



# **BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA**

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS  
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

## **ACTIVIDADES PARA DESARROLLAR HABILIDADES DE CÁLCULO MENTAL EN ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN BÁSICA HACIENDO USO DE LA CALCULADORA**

**TESIS**  
PARA OBTENER EL TÍTULO DE  
**MAESTRO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA**

PRESENTA  
**LICENCIADO ANDRES ORTIZ MARTINEZ**

DIRECTOR DE TESIS  
**DR. ERIC FLORES MEDRANO**  
CO-DIRECTOR DE TESIS  
**DR. DINAZAR ESCUDER AVILA**

PUEBLA, PUE.

ABRIL 2019

Esta investigación se realizó gracias a la financiación otorgada por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología – México (CONACyT), De enero del 2017 a diciembre de 2018.

N° de CVU 823524

Con alegría, para Christopher Andreé,

Y con tristeza, para la memoria de mi  
querido abuelo Andrés

Fuentes de inspiración y amor.

## **Agradecimientos**

**A Dios** es mi guía y fuente de inspiración, por permitirme cumplir una más de mis metas de formación.

**A mis padres**, que formaron en mí la disciplina, el respeto, la honestidad y buen vivir con los demás. Padre, gracias por apoyar incondicionalmente cada uno de los proyectos que emprendo. Madre, gracias por tus consejo, tus oraciones y por tu motivación a seguir adelante.

**A mi hijo**, por ser la fuente principal de inspiración y motivación para culminar con éxito este proyecto, gracias **CHRISTOPHER**. **A mi Esposa**, por su paciencia, sus palabras de aliento, por el apoyo y motivación a continuar mis estudios.

**A mis Hermanos** y demás familiares, por apoyarme y motivarme siempre.

### **A mis asesores:**

Dr. Eric Flores Medrano, Dra. Dinazar Escudero Ávila y Dr. José Antonio Juárez, por su dedicación, paciencia, consejos y aportaciones valiosas que hicieron posible este proyecto.

**A mis amigos** y compañeros, por su amistad, apoyo, consejos, por forma parte de esto que se llama vida.

<sup>7</sup>He peleado la buena batalla, he acabado la carrera, he guardado la fe.

**2 Timoteo 4**

# ÍNDICE

<b>RESUMEN</b>	<b>iii</b>
<b>ABSTRACT</b>	<b>iv</b>
<b>CAPÍTULO 1: Introducción</b>	<b>1</b>
1.1 Planteamiento del problema	5
1.2 Objetivos	6
1.2.1 Objetivo general	6
1.2.2 Objetivos específicos	6
1.3 Pregunta de investigación	6
1.3.1 Pregunta principal	6
1.3.2 Preguntas específicas	6
1.4 Justificación	8
1.5 Estructura de la tesis	9
<b>CAPÍTULO 2: El cálculo mental en diferentes currículos</b>	<b>11</b>
2.1 El cálculo mental en el currículo mexicano	11
2.2 El cálculo mental en el currículo colombiano	13
2.3 El cálculo mental en el currículo español	14
2.4 El cálculo mental según la NTCM	17
<b>CAPÍTULO 3: Marco Referencial</b>	<b>19</b>
3.1 Cálculo mental	19
3.2 Estrategia de cálculo mental	25
3.2.1 Estrategias para la adición	26
3.2.2 Estrategias para la sustracción	27
3.3 Uso de recursos tecnológicos en la escuela: La calculadora	29
<b>CAPÍTULO 4: Metodología</b>	<b>35</b>
4.1 Diseño de la investigación	35
4.1.1 Paradigma de investigación	35
4.1.2 Tipo de investigación	36
4.2 Diseño de las actividades	37
4.2.1 La calculadora descompuesta	37
4.2.2 Actividades propuestas para desarrollar habilidades de cálculo mental con la calculadora descompuesta	37
4.3 Aplicación de las actividades	40
4.3.1 La entrevista clínica	40
4.3.2 Informantes	41
4.3.3 Toma de datos	41
<b>CAPÍTULO 5: Análisis e interpretación de resultados</b>	<b>43</b>
5.1 Descripción de las entrevistas de los estudiantes	43
5.2 Análisis general de las respuestas de los estudiantes	54
<b>CONCLUSIONES</b>	<b>59</b>
Aportes a la enseñanza y aprendizaje del cálculo mental	59
Consideraciones finales	61
<b>REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>63</b>

## ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. <i>Relación entre objetivos, preguntas y recolección de datos.</i>	<b>7</b>
Tabla 2. <i>Relaciones y diferencias entre Cálculo Mental y algorítmico.</i>	<b>22</b>
Tabla 3. <i>Categorización de estrategias de cálculo mental propuestas por Thomson (2000).</i>	<b>28</b>
Tabla 4. <i>Algunas estrategias de cálculo metal.</i>	<b>29</b>
Tabla 5. <i>Actividades para desarrollar habilidades de Cálculo Mental con la calculadora.</i>	<b>38</b>

## **RESUMEN**

En la enseñanza de las matemáticas se incorporan herramientas tecnológicas educativas para promover un aprendizaje efectivo. Sin embargo, como sucede con cualquier recurso didáctico el uso de éste se ve sesgado por las concepciones que tiene el usuario sobre su potencial y limitaciones. Este es el caso del uso de las calculadoras para desarrollar habilidades de Cálculo Mental. En este trabajo, nos centraremos en evidenciar que algunas actividades con una calculadora simple pueden ayudar a desarrollar ciertas habilidades de Cálculo Mental en estudiantes de Educación Primaria. Para esto se utilizó una metodología cualitativa bajo un paradigma interpretativo.

Palabras claves: Estrategias de Cálculo Mental, calculadora descompuesta, currículo educación primaria.

## **Abstract**

In the teaching of mathematics, educational technological tools are incorporated to promote effective learning. However, as with any didactic resource, the use of these tools is biased by the user's conceptions of their potential and limitations. This is the case of the use of calculators to develop Mental Calculation skills. In this paper, we will focus on demonstrating that some activities with a simple calculator can help develop certain Mental Calculus skills in Primary Education students. To do this, a qualitative methodology was used under an interpretive paradigm.

Key words: Mental calculation strategies, decomposed calculator, primary education curriculum.



# Capítulo 1

## INTRODUCCIÓN

*Hay que renovarse...*

En el área de la Educación Matemática, tanto en el ámbito de la docencia como en la investigación, el Cálculo Mental ha despertado gran interés. Prueba de esto son los reportes y comunicados que se muestran en congresos, simposios y reuniones académicas en las que cada vez más se reconoce la necesidad de desarrollar actividades de Cálculo Mental en el aula continuamente (e.g. Kamii y Dominick, 2010; Gálvez, et al. 2011; Leger, et al. 2014; Palacio y Ramírez, 2017; León, 2018). Debido a su importancia, el Cálculo Mental es citado de manera especial en el informe Cockcroft (1985), este autor menciona que es importante incluir el trabajo oral en matemáticas debido a que desempeña un papel sustancial en la enseñanza de esta asignatura y agrega “los cálculos mentales son útiles, además, para desarrollar las destrezas de estimación” (p. 116). Así, el cálculo mental proporciona la base para los procesos de estimación, mostrando que ambas habilidades están íntimamente relacionadas.

Siguiendo esta misma idea de la importancia del cálculo mental, son muchos los autores que han abordado este tema desde diferentes perspectivas. Por ejemplo, Gómez (1996) menciona que tradicionalmente los algoritmos de enseñanza – aprendizaje del cálculo escrito consisten en un proceso de memorización e instrucción mecánica, que causan una falta de construcción de significados y conceptos matemáticos, además, el alumno tiene que manejar estrictamente una serie de pasos dejando a un lado la resolución lógica del problema o la operación planteada sin reflexión ni manipulación a este, “trabajando con columnas en aislamiento y olvidando la relación entre ellas y además, retrasando el desarrollo del razonamiento numérico” (Kamii y Dominick, 2010, p. 4 ). También, Gómez (1994) destaca la influencia positiva del cálculo mental en la enseñanza de las matemáticas y hace especial énfasis en que contribuye en el desarrollo del sentido numérico y la comprensión del alumno, desarrolla capacidades intelectuales, ayuda a reflexionar para decidir y elegir, favorece la concentración y potencializa el cálculo aritmético.

Pero, muchas veces los términos *cálculo mental*, *cálculo algorítmico* y *cálculo aproximado o estimado* se utilizan de manera equivocada en el ámbito de la educación. El escaso

conocimiento de la disciplina matemática puede llevar al error en la delimitación de estos tres términos. Por ende, debemos distinguir estos tres tipos de cálculo. Ortega y Ortiz (2002) los diferencian de la siguiente manera:

**-Cálculo mental:** es una forma de calcular con datos exactos que se caracteriza por no tener ayuda externa, siendo solo con la mente. Este cálculo se divide, a su vez, en *mecánico* (es más automático, la memoria tiene un papel protagonista y se pone en juego al memorizar las tablas de multiplicar) y *reflexivo* (cada vez que se realiza es un cálculo nuevo, utilizando estrategias: descomposiciones, relocalaciones, conteos...).

**-Cálculo algorítmico:** es un cálculo de lápiz y papel y se presenta en el ámbito escrito, se trabaja con resultados exactos.

**-Cálculo aproximado:** este cálculo se vale principalmente de la estrategia de redondeo, no se utiliza lápiz ni papel, los resultados no son exactos pero que sí guardan cercanía con el resultado correcto.

Estos tres tipos de cálculos no son limitados, ni grupos cerrados. Existe gran variedad de ejemplos que pueden encajar en dos de estos.

Un ejemplo para traer a colación podría ser la operación de la multiplicación que se realiza mentalmente, pero siguiendo todo un proceso algorítmico de lápiz y papel. Esto es,  $13 \times 7$ : en primer lugar, se multiplica el 7 por el 3 que nos da como resultado 21, escribo 1 y para llevar el 2 correspondiente a la decena y sumárselo al 7 cuando se haya multiplicado por el 1 para obtener el mismo resultado, todo esto resulta en un 91 final. Esta definición puede ser una base para comenzar a tratar estos tipos de cálculos de manera segura y sin temor a equivocarnos.

Otro ejemplo de la vida cotidiana que involucra estos tres tipos de cálculo sería cuando vamos de compra por varios productos, en primer lugar, se empieza por hacer un cálculo aproximado de lo que se va a gastar para no pasarse del dinero del cual disponemos. Luego se calcula mentalmente el costo exacto de los productos para conocer de manera precisa su valor. Esto muchas veces se realiza escribiendo el costo de los productos en un papel para no olvidarse de ellos y, finalmente, sumar todos con lápiz y papel.

Sin embargo, una gran parte de los profesores no se sienten a gusto trabajando con este tipo de contenidos, por lo que a veces puede pasar desapercibido o incluso quedar eliminado del aula de clases. Es muy difícil transmitir pasión cuando no se dispone de esa motivación. De la misma manera que nadie asistiría a una clase de baile con un profesor que no sabe o no le gusta bailar, no deberíamos enseñar matemáticas, ni cálculo mental, si sentimos apatía por este campo. En esta investigación se explicarán estrategias y actividades destinadas a facilitar el trabajo en el aula.

Por otro lado, entre los educadores matemáticos, investigadores de procesos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas, proponentes de las políticas curriculares, responsables de la producción de materiales didácticos y los propios educadores que actúan en los diversos niveles de enseñanza, se ha debatido que los recursos tecnológicos contemporáneos, tales como computadores y calculadoras, pueden ser medios óptimos para el desarrollo matemático de los estudiantes. Estos recursos que están presentes en la cotidianidad de gran parte de la población, son objeto de políticas gubernamentales para la adquisición y la distribución redes públicas de enseñanza. Sin embargo, corresponde a los educadores analizar la posibilidad de uso de estos recursos en el aula.

Documentos públicos (como los Elementos Curriculares Nacionales y propuestas curriculares estatales y municipales, e.g NCTM, 2003; MEC, 2006; MEN, 2006; SEP, 2017) y estudios (e.g Udina, 1992; Artigue, Douady y Moreno, 1995; Ruthven, 1998; Del Puerto y Minnaard, 2003; Gamboa, 2007; Hitt y Cortés, 2009; Barboa y Godoy, 2016; entre otros) defienden el uso de computadores y calculadoras como herramientas auxiliares a los procesos de enseñanza y aprendizaje ocurridos en las aulas de clases de Matemáticas. Estos documentos y los estudios han señalado que la calculadora, en particular, tiene potencial para contribuir en el desarrollo conceptual de los estudiantes, siempre que se desarrollen actividades apropiadas en el aula con ciertas características.

A pesar del estímulo al uso de la calculadora, tanto a partir de discusiones teóricas como en medio de observaciones empíricas, hay resistencias al uso de ese recurso en el aula de clase, lo que, en parte, puede justificarse debido a la escasez de propuestas de actividades a ser desarrolladas junto a los estudiantes. El desconocimiento de los posibles usos didácticos que puede brindar la calculadora inhibe que esta característica se utilice ampliamente para fines de aprendizaje de los estudiantes. Además, las concepciones negativas respecto al uso de la calculadora, acerca de que el uso de este recurso puede sustituir la enseñanza de las operaciones, aún no se ha superado completamente.

Además, para evitar el distanciamiento entre el uso de la calculadora, la enseñanza de las operaciones y el desarrollo de estrategias de cálculo mental, centraremos la atención en el desarrollo de actividades con la calculadora en el contexto de la enseñanza de las matemáticas a estudiantes de segundo ciclo de educación básica primaria, uno de los periodos de la enseñanza obligatoria. Cabe aclarar, que cuando nos refiramos a calculadora, se entenderá que nos referimos a calculadoras básicas que tengan como característica mínima, las cuatro operaciones aritméticas básicas (suma, resta, multiplicación y división). De hecho, este tipo simple de calculadora es la que ocupa la atención en esta investigación, pero en otra forma de presentación. Muchas de las ideas que aquí se exponen se pueden complementar con otras paralelas aplicables a calculadoras más potentes o a ordenadores.

## 1.1 Planteamiento del problema

*... cambiar de piel como la serpiente...*

A medida que el niño va creciendo irá desarrollando los métodos de cálculo mental que utilizará a lo largo de su vida y que tal vez sean diferentes a los que utilice en el cálculo escrito de lápiz y papel (Cockcroft, 1985). El cálculo escrito posee o lleva consigo cálculo mental, ya que, el cálculo mental le da sentido al cálculo escrito y afianza el sentido numérico, se complementan entre sí, es decir, el cálculo mental permite a los niños comprobar la razonabilidad de sus cálculos escritos y éste puede permitir que los niños desarrollen sus estrategias de cálculo mental (Rogers, 2009; Uriach y Pesce, 2011). Además, es el primer acercamiento independiente de la cotidianidad del hombre con las matemáticas, es uno de los ejercicios que otorgan beneficios para mejorar la atención, la concentración, la agilidad mental.

