidades cognitivas que tienen y de las estrategias que podría utilizar para regular su aprendizaje.
- La psicología cognitiva acepta la importancia de sistemas de motivación y de creencias y cómo estas pueden afectar e influir en el desarrollo cognitivo, aunque hace énfasis en los procesos internos y estructuras mentales del estudiante, no puede negar la influencia de la interacción social. Bruner, en sus primeras investigaciones solo abundó en las cuestiones

mentales, sin embargo, en sus últimas aportaciones señaló la importancia de la interacción social en el desarrollo cognitivo.

Estos principios de la psicología cognitiva nos permiten visualizar cómo puede involucrarse en la perspectiva educativa, sin embargo, para afianzar esta relación, a lo largo del capítulo señalaremos aportaciones directamente relacionadas con el aprendizaje y la importancia de las estructuras mentales, destacando la notable aportación de Piaget en el área.

2.2 Teoría de Piaget

En ese apartado se dará cuenta brevemente de las aportaciones de Piaget respecto al desarrollo de la inteligencia, considerando que en la investigación se tomará esta característica humana, es preciso identificarla como una cualidad inherente y dinámica en el ser humano. Además, de ser sumamente importante el trabajo desarrollado por Piaget comúnmente relacionado a la didáctica de las matemáticas.

La teoría psicogenética permite comprobar que una realidad no es comprendida por su estado final sin el proceso que se llevó a cabo durante su elaboración, ya que facilita el análisis de los mecanismos que medían la transición desde la formación inicial de las nociones hasta los niveles superiores de conceptualización. En esta teoría se establecen relaciones entre la mente y el origen de los procesos evolutivos que se desarrollan en el individuo. La relación entre la psicogénesis (desarrollo del pensamiento individual) y la sociogénesis (historia evolutiva de una ciencia), muestra un paralelo en los mecanismos comunes que facilitan el movimiento intelectual del pensamiento pre-científico al científico (Corredor de Porras, 2011).

Piaget fue pionero en la teoría cognitiva, su trabajo comenzó en la década de 1930, pero su obra se retoma hasta los años 50's, alejándose del conductismo y centrándose en cómo representan mentalmente los niños las experiencias interactivas con su entorno, lo que lo lleva a distinguir tres tipos de representación: enactiva (con una respuesta motriz), icónico (se recupera en una imagen mental figurativa que abrevia la información) y simbólica (que es la forma más elaborada de representación, está basada en la competencia lingüística para capturar definiciones, leyes, propiedades, estrategias), estas tres formas de representación han sido consideradas en el desarrollo de ideas, siendo entonces el proceso de representación el más significativo para Bruner (Armendáriz Azcárate y Deulofeu, 1993).

2.3 Inteligencia

Bajo la perspectiva de Piaget, la inteligencia se define por el desarrollo y no por un criterio absoluto, por lo tanto, la inteligencia no aparece en el desarrollo del niño más bien es definida por un proceso que engloba el conjunto de funciones cognitivas que establecen una relación entre los aspectos biológicos y el origen del conocimiento, que es la transformación que hace el propio individuo acerca de los objetos que lo rodean mediante una participación activa (Guerrero y Flores, 2009; Piaget, 2012). La teoría de Piaget a lo largo de los años ha intentado demostrar que el desarrollo intelectual se presenta en niveles (estadios) y que un nivel será siempre producto de la reorganización del nivel anterior, es decir, a nivel cognitivo no existe un comienzo absoluto más bien es una reconstrucción o autorregulación, así como la acentuación del desarrollo de forma ilimitada hacia niveles superiores, esta sucesión constante de equilibrio es la piedra fundamental de los descubrimientos de Piaget (Nortes y Martínez, 1994).

La inteligencia se puede entender como una búsqueda de equilibrio de las acciones, a lo que se llama reversibilidad y la inteligencia es reversible entre todas las funciones cognitivas, por ejemplo, la percepción es irreversible ya que está determinada por el curso de los eventos sucesivos, sin embargo, la inteligencia permite hacer rodeos y retrocesos, además tiene la capacidad de hacer hipótesis. El equilibrio se define precisamente por la reversibilidad, ya que cuando un sistema está equilibrado, se puede modificar en un sentido y puede ser corregido de una modificación en el otro sentido. El estado de equilibrio de la organización de las funciones cognitivas es lo que se conoce como inteligencia (Piaget, 2012).

De manera resumida, el desarrollo de la inteligencia surge durante las cuatro etapas de desarrollo que propone Piaget, iniciando en el periodo sensoriomotriz hasta que se alcanzan las operaciones formales. Lo relacionado con el desarrollo del razonamiento lógico y la matemática inicia entre el año y medio y los dos años con la aparición de la función simbólica, es decir, la capacidad de representar alguna cosa ausente a través de un signo o un símbolo, pudiendo ese símbolo estar constituido por gestos e incluso por objetos dados en el campo de la percepción actual. Una vez constituida la función simbólica se constituye un nuevo instrumento al servicio de la inteligencia lo cual permite la representación.

Siguiendo con el desarrollo, la constitución de las primeras estructuras lógicas se forman entre los siete u ocho años, iniciando con la lógica de las relaciones, aunque algunos creerían que cuando el niño es capaz de distinguir entre un bastón más largo que otro, se ha formado la relación lógica, en realidad esa no es una respuesta lógica, simplemente son relaciones perceptivas e intuitivas y es hasta que se somete a prueba, o bien, lo que se llama transitividad, cuando se genera una relación lógica a partir de realizar deducciones, es decir, que no haya simple constatación preceptiva o intuitiva. De manera cronológica, aparece la clasificación lógica lo que implica el uso simultáneo de la adición lógica que permita reunir dos partes en un todo y la sustracción lógica que permite extraer una parte separando la otra del todo (Cárdenas, 2011; Nortes y Martínez, 1994; Piaget, 2012).

El último aspecto en el desarrollo de la inteligencia es la constitución del pensamiento formal, el cual aparece hacia los 11 o 12 años, este pensamiento completa la lógica concreta, que implica la capacidad de razonar sobre proposiciones sin tener la necesidad de manipular objetos mediante un razonamiento hipotético-deductivo, es decir, el razonamiento que se apoya de hipótesis en enunciados verbales, además se caracteriza por construir teorías abstractas ya que el niño deja de prescindir de cosas concretas, el paso de las operaciones concretas a las formales en donde el sujeto pasa de una inteligencia lógico concreta a una inteligencia lógico formal, es entonces que surge el pensamiento hipotético deductivo (Castro et al., 2017; Piaget, 2012; Nortes y Martínez, 1994).

A diferencia de teorías no genéticas de la inteligencia, por ejemplo, las de Russell, Binet, Messe, Selz, Marvel, Köhler, Wertheimer, entre otros, que apelan a estructuras de organización independientes del desarrollo, las teorías genéticas interpretan la inteligencia como el resultado de una construcción progresiva y resultado de las experiencias adquiridas en función del medio exterior. La inteligencia, entonces, no se entiende como un mecanismo estático sino como la coordinación progresiva de todas las estructuras cognitivas, desde las estructuras básicas (memoria, atención, percepción) hasta las estructuras más abstractas del pensamiento (razonamiento), las cuales alcanzan progresivamente el equilibrio (Piaget, 2012). Piaget explica la continuidad funcional entre la vida y el pensamiento, mediante una asimilación biológica que se prolonga en una asimilación intelectual, esta continuidad entre lo biológico y psicológico es el mecanismo mediante el cual el organismo entra en contacto con el entorno, lo asimila y actúa sobre él, por lo que las estructuras cognitivas son como órganos intelectuales cuya formación depende de las

características de un programa inicial de la herencia, de las condiciones particulares del intercambio con el medio o el entorno, de un centro funcional y de la autorregulación que mantenga la armonía en el sistema (Nortes y Martínez, 1994).

Desde la perspectiva de la epistemología genética no existe conocimiento estático, sino incremento de conocimientos, el cual deriva totalmente de la actividad sensoriomotriz que supone acciones y no solamente recepciones. Además, el incremento en los conocimientos puede explicarse a través de la evolución de las estructuras que permiten un conocimiento suficiente. El incremento del conocimiento supone una interacción indisoluble entre el sujeto y el objeto ya que es una actividad que ejerce el sujeto sobre el objeto por lo que es un conocimiento operatorio (Cárdenas, 2011; Piaget, 2012).

Brown y Desforges (1984) se refieren al modelo lógico matemático de Piaget como un modelo de composición del conocimiento en términos estructurales, especificando cuáles son los elementos fundamentales en los actos del conocimiento que permiten representar y comprender la capacidad cognoscitiva de las etapas operacionales concretas y formales, siendo el agrupamiento, el formalizar las operaciones en su período operacional concreto, para posteriormente en la etapa de operaciones alcanzar la reversibilidad al coordinar las operaciones formales con el conocimiento, por lo que la edad en que un niño alcanza este nivel está influido por algunos factores de la evolución biológica y de las funciones cognitivas (Nortes y Martínez, 1994).

2.4 Memoria de trabajo

Los procesos cognitivos son estructuras y mecanismos mentales imprescindibles para el proceso constructivo e interpretativo del aprendizaje, los procesos básicos son aquellos como la percepción, la atención y la memoria. Se consideran básicos porque se pueden producir sin intervención consciente del sujeto y tienen una raíz biológica, lo cual no implica que el sujeto no pueda llegar en algún grado a controlar la intencionalidad de su realización (Fuenmayor y Villasmil, 2008).

Para fines de la investigación, se entiende por *memoria* a la capacidad de retener y evocar información de naturaleza perceptual o conceptual, además de almacenar el conocimiento que se tiene sobre algo y las interpretaciones que se hacen de ello. La memoria no es como una grabación, más bien es un proceso activo. Viramonte (2000, citado en Fuenmayor y Villasmil, 2008), propone tipos o almacenes de memoria, como lo es la sensorial, de corto plazo y de largo plazo.

La *memoria sensorial* está relacionada con la información que llega a un órgano receptor y su función operativa es de segundos, la entrada es rápida, la persistencia es breve y la evocación depende de la velocidad en la que el cerebro procesa la información.

La *memoria a corto plazo*, es concebida como un almacén donde se guarda información por un tiempo breve antes de pasar a la memoria de largo plazo, se le figura como un sitio que integra la información que se recibe del exterior con la almacenada en la memoria a largo plazo, lo que permite identificarla reconocerla y darle sentido.

Y la *memoria de largo plazo* está constituida por todos los conocimientos, experiencias y saberes que se almacenan a lo largo de la vida y resulta fundamental al momento de comprender, además tiene una capacidad infinita de almacenamiento (Fuenmayor y Villasmil, 2008; González et al., 2016).

La *memoria de trabajo* es uno de los componentes cognitivos con mayor involucración en el aprendizaje, se puede describir como el conjunto de procesos mentales que se encarga de almacenar y manipular la información de forma temporal además de tener estrecha relación con la memoria a largo plazo ya que ambas poseen vínculos para recuperar y procesar información y almacenarla (Baddeley, 2012, citado en González et al., 2016).

Particularmente, la memoria de trabajo ha atraído la atención de investigadores de las ciencias cognitivas debido a que se ha mostrado predecir un alto desempeño escolar de las matemáticas, la comprensión lectora y el aprendizaje. Baddeley y Hitch diseñaron un modelo para estudiar la memoria de trabajo, proponiendo una memoria de trabajo *multicomponential* que permitiera el procesamiento en paralelo, de un *input verbal* -bucle fonológico- e *información visual* -agenda visoespacial-, los cuales son sistemas subsidiarios del ejecutivo central, el cual maneja la información almacenada en estos dos sistemas y a la vez se divide en tres diferentes procesos que son la *inhibición*, *cambio* y *actualización*, por lo que está relacionado con el control y la atención, es decir, los dos primeros componentes solo almacenan la información, mientras que el ejecutivo central la coordina.

La primera propuesta de Baddeley tuvo algunas dificultades, una de ellas es que considera al bucle fonológico y agenda visoespacial en espacios relativamente independientes; no se podía dar cuenta de los hallazgos que mostraban la posibilidad de que la información pudiese ser combinada, por lo

que el ejecutivo central no tenía la capacidad para retener información y su retención tampoco podría ocurrir ahí. Otra limitación se vincula con el proceso de las *unidades de información*, ya que no permitía dar cuenta del almacenamiento e integración de la información desde la memoria a largo plazo y algunos sistemas subsidiarios para poder explicar el rol de la memoria de trabajo en la conciencia. En respuesta a estas limitaciones, Baddeley reformuló su modelo y añadió un cuarto componente, el *buffer episódico*, el cual jerárquicamente es superior a la agenda visoespacial y el bucle fonológico, pero también es controlado por el ejecutivo central. El buffer episódico permitiría que los componentes interactúen posibilitando que sus contenidos estén disponibles, sirviendo como un espacio de modelación a largo plazo, encargado de almacenar episodios multidimensionales temporalmente y jugaría un papel relativamente importante en relación con la memoria a largo plazo (Cárcamo, 2018; González et al., 2016; Weijer-Bergsma et al., 2015).

La intervención de la memoria de trabajo en el aprendizaje de las matemáticas, ha sido incuestionable; sin embargo, lo que se ha discutido es el tipo de memoria con mayor involucramiento, si la verbal o la visoespacial. Presentación et al. (2015), señalan que la visoespacial es importante para visualizar mentalmente, representar cantidades en línea numérica de forma mental, por lo que es importante en el conocimiento de conjuntos numéricos, el cálculo aritmético sencillo y también se ha relacionado con la solución de problemas de conteo y la representación gráfica. En lo que respecta a la memoria de trabajo verbal y el aprendizaje de las matemáticas, también ha demostrado ser importante, ya que puede caracterizarse con algunas dificultades que tienen que ver más la utilización de contenido numérico y aquellas pruebas que requieren discriminación y codificación en el procedimiento y uso de los conceptos matemáticos.

Entender el funcionamiento de la memoria de trabajo y su relación con el aprendizaje puede aportar beneficios en el área educativa, que irían desde optimizar la enseñanza de una determinada área del conocimiento, hasta la detección temprana de problemas de aprendizaje, así como su corrección. La memoria de trabajo ha resultado predictora del éxito y desempeño académico, incluso, el coeficiente intelectual no guarda tanta relación con estos ámbitos como lo hace la memoria de trabajo (González et al., 2016).

Al igual que otros procesos cognitivos, la memoria de trabajo varía en el desarrollo del aprendizaje matemático de acuerdo con el desarrollo natural del ser humano, es decir, el crecimiento y el desarrollo afecta la manera en la que la memoria de trabajo apoya el aprendizaje y desempeño a

las matemáticas. En los primeros años escolares la agenda visoespacial juega un papel importante en la adquisición y aplicación de los primeros conceptos matemáticos. Cuando los niños son mayores, el bucle fonológico incrementa considerablemente su participación en el razonamiento matemático, por lo que la participación de la memoria de trabajo varía de acuerdo con el estado del proceso de aprendizaje (Fuenmayor y Villasmil, 2008; Weijer-Bergsma et al., 2015).

Raghubar et al, (2010, citado en González et al., 2016) estudió cómo en niños de preescolar, primaria y secundaria, las habilidades central ejecutivo y agenda visoespacial son de mayor uso durante el aprendizaje y la aplicación de nuevos conceptos matemáticos, sin embargo, el bucle fonológico tiene un rol más importante después de que la habilidad ha sido adquirida, es decir, para adquirir un nuevo concepto se apoyan de recursos visuales y para aplicar lo aprendido se recurriría a la memoria de trabajo verbal o bucle fonológico.

En el área de matemáticas, especialmente en el desarrollo de la escritura de los números y la evaluación de la magnitud, la agenda visoespacial tiene un rol importante, por lo que se ha considerado un componente crucial en la resolución de problemas aritméticos gracias a las representaciones mentales que hacen los estudiantes en el desarrollo de un problema. En el caso del bucle fonológico y el almacenamiento verbal y numérico, tiene un rol importante en la competencia matemática y se ha relacionado con la solución de problemas aritméticos de texto. Y el componente central ejecutivo está íntimamente ligado con la mayoría de los procesos matemáticos ya que juega un rol importante en el desarrollo de las primeras habilidades de la adición y en los procesos de cálculo, ya que mediante este componente se accede a la información de la memoria de largo plazo, se actualiza y se integra para crear modelos de solución de problemas (González et al., 2016).

