



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

LA AUTENTICIDAD DE LOS PROBLEMAS MATEMÁTICOS EN CONTEXTOS DE TEMPERATURA EN LOS LIBROS DE TEXTO DE MÉXICO Y COLOMBIA

TESIS
PARA OBTENER EL TÍTULO DE
MAESTRA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

PRESENTA
LIC. WENDY LORAINÉ DE LEÓN ZAMORA

DIRECTOR DE TESIS
DRA. HONORINA RUIZ ESTRADA
CO-DIRECTOR DE TESIS
DR. JOSIP SLISKO IGNJATOV

PUEBLA, PUE.

ENERO 2020

Esta investigación se realizó gracias al financiamiento del
Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT),
De Enero de 2018 a Diciembre 2019.
No. CVU: 890851

A ti querido Lupus por hacerme conocer toda la fuerza que tengo conmigo.

AGRADECIMIENTOS

¡Qué bueno! que al final nada salió como esperaba, que las cosas no pasaron como soñaba y que la vida me haya puesto tantas trabas. ¡Qué bueno que no todo caminó! porque así pude vivir en México una gran experiencia de vida, gracias a mi Dios todopoderoso quien en su infinita bondad y misericordia me labró otro camino, con nuevas personas, nuevas costumbres y nuevos lugares. Gracias padre porque me sostienes ante la enfermedad y por darme la fortaleza necesaria para continuar y finalizar con éxito esta maravillosa oportunidad de seguir formándome profesionalmente.

Gracias a mis padres Fernelis De León y Libia Zamora por su inmenso amor, confianza, oraciones, apoyo incondicional y por ser ejemplo de esfuerzo y sacrificio.

Gracias a mis hermanos Stefany Carolina, Shirleidys Johana y Fernelis De Jesús por ser la motivación que me impulsa a seguir adelante y a ser cada día mejor persona

Gracias a mis asesores, Dra. Honorina Ruiz Estrada por su empeño y dedicación hacia este trabajo, por orientarme con sus excelentes aportes académicos, por su comprensión en momentos difíciles y por enseñarme de historia mexicana. Al Dr. Josip Slisko Ignjatov por sus valiosas sugerencias en la construcción y mejora de este trabajo.

Gracias al cuerpo docente de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla porque con sus enseñanzas y ejemplo, desaprendí sobre muchas temáticas y sembraron esa pasión por la investigación y por ser un profesor observador de mi propia aula. Un agradecimiento muy especial a los profesores, Dr. José Antonio Juárez López por su mano amiga siempre dispuesta a ayudar y a escuchar acompañado de un buen café. Al Dr. Eric Flores Medrano y su esposa Dra. Dinazar Escudero Ávila, a quienes no sólo admiro por su calidad profesional sino porque es doble su calidad humana, gracias por su hospitalidad, por recibirme con los brazos abiertos y hacerme sentirme en casa, gracias por las invitaciones a deleitar la gastronomía mexicana como un buen pan de muerto con chocolate, tacos, flautas, mole, pozole, chiles en nogada y una que otra chela. Realmente los echaré mucho de menos.

Gracias a mis compañeros de estudio, por los momentos vividos, la amistad, el apoyo brindado durante toda la carrera y hasta por las bromas para que me enchilara. En especial, a mi compañera de estudio y amiga Carina Hernández Pacheco, la colombiana que no pudo evitar que se me pegara el acento mexicano. Gracias por las risas diarias, las desveladas en Netflix, las noches de baile y por las picardías que no se pueden contar.

Gracias a mi gran amiga Margarita Hernández, por compartir su casa conmigo, por transmitirme ese calor humano de pertenecer a un hogar, por enseñarme este hermoso país mexicano y su cultura en esos muchos viajes por carretera y por esas muchas salidas a bailar una buena cumbia mexicana. Dios te bendiga enormemente por tu noble corazón.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN	1
CAPÍTULO 1	2
1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....	2
1.1 OBJETIVOS Y PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN	8
1.1.1 OBJETIVOS.....	8
1.1.2 PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN	8
CAPÍTULO II	10
2. MARCO TEÓRICO.....	10
2.1 TEORÍA DE LAS SITUACIONES AUTÉNTICAS EN LAS TAREAS ESCOLARES 10	
2.2 EL MODELO PEDAGÓGICO MEXICANO Y LOS LIBROS DE TEXTOS GRATUITOS.....	13
CAPÍTULO III	16
3. METODOLOGÍA.....	16
CAPÍTULO IV	18
4. ANÁLISIS DE LIBROS DE TEXTOS	18
4.1 MÉXICO.....	18
4.1.1 EL CONTEXTO DE TEMPERATURA Y SUS CAMBIOS EN LOS LIBROS DE TEXTOS DE LA CONALITEG	18
4.1.2 LA AUTENTICIDAD EN ALGUNOS PROBLEMAS PROPUESTOS EN LOS LIBROS DE TEXTO MEXICANOS	22
4.1.2.1 PROBLEMA 1:	22
4.1.2.2 PROBLEMA 2	24
4.1.2.3 PROBLEMA 3	27
4.1.2.4 PROBLEMA 4	28
4.1.2.5 PROBLEMA 5	31
4.1.2.6 PROBLEMA 6	32
4.1.2.7 PROBLEMA 7	34
4.2 COLOMBIA	39
4.2.1 LOS LIBROS DE TEXTO DE MATEMÁTICAS COLOMBIANOS.....	39
4.2.2 EL CONTEXTO DE LA TEMPERATURA EN LIBROS COLOMBIANOS	40

4.2.2.1 PROBLEMA 8	41
4.2.2.2 PROBLEMA 9	42
4.2.2.3 PROBLEMA 10	43
CAPÍTULO V	46
5.UN PROBLEMA NO AUTÉNTICO Y LAS SOLUCIONES DE ESTUDIANTES DE DIFERENTES NIVELES EDUCATIVOS	46
5.1 EL PROBLEMA Y EL INSTRUMENTO DE INVESTIGACIÓN	46
5.2 LA SOLUCIÓN EXPERTA	47
5.3 PROPUESTAS DE SOLUCIÓN DE CADA GRUPO DE ESTUDIANTES	49
5.3.1 GRUPO 1: EDUCACIÓN UNIVERSITARIA.....	49
5.3.2 GRUPO 2: EDUCACIÓN PREPARATORIA	54
5.3.3 GRUPO 3: EDUCACIÓN SECUNDARIA	60
CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	66
REFERENCIAS	69
ÁPENDICE	72
ANEXOS.....	75

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Clasificación de los problemas según conceptos matemáticos y el tipo de contexto: México.....	19
Tabla 2. Datos experimentales del calentamiento.....	37
Tabla 3. Clasificación de los problemas según conceptos matemáticos y el tipo de contexto: Colombia.....	40
Tabla 4. Razón de cambio de la temperatura de cada material con el tiempo de calentamiento. ..	48
Tabla 5. Criterios de calificación para inciso a) Grupo 1.	50
Tabla 6. Criterios de calificación para inciso b) Grupo 1.	50
Tabla 7. Criterios de calificación para inciso c) Grupo 1.....	50
Tabla 8. Calificación obtenida en el problema por los estudiantes del Grupo 1.....	51
Tabla 9. Tipos de soluciones del inciso a) Grupo 1.....	51
Tabla 10. Soluciones del inciso b) Grupo 1.	53
Tabla 11. Soluciones del inciso c) Grupo 1.	53
Tabla 12. Criterios de calificación ajustados para inciso a) del Grupo 2.....	55
Tabla 13. Calificación del inciso a) obtenida por cada uno de los estudiantes del Grupo 2.....	56
Tabla 14. Categorías del inciso b) Grupo 2.	57
Tabla 15. Categorías del inciso c) del Grupo 2.	58
Tabla 16. Concepciones del concepto de razón de cambio del Grupo 3.....	61
Tabla 17. Categorías del inciso b) del Grupo 3.....	62
Tabla 18. Categorías del inciso c) del Grupo 3.....	63

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Recuperado de un libro de matemáticas para segundo de secundaria publicado en el 2018.	19
Figura 2. Recuperado de un libro de matemáticas para tercero de secundaria publicado en el 2018.	21
Figura 3. Recuperado de un libro de matemáticas para primero de secundaria publicado en el 2018.	22
Figura 4. Recuperado de un libro de matemáticas para primero de secundaria publicado en el 2018.	23
Figura 5. Recuperado de un libro de texto de tercero de secundaria publicado en el 2016.	25
Figura 6. Variación de temperatura por horas de los días 9 y 10 de septiembre del año 2018 en Mexicali – Baja California, México. Recuperado de https://www.meteored.mx/mexicali/por-hora	26
Figura 7. Recuperado de un libro de matemáticas para segundo de secundaria publicado en el 2013.	27
Figura 8. Problema recuperado de un libro de tercero de secundaria publicado en el 2014.	29
Figura 9. Gráfica de temperatura contra tiempo del Problema 4. Elaboración propia.	29
Figura 10. Recuperado de un libro de matemáticas para primero de secundaria publicado en el 2018.	31
Figura 11. Recuperado de un libro de matemáticas para primero de secundaria publicado en el 2018	33
Figura 12. Recuperado de un libro de matemáticas para tercero de secundaria publicado en el 2016.	34
Figura 13. Temperatura en Celsius contra el tiempo en minutos. Gráfica de los datos dados en la tabla del problema.	35
Figura 14. Materiales utilizados para el experimento.	36
Figura 15. Temperatura contra el tiempo.	38
Figura 16. Recuperado de un libro de matemáticas para séptimo (2017).	41
Figura 17. Recuperado de un libro de matemáticas para séptimo (2017).	42
Figura 18. Recuperado de un libro de matemáticas para séptimo (2017).	43

Figura 19. Temperatura en grados Celsius contra tiempo en minutos, tomada del libro de texto de primero de secundaria, publicado en el 2018.....	47
Figura 20. Solución universitaria de U7 con calificación 0.	52
Figura 21. Solución universitaria de U14 con calificación 1.	53
Figura 22. Solución universitaria de U31 con calificación 5.	54
Figura 23. Ejemplos de soluciones incorrectas del inciso a).....	55
Figura 24. Ejemplos de soluciones parcialmente correctas del inciso a).	55
Figura 25. Solución inciso b) de E5.....	57
Figura 26. Solución inciso b) de E39.....	58
Figura 27. Solución inciso c) de E40	59
Figura 28. Solución inciso c) de E53	59
Figura 29. Ejemplos de Otras respuestas para el inciso c)	60
Figura 30. Única solución razonable del concepto de Razón de S16.	61
Figura 31. Concepción P2 de razón de cambio de S27.....	61
Figura 32. Concepción P3 de razón de cambio de S25.....	62
Figura 33. Propuesta con respuesta correcta de S14.	62
Figura 34. Propuesta con respuesta parcialmente correcta de S21.	63
Figura 35. Propuesta basada en la inclinación de S25	63
Figura 36. Propuesta de solución de la tarea por E22	64

APÉNDICE

ÁPENDICE A. TAXONOMÍA DE PALM	72
-------------------------------------	----

ANEXOS

ANEXO 1. TABLAS DE LIBROS DE TEXTO MEXICANOS DE MATEMÁTICAS DE SECUNDARIA	75
ANEXO 2. TABLA DE LIBROS DE TEXTO COLOMBIANOS DE MATEMÁTICAS DE SECUNDARIA	78

RESUMEN

En este trabajo de investigación se aborda el análisis de libros de texto de matemáticas de la educación secundaria de México y Colombia. En México son los libros que han sido aprobados por la Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos de la Secretaría de Educación Pública de México de la antigua y nueva reforma educativa, en Colombia son los libros del proyecto piloto “Todos a aprender”. El estudio se realizó considerando los contextos de física relacionados con los fenómenos térmicos. Se revisaron 83 libros mexicanos de 24 editoriales, de los 55 libros que proponen problemas matemáticos usando este contexto se contabilizaron 100 problemas propuestos para los estudiantes. Con respecto a los libros colombianos, se revisaron 4 libros de texto de matemáticas de la misma editorial, encontrando un total de 11 problemas propuestos en contextos relacionados con la temperatura.