Darle sentido a los números fuera del aula de clases y además fuera de la escuela nos lleva a favorecer la construcción del pensamiento numérico; de acuerdo con esto, no es suficiente enseñar los procesos algorítmicos para realizar operaciones y reglas que establezcan relaciones, tampoco enseñar a resolver unos pocos problemas en los que se operen números; se trata más bien, de ayudar a construir herramientas intelectuales que ayuden a comprender y actuar en diferentes situaciones que incluyan variedad de contextos. Partiendo de lo anterior es que el cálculo mental toma importancia ya que responde a la autonomía que la sociedad actual le demanda.

Esto ligado a que el currículo de matemáticas está cambiando lentamente, y la tendencia es gastar en menor tiempo posible en métodos de lápiz y papel para dedicar más tiempo en aplicaciones, resolución de problemas, desarrollo de conceptos y temas nuevos. Los métodos de enseñanza también están cambiando hacia una aproximación investigativa y exploratoria, contando con la contribución de las nuevas tecnologías para el desarrollo de esta perspectiva. Esto nos lleva a plantearnos la idea de crear actividades innovadoras que incluyan herramientas tecnológicas, específicamente con la calculadora, que ayuden al estudiante en la adquisición de nuevos conceptos y además en el desarrollo de habilidades de cálculo mental.

## **1.2Objetivos**

### **1.2.1 Objetivo general**

Diseñar actividades para desarrollar estrategias de cálculo mental en estudiantes de Educación Básica haciendo uso de la calculadora.

### **1.2.2 Objetivos específicos**

- ◆ Analizar y categorizar las estrategias y procesos de cálculo mental utilizados por los estudiantes de educación básica.
- ◆ Demostrar que la calculadora es una herramienta útil para conocer y desarrollar las estrategias de cálculo mental en los estudiantes de educación básica.

## **1.3Preguntas de investigación**

### **1.3.1 Pregunta principal**

¿Cómo desarrollar habilidades de cálculo mental en estudiantes de Educación Básica haciendo uso de la calculadora?

### **1.3.2 Preguntas específicas**

- ◆ ¿Qué estrategias y procesos de cálculo mental utilizan los estudiantes de educación básica?
- ◆ ¿De qué manera utilizar la calculadora para conocer y desarrollar las estrategias de cálculo mental en los estudiantes de Educación Básica?

En la siguiente tabla se pretende mostrar la relación que existe entre los objetivos de la investigación, las preguntas de investigación y a las tareas que se realizaron para la recolección de los datos y así dar respuestas a estas preguntas de investigación.

Tabla1.

*Relación entre objetivos, preguntas y recolección de datos.*

<b>Objetivos específicos</b>	<b>Preguntas específicas</b>	<b>Tareas para la recolección de datos</b>
1. Analizar y categorizar las estrategias y procesos de cálculo mental utilizados por los estudiantes de educación básica.	a. ¿Qué estrategias y procesos de cálculo mental utilizan los estudiantes de educación básica?	Secuencia diagnóstica de cálculos mentales de adición y sustracción. Entrevista individual con los informantes sujetos de la investigación.
2. Demostrar que la calculadora es una herramienta útil para conocer y desarrollar las estrategias de cálculo mental en los estudiantes de educación básica.	b. ¿Es la calculadora es una herramienta útil para conocer y desarrollar las estrategias de cálculo mental en los estudiantes de básica?	Observación de las estrategias que utilizan los informantes durante las tareas de intervención didáctica. Mecanismos de recolección de datos: entrevistas individuales y archivos hechos por el investigador en el cuaderno de campo. Listas de ejercicios preparados por el investigador.

## 1.4 Justificación

*...salirte el sol como cada día...*

Tener conocimiento de varias estrategias de cálculo, ya sea escrito por medio de algoritmos, material concreto, representación pictórica, mental o con el uso de calculadoras y, con la autonomía de poder escoger la más adecuada en cualquier situación que se nos presente, es una competencia fundamental para la formación ciudadana del estudiante, de este modo, es interesante investigar las estrategias de cálculo mental, porque se evidencia la forma en que el estudiante procede autónomamente, caso contrario, que si simplemente nos limitamos a dar un algoritmo o un camino de solución, donde se analizaría únicamente la estrategia que el niño utilizó e inferimos cuestiones sobre su situación el aprendizaje.

Entre sus facultades, la escuela debe propiciar un ambiente que favorezca el aprendizaje autónomo y la formación crítica del estudiante. Sin embargo, algunas investigaciones e indicadores han mostrado que muchas veces se está brindando una formación matemática ineficiente. Un estudio basado en el Indicador de Alfabetismo Funcional (INAF) sobre las competencias matemáticas en Brasil revela que el cálculo mental exacto y aproximado y la calculadora son los medios más utilizados por la población. En contraste, la mayoría de estos mismos sujetos los cuales participaron en la investigación, afirman usar el lápiz y el papel en situaciones operatorias que les plantean en la escuela. Además, Gomes (2007) afirma que el análisis de los resultados del proyecto INAF muestra la poca eficiencia del uso del cálculo mental y de la calculadora, aunque recurran a éstos con gran frecuencia. Por lo tanto, creemos que es importante para la enseñanza el cálculo mental, ya que es el más utilizado y el más ineficiente.

Areias, De Azevedo y Laranjeira (1998) afirman:

En el mundo actual saber hacer cálculos con lápices y papel es una competencia de importancia relativa y que debe convivir con otras modalidades de cálculo, como el cálculo mental, las estimaciones y el cálculo producido por las calculadoras, por lo que no se puede privar a las personas de un conocimiento que es útil en sus vidas (p.45).



Con respecto al párrafo anterior compartimos su idea y creemos que trabajar actividades de cálculo mental puede contribuir al desarrollo del sentido numérico y permitir una intimidad mayor con los números, haciendo que los niños no tengan miedo a experimentar sus propias estrategias de resolución. Hemos notado a través de las lecturas que el cálculo mental aún no es muy explotado en el aula de clases, aunque es recomendado por la mayoría de los principales Curriculares Nacionales de matemáticas. En este sentido, vemos la necesidad de trabajar actividades que desarrollen el sentido numérico, estimulen la comprensión y la memorización y ayuden a desarrollar la propia competencia del cálculo mental. Sobre esta base delimitaremos esta investigación.

## **1.5 Estructura de la tesis**

*...volverse planta como semilla...*

Nos preocupamos en dejar al principio de cada capítulo una explicación sobre éste, su contenido y el orden en que se redactan los argumentos; de manera que el lector pueda tener una visión general de la forma en la cual está organizada la información de esta investigación. Aquí, en esta sección, aclaramos, en líneas generales, cómo el resto de la investigación está organizada.

En el Capítulo 2, hicimos una revisión literaria de algunos documentos oficiales y trabajos académicos a los que tuvimos acceso y que se relacionan con nuestra temática de investigación. Atendiendo asuntos pertinentes en relación a cómo se aborda el cálculo mental y el uso de la calculadora desde el currículo mexicano, colombiano, español y norteamericano, que nos permitió tener una idea clara de los esfuerzos que se hace en estos países por desarrollar el cálculo mental en el aula de clases.

En el Capítulo 3, presentamos los fundamentos teóricos sobre los cuales se asienta esta investigación, también se revisó la literatura relacionada con esta investigación específicamente las relacionadas con el cálculo mental, el cálculo algorítmico, las estrategias de cálculo mental y el uso de la calculadora.

En el Capítulo 4, expusimos el recorrido metodológico de la investigación, su naturaleza y como ésta se configura; el paradigma y el tipo de investigación; las técnicas y los instrumentos

de recogida, análisis y organización de la investigación, las actividades con la calculadora, las características de la escuela, los informantes participantes del estudio, así como los procedimientos de recolección y el análisis de datos.

En el Capítulo 5, presentamos los datos recolectados de los seis participantes de la investigación, la descripción de cada una de las entrevistas hechas a los participantes; presentamos una síntesis de los resultados de todas las actividades.

Por último, en el Capítulo 6, hemos dado nuestras consideraciones finales, los aportes del cálculo mental a la enseñanza y aprendizaje y finalmente las conclusiones y recomendaciones del estudio.

## Capítulo 2

### EL CÁLCULO MENTAL EN DIFERENTES CURRÍCULOS

*...reverdecer como después del invierno...*

Dentro de este capítulo describiremos lo que encontramos en la revisión que se hizo de algunos documentos oficiales y trabajos académicos a los que se tuvo acceso y que se relacionan con nuestro tema de investigación. Abordamos asuntos pertinentes al tema de cómo se aborda el cálculo mental y el uso de la calculadora desde diferentes currículos como el mexicano, el colombiano, el español y el norteamericano, esto nos permitió aclarar que esfuerzos se hacen en estos países, desde el marco legal, para desarrollar el cálculo mental en el aula de clases.

#### **2.1 El cálculo mental en el currículo mexicano**

En el documento del nuevo currículo mexicano emitido por la Secretaría de Educación Pública en el año 2017 identificamos los objetivos y propósitos en los programas de cada grado de la educación primaria en lo que tiene que ver con el tema del Cálculo Mental. El primer propósito que se menciona para la educación primaria es: “utilizar de manera flexible la estimación, el Cálculo Mental y el cálculo escrito en las operaciones con números naturales, fraccionarios y decimales” (SEP, 2017, p. 296). Es claro que, en primera instancia se le está dando cierta importancia al Cálculo Mental, como se mencionó anteriormente. En este objetivo, se relaciona al Cálculo Mental con conceptos cercanos a éste, aunque da la impresión de que dicha relación se realiza en independencia (innecesaria) con el resto de conceptos (estimación, cálculo escrito) que pueden desarrollarse de manera conjunta con el Cálculo Mental como lo mencionan algunos autores (e.g Gálvez et al., 2011; Parra, 1994; Wolman, 2006; Rogers, 2009; Uriach y Pesce, 2011).

En los propósitos de la Educación Secundaria de este mismo currículo, nuevamente aparece una mención al Cálculo Mental: “utilizar de manera flexible la estimación, el Cálculo Mental y el cálculo escrito en las operaciones con números naturales, fraccionarios y decimales positivos y negativos” (SEP, 2017, p. 296). La única diferencia respecto al propósito declarado en Educación Primaria es el uso de números negativos.

En el apartado *Dosificación de los Aprendizajes Esperados*, se menciona al Cálculo Mental en el eje temático de *Números, Álgebra y Variación* para la *Adición y Sustracción* en el primer ciclo de la Educación Primaria al mencionar que se espera que el estudiante: “Calcula mentalmente sumas y restas de números de dos cifras, dobles de números de dos cifras y mitades de números pares menores que 100” (SEP, 2017, p. 310). Mientras que en el segundo ciclo aparece de la siguiente forma: “Calcula mentalmente, de manera exacta y aproximada, sumas y restas de números múltiplos de 100 hasta de cuatro cifras” (SEP, 2017, p. 310).

En el mismo eje, pero en el tema de *Multiplicación y División* para el segundo ciclo escolar, se vuelve a mencionar el Cálculo Mental en un nuevo aprendizaje esperado: “Calcula mentalmente, de manera aproximada y exacta, multiplicaciones de un número de dos cifras por uno de una cifra, y divisiones con divisor de una cifra” (SEP, 2017, p. 310). Y para el tercer ciclo de primaria el aprendizaje clave se basa en que el estudiante “calcula mentalmente, de manera exacta y aproximada, sumas y restas de decimales... [...] calcula mentalmente porcentajes que sirvan de base para cálculos más complejos” (SEP, 2017, p. 307). Cabe mencionar que, a pesar de que el Cálculo Mental aparece como uno de los propósitos para la educación secundaria, este no se menciona en ningún momento del documento como aprendizaje esperado.

Finalmente, en el glosario presentado por el documento de la SEP (2017) se dice que el Cálculo Mental,

es un cálculo en el que, en función de los números y las operaciones, se selecciona un procedimiento particular adecuado a esa situación. No excluye el uso de lápiz y papel para hacer algunos cálculos intermedios, pero si excluye el uso de la calculadora (p. 653)

Si bien coincidimos plenamente con esa definición para el Cálculo Mental, nos parece oportuno señalar que dicha definición no implica que la calculadora obstaculice, frene o se oponga al Cálculo Mental. Se debe reconocer la diferencia entre realizar cálculos mentales y desarrollar estrategias para llevarlos a cabo (en cuyo caso, según mostraremos más adelante, la calculadora puede jugar un papel interesante).

Como un dato adicional, que cierra el análisis del nuevo currículo mexicano, queremos señalar el escaso tratamiento que se da al Cálculo Mental en las Referencias Bibliográficas, ya que solo es referenciado un documento.

## **2.2 El cálculo mental en el currículo colombiano**

*...florecer todas las primaveras...*

En el documento de los lineamientos curriculares del Ministerio de Educación Nacional (MEN) de Colombia publicado en el año 1998, se deja claro desde el principio la importancia del cálculo mental para la enseñanza de la educación primaria, como para cursos más avanzados y además lo importante que puede ser la calculadora para desarrollar este tipo de cálculo, al respecto refiere:

En la educación básica primaria, la calculadora permite explorar ideas y modelos numéricos, verificar lo razonable de un resultado obtenido previamente con lápiz y papel o mediante el cálculo mental. Para cursos más avanzados las calculadoras gráficas constituyen herramientas de apoyo muy potentes para el estudio de funciones por la rapidez de respuesta a los cambios que se introduzcan en las variables y por la información pertinente que pueda elaborarse con base en dichas respuestas y en los aspectos conceptuales relacionados con la situación de cambio que se esté modelando (pp. 17-18).

Es claro que, a diferencia de otros currículos y otros autores, estos lineamientos curriculares con su propuesta, no se abstienen a la idea de que la calculadora puede llegar a ser una herramienta útil para explorar estrategias que favorezcan el cálculo metal y otras características como las de comprobar resultados, esto muestra una propuesta de la nueva visión del conocimiento matemático en la escuela, como lo denomina el Ministerio de Educación Nacional.

Por otra parte, los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas de Colombia, están organizados y centrados en el desarrollo de la competencia matemática de manera que éstas involucren distintos procesos y que se concretan de manera específica en el pensamiento lógico y

en el pensamiento matemático, el cual esta subdividido en los cinco tipos de pensamientos propuestos en los Lineamientos Curriculares: el numérico, el espacial, el métrico, el aleatorio y el variacional (MEN 2006, p.56).

Entre los conocimientos básicos del pensamiento numérico y los sistemas numéricos se hace mención del cálculo mental con respecto a este pensamiento de la siguiente manera:

El pensamiento numérico se adquiere gradualmente y va evolucionando en la medida en que los alumnos tienen la oportunidad de pensar en los números y de usarlos en contextos significativos, [...] En particular es fundamental la manera como los estudiantes escogen, desarrollan y usan métodos de cálculo, incluyendo cálculo escrito, cálculo mental, calculadoras y estimación, pues el pensamiento numérico juega un papel muy importante en el uso de cada uno de estos métodos (MEN 1998, p. 26).