El ser humano tiene la capacidad de reflexionar sobre lo que está haciendo, esta autorreflexión puede permitirnos saber cómo es que vemos un problema, cómo podemos solucionarlo y también cómo podemos modificar nuestra ejecución, esta acción dirigida a la memoria, permite reflexionar y juzgar las propias habilidades mnésicas, y es lo que se denomina metamemoria, la cual se refiere a la autopercepción y conocimiento del funcionamiento de la memoria propia (Sierra-Fitzgerald, 2010).

La investigación sobre la metamemoria ha llevado a considerarla como un constructo multidimensional que comprende el conocimiento de las propias estrategias de memoria, el

conocimiento de los procesos básicos de la memoria, las creencias sobre las habilidades de la memoria, los cambios percibidos en la memoria y la creencia de tener bajo control la memoria. La metamemoria fue un término introducido por Flavell y Wellman en 1977, quienes sustentaron la idea de que el conocimiento de la memoria juega un papel importante en la generación y modificación del comportamiento relacionado con la misma, por lo que al haber una mejora en la metamemoria algunas variables de control y conocimiento pueden producir mejoras en las tareas que la involucren (López et al., 2017).

La metamemoria es un recurso valioso que posibilita una mayor eficiencia y eficacia en el funcionamiento de la memoria, en este caso de la memoria de trabajo, mediante el uso de estrategias y técnicas adecuadas a las necesidades cognitivas de los estudiantes y de las exigencias curriculares que se tengan, ya que será el grado de conocimiento y conciencia que tengan los estudiantes acerca de la memoria y de todo aquello que es relevante para el registro, almacenamiento y recuperación de la información. La importancia de la metamemoria en el aprendizaje ha puesto énfasis en el desarrollo de estrategias destinadas al registro, almacenamiento y control de la información, ya que algunos estudios mostraron que la autopercepción de mayor capacidad de memoria se asocia con una mejor ejecución de una tarea de memoria (Díaz y López, 1989; López et al., 2017; Sierra-Fitzgerald, 2010).

2.5 Razonamiento

El *razonamiento* es la estructura del pensamiento que se considera superior, ya que consiste en generar juicios a partir de reflexiones ya ganadas. El razonamiento se considera conclusivo ya que a partir de los saberes previos se permite llegar a conclusiones, al mismo tiempo estas conclusiones al ser algo nuevo permiten la progresividad del conocimiento. El razonamiento es una función primordial de la inteligencia humana que permite hacer un análisis diferenciador y de síntesis de la realidad presentada a través de la percepción, es decir, mediante un análisis perceptivo de una serie de símbolos gráficos o dibujos encuentra en ellos analogías, semejanzas, diferencias, movimientos significativos, es decir, se llega a una serie de deducciones (Barrio, 2004; García et al., 2014).

Cuando se estudian las operaciones formales dentro de la teoría de Piaget es inevitable referirse al razonamiento humano como una cualidad distintiva de este nivel de pensamiento. El razonamiento si bien nos permite formular hipótesis y analizar situaciones, también implica la capacidad para comprender conceptos abstractos que existen en la ciencia, su uso lógico permite generar hipótesis.

El pensamiento formal es una condición necesaria y suficiente para acceder al conocimiento científico, por lo tanto, tiene gran efecto en el aprendizaje (Aguilar et al., 2002; Molina y Rada, 2013).

Los esquemas del razonamiento lógico matemático ubicados en el nivel de desarrollo formal, se pueden describir, según Acevedo y Martínez (1995) y Ramírez (s.f.), como:

- Proporcionalidad (PP), aquella que desarrolla la capacidad para operar con proporciones.
- Control de variables (CV), se refiere a los esquemas necesarios para comprender aquellas tareas o situaciones en las que exista más de una variable.
- Probabilidad (PB), se basa en la comprensión de la relación entre el azar y la proporción.
- Correlación (CR), se define por negar o invertir la operación anterior, además de comprender la variación conjunta de dos o más variables.
- Combinatoria (CB), consiste en la capacidad de combinar objetos y proposiciones sirviéndose de nociones matemáticas como la combinación, la permutación y la variación.

Si bien, el razonamiento formal está compuesto por los elementos mencionados, algunas definiciones del razonamiento algebraico nos indican que éste implica representar, generalizar y formalizar patrones y regularidades en cualquier aspecto de las matemáticas. El desarrollo de este razonamiento ira permitiendo el uso del lenguaje algebraico y el simbolismo que permita comunicar ideas algebraicas (Godino y Font, 2003).

El desarrollo del razonamiento algebraico es progresivo en los estudiantes que se encuentran dentro de la zona de transición aritmético–algebraico. Se puede hablar de razonamiento algebraico cuando el estudiante es capaz de abordar algún problema y propone una solución realizando determinados procedimientos y prácticas matemáticas que pueden incluir medios de expresión reglas conceptuales, procedimentales, proposiciones y justificaciones, estos objetos y procesos algebraicos se dan de forma gradual, sistemática y progresiva. En el razonamiento algebraico existen tres aspectos básicos: la generalización, el uso de lenguaje alfanumérico y el cálculo analítico, esto es que el cálculo está sujeto a la aplicación de reglas, por lo que para hablar de algo algebraico se debe considerar toda la actuación y expresión realizada al resolver un problema por lo que se podría decir que no existen problemas matemáticos algebraicos sino métodos y soluciones algebraicas. La simbolización también es parte esencial del razonamiento algebraico ya que

permite que los objetos matemáticos sean más asequibles a la reflexión (García et al., 2014; Godino y Font, 2003).

Investigaciones han resaltado el interés en desarrollar el razonamiento algebraico desde el nivel de educación primaria, es decir, crear en los alumnos la oportunidad de promover el razonamiento algebraico desde problemas aritméticos, mediante la algebrización de actividades aritméticas, de tal manera que permitan a los alumnos desarrollar el razonamiento algebraico el cual además de lo mencionado, incluye relaciones de equivalencia y el operar con elementos de conjuntos numéricos (Godino et al., 2015).

Godino et al. (2014, citado en Godino et al., 2015) proponen un modelo para caracterizar el razonamiento algebraico elemental, en el que se distinguen cuatro niveles de algebrización:

- Nivel 0: se opera con objetos particulares de lenguaje natural numérico icónico y gestual, es decir, no incorpora ningún rasgo algebraico.
- Nivel 1: Primer encuentro con lo que es el número general, puede identificar algunas propiedades generales de las estructuras algebraicas puede reconocer la igualdad como equivalencia y además posee los primeros pasos hacia el pensamiento relacional.
- Nivel 2: Hay representación alfanumérica dentro de ecuaciones y funciones que simplifican una expresión.
- Nivel 3: Se encuentra el tratamiento de incógnitas y variables, además aplica propiedades estructurales y modelización algebraica y funcional, este nivel es claramente algebraico.

Los niveles 1 y 2 son los niveles incipientes de algebrización ya que ponen en juego objetos y procesos de índole algebraica. El nivel 0, la actividad matemática no incorpora elementos algebraicos, mientras que el nivel 3 es claramente algebraico (Aké et al., 2014; Godino et al., 2015).

En sus investigaciones, Godino et al., sugieren que estos niveles del Razonamiento Algebraico Elemental (RAE), son para educación primaria, sin embargo, en educación secundaria se juega con estos niveles siendo el nivel 3 el objetivo. En su teoría, Godino sugiere tres niveles más de algebrización, sin embargo, estos niveles van más allá del RAE (Godino et al., 2015).

2.6 Estilo cognitivo

Witkin y Googenaugh (1981) se refieren a los estilos cognitivos como aquellas modalidades de recepción, organización y procesamiento de la información, los cuales determinan qué estrategias va a poner en práctica el sujeto al momento de resolver una tarea cognitiva, se considera que el estilo cognitivo es un procesamiento que se mantiene consistente y estable a lo largo de la vida de la persona y puede estar formado por varias dimensiones psicológicas que pueden ir desde la preferencia sensorial, respecto a la dependencia o independencia de campo y a la dicotomía de reflexividad e impulsividad (Curione et al., 2010).

Witkin hace referencia a dos estilos cognitivos: el de *dependencia e independencia de campo*. Las personas que tienden a percibir la información de manera analítica y sin dejarse guiar por el contexto son aquellos ubicados en la dimensión de independencia de campo perceptivo, mientras que los que tienden a percibir de una forma global son aquellos de dependencia de campo. En la dimensión independiente se percibe el entorno de forma analítica y pueden distinguirse los trazos esenciales y dominantes, mientras que los sujetos dependientes no se desligan del contexto dominante y actúan globalmente ante una situación similar. Se ha considerado que las personas dependientes de campo comparadas con las independientes de campo poseen mayores competencias interpersonales y las personas independientes de campo muestran mayor habilidad en la reestructuración cognitiva. Es importante señalar que los autores consideraron que ambas dimensiones son totalmente neutrales, ya que los polos no se consideran positivos o negativos, sin embargo, implican cualidades adaptativas a circunstancias específicas (Curione et al., 2010; Montero et al., 2005; San Martín, 2015).

En el ámbito matemático se ha considerado que la dimensión independiente está más relacionada con la resolución de problemas, ya que esta incluye dos procesos importantes, el primero es la percepción del problema y el segundo es la respuesta posible que se le da este problema, en la percepción del problema es en donde influye el estilo cognitivo, es decir, la forma de estructurar el ambiente exterior a partir del análisis que se hace mediante el estilo cognitivo ponen énfasis en cómo se van a organizar las habilidades cognitivas para poder dar solución al problema (Montero et al., 2005; Sánchez, 1999).

Considerando estas reflexiones teóricas como el sustento de la investigación, es importante señalar que bajo la perspectiva cognitiva es fundamental entender los procesos cognitivos que se involucran en el aprendizaje, para poder establecer argumentos sólidos acerca del desarrollo cognitivo de los estudiantes.

Capítulo 3

MÉTODO

En este apartado se presentan los detalles referentes al método que se utilizó para realizar esta investigación y se hace una descripción del proceso que se siguió para realizar el análisis de los datos obtenidos.

La investigación tuvo un enfoque cuantitativo. Es un estudio de tipo descriptivo, ya que pretende especificar características de los sujetos y permite analizar cómo es y cómo se manifiesta un fenómeno y sus componentes (Balcázar et al., 2013).

En un estudio descriptivo, la meta del investigador consiste en describir fenómenos, situaciones, contextos y sucesos; esto es, detallar cómo son y se manifiestan. Con los estudios descriptivos se busca especificar las propiedades, las características y los perfiles de personas, grupos, comunidades, procesos, objetos o cualquier otro fenómeno que se someta a un análisis (Hernández-Sampieri, et al, 2014, p. 92).

Como se ha mencionado, el análisis de los datos se realizará de manera cuantitativa para lograr la descripción de los procesos cognitivos de los participantes.

3.1 Sujetos

Seleccionados con un procedimiento no probabilístico, de caso – tipo. El objetivo de este tipo de muestra no está en la cantidad de participantes, sino en la riqueza, calidad y profundidad de la información que aportarán a la investigación. Para atender a los objetivos de la investigación se consideraron alumnos de segundo y tercer grado de secundarias públicas del estado de Tlaxcala.

Considerando la situación sanitaria a nivel mundial que se vivía al momento de realizar la recogida de datos se contemplaron los ajustes técnicos y administrativos a los que se sometieron los centros educativos, por lo tanto, los estudiantes fueron elegidos con respecto a su edad debiendo tener entre 13 y 15 años, considerando la edad cronológica a la que pertenecerían con el nivel educativo previsto por los lineamientos de SEP. Los participantes seleccionados como requisito para ser considerados no debían presentar algún problema de salud que pudiera influir en su desarrollo intelectual o diagnosticados con algún tipo problema cognitivo o de aprendizaje (dislexia,

discapacidad de la memoria, TDA, TDAH, Asperger, problemas de lenguaje, discalculia, entre otros).

Los estudiantes seleccionados eran alumnos inscritos y regulares de secundarias técnicas del estado de Tlaxcala y para su participación se solicitó la autorización de padres o tutores a quienes se les explicó el objetivo de la investigación y se garantizó la confidencialidad de sus datos.

3.2 Técnicas y estrategias

Rodríguez y Valdeorola (2007) mencionan que las técnicas se refieren a los modos, maneras o estilos de recoger la información, mientras que los instrumentos, son herramientas concretas de cada técnica o estrategias que nos permiten llevar a la práctica la obtención de la información.

Considerando el objetivo de la investigación y la selección de instrumentos, se aplicaron dos técnicas de recolección de datos: la técnica de análisis que tiene como fin estudiar cualquier tipo de comunicación o información de manera sistemática y objetiva logrando categorizar los datos recolectados (Hernández Sampieri et al., 2014), y la segunda técnica fue el uso de pruebas estandarizadas.

Para la técnica de análisis, el instrumento que se utilizó fue una entrevista clínica con análisis de datos cuantitativos, ya que consistió en una serie de problemas algebraicos que permitieron categorizar de forma objetiva a los participantes en tres niveles de desempeño, para esto se consideró la escala de algebrización de Godino, que va del 0 al 3 y a partir de cuantificar su procedimiento y razonamiento algebraico se establecieron 3 niveles de desempeño. Los demás instrumentos se compilaron en una batería de pruebas psicométricas.

3.3 Identificación de variables

El aprendizaje y desempeño del algebra elemental en los estudiantes de educación secundaria es la variable que para esta investigación dependerá de los procesos cognitivos que se consideran las variables independientes, siendo las siguientes:

- Memoria de trabajo: Conjunto de procesos mentales que se encargan de almacenar y manipular la información de forma temporal, además de tener estrecha relación con la memoria de largo plazo, ya que ambas poseen vínculos para recuperar y procesar información y almacenarla (Baddeley, 2012, citado en González et al., 2016).

- **Razonamiento:** cualidad distintiva que nos permite formular hipótesis y analizar situaciones, comprender conceptos abstractos que existen en la ciencia y generar hipótesis a partir de situaciones abstractas y concretas (Aguilar et al., 2002).
- **Estilo cognitivo:** Modalidades de recepción, organización y procesamiento de la información, los cuales determinan qué estrategias va a poner en práctica el sujeto al momento de resolver una tarea que implique poner en funcionamiento sus procesos cognitivos (Curione et al., 2010).
- **Inteligencia:** La inteligencia se entiende como una búsqueda de equilibrio de las acciones, a lo que se llama reversibilidad y la inteligencia es reversible entre todas las funciones cognitivas, permite hacer rodeos. Es el estado de equilibrio de la organización de las funciones cognitivas que permiten el razonamiento formal (Piaget, 2012).

Considerado estas variables, la aplicación de instrumentos y análisis de resultados tienen la finalidad de identificar las características de los procesos cognitivos en cada uno de los estudiantes que participan en el estudio.

3.4 Instrumentos

El total de instrumentos que se aplicó, se seleccionaron con base en las variables y los objetivos de la investigación.

- **Entrevista clínica:** Aplicada en la educación es un medio que permite al investigador cuestionar sobre los conocimientos o procedimientos que utiliza el alumno en la solución de un problema o situación, permite ver más allá de lo escrito, ha sido útil para comprender los procesos cognitivos desarrollados durante el estudio (Pantoja y Ortega, 2016). En la investigación se aplicó la entrevista clínica con problemas específicos que permitan vislumbrar el desempeño algebraico que posee el estudiante.

Las actividades que se aplicaron se tomaron de libros de texto de la CONALITEG de primero y segundo grado, por lo tanto, son actividades de álgebra que, considerando el programa nacional de estudios de segundo y tercer grado, los alumnos de ambos grados sean capaces de resolver. Las actividades se muestran en la Tabla 1, señalando el objetivo de estudio de cada una. Los problemas de los incisos 2, 4 y 5, son textuales del libro de texto; para el inciso uno se tomaron de fragmentos

de actividades de los libros de texto de primer grado y la actividad del inciso 3, se modificó gráficamente, ya que originalmente eran puntos, no asteriscos.