Analizamos algunos de estos problemas en términos de la Taxonomía de Palm. Seleccionamos uno, propuesto en un libro de texto de primero de secundaria, porque es de nuestro interés saber, cómo interpretan y resuelven los estudiantes problemas de difícil interpretación ya sea por el uso artificial del contexto de temperatura o por la redacción confusa del texto del problema. El problema es un ejemplo de contextualización artificial que describe el comportamiento de tres materiales sometidos a un proceso de calentamiento. Los datos fueron tomados a través de una encuesta realizada a tres grupos de diferentes niveles educativos. Esta investigación se asienta en el paradigma interpretativo, considerando el método cualitativo.

Encontramos que los problemas matemáticos, tanto de los libros mexicanos como colombianos, tienen en común que pretenden desarrollar los contenidos matemáticos relacionados con variación lineal y números enteros usando dos tipos de contextos de temperatura, registro de temperatura y fenómenos de calentamiento y/o enfriamiento. En relación a la autenticidad, los problemas extraídos de los libros mexicanos cumplen en su mayoría con un solo aspecto de la taxonomía de Palm, a diferencia de los colombianos que no satisfacen ninguno de los aspectos fundamentales. Además, ningún estudiante usó el contexto en su propuesta de solución del problema seleccionado.

Palabras claves: libros de textos, problemas de matemáticas, contextos de temperatura, autenticidad.

INTRODUCCIÓN

En la presente investigación se realiza un análisis de las tareas propuestas en los libros de texto de la educación secundaria en contextos de temperatura de México y Colombia desde los aspectos fundamentales de autenticidad de la Taxonomía de Palm.

En el Capítulo I se encuentran algunos estudios y congresos que se han realizado en torno a los libros de texto, reconocidos por la comunidad de investigadores en educación matemática como una herramienta fundamental dentro del aula de matemáticas. Se comentan investigaciones relacionadas con la propuesta de Torulf Palm para garantizar la autenticidad de tareas escolares. Se resaltan aspectos importantes de los planes de estudio del área de matemáticas de Colombia y México relacionados con situaciones contextualizadas y auténticas. También, se presentan los objetivos y las preguntas de investigación que direccionan este trabajo.

En el Capítulo II se presentan los aspectos fundamentales de la taxonomía de Palm con los cuales se hace el análisis de los problemas de matemáticas seleccionados, además de resaltar la función social de la educación mexicana que coloca a disposición de las escuelas, materiales educativos de forma gratuita, como son los libros de texto, con el apoyo de la Comisión Nacional de Libros de Textos Gratuitos desde 1959.

El Capítulo III hace referencia a la metodología, donde se explica el proceso para seleccionar y analizar los problemas matemáticos que usan contextos de temperatura en los libros de texto colombianos y mexicanos. A su vez, se describe el grupo de estudiantes encuestados.

El Capítulo IV se divide en dos partes, la primera se centra en los libros mexicanos y la segunda, en los colombianos. En ambos casos se muestra el uso del contexto de la temperatura en los problemas de matemáticas de educación secundaria, los conceptos matemáticos que se pretenden desarrollar y el análisis de algunos de estos problemas mediante los aspectos fundamentales de la taxonomía de Palm.

En el Capítulo V se muestran los resultados obtenidos de la aplicación de un problema no auténtico, según una previa categorización explicada en el Capítulo II. Se describe el instrumento y la solución experta del problema y se analizan las propuestas de solución presentadas por los estudiantes.

CAPÍTULO 1

1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El análisis de los libros de texto de matemáticas se ha perfilado últimamente como una línea de investigación emergente en la educación (Fan, 2013), pues ha captado un creciente interés en las últimas décadas por parte de la comunidad internacional de investigadores en educación matemática; al ser de reciente creación no se encuentran definidos aún sus fundamentos filosóficos, marcos teóricos y métodos de investigación.

Fan (2013) formuló un marco conceptual que considera a los libros de texto como una variable intermedia en el contexto de la educación y define la investigación en educación matemática como una investigación disciplinada sobre temas relacionados con los libros de texto de matemáticas y su relación con otros factores en la educación matemática. Sugiere llevar el análisis de libros de texto más allá de la identificación de sus características o cómo se desarrolla un tema específico de la matemática escolar. Propone plantear tres tipos de preguntas de investigación: causal, correlacional y otras preguntas porque hay pocos datos al respecto y porque las respuestas permitirían explorar la repercusión de los libros de texto en el aprendizaje y la enseñanza.

La idea es que los investigadores trasciendan de temas descriptivos a temas correlacionales o causales, es decir, de investigar cómo es abordado un concepto matemático en un libro de texto a cómo el libro de texto es afectado por las políticas educativas o cómo afecta el libro de texto al aprendizaje de los estudiantes o a la metodología del docente en el aula; son algunos ejemplos de considerar el libro de texto una variable dependiente o independiente en el proceso de enseñanza-aprendizaje. En cuanto al método de investigación, Fan (2013) aconseja adoptar el método experimental, que es ampliamente usado en las áreas científicas, dado que las evidencias deben desprenderse de la observación y el experimento y ser recogidas de manera sistemática, e invita a los investigadores a considerar la investigación de libros de texto como una línea de investigación científica.

Existe una extensa historia detrás de los libros de texto escolares dada su relevancia en el proceso de enseñanza-aprendizaje y a su uso frecuente en las aulas. En su artículo, Fan (2013)

menciona algunos ejemplos que evidencia la especial atención que se les ha dado a los libros de texto por parte de la comunidad internacional de investigación en educación matemática durante los últimos años. El 10° y 11° Congreso Internacional de Educación Matemática de los años 2004 y 2008 (ICME-10 e ICME-11) donde se designaron dos grupos de discusión, DG14 y DG17 respectivamente. El primero bajo la temática "Enfoque en el desarrollo y la investigación de libros de texto de matemáticas" y el segundo "La naturaleza cambiante y los papeles de los libros de texto de matemáticas: forma, uso y acceso".

Dos años después, en el 2010, se conmemoró en Tailandia una conferencia sobre la Cooperación Económica Asia-Pacífico (APEC) titulada "Replicando Prácticas Ejemplares en la Educación Matemática entre las Economías APEC", donde se dedicaron tres sesiones a debatir los procesos y principios de la publicación de libros de texto de matemáticas (Fan 2010). En febrero del 2011, se llevó a cabo la 5ª Conferencia Internacional APEC-Tsukuba bajo la temática "Centrándose en los libros de texto de matemáticas, libros de texto electrónicos y herramientas educativas". En octubre del mismo año se desarrolló en Shanghai, China, la "Conferencia Internacional sobre Libros de Texto de Matemáticas Escolares (ICSMT 2011)", otra relevante conferencia sobre libros de texto.

Por otro lado, en la actualidad hay iniciativas para vincular más estrechamente la matemática escolar con el mundo real fuera de la escuela. Tales iniciativas no son nuevas, pero han llevado a reformas curriculares y de evaluación en varios países (Palm y Burman, 2004). Este autor ha sugerido que la autenticidad de los problemas verbales es crucial en el aprendizaje de los estudiantes, y a su vez, define como problema verbal auténtico a aquellos problemas que "representan alguna situación de la vida real de manera que aspectos importantes de esa situación se simulan en un grado razonable" (Palm, 2008). Además, asegura que en la medida que los problemas verbales evoquen situaciones como vividas por los estudiantes, les permitirán usar su matemática extraescolar en la resolución de problemas matemáticos y consecuentemente, usarán sus conocimientos matemáticos en problemáticas de su vida cotidiana.

Un ejemplo de ello es: "450 soldados deben ser transportados a un campo de entrenamiento en autobuses de 52 plazas. ¿Cuántos autobuses serán necesarios?". Este problema se transformó en auténtico de la siguiente manera: "Todos los alumnos de tu colegio harán un viaje el 15 de mayo. Tu tutor te ha pedido que le ayudes con el transporte, y cree que lo mejor sería que todos vayan en

autobús. Tú te encargarás de solicitar los autobuses a ‘Autocars Paco’. En la lista de personas que irán al viaje hay 360 nombres. En cada autobús pueden viajar 48 personas. Elabora la solicitud que enviarás a Autocars Paco”. Los estudiantes tuvieron más éxito en la resolución de esta versión auténtica. Este es el único estudio de redacción situacional que usó problemas situacionalmente difíciles, quien tomó los problemas no estándar utilizados por Verschaffel, De Corte y Lasure (1994) y los convirtió en problemas "auténticos".

Resultados similares han sido encontrados por Depaepe, De Corte y Verschaffel (2009) quienes haciendo uso de los aspectos principales de la taxonomía de Palm, que se describirá más adelante, analizaron en una muestra de problemas procedentes de libros de texto de 6º de educación primaria de los Países Bajos, la proximidad entre la vida real de los alumnos y las situaciones propuestas. El principal resultado fue que la mayoría de los problemas no podían considerarse auténticos porque no estaban bien simulados en determinados aspectos. Por su parte, Chamoso, Vicente, Manchado y Múñez (2014) realizaron un análisis similar al anterior, categorizando los problemas hallados de 1º a 6º de educación primaria de la editorial Santillana desde los más auténticos a los más desajustados. Los autores reportaron que menos del 5% de los problemas podían considerarse auténticos.

Así mismo, Vicente y Manchado (2016) se cuestionaron si los problemas aritméticos verbales se resuelven mejor, si se presentan como problemas auténticos, analizando la efectividad que tiene la reescritura auténtica, para ayudar a los estudiantes a resolver problemas matemáticamente difíciles. Dicha reescritura simulaba los aspectos principales de algunas situaciones cotidianas en la vida de los alumnos. Los resultados indicaron que las versiones ‘auténticas’ de los problemas más difíciles fueron resueltas con más acierto que el resto de relatos, por los alumnos con alta aptitud matemática y buena comprensión lectora, usando la reescritura auténtica propuesta por Palm (2008). Los mismos autores en el año 2017 llevaron a cabo un análisis cuantitativo-descriptivo de los problemas aritméticos verbales incluidos en los libros de texto de dos editoriales españolas donde reportaron que los problemas de los cursos superiores fueron los menos contextualizados en situaciones auténticas.