Claramente, el énfasis que se da al cálculo mental con el desarrollo del pensamiento está relacionado con la comprensión del significado de los números y sus diferentes interpretaciones y representaciones. Por otra parte, es claro que por lo menos a través de MEN se hace el esfuerzo de que a las aulas de clase se lleve en cálculo mental por medio de propuestas curriculares y propuestas oficiales de enseñanza.

### **2.3 El cálculo mental en el currículo español**

*...resucitar como después de morir...*

El cálculo mental en los anteriores currículos oficiales españoles (MEC, 1970) no aparecía claramente, aunque se incluía de manera indirecta entre los objetivos específicos del área de matemáticas el *Desarrollo de la agilidad mental*, enunciado cuyo significado no era explicado en el documento donde se recogía la propuesta.

Posteriormente, en los programas renovados del año 1981 (MEC, 1981), apareció la mención del cálculo mental por primera vez, relacionándolo con la aplicación de las propiedades de las operaciones y con la resolución de situaciones de la vida real, en un enfoque vinculado al cálculo rápido. Así queda reflejado en la cita siguiente:

- ◆ Cálculo mental y rápido de sumas, restas, multiplicaciones y divisiones.
- ◆ Desarrollo de la agilidad mental en el cálculo de estas cuatro operaciones.
- ◆ Aplicar las propiedades conocidas para simplificar y agilizar el cálculo mental. (MEC, 1981 citado en Gómez, 1995, p.92).

Según el autor en mención, en esta propuesta de carácter práctico, no se explicitaban los métodos que había que enseñar. En cambio, en el actual decreto, propuesto por el Ministerio de Educación y Ciencia de España, MEC (2006), se otorga al cálculo mental un renovado protagonismo.

En este documento, se establecen las enseñanzas mínimas de Educación Primaria, se estructura lo que se entiende por competencia matemática que deben desarrollar el estudiante de este nivel educativo, siendo uno de los aspectos básicos la habilidad para relacionar los contenidos matemáticos tanto con la vida cotidiana como con el mundo laboral. Los contenidos referentes al Cálculo Mental se localizan en el bloque 1 *Números y Operaciones* y menciona:

Al desarrollo del sentido numérico, entendiendo como el dominio reflexivo de las relaciones numéricas que se pueden expresar en capacidades como [...] utilizar las propiedades de las operaciones y las relaciones entre ellas para realizar mentalmente cálculos. [...] Interesa principalmente la habilidad para el cálculo con diferentes procedimientos y la decisión en cada caso sobre el que sea más adecuado. Se pretende que el alumnado calcule con fluidez y haga estimaciones razonables, tratando de lograr un equilibrio entre comprensión conceptual y competencia en el cálculo. (R.D. 1513/2006, p.81).

Además, los contenidos mínimos de cálculo mental que se establecen para desarrollar en los grados primero, segundo y tercer de la Educación Primaria española se establecen en este mismo documento del MEC (2006) y son los siguientes:

Para primer grado, desarrollo de estrategias personales de cálculo mental para la búsqueda del complemento de un número a la decena inmediatamente superior, para el cálculo de dobles y mitades de cantidades y para resolver problemas de sumas y restas (p. 84). Para segundo grado, utilización de estrategias personales de cálculo mental (p. 87). Y para tercer grado, resolución de problemas de la vida cotidiana utilizando estrategias personales de cálculo mental y relaciones entre los números, explicando oralmente y por escrito el significado de los datos, la situación planteada, el proceso seguido y las soluciones obtenidas (p. 90).

Sobre este aspecto el Ministerio de Educación y Ciencia español responde cada vez más con mayor redundancia la necesidad de trabajar el cálculo mental en el aula de la siguiente forma:

En la Educación primaria se busca alcanzar una eficaz alfabetización numérica, entendida como la capacidad para enfrentarse con éxito a situaciones en las que intervengan los números y sus relaciones, permitiendo obtener información efectiva, directamente o a través de la comparación, la estimación y el cálculo mental o escrito (MEC 2007, BOE núm. 173, p. 69).

Es claro que se resalta la importancia de comenzar la enseñanza del cálculo mental desde temprana edad y el docente es el responsable proponer actividades y llevar al aula estos procesos mentales.



## **2.4 El cálculo mental según la NCTM**

*...crecer como después de niño...*

También en otros países las propuestas oficiales se encaminan por estas mismas rutas, por ejemplo, la propuesta norteamericana, plasmada en los estándares curriculares del Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas, NCTM (2003), también hace énfasis al Cálculo Mental y menciona:

A medida que los niños de los niveles Pre-K-2 (5 a 8 años) van comprendiendo el significado de los números naturales y de las operaciones de adición y sustracción, la enseñanza debería centrarse sobre estrategias de cálculo mental que desarrollen la flexibilidad y la fluidez (p.37).

Esta propuesta recomienda que desde la etapa preescolar la enseñanza del cálculo mental predomine sobre el cálculo escrito. En conclusión, podemos observar que en los documentos oficiales hay una serie de planteamientos innovadores en relación a propuesta anteriores de los contenidos del currículo, donde el cálculo mental atendía a un requerimiento utilitario, centrado en la enseñanza del Ciclo Medio, que es la etapa del aprendizaje de las operaciones.



## Capítulo 3

### MARCO DE REFERENCIA

*...proyectarse como la esperanza...*

Al interior de este capítulo presentamos los fundamentos teóricos que sirvieron como base para esta investigación, también se muestra lo encontrado en la literatura que se relaciona con esta investigación, específicamente la literatura relacionada con el cálculo mental, el cálculo algorítmico, las estrategias de cálculo mental y el uso de la calculadora. Las bases teóricas aquí mostradas fueron las que dieron sustento a la elección de la metodología utilizada en esta investigación.

#### 3.1 Cálculo mental

Basándonos en diversos autores, entendemos cálculo mental como un conjunto de procedimientos de cálculo que pueden ser analizados y articulados diferentemente por cada individuo para obtener resultados exactos o aproximados, con o sin ayuda de lápiz y papel (e.g Gálvez, et al. 2011; Parra, 1996; Sowder, 1989; Wolman, 2006). Los procedimientos de cálculo mental se adaptan a los números en juego y a los conocimientos o preferencias del sujeto que las se aplica, sin seguir reglas y el desarrollo de cada cálculo puede ser diferente.

Según Parra (1996), “los procedimientos de cálculo mental se apoyan en las propiedades de la numeración decimal y las propiedades de las operaciones, y activan diferentes relaciones entre los números” (p.189). Es decir, que estos procedimientos o estrategias utilizan las propiedades del sistema de numeración decimal (base decimal, posicional) y las propiedades aritméticas (conmutativa, asociativa, el elemento neutro y el elemento inverso). Sowder (1989), clasifica las características de las estrategias de cálculo mental de la siguiente manera:

- (i) Son variables, lo que permite que cada persona elija su estrategia personal;
- (ii) son flexibles, adaptándose a los números utilizados;
- (iii) son holísticas, en el sentido en que se trata el número en su globalidad, y no cifra a cifra;
- (iv) solicitan la comprensión de todo el proceso de cálculo, forzando al alumno a centrar su atención en el problema planteado; y
- (v) permiten la obtención de

resultados más aproximados, ya que a menudo se trabaja de izquierda a derecha con los números. Sin embargo, el cálculo mental es una estrategia pertinente cuando se trabaja con números de cierto orden de grandeza (p.193).

Cabe resaltar la característica holística de la clasificación que hace Sowder, que trata el número comprendiendo su totalidad, requiere del niño la construcción mental del número que, según Piaget, se da por medio de la síntesis del orden y de la inclusión jerárquica (Kamii y Dominick, 2010). Trabajar con algoritmos tradicionales de lápiz y papel sería poco conveniente antes de la construcción mental y de la comprensión del significado de cantidad numérica, pues al operar con números con más de una cifra, el estudiante tratará cada uno de forma individual. Según Kamii y Dominick (2010), el orden se refiere a una coordinación mental de los objetos para incluirlos una sola vez, no necesariamente, teniendo que disponer, espacialmente, de los objetos. La inclusión jerárquica consiste en la comprensión de que un número engloba a sus predecesores. El número cinco engloba los números uno, dos, tres y cuatro, por ejemplo. Este concepto de la inclusión es importante, pues permite la percepción de que no se trata de nombrar el objeto cinco, pero sí de que son cinco objetos. Kamii y Dominick resaltan que, sin esta noción, los objetos no se pueden cuantificar.

Cuando el niño ya ha construido esa estructura cognitiva y se desarrolla un trabajo sistemático con cálculo mental, elegir una estrategia se convierte en una actividad cada vez más común. Por ejemplo, al sumar mentalmente  $9 + 6$ , una el niño puede hacer lo siguiente:  $9 + 6 = 9 + (5 + 1) = (9 + 1) + 5 = 10 + 5 = 15$ , incluso si no sabe explícitamente qué propiedad está utilizando. Entonces, por ejemplo, percibimos que el número seis incluye, contiene o engloba al número cinco y al número uno y, notamos la flexibilidad del pensamiento en revertir la inclusión, realizando la descomposición. Se nota la propiedad asociativa de la adición, siendo usada para buscar totales iguales a diez, lo que demuestra conocimiento sobre el sistema de numeración decimal y de las propiedades de las operaciones.

El cálculo mental, en nuestra concepción (Sowder, 1989; Parra, 1996; Wolman, 2006) no debe colocarse en contraste con el cálculo algorítmico, siempre y cuando los registros en el papel no sean procedimientos algorítmicos convencionales. La distinción entre cálculo algorítmico y cálculo mental no se basa en el hecho de que el primero sea escrito y el segundo no. El cálculo el algoritmo se suele basar en una serie de reglas aplicables en un orden determinado, independientemente de los datos, que garantizan alcanzar un resultado en un número finito de pasos (Parra, 1994; Wolman, 2006). Este tipo de calculo utiliza siempre la misma técnica para una operación dada, cualesquiera sean los números a tratar, el alumno tiene que manejar estrictamente una serie de pasos dejando a un lado la resolución lógica del problema o la operación planteada sin reflexión ni manipulación, “trabajando con columnas en aislamiento y olvidando la relación entre ellas y, además, retrasando el desarrollo del razonamiento numérico” (Kamii y Dominick, 2010, p. 4). En cambio, al proponerse un trabajo de cálculo mental no se espera una única manera de proceder, se espera un uso de estrategias personales, creativas y que demuestren la comprensión de los números involucrados.

Por lo tanto, la ejecución mental del algoritmo convencional no consiste en el cálculo mental. Como menciona Wolman (2006), los procedimientos de cálculo mental se oponen, por definición, a los procedimientos de los cálculos algorítmicos. Pero, es necesario tener en cuenta que el cálculo mental le da sentido al cálculo algorítmico y esto permite afianzar el sentido numérico en el estudiante, complementándose ambos tipos de cálculo entre sí. El cálculo mental permite comprobar la razonabilidad de los cálculos algorítmicos y el cálculo algorítmico puede permitir el desarrollo de estrategias de cálculo mental (Rogers, 2009; Uriach y Pesce, 2011). En la Tabla 2 presentamos un análisis sobre las relaciones y diferencias existentes entre estos dos tipos de cálculo.

Tabla 2

*Relaciones y diferencias entre Cálculo Mental y algorítmico*

	<b>Mental</b>	<b>Algorítmico</b>
<b>Resultados</b>	Exactos o aproximados (Wolman, 2006)	Exactos (Parra, 1994)
<b>Datos numéricos</b>	Se consideran de manera global y depende de ellos para ser analizados y escoger la estrategia a seguir (Parra, 1994).	Se consideran sus cifras aisladamente e independientes (Gómez, 1996). Sus características no intervienen a la hora de decidir cómo operar.
<b>Escritura de procedimientos</b>	No es del todo necesario, únicamente para explicar la estrategia utilizada (Rogers, 2009).	Sí es necesario
<b>Utilización de las propiedades de las operaciones</b>	Las propiedades se convierten en las estrategias de solución (Chamorro, 2003).	Después que se aprende el algoritmo, no es necesario utilizarlas.

En cuanto al cálculo mental y los cálculos algoritmos convencionales, Rogers (2009) afirma que los profesores, raramente valoran las estrategias de cálculo mental que surgen naturalmente y, a menudo, estimulan a los niños a utilizar los algoritmos. Según este autor "esto puede hacer que los niños contengan sus estrategias de pensamiento intuitivo y sigan ciegamente los procesos algorítmicos" (p. 192), es decir, tal actitud de los maestros puede conducir al estudiante al uso dañino de los algoritmos de forma no reflexiva y acrítica, sin evaluar la razonabilidad de la solución de un cálculo, además de desalentar la búsqueda por estrategias intuitivas y autónomas. Kamii (1995) presenta tres razones para no usar prematuramente los algoritmos en los años iniciales de la enseñanza básica:

- (1) Los algoritmos obligan al estudiante a desistir de su razonamiento numérico.
- (2) Ellos "no enseñan" el valor posicional y obstruyen el desarrollo del sentido numérico.
- (3) El niño depende del arreglo espacial de los dígitos (o lápiz y papel) y otros (Kamii, 1995, p. 55).

Este autor defiende que los niños deben reinventar la aritmética, pasando por un proceso similar al de la humanidad en la construcción de las técnicas de cálculo, pues el conocimiento lógico-matemático "es el tipo de conocimiento que cada uno puede y debe construir por medio de su propio 'raciocinio'" (p.55). Rogers (2009) tiene argumentos similares a los de Kamii (1995) para justificar que los algoritmos escritos deben ser enseñados en un segundo momento para los niños y añade que:

Los niños no deberían tener ningún problema en dominar estos procedimientos [algoritmos] si están conectados tanto como sea posible a los métodos más informales de adición [...] utilizados por los niños [...] surgen dificultades si los procesos son enseñados sin referencia al conocimiento a priori de los niños o si sólo se usa como alguna forma para decorar (Westwood 2000 en Rogers, 2009, p. 192).

Entendemos que todo gira en permitir que el niño tenga el control de los cálculos ya sea por medio de los algoritmos tradicionales, el cálculo mental o por uso de calculadoras. Por su parte la Secretaria de Educación Pública propone "utilizar de manera flexible la estimación, el Cálculo Mental y el cálculo escrito en las operaciones con números naturales, fraccionarios y decimales" (SEP, 2017, p. 296). Al igual que Areias, De Azevedo y Laranjeira (1998) recomiendan que uno de los criterios de evaluación de matemáticas para el segundo ciclo de la educación básica debe ser "realizar cálculos, mentalmente y por escrito, involucrando números naturales y racionales. Se espera que el alumno sepa calcular con agilidad, que se utiliza de estrategias personales y convencionales" (p. 94).