Tabla 1

Objetivo de las actividades para entrevista clínica

Instrucción de la actividad	Objetivo												
<p>1. ¿Qué número sustituiría a la x en las siguientes expresiones?</p> $x - 21 = 43$ $12x + 4 = 64$ $87 + 32 = x + 55$ $x + 7 = 16 + 5$	<p>Observar en el estudiante su comprensión de la relación de equivalencia en expresiones algebraicas en donde la variable es una incógnita específica.</p>												
<p>2. Escribe la ecuación que expresa cada situación</p> <p>a) Pedro pensó un número, le sumó 7 y obtuvo 21, si x es el número que pensó, la ecuación es _____</p> <p>b) En un grupo hay 7 hombres más que mujeres y hay 21 hombres, si x es la cantidad de mujeres, la ecuación es _____</p>	<p>Observar si el estudiante es capaz de hacer uso de notación simbólica literal para la formulación y resolución de ecuaciones lineales</p>												
<p>3.</p> <table border="1" data-bbox="142 1255 824 1638"> <thead> <tr> <th></th> <th></th> <th>Número de asteriscos</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Fig. 1</td> <td>*</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>Fig. 2</td> <td>** **</td> <td>4</td> </tr> <tr> <td>Fig. 3</td> <td>*** *** ***</td> <td>9</td> </tr> </tbody> </table>			Número de asteriscos	Fig. 1	*	1	Fig. 2	** **	4	Fig. 3	*** *** ***	9	<p>Observar si el estudiante reconoce generalidades en objetos matemáticos y es capaz de estructurar una regla que la explique.</p>
		Número de asteriscos											
Fig. 1	*	1											
Fig. 2	** **	4											
Fig. 3	*** *** ***	9											

¿Cuántos asteriscos hay en la figura 4?

¿Podrías expresar la ecuación que represente la regla general de la sucesión?

¿Cuál sería? Utilizando esa regla, halla los valores de las posiciones 10 y 15

Instrucción de la actividad	Objetivo
4. Raúl tiene dos primas que tienen la misma edad, Elena y Raquel. Elena tiene 16 años más que el doble de la edad de Raúl. Raquel tiene un año más que el quíntuple de la edad de Raúl. Si la edad de Raúl es representada por x . ¿Con qué expresiones se pueden representar las edades de Raquel y Elena? ¿Qué edad tiene Raúl? ¿Qué edad tiene Raquel?	Observar si el alumno identifica la existencia de un valor desconocido que puede hallar relacionando los datos existentes y simbolizando a la incógnita
5. Hay seis asientos entre sillas y taburetes. Las sillas tienen cuatro patas y los taburetes tienen tres. En total hay 20 patas. ¿Cuántas sillas y cuántos taburetes hay? Expresa el sistema de ecuaciones que resolvería este problema y calcula la respuesta.	Identificar si el estudiante realiza simbolización mediante una letra o símbolo para distinguir variables y hace un sistema con expresiones algebraicas.

- Batería Neuropsicológica de Funciones Ejecutivas y Lóbulos Frontales (BANFE): desarrollada por Flores et al., (2008), es una opción de evaluación neuropsicológica precisa de las funciones ejecutivas, las cuales se refieren al conjunto de capacidades que permiten al sujeto resolver problemas, las cuales implican desde la anticipación y planeación hasta la ejecución y autorregulación en las actividades. Estas funciones son de vital importancia y se vinculan con el funcionamiento del lóbulo frontal. Considerando los objetivos de la investigación, dentro de la batería en la evaluación dorsal, se hace una valoración de la memoria de trabajo. La batería consta de 15 subpruebas. No obstante, por el fin de la investigación solo se consideraron las siguientes:

- o Subprueba 2: Señalamiento autodirigido: evalúa la memoria de trabajo visoespacial.
- o Subprueba 3: Ordenamiento alfabético de palabras: evalúa memoria de trabajo y manipulación mental.
- o Subprueba 4: Resta consecutiva: evalúa operaciones mentales consecutivas e inversas.
- o Subprueba 5: Suma consecutiva: operaciones mentales consecutivas.

- o Subprueba 13: Metamemoria: monitoreo y control metacognitivo.
- o Subprueba 14: Memoria visoespacial: memoria de trabajo visoespacial para secuencia específica.
- Test de las Figuras Enmascaradas Grupal (GEFT): Esta prueba se utiliza para medir dos tipos de estilo cognitivo, el dependiente del campo e independiente del campo. Consta de 25 ítems con dificultad gradual, en cada ítem se le presenta al estudiante una figura geométrica completa en la que debe localizar y trazar una figura simple que ha visto previamente. Para completar la tarea es necesario que el estudiante mantenga una atención selectiva y evite los estímulos distractores. La prueba se compone de tres secciones: la primera se considera de prueba y permite que el evaluado se familiarice con la prueba, las siguientes dos secciones son las que se evalúan, constan de 9 reactivos respectivamente. El tiempo de aplicación varía conforme a la sección, la primera se aplica en 3 minutos y las últimas dos tienen un tiempo de 5 minutos (Curione et al., 2010).
- Test de Pensamiento lógico (TOLT) de Tobin y Capie: Consiste en un cuestionario de diez tareas que se realiza con lápiz y papel. Las tareas se organizan de tal forma, que cada dos consecutivamente corresponden a un esquema de razonamiento distinto: proporcionalidad (PP), control de variables (CV), probabilidad (PB), correlación (CR) y operaciones combinatorias (CB). Cada tarea implica dos niveles, respuesta y explicación, ambas con opción múltiple; las últimas dos que se refieren a combinaciones y permutaciones, son de respuesta abierta semiestructurada. El test se aplica bajo límite de tiempo, considerando 38 minutos para su aplicación, con la posibilidad de distribuir el tiempo de la siguiente manera: 3 minutos para cada uno de los primeros cuatro, 4 minutos para cada uno de los siguientes cuatro y cinco minutos para cada uno de los últimos dos (Acevedo y Martínez, 1995). Tiene un puntaje máximo de 10 y mínimo 0, además, esta prueba de razonamiento lógico determina los niveles de pensamiento matemático a través del número de respuestas correctas: el nivel concreto (0 - 3), transicional (4 - 6) y formal (7 - 10).
- Test de dominós: Evalúa la capacidad para conceptualizar y aplicar el razonamiento sistemático a nuevos problemas, permite apreciar las funciones centrales de la inteligencia: abstracción y comprensión de relaciones. Consta de 48 ítems, en cada uno hay un grupo de seis fichas de dominó, en cada grupo hay una ficha en blanco la cual debe completar el alumno, basándose en la secuencia de las otras cinco fichas. Para su aplicación se dispone de 40 minutos.

3.5 Procedimiento

Elección de instrumentos: Para llevar a cabo la investigación, en un primer momento se hizo la selección de instrumentos considerando las variables de investigación y también se tomó en cuenta la contingencia sanitaria ya que debido a esta situación la elección de instrumentos tuvo constantes cambios. Al comenzar el diseño de la investigación, se pretendía utilizar pruebas neuropsicológicas, sin embargo, por la naturaleza de estas, su aplicación implica el trabajo personal con el estudiante lo cual permite observar todas sus características conductuales y cognitivas, por tanto, se realizó la elección de instrumentos que permitían una aplicación semi-presencial.

Para la recolección de datos, los instrumentos se compilaron en una batería que se trabajó con cada participante de forma individual y dosificada (Anexo 1).

Diseño de tareas para entrevista clínica: Para la elección de las tareas que se aplicaron en la entrevista clínica primero se revisaron los planes y programas, así como los aprendizajes esperados respecto al aprendizaje del álgebra elemental, a partir de esto se revisaron libros de CONALITEG y se seleccionaron tareas pertinentes.

Se recurrió a una revisión por pares, quienes participaron, son docentes en servicio de nivel secundaria y evaluaron la pertinencia de las actividades, si cumplían con el objetivo y si alumnos cursando 2° y 3° grado de secundaria serían capaces de resolverlo basados en los aprendizajes del programa de estudios.

En los resultados hallados en la revisión por pares, se consideraron los objetivos de cada rubro y dos posibles ítems, de los cuales los docentes evaluaron cuál era pertinente en cada rubro y de ser necesario hicieron observaciones o sugerencias necesarias como se muestra en la Tabla 2.

Tabla 2*Observaciones de revisión por pares*

Objetivo	Observaciones
1. Observar en el estudiante su comprensión de relación de equivalencia en expresiones algebraicas en donde la variable es una incógnita específica.	El ítem que se utiliza en la entrevista se elige por consenso en el arbitraje, ya que se consideraron pertinentes las actividades al ser lo básico en álgebra y ser una habilidad que debiera poseer los estudiantes de ambos grados (2° y 3°).
2. Observar si el estudiante es capaz de hacer uso de notación simbólica para la formulación y resolución de ecuaciones lineales	No hubo consenso, ya que dos docentes consideraron más apropiada la actividad que consistía en generar expresiones algebraicas, sin embargo, considerando el objetivo que incluye la resolución de ecuaciones, el ítem que se utiliza en la entrevista cumple con esto, además de presentarse en un contexto que no es ajeno al estudiante.
3. Observar si el estudiante reconoce generalidades en objetos matemáticos y es capaz de estructurar una regla que la explique.	En este ítem, solo hubo un comentario respecto al ítem que se utiliza en la entrevista, al considerarlo complejo, por lo que la opinión en general es que a alumnos que comiencen 2° grado podría dificultarse su resolución, además de incluir en el ítem preguntas que induzcan al estudiante a generar la ecuación general.

Objetivo	Observaciones
4. Observar si el alumno identifica la existencia de un valor desconocido que puede hallar relacionando los datos existentes y simbolizando a la incógnita	En este ítem no hubo consenso, ya que dos docentes consideraron al ítem más complejo, sin embargo, se hizo el señalamiento de que, al aplicarse en una entrevista, se tendría que estar pendiente por si el estudiante presentara alguna duda respecto a lo que se le plantea en las preguntas. Hubo coincidencia de que sería más atractivo para el estudiante por el contexto que se emplea.
5. Identificar si el estudiante realiza simbolización mediante el uso de letras para distinguir variables y hace un sistema con expresiones algebraicas.	Se encontró consenso respecto a la utilización de la tarea propuesta para la entrevista clínica. Solo se comentó la importancia de considerar el grado del estudiante, ya que si apenas comienza segundo grado puede dificultarse, además de considerar que el estudiante si no sabe cómo resolverlo algebraicamente podría recurrir a representaciones gráficas.

Aplicación de instrumentos: Considerando la situación de pandemia, se hicieron cambios a la idea inicial de aplicarlo en alumnos de una institución educativa, sin embargo, debido a las características de los instrumentos y los objetivos de la investigación, se requería de un trabajo extenuante con cada sujeto y la apertura de los centros educativos por las condiciones sanitarias, eran nulas. Como consecuencia de la situación, se seleccionaron sujetos que contaran con las características requeridas y tuvieran disponibilidad para la aplicación de los instrumentos de forma semi-presencial, algunos instrumentos se aplicaron vía remota (Figuras enmascaradas, Dominós y TOLT) y otros de forma presencial (entrevista clínica y BANFE). Para la correcta aplicación se contó con autorización de los tutores y una breve entrevista con los docentes de cada estudiante.

Los cuadernillos físicos de trabajo se entregaron a los estudiantes los cuales se trabajaron en diferentes sesiones, al final de aplicación total los cuadernillos se devolvieron al investigador. Para evitar que hubiese cambios en los cuadernillos al final de cada sesión se tomaban evidencias digitales del avance.

La aplicación de los instrumentos se realizó en un total de 5 sesiones de forma individual con cada participante, con una duración de entre 40 y 90 minutos, siendo las sesiones de mayor duración para la aplicación de la entrevista clínica, BANFE y el TOLT, y en las de menos duración se aplicaron las pruebas de Figuras ocultas y Dominós.

Análisis de datos: En un primer momento se realizó el análisis de la entrevista clínica y a partir de los resultados y las características cognitivas de cada estudiante se hizo una clasificación de los participantes. Esta clasificación permitió ubicar a cada estudiante en un nivel de desempeño algebraico. Contando con la distinción de los estudiantes en un nivel de desempeño, con los datos resultantes de cada instrumento se hizo un análisis estadístico para describir y caracterizar la distribución de los valores de las variables del estudio, lo que permitió mostrar las diferencias entre los grupos de desempeño y las categorías dadas en los instrumentos utilizados.

Análisis estadístico: Para analizar los datos obtenidos arrojados por la BANFE, se utilizó el paquete estadístico SSPS versión 26 para establecer si los estudiantes con distinto nivel de desempeño difieren o coinciden en elementos de la memoria de trabajo. Se aplicaron las pruebas de Kruskal – Wallis y la U de Mann – Whitney. Se eligieron estas pruebas al ser pruebas no paramétricas que permiten el análisis de muestras en las cuales se desconoce si hay normalidad en la población. La prueba de Kruskal-Wallis utiliza rangos de datos de tres o más muestras independientes para probar la H_0 de que las muestras provienen de poblaciones con medianas iguales. Y la prueba U de Mann -Whitney se utiliza en dos conjuntos independientes para probar la H_0 de que las poblaciones tienen medianas iguales (Triola, 2009). Se aplicaron de manera complementaria para hallar diferencias o coincidencias entre los niveles de desempeño.

A partir del análisis descriptivo y estadístico de los datos obtenidos, es posible hacer conclusiones en las cuales se determina si los niveles de desempeño en álgebra están determinados por características específicas de los procesos cognitivos estudiados.

Capítulo 4

RESULTADOS

4.1 Clasificación de participantes por nivel de desempeño

En un primer momento se consideró necesario hacer la clasificación de los participantes considerando los reportes de evaluación oficiales que tenían al momento de la aplicación de instrumentos, sin embargo, el desempeño mostrado en la entrevista clínica no coincidía con el nivel de desempeño esperado, es decir: estudiantes que tenían promedios altos en sus reportes de evaluación, en la entrevista clínica mostraron un desempeño bajo. A partir de esta situación, se tuvo una entrevista breve con las docentes de los estudiantes, en la cual se explicó que, por la situación de pandemia, las calificaciones de los estudiantes están definidas por la entrega de sus evidencias y que es posible que no coincidiera con sus aprendizajes. Considerando esta situación y para mejorar la precisión en la clasificación por niveles de los estudiantes, el nivel de desempeño se estableció considerando sólo el desempeño que tuvieron en la entrevista clínica, mediante los razonamientos y procedimientos que aplicaron en la resolución de las actividades.

En el anexo 1, se describe brevemente el desempeño de cada participante en las actividades tomando en cuenta su objetivo, se pueden observar los procesos y razonamientos clave durante la entrevista. Tomando en cuenta el modelo de Godino para identificar los niveles de RAE (Razonamiento Algebraico Elemental), en la tabla 3, se distinguen los niveles de algebrización que el estudiante aplicó en cada actividad y a partir de ello se clasifican en 3 niveles de desempeño: nivel bajo, caracterizado por tener nulo nivel de algebrización en sus respuestas; nivel desempeño medio, en el cual se ubican estudiantes que identifican algunas propiedades algebraicas, hacen uso de representaciones alfa numérica, sin embargo, su procedimiento y comprensión aun es incipiente; y el nivel de desempeño alto, en el cual los alumnos son capaces de modelizar situaciones de forma alfanumérica, comprenden la igualdad en una ecuación y función, y además hacen el uso adecuado de las variables. Es importante, aclarar que los puntajes del 0 al 3 corresponden a los niveles de algebrización que propone Godino, y sirven para poder clasificar a los participantes en los tres niveles de desempeño mencionados.