En este orden de ideas, el Programa Internacional de Evaluación de Alumnos (*Programme for International Student Assessment: PISA*), asegura que, si el contexto le es familiar a la persona que resuelve el problema, ésta se sentirá mejor dispuesta para abordarlo (MECD, 2014). A su

vez, en el currículo mexicano, también se habla de autenticidad, en su enfoque pedagógico del programa de estudios de matemáticas, bajo la Nueva Reforma Educativa planteada por la Secretaría de Educación Pública, se establece que:

La autenticidad de los contextos es crucial para que la resolución de problemas se convierta en una práctica más allá de la clase de matemáticas. Los fenómenos de las ciencias naturales o sociales, algunas cuestiones de la vida cotidiana y de las matemáticas mismas, así como determinadas situaciones lúdicas pueden ser contextos auténticos, pues con base en ellos es posible formular problemas significativos para los estudiantes. Una de las condiciones para que un problema resulte significativo es que represente un reto que el estudiante pueda hacer suyo, lo cual está relacionado con su edad y nivel escolar (SEP, 2017, p. 301).

Además, según las orientaciones didácticas de la Lengua Extranjera, la autenticidad hace referencia al aprendizaje del inglés utilizando mecanismos auténticos del uso de la lengua en situaciones contextualizadas, en situaciones comunicativas reales o próximas a la realidad y significativas, donde los estudiantes sean usuarios de esta lengua y puedan interactuar con sus pares a través de ella. Así que, para la Nueva Reforma Educativa, los fenómenos de las ciencias naturales son contextos auténticos en el aprendizaje de la matemática y, en el caso de la lengua extranjera, los contextos son situaciones comunicativas que ocurren en la realidad del aprendiz, por lo que deben estar acorde con su edad y nivel escolar. Por tanto, puede concluirse que para la SEP son contextos auténticos en la medida que se correspondan con la experiencia cotidiana de los escolares y los problemas matemáticos correspondientes se redacten en un lenguaje apropiado para los escolares.

Los profesores mexicanos ejercen su autonomía curricular escogiendo y haciendo uso de los libros de texto que la SEP coloca a su disposición a través de la Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos (CONALITEG). Por ello, la presente investigación centra su atención en este catálogo de libros, porque se esperaría que reflejen concordancia entre los problemas verbales de matemáticas y situaciones de la vida real. Se consideran únicamente los libros de la educación secundaria, donde se destaca que todos los libros de primero corresponden al Nuevo Modelo Educativo y, los de segundo y tercero, en su mayoría corresponden al antiguo modelo.

En este sentido, hay algunas iniciativas investigativas y recomendaciones. Por ejemplo, Quiroz y Rodríguez (2015) analizaron las praxeologías de modelación matemática usadas en los seis libros de texto de matemáticas de la educación primaria, editados en el 2009. Consideraron los contenidos de probabilidad y estadística y encontraron que la modelación matemática no está presente en la mayor parte de las lecciones. Otros autores se han ocupado de los problemas en contexto de temperatura de los tres libros de texto de matemáticas de la educación secundaria. Por ejemplo, Ruiz, Slisko y Nieto (2018) encontraron que maestros en servicio lograron identificar los datos erróneos y contradictorios contenidos en un problema matemático, aspectos que no fueron detectados por las instancias responsables de la publicación de este material. También, se han encontrado un gran número de errores en ejemplos y problemas relacionados con el uso de la balanza (Zamora, 2017).

En relación a los fenómenos físicos usados como contextos, Korsunsky (2002) ha sugerido que, si no toma en cuenta la naturaleza intrínseca del fenómeno usado en la formulación de un problema matemático, éste puede llegar a contradecir, ya sea, el conocimiento intuitivo que tenga el alumno acerca del fenómeno en cuestión, o su conocimiento de la matemática escolar, o los conocimientos que llegue a tener en el futuro.

Además, propone que los problemas matemáticos contextualizados deben ser auto-consistentes, sin que, por ello, se requiera que el maestro de matemáticas sea un experto en física o que el estudiante conozca temas de física que desbordan al nivel escolar correspondiente. Esta faceta no se enfatiza en el enfoque pedagógico del programa de estudios de matemáticas de la Nueva Reforma Educativa. Tampoco es evidente en la propuesta de Palm, aunque puede considerarse que está contenida en el hecho que, una tarea matemática auténtica es una simulación de una situación que ocurre en la realidad o que puede llegar a suceder.

Esta investigación, en específico, realiza el análisis de los libros de texto de matemáticas de la CONALITEG observándolos desde el punto de vista de los fenómenos térmicos, dado que éstos son inherentes a la vida cotidiana de los estudiantes. Los fenómenos térmicos se refieren a los procesos de enfriamiento y/o calentamiento que experimentan las sustancias en situaciones específicas.

El enfriamiento ocurre cuando la sustancia de interés está a una temperatura mayor que la de su medio ambiente (enfriamiento espontáneo). En este caso, la temperatura disminuye exponencialmente conforme el tiempo transcurre hasta que se alcanza la temperatura del alrededor. Se dice que llegó el equilibrio térmico y la temperatura de la sustancia no depende más del tiempo. También suele suceder que la sustancia sea forzada a adoptar una temperatura menor que la que tenía inicialmente. En este caso, el intercambio de calor es controlado con una rampa de temperatura, lo que permite que la temperatura de la sustancia disminuya linealmente con el tiempo. El enfriamiento espontáneo es parte de la vida cotidiana de los individuos. El enfriamiento controlado forma parte de los procesos industriales y los laboratorios de enseñanza e investigación.

Por otra parte, el calentamiento de una sustancia conlleva el incremento de su temperatura conforme el tiempo va transcurriendo y, para ello, se requiere suministrar energía, como cuando se calienta agua en una hornilla o cuando se expone un vaso con cubos de hielo a un ambiente a 30 grados Celsius. El tiempo, aquí referido, es el que se mide con un cronómetro que se activa cuando inicia la observación del fenómeno de enfriamiento y/o calentamiento.

Hasta donde se sabe, este tipo de estudio no ha sido realizado hasta el momento. Se busca saber si los contextos de enfriamiento y/o calentamiento se han usado apropiadamente. Este matiz está fuertemente atado a lo que Palm (2009) denomina como un problema verbal auténtico. En este trabajo de tesis se enriquece la autenticidad de los contextos de Palm agregando (como un aspecto) la naturaleza física de los fenómenos térmicos antes citados. También informamos qué conocimientos matemáticos pretenden ser aprendidos o enseñados en los libros de texto de matemáticas de secundaria aludidos.

En consonancia con Fan (2013), hacemos una crítica significativa, relacionada con el concepto de autenticidad de la SEP, considerando a los libros de texto como la variable dependiente. Se espera que se observe la autenticidad de los contextos usados en los problemas matemáticos propuestos a los estudiantes de los libros de texto que pertenecen al Nuevo Modelo Educativo porque así lo requieren las nuevas directrices. Además, es de interés saber, cómo interpretan y resuelven los estudiantes del nivel secundario algunos problemas de difícil interpretación, ya sea por el uso artificial del contexto de temperatura o por la redacción confusa del texto del problema. En este caso, se considera a los libros de texto como la variable independiente.

1.1 OBJETIVOS Y PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

Considerando la problemática descrita, se plantean los siguientes objetivos y preguntas de investigación:

1.1.1 OBJETIVOS

Objetivo General:

Analizar la autenticidad de los problemas matemáticos en contextos de temperatura propuestos en los libros de texto de matemáticas de la educación secundaria de México y Colombia y su incidencia en la solución de los alumnos.

Objetivos Específicos:

- Realizar investigación documental para identificar contextos de física relacionados con los fenómenos térmicos en los problemas que aparecen en los libros de texto de matemáticas de México y Colombia, observando el uso correcto de su propia naturaleza.
- Identificar la presencia de los aspectos fundamentales de autenticidad en los problemas de matemáticas seleccionados.
- Conocer la posible incidencia de la falta de autenticidad de un problema matemático en las propuestas de solución de los estudiantes.

1.1.2 PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

- ¿Cómo se presenta la autenticidad en los problemas de contextos de temperatura que aparecen en los libros de texto de matemáticas de la educación secundaria de México y Colombia?
- ¿Cómo interpretan los estudiantes de diferentes niveles educativos un problema matemático no auténtico que involucra el contexto de temperatura artificialmente?

CAPÍTULO II

2. MARCO TEÓRICO

En el presente capítulo se describen los aspectos básicos de la taxonomía de Palm con los cuales se analizan los problemas matemáticos seleccionados, además de destacar el papel que juegan los libros de texto en el Modelo Pedagógico Mexicano.

2.1 TEORÍA DE LAS SITUACIONES AUTÉNTICAS EN LAS TAREAS ESCOLARES

La teoría de Palm (2004) es una teoría conceptual, local que únicamente da cuenta de la autenticidad de los problemas verbales. Alude a la correspondencia entre los problemas verbales y situaciones de tareas del mundo real. Esta correspondencia se basa en la representación simplificada (simulación) de situaciones del mundo real como experimentadas por los escolares. Los aspectos considerados como importantes son tomados con una exhaustividad y su fidelidad da cuenta del grado de aproximación logrado en la simulación. La representatividad de una simulación es el parecido de la tarea escolar con una situación de trabajo en la vida real estudiantil.

No es posible simular todos los aspectos involucrados en situaciones fuera de la escuela, tal que, las condiciones para la resolución de la tarea sean exactamente las mismas que aquellas de la situación representada. Así que, siempre se requiere realizar restricciones a la exhaustividad. Es claro que, las características de las tareas escolares y las condiciones bajo las cuales deben ser resueltas, pueden incidir en la magnitud de esta brecha, y ésta afectaría las similitudes en las matemáticas utilizadas en la escuela y fuera de ella.

Para asegurar la presencia de los elementos característicos de los problemas verbales que emulan apropiadamente situaciones de tareas fuera de la escuela, Palm propuso los siguientes aspectos de las situaciones de la vida real que se consideran importantes en su simulación: el Evento, la Pregunta, Información y datos, la Presentación, las Estrategias de solución, las Circunstancias, los Requisitos de solución y el Propósito en el contexto figurativo (vea el Apéndice A). La fidelidad de las simulaciones de estos aspectos impacta en el grado en que los estudiantes,

cuando se ocupan de las tareas escolares, pueden participar en las actividades matemáticas atribuidas a las situaciones reales que son simuladas.

Palm (2004) expresa que el afán de contextualizar todos los problemas verbales o tareas propuestas en libros de matemáticas, ha generado que muchas de estas “simulaciones de situaciones reales” simplemente sean tareas ordinarias matemáticas, cuyo objetivo es el desarrollo de un algoritmo mecanizado sin sentido; disfrazadas con un contexto configurativo de situaciones fuera del aula, lo cual genera efectos negativos sobre el aprendizaje, actitudes y creencias de los estudiantes.

Posteriormente, Palm y Nyström (2009), proponen tres aspectos fundamentales que deben aparecer en un problema para que sea considerado auténtico. Ellos proponen los siguientes aspectos básicos para garantizar la autenticidad de problemas verbales.

1. **Evento:** Se refiere al suceso descrito en la tarea, o en la simulación de una situación real, es un requisito previo que el acontecimiento descrito en la tarea de la escuela debe haber sucedido o podría suceder en la vida real más allá de la escuela.