Observamos que es una preocupación de las directrices e investigadores enfatizar no sólo el dominio de diferentes modalidades de cálculo, sino también en la fluidez y rapidez en las ejecuciones. Los investigadores están de acuerdo al afirmar que el cálculo mental no es un cálculo rápido, el uso eficiente de esta herramienta implica, necesariamente, una mayor habilidad y agilidad con números y operaciones, desarrollando el sentido numérico (Kamii, 1995; Parra, 1996; Rogers, 2009; Lethielleux, 2005). Aunque los Planes y Programas para la Educación Básica (SEP, 2017) orientan el trabajo con diversas modalidades de cálculo, de forma general, la

enseñanza de cálculo escrita por medio de algoritmos es predominante en las aulas de matemáticas (Kamii, 1995; Rogers, 2009). Por eso, se hace necesaria la discusión sobre cálculo mental, enseñanza de cálculo mental y desarrollo del sentido numérico.

Esta discusión es necesario que gire en torno a cómo y cuándo llevar el cálculo mental al aula de clases y qué beneficios otorga al estudiante. Gálvez et al. (2011) menciona que las habilidades que promueve el Cálculo Mental deberían aprovecharse desde temprana edad, debido a que es una actividad cognitiva reveladora en el proceso de enseñanza - aprendizaje temprano de las matemáticas y, como afirma Rogers (2009), “el Cálculo Mental se produce o viene de forma natural en el estudiante” (p. 195). Así, al trabajar el Cálculo Mental en el aula de clases de la educación básica se está beneficiando de manera directa al estudiante, ya que, según Martínez Montero (2000) y Chamorro (2003), le otorga beneficios como:

- ◆ Mejoras al momento de resolver problemas. Los estudiantes pueden visualizar el problema más fácilmente, pues tienen idea de los resultados que buscan.
- ◆ Una mejor lectura de los números.
- ◆ Trabajar con relaciones estrictamente matemáticas.
- ◆ Realizar descomposiciones de números diferentes a las tradicionalmente enseñadas.
- ◆ Favorece el aprendizaje de los algoritmos conocidos y ayuda a discernir cuándo y por qué es conveniente emplearlos.
- ◆ Desarrolla el sentido numérico y habilidades intelectuales como la atención y la concentración.

Gómez (1994) afirma que habitualmente el Cálculo Mental se practica en la escuela después de que el estudiante domina el cálculo escrito y que este modelo de enseñanza puede influir de forma negativa en el estudiante, debido a que muchos de ellos tienden a resolver los problemas de Cálculo Mental con las técnicas del cálculo escrito y es más conveniente disminuir el énfasis tradicional sobre el cálculo escrito rígido, en favor de una combinación de cálculo variado (mental, estimado, con calculadora o algoritmos), según convenga al momento, situación, tamaño y características de los números involucrados.



Dominar varias modalidades de cálculo es, sin duda, indispensable en el diario vivir debido a nuestras relaciones sociales. Enfatizar en el cálculo escrito y en la enseñanza de los algoritmos tradicionales en el aula, no ha sido suficiente para cubrir las necesidades que la sociedad demanda actualmente. Son numerosos los ejemplos en lo que a diario es necesario utilizar el cálculo escrito, pero en muchos de estos casos, es muy costoso y además innecesario. Por ejemplo, ir de compras en el supermercado, donde hacemos varias estimaciones, sacar el porcentaje de descuento de algún producto, etc. La enseñanza formal de los algoritmos es útil, pero no puede sustituir alternativas de cálculo, en particular, el cálculo mental. Es necesario hacer un equilibrio a la hora de enseñar y valorar las diversas estrategias de resolución de los alumnos.

### **3.2 Estrategias de cálculo mental**

*...abrir el alma como volcán.*

Como ya se ha mencionado, las estrategias de cálculo mental se apoyan en las propiedades del sistema de numeración decimal y las propiedades de las operaciones (Parra, 1996). Son más que simples procedimientos, las cuales se encuentran en el plano de lo cognitivo y por lo tanto son más adaptativas; esto depende de cómo el estudiante aborda la situación específica involucrada en cada problema (Leger et al, 2011). Son formas flexibles de manipular las cantidades que requieren la comprensión de todo el proceso (Sowder, 1989) lo que estimula a desarrollar el sentido numérico en los alumnos (Mcintosh, Reys y Reys, 1992). A pesar de que existen estrategias variadas de cálculo mental, existe un conjunto de estrategias que deben ser abordadas. Entre las estrategias que involucran adición y sustracción, destacamos el conteo, la descomposición de números, la compensación y el uso de las propiedades de las operaciones.

Aunque no todos los autores las llaman por el mismo nombre, las diferentes estrategias de cálculo mental a las cuales los estudiantes tienen acceso pueden ser identificadas y clasificadas a través de las características de cada una de ellas. Aquí hacemos un intento de describir las estrategias más usadas en el Cálculo Mental basándonos en lo planteado por Fernández (2004), tomando como esquema general de clasificación las operaciones aritméticas con números naturales, aunque se puede hacer referencia a otros dominios numéricos.

### 3.2.1 Estrategias para la adición

- ◆ **Conteos:** está basada en el *conteo* o *recuento* en la sucesión numérica, es propia de los primeros años de aprendizaje, tiene varias subcategorías como:
  - a) Por conteo total. Parte de la unidad y coloca en una sucesión ambas cantidades,  $4 + 7 = [1, 2..., (4 \text{ pasos}) ..., 4; 6, 7, 8... (7 \text{ pasos})] 11$
  - b) Por conteo parcial. Se evita el conteo para uno de los sumandos,  $35 + 8 = [35; 36, 37..., (8 \text{ pasos})] 43$
  - c) Con estrategia de elección de origen del conteo. También es conocida por varios autores como puente de cierta cantidad, línea numérica vacía, salto de línea, etc.  $45 + 32 = [45; \text{más } 10, 55; \text{más } 10, 65...; \text{más } 1, 76; \text{más } 1] 77$
- ◆ **Permuta previa:** o aplicación de la propiedad conmutativa. Aunque puede parecer una simpleza, todo apunta a señalar que resultan más sencillas aquellas adiciones en las que el primer sumando supera al segundo. La aplicación de la estrategia conmutativa se utiliza en general en las adiciones con números superiores a la decena.  $7 + 45 = 45 + 7 = 52$
- ◆ **Descomposición:** esta estrategia tiene como aspecto en común un dominio de la composición de una cantidad en otras, por vías aditivas o aditivo-sustractivas. Esta estrategia tiene varias subcategorías como: a) descomposición aditiva y b) descomposición de uno de los sumandos en dos partes arbitrarias.
$$8 + 7 = 8 + (2 + 5) = (8 + 2) + 5 = 10 + 5 = 15$$
$$39 + 8 = 39 + (1 + 7) = (39 + 1) + 7 = 40 + 7 = 47$$
- ◆ **Descomposiciones aditivo-sustractivas:** en esta estrategia uno de los sumandos se descompone como sustracción.  $5 + 9 = 5 + (10 - 1) = (5 + 10) - 1 = 15 - 1 = 14$ 
$$64 + 28 = 64 + (30 - 2) = (64 + 30) - 2 = 94 - 2 = 92$$
- ◆ **Mediante representaciones mentales:** puede ser simbólica gráfica (de algoritmos escritos), con material manipulativo y de situaciones gráficas. *Conteo con los dedos, movimientos de los labios, verbalizaciones, etc.*

### 3.2.2 Estrategias para la sustracción

En cuanto a las estrategias de cálculo mental para la sustracción o resta Fernández (2004) menciona, “En razón de la estructura algebraica aditiva de grupo, y según las teorías psicopedagógicas, la sustracción es inseparable de la adición, por más que el algoritmo escrito las haya alejado formalmente. Es, pues, de esperar que sean paralelas o análogas las estrategias empleadas en una y otra por el cálculo pensado” (p.59).

Queremos subrayar otra concepción de cálculo mental que muy poco se menciona en los estudios donde se aborda este tema, y es la concepción de Lucangeli, Poli, Molin y Bertolli, (2003). Para estos investigadores, la realización mental de cálculos con el algoritmo tradicional, es decir, realizar una operación aritmética mentalmente imaginando la forma en que se escribe y opera algorítmicamente, es también una estrategia auténtica de cálculo mental. Además, esta *estrategia* se ha identificado con frecuencia en los estudiantes a la hora de realizar cálculos mentales. Además de la identificación de esta estrategia, hacemos un análisis crítico de su uso durante los cálculos en el análisis de datos.

Una de las estrategias que es bastante común y que pone en evidencia escribir los números en decenas y unidades separadas es la descomposición. (Thompson, 2000). Por ejemplo, para realizar la suma  $74 + 65$ , añadimos  $70 + 60$  y  $4 + 5$ . Finalmente, juntamos los dos resultados y obtenemos 139. En el caso de la resta,  $86 - 23$  hacemos  $80 - 20$ , después  $6 - 3$  y, juntamos los resultados  $60 + 3$ , para obtener como resultando en 63. Tal estrategia también es conocida en la literatura científica como 1010 (diez-diez), haciendo alusión a que los números se descomponen en decenas exactas. Thompson (2000) advierte sobre un problema frecuentemente en esta estrategia, y es que puede inducir al error, en situaciones de sustraer con préstamo. Según el autor, esa es una de las razones por las que los holandeses enseñan una estrategia diferente, ya que la dificultad de esta estrategia no reside en la descomposición numérica sino, en la recomposición del número.

Al igual que la estrategia de compensación, en Thompson (2000) aparecen cada una de ellas categorizadas, en la siguiente tabla se muestran las principales categorías propuestas por este autor.

Tabla 3

*Categorización de estrategias de cálculo mental propuestas por Thomson (2000).*

<b>Categoría (Estrategia)</b>	<b>Descripción</b>	<b>Ejemplo</b>
1010 (descomposición)	Número de decenas + unidades.	$55 + 32 = 50 + 30$ y $5 + 2 = 80 + 7 = 87$
N10 (secuenciación)	Número + decena + unidades faltantes.	$56 + 42 = 56 + 40 = 96 + 2 = 98$
N10C (combinación)	Número + decena y compensamos.	$47 - 28 = 47 - 30, (28 = 30 - 2) = 17, 17 + 2 = 19$

En Rogers (2009) se resumen otras estrategias de Cálculo Mental para estudiantes de la escuela primaria que, según el autor, ayudan al niño a convertirse en cliente flexible del Cálculo Mental. Entre las estrategias mentales que se encuentra se destacan: conteo, dobles, dobles cercanos, puente de diez y el uso del valor de lugar para añadir decenas, entre otras. Estas estrategias son vistas como bloques de construcción para desarrollar habilidades de Cálculo Mental. Además, la misma autora menciona que, como los niños vienen a la escuela con estrategias de Cálculo Mental natural, es importante comenzar las discusiones de Cálculo Mental tan pronto como se pueda, empezando con estrategias elementales como las arriba enunciadas y luego pasar a otras más sofisticadas.

Estas estrategias se complementan con las mencionadas anteriormente y juntas se relacionan con los propósitos para la Educación Primaria propuestos en SEP (2017) para los aprendizajes claves para la enseñanza obligatoria, donde se menciona que el estudiante debe ser capaz de resolver problemas de suma y resta con números naturales y calcular mentalmente sumas y restas con números de dos cifras, dobles de números de dos cifras y mitades de números pares.

Tabla 4.

*Algunas estrategias de cálculo mental.*

<b>Estrategia</b>	<b>Ejemplo</b>
<b>Agregación</b>	28 + 35: 28 + 5 = 33 33 + 30 = 63
<b>Holístico</b>	28 + 35: 30 + 35 = 65 65 - 2 = 63
<b>Separación de derecha a izquierda</b>	28 + 35: 8 + 5 = 13 20 + 30 = 50 13 + 50 = 63
<b>Separación de izquierda a derecha</b>	28 + 35: 20 + 30 = 50 8 + 5 = 13 50 + 13 = 63
<b>Dobles y doble cercanos</b>	17 + 18: 17 + (17 + 1) = (17 + 17) + 1 = 34 + 1 = 35

### 3.3 Uso de recursos tecnológicos en la escuela: La calculadora en la enseñanza del cálculo mental

*...Y permitir que te crezcan alas...*

Entiéndase en el área de Educación Matemática por recurso tecnológico a todo aquello, objetos, aparatos, herramientas o medios de comunicación que, pueden ayudar a descubrir, entender o consolidar conceptos fundamentales en las diversas fases de aprendizaje (Alsina,1988).

A través de la historia se pueden identificar diferentes herramientas de cálculo que se han utilizado dependiendo de su finalidad. En la edad media, cuando los cálculos se hacían de forma extensa y difícil, se apreciaba la capacidad de calcular mentalmente, para esta época, el ábaco era la herramienta de cálculo privilegiada en el continente europeo. En el siglo XII, con la generalización de sistema de numeración decimal, el ábaco fue sustituido poco a poco por los algoritmos escritos, lo que conllevó a una serie de conflictos y discusiones entre los matemáticos

de la época. La simplicidad del método de los algoritmos escritos era vista como un facilismo perjudicial para el desarrollo de las capacidades intelectuales y que permitía una democratización del saber que era negativa por la comunidad científica de la época (Guejd, 1996, citado por Fosnot y Dolk, 2001).

La aparición de la calculadora y la computadora colocaron a los algoritmos escritos en una nueva perspectiva, ya que la utilización de estas herramientas tecnológicas prevalece en la realización de cálculos de grandes cantidades numéricas, con muchos dígitos o con muchas cifras decimales, con las que se hace difícil operar. Sin embargo, debemos preguntarnos si la enseñanza de los algoritmos escritos debe ser el tema central de los procesos enseñanza-aprendizaje en los primeros cursos de matemáticas de la educación básica, o se debe privilegiar otro enfoque para desarrollar la capacidad de cálculo en los estudiantes teniendo como recurso las estrategias de cálculo mental.

La capacidad de calcular mentalmente es esencial para el estudiante, está basada en utilizar estrategias y referencias personales, que se transforma en utilizar las propiedades y los números con sentido. Como señala Sowder (1989), permite a los alumnos relacionar conceptos y aptitudes, lo que contribuye al desarrollo de la comprensión sobre cómo los números y las operaciones funcionan, estimulando su sentido del número.

Es por lo anterior, que una herramienta que creemos que puede llegar a contribuir sustancialmente en el desarrollo de las características de las estrategias de cálculo mencionadas anteriormente y que puede favorecer las habilidades de cálculo que poseen los estudiantes por diversos motivos, es la calculadora. Uno de ellos, como menciona Wolman (2006), “se ha convertido en una herramienta de cálculo muy extendida en la sociedad, llegando incluso a modificar los hábitos del cálculo” (p. 20). Además, consideramos que la calculadora también puede ayudar, en ciertas situaciones, como una herramienta o un medio para explorar propiedades, analizar cómo va el proceso de la actividad que está realizando, con el beneficio de constatar de manera inmediata e independiente del docente los resultados a las situaciones que sean solicitadas al estudiante.