Al terminar el análisis de la entrevista clínica fue posible definir tres grupos con niveles de desempeño distinto, es importante mencionar que, en cada nivel de desempeño, se encuentran

estudiantes de ambos grados (2° y 3°), como se muestra en la figura 1. Por lo que es posible afirmar que las actividades eran aplicables para el estado académico de alumnos de ambos grados y la resolución dependía completamente del nivel de algebrización que tienen los estudiantes al momento de enfrentar una situación matemática.

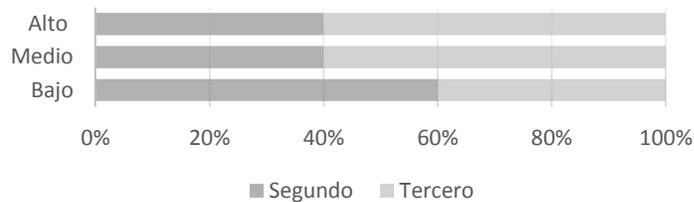
Tabla 3

Clasificación de nivel de desempeño por niveles de RAE

Estudiante	Relaciona equivalencia en expresiones con una incógnita específica.	Formula y soluciona ecuaciones lineales.	Simboliza valores y halla el valor de la incógnita.	Reconoce generalidades y estructura una regla general.	Simboliza variables y hace un sistema con expresiones algebraicas.	Nivel de desempeño
Imelda	0	0	0	0	0	Bajo
Julio	0	0	0	0	0	Bajo
Ángel	0	1	0	0	0	Bajo
Sebastián	0	1	0	0	0	Bajo
Vanesa	0	0	0	0	0	Bajo
David	1	2	0	2	1	Medio
Samuel	2	1	0	1	0	Medio
Diego	1	1	1	1	0	Medio
Guadalupe	1	1	1	1	1	Medio
Rosa	1	2	1	0	0	Medio
Héctor	3	1	2	2	1	Alto
Santiago	3	2	1	2	2	Alto
Melisa	2	2	2	2	2	Alto
Rigoberto	3	2	2	2	2	Alto
Cecilia	3	3	2	3	2	Alto

Figura 1

Distribución de grado académico por nivel de desempeño



4.2 Características de los procesos cognitivos por nivel de desempeño

En este apartado se describen cada uno de los procesos cognitivos estudiados y las características de los estudiantes en cada uno de los niveles de desempeño lo que permite hacer comparaciones entre niveles para observar divergencias en las cualidades cognitivas de los estudiantes en cada uno de los niveles de desempeño algebraico.

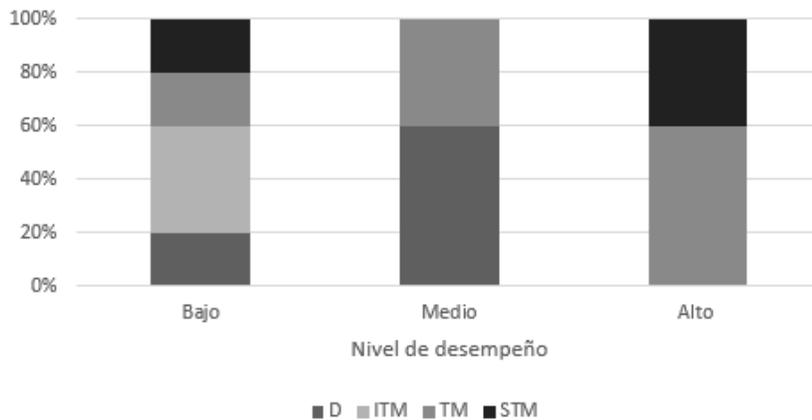
4.2.1 Inteligencia

El test de Dominós permite hallar el rango intelectual del estudiante, los rangos que determina el test, son: deficiente (D), inferior al término medio (ITM), término medio (TM), superior al término medio (STM) y sobresaliente (S). De los rangos mencionados, los participantes se pudieron clasificar en cuatro de las cinco categorías, no habiendo ningún estudiante en el rango sobresaliente.

Para localizar las diferencias de rango entre los niveles de desempeño algebraico, podemos observar en la figura 2, que en el nivel de desempeño bajo se encuentra mayor diversidad en los resultados, existiendo un 40% de estudiantes en el rango ITM, y el 60% restante, distribuido equitativamente entre D, TM y STM. Para el nivel de desempeño medio, el 60% de los estudiantes se ubicaron en D y el 40% en TM. Y para el caso de los estudiantes que se ubican en el nivel de desempeño alto, el 60% se ubican en TM y el 40% STM.

Figura 2

Rangos de coeficiente intelectual por niveles de desempeño



Si consideramos el total de aciertos que se tuvieron en la prueba Dominós, esto refleja el razonamiento de los estudiantes, ya que, considerando el diseño del test, se pueden evaluar las funciones centrales de abstracción y comprensión de relaciones. Un análisis descriptivo del número de aciertos en los niveles de desempeño (Tabla 4) permite observar que si se considera la \bar{x} de cada nivel de desempeño, esta es más baja en el nivel de desempeño medio. De igual manera de acuerdo con el rango y la desviación estándar, existe mayor dispersión entre los puntajes del nivel de desempeño bajo y medio.

Tabla 4

Análisis descriptivo de aciertos en Dominós por nivel

Nivel de desempeño	\bar{x}	Rango	s
Bajo	20.5	25	10.66
Medio	11	28	11.97
Alto	27	10	4.69

Esto nos permite interpretar que en el caso de los estudiantes que se encuentran en nivel alto hay mayor homogeneidad respecto a su desempeño en la prueba de Dominós, y considerando las características de este test es posible decir que los alumnos tienen más capacidad de abstracción y de razonamiento sistemático para generar relaciones y generalizaciones numéricas.

4.2.2 Razonamiento

Para analizar el razonamiento de los estudiantes, el TOLT permite clasificar el nivel de razonamiento en concreto, transicional y formal.

Los participantes en esta área se distribuyeron, el 93.4% se ubicaron en el nivel concreto y el 6.6% en el nivel transicional (ver figura 3). Considerando las reglas de evaluación del test, aquellos estudiantes que tienen de 0 a 3 aciertos se ubican dentro del nivel concreto, razón por la que la mayoría de los participantes se encuentran en este nivel. Sin embargo, si tomamos el número de aciertos en consideración es posible decir que el nivel de desempeño alto de forma grupal obtuvo el mayor número de aciertos (figura 4), mientras que los niveles de desempeño bajo y medio obtuvieron en general el mismo número de aciertos.

Figura 3

Nivel de razonamiento por niveles de desempeño algebraico

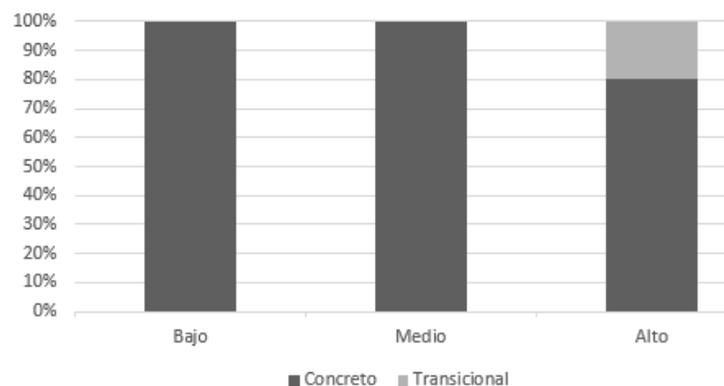
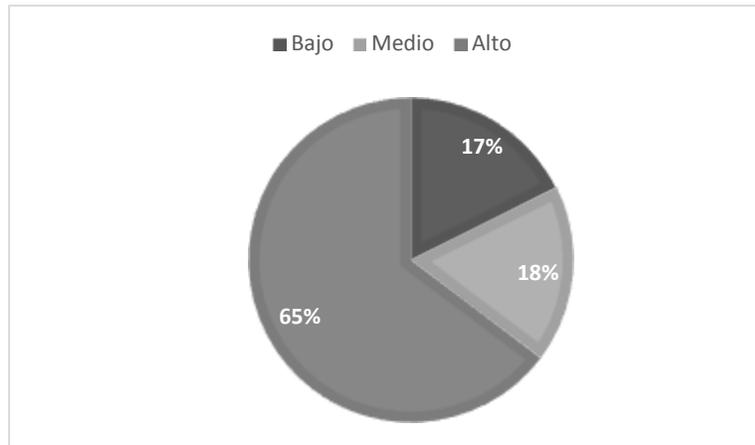


Figura 4

Aciertos generales por nivel de desempeño



Respecto al número de aciertos por estudiante, en la tabla 5, se muestra el porcentaje de alumnos por nivel conforme al número de aciertos que obtuvo en la prueba y el esquema de razonamiento en el cual se sitúa su acierto. A partir de esto es posible observar que pese a haber coincidencias respecto al nivel de razonamiento, el número de aciertos si refleja una diferencia notable. En los niveles bajo y medio, hubo estudiantes con 0 aciertos, y el nivel de desempeño alto el mínimo de aciertos fue de 1 y el máximo de 4. Por lo que es posible definir que los alumnos con alto rendimiento en álgebra también muestran mayor desempeño en las tareas del test de razonamiento, de tal manera que su razonamiento puede estar próximo al nivel transicional.

Tabla 5*Aciertos por estudiantes en test TOLT*

Aciertos y esquemas de razonamiento (ER)										
	0	ER	1	ER	2	ER	3	ER	4	ER
Bajo	60%		20%	CB	20%	CV	0%		0%	
						CR				
Medio	60%		20%	CB	20%	CB	0%		0%	
Alto	0%		40%	CR	20%	PP	20%	PP	20%	PP
				PP		CB		CB		CB

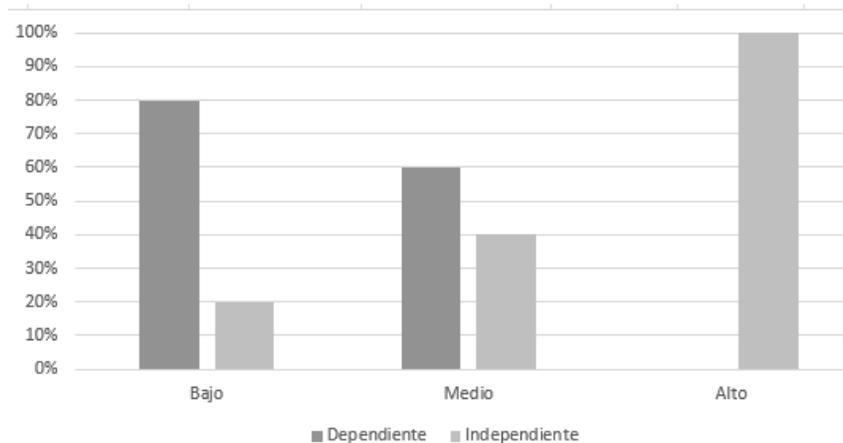
En la tabla 5, como se puede observar el desempeño en los esquemas de razonamientos, recordando los 5 esquemas: Proporcionalidad (PP), Control de variables (CV), Probabilidad (PB), Correlación (CR) y Combinatoria (CB). En los estudiantes de desempeño alto, los aciertos coinciden en el esquema PP que desarrolla la capacidad para operar con proporciones, y el segundo esquema con mayores aciertos es el CB, que consiste en la capacidad de combinar objetos y proposiciones sirviéndose de nociones matemáticas como la combinación, la permutación y la variación.

4.2.3 *Estilo cognitivo*

El estilo cognitivo mostró mayor diferencia respecto a los niveles de desempeño. Como se observa en la figura 5, resulta evidente que en el nivel de desempeño alto el 100% de los estudiantes tienen un estilo independiente, en comparación con el nivel de desempeño bajo en los cuales se ubica el 80% de los estudiantes en el estilo cognitivo dependiente y el 20% en el independiente. Para el caso de los estudiantes que se encuentran en el nivel de desempeño medio se presentó mayor diversidad, el 60% mostró un estilo cognitivo dependiente y el 40% en el independiente. Tomando esto en cuenta es posible retomar investigaciones previas en las que se afirma que estudiantes con estilo independiente tienen mejor desempeño en el área de las matemáticas, que aquellos que se encuentran en el nivel en el estilo cognitivo dependiente.

Figura 5

Estilo cognitivo por estudiante en cada nivel de desempeño



4.2.4 Memoria de trabajo

La BANFE permitió explorar varias áreas de la memoria de trabajo, que para fines de la investigación se tomaron en cuenta memoria de trabajo visoespacial, memoria de trabajo verbal y operaciones mentales, y metamemoria. Para el análisis estadístico de los datos arrojados por la BANFE, se utilizó el paquete estadístico SSPS versión 26. Se eligieron pruebas no paramétricas por el tamaño de las muestras y no conocer el tipo de distribución de los datos. Se recurre a la prueba de Kruskal Wallis (H) para hallar diferencias significativas entre los tres grupos de desempeño y cómo complemento, U de Mann Whitney en caso de ser necesario descartar diferencias entre pares de grupos de desempeño. Para las pruebas de hipótesis se consideró el nivel de significancia, $\alpha = .05$. Por lo tanto, si $p \leq \alpha$ se rechazan las H_0 , concluyendo que existen diferencias estadísticamente significativas entre las muestras. En contraste, si $p > \alpha$ no se rechaza la hipótesis nula-

En cuanto al análisis de los datos obtenidos de la evaluación de la memoria de trabajo visoespacial, específicamente de la subprueba de señalamiento autodirigido, los resultados obtenidos se presentan en la Tabla 6.

Tabla 6*Estadístico H en subprueba de señalamiento autodirigido*

	Nivel de desempeño	Rango promedio	H. de Kruskal - Wallis	p
Señalamiento	Bajo	10.70	9.11	.010
Autodirigido	Medio	10.20		
Tiempo	Alto	3.10		
Señalamiento	Bajo	7.50	8.47	.014
Autodirigido	Medio	4.20		
Aciertos	Alto	12.30		

$p \leq \alpha$, se rechaza la H_0 .

Los resultados permiten señalar que hay diferencias significativas entre los grupos de desempeño, mostrando una diferencia estadísticamente evidente entre el nivel de desempeño alto y los niveles bajo y medio. Dadas las similitudes entre los niveles medio y bajo, se aplicó el estadístico U, para determinar si entre estos niveles de desempeño hay diferencias.

Considerando el nivel de significancia, se acepta la H_0 , al no haber evidencia estadística que muestre diferencias entre el nivel de desempeño bajo y medio, teniendo un desempeño similar en la subprueba, considerando esto, es posible destacar que los alumnos de alto desempeño algebraico son más veloces en tareas que implican el uso de información visoespacial almacenada en su memoria de trabajo.

Tabla 7*Prueba U de señalamiento autodirigido entre niveles de desempeño bajo y medio*

	Nivel de desempeño	Rango promedio	U de Mann - Whitney	P
Señalamiento Autodirigido	Bajo	5.80	11.0	.751
Tiempo	Medio	5.20		
Señalamiento Autodirigido	Bajo	6.80	6.0	.167
Aciertos	Medio	4.20		

$P > \alpha$, se acepta la H_0 .

La subprueba que complementa la evaluación de la memoria de trabajo visoespacial, implica el almacenamiento y recuperación de información visoespacial. Los resultados del análisis se presentan en la Tabla 8.

Tabla 8*Estadístico H en subprueba de memoria de trabajo visoespacial*

	Nivel de desempeño	Rango promedio	H. de Kruskal - Wallis	P
Memoria de trabajo visoespacial Nivel alcanzado	Bajo	8.90	.375	.829
	Medio	7.50		
	Alto	7.60		
Memoria de trabajo visoespacial Sustituciones	Bajo	10.40	3.102	.212
	Medio	6.80		
	Alto	6.80		
Memoria de trabajo visoespacial Errores de orden	Bajo	8.80	.282	.868
	Medio	7.80		
	Alto	7.40		

$P > \alpha$, se acepta la H_0

En esta subprueba, las características a evaluar fueron el nivel alcanzado, el número de sustituciones (figuras señaladas que no estaban en la prueba) y los errores de orden (señalar en forma discontinua las imágenes), los resultados sugieren que no existen diferencias estadísticamente significativas entre los niveles de desempeño.