2. **Pregunta:** Se refiere a la concordancia entre la asignación dada en la tarea escolar y en una situación extraescolar correspondiente. La pregunta en la tarea escolar es una que se pudo presentar realmente en el acontecimiento del mundo real descrito, es un requisito previo para que una situación del mundo real correspondiente exista.

3. **Información y datos:** Se refiere a la información y a los datos de la tarea, los valores proporcionados, modelos y condiciones dadas se consideren reales y específicas.

Además, considera otros aspectos secundarios:

i. Especificidad de los datos: si los detalles de la situación descrita pueden modificar las estrategias de resolución de los alumnos.

ii. Propósito en el contexto figurativo: si hay coincidencia o no del propósito de la resolución de la tarea en el contexto escolar y en la vida real, teniendo en cuenta que ese propósito sea tan claro en la escuela como lo es fuera de ella.

Palm y Nyström (2009) reportaron que las variantes que le realizaron a las tareas para convertirlas en más auténticas incluyen una descripción más detallada del contexto de la tarea,

explicación del propósito de resolver la tarea en la situación simulada, inclusión de los estudiantes en la tarea, y además, resaltan el hecho de que contienen textos más largos que pueden ser más exigentes de leer. Un ejemplo de ello es: “El mejor momento de Martin para correr 100 m es 10.00 segundos. ¿Cuánto tiempo le llevará correr 10 000 m (= 1 milla sueca)?” (Greer, 1993).

La versión más auténtica a este problema es: “Hay una competencia de atletismo en la televisión. Tú y un amigo miran cuando el hombre más rápido del mundo, Maurice Green, gana la carrera de 100 m en el tiempo de 10.00 segundos. La próxima carrera que miras es 10 000 m, que ganó Haile Gebrselassie en el tiempo 26 min. y 5 segundos. ¿Qué respondes cuando tu amigo te pregunta: ¿Cuánto tiempo crees que le tomaría a Maurice Green correr 10 000 metros (= 1 milla sueca)?”.

Según estos autores la solución esperada a esta tarea debe incluir estimaciones. Los estudiantes deben tener en cuenta, con respecto al **Evento**, que un corredor no puede mantener la misma velocidad durante 10 000 m como puede en 100 m. En relación a la **Información y datos** y la **Pregunta** presentada implican que la persona que pregunta (que en esta tarea es claramente el desarrollador de la tarea y no alguien en el contexto de la tarea) sabe que la persona que debe responder la pregunta no sabe nada sobre Martin aparte de los datos proporcionados en la tarea.

La **Pregunta** en situaciones de la vida real no sería “¿Cuál será su tiempo?”, sino “¿Cuál crees que sería su tiempo?” porque la palabra “crees” abre más claramente las posibilidades de no saber o no poder especificar una hora exacta. A diferencia de “será” que implica una respuesta correcta específica para la tarea. Por lo tanto, la pregunta en la variante más auténtica se formula “¿Cuánto tiempo crees que ...?”. Además, el propósito de la pregunta no está formulado explícitamente, pero a partir de la descripción de la situación, las posibilidades de interpretar este propósito son similares en la situación real y en la situación escolar.

En esta investigación, concluyeron que cuando los estudiantes se enfrentan a tareas más auténticas tienden a no hacer un uso adecuado de su conocimiento del mundo real y suspender el requisito de que sus soluciones deben tener sentido en relación con las situaciones “reales”. Tendencia que también se ha encontrado en docentes en formación.

En este orden de ideas, es relevante mencionar que la Taxonomía de Palm comprende 8 aspectos (Vea el Apéndice A) pero en el presente estudio, para el análisis de autenticidad en los

problemas de matemáticas, se tendrán en cuenta únicamente estos aspectos fundamentales o primarios, identificando en qué medida cumplen los problemas matemáticos que aparecen en los libros de texto con tales aspectos. Además, se empleará la siguiente categorización:

- ❖ *Problema auténtico* si cumple con los tres aspectos.
- ❖ *Problema no auténtico* si cumple con uno o dos o ningún aspecto.

El propósito de los problemas de matemáticas, en el ámbito escolar, es saber aplicarlos en situaciones que el alumno podría encontrarse en su día a día, los conocimientos matemáticos aprendidos en clase sin la necesidad de tener ese contacto real con la situación planteada. La idea es traer la realidad a los libros de texto que permitan simular, lo más fielmente posible, problemas reales que el alumno podría hallar fuera de la escuela, de tal forma que puedan estar preparados o capacitados para afrontar dichos problemas en la realidad (Depaepe, De Corte y Verschaffel, 2010).

2.2 EL MODELO PEDAGÓGICO MEXICANO Y LOS LIBROS DE TEXTOS GRATUITOS

La Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos surgió en 1959 y la sociedad mexicana tuvo acceso a los libros de texto, no solo para reforzar los contenidos comunes en la educación de todo el país, sino también como una medida de apoyo para las familias que no tenían recursos para adquirirlos, dado que son gratuitos. El libro de texto gratuito se convirtió en un instrumento fundamental para la educación de los mexicanos.

En el modelo educativo 2016, el libro de texto gratuito es reconocido como:

Una herramienta fundamental porque asegura que en todas las escuelas exista una base común de la educación nacional. No obstante, es importante velar porque no sea empleado como un manual para el aprendizaje repetitivo y estancado, sino más bien, para fomentar prácticas educativas diversas y pertinentes (SEP, 2016, p. 32).

Por tanto, el trabajo en el aula debe ser apoyado por estos materiales educativos que permitan a los docentes contar con un amplio repertorio de estrategias, especialmente porque la consolidación del modelo por competencias demanda nuevas formas de trabajo.

El modelo educativo 2016 basado en un enfoque humanista, se propone busca hacer efectivo el derecho a la educación para todos y reorganiza los principales componentes del sistema educativo nacional para que los estudiantes logren los aprendizajes que el siglo XXI exige y puedan formarse integralmente. El nuevo planteamiento pedagógico, parte de una nueva visión que pone la Escuela al Centro del sistema educativo, como espacio en donde convergen todos los recursos y esfuerzos de los distintos actores (SEP, 2016). En otras palabras, el modelo busca crear una escuela renovada que cuente con una organización, recursos, acompañamiento, infraestructura, docentes y servicios que conviertan las aulas en auténticos espacios de aprendizaje.

En julio de 2016 la Secretaría de Educación Pública presentó una propuesta para la actualización del Modelo Educativo que se conformó por tres documentos:

3. Carta sobre los Fines de la Educación en el siglo XXI,
4. Modelo Educativo 2016,
5. Propuesta Curricular para la Educación Obligatoria 2016.

Una vez sometidos al análisis de todos los actores involucrados en la educación y acatar las recomendaciones sirvieron de fundamento para la elaboración de la versión definitiva del *Plan y Programas de Estudio para la Educación Básica*. Esta Nueva Reforma tiene “el reto pedagógico de hacer de la escuela un lugar social de conocimiento, donde el estudiante afronta circunstancias auténticas” (SEP, 2017).

Se continúa con un enfoque humanista, donde:

La educación tiene la finalidad de contribuir a desarrollar las facultades y el potencial de todas las personas, en lo cognitivo, físico, social y afectivo, en condiciones de igualdad; para que estas, a su vez, se realicen plenamente y participen activa, creativa y responsablemente en las tareas que nos conciernen como sociedad (SEP, 2017, p. 25).

Aunque también destaca el enfoque socio-constructivista, que considera que “el aprendizaje no tiene lugar en las mentes aisladas de los individuos, sino que es el resultado de una relación activa entre el individuo y una situación, por eso el conocimiento tiene, además, la característica de ser situado” (SEP, 2017). Lo que significa que reconoce el aprendizaje del estudiante sólo en interacción social.

Bajo la Nueva Reforma se pretende cumplir la función social de garantizar el acceso a una educación de calidad, en un marco de inclusión y equidad, al colocar a disposición de las escuelas mexicanas los materiales educativos dispuestos por la SEP. Aquí, el libro de texto es concebido como:

Un instrumento que facilita prácticas educativas diversas y pertinentes al presentar contenidos curriculares seleccionados, ordenados y expuestos de una forma didáctica; ayude a estructurar el tiempo y el trabajo en el aula; y contribuya a reelaborar la cultura de los alumnos (SEP, 2017, p.126).

Por último, cabe resaltar que con los libros de textos se fortalecerán “los conocimientos y las habilidades del docente con respecto a los principios pedagógicos de este currículo, los propósitos educativos, los enfoques pedagógicos y la naturaleza de los contenidos curriculares” (SEP, 2017). Lo que permite pensar que la nueva producción de libros de textos está alineada con los lineamientos de la Nueva Reforma.

CAPÍTULO III

3. METODOLOGÍA

Esta investigación se asienta en el paradigma interpretativo, cuyo propósito investigativo es avanzar en el conocimiento describiendo e interpretando los fenómenos del mundo real, en su intento de obtener significados compartidos con otros (Bassegy, 2003, p. 44). Se considera un método cualitativo, enfocado a comprender el uso de los fenómenos térmicos en los problemas de los libros de texto de matemáticas, explorándolos desde la perspectiva de los participantes en un entorno dado y en relación con su contexto (Hernández-Sampieri, 2006). La presente investigación pretende no sólo describir los contenidos de los problemas en contextos de física que aparecen en los libros de textos de matemáticas, sino que busca interpretar y analizar la autenticidad del contexto, según la taxonomía de Palm.

Se realizó un análisis documental de los contenidos de todos los libros de texto de matemáticas de nivel secundario de México y Colombia. Fue un trabajo arduo, primero porque se revisaron 87 libros de texto, 83 libros mexicanos de 24 editoriales y 4 libros colombianos de una misma editorial, y segundo, porque la revisión consistió en mirar página por página de cada libro, que contiene aproximadamente 254 páginas en total, para hallar los problemas matemáticos relacionados con el contexto de temperatura y sus cambios, enfocando la atención exclusivamente en los problemas propuestos para los estudiantes. Los libros de texto mexicanos se encuentran disponibles en el catálogo virtual de la CONALITEG, lo cual generó inconvenientes en la búsqueda dado que en ocasiones la página no estaba disponible. A diferencia de los libros colombianos que fueron revisados de forma física.

Cabe resaltar que de los libros de primero de secundaria todos corresponden al Nuevo Modelo Educativo; de los de segundo, 14 libros, y de los de tercero, 7 libros. De los libros mexicanos revisados, 17 son de primer grado, 31 de segundo grado y 35 de tercer grado de educación secundaria. Sin embargo, encontramos que únicamente 55 libros contenían problemas en contexto de temperatura (16 libros del primer grado, 16 libros del segundo grado y 23 libros del tercer grado). Hallamos un total de 100 problemas de matemáticas relacionados con los fenómenos

térmicos. De los libros colombianos que se revisaron, encontramos un total de 11 problemas en contextos relacionados con temperatura en sólo dos de los cuatro libros.