Además de esto, la calculadora brinda al estudiante beneficios como permitirle el acceso a la resolución de tareas exploratorias o de investigación a aquellos que presentan dificultades con la utilización de los algoritmos de cálculo escrito. Por otra parte, la calculadora es una herramienta que le brinda al estudiante la oportunidad de desarrollar su raciocinio matemático en la identificación de propiedades numéricas, determinar patrones de números y establecer generalizaciones. Es por estas razones, que queremos resaltar otro uso que se le puede dar a la calculadora en clases de matemáticas, ya que, muchas veces, los docentes admiten su uso para que los estudiantes verifiquen cálculos resueltos de otro modo o para hallar resultados y así aliviar la tarea del cálculo. Lo que pretendemos con la utilización de esta herramienta es que el estudiante pueda llegar a aprender ciertas habilidades cognitivas de Cálculo Mental y las desarrolle en la escuela, dentro y fuera de la clase de matemáticas, y también para resolver problemas en su contexto cotidiano.

Por otro lado, existen diversas concepciones acerca del Cálculo Mental. Muchas de estas permean las formas de enseñanza y los aprendizajes esperados para éste. Una de las concepciones más extendidas tiene que ver con que el Cálculo Mental es una habilidad en la que la rapidez y el tanteo juegan un papel fundamental (eg. Cockcroft, 1985; Lemaire, Lecacheur y Farioli, 2000; Lemaire y Lecacheur, 2001). Debido a los objetivos de este trabajo, los cuales declararemos explícitamente en capítulos anteriores, la concepción en la que vamos a ahondar en este apartado se refiere al uso de la calculadora y su relación con el Cálculo Mental.

Se pretende abordar un tema hasta ahora poco estudiado empezando con que hay poca literatura referente al desarrollo de habilidades de Cálculo Mental utilizando una calculadora, ya sea básica o aplicaciones móviles de calculadoras.

En lo hallado en la literatura y que tiene que ver con el Cálculo Mental y las calculadoras hacemos referencia a Ruthven (1998), quien en su estudio de evaluación de estrategias mentales y calculadoras en estudiantes de las llamadas escuelas CAN (Calculator Aware Number) en Reino Unido, evaluó si los estudiantes al utilizar de manera flexible las estrategias mentales y las calculadoras tenían mayor o menor rendimiento en el uso de estas estrategias para la resolución de problemas. Estos estudiantes habían sido alentados a desarrollar y refinar métodos informales

de Cálculo Mental. Por su parte, Udina (1992) en su libro *Aritmética y Calculadoras* menciona lo importante que se ha convertido para la sociedad la calculadora de bolsillo al momento de realizar cálculos y agrega:

[...] la vieja pregunta “¿tienen que usar los alumnos, calculadoras en clase?” no tiene ya sentido, dado que las calculadoras existen, están ahí, en las manos de los alumnos, y es evidente que tienen una relación íntima con el mundo del cálculo aritmético y con las matemáticas en general. La pregunta debería plantearse del siguiente modo: ¿Cómo hay que usar la calculadora en clase de matemáticas para que se convierta en un poderoso auxiliar didáctico y para evitar los peligros de su utilización irreflexiva? (p.10)

Habitualmente la calculadora es permitida por los docentes en el aula para que los estudiantes comprueben los cálculos o incluso para que ellos resuelvan operaciones que se les hacen complicadas. Sin embargo, en esta investigación queremos dar otro uso a esta herramienta, no muy extendido en la enseñanza de las matemáticas, pero sí, muy relevante. Planteamos situaciones particulares con la calculadora, que no necesariamente son para obtener resultados.

Por su parte Reys (1984) en su trabajo, menciona que la tecnología, en particular las calculadoras y las computadoras, se debe utilizar en todas las fases de la enseñanza de cálculo estimado porque proporciona un fuerte incentivo para desarrollar buenas habilidades de estimación. También, afirma que las personas pueden realizar cálculos que pueden ejecutarse mentalmente o rápidamente, y las calculadoras pueden usarse para realizar todos los cálculos tediosos y lentos. Del mismo modo Chamoso, Hernández, López y Rodríguez (2015) evidencian en su trabajo cómo se pueden mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje del cálculo mental en alumnos de enseñanza primaria y secundaria a través de juegos interactivos en un ordenador. Para esto, el ordenador controla el trabajo y el progreso de los estudiantes.

En general, estos autores coinciden con Fernández (2004) al respecto que:



La calculadora ha dejado de ser considerada como cómplice y encubridora de impericias calculatorias del alumno, para apreciarla como aliada didáctica. Es hoy un instrumento que hay que conocer y saber utilizar, alcanzando la categoría también de objetivo curricular. E incluso como material de enseñanza-aprendizaje del cálculo en sus estadios más elementales (p. 18).

Los profesores que han trabajado actividades con calculadoras en clase de matemáticas están de acuerdo que su uso aumenta la motivación del estudiante, además, como indica el informe Cockcroft (1982), la disponibilidad de la calculadora no reduce de ninguna manera la necesidad de comprensión matemática por parte de la persona que la está utilizando; además anima el hábito de la investigación matemática. Pero a pesar de esto, son pocos los que se atreven a proponer actividades utilizando una calculadora para desarrollar estrategias de Cálculo Mental.



## Capítulo 4

### METODOLOGÍA

*...volar tan lejos como te den ganas...*

En este capítulo describiremos los fundamentos metodológicos que sustentan nuestra investigación, el paradigma, el tipo de investigación, los informantes del estudio, las actividades, la recogida de los datos, el análisis de la información, etc. Todo esto, para organizar e interpretar la información y, comprender los conocimientos que tienen acerca el cálculo mental, las estrategias que utilizan y las que pueden desarrollar utilizando la calculadora.

#### 4.1 Diseño de la investigación

##### 4.1.1 Paradigma de investigación

El concepto de paradigma admite pluralidad de significados y diferentes usos. Una de las definiciones clásicas del concepto no las ofrece Kuhn (1971) al identificarlo con las realizaciones científicas universales reconocidas que durante cierto tiempo proporcionan modelos de problemas y soluciones a una comunidad científica. Alvira (1982:34) lo define como un esquema teórico, o una vía de comprensión del mundo [...] Los paradigmas asumen, entre otras cosas un conjunto de postulados metateóricos y metodológicos. Estos postulados dictan las reglas tanto para la construcción de los esquemas explicativos como de los procedimientos de la investigación (Albert, 2007, p. 23-24).

Entonces, más allá del interés que se tenga por un objeto de estudio específico, es lo que se cree de la realidad y de las posibilidades del método científico lo que nos llevan a elegir una u otra metodología.

Dado que nuestro interés radica en descubrir, interpretar y dar explicaciones a cómo el uso de la calculadora puede propiciar el uso de estrategias de cálculo mental entre estudiantes de tercer ciclo de Educación Primaria, esta investigación se realizó bajo un paradigma interpretativo ya que:

El paradigma interpretativo enfatiza la comprensión e interpretación de la realidad educativa desde los significados de las personas implicadas en los contextos educativos y estudia sus creencias, intenciones, motivaciones y otras características del proceso educativo no observables directamente ni susceptibles de experimentación (Albert, 2007, p. 27).

Además, la interacción entre investigador e informante será constante y nos centramos en la descripción y comprensión de lo que es único y particular de los estudiantes más que lo generalizable.

#### **4.1.2 Tipo de investigación**

En la investigación educativa es importante que haya una relación coherente entre el paradigma de investigación y el tipo de investigación de dicho estudio, es por esto que esta investigación se asienta en una metodología de investigación cualitativa.

Entendemos por investigación cualitativa la definición propuesta por Sandín Esteban (2003):

Es una actividad sistemática orientada a la comprensión en profundidad de los fenómenos educativos y sociales, a la transformación de prácticas y escenarios socioeducativos, a la toma de decisiones y también hacia el descubrimiento y desarrollo de un cuerpo organizado de conocimientos (en Albert, 2007, p. 147).

En los estudios cualitativos, es importantes que el investigador desarrolle conceptos, interprete y comprenda partiendo de pautas de los datos, y no recogiendo datos para evaluar modelos, hipótesis o teorías preconcebida, que vea al informante desde una perspectiva holística y no reducirlo a una variable, sino considerarlo como un todo (Taylor y Bogdan, 2015).

## **4.2 Diseño de las actividades**

*...volar tan alto como la montaña...*

### **4.2.1 La calculadora descompuesta**

En los inicios de esta investigación se pensó en utilizar una calculadora básica o de bolsillo (calculadoras que solo tienen las teclas numéricas y las teclas de las operaciones básicas), y extraerle algunas teclas para el diseño de las actividades que se tenían en mente y adaptarlas a esta herramienta modificada. Afortunadamente en ese entonces el grupo investigador tuvo conocimiento de la existencia de una aplicación en versión gratuita y paga en la Play Store llamada *The Broken Calculator*.

Después de examinar las características de esta aplicación y darnos cuenta que cumplía con lo que se buscaba con la calculadora básica los investigadores decidimos que esta aplicación hiciera las veces de la calculadora descompuesta, ya que esta aplicación tiene la característica especial de que se puede bloquear cualquier tecla. En ella pudimos crear las actividades (ejercicios aritméticos y problemas), que consideramos ayudarían al niño a desarrollar ciertas habilidades de Cálculo Mental. Desafortunadamente en la actualidad, la aplicación ya no se encuentra disponible en la Play Store en ninguna de las dos versiones, pero el grupo investigador cuenta con el archivo APK (Archivo Ejecutable de Aplicaciones para Android).

### **4.2.2 Actividades propuestas para desarrollar habilidades de cálculo mental con la calculadora descompuesta**

En la siguiente tabla, se muestran las actividades que fueron aplicadas a los informantes del estudio y se describe cada una a continuación. Las actividades están propuestas de la siguiente manera: el Reto, indica el número o resultado de la operación al que se pretende llegar, las Teclas a utilizar, son las teclas que el niño puede manipular, las demás están bloqueadas, con la Respuesta esperada, creemos que el niño puede desarrollar la estrategia que se indica y con las otras respuestas posibles, eventualmente el niño no desarrolle la estrategia que esperamos, pero tal vez pueda desarrollar otra no menos importante de la que se pretende que desarrolle. Más adelante se describen cada una de las actividades y el propósito de cada una.

Tabla 5

*Actividades para desarrollar habilidades de Cálculo Mental con la calculadora.*

<b>Actividades</b>	<b>Respuesta</b>	<b>Otras respuestas</b>	<b>Estrategia que se</b>
<b>Reto</b>	<b>Teclas</b>	<b>esperada</b>	<b>pretende desarrollar</b>
	<b>a</b>		
	<b>utilizar</b>		
<b>86</b>	0, 1, 5, +	50+10+10+10+5+ 1 55+10+10+10+1	15+15+15+15+15+10+1, 10+10+10+10+10+10+1 0+10+5+1
			- Salto de línea - Conteo
<b>17</b>	1, 8, +	8+8+1	8+1+1+1+1+1+1+1+1
			- Doblar el número menor +1
<b>50</b>	2, 5, +	25+25	5+5+5+..., 2+2+2+..., 2+5+2+5+...
			- Dobles (doblar el número de en medio)
<b>97</b>	0, 1, 4, 5, +	50+40+5+1+1 50+40+4+1+1+1	55+41+1
			- Descomposición
<b>61</b>	0, 3, 4, +, -	30-3+34 40-3-3+30-3	
			- Holística (aproximación a decenas cercanas)
<b>17+18</b>	1, 7, +	17+17+1	7+7+7+7+7, 17+11+7, 11+11+11+1+1
			- Doblar el número menor +1
<b>84+86</b>	5, 8, +	85+85	55+55+55+5
			- Dobles (doblar el número de en medio)
<b>38+45</b>	0, 3, 4, 5, 8, +	30+40+8+5 8+5+40+30	35+48 33+40+5+5 50+30+3 holística
			- Descomposición Restricción: no colocar las mismas cantidades que están en la operación.

Actividad # 1: Esta actividad consistió en que el estudiante llegara al número 86 y las teclas de la calculadora que se podían utilizar eran las teclas numéricas 0, 1 y 5, junto con la tecla de la operación suma. Con esta actividad se pretende que el estudiante, más allá de identificar una estrategia de conteo, pueda resolverla utilizando la estrategia de salto de línea para llegar a una respuesta de manera más comprensiva y eficaz.

Actividad # 2: En esta actividad la idea es que el estudiante llegue al número 17, y las teclas que la calculadora le permite utilizar son, las de los números 1 y 8 y la tecla de la suma. La idea de esta actividad, es que el estudiante logre descomponer el número 17 en  $16 + 1$  y además doble el número 8 y luego sume 1 para resolverla. Realizando lo esperado se estaría utilizando posiblemente la estrategia de doblar un número.

Actividad # 3: En esta actividad lo que se plantea es que el estudiante pueda llegar al número 50 y las teclas a utilizar son la de la suma y las de los números 2 y 5. La idea es que el estudiante utilice la estrategia de doblar el número 25 y de esta manera resuelva la actividad en solo dos pasos.

Actividad # 4: Esta actividad consistió en que el estudiante llegara al número 97 utilizando las teclas numéricas que podía utilizar eran, la del 0, 1, 4 y 5 y además la tecla de la operación de la suma. La idea consistía en que el estudiante pudiera utilizar la descomposición utilizando las teclas que se le permitían para llegar a la solución de la actividad.

Actividad # 5: En esta actividad se le requirió al estudiante que llegara al número 61 y las teclas que podía utilizar eran la de los números 0, 3 y 4, y la de la suma y la resta. Con esta actividad se pretendía que el estudiante aproximara las cantidades a las decenas más cercanas, es decir, que el estudiante pueda desarrollar consciente o inconscientemente la estrategia holística para hacer cálculos mentales.

Actividad # 6: En esta actividad, se le pide al estudiante resolver la operación  $17+18$  mentalmente, y luego de que logre obtener un resultado, llegar a este con las teclas 1 y 7 y además utilizando la operación de la suma. La estrategia que se pretendía que el estudiante

podiera identificar para utilizar en esta actividad, es la de doblar un número, pero estaba en todo su derecho de utilizar la que le pareciera más adecuada o la que mejor dominara.

Actividad # 7: En esta actividad, en principio el estudiante debe realizar la suma,  $84+86$  mentalmente para luego encontrar con las teclas 5, 8 y la tecla de suma el resultado de la operación anterior. La idea es que identifique la misma estrategia anterior de dobles, pero esta vez el número ideal a doblar es el que se encuentra en medio de los dos que se están sumando.

Actividad # 8: En esta actividad, el estudiante en primer lugar debe realizar la suma  $38+45$  mentalmente y luego encontrar con las teclas del 0, 3, 4, 5, 8 y la de la suma el resultado obtenido en la operación que realizó. La idea es que con las teclas que se le permite utilizar haga uso de la estrategia de descomposición que es la más adecuada para esta actividad, aunque se pueden utilizar otras.