En otro aspecto de la memoria de trabajo, el área verbal y de operaciones mentales se evaluó mediante tres subpruebas. La primera implica el almacenamiento y recuperación de información verbal. Los resultados obtenidos del análisis de los datos aparece en la Tabla 9.

Tabla 9

Estadístico H en subprueba de ordenamiento alfabético

	Nivel de desempeño	Rango promedio	H.de Kruskal - Wallis	p
Ordenamiento alfabético	Bajo	9.40	3.228	.199
	Medio	5.20		
Nivel	Alto	9.40		

$P > \alpha$, se acepta la H_0

Los resultados indican que no hay diferencias significativas entre las muestras, sin embargo, considerando el rango promedio de los niveles y para determinar si hay distinción entre los niveles medio y alto se aplicó la prueba U (Tabla 10).

Tabla 10

Prueba U en ordenamiento alfabético entre niveles de desempeño medio y alto.

	Nivel de desempeño	Rango promedio	U de Mann - Whitney	p
Ordenamiento alfabético	Medio	4.20	6.000	.154
Nivel	Alto	6.80		

$P > \alpha$, se acepta la H_0

Con base en los resultados obtenidos se puede decir que no hay evidencia que señale diferencias entre niveles de desempeño, por lo tanto, en esta tarea las habilidades de recuperar información del bucle fonológico fueron homogéneos en todos los niveles.

Otra subprueba de esta área es la de restas consecutivas que evalúa la capacidad para desarrollar operaciones mentales consecutivas e inversas. Los resultados obtenidos sugieren que existen diferencias significativas entre algunos niveles de desempeño (Tabla 11).

Tabla 11

Estadístico H en subprueba de restas consecutivas

	Nivel de desempeño	Rango promedio	H. de Kruskal - Wallis	p
Restas consecutivas Tiempo	Bajo	10.40	6.660	.036
	Medio	9.80		
	Alto	3.80		
Restas consecutivas Aciertos	Bajo	5.80	6.197	.045
	Medio	6.20		
	Alto	12.00		

$p \leq \alpha$, se rechaza la H_0 .

En esta subprueba, no se encontraron diferencias entre los niveles bajo y medio, sin embargo, estos dos niveles en contraste con el nivel de desempeño alto son notables. Por lo que, los alumnos con alto desempeño son más veloces en la ejecución de operaciones mentales y además son más efectivos en su resolución.

La última subprueba de esta área, similar a la anterior, referente a sumas consecutivas, evalúa la capacidad de desarrollar operaciones mentales de forma consecutiva. Los resultados mostrados en la Tabla 12, evidencian que existen diferencias significativas entre los niveles de desempeño, siendo notable el tiempo que tomaron para realizar la operación, nuevamente los alumnos de alto

desempeño muestran mayor rapidez de ejecución en comparación con los estudiantes ubicados en los niveles medio y bajo. En cuanto a los aciertos, el rango promedio no varía entre el nivel medio y alto, por lo tanto, para analizar si existen diferencias entre estos niveles y el bajo se aplica la prueba U, la cual muestra que no hay diferencias significativas entre los niveles de desempeño (tabla 13).

Tabla 12

Estadístico H en subprueba de sumas consecutivas

	Nivel de desempeño	Rango promedio	H.de Kruskal - Wallis	p
Sumas consecutivas Tiempo	Bajo	10.40	6.376	.041
	Medio	9.70		
	Alto	3.90		
Sumas consecutivas Aciertos	Bajo	5.00	6.923	.031
	Medio	9.50		
	Alto	9.50		

$p \leq \alpha$, se rechaza la H_0 .

Tabla 13

Prueba U de sumas consecutivas entre niveles de desempeño bajo y alto

	Nivel de desempeño	Rango promedio	U de Mann - Whitney	p
Sumas consecutivas	Bajo	4.00	5.000	.053
Aciertos	Alto	7.00		

$p > \alpha$, se acepta la H_0

La última área evaluada de la memoria de trabajo fue la metamemoria. Se encontró que no existen diferencias significativas respecto al desempeño mostrado en la prueba, excepto en el rubro

referente a los errores negativos, que muestra la subestimación del aprendizaje, es decir, el estudiante predice recordar poca información, sin embargo, en la aplicación recuerda más información de lo que reportó (Tabla 14).

Tabla 14

Estadístico H en subprueba de metamemoria

	Nivel de desempeño	Rango promedio	H.de Kruskal - Wallis	p
Metamemoria Errores positivos	Bajo	11.20	4.065	.131
	Medio	6.80		
	Alto	6.00		
Metamemoria Errores negativos	Bajo	6.90	6.832	.033*
	Medio	5.10		
	Alto	12.00		
Metamemoria Perseveraciones	Bajo	9.50	2.299	.317
	Medio	8.00		
	Alto	6.50		
Metamemoria Intrusiones	Bajo	11.20	4.369	.113
	Medio	6.40		
	Alto	6.40		

* $p \leq \alpha$, se rechaza la H_0 .

Capítulo 5

DISCUSIÓN

Con base en los datos obtenidos y la revisión previa de literatura, es posible señalar que existen aspectos en los que hay diferencias en los procesos cognitivos que permiten explicar el nivel de desempeño algebraico. Considerando los objetivos de la investigación y los datos resultantes es posible plantear un perfil cognitivo característico de cada nivel de desempeño.

Los alumnos de nivel de desempeño algebraico bajo y medio, mostraron mayor diversidad y similitudes entre sí, es decir, eran grupos heterogéneos, pero con puntajes y características similares entre sus niveles de desempeño. Estos niveles se caracterizan por tener un desempeño en las actividades de razonamiento y abstracción (Test de Dominós y TOLT) poco acertado, quedando en el razonamiento concreto y dificultad para llegar a generar abstracciones y generalizaciones en situaciones que impliquen el razonamiento lógico formal. Esta situación coincide con investigaciones previas que señalan que una de las dificultades que presentan los adolescentes al aprender álgebra se refiere a sus dificultades en razonamiento ya que hay una falta de pensamiento abstracto formal en los estudiantes, lo cual exige un cambio en los modos del pensamiento (Brizuela y Blanton, 2014; Padilla y Mayoral, 2020).

Respecto a los resultados de estudiantes que se ubican en el nivel de desempeño algebraico alto, hay una notable diferencia con los otros niveles de desempeño ya que en ambas pruebas mostraron un desempeño significativamente mayor, mostrando mejor ejecución en la resolución de actividades, además el grupo de desempeño alto mostró mayor homogeneidad en el desempeño y resultados obtenidos entre los estudiantes.

En lo referente a la memoria de trabajo, aunque hubo rubros que no mostraron diferencia, también hubo aspectos con discrepancias importantes de mencionar. La más destacada es el tiempo que requiere el estudiante para recuperar información tanto de la agenda visoespacial como del bucle fonológico, los estudiantes de bajo y medio rendimiento requieren de mayor tiempo, en contraparte, los estudiantes de alto rendimiento, mostraron mayor agilidad y rapidez para recuperar información de cualquier tipo.

Respecto a lo que implica sostener y manipular información relevante en una situación específica de acuerdo con el modelo de Baddeley, el buffer episódico permite recuperar y manipular información tanto visoespacial y verbal, e intercambiar información entre la MT y la memoria a largo plazo para la solución de situaciones específicas (Cárcamo, 2018; González et al., 2016; Weijer-Bergsma et al., 2015) en este aspecto, hubo mayor distinción en la información de la agenda visoespacial, en la que los alumnos de alto desempeño tuvieron mejores puntajes, sin embargo, por lo que respecta a información verbal, no hubo diferencias significativas entre los niveles de desempeño.

Tomando en cuenta las aportaciones de autores que investigaron cómo interviene la memoria de trabajo en el aprendizaje (Fuenmayor y Villasmil, 2008; González et al., 2016; Weijer-Bergsma et al., 2015), el bucle fonológico tiene un rol más importante después de que la habilidad ha sido adquirida, es decir, para adquirir un nuevo concepto o habilidad se apoyan de recursos visuales y para aplicar lo aprendido se recurriría a la memoria de trabajo verbal. Así que los estudiantes que inician el aprendizaje de álgebra tienen mayor inclinación hacia la información visual, ya que aún no está consolidado su razonamiento algebraico, es decir, están en proceso de afianzamiento.

El último aspecto a considerar, fue el estilo cognitivo que mostró diferencias significativas y coincide con investigaciones previas (Montero et al., 2005; Sánchez, 1999; Curione et al., 2010; San Martín, 2015), en las que se concluye que existe una relación positiva entre el estilo cognitivo independiente y la resolución de problemas matemáticos, además de que emplean estrategias de planificación y verifican más que aquellos alumnos con estilo dependiente. En los datos obtenidos de forma homogénea, los estudiantes de alto desempeño se encuentran en el estilo independiente, los alumnos con desempeño bajo tiene mayor inclinación hacia el estilo dependiente, y los alumnos con desempeño medio, muestran mayor diversidad de estilo.

Considerando los resultados obtenidos, el análisis que se ha hecho de estos y los objetivos de la investigación es preciso resumir el perfil cognitivo de cada nivel de desempeño algebraico para poder determinar características y necesidades cognitivas

5.1 Perfil cognitivo de estudiantes con alto nivel de desempeño algebraico

Considerando las características que han arrojado los instrumentos y respetando la perspectiva cognitiva del marco teórico que sugiere que en el aprendizaje como en la conducta general existen factores subyacentes, procesos cognitivos, que pueden explicar lo que observamos. El aprendizaje

del álgebra elemental como ya se ha mencionado implica una reestructuración cognitiva y como en cada acción del aprendizaje humano existen procesos cognitivos que favorecen la adquisición y comprensión de conceptos, procesos e información.

De acuerdo con lo analizado, un estudiante de educación secundaria que está iniciando su aprendizaje en álgebra elemental tendrá mejor desempeño algebraico si tiene las siguientes características cognitivas:

- Mejor puntaje en inteligencia general: Muestran mayor capacidad lógica en tareas numéricas, aunque estas no impliquen instrucción previa, son más hábiles para encontrar relaciones numéricas y gráficas, detectan generalidades en progresiones simples, poseen pensamiento sistémico y muestran mayor abstracción.
- Razonamiento transicional: De acuerdo con la teoría de Piaget, el razonamiento formal es el nivel más alto, los estudiantes en aprendizaje del álgebra elemental aún no poseen el razonamiento abstracto, sin embargo, muestran avance hacia el, abandonando el razonamiento concreto. Este nivel muestra características tanto del nivel concreto como del formal, por lo que son capaces de probar hipótesis a partir de la observación, también generan proposiciones a partir de sus observaciones, pero tendrán dificultad para iniciar hipótesis sin información observable. En el caso específico de los estudiantes con alto desempeño, también muestran una mayor comprensión en los esquemas de razonamiento de proporcionalidad y combinatoria.
- Memoria de trabajo visoespacial: Muestran mayor capacidad para recuperar y utilizar información visoespacial, por lo que también habrá mayor velocidad en la recuperación de información visoespacial en la memoria de trabajo, habiendo mejor desempeño en la ejecución y resolución de operaciones mentales, tales como el cálculo mental y la organización de información visoespacial.
- Estilo cognitivo independiente: Manifiestan mayor habilidad para la reestructuración cognitiva ya que perciben la información de manera más analítica, además muestran mayor facilidad y rapidez en el aprendizaje de conceptos y en el procesamiento de la información relevante al momento de resolver algún problema y tienen mejor autocontrol y sentido crítico.

CONCLUSIONES

Considerando los principios rectores de esta investigación que se basan en la idea de percibir al estudiante como un ente totalmente activo y cognitivo, cuyos procesos internos son fundamentales para el desarrollo de aprendizajes y la comprensión del conocimiento, desde una perspectiva recíproca en la cual los procesos cognitivos y los procesos de enseñanza - aprendizaje mantienen una relación mutua en la que el desarrollo y estimulación cognitiva puede favorecer el desarrollo académico del estudiante y la implementación de estrategias didácticas en el aula pueden estimular y desarrollar los procesos cognitivos.

La investigación ha permitido describir y diferenciar las características cognitivas de estudiantes con distintos niveles de desempeño algebraico, logrando afirmar que si existen cualidades cognitivas que favorecen el aprendizaje del álgebra elemental en estudiantes de educación secundaria.

De los procesos cognitivos que se consideraron para realizar esta investigación, de acuerdo con la literatura, la memoria de trabajo está particularmente relacionado con el pensamiento lógico matemático. Las diferencias que se evidenciaron en esta investigación mostraron que el tiempo que toma al estudiante evocar información tanto visoespacial como verbal, es menor en los estudiantes con alto desempeño algebraico, de igual manera este grupo de estudiantes manifestó mayor agilidad para hacer uso de información visoespacial.

Lo que corresponde al área verbal de la memoria de trabajo no mostró diferencia entre los niveles de desempeño, lo cual permite explicar que los estudiantes aun mostrando un nivel de desempeño alto en álgebra recurren a representaciones visuales para solucionar problemas matemáticos, ya que el uso de estrategias y representaciones abstractas que involucraría la memoria de trabajo verbal aún está en vías de desarrollo. Esto se relaciona con el nivel de razonamiento concreto en transición en el que aún se encuentran los estudiantes, a diferencia del razonamiento o pensamiento formal, que es el nivel más alto de evolución cognitiva en el ser humano, y que es una condición necesaria para acceder al conocimiento científico, lo cual implica que el individuo pueda abstraer, elaborar teorías y realizar consideraciones fuera del objeto o sin el objeto, siendo posible realizar procesos como la justificación, la visualización, la estimación y el razonamiento mediante hipótesis, además de contar con una red completa de conceptos tanto complejos como elementales. Sin embargo, para el caso de los participantes, ubicados en el nivel de razonamiento concreto con

indicios de transición resulta vital la relación con el objeto, por lo que la información visoespacial es de suma importancia para la solución de problemas.

En cuanto al estilo cognitivo, se observaron diferencias importantes entre los niveles de desempeño, evidentemente aquellos alumnos que son de alto desempeño algebraico se ubican en el estilo cognitivo independiente, caracterizado por percibir la información de manera más analítica, mostrar mayor facilidad y rapidez en el aprendizaje de conceptos y en el procesamiento de la información relevante al momento de resolver algún problema y muestran mayor autocontrol y sentido crítico.

La importancia de los resultados de la investigación, en nuestra opinión, es considerarlos al planear cómo actuar en el desarrollo intelectual de los estudiantes, recordando que desde la perspectiva cognoscitiva la experiencia con el objeto y sobre el objeto es fundamental para construir los aprendizajes. Por lo que en el ámbito educativo no debe considerarse prioritaria la transmisión de conocimientos sino colaborar el desarrollo cognitivo que permita a los estudiantes formular y comprobar hipótesis, comprender la relación de las variables y buscar estrategias para la resolución de problemas, todo ello a través de plantear situaciones que sometan al estudiante a experiencias que favorezcan su aprendizaje y estimulen el desarrollo de sus procesos cognitivos.

Por último, es importante mencionar que la investigación atiende a lo declarado en México en La Ley General de Educación, publicada en el Diario Oficial de la Federación el 30 de septiembre del 2019, que ha declarado prioritario y como parte de la educación de excelencia, considerar la educación integral, en la cual se promuevan métodos de enseñanza aprendizaje que contribuyan al desarrollo emocional, cultural y cognitivo del educando, por lo tanto, los resultados de la investigación pueden servir para la búsqueda de métodos, estrategias y el diseño de secuencias didácticas y a-didácticas que promuevan el desarrollo de procesos cognitivos clave para el aprendizaje del álgebra elemental en la educación básica.