Una vez seleccionados los problemas, fueron leídos los 111 problemas de matemáticas para categorizar los tipos de contextos de temperatura presentes en los problemas, y además, identificar el conocimiento matemático que se pretende desarrollar en los estudiantes con base en esos tipos de contextos. Para ello, se elaboró una tabla por cada grado de secundaria del sistema educativo mexicano (Vea el Anexo 1) y una única tabla para el sistema educativo colombiano (Vea el Anexo 2), que serviría como un sistema de coordenadas para los problemas. Se destacan los siguientes aspectos:

- ❖ Título del libro
- ❖ Autor o autores del libro
- ❖ Año de edición
- ❖ Clave del libro en la plataforma virtual
- ❖ Tipo de contexto
- ❖ Conocimiento matemático

También, se elaboró una carpeta virtual por cada grado de secundaria tanto de México como de Colombia que contenían los documentos en Word de cada problema, nombrado por el título del libro más los autores. Cada documento tenía de encabezado su referencia. Posteriormente, se seleccionaron de forma aleatoria 10 problemas de matemáticas de los libros de texto, 7 de México y 3 de Colombia, teniendo en cuenta la clasificación de los contextos y fueron analizados considerando únicamente los aspectos principales de la taxonomía de Palm, según Palm y Nyström (2009). Se siguió la práctica de Pollak (1968, 1969; 1978) y Kosunsky (2002), al presentar los ejemplos comentados y no indicar los nombres de los autores ni de las editoriales.

Por último, se seleccionó aleatoriamente uno de estos problemas analizados, el cual fue clasificado como un *problema no auténtico* y fue aplicado a 3 grupos de alumnos de diferentes niveles educativos. El primer grupo pertenece a la educación universitaria, el segundo a preparatoria y el tercero a secundaria.

CAPÍTULO IV

4. ANÁLISIS DE LIBROS DE TEXTO

En el presente capítulo se analizan los libros de texto de matemáticas de nivel secundario de dos países del continente americano mediante los aspectos fundamentales de la taxonomía de Palm. Consta de dos partes, la primera dirigida a los libros de texto mexicanos proporcionados por la CONALITEG, y la segunda, a los libros de texto colombianos proporcionados por el proyecto piloto “Vamos a aprender”. Cabe resaltar que en este momento se usa a los libros de texto como una **Variable Dependiente** porque se pretende observar cómo están siendo influenciados por las políticas educativas.

4.1 MÉXICO

El análisis de los libros de texto mexicanos comprende la identificación de problemas matemáticos en contextos de temperatura, los tipos de contextos usados y los conceptos matemáticos que se pretenden desarrollar. Asimismo, se evalúa la presencia del **Evento, Pregunta y Datos e Información** en siete problemas seleccionados al azar.

4.1.1 EL CONTEXTO DE TEMPERATURA Y SUS CAMBIOS EN LOS LIBROS DE TEXTO DE LA CONALITEG

Identificamos 100 problemas en contextos de temperatura que pretenden desarrollar los conceptos matemáticos que se muestran en la Tabla 1. Cabe resaltar que los contextos de temperatura hallados en estos problemas matemáticos se dividen en tres tipos: registro de temperatura, fenómenos de calentamiento y/o enfriamiento y cambios de la fase sólido-líquido-gas. Se puede observar una primacía del primer y segundo caso en estos libros.

CONCEPTO MATEMÁTICO	NÚMERO DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS	CONTEXTOS DE TEMPERATURA		
		Registro de temperatura	Proceso de calentamiento y/o enfriamiento	Cambio de fase
NÚMEROS ENTEROS	21	13	7	1
VARIACIÓN LINEAL	45	9	31	5
VARIACIÓN CUADRÁTICA	8	3	5	0
ESTADÍSTICA	26	19	5	2
TOTAL	100	44	48	8

Tabla 1. Clasificación de los problemas según conceptos matemáticos y el tipo de contexto: México

Contexto 1. *Registro de temperatura*. Son problemas en los que se presenta de forma tabular o gráfica el registro de la temperatura de algún lugar en un determinado tiempo. Se hallaron un total de 44 problemas con estas características, un ejemplo se ofrece a continuación en la Figura 1. El problema matemático muestra, a través de una gráfica, las temperaturas mínimas que se presentaron durante una semana en alguna ciudad. El hecho de no saber el nombre la ciudad en cuestión complica el análisis del **Evento** y las **Preguntas** acerca de la temperatura media que no son cuestiones que se formularían fuera de la escuela.

24.2. Otras propiedades de la media

Problema inicial

En cierta ciudad, las temperaturas mínimas registradas durante siete días fueron las que se muestran en la gráfica.

¿Cuál es la temperatura mínima media?

Si se registra una nueva temperatura mínima de $0\text{ }^{\circ}\text{C}$, ¿el valor de la media sigue siendo el mismo?

Explica por qué.

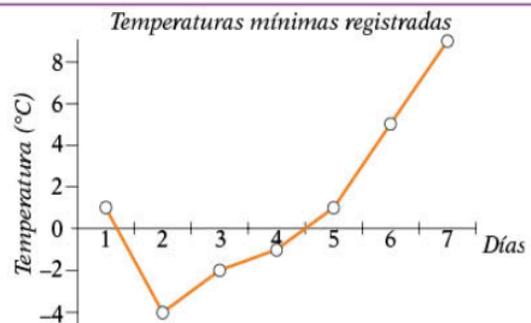


Figura 1. Recuperado de un libro de matemáticas para segundo de secundaria publicado en el 2018.

Contexto 2. *Procesos de calentamiento y/o enfriamiento*. Cuando se calienta una sustancia al agregarle energía en forma de calor. O si una sustancia muy caliente se deja en un medio ambiente de menor temperatura, lo que conlleva a su enfriamiento espontáneo.

Cuando una sustancia se somete a un proceso de calentamiento o enfriamiento, su temperatura depende del tiempo. Si en algún instante deja de variar, se dice que llegó al equilibrio térmico. El tiempo, aquí referido, se mide con un cronómetro que se activa cuando inicia la observación del fenómeno térmico en cuestión. El calentamiento de una sustancia conlleva el incremento de su temperatura y para ello se requiere suministrar energía, como cuando se calienta agua en una hornilla o cuando se expone un vaso con cubos de hielo a los rayos del Sol. Si una sustancia se enfría espontáneamente, su temperatura disminuye hasta que alcanza la de su medio ambiente. En este caso se transfiere calor del material al ambiente que lo rodea.

Hay 48 problemas de este tipo y en la Figura 2 se presenta un ejemplo paradigmático de este caso. El problema matemático en cuestión tiene que ver con dos sustancias diferentes que se someten a un proceso de calentamiento con ayuda de un aparato tecnológico y luego a uno de enfriamiento, usando la temperatura del medio ambiente. Se trata de un enfriamiento espontáneo de sustancias y como consecuencia, su temperatura disminuye exponencialmente con el tiempo. Describe un **Evento** con mucha posibilidad de ocurrencia en la realidad, cuando por ejemplo, preparamos un café, pero luego está tan caliente para tomarlo que dejamos pasar unos minutos para poder beberlo sin quemarnos. Con respecto a la **Información y datos** parece que para los autores el enfriamiento espontáneo de una sustancia en un medio ambiente de menor temperatura es el opuesto del fenómeno de calentamiento producido por el suministro de calor donde la temperatura llega a incrementarse linealmente con el tiempo. Además, las **Preguntas** no son dudas que alguna persona querría resolver en la vida cotidiana.

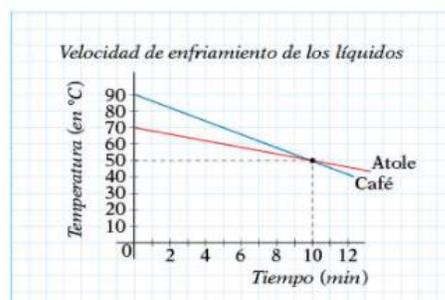
26.3. ¿Cuál de los dos cambia más rápidamente?

Problema inicial

Una taza de café y una de atole se calientan en un horno de microondas. Luego, se sacan del horno y se exponen a la temperatura ambiente, que es de $15\text{ }^{\circ}\text{C}$.

Supongamos que, en los primeros 12 minutos, las temperaturas de ambos líquidos disminuyen uniformemente conforme transcurre el tiempo.

La gráfica representa una aproximación de los cambios de temperatura de ambas tazas durante los primeros 12 minutos a partir del momento en que se sacaron del horno.



¿Cuál es la razón de cambio de la temperatura (o velocidad de enfriamiento) de los dos líquidos? _____ ¿Cuánto tiempo debió transcurrir para que el café y el atole tuvieran la misma temperatura? _____

Figura 2. Recuperado de un libro de matemáticas para tercero de secundaria publicado en el 2018.

Contexto 3. *Procesos de calentamiento y/o enfriamiento con cambio de fase*: en ocasiones estos procesos propician que la sustancia cambie su estado de agregación (fase). Cuando inicia el cambio de fase, la temperatura de la sustancia ya no depende del tiempo hasta que la totalidad del material pasa del estado de agregación previo al nuevo.

Se hallaron un total de 8 problemas con estas características, un ejemplo se presenta a continuación en la Figura 3. El problema matemático describe un **Evento** real en la vida diaria, donde a través de una gráfica se muestra el comportamiento del agua bajo un proceso de enfriamiento. Se puede observar que el agua pasa por tres fases: vapor, líquido y hielo. Sin embargo, hay **Preguntas** acerca de la razón de cambio y ecuación de la recta que no guardan relación con el fenómeno, son preguntas que fuera de la escuela nadie se formularía.

4. Analiza la gráfica y haz lo que se pide.

a. ¿La gráfica representa el calentamiento o el enfriamiento del agua? _____

b. ¿A qué temperatura se encuentra el agua en el tiempo $t = 0$? _____

c. ¿Cuánto tiempo tarda en llegar a 0°C ? _____

d. ¿Es posible que la gráfica pase por el punto $(5, 100)$? ¿Por qué? _____

e. ¿Cuántos grados disminuye la temperatura del minuto 2 al minuto 12? _____

f. ¿En cuánto tiempo la temperatura pasa de 100°C a 0°C ? _____

g. Calcula la razón de cambio para cada intervalo.

- 0 a 2 min _____
- 2 a 4 min _____
- 5 a 10 min _____
- 10 a 12 min _____
- 12 a 14 min _____

h. Escribe las ecuaciones de cada sección de recta: _____

Figura 3. Recuperado de un libro de matemáticas para primero de secundaria publicado en el 2018.

4.1.2 LA AUTENTICIDAD EN ALGUNOS PROBLEMAS PROPUESTOS EN LOS LIBROS DE TEXTO MEXICANOS

En términos de la autenticidad, estos problemas cumplen el **Evento**, pues describen situaciones de la vida cotidiana, pero en relación a la **Pregunta** y la **Información y datos**, no los satisface en algunas ocasiones, porque están muy desconectadas del contexto y de la naturaleza del fenómeno. A continuación, el análisis de siete problemas matemáticos bajo el contexto de temperatura y sus cambios, donde dos problemas corresponden al contexto 1, cuatro problemas al contexto 2 y un problema al contexto 3.