### **4.3 Aplicación de las actividades**

*...más sin olvidar los lazos que no atan...*

#### **4.3.1 La entrevista clínica**

Para la recogida de los datos se utilizaron entrevistas clínicas, en el sentido que menciona Ginsburg (1997),

La entrevista clínica se puede utilizar para examinar diferentes aspectos del pensamiento del niño (o del adulto), incluida la comprensión de los conceptos básicos de número, ideas complejas sobre la realidad, el juicio moral y las soluciones para los ítems de las pruebas de C.I. La entrevista clínica puede ser utilizada por el investigador interesado en el niño ejemplar o por el médico que intenta comprender al niño individualmente (p. 38-39).

Las entrevistas permitieron a través de la observación cuidadosa e interpretando lo que se observaba en el dialogo con los informantes, la identificación de los diferentes procesos y estrategias de Cálculo Mental que utilizaron para el desarrollo de cada una de las actividades.



### **4.3.2 Los informantes**

Los informantes del estudio fueron seis estudiantes de 6º grado educación básica primaria, cuyas edades oscilan entre 10 y 12 años, matriculados en el Colegio San Ángel de la Ciudad de Puebla, México, la institución es de carácter privada. Los informados fueron elegidos al azar en un grupo de 46 estudiantes.

### **4.3.3 Toma de datos**

Para toma de datos, debido a que los informantes fueron estudiantes menores de edad inicialmente se solicitó un permiso antes las directivas de la institución donde se les notificó los propósitos de la investigación y la confidencialidad de la identidad de los participantes.

Para el desarrollo y la toma de la información, antes de que el informante iniciara a desarrollar las actividades se le instruyó acerca de cómo utilizar la calculadora y se le explicó cada una de las funciones de ésta. Al informante se le advirtió que debía desarrollar cada tarea en la calculadora y, además, tenía que expresar verbalmente y de forma detallada todo lo que pensaba o imaginaba mentalmente para llegar a la solución de cada actividad y de esta manera quedar registrado en la grabadora. Todos los informantes fueron evaluados individualmente en un lugar aislado para evitar la contaminación auditiva.

Cada entrevista se grabó en una cinta de audio con un promedio de veinte minutos cada una. Estas actividades fueron diseñadas para que el estudiante al momento de enfrentarse a ellas pudiera utilizar una estrategia de cálculo específica. Para lograr que el estudiante utilizara una estrategia específica, las cantidades numéricas se seleccionaron de modo que cada una cumpliera con varias propiedades. Además de esto, debido a que las actividades fueron presentadas en una Tableta integrada con pantalla táctil con la que el informante interactuaba con los dedos, la pantalla de dicho instrumento fue grabada, quedando registrados todos los movimientos o procedimientos que el estudiante realizaba.



## Capítulo 5

### ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

*...la leche que mamaste, lo aprendido en casa...*

Dentro de este apartado presentamos los datos recolectados de los seis participantes de la investigación, la descripción de cada una de las entrevistas hechas a los participantes; presentamos una síntesis de los resultados de todas las actividades y finalmente un análisis general de las entrevistas con respecto a las actividades.

#### 5.1 Descripción de las entrevistas de los estudiantes

**Actividad # 1:** Llegar al número 86, utilizando las teclas de la calculadora 0, 1 y 5, junto con la tecla de la operación suma.

##### Respuestas de los estudiantes

**E1:** [primer intento]

*Sumo 5 más 5 más 5 más 5... [Llega hasta 20]... más 10 más 10 más 5... [Comprueba que ha llegado al 45]...más 55 [se equivoca al querer escribir 5, se da cuenta de su error y vuelve a empezar].*

[segundo intento]

*5 más 5 más 5 más... [Sigue sumando de 5 en 5 hasta llegar a 35]... más 55... [Vuelve a cometer el mismo error sin darse cuenta y sigue sumando]... más 10 más 10, ya me pasé, no sé por qué [se percata de su error y vuelve a empezar].*

[tercer intento]

*10 más 10 más 10 más 10... [Se percata que está en 40]... más 5 más 5 más... [Suma de 5 en 5 hasta darse cuenta que está en 70]... más 10 más 5 más 1, ¡listo! [Los 15 que le faltan los descompone en 10+5+1].*

**E2:** [primer intento]

*1 más 5 más 5 más 5 más... [Sigue sumando de 5 en 5 hasta llegar a 46]... más 50... [No se percata que se ha pasado]... más 10, mmm creo que me pasé, no sé por qué [se percata de su error y vuelve a empezar].*

[segundo intento]

*Creo que ya se una, 50 más 5 más 5 más 5 [borra el resultado y vuelve a empezar].*

[tercer intento]

*Otra vez, 55 más 5 más 5... [Suma de 5 en 5 hasta llegar a 85 y completa con 1] más 1, ¡listo!*

**E3:** [primer intento]

*Sumare 55 más 10 más 10 más 10 más 1, ¡listo! [No se le complica realizar la actividad y la resuelve muy rápido].*

**E4:** [primer intento]

*Sumaria 50 más 10 más 15 más 5 más 5 más 1, ¡ya!*

**E5:** [primer intento]

*Sumo 5 más 5 más 5 más... [Sigue sumando de 5 en 5 hasta 85]... más 1.*

**E6:** [primer intento]

*Eh, [piensa un poco] 5 más 10 más 15 más 5 más 1 [suma hasta llegar a 36]... más 50 [luego le suma 50].*

**Actividad # 2:** Llegar al número 17, y las teclas que la calculadora le permite utilizar son, las de los números 1 y 8 y la tecla de la suma.

**Respuestas de los estudiantes**

**E1:** [primer intento]

*8 más 8 más 1, [agrega]... si pudiera multiplicar, multiplicara 8 por 2 y después le sumo 1.*

**E2:** [primer intento]

*8 más 8, es 16, más 1 son 17 ¡listo!*

**E3:** [primer intento]

*8 más 8 más 1, ¡listo 17!*

**E4:** [primer intento]

*A ver, 8 más 1 son 9... [Piensa]... más 8, 17. [Agrega]... conté como no había 9, 9 y 9 son 18 y 18 menos 1 son 17.*

**E5:** [primer intento]

*8 más 8 más 1, [agrega]... sume dos veces 8 y 1 para llegar a 17.*

**E6:** [primer intento]

*8 más 8 más 1, ¡listo!*

**Actividad # 3:** Llegar al número 50 y las teclas a utilizar son la de la suma y las de los números 2 y 5.

**Respuestas de los estudiantes**

**E1:** [primer intento]

*5 más 5 más 5 más...* [Suma de 5 en 5 hasta llegar a 35 y luego empieza a sumar de 2 en 2]... *más 2 más 2 más...* [Hasta llegar a 47]... *más 5 más 2, no me salió* [se da cuenta que se pasó y vuelve a empezar].

[segundo intento]

*Otra vez, 2 más 2 más 2 más...* [Sigue su conteo de 2 en 2 hasta 30 y cambia el conteo de 5 en 5]... *más 5 más 5 más...* [Hasta 50].

**E2:** [primer intento]

*5 más 5 más 5 más...* [Sigue contando de 5 en 5]... *más 5 más 5, es 50.* [Agrega]... si estuviera la multiplicación, multiplicara 5 por 10.

**E3:** [primer intento]

*25 más 25 y da 50, ¡estaba fácil!*

**E4:** [primer intento]

*25 más 25 es 50, porque la mitad de 50 es 25.*

**E5:** [primer intento]

*5 más 5 más 5 más...* [Sigue contando de 5 en 5]... *más 5 más 5, son 50.*

**E6:** [primer intento]

*5 más 5 más 25 más 5 más 5 más 5, [agrega]... pude hacerlo también 25 más 25.*

**Actividad # 4:** Llegar al número 97 utilizando las teclas numéricas 0, 1, 4 y 5 y además la tecla de la operación de la suma.

**Respuestas de los estudiantes**

**E1:** [primer intento]

*5 más 5 más 5 más 5 más 4 más 1* [lega a 25 y borra para volver a empezar]

[segundo intento]

*5 más 5 más 5 más 5 más...* [Sigue el conteo de 5 en 5 hasta llegar a 30 y luego le suma 4 y después 1 y posteriormente vuelve a retomar el conteo de 5 en 5]... *más 4 más 1 más 5 más 5... más 1 más 1 y es 97.* [continua el conteo hasta 95 y luego suma 1 dos veces para llegar al 97]

**E2:** [primer intento]

*sumare de 5 en 5, [empieza] 5 más 5 más 5 más [...]* *más 1 más 1 igual a 97* [llega hasta 95 y luego le suma dos veces 1 para llegar a 97]

**E3:** [primer intento]

[piensa] *45 más 10 igual a 55, más 50* [piensa y expresa] *ya me equivoqué*

[segundo intento]

[Vuelve a empezar] *50 más 40 son 90, más 4 más 1 más 1 más 1 son 97 ¡listo!*

**E4:** [primer intento]

*A ver 45 más 45 más 5 más 1 más 1, es 97, porque la mitad de 90 es 45.*

**E5:** [primer intento]

*Seguiré utilizando la táctica del 5, 5 más 5 más 5 más...* [Lleva hasta 95]... *más 5, igual 95, más 4,* [piensa un poco] *no ya me pasé.*

[segundo intento]

[Vuelve a empezar utilizando la misma estrategia] *5 más 5 más 5 más...* [Sigue hasta 95]...  
*más 5 más 5, son 95, más 1 más 1, 97.*

**E6:** [primer intento]

*45 más 45 son 90, más 1 más 1, son 97.*

**Actividad # 5:** Llegar al número 61 y las teclas que podía utilizar eran la de los números 0, 3 y 4, y la de la suma y la resta.

**Respuestas de los estudiantes**

**E1:** [primer intento]

*4 más 4 más 4 más...* [Continua su conteo de 4 en 4 hasta 40 y piensa un poco y continua]...  
*más 4 más 4 más...* [Continua hasta 60 y se da cuenta que no tiene 1 para llegar al 61 y piensa un poco y resta 3 y suma 4]... *más 4 más 4, son 60, menos 3, 57* [piensa] *más 4, son 61.*

**E2:** [primer intento]

*4 más 4 más 4 más...* [Continua el conteo de 4 en 4 hasta 64]... *más 4 más 4, 64,* [y resta 3] *menos 3, son 61.*

**E3:** [primer intento]

*43 más 4 son 47, más 4, 51, más 3 más 30, ¡no puede ser!* [Se da cuenta que se ha pasado demasiado y se desespera. Vuelve a empezar].

[segundo intento]

[Escribe] *43 más 40* [borra y vuelve a empezar]. *30 más 40 es igual a 70, menos 4, es 66, más 3, 69, menos 4 menos 4, son 61.*



**E4:** [primer intento]

*43 más* [piensa, borra y empieza de nuevo].

[segundo intento]

*34 más 34, 68, menos 3, 65, menos 4, son 61.*

**E5:** [primer intento]

*4 más 4 más 4 más...* [Continua el conteo de 4 en 4 hasta 60]... *menos 3 son 57, más 4 son 61.*

**E6:** [primer intento]

*43 más 4, 47, más 3, 50, más 34 son 84, me pase, era menos voy a repetirla* [vuelve a empezar]. [segundo intento]

*30 más 30, 60, más 4, 64, menos 3, 61 ¡listo!*

En las siguientes actividades, cada una se propuso fue a manera de operación en la que el estudiante debe resolverla mentalmente y luego utilizar una estrategia con los números que le permitiera la calculadora para llegar al resultado de la operación. Las respuestas de los estudiantes en esta sección de actividades están presentadas en primer lugar, en la forma de como hicieron para resolver la operación mentalmente y luego cómo hicieron para obtener el resultado de esa operación con la ayuda de la calculadora.

<p><b>Actividad # 6:</b> Resolver la operación <math>17+18</math> mentalmente, y luego de que logre obtener un resultado, llegar a éste con las teclas 1 y 7 y además utilizando la operación de la suma.</p>
<p><b>Respuestas de los estudiantes</b></p>
<p><b>E1:</b> [primer intento]  <i>Sumo 10 más 10, es 20, más 7, más 7, son 34, más 1 es igual a 35 [operación que realiza mentalmente]. Ahora escribo 17 más 17 más 1 son 35 [en la calculadora].</i></p>
<p><b>E2:</b> [primer intento]  <i>7 más 7, 14 y 1 son 15, 5 y ese uno aumenta al de al lado [a las decenas], uno y uno, dos, y uno tres, son 35. [En la calculadora] 7 más 7 más 7 más 7 más 7, son 35.</i></p>
<p><b>E3:</b> [primer intento]  <i>Sumo 10 más 10, 20, más 8, 28, más 7, 35. [En la calculadora] 17 más 17, 34, más 1 son 35.</i></p>
<p><b>E4:</b> [primer intento]  <i>Sumo 17 más 10, 27, más 8 son 35. [En la calculadora] 17 más 17, 34, más 1 son 35.</i></p>
<p><b>E5:</b> [primer intento]  <i>8 más 7, 15, mentalizo 5 y llevo 1; 1 más 1, dos, y 1, 3; y el 5, 35. [En la calculadora] 7 más 7 más 7 más 7, son 28, más 1 más 1 más... son 35 [suma de 1 en 1 hasta 35].</i></p>

**E6:** [primer intento]

*10 más 10 son 20, más 8, 28, más 7 son 35. [En la calculadora] 17 más 17 más 1, son 35.*

**Actividad # 7:** Realizar la suma,  $84+86$  mentalmente para luego, encontrar con las teclas 5, 8 y la suma el resultado de la operación anterior.

### Respuestas de los estudiantes

**E1:** [primer intento]

*80 y 80, 160 y 10 [la suma de  $4+6$ ], 170. [Con la calculadora] 8 más 8 más 8 más... [Así de 8 en 8 hasta llegar a 40, luego...] más 5 más 5... [Cuatro veces para completar 20 y llegar a 60, luego...] más 8 más 8 más... [Nuevamente cinco veces 8, para completar 40 más y llegar a 100, luego...]*

**E2:** [primer intento]

*4 más 6 es 10; y 8 y 8 16 y el 1 son 170. [Con la calculadora] 8 más 8 más 8 más... [Continua la sumatoria de 8 en 8 hasta llegar a 160, luego...] más 5 más 5, son 170 que fue lo que me dio.*

**E3:** [primer intento]

*Sumo 80 más 80, son 160, más 6 más 4 que da 10, y los 160 son 170. [con la calculadora empieza con...] 85 más 8 [piensa, borra y empieza de nuevo]*

[segundo intento con la calculadora]

*85 más 58 son 143, más 58, son 201, no ya me pasé [borra y vuelve a empezar], 85 más 58 son 143, más 8 más 8 más 8 son 167, pero no me da [se da cuenta que no puede llegar y vuelve a empezar].*

[tercer intento con la calculadora]

*85 más 58, 143, más 5 más 5 más 5 más 5 más 5 son 168, pero no me da [se desespera y decide no intentarlo más].*

**E4:** [primer intento]

*Simplemente sumo 4 más 6, 10, el 1 se fue a los ochos, y 8 más 8, 16, y el 1 son 17, son 170.  
[Con la calculadora] 85 más 85 son 170.*

**E5:** [primer intento]

*6 más 4, 10, cero y llevo 1, 8 y 8 16 y 1 que llevaba 17, ah! Ya me equivoqué, vamos a repetir  
[estaba bien].*

[segundo intento]

*6 más 4, 10, cero y llevo 1, 8 y 8 16 y 1 que llevaba 17, son 170. [Con la calculadora, dice...],  
vamos a repetir lo mismo [escribe...] 8 más 8 más 8 más... [Continua el conteo de 8 en 8 hasta  
160, luego] más 5 más 5, son 170.*

**E6:** [primer intento]

*80 más 80 son 160, más, 4 más 6 son 10, y 160 para 10 son 170. [Con la calculadora  
escribe...] 85 más 85 son 170, porque el doble de 85 es 170.*

**Actividad # 8:** Realizar la suma  $38+45$  mentalmente y luego encontrar con las teclas del 0, 3, 4, 5, 8 y la de la suma el resultado obtenido en la operación que realizo.