REFERENCIAS

- Acevedo, J. y Oliva Martínez, J. (1995). Validación y aplicación de un test de razonamiento lógico. *Validación y aplicación de un test de razonamiento lógico*, 48 (3), pp. 339–351.
- Aguilar, M., Navarro, J., López, J., y Alcalde, C. (2002). Pensamiento formal y resolución de problemas matemáticos. *Psicothema*, 14(2), 382–386.
- Aké, L., Godino, J. D., Fernández, T., y Gonzato, M. (2014). Ingeniería didáctica para desarrollar el sentido algebraico de maestros en formación. *Avances de Investigación En Educación Matemática*, 5, 25–48. <https://doi.org/10.35763/aiem.v1i5.70>
- Armendáriz, M. V., Azcárate, C., y Deulofeu, J. (1993). Didáctica de las matemáticas y Psicología. *Infancia y Aprendizaje*, 77–99. <https://n9.cl/e9e0>
- Ávila, A. (2016). La investigación en educación matemática en México: una mirada a 40 años de trabajo. *Educación Matemática*, 28(3), 31–59. <https://doi.org/10.24844/em2803.02>
- Barrio, J. (2004). Análisis y valoración del razonamiento lógico y la abstracción matemática de las personas adultas. *Revista Complutense de Educación*, 15(1), 185–202.
- Bravo, L. (2015). Psicología cognitiva y neurociencias de la educación en el aprendizaje del lenguaje escrito y de las matemáticas. *Revista de Investigación En Psicología*, 17(2), 25–37. <https://doi.org/10.15381/rinvp.v17i2.11256>
- Brizuela, B. y Blanton, M. (2014). El desarrollo del pensamiento algebraico en niños de escolaridad primaria. *Revista de Psicología*, 14, 37–57.
- Bruning, R., Schraw, G., y Norby, M. (2012). *Psicología cognitiva y de la instrucción*. Pearson.
- Cabanes, L., y Colunga, S. (2017). La Matemática en el desarrollo cognitivo y metacognitivo del escolar primario. *EduSol*, 17(60), 25. <https://n9.cl/gevna>
- Cáceres, Z., y Munévar, O. (2016). Evolución de las teorías cognitivas y sus aportes a la educación. *Actividad Física Y Desarrollo Humano*, 7(2). <https://doi.org/10.24054/16927427.v2.n2.2016.2408>

- Canet-Juric, L., Introzzi, I., y Burin, D. (2015). Desarrollo de la capacidad de memoria de trabajo: efectos de interferencia inter e intra dominio en niños de edad escolar. *Revista Argentina de Ciencias Del Comportamiento*, 7(1), 26–37.
- Cárcamo, B. (2018). Modelos de la Memoria de Trabajo de Baddeley y Cowan: una revisión bibliográfica comparativa. *Revista Chilena de Neuropsicología*, 13(1), 6–10. <https://doi.org/10.5839/rcnp.2018.13.01.02>
- Cárdenas, A. (2011). Piaget: Lenguaje, conocimiento y Educación. *Revista Colombiana de Educación*, 60, 71–91.
- Castro, E., Del Olmo, M., y Castro, E. (2017). Desarrollo del pensamiento matemático infantil. *Universidad de Granada*. file:///C:/Users/hp Core/Downloads/Dialnet-EstrategiasDeEnsenanzaDeLaResolucionDeProblemasMat-3897810.pdf
- Castro-Cañizares, D., Estévez-Pérez, N., y Reigosa-Crespo, V. (2009). Teorías cognitivas contemporáneas sobre la discalculia del desarrollo. *Revista de Neurología*, 49(3), 143–148. <https://doi.org/10.33588/rn.4903.2008488>
- Corredor de Porras, M. (2011). Instrumentos cognitivos en el pensamiento matemático. *Praxis & Saber*, 2(4), 103–126. <https://doi.org/10.19053/22160159.1125>
- Curione, K., Míguez, M., Crisci, C., y Maiche, A. (2010). Estilos cognitivos, motivación y rendimiento académico en la universidad. *Revista Iberoamericana de Educación*, 54(3), 1–9. <https://doi.org/10.35362/rie5431671>
- D'Amore, B. (2011). *Didáctica de la matemática* (2da ed.). Magisterio Editorial.
- Díaz, J., y López, R. (1989). Metamemoria y memoria: un estudio evolutivo de sus relaciones funcionales. *Revista de Psicología General y Aplicada*, 42(2), 187–197.
- Distéfano, M., Aznar, M., y Pochulu, M. (2014). Procesos cognitivos y significación de símbolos algebraicos en estudiantes universitarios. *Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación*, 1–12.
- Eudave Muñoz, D. (1998). El aprendizaje del álgebra y sus dificultades. Una exploración a través del estudio de errores. *Caleidoscopio - Revista Semestral de Ciencias Sociales y*

Humanidades, 2(4), 7. <https://doi.org/10.33064/4crscsh269>

Fuenmayor, G., y Villasmil, Y. (2008). La percepción, la atención y la memoria como procesos cognitivos utilizados para la comprensión textual. *Revista de Artes y Humanidades UNICA*, 9(22), 187–202.

García, E. L. (2019). *Psicología general*. Patria.

García, J., Medina, M., y Sánchez, E. (2014). Niveles de razonamiento y abstracción de estudiantes de secundaria y bachillerato en una situación-problema de probabilidad. *Avances de Investigación En Educación Matemática*, 6, 5–23. <https://doi.org/10.35763/aiem.v1i6.90>

García, M. (2013). Los procesos cognitivos en el aprendizaje del álgebra. *VII CIBEM*, 1233–1240. <http://cibem7.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/418.pdf>

García, S. (2015). *Matemáticas. PLANEA 2015. 6° Primaria, 3° Secundaria*. <https://n9.cl/k48w0>

Gavilán, P. (2011). Dificultades en el paso de la aritmética al álgebra escolar: ¿Puede ayudar el Aprendizaje Cooperativo? *Investigación En La Escuela*, 73, 95–106. <https://doi.org/10.12795/IE.2011.i73.07>

Godino, J. D., Neto, T., Wilhelmi, M. R., Aké, L. P., Etchegaray, S., y Lasa, A. (2015). Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica. *Avances de Investigación En Educación Matemática*, 8, 1–24. <https://doi.org/10.35763/aiem.v1i8.105>

Godino, J. D., Neto, T., Wilhelmi, M. R., Aké, L. P., Etchegaray, S., y Lasa, A. (2015). Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica. *Avances de Investigación En Educación Matemática*, 8, 1–24. <https://doi.org/10.35763/aiem.v1i8.105>

Godino, J., Aké, L., Contreras, Á., Diaz, C., Estepa, A., Blanco, T., Lacasta, E., Lasa, A., Neto, T., Oliveras, L., y Wilhelmi, M. R. (2015). Diseño de un cuestionario para evaluar conocimientos didáctico - matemáticos sobre razonamiento algebraico elemental. *Enseñanza de Las Ciencias*, 33.1, 127–150.

- Godino, J., Aké, L., Contreras, Á., Diaz, C., Estepa, A., Blanco, T., Lacasta, E., Lasa, A., Neto, T., Oliveras, L., y Wilhelmi, M. R. (2015). Diseño de un cuestionario para evaluar conocimientos didáctico - matemáticos sobre razonamiento algebraico elemental. *Enseñanza de las Ciencias*, 33.1, 127–150.
- Godino, J., y Font, V. (2003). Razonamiento Algebraico y su Didáctica para Maestros. *Matemáticas y su didáctica para maestros*. <https://n9.cl/ce6u5>
- González, S., Fernández, F., y Duarte, J. (2016). Memoria de trabajo y aprendizaje: Implicaciones para la educación. *Saber, Ciencia y Libertad*, 11(2), 161–176. <https://doi.org/10.18041/2382-3240/saber.2016v11n2.554>
- Guerrero, Z., y Flores, H. (2009). Teorías del aprendizaje y la instrucción en el diseño de materiales didácticos informáticos. *Educere*, 13(45), 317–329.
- Hernández Sampieri, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación* (6° Edición). Mc Graw Hill.
- INEE. (2009). Estructura y dimensión del Sistema Educativo Nacional. *Programa Educativo de México*. <https://n9.cl/gwzwo>
- INEE. (2017). *Planea Resultados nacionales 2017 3º de secundaria Lenguaje y Comunicación Matemáticas, Ciudad de México*. 1–56. <https://n9.cl/rqr8h>
- Jara, V. (2012). Desarrollo del pensamiento y teorías cognitivas para enseñar a pensar y producir conocimientos. *Colección de Filosofía de La Educación*, 12, 53–66. <https://www.redalyc.org/pdf/4418/441846101004.pdf>
- Kieran, C., y Filloy, Y. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de Las Ciencias: Revista de Investigación y Experiencias Didácticas*, 7(3), 229–240.
- López, E., y Morales, G. (2013). *Los procesos cognitivos en la enseñanza - aprendizaje. El caso de la psicología cognitiva y el aula escolar*. Trillas.
- López, M., Cuenca, M., y Cabrera, Y. (2017). La metamemoria un recurso de aprendizaje básico en el ámbito escolar. *Transformación*, 13(1), 43–55.

- Martelo, O., y Arévalo, J. (2017). Funcionamiento cognitivo y estados emocionales de un grupo de niños y adolescentes con bajo rendimiento académico. *Neuropsicología Latinoamericana SLAN*, 9(3), 13–22. <https://doi.org/10.5579/rnl.2017.0383>
- Massone, A., y González, G. (2004). Análisis del uso de estrategias cognitivas de aprendizaje, en el estudiante de noveno año de educación básica general. *Revista Iberoamericana de Educación*, 1, 6. <https://n9.cl/m7991>
- Molina, L., y Rada, K. (2013). Relación entre el nivel de pensamiento formal y el rendimiento académico en matemáticas. *Zona Próxima*, 19, 63–72.
- Molina, L., y Rada, K. (2013). Relación entre el nivel de pensamiento formal y el rendimiento académico en matemáticas. *Zona Proximaroxima*, 19, 63–72.
- Montero, J., Navarro, J., y Ramiro, P. (2005). Estilos cognitivos dependencia-independencia de campo reflexividad-impulsividad y superdotación intelectual. *Faisca: Revista de Altas Capacidades*, 12, 5–15.
- Nortes, A., y Martínez, R. (1994). Psicología piagetiana y educación matemática. *Revista Interuniversitaria de Formación Del Profesorado*, 21, 59–70. <https://n9.cl/ugkpg>
- Padilla, I., y Mayoral, V. (2020). Las tutorías académicas en el fortalecimiento del álgebra en estudiantes de octavo grado en una escuela distrital de Barranquilla. *Zona Próxima*, 32, 33–54.
- Palarea, M., y Socas, M. (1994). Algunos obstáculos cognitivos en el aprendizaje del álgebra. *ISeminario Nacional Sobre Lenguaje y Matemáticas*, 91–98. <https://n9.cl/hgdrx>
- Palarea, M., y Socas, M. (1999). Procesos cognitivos implicados en el aprendizaje del lenguaje algebraico: Un estudio biográfico. *El Guiniguada*, 8, 319–336.
- Piaget, J. (2012). Pláticas sobre la teoría de la inteligencia. *CPU-e, Revista de Investigación Educativa*, 2, 1–48. <https://doi.org/10.25009/cpue.v0i2.144>
- Pozo, J. (1997). *Teorías cognitivas del aprendizaje*. Morata.

- Presentación, M. J., Siegenthaler, R., Pinto, V., Mercader, J., y Miranda, A. (2015). Competencias matemáticas y funcionamiento ejecutivo en preescolar: Evaluación clínica y ecológica. *Revista de Psicodidactica*, 20(1), 65–82. <https://doi.org/10.1387/RevPsicodidact.11086>
- Ramírez, P. (s.f.). Evaluación de los esquemas del razonamiento lógico matemático presentado por los estudiantes de licenciatura en matemáticas de la Universidad Francisco de Paula Santander por medio del test Tolt. *Encuentro Internacional En Educación Matemática*, 141–156.
- Ramos, L. A., y Casas, L. M. (2018). Demanda cognitiva de estándares educativos y libros de Texto para la enseñanza del álgebra en Honduras. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 32(62), 1134–1151. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a19>
- Rivas, M. (2008). *Procesos cognitivos y aprendizaje significativo*. Comunidad de Madrid.
- Rodríguez, D. y Valdeorola, J. (2007). *Métodos y técnicas de investigación en línea*. Barcelona: Universitat Oberta de Catalunya.
- Rosselli, M., Ardila, A., Matute, E., y Inozemtseva, O. (2009). Gender differences and cognitive correlates of mathematical skills in school-aged children. *Child Neuropsychology*, 15(3), 216–231. <https://doi.org/10.1080/09297040802195205>
- San Martín, C. (2015). *Relación entre estilo cognitivo y capacidades de búsqueda de información en estudiantes de tercer año medio de colegios municipales de Litoral Central* [Universidad de Chile]. [http://repositorio.uchile.cl/bitstream/handle/2250/140202/Tesis de grado MAGEDU](http://repositorio.uchile.cl/bitstream/handle/2250/140202/Tesis%20de%20grado%20MAGEDU)
- Sánchez, G. (1999). *Caracterización motivacional, de estilo cognitivo y de actividad cortical en la solución de problemas estocásticos: una comparación entre alumnos “exitosos” versus “no exitosos”*. Universidad Nacional Autónoma de México.
- Serres, Y. (2011). Iniciación del aprendizaje del álgebra y sus consecuencias para la enseñanza. *Sapiens: Revista Universitaria de Investigación*, 12(1), 122–142.
- Sierra-Fitzgerald, O. (2010). Memoria y metamemoria: relaciones funcionales y estabilidad de las mismas. *Universitas Psychologica*, 9(1), 213–227. <https://doi.org/10.11144/javeriana.upsy9-1.mmr>

- Stelzer, F., Introzzi, I., Andrés, M. L., Richard's, M. M., y Urquijo, S. (2018). Factores cognitivos relacionados con la capacidad de cálculo de división en estudiantes de 4º año de educación primaria en Argentina. *Actualidades Investigativas En Educación*, 18(1). <https://doi.org/10.15517/aie.v18i1.31842>
- Torres, L., y Gómez, K. (2019). Álgebra y Pensamiento Algebraico. Una experiencia de reconceptualización. *XV CIAEM*, 1–7. <https://n9.cl/ovfs3>
- Triola, M. (2009). *Estadística*. (10ma ed.) Pearson.
- Ursini, S., Escareño, F., Montes, D., y Trigueros, M. (2016). *Enseñanza del álgebra elemental. Una propuesta alternativa*. Trillas.
- Vergel, R. (2014). El signo en Vygotski y su vínculo con el desarrollo de los procesos psicológicos superiores. *Folios*, 39, 65–76. <https://doi.org/10.17227/01234870.39folios65.76>
- Weijer-Bergsma, E., Kroesbergen, E. H., y Van Luit, J. E. H. (2015). Verbal and visual-spatial working memory and mathematical ability in different domains throughout primary school. *Memory and Cognition*, 43(3), 367–378. <https://doi.org/10.3758/s13421-014-0480-4>
- Zhong -Lin, L., y Doshier, A. (2007). Cognitive psychology. *Scholarpedia*, 2(8), 2769. <https://doi.org/10.4249/scholarpedia.2769>

ANEXO 1. Cuadernillo de evaluación

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Maestría en Educación Matemática

Investigación: Características de los procesos cognitivos en el aprendizaje del álgebra en estudiantes de educación secundaria.

Investigador: Lic. Cesia Fabiola Cruz Concha

Datos del participante

Nombre: _____

Fecha de nacimiento: _____, _____, _____.

Edad: años _____ meses _____ Género: _____

Grado escolar: _____ Promedio en matemáticas: _____

Ocupación de tutor (es): _____

Indicaciones generales

En este cuadernillo encontraras 5 secciones, cada una de ellas la trabajarás en una sesión distinta bajo las indicaciones que te dé el investigador, no puedes adelantarte a realizar alguna actividad ni puedes pedir ayuda para resolverlas. En las sesiones con el investigador se te indicará que sección del cuadernillo se trabajará y cómo se realizará.

En cada sesión, utilizaras tu cuadernillo, lápiz, sacapuntas y goma.

¡Muchas gracias por participar!