4.1.2.1 PROBLEMA 1:

Este ejemplo se recuperó de un libro de texto de matemáticas para primero de secundaria, se ubica en el contexto 1 y pretende desarrollar el concepto de número entero. En este problema se presenta la tabulación del incremento y decremento de la temperatura al interior de un refrigerador con fallas en su funcionamiento. El objetivo es que el estudiante calcule los instantes de tiempo en

que el refrigerador enfría más rápido y cuando deja de enfriar. El enunciado del problema como aparece en el libro se observa en la Figura 4.

Problemas de suma con números enteros, decimales y Fraccionarios positivos y negativos

1. De manera individual y a partir de lo que has abordado y ejercitado en esta secuencia, resuelve los problemas.

a. El refrigerador de una carnicería presenta fallas. Prende a diversos intervalos de tiempo, y en cada encendido y apagado enfría o deja de enfriar. Completa la tabla en la que se registran los cambios de temperatura en el refrigerador.

Hora	8	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6	7	8
Temperatura °C	25.5	8.2	-5.3	-18.0	3.5	-5.9	-23.2	-4.8	13.1	3.8	-10.4	-19.2	7.6
Cambio en la temperatura													

- En qué hora del día enfrió más rápido el refrigerador: _____
- En qué hora del día dejó de enfriar en mayor cantidad el refrigerador: _____
- En qué horarios el refrigerador dejó de enfriar: _____
- ¿Cómo obtuviste esa información? _____

Figura 4. Recuperado de un libro de matemáticas para primero de secundaria publicado en el 2018.

Los refrigeradores y su uso pertenecen a las vivencias cotidianas de estudiantes de secundaria. Se enfrían refrescos y aguas de fruta. También se conservan alimentos por lapsos de tiempo mayores en el interior de un refrigerador que si se dejan a una temperatura ambiente típica de México podrían descomponerse. Así que, los autores del problema eligen atinadamente este contexto.

Ahora, considerando que un refrigerador comercial, normalmente trabaja a $-25\text{ }^{\circ}\text{C}$, de la Figura 4 se observa que los datos de la tabla están en el intervalo de valores reales. Esta temperatura fue tomada de la página web de Mecalux, que es una de las compañías punteras en el mercado de sistemas de almacenaje en México (Mecalux, 2017). Éste es un acierto en relación a la **Información y datos**.

En cuanto al **Evento**, en el problema se menciona que el refrigerador presenta fallas en su funcionamiento, suceso que puede ocurrir en la realidad. Se sobreentiende que la temperatura de funcionamiento del refrigerador cambia, y de la tabla de datos se observa que las temperaturas

menores a cero grados Celsius están entre $-4.8\text{ }^{\circ}\text{C}$ y $-23.2\text{ }^{\circ}\text{C}$. Así que, la temperatura de funcionamiento normal del refrigerador debe caer en este rango.

Sin embargo, hay inconvenientes relacionados con el contexto físico. El termostato del refrigerador mantiene estable la temperatura de su interior, se activa cuando se incrementa y se desactiva cuando el refrigerador alcanza su temperatura de funcionamiento óptimo. El material de la parte externa del refrigerador retarda el equilibrio de la temperatura de su interior con la del aire que lo rodea (medio ambiente). Con la puerta cerrada, la temperatura en su interior experimentaría cambios de unos pocos grados Celsius en un lapso de tiempo de una hora. Ésta se incrementa debido al efecto del medio ambiente a través de su “pared aislante” y porque deja de funcionar el mecanismo del refrigerador.

De la tabla de datos de la Figura 4 se desprende que hay tres intervalos de tiempo en los que falló el mecanismo del refrigerador y como consecuencia, se incrementó la temperatura: (a) de las 11:00 a las 12:00 horas, (b) de las 14:00 a las 16:00 horas y (c) de las 19:00 a las 20:00 horas. De las 8:00 a las 11:00 horas, la temperatura del refrigerador pasa de 25.5°C a -18.0°C . Justo a las 11:00 horas, falló el mecanismo del refrigerador y, en un intervalo de una hora, la temperatura se incrementó 21.5°C . Este incremento es grande como para que suceda en tan solo una hora, ya que el refrigerador tiene una “pared aislante”. Todavía más dramáticos son los incrementos de 26.8°C y 36.3°C que ocurren, respectivamente, de las 19:00 a las 20:00 horas y de las 14:00 a las 16:00 horas. Es muy probable que los datos del problema sean inventados, no se desprendieron de una situación real. Lo que significa que el problema no cumple 100% con el aspecto de **Información y datos**.

Por último, las preguntas están totalmente aisladas de la realidad porque si el refrigerador está averiado la urgencia es arreglarlo y ningún técnico en refrigeración se haría esas preguntas antes de hacerlo funcionar. En síntesis, el problema 1 es *No Auténtico* porque cumple con el **Evento**, pero no con las **Preguntas** ni la **Información y datos**.

4.1.2.2 PROBLEMA 2

Este ejemplo se recuperó de un libro de tercero de secundaria, se ubica en el contexto 2 y pretende desarrollar el concepto de variación cuadrática. El **Evento** involucra el registro de la temperatura diaria de un poblado durante un mes, lo cual ocurre en la realidad en los departamentos

encargados del pronóstico meteorológico de cada país, lo que significa que cumple con este primer aspecto. Es un proceso de calentamiento de la atmósfera debido a la radiación solar y de enfriamiento cuando el Sol se oculta. En el enunciado del problema se asegura que la temperatura se mide cada hora iniciando a las 00:00 horas y concluyendo a las 24:00 horas.

La **Información y datos** se ofrece en una gráfica de temperatura contra tiempo, que parece corresponder a lo que acontece en un solo día, ¿dónde está la información de los días restantes? Las temperaturas que se muestran, ¿son valores promedios de los registros realizados durante todo el mes? En consecuencia, el problema no cumple con este aspecto porque no hay claridad en los **datos**. Estas omisiones oscurecen la situación que se está presentando como contexto para aprender la variación cuadrática y su representación algebraica. En la Figura 5 se presenta el enunciado del problema como aparece en el libro de texto.

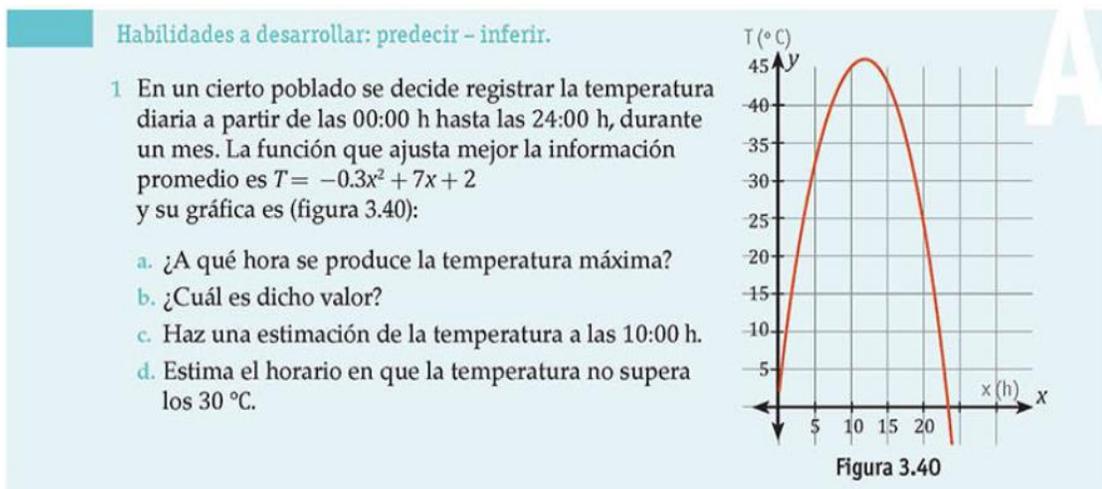


Figura 5. Recuperado de un libro de texto de tercero de secundaria publicado en el 2016.

En la Figura 5 se hace referencia a cierto poblado, sin especificar cuál. Sin embargo, al observar la gráfica se aprecia una variación extrema de la temperatura que va de 45°C a 0°C, lo que puede corresponder, por ejemplo, a un desierto. Según el Pronóstico Meteorológico General, fuente oficial del Gobierno de México, en este año se presentaron las temperaturas más elevadas, superiores a 45°C, en Baja California y Sonora (Servicio Meteorológico Nacional, 2018).

Es relevante mencionar que estas temperaturas máximas extremas se han registrado entre los meses de julio y agosto, y la más baja, alrededor de 5°C, en el mes de enero. Un ejemplo se presenta en la Figura 6 que muestra la variación de la temperatura dos días de septiembre en Mexicali, Baja California, el cual es un poblado que alcanza la temperatura máxima de 44°C.

Comparando esta información con los datos de la Figura 5, esta dista de la realidad. Por ende, la variación de temperatura que se presenta en la gráfica difícilmente corresponde a las temperaturas que ocurren en un mismo día en alguna ciudad de México.



Figura 6. Variación de temperatura por horas de los días 9 y 10 de septiembre del año 2018 en Mexicali – Baja California, México. Recuperado de <https://www.meteored.mx/mexicali/por-hora>

Con respecto a las **Preguntas**, si cumple con este aspecto porque son preguntas que podría hacerse un trabajador del departamento del pronóstico meteorológico en relación a la temperatura de un lugar en específico. Cabe resaltar, que el contexto de un problema matemático debe servir para que se desencadene el pensamiento matemático del estudiante y utilice su experiencia cotidiana, percepción, conocimientos, entre otros. Sin embargo, el usado en este problema es artificial, dado que es notorio que es un vestido mal confeccionado que le colocan a la función cuadrática, porque la gráfica no corresponde naturalmente a ninguna medición de temperatura y los números no se relacionan con el enunciado, en otras palabras, no se cuida la **Información** y **datos** de la taxonomía de Palm (2009).

Además, el hecho que la gráfica sea más o menos ancha, estirada o estrecha depende del lugar. Un lugar selvático es diferente a la ciudad, la montaña o el desierto. Además de la desatención de los autores que proporcionan el registro de la temperatura del poblado de un día y mencionan que se trata de los datos de todo un mes. En síntesis, el problema 2 es *No Auténtico* porque cumple con el **Evento** y la **Pregunta**, pero no con **Información** y **datos**.

4.1.2.3 PROBLEMA 3

Este ejemplo se recuperó de un libro de texto de matemáticas para segundo de secundaria, se ubica en el contexto 2 y pretende desarrollar el concepto de variación lineal. En este problema se narra gráficamente cómo evoluciona la temperatura de tres especímenes de bacterias conforme transcurre el tiempo. El objetivo es que los estudiantes reconozcan la variación lineal y escriban las expresiones algebraicas que rigen el comportamiento de los tres tipos bacterias. El incremento de la temperatura se debe a un proceso de calentamiento al que no se hace referencia en el enunciado del problema. En la Figura 7 se presenta el enunciado como aparece en el libro de texto.