### **Respuestas de los estudiantes**

**E1:** [primer intento]

*30 más 40 son 90 [no se da cuenta de su error] más 8, son 98, más 5, son 113, no! Son 103  
[empieza en la calculadora] 40 más 8 más 8 más 8 más 8 más 8 [llega a 80] más 5 más 5 más 5  
más 5 [llega a 100] más 3 [se da cuenta que la calculadora no le verifica el resultado que había  
considerado correcto, pero continúa sumando] más 8 más 4, no me salió.*

**I:** *vuelve a empezar para ver por qué no te salió.*

<p>[segundo intento]</p> <p>Son 90 [al sumar 30 +40] más 8, 98, y 5, 103 [empieza en la calculadora] 8 más 8 más... [Así hasta 80 y luego...] más 5 más 5... [Hasta 100] más 3, pero ¡por qué no me sale! [Refiriéndose a que la calculadora no valida haber llegado al resultado].</p> <p><b>I:</b> intenta empezar de nuevo desde la suma a ver si está pasando algo.</p> <p>[tercer intento]</p> <p>38 más 45 son... 30 más 40, 70, 78 [al sumarle las 8 unidades del 38] más 5 son 83, [empieza nuevamente en la calculadora] 8 más 8 más 8 más... [Hasta 40] más 5 más 5 más... [Así 8 veces 5 para completar 80 y luego sumar 3] más 3 ¡listo!</p>
<p><b>E2:</b> [primer intento]</p> <p>8 más 5 son 13, y 4 más 3, siete, y uno, ocho, son 83. [Con la calculadora escribe...] 8 más 8 más 8 más... [10 veces 8, hasta llegar a 80 y luego suma tres.] ... más 3.</p>
<p><b>E3:</b> [primer intento]</p> <p>30 más 40, 70, más 8 son 78, más 5, 83. [En la calculadora] 40 más 40 más 3, 83.</p>
<p><b>E4:</b> [primer intento]</p> <p>Sumo 8 más 5, 13, el 1 se va al 3 y al 4, 3 y 4 son 7 y el 1 8, son 83. [En la calculadora] 80 más 3 son 83.</p>
<p><b>E5:</b> [primer intento]</p> <p>8 más 5, 13, tres y llevo 1, siete y uno ocho, 83. [En la calculadora] 8 más 8 más 8 más... más 3 [continúa el conteo de 8 en 8 hasta 80 y luego completa con 3].</p>
<p><b>E6:</b> [primer intento]</p> <p>30 más 40 son 70, más 5, 75, más 8, 83. [En la calculadora] 40 más 40, son 80, más 3, 83.</p>

## 5.2 Análisis general de las repuestas de los estudiantes

*...pues son tus raíces, tu génesis, tus entrañas.*

Desde el inicio de las actividades, la calculadora ha demostrado ser una herramienta que de cierta manera y con cada una de las actividades pensadas, puede llegar a convertirse en una herramienta útil para desarrollar ciertas estrategias consciente o inconscientemente en los estudiantes, y a medida que ellos interactúan con esta herramienta, poco a poco su razonamiento evoluciona hasta cierto punto. En la actividad número 1, nos dimos cuenta que a medida que el estudiante comete errores para llegar a la solución de esta actividad, además de que éstos los puede constatar de manera inmediata, que es otra virtud de esta herramienta, se percata que puede utilizar otras teclas o números distintos con las que inicialmente intentó llegar a solución, abriendo camino esto a que descubra una nueva estrategia, más óptima y que le permita llegar a la solución de la actividad, por ejemplo, en la actividad número 1 el estudiante **E1** resuelve la actividad de la siguiente manera:

*Sumo 5 más 5 más 5 más 5... [Llega hasta 20]... más 10 más 10 más 5... [Comprueba que ha llegado al 45]...más 55 [se equivoca al querer escribir 5, se da cuenta de su error y vuelve a empezar].*

*5 más 5 más 5 más... [Sigue sumando de 5 en 5 hasta llegar a 35]... más 55... [Vuelve a cometer el mismo error sin darse cuenta y sigue sumando]... más 10 más 10, ya me pasé, no sé por qué [se percata de su error y vuelve a empezar].*

*10 más 10 más 10 más 10... [Se percata que está en 40]... más 5 más 5 más... [Suma de 5 en 5 hasta darse cuenta que está en 70]... más 10 más 5 más 1, ¡listo! [Los 15 que le faltan los descompone en  $10+5+1$ ].*

Mientras que el estudiante **E2** responde de esta manera:

*1 más 5 más 5 más 5 más... [Sigue sumando de 5 en 5 hasta llegar a 46]... más 50... [No se percata que se ha pasado]... más 10, mmm creo que me pasé, no sé por qué [se percata de su error y vuelve a empezar].*

*Creo que ya se una, 50 más 5 más 5 más 5 [llega a 65, borra el resultado y vuelve a empezar].*

*Otra vez, 55 más 5 más 5... [Suma de 5 en 5 hasta llegar a 85 y completa con 1] más 1, ¡listo!*

Aunque es notorio que el estudiante trae consigo una estrategia de conteo utilizando un *punte* de cierta cantidad, empezando por una cantidad más pequeña y luego aumentándola, notamos que a medida que él interactúa con la calculadora, va descubriendo una manera más óptima, que podríamos llamarla otra estrategia, para llegar al resultado que se le está pidiendo.

En cuanto a las actividades número 2 y 3, notamos que la calculadora favorece la creación de situaciones de aprendizaje que ayudan en una mejor comprensión de los conceptos matemáticos. Por ejemplo, el estudiante **E1** responde a lo que plantea la actividad 2 de la siguiente manera:

*8 más 8 más 1, [agrega]... si pudiera multiplicar, multiplicara 8 por 2 y después le sumo 1.*

Y a la actividad 3 responde el estudiante **E2**: *5 más 5 más 5 más... [Sigue contando de 5 en 5]... más 5 más 5, es 50. [Agrega]... si estuviera la multiplicación, multiplicara 5 por 10.*

Por lo tanto, pone en manifiesto a los estudiantes que la suma puede verse como una suma abreviada (dos veces 8 u ocho veces 2 para E1 y cinco veces 10 o diez veces 5 para E2). Además, los estudiantes pueden aplicar técnicas que permiten el agrupamiento de resultados parciales, **E4**: *A ver, 8 más 1 son 9... [Piensa]... más 8, 17. [Agrega]... conté como no había 9, 9 y 9 son 18 y 18 menos 1 son 17:  $9 + 8 = 9 + (8+1) -1 = (9 + 9) -1 = 18 - 1 = 17$ , (propiedad asociativa y distributiva), y realizar modificaciones en esa estrategia para llegar al número 17 utilizando la suma. Visto de esta manera, el problema se transforma en una situación distinta a la inicial.*

Por otro lado, aunque las actividades estaban propuestas para que se desarrollara una estrategia específica, algunos de los estudiantes optaron por acudir a contar una cantidad

específica varias veces, a lo que se le conoce como estrategia de conteo o de *punteo* con respecto a cualquier cantidad, tal como lo señalan varios autores, dándonos evidencia de la predilección y dominio que tienen los estudiantes sobre esta estrategia. Por ejemplo, en la actividad número 4 donde se le planteaba la pregunta de ¿Cómo llegarías al 97 utilizando el 0, 1, 4, 5 y la suma?

El estudiante **E1** responde:

*5 más 5 más 5 más 5 más... [Continua su conteo de 5 en 5 hasta 95 y luego completa sumando dos veces 1] más 5 más 5, más 1 más 1, por fin [dice], es 97.*

No queremos decir que esta estrategia no esté bien o no sea la correcta, por el contrario, es una estrategia muy importante al igual que las otras y, además, que el estudiante trae consigo casi de manera natural, pero que cuando se trata de operaciones con cantidades muy altas o extensas se les complicaría resolverlas utilizando esta estrategia.

En cuanto a las respuestas de los estudiantes para la actividad número 5 se observó que la calculadora favorece los métodos no estandarizados que suelen ser más informales (**E2**: *4 más 4 más 4 más... [continúa el conteo de 4 en 4 hasta 64]... más 4 más 4, 64, [y resta 3] menos 3, son 61*), variables (**E3**: *30 más 40 es igual a 70, menos 4, es 66, más 3, 69, menos 4 menos 4, son 61*) y flexibles (**E6**: *30 más 30, 60, más 4, 64, menos 3, 61 listo!*), y dependen del tipo y tamaño de los números que se consideran, de las habilidades de quien está resolviendo el problema y además, el estilo de abordar los cálculos.

Es evidente que son pocos los estudiantes que poseen estrategias diferentes a las utilizadas en la enseñanza tradicional como una forma de hacer cálculos mentales, es decir, utilizan la manera de hacer operaciones verticales para imaginarse la actividad que se les propone ubicando las cantidades una sobre otra y operar de esta manera, *llevando decenas y centenas*. Por ejemplo, en la actividad número 7, en donde se le pide al estudiante sumar  $84+86$ , el estudiante **E2** responde de la siguiente manera:

*4 más 6 es 10. 8 y 8, 16, y el 1, 17, entonces son 170.*



Y para llegar a la solución en la calculadora hace lo siguiente:

*8 más 8 más 8 más... [Continua la sumatoria de 8 en 8 hasta llegar a 160, luego...] más 5 más 5, son 170, que fue lo que me dio, [agrega].*

Esta manera de resolver las operaciones mentalmente probablemente se relaciona con el poco tiempo que normalmente se le dedica a enseñar estrategias para resolver operaciones aritméticas.

Algunas de las actividades cumplieron con el objetivo propuesto, permitieron que el estudiante entendiera una estrategia, tal vez de manera inconsciente, pero dando a entender que la calculadora puede llegar a desarrollar ciertas estrategias para realizar cálculos mentales. Un claro ejemplo sería en la actividad número 4, donde se le pregunta al estudiante ¿Cómo llegarías al 97 utilizando el 0, 1, 4, 5 y la suma?

El estudiante **E3** responde:

*50 más 40 son 90, más 4, más 1, más 1, más 1, 97.*

Y las respuestas de los estudiantes **E4** y **E6**, quienes respondieron conjuntamente:

*45 más 45 son 90, más 5 más 1 más 1.*

Aunque esta descomposición del número 97 pareciera sencilla, resultó ser una de las que más dificultad les representó a estos dos estudiantes. Fue interesante notar que no recurrieron a la estrategia que la mitad de los estudiantes utilizaron, la de conteo, o descomponer el 97 en 19 veces 5 más 2 veces 1, que, aunque pareciera más compleja es una de las más sencillas y más comunes para los estudiantes.

Ciertas actividades, como las de las operaciones, además de dejar ver la estrategia mental que están utilizando para desarrollar el cálculo, permiten al estudiante que aprenda una estrategia para llegar a cierta cantidad, lo cual es muy importante para tenerlas en cuenta para desarrollar nuevas actividades.

Es importante dejar claro que estas actividades están pensadas para desarrollar habilidades mentales de cálculo en la adición y en la sustracción, principalmente en la primera, y si se quiere pensar en otras operaciones, es preciso replantear las actividades que involucren estas operaciones en las que se desea enfatizar.

## CONCLUSIONES

*Hay que renovarse... pero recordar que, ...*

Finalmente, en este apartado se presentan las conclusiones generales de la investigación, distribuidas en los principales aportes que se hacen a la enseñanza en la escuela del cálculo mental de manera general y las consideraciones finales que tratan específicamente de dar respuesta a las preguntas de investigación del trabajo mismo.

### **Aportes a la enseñanza y el aprendizaje del cálculo mental**

Investigaciones sobre el Cálculo Mental han demostrado que se trata de un proceso de razonamiento que otorga grandes beneficios a sus usuarios. Teniendo en cuenta las actividades propuestas a los niños y lo evidenciado por ellos en el desarrollo de la actividades, estamos convencidos de que el Cálculo Mental es un apoyo muy importante en clase de matemática, y de que su puesta en práctica en las aulas, además de favorecer los aprendizajes del valor posicional, el sistema de numeración decimal, las propiedades de las operaciones, etc., posibilita una enseñanza más fluida de los contenidos curriculares de matemáticas, ya que la ejecución automática de los cálculos sencillos permite que los estudiantes puedan pensar en los conceptos que se presenten con mayor autonomía y rigor.

A partir de la revisión documental que se hizo, es importante mencionar que el Cálculo Mental es poco utilizado en la práctica educativa y que en los libros de texto de matemáticas no es considerado con la importancia que de verdad se merece, es hora de que esto se replantee y se le otorgue una relevancia mayor a este ámbito matemático, ya que brinda grandes beneficios a la enseñanza y aprendizaje de manera general al estudio de la matemática como lo mencionan muchos autores que han trabajado el Cálculo Mental (e.g. Gálvez et al. 2011; Parra, 1994; Sowder, 1989; Ortiz, 2009; Wolman, 2006).

El Cálculo Mental es un tema con poco interés educativo, ya que, aunque hay diferencias en cuanto a la importancia que se le debe otorgar en el currículo, cada vez es incluido en las nuevas propuestas educativas curriculares (SEP, 2006 y SEP, 2016). El enfoque actual no es memorístico, rápido, utilitario o agilizador de la mente como se veía muchos años atrás, sino que

actualmente está basado en ideas que intentan minimizar el énfasis tradicional del cálculo algorítmico y/o escrito para otorgárselo a un cálculo flexible (mental, estimativo, con calculadora, o con algoritmos estándar según sea conveniente). Este nuevo enfoque sostiene que el Cálculo Mental juega un papel importante en la adquisición de los conceptos relacionados con operaciones, con la profundización de los conocimientos matemáticos intuitivos antes de que se formalicen y como medio para promover la reflexión en los estudiantes, la evaluación y, además, para reorientar el trabajo del profesor.