SECCIÓN 1: ÁLGEBRA

A continuación, encontraras una serie de actividades que podrás resolver basándote en los aprendizajes que has adquirido en tus clases de matemáticas. Podrás hacer los cálculos necesarios, en caso de que tengas alguna duda podrás preguntar al investigador, el investigador igual puede hacerte algunas preguntas sobre cómo resolviste las actividades.

Comenzamos.

1. ¿Qué número sustituiría a la x en las siguientes expresiones?

$$x - 21 = 43$$

$$12x + 4 = 64$$

$$87 + 32 = x + 55$$

$$x + 7 = 16 + 5$$

2. Escribe la ecuación que expresa cada situación y resuélvela.

a) Pedro pensó un número, le sumo 7 y obtuvo 21, si x es el número que pensó, la ecuación es

b) En un grupo hay 7 hombres más que mujeres y hay 21 hombres, si x es la cantidad de mujeres, la ecuación es _____

3. Observa la siguiente tabla, nos muestra cómo se van formando figuras con asteriscos, analízala y contesta las preguntas.

		Número de asteriscos
Fig.1	*	1
Fig. 2	** **	4
Fig. 3	*** *** ***	9

¿Cuántos asteriscos habría en la figura 4?

¿Cuántos asteriscos habría en la figura 6?

¿Podrías expresar la ecuación que represente la regla general de la sucesión? ¿Cuál sería?

Utilizando esa regla, halla los valores de las posiciones 10 y 15.

4. Lee detenidamente el siguiente problema y contesta cada pregunta que se plantea.

Raúl tiene dos primas que tienen la misma edad, Elena y Raquel. Elena tiene 16 años más que el doble de la edad de Raúl. Raquel tiene un año más que el quíntuple de la edad de Raúl. Si la edad de Raúl es representada por x .

¿Con qué expresiones se pueden representar las edades de Raquel y Elena?

¿Qué edad tiene Raúl?

¿Qué edad tiene Raquel?

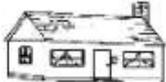
5. Lee cuidadosamente el siguiente problema y plantea una solución formulando un sistema de ecuaciones de 2 por 2.

Hay seis asientos entre sillas y taburetes. Las sillas tienen cuatro patas y los taburetes tienen tres.

En total hay 20 patas. ¿Cuántas sillas y cuántos taburetes hay?

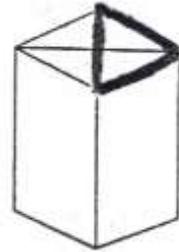
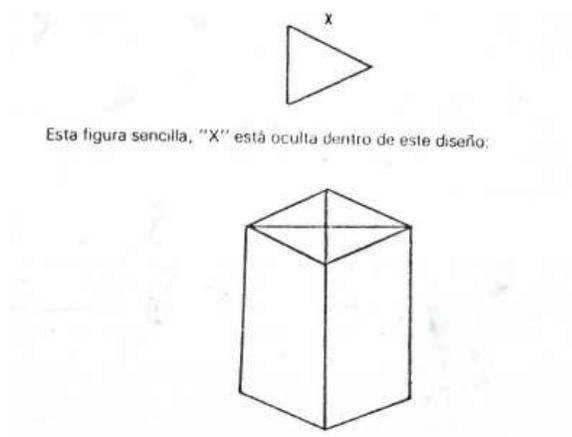
SECCIÓN 2: BANFE

Para trabajar esta sección espera las indicaciones del investigador.

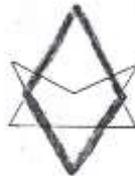
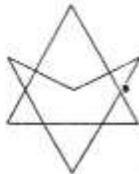
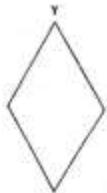


SECCIÓN 3: FIGURAS ENMASCARADAS (GEFT)

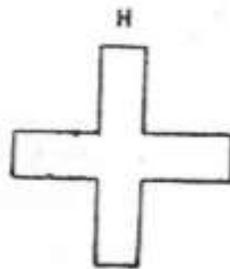
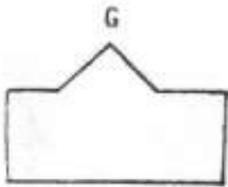
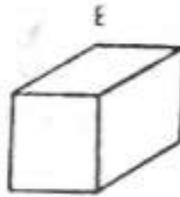
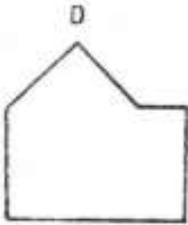
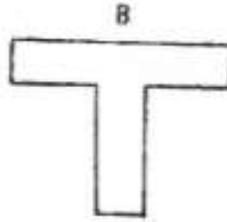
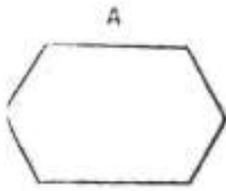
En esta actividad debes encontrar figuras sencillas dentro de dibujo complicado. Por ejemplo:



Otro ejemplo



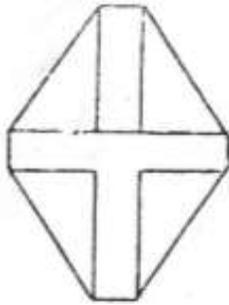
A continuación, habrá problemas como los ejemplos anteriores, encontraras dibujos complicados, debajo de cada uno se encuentra una letra que corresponde al dibujo sencillo que deberás encontrar. Las figuras sencillas son las siguientes:



Recuerda:

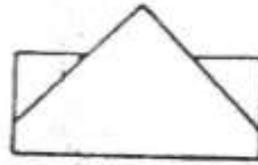
1. Puedes ver las figuras sencillas cuantas veces necesites.
2. Si te equivocas, puedes borrar.
3. Resuelve en orden los problemas, procura no saltarte ninguno, a menos que sea imposible.
4. En cada una de las figuras complicadas dibuja solo a figura que se te pide, aunque encuentres otras.
5. La figura sencilla está siempre en el diseño complicado con el mismo tamaño, proporciones y dirección.

Puedes comenzar.



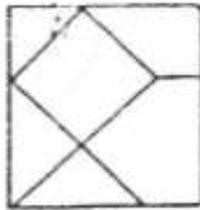
Encuentre la figura sencilla "B"

2



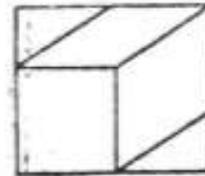
Encuentre la figura sencilla "G"

3



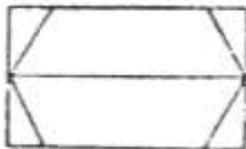
Encuentre la figura sencilla "D"

4



Encuentre la figura sencilla "E"

7



Encuentre la figura sencilla "A"

6

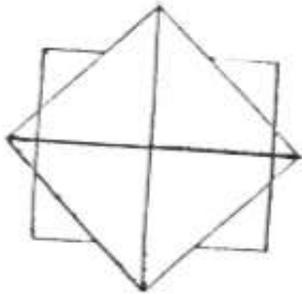


Encuentre la figura sencilla "F"

¡DETENTE!

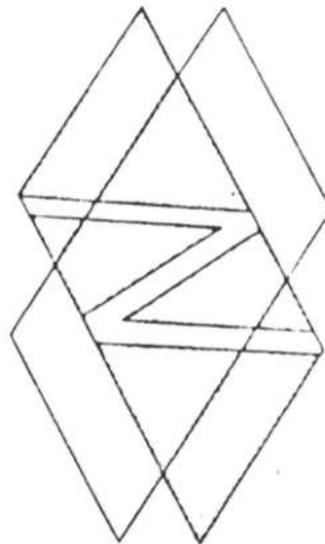
Segunda parte

1



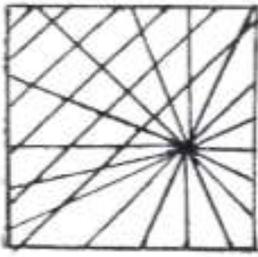
Encuentre la figura sencilla "G"

2



Encuentre la figura sencilla "A"

3



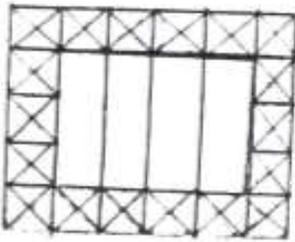
Encuentre la figura sencilla "G"

4



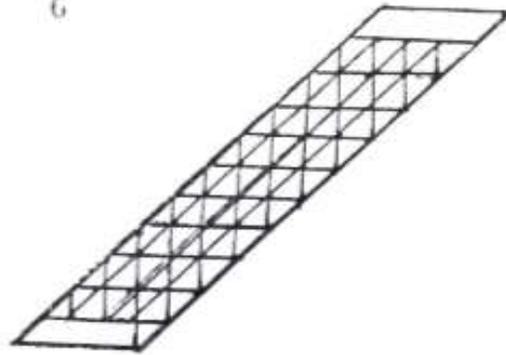
Encuentre la figura sencilla "E"

5

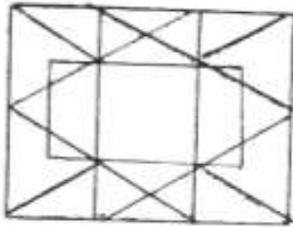


Encuentre la figura sencilla "B"

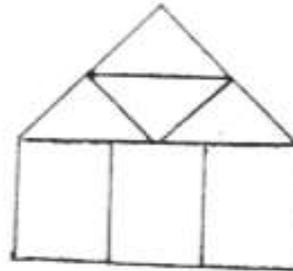
6



Encuentre la figura sencilla "C"

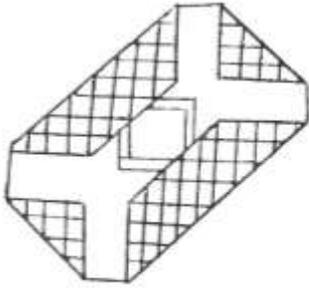


Encuentre la figura sencilla "E"



Encuentre la figura sencilla "D"

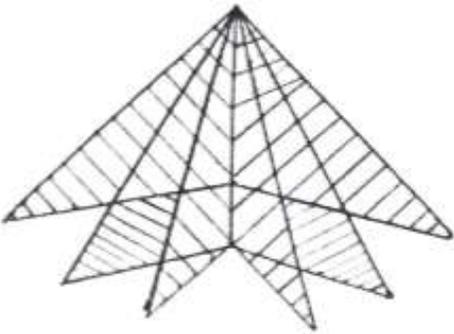
9



Encuentre la figura sencilla "H"

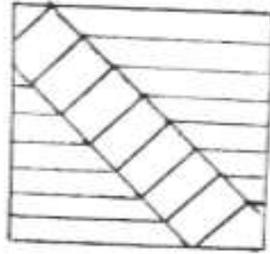
¡DETENTE!

Tercera parte



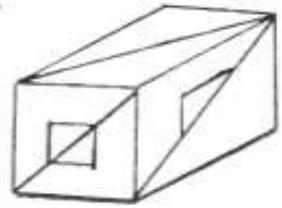
Encuentre la figura sencilla "F"

2

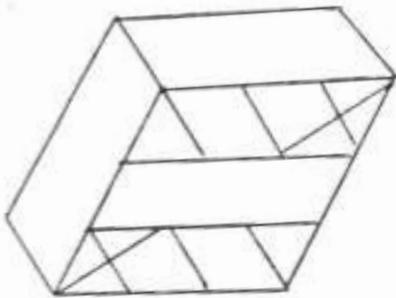
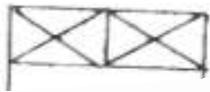


Encuentre la figura sencilla "G"

1

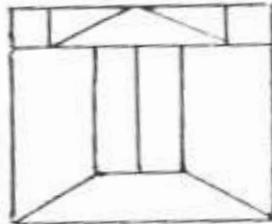


Encuentre la figura sencilla "C"



Encuentre la figura sencilla "A"

3

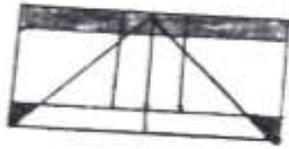


Encuentre la figura sencilla "D"

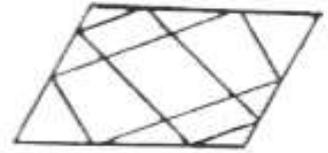
4



Encuentre la figura sencilla "E"



Encuentre la figura sencilla "C"



Encuentre la figura sencilla "A"

SECCIÓN 4: TOLT

Enseguida hay de 8 problemas. Cada problema conduce a una pregunta. Encierra la letra del inciso de la respuesta que elijas y la razón por la que la seleccionaste la respuesta.

1. Se exprimen cuatro naranjas grandes para hacer seis vasos de jugo. Pregunta: ¿Cuánto jugo puede hacerse a partir de seis naranjas?

Respuestas:

- a. 7 vasos
- b. 8 vasos
- c. 9 vasos
- d. 10 vasos
- e. otra respuesta

Razón:

1. El número de vasos comparado con el número de naranjas estará siempre en la razón de 3 a 2.
2. Con más naranjas la diferencia será menor.
3. La diferencia entre los números siempre será dos.
4. Con cuatro naranjas la diferencia fue 2. Con seis naranjas la diferencia será dos más.
5. No hay manera de saberlo.

2. En las mismas condiciones del problema anterior (Se exprimen cuatro naranjas grandes para hacer seis vasos de jugo). Pregunta: ¿Cuántas naranjas se necesitan para hacer 13 vasos de jugo?

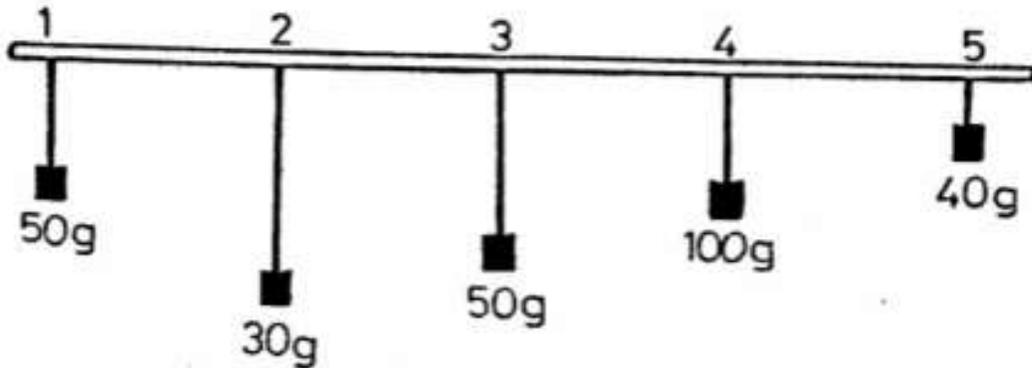
Respuestas:

- a. $6 \frac{1}{2}$ naranjas
- b. $8 \frac{2}{3}$ naranjas
- c. 9 naranjas
- d. 11 naranjas
- e. otra respuesta

Razón:

1. El número de naranjas comparado con el número de vasos siempre estará en la razón de 2 a 3
2. Si hay siete vasos más, entonces se necesitan cinco naranjas más.
3. La diferencia entre los números siempre será dos.
4. El número de naranjas siempre será la mitad del número de vasos.
5. No hay manera de conocer el número de naranjas.

3. En el siguiente gráfico se representan algunos péndulos (identificados por el número en la parte superior del hilo) que varían en su longitud y en el peso que se suspende de ellos (representado por el número al final del hilo). Suponga que usted quiere hacer un experimento para hallar si cambiando la longitud de un péndulo cambia el tiempo que se demora en ir y volver. ¿Qué péndulos utilizarías para el experimento?