7. Un biólogo graficó el registro de la variación de la temperatura de tres bacterias, al momento de ponerlas bajo el microscopio y determinar la tolerancia de su organismo.

a. ¿Qué bacteria aumenta más su temperatura conforme avanza el tiempo? _____

b. ¿Cuál aumenta menos su temperatura? _____

c. ¿Qué bacteria es más resistente en época de calor? _____

d. ¿Cuál es menos resistente? _____

e. ¿Qué bacteria aumenta su temperatura a 8 °C en 4 h? _____

f. Escribe la expresión algebraica para cada tipo de bacteria: _____

Color de rosa: _____ Verde: _____ Azul: _____

Tiempo en horas	Temperatura °C (Azul)	Temperatura °C (Verde)	Temperatura °C (Rosa)
0	0	0	0
1	4	2	1
2	8	4	2
4	16	8	4
7	28	14	7

Figura 7. Recuperado de un libro de matemáticas para segundo de secundaria publicado en el 2013.

En el enunciado se utiliza de forma errada la frase “variación de la temperatura de tres bacterias” porque físicamente sólo es medible la temperatura de un sistema formado por una multitud de moléculas, del orden 10^{23} (el número de Avogadro) y por tanto no se puede hablar de la temperatura de una bacteria ni de tres bacterias sino de la sustancia que las mantiene vivas, la cual suele denominarse “cultivo”. En consecuencia, el término apropiado debe ser “el registro de la variación de la temperatura de tres cultivos de bacterias” porque al ser diferentes líneas rectas las que aparecen en la gráfica que acompaña el enunciado, serán distintas muestras de bacterias, no tres bacterias. Lo anterior significa que el problema no satisface el **Evento**.

Además, tampoco satisface **la información y datos**, dado que en la gráfica se observa que cada cultivo alcanza diferentes valores de la temperatura cuando han transcurrido siete horas. Esto nos llevaría a pensar que los tres cultivos se están calentando a una razón constante mientras son observadas en el microscopio óptico. Pero para monitorear su temperatura no es necesario observarlos al microscopio ¿Qué propiedad del cultivo se está observando al microscopio? ¿Es la tolerancia de las bacterias de la que se habla en el enunciado del problema? Pero, ¿qué significa el término “tolerancia”? quizás se refieran a la temperatura que soportan las bacterias, encima de la cual el cultivo muere. Sí fuese este el caso, cada cultivo alcanzaría en tiempos diferentes, la temperatura límite que soporta. La gráfica que se presenta no corresponde a esta situación.

O podría ser que los tres cultivos de bacterias sigan vivos cuando ya han transcurrido siete horas de calentamiento. El problema no explicita esta situación, lo cual puede generar dificultad en los estudiantes al momento de resolverlo.

En cuanto a las **Preguntas**, los incisos a), b) y d) son cuestionamientos que podría hacerse un biólogo al observar el comportamiento de su muestra. Sin embargo, el inciso f) en definitiva nunca se lo haría, y cabe anotar que en el inciso c) se indaga sobre la resistencia de las bacterias en época de calor, ¿a qué lugar hace referencia? porque no todos los lugares llegan a la misma temperatura en esta época. En síntesis, el problema 3 es *No Auténtico* porque no cumple con ninguno de los tres aspectos de autenticidad.

4.1.2.4 PROBLEMA 4

El problema 4 se ubica en el contexto 2 y pretende desarrollar el concepto de variación cuadrática. Los autores de este problema desean mostrar a los estudiantes que una cuadrática puede modelar varios fenómenos, en particular ellos se ocupan de dos situaciones que físicamente son de diferente naturaleza. El primero es un fenómeno de calentamiento, seguido de un enfriamiento y el segundo es un tiro vertical de un proyectil. En este caso se proporciona una ecuación cuadrática para la temperatura en función del tiempo de una sustancia que fue observada durante siete horas. No se menciona a qué proceso fue sometida la sustancia ni cuál es dicha sustancia para luego hallar la expresión algebraica de la temperatura en función del tiempo, por tanto, se puede afirmar que este problema no cumple con el **Evento** porque se aleja totalmente de la vida real.

En una segunda instancia se le pide al estudiante que considere cambiar la variable temperatura por altura, reflexionen en grupo si el valor inicial de la temperatura lo puede dar como

la altura inicial y piensen en la importancia del contexto. El problema como aparece textualmente en el libro se presenta en la Figura 8.

Actividad 2. La temperatura

Se midió la temperatura (dada en °C) de una sustancia durante siete horas y se determinó que la función que representa dicha temperatura T , en función del tiempo transcurrido en horas t , está dada por la siguiente expresión algebraica:

$$T = -\frac{5}{16}(t - 2)(t - 8)$$

- a) ¿Cómo quedaría expresada la temperatura en función del tiempo al resolver el producto? Recuerden lo trabajado en años anteriores de productos notables.

- b) ¿Cuál fue la temperatura inicial de la sustancia? _____
- c) ¿Qué estrategias usaron para encontrarla? Comenten con sus compañeros las distintas estrategias y, en grupo, expongan cómo lo resolvió cada quien.
- d) ¿Qué características tiene el valor hallado? _____
- e) ¿La sustancia estaba fría, templada o caliente? _____
- f) Si se hablara de altura, ¿podría haberse dado ese mismo valor como la altura inicial? ¿Cuán importante es el contexto en la situación? Reflexionen en grupo la respuesta. _____
- g) ¿En qué momento la temperatura fue de 0 °C? ¿Cuál fue la temperatura máxima a la que llegó la sustancia y en qué tiempo la alcanzó? ¿Cómo podrían comprobarlo? Justifiquen sus respuestas.

- h) ¿Qué temperatura tenía al terminar el experimento? Sabiendo que la temperatura ambiente oscila entre los 20 y 25 °C, ¿podría la sustancia haber llegado a esta temperatura? Comenten con sus compañeros y justifiquen sus respuestas.

Figura 8. Problema recuperado de un libro de tercero de secundaria publicado en el 2014.

En el problema no se menciona a qué proceso se somete la sustancia, cuya temperatura se describe a través de la función, $T(t) = a(t - 2h)(t - 8h)$ durante las siete horas que duró el experimento, con $a = -\frac{5}{16} \frac{^{\circ}\text{C}}{h}$, donde h es el símbolo para el tiempo medido en horas. La gráfica de esta expresión se muestra en la Figura 9.

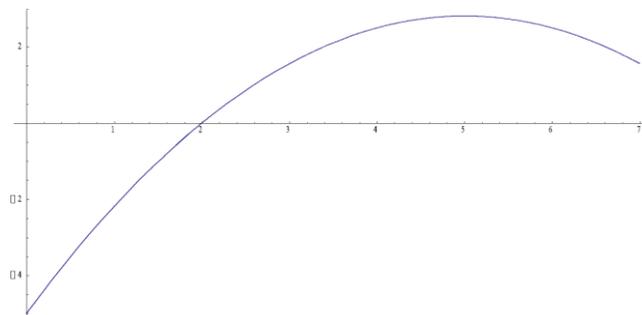


Figura 9. Gráfica de temperatura contra tiempo del Problema 4. Elaboración propia.
Nota: En el eje vertical se muestra la temperatura en grados Celsius y en el horizontal el tiempo en horas.

En $t = 0h$, la temperatura de la sustancia es -5°C . Al finalizar el experimento, $t = 7h$, la temperatura medida es $\frac{25}{16}^{\circ}\text{C} = 1.56^{\circ}\text{C}$. Así que la sustancia va incrementando su temperatura desde -5°C hasta 2.8°C y esto ocurre en el instante de tiempo $t = 5h$ cuando alcanza su máxima temperatura. Para tiempos posteriores, la temperatura comienza a descender. Los ceros de la función son dos, cuando alcanza la temperatura de 0°C a las 2h y a las 8h, una hora después de concluir el experimento.

Con relación a las preguntas, en el inciso a) la temperatura en función del tiempo quedaría expresada como una ecuación cuadrática, así:

$$T(t) = a(t^2 - 10t + 16)$$

donde $b = 10 h$ y $c = 16 h^2$.

Hasta el inciso d) incluyendo g), la intención del autor es que los estudiantes manipulen la expresión para que se acerquen al concepto de función. Sin embargo, la pregunta formulada en el inciso e) no tiene sentido, porque no se menciona una temperatura de referencia para hacer la comparación, y así poder determinar si la sustancia estaba fría, templada o caliente. En el inciso f), el autor no menciona a que se refiere con el término altura. Estas son preguntas que no se haría ninguna persona en la vida real. Su intento es hacer ver a los estudiantes que, una función puede modelar diferentes fenómenos físicos de la biología, de la química, etc., dado que los contextos de física son variados pero la ecuación es la misma e incluso diferentes temas, porque por un lado es la temperatura de un material y por otro de la altura que alcanza un objeto que es disparado verticalmente. Aquí se refiere al movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, donde a está relacionada con la aceleración del móvil.

Los parámetros “experimentales” de la cuadrática, adaptados al tiro vertical, como es sugerido por el autor del libro, conducen a la siguiente expresión, $y(t) = y_0 + v_0t - \frac{1}{2}at^2$, donde $y_0 = -5u$ es la posición del proyectil en $t = 0h$, $v_0 = 3.1 u/h$ es la velocidad cuando inició de la observación y $a = 0.6 u/h^2$ es la aceleración constante a la que está sujeto el móvil. Sí en estas expresiones u es la unidad de longitud. Si $u = 1 m$, $a = 4.6 \times 10^{-8} m/s^2$ y $y_0 = -5m$. Observe que este valor para a es muy pequeño comparado con la aceleración gravitacional terrestre, $9.8 m/s^2$ y con la de la Luna, $1.62 m/s^2$. Por tanto, se puede afirmar que no satisface la **Información** y **datos**. Es evidente que el autor nunca lo pensó, lo cual conlleva a los estudiantes a operar sin sentido.

Es menester resaltar, que la intención del autor es apropiada, el problema radica en cómo lo hizo porque es posible modelar el tiro vertical con una ecuación cuadrática pero el problema arroja valores raros que denotan en un revestimiento. La idea es que los niños aprendan la función cuadrática y se den cuenta de sus características más relevantes, pero el contexto que se está tratando de utilizar para aprender matemáticas no les está ayudando, más bien se convierte en un estorbo porque lo usan artificialmente. Por último, es difícil que el estudiante conteste el inciso h) porque no se le dice a qué proceso se somete la sustancia durante 7 horas. Una aclaración de este tipo le serviría para recordar que, una sustancia sumergida en un medio ambiente dado, alcanza eventualmente la temperatura de éste, en la medida que no se le calienta o enfría. En síntesis, el problema 4 es *No Auténtico* porque no satisface los tres aspectos de autenticidad.

4.1.2.5 PROBLEMA 5

Este ejemplo se recuperó de un libro de texto de matemáticas para primero de secundaria, se ubica en el contexto 1 y pretende desarrollar el concepto de razón de cambio. En este problema el estudiante debe describir de forma tabular y gráfica cómo evoluciona la temperatura del agua al estar sometida a un proceso de calentamiento. En la Figura 10 se presenta el enunciado como aparece en el libro de texto.