Las opiniones difundidas en la literatura señalan que los aportes que ofrece el Cálculo Mental a la enseñanza y aprendizaje son los siguientes:

- ◆ Es un medio excepcional para incrementar la comprensión de los números en los niños individualizándolos y relacionándolos con diferentes formas de escribirlos y conociendo como están compuestos de sumandos y factores (Lethielleux, 2005).
- ◆ Es de utilidad en la comprensión y desarrollo de los equivalentes escritos (Cockcroft, 1985), pudiendo llevar al descubrimiento de pautas, propiedades y estructuras de nuestro sistema numérico (Gómez, 1994).
- ◆ Asimismo, se puede usar para el diagnóstico de la comprensión infantil del número y el valor posicional y para comprobar las concepciones de los estudiantes ligados a la numeración decimal y a las propiedades de las operaciones (Sowder, 1989).
- ◆ También es un dominio para introducir de modo informal ideas matemáticas que luego se desarrollarán más en profundidad (Cockcroft, 1985), para trabajar la transición del lenguaje vertical reglado o de columnas de la aritmética al horizontal simbólico del álgebra (Gómez, 1988) y, posiblemente, para desarrollar destrezas de resolución de problemas.

Por todo esto, aunque todas estas ideas no coincidan en cuanto a la finalidad de la enseñanza del Cálculo Mental, se puede decir, por lo menos, que el Cálculo Mental es muy importante desde el punto de vista de la enseñanza y aprendizaje del pensamiento aritmético, y en esto último sí es algo en lo que concuerdan los autores en cuanto a la relevancia que debe ocupar el Cálculo Mental en la educación básica obligatoria.

## Consideraciones finales

*...si no hay raíces, tampoco habrá alas.*

Tratando de dar respuesta a la primera pregunta de investigación, creemos que utilizando una herramienta tecnológica (celulares/tablets), con una aplicación poco convencional que pueda hacer las veces de calculadora (*The broken calculator*), pero con características especiales que puedan bloquear o *dañar* teclas, para a través de la interacción del niño y la máquina, y las actividades propuestas, el niño pueda explorar propiedades de los números, de las operaciones básicas, del valor posicional y del sistema de numeración que a su vez por lo observado en las entrevistas le permitieron al niño afianzar o desarrollar algún tipo de estrategia mental al momento de realizar una operación o llegar a una cantidad numérica exigida.

Esta investigación, permitió asociar el uso de la calculadora por los alumnos a otros aspectos significativos del sentido numérico, como la comprensión del valor posicional en el sistema de numeración decimal, la predicción e interpretación correcta de los efectos de las operaciones en los números utilizados, la elección de la operación adecuada para cada actividad y la capacidad de confirmar los resultados a través de una operación diferente. Estos resultados contradicen los argumentos presentados por aquellos que se oponen al uso de la calculadora en el aula, ya que, muchas veces esta herramienta es vista como un obstáculo en el aprendizaje en clase de matemáticas.

De igual manera, subrayamos el hecho de que los alumnos al utilizar la calculadora en las tareas propuestas, centraron su atención en cada actividad. Esto les permitió estar más disponibles para la concreción de sus estrategias, reduciendo así los errores de cálculo y de interpretación. Esta disponibilidad se ha traducido en una mejor comunicación de su estrategia, así como en la utilización de diferentes representaciones personales o de carácter más formal.

En cuanto a lo que podemos concluir, para dar respuesta a otra de las preguntas de investigación y teniendo en cuenta los datos recogidos, el análisis de las actividades aplicadas con la calculadora ha permitido hacer explícitos algunos malentendidos que tienen los estudiantes acerca de los procedimientos de cálculo cuando se enfrentan a tareas diferentes a las que

regularmente realizan en sus clases de matemáticas. De esta manera, se evidenciaron los métodos tradicionales que son de un dominio privilegiado para hacer emerger una problemática ligada al aprendizaje de las operaciones básicas, al sentido numérico, a las propiedades de los números y de la aritmética en general, que cuando se calcula con métodos de columna permanecen ocultas.

Del mismo modo, y teniendo en cuenta los resultados de los datos obtenidos en las entrevistas de los informantes, es evidente que los niños poseen cierta variedad estrategias mentales para calcular, entre las que se destaca la descomposición, dobles y doble cercano, holística, conteo y la utilización del algoritmo tradicional mentalmente, siendo estas dos últimas las más utilizadas por los informantes que participaron en esta investigación, dejando en evidencia el pobre trato que se le da al cálculo mental en clase de matemáticas.

Además, se ha podido evidenciar las concepciones de los estudiantes, lo cual creemos ha podido conducirlos hacia la reflexión sobre nociones que se encuentran en el sistema de numeración, el valor posicional y propiedades de las operaciones con números naturales. Esto se ha podido hacer confrontando a los estudiantes, por medio de entrevistas individualizadas, utilizando la calculadora, en las que desataron procesos cognitivos sobre una mejor comprensión de las propiedades de las operaciones, del sistema de numeración y de expresiones numéricas equivalentes.

Se ha mostrado, de manera resumida, una investigación en relación con el Cálculo Mental que deja ver las dificultades en la enseñanza y aprendizaje que siguen escondidas cuando sólo se trabaja con los algoritmos de lápiz y papel. Esta problemática evidencia en muchos estudiantes una comprensión pobre del efecto que las alteraciones en los datos producen en los resultados, un débil reconocimiento de los conceptos, leyes y principios que rigen la operatoria, y una ausencia de la necesaria comprobación o estimación de la razonabilidad del resultado que, en caso de discrepancia con el resultado primeramente obtenido, podría haberles hecho recapacitar sobre su forma de proceder.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Aguamansa (2011). *Análisis y reflexión sobre el manifiesto del colegio Aguamansa en contra de los algoritmos tradicionales de las operaciones aritméticas (ATO)*. Recuperado el 11 de noviembre del 2018 de <http://www.actiludis.com/wpcontent/uploads/2011/10/MANIFIESTO.pdf>
- Areiras, I., De Azevedo, V. y Laranjeira, M. (1998). *Parámetros curriculares de tercero y cuarto ciclo de la enseñanza fundamental: Matemáticas*. Ministerio de Educación y Deportes. Brasilia, Brasil.
- Artigue, M., Douady, R. y Moreno, L. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática*. México, D.F.: Grupo Editorial Iberoamericana S.A.
- Borba, M. y Godoy, M. (2016). *Informática y educación matemática*. Belo Horizonte: Autentica Editora.
- Burgués, C., Alsina, C. y Fourtuny, JM. (1988). *Materiales para construir la geometría*. Madrid, España: Síntesis.
- Chamorro, M. del C (2003). *Didáctica de las matemáticas*. España: Pearson
- Chamoso, J., Hernández, L., López, R., y Rodríguez, M. (2015). El cálculo mental también se puede desarrollar trabajando con el ordenador de forma interactiva. *Revista Educación y Pedagogía*, 14(33), 159-166.
- Cockcroft, W.H. (1985). *Las matemáticas sí cuentan: informe Cockcroft* (Vol. 20). Madrid, España: Ministerio de Educación y Ciencia.
- D'Amore, B. (2006). *Didáctica de la matemática*. Bogotá, D.C., Colombia: Cooperativa Editorial Magisterio.
- Del Puerto, S. y Minnaard, C. (2003). Uso de la calculadora gráfica en el aprendizaje de la matemática. *Revista Iberoamericana de Educación*, 33(3), 1-13.
- Fernández, J. (2004). *De Cálculo Mental*. Madrid, España: ONCE
- Fosnot, C., y Dolk, M. (2001) Algorithms versus the sense of numbers. In V. Merecki y L. Peake (Eds.), *Young mathematicians at work: Building number sense, addition and subtraction* (pp. 115-125) Portsmouth, NH: Heinemann.

- Funuyet, C. (2014). *Una propuesta alternativa a los algoritmos tradicionales a través del método ABP* (Tesis de Maestría). Universidad de Sevilla, Sevilla, España.
- Gálvez, G., Cosmelli, D., Cubillos, L., Leger, P., Mena, A., Tanter, E.,..., y Soto-Andrade, J. (2011). Estrategias cognitivas para el cálculo mental. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 14(1), 9-40.
- Galeano, M. y Ortiz, D. (2008). *El cálculo mental como estrategia para desarrollar el pensamiento numérico* (Tesis de Maestría). Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.
- Gamboa, R. (2007). Uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*, 2(3), 11-44.
- Gómez, B. (1994). *Los métodos de cálculo mental en el contexto educativo: un análisis en la formación de profesores*. Granada, España: Comares.
- Gómez, B. (1995). Los métodos de cálculo mental vertidos por la tradición reflejada en los libros de aritmética. *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas*, (5), 91-101.
- Gómez, B. (1996). Desarrollo histórico de la enseñanza de la aritmética. El caso de los algoritmos de cálculo. *Aula de innovación educativa*, (50), 11-16.
- Hitt, F. y Cortés, J. (2009). Planificación de actividades en un curso sobre la adquisición de competencias en la modelización matemática y uso de calculadoras con posibilidades gráficas. *Revista digital: Matemática, Educación e Internet*, 10(1).
- Kamii, C. (1995). *El número en la educación preescolar*. Madrid, España: visor.
- Kamii, C., y Dominick, A. (2010). Los Efectos Negativos de los Algoritmos de Enseñanza en Grados de Primaria (1° a 4°). *Revista de Pedagogía*, 43(1), 59-73.
- Leger, P., Gálvez, G., Cubillos, L., Cosmelli, D., Inostroza, M., Luci, G.,... Soto-Andrade, J. (2011). *ECOCAM, un sistema computacional adaptable al contexto para promover estrategias de cálculo mental: Un diseño y estudio de casos*. Universidad de Chile, Facultad de Ciencias de la Educación, Santiago, Chile.
- Lemaire, P., Lecacheur, M., y Farioli, F. (2000). Use of children's strategy in computational estimation. *Canadian Journal of Experimental Psychology*, 54(2), 141-148.
- León, M. (2018). Estrategias de cálculo mental que favorecen el desarrollo del sentido numérico, operaciones básicas y OAOA. En ANPM-Puebla (presidencia), *El modelo educativo, la*



- resolución de problemas y las TIC en la enseñanza de las matemáticas*. Ponencia llevada a cabo en el IX Congreso Estatal de Enseñanza de las Matemáticas, Puebla, México.
- Lethielleux, C. (2005). *Le calcul mental au cycle des apprentissages fondamentaux* (tome 1). París, France: Bordas/Sejer.
- Lourdes, M., y Ernesto, Á. (2015). *Métodos y técnicas de investigación*. México, D. F., México: Trillas.
- Lucangeli, D., Poli, S., Molin, A. y Bertollí, C. (2010). *Inteligencia numérica: habilidades cognitivas y meta-cognitivas en la construcción del conocimiento numérico de 6 a 8 años*. Trento, Italia: Erickson.
- Martínez Montero, J. (2000). *Una nueva didáctica del cálculo para el siglo XXI*. Bilbao: CISS-Praxis.
- Mialaret, G. (1962). Percepción y educación. *Archivos de ciencias de la educación*, (4), 27-38.
- Mcintosh, A., Reys, B. y Reys, R. (1992). A proposed framework for examinig basic number sense. *For the Learning of Mathematics*, 12(3). Bristish Columbia, Canada.
- Ministerio de Educación y Ciencia (MEC) (2006). REAL DECRETO 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación primaria.
- Ministerio de Educación y Ciencia (MEC) (2007). ORDEN ECI/2211/2007, de 12 de julio, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la Educación primaria.
- Ministerio de Educación Nacional (MEN) (1998). *Lineamientos curriculares de matemáticas*. Santa fe de Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.
- MEN (2006). *Estándares básicos de competencia en matemáticas*. Santa fe de Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.
- MEN (2007). *Estándares de matemáticas*. Santa fe de Bogotá: Magisterio.
- NCTM (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES y NCTM.
- Palacio, R., y Ramírez, F. (2017). Algoritmos etnomatemáticos de las operaciones básicas presentes en el cálculo mental de algunos comerciantes de Barranquilla. En Red Cimates (presidencia), *ponencia llevada a cabo en la XX Escuela de Invierno en Matemática Educativa*. Colima, México.

- Parra, C. (1994). El cálculo mental en la escuela primaria. En C. Parra e I. Saiz (comps.), *Didáctica de la matemática. Aportes y reflexiones*. Buenos Aires: Paidós.
- Reys, R. (1984). Mental Computation and Estimation: Past, Present, and Future. *The Elementary School Journal*, 84(5), 546-557.
- Rogers, A. (2009). Mental Computation in the Primary Classroom. In R. P. Hunting, T. Fitzpatrick, J. A. Milne, D. J. Itter, D. L. Martin, T. M. Mills, C. T. Lenard (Eds.). *Proceedings of the Mathematical Association of Victoria 46th Annual Conference – Mathematics of Prime Importance*, Brunswick, Victoria, pp. 190-199.
- Ruthven, K. (1998). The Use of Mental, Written and Calculator Strategies of Numerical Computation by Upper Primary Pupils within a 'Calculator-Aware' Number Curriculum. *British Educational Research Journal*, 24(1), 21-42.
- Secretaría de Educación Pública (2016). *Propuesta curricular para la Educación Obligatoria*, Ciudad de México, México: Autor.
- Secretaría de Educación Pública (2017). *Aprendizajes claves para la educación integral*, plan y programas para la educación básica, Ciudad de México, México: Autor.
- Sowder, J. (1989). Mental computation and number comparison: Their roles in the development of number sense and computational estimation. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.). *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 182-197) Reston, VA: Lawrence Erlbaum.
- Thompson, I. (2000a). Mental calculation strategies for addition and sustraction: Part 1. *Mhatematics in school the Mathematical Association*, 28(5). 2-4.
- Thompson, I. (2000). Mental calculation strategies for addition and sustraction: Part 2. *Mhatematics in school the Mathematical Association*, 29(1), 24-26.
- Udina, F. (1992). *Aritmética y calculadoras*. Madrid, España: Síntesis.
- Uriach, D. B. y Pesce, C. C. (2011). Sentido numérico, aritmética mental y algoritmos. En Ministerio de Educación, Subdirección General de Documentación y Publicaciones. *Elementos y razonamientos en la competencia matemática [Recurso electrónico]* (pp. 47-78). Recuperado el 10 de septiembre del 2018 de [https://www.murciaeduca.es/cpstellamaris/sitio/upload/ARITMETICA\\_MENTAL\\_Y\\_ALGORITMOS\\_4778.pdf](https://www.murciaeduca.es/cpstellamaris/sitio/upload/ARITMETICA_MENTAL_Y_ALGORITMOS_4778.pdf)

Wolman, S. (2006). *Cálculo mental con números naturales: Apuntes para la enseñanza*. Buenos Aires, Argentina: Secretaría de Educación, Dirección General del Planeamiento, Dirección de Currícula.