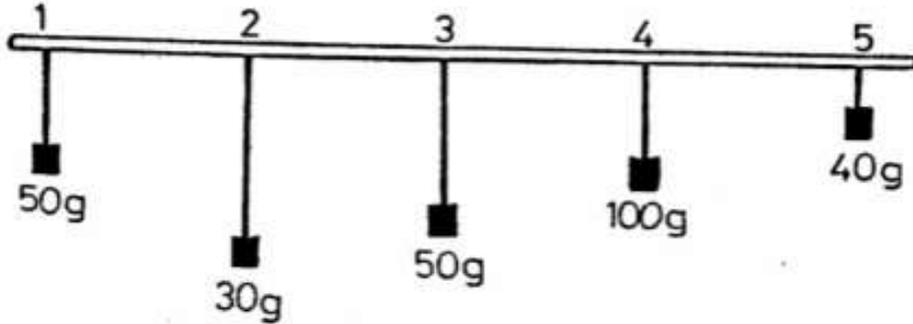
Respuestas:

- a. 1 y 4
- b. 2 y 4
- c. 1 y 3
- d. 2 y 5
- e. todos

Razón:

- 1. El péndulo más largo debería ser probado contra el más corto.
- 2. Todos los péndulos necesitan ser probados el uno contra el otro.
- 3. Conforme el largo aumenta el peso debe disminuir.
- 4. Los péndulos deben tener el mismo largo pero el peso debe ser diferente.
- 5. Los péndulos deben tener diferentes largos pero el peso debe ser el mismo.

4. Suponga que usted quiere hacer un experimento para hallar si cambiando el peso al final de la cuerda cambia el tiempo que un péndulo demora en ir y volver. Pregunta: ¿Qué péndulos usaría usted en el experimento?



Respuestas:

- a. 1 y 4
- b. 2 y 4
- c. 1 y 3
- d. 2 y 5
- e. todos

Razón:

- 1. El peso mayor debería ser comparado con el peso menor.
- 2. Todos los péndulos necesitan ser probados el uno contra el otro.
- 3. Conforme el peso se incrementa el péndulo debe acortarse.
- 4. El peso debería ser diferente pero los péndulos deben tener la misma longitud.
- 5. El peso debe ser el mismo pero los péndulos deben tener diferente longitud.

5. Un jardinero compra un paquete de semillas que contiene 3 de calabaza y 3 de frijol. Si se selecciona una sola semilla, ¿Cuál es la oportunidad de que sea seleccionada una semilla de frijol?

Respuestas:

- a. 1 entre 2 b. 1 entre 3
- c. 1 entre 4 d. 1 entre 6
- e. 4 entre 6

Razón:

1. Se necesitan cuatro selecciones porque las tres semillas de calabaza podrían ser elegidas primero.
2. Hay seis semillas de las cuales un frijol debe ser elegido.
3. Una semilla de frijol debe ser elegida de un total de tres.
4. La mitad de las semillas son de frijol.
5. Además de una semilla de frijol, podrían seleccionarse tres semillas de calabaza de un total de seis.

6. Un jardinero compra un paquete de 21 semillas mezcladas. El paquete contiene: 3 semillas de flores rojas pequeñas, 4 semillas de flores rojas alargadas, 4 semillas de flores amarillas pequeñas, 2 semillas de flores amarillas alargadas, 5 semillas de flores anaranjadas pequeñas, 3 semillas de flores anaranjadas alargadas. Si solo una semilla es plantada, Pregunta: ¿Cuál es la oportunidad de que la planta al crecer tenga flores rojas?

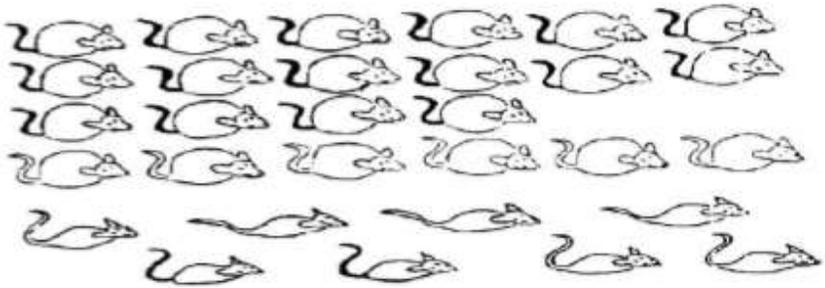
Respuestas:

- a. 1 de 2
- b. 1 de 3
- c. 1 de 7
- d. 1 de 21
- e. otra respuesta

Razón:

1. Una sola semilla ha sido elegida del total de flores rojas, amarillas o anaranjadas.
2. $\frac{1}{4}$ de las pequeñas y $\frac{4}{9}$ de las alargadas son rojas.
3. No importa si una pequeña o una alargada son escogidas. Una semilla roja debe ser escogida de un total de siete semillas rojas.
4. Una semilla roja debe ser seleccionada de un total de 21 semillas.
5. Siete de veintiun semillas producen flores rojas.

7. Los ratones mostrados en el gráfico representan una muestra de ratones capturados en parte de un campo. La pregunta se refiere a los ratones no capturados: ¿Los ratones gordos más probablemente tienen colas negras y los ratones delgados más probablemente tienen colas blancas?



Respuestas:

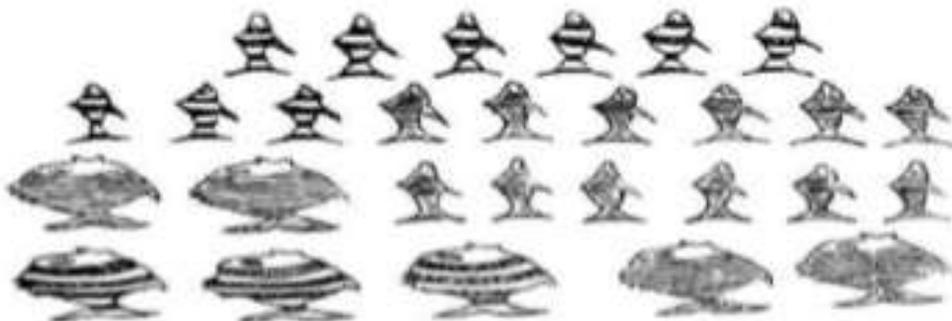
a. Si

b. No.

Razón:

1. $\frac{8}{11}$ de los ratones gordos tienen colas negras y $\frac{3}{4}$ de los ratones delgados tienen colas blancas.
2. Algunos de los ratones gordos tienen colas blancas y algunos de los ratones delgados también.
3. 18 ratones de los treinta tienen colas negras y 12 colas blancas.
4. Ninguno de los ratones gordos tiene colas negras y ninguno de los ratones delgados tiene colas blancas.
5. $\frac{6}{12}$ de los ratones cola blanca son gordos.

8. De acuerdo al siguiente gráfico:



Pregunta: ¿Los peces gordos más probablemente tienen rayas más anchas que los delgados?

Respuestas:

a. Si

b. No

Razón:

1. Algunos peces gordos tienen rayas anchas y algunos las tienen angostas.
2. $\frac{3}{7}$ de los peces gordos tienen rayas anchas.
3. $\frac{12}{28}$ de los peces tienen rayas anchas y $\frac{16}{28}$ tienen rayas angostas.
4. $\frac{3}{7}$ de los peces gordos tienen rayas anchas y $\frac{9}{21}$ de los peces delgados tienen rayas anchas.
5. Algunos peces con rayas anchas son delgados y algunos son gordos.

9. Tres estudiantes de cada grado de secundaria (1°, 2°, 3°) fueron elegidos al consejo estudiantil. Se debe formar un comité de tres miembros con una persona de cada curso. Todas las posibles combinaciones deben ser consideradas antes de tomar una decisión. Dos posibles combinaciones son Tomás, Jaime y Daniel (TDJ) y Sara, Ana y Martha (SAM). Haga una lista de todas las posibles combinaciones.

CONSEJO ESTUDIANTIL

1° grado	2° grado	3° grado
Tomas (T)	Jaime (J)	Daniel (D)
Sara (S)	Ana (A)	Marta (M)
Brandon (B)	Carmen (C)	Gloria (G)

10. En un nuevo centro comercial, van a abrirse 4 locales. Una peluquería (P), una dulcería (D), una cafetería (C) y un bar (B) quieren entrar ahí. Cada uno de los establecimientos puede elegir uno cualquiera de los cuatro locales. Una de las maneras en que se pueden ocupar los cuatro locales es PDCB. Haga una lista, de todos los posibles modos en que los 4 locales pueden ser ocupados.

SECCIÓN 5: DOMINÓS

A

B

Las siguientes (al C y al D) son otras dos ejemplos. Haz un léxico en cada grupo y trata de averiguar qué cifra corresponde al dominó vacío.

C

D

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

11

12

13

14

15

16

17

18

19

20

21		22	
23		24	

35		36	
----	--	----	--

25		26	
27		28	

37		38	
39		40	

29		30	
----	--	----	--

41		42	
----	--	----	--

31		32	
----	--	----	--

43		44	
----	--	----	--

33		34	
----	--	----	--

45		46	
----	--	----	--

47		48	
----	--	----	--

ANEXO 2: Descripción del desempeño algebraico de los participantes en entrevista clínica

Desempeño por objetivo					
	Comprende la relación de equivalencia en expresiones algebraicas en donde la variable es una incógnita específica.	Hace uso de notación simbólica para la formulación y resolución de ecuaciones lineales.	Identifica la existencia de un valor desconocido que puede hallar relacionando los datos existentes y simbolizando a la incógnita.	Reconoce generalidades en objetos matemáticos y es capaz de estructurar una regla que la explique.	Realiza simbolización de variables y hace un sistema con expresiones algebraicas.
Imelda	No comprende la equivalencia en una ecuación lineal, mantiene un razonamiento aritmético.	Calcula el valor de x en problemas simples con uso aritmético, no plantea ecuaciones para simbolizar una situación.	Mantiene un razonamiento algebraico, intenta resolver aritméticamente pero no encuentra respuesta.	Reconoce visualmente las generalidades de una secuencia, pero no plantea una regla numérica o algebraica para el enésimo.	Resuelve correctamente con medios heurísticos, no hace uso de un sistema de ecuaciones.

Julio	No comprende la equivalencia en una ecuación lineal, mantiene un razonamiento aritmético.	Intenta resolver aritméticamente, no encuentra respuesta.	Mantiene un razonamiento algebraico, intenta resolver aritméticamente pero no encuentra respuesta.	Reconoce visualmente las generalidades de una secuencia, solo recurre al dibujo para calcular.	Da números arbitrarios, no plantea soluciones.
Ángel	No comprende la equivalencia en una ecuación lineal, mantiene un razonamiento aritmético.	Calcula aritméticamente el valor desconocido y hace una expresión incorrecta.	Da números arbitrarios, no realiza procedimientos algebraicos ni aritméticos.	No logra identificar la generalidad de la secuencia.	Resuelve correctamente con medios heurísticos, no hace uso de un sistema de ecuaciones.
Héctor	Comprende que una ecuación implica una equivalencia, pero no reconoce las reglas algebraicas para resolver ecuaciones lineales.	Calcula el valor de x en problemas simples con uso aritmético, no plantea ecuaciones para simbolizar una situación.	Intenta representar el problema con dos variables (x, y), sin embargo, no representa los datos dados y no encuentra la respuesta.	Reconoce la generalidad y es capaz de calcular el enésimo.	Resuelve correctamente con medios heurísticos, no hace uso de un sistema de ecuaciones.

David	Comprende que una ecuación implica una equivalencia, pero no reconoce las reglas algebraicas para resolver ecuaciones lineales.	Expresa simbólicamente los datos de una situación dada y puede operar con las expresiones que genera.	Da números arbitrarios, no realiza procedimientos algebraicos ni aritméticos	Reconoce la generalidad y es capaz de calcular el enésimo.	Plantea una ecuación con doble incógnita, sin embargo, no hace un sistema y no logra resolverlo.
Samuel	Comprende que una ecuación implica una equivalencia, pero no reconoce las reglas algebraicas para resolver ecuaciones lineales.	Halla el valor desconocido, sin embargo, la formulación de sus ecuaciones no es correcta. Obtiene el valor por medios aritméticos, ya que sus expresiones no representan la situación.	Intenta representar el problema con dos variables (x, y), sin embargo, no representa los datos dados y no encuentra la respuesta.	Identifica que hay una generalización e intenta hacer una expresión general,	Comenta no tener conocimiento de cómo se resuelve este problema.

Santiago	Comprende la equivalencia en expresiones algebraicas y es capaz de calcular el valor de la incógnita.	Expresa simbólicamente los datos de una situación dada y puede operar con las expresiones que genera.	No relaciona los datos en una incógnita, intenta hacer un sistema de dos variables.	Halla la generalización visual y numéricamente, pero se le dificulta hacer una expresión como regla general.	Utiliza un método grafico – aritmético para llegar al resultado, comprende que se trata de variables distintas.
Diego	Comprende la equivalencia en una expresión algebraica y calcula el valor de la incógnita.	Expresa simbólicamente los datos de una situación dada y puede operar con las expresiones que genera.	Muestra dificultad para hacer una expresión algebraica tomando datos de un problema verbal, hace intentos que se acercan a la expresión.	No encuentra la generalidad en las figuras ni en secuencias numéricas, pero hace intentos algebraicos de hallar una regla por figura, no general.	Intenta una resolución aritmética, no atiende a lo solicitado en el problema.

Melisa	Comprende la equivalencia en una expresión algebraica y calcula el valor de la incógnita.	Expresa simbólicamente los datos de una situación dada y puede operar con las expresiones que genera para hallar el valor desconocido.	No encuentra la respuesta. Intenta hacer una resolución aritmética, ya que sus expresiones algebraicas son incorrectas y ella identifica que lo son.	Reconoce la generalidad y es capaz de calcular el enésimo. *No expresa correctamente un exponente.	Utiliza un método aritmético para llegar al resultado, comprende que se trata de variables distintas.
Sebastián	No hay razonamiento algebraico	Resuelve aritméticamente	No hay razonamiento algebraico	No hay razonamiento algebraico	Resuelve con medios visuales
Vanesa	No comprende la equivalencia en una ecuación lineal, mantiene un razonamiento aritmético.	Intenta resolver aritméticamente, no encuentra respuesta.	Mantiene un razonamiento algebraico, intenta resolver aritméticamente pero no encuentra respuesta.	Reconoce visualmente las generalidades de una secuencia, solo recurre al dibujo para calcular.	Da números arbitrarios, no plantea soluciones.

Rigoberto	Comprende la equivalencia en una expresión algebraica y calcula el valor de la incógnita. *Error en un signo	Expresa simbólicamente los datos de una situación dada y puede operar con las expresiones que genera para hallar el valor desconocido.	Muestra dificultad para hacer una expresión algebraica tomando datos de un problema verbal, hace intentos que se acercan a la expresión.	Reconoce la generalidad y es capaz de calcular el enésimo.	Utiliza un método aritmético para llegar al resultado, comprende que se trata de variables distintas.
Guadalupe	Comprende la equivalencia en una expresión algebraica y calcula el valor de la incógnita.	Expresa simbólicamente los datos de una situación dada.	Muestra dificultad para hacer una expresión algebraica tomando datos de un problema verbal, hace intentos que se acercan a la expresión.	No encuentra la generalidad en las figuras ni en secuencias numéricas, pero hace intentos algebraicos de hallar una regla por figura, no general.	Busca una expresión algebraica, pero no considera las dos variables, por lo que no encuentra la respuesta correcta.

Cecilia	Comprende la equivalencia en una expresión algebraica y calcula el valor de la incógnita.	Expresa simbólicamente los datos de una situación dada y sigue procedimiento algebraico para hallar el valor desconocido.	Expresa simbólicamente una situación y comprende la situación planteada, sin embargo, al momento de dar la respuesta comete un error en la interpretación del resultado.	Reconoce la generalidad y es capaz de calcular el enésimo. *Deja $x * x$, no reduce a potencia.	Utiliza el método algebraico (por sustitución) para llegar hallar el valor de las incógnitas, comprende que se trata de variables distintas y diseña correctamente el sistema de ecuaciones.
Rosa	Comprende la equivalencia en una expresión algebraica y calcula el valor de la incógnita, presenta errores en reglas algebraicas.	Expresa simbólicamente los datos de una situación dada.	Muestra dificultad para hacer una expresión algebraica tomando datos de un problema verbal, hace intentos que se acercan a la expresión.	Reconoce visualmente las generalidades de una secuencia, solo recurre al dibujo para calcular.	Da números arbitrarios, no plantea soluciones.