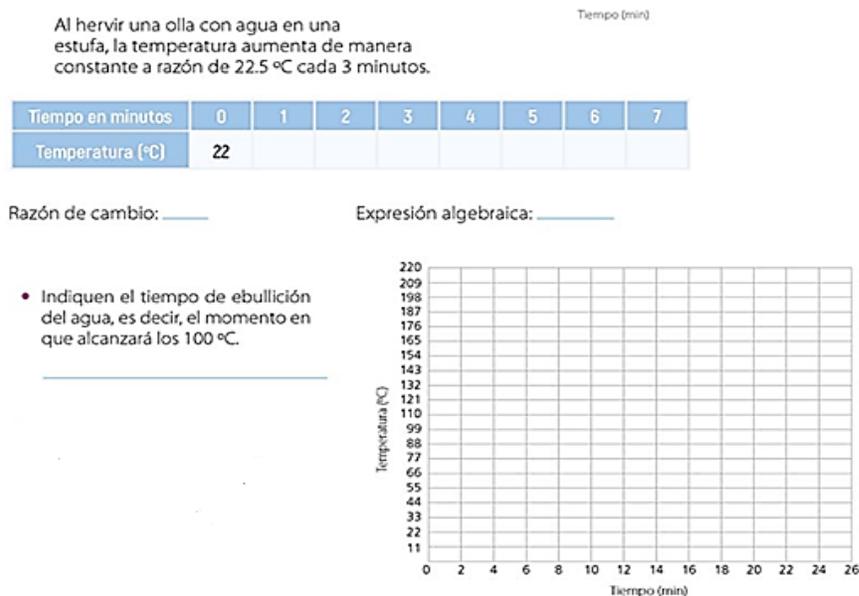


Figura 10. Recuperado de un libro de matemáticas para primero de secundaria publicado en el 2018.

En el **Evento** describe el incremento de temperatura de cierta cantidad de agua, dada una cantidad de calor, que está suministrando la hornilla de una estufa; es por consiguiente una situación de la vida cotidiana muy común. Sin embargo, se le solicita al estudiante completar una tabla de registro de la temperatura, hallar la razón de cambio y la expresión algebraica de la situación, así como presentar la gráfica. Estas **Preguntas** no se las haría ninguna persona al momento de colocar agua a hervir, por tanto, no cumple con este aspecto de Palm.

Ahora, los autores del libro consideran que el agua hierve a 100°C y preguntan en qué tiempo el agua alcanza su punto de ebullición, pero ignora mencionar que independientemente de la cantidad de agua, ésta comenzará a hervir a una temperatura dada, que depende de la presión atmosférica en la zona y la presión depende de la altura del lugar, relativa al nivel del mar; lo que significa que no satisface el aspecto de **Información** y **datos** porque se necesita conocer el lugar donde se realiza el experimento para dar respuesta a esta pregunta. En síntesis, el problema 5 es *No Auténtico* porque sólo cumple con el **Evento**.

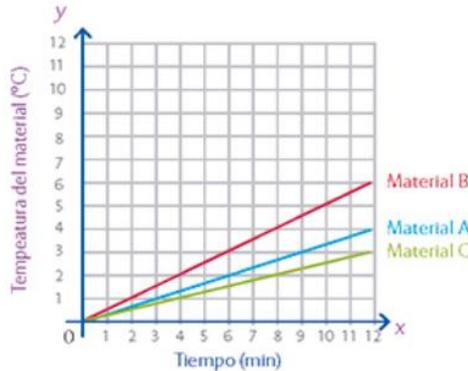
4.1.2.6 PROBLEMA 6

Es un problema de primero de secundaria que plantea el aprendizaje de la razón de cambio de dos magnitudes y de la pendiente de una línea recta, usando el contexto 2. El problema se plantea poner a prueba tres materiales que se usarán como aislantes térmicos en los techos de las casas y se desea saber cuál de ellos se calienta más con el transcurso del tiempo. En la Figura 11 se presenta el enunciado como aparece en el libro de texto.

Pendiente de una recta

En parejas, resuelvan las siguientes actividades.

1. Una constructora puso a prueba tres materiales que se usarán como aislantes térmicos en techos de casas. Se desea saber cuál de ellos se calienta más conforme pasa el tiempo. Para hacer la prueba, se aplica a los materiales una temperatura de 35°C . Después, se inicia la medición de los cambios térmicos que experimenta, por minuto, cada material. Las gráficas muestran el comportamiento de los tres materiales:



- a) Determinen la razón de cambio en cada caso.

Material A: _____ Material B: _____

Material C: _____

- b) ¿Cuál de las rectas tiene mayor pendiente, es decir, cuál muestra mayor inclinación?

- c) ¿Cómo se puede establecer qué recta tiene mayor pendiente a partir de la razón de cambio? _____

Figura 11. Recuperado de un libro de matemáticas para primero de secundaria publicado en el 2018

En términos de la taxonomía de Palm, el problema describe un **Evento** que tiene una alta probabilidad de ocurrencia en la vida cotidiana, dado que sería normal seleccionar para la construcción de una vivienda, un material para el techo que sirva de aislante térmico y así protegerse de altas o bajas temperaturas, según sea el requerimiento.

En relación al aspecto **Información** y **datos**, el problema de una forma no específica aplica a los materiales una temperatura de 35°C , a lo que nos cuestionamos ¿qué significa que se aplique una temperatura de 35°C ? ¿Cómo se puede aplicar una temperatura de 35° ? El problema no dice la forma en que se le aplica el calor, se entiende entonces, que los materiales se calientan de la misma manera, es decir, que se le aplica la misma cantidad de calor por unidad de tiempo. Los materiales se van calentando progresivamente, y se empieza a medir los cambios que experimentan los materiales por minuto, pero la forma en la que está redactado el problema hace pensar que se llevaron los tres materiales a 35°C y luego se registra la medición. Lo anterior contradice la gráfica presentada porque se observa un aumento de la temperatura de los metales.

Ahora, si la máxima temperatura que alcanzan los materiales es de 6°C , para qué se muestra en la gráfica el intervalo de 6°C a 12°C si no sucede absolutamente nada a esas temperaturas. Era

preferible omitir ese espacio para que los estudiantes apreciaran más lo sucedido entre 0°C y 6°C . Sin embargo, el problema no menciona por qué la temperatura inicial de los materiales es 0°C . Por todo lo anterior no se satisface este aspecto.

Con respecto a las **Preguntas** formuladas, estas no se conectan con el contexto, son preguntas que no se harían trabajadores de una constructora para decidir por el material que menos se calienta, incluso no invita al estudiante a tener en cuenta el contexto para su solución, como por ejemplo, a tomar una decisión sobre cuál sería el material más recomendado con base en la razón de cambio de cada material, pedida en la primera pregunta, ni de la pendiente, pedidas en la segunda y tercera, sólo los colocan a operar con los números. En síntesis, los incisos no consideran ninguna toma de decisión relacionada con la finalidad de la constructora, el contexto se desecha y se resuelven las preguntas. El problema es *No Auténtico* porque sólo se satisface el **Evento**.

4.1.2.7 PROBLEMA 7

Es un problema de tercero de secundaria que plantea el aprendizaje de la representación gráfica a partir de datos tabulados, usando el contexto 3. El problema plantea el calentamiento de una masa de agua con su respectiva medición de temperatura a medida que transcurre el tiempo, cuyos datos se encuentran en una tabla, y se desea saber cuál es la representación gráfica del comportamiento de los datos, además, de describir las etapas que se puedan percibir. En la Figura 12 se presenta el enunciado como aparece en el libro de texto.



1. Realiza en tu cuaderno lo que se pide en la actividad.

En un matraz se pone a calentar medio litro de agua y se mide su temperatura conforme pasa el tiempo. Se obtiene la siguiente tabla de datos:

Tiempo (min)	Temperatura ($^{\circ}\text{C}$)
0	17
2	17
4	29
6	41
8	54
10	67
12	80
14	95
16	100
18	100

- Grafica los datos contenidos en la tabla.
- Describe las etapas que se pueden observar en la gráfica:
 - En el tiempo que tarda en pasar de la temperatura ambiente a calentarse, ¿cuánto tiempo permanece constante la temperatura?
 - En la etapa de calentamiento, ¿cómo aumenta la temperatura?
 - Cuando se llega al punto de ebullición, ¿cuánto tiempo permanece constante?

© Noventa y Nueve

Figura 12. Recuperado de un libro de matemáticas para tercero de secundaria publicado en el 2016.

El **Evento** descrito en el problema tiene una alta posibilidad de ocurrencia en la realidad cuando se calienta agua para hacer un té, por ejemplo, y luego se espera que pasen unos minutos antes tomarlo. Con relación a la **Información y datos**, los autores no mencionan como se realiza el calentamiento; no es lo mismo que la parrilla y el matraz inicien su calentamiento al mismo tiempo, a que el matraz se coloque sobre la parrilla caliente. Es extraño que la temperatura del agua permanezca fija durante los primeros dos minutos del calentamiento, aun cuando el vidrio es un conductor pobre del calor.

Además, consideran que el agua alcanzó el punto de ebullición a los 100 °C, sin decir a que altura sobre el nivel del mar se realizó el experimento. Vea que no tiene sentido la última **Pregunta** porque una vez que el agua llegue a su punto de ebullición, su temperatura permanecerá constante, hasta que se evapore toda. Ahora, si una persona necesita hervir agua sólo le interesaría conocer el tiempo que demora en alcanzar el punto de ebullición, pero no sentiría interés en graficar la relación de la temperatura con respecto al tiempo y mucho menos en describir lo que ocurre con los datos.

En la Figura 13 se grafican los datos de la tabla. El modelo lineal se obtuvo de la expresión,

$$T(t) = \frac{51}{8} \frac{^{\circ}\text{C}}{\text{min}} (t - 4 \text{ min}) + 29 ^{\circ}\text{C}$$

La temperatura del agua sigue este comportamiento cuando la parrilla y el matraz están a la misma temperatura. Cuando el agua inicie la ebullición, la temperatura y el tiempo cambiarán el tipo de variación para llegar a una temperatura constante en la ebullición. En la realidad, no se dan los cambios abruptos de la temperatura que se observan en la Figura 13.

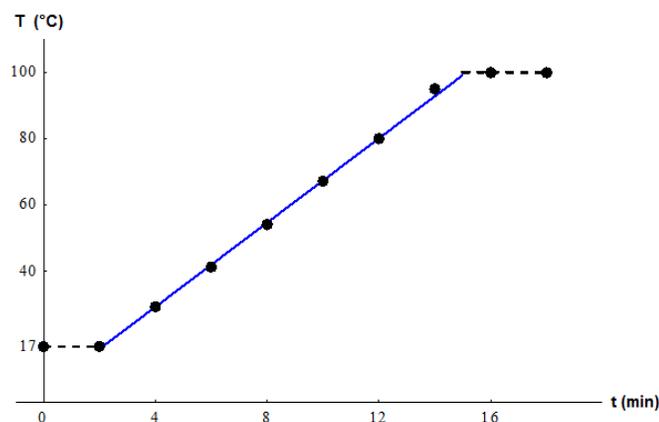


Figura 13. Temperatura en Celsius contra el tiempo en minutos. Gráfica de los datos dados en la tabla del problema.

Para contrastar los datos del problema, se realizó un experimento en la ciudad de Puebla a 2135 metros sobre el nivel del mar, referente al calentamiento de 200 ml de agua destilada y se siguieron las siguientes instrucciones:

Para censar la temperatura del aire del laboratorio, coloque un dispositivo termómetro-soporte el cual se mantendrá alejado de la parrilla. Luego, determine la masa de 200 ml de agua destilada, viértala en un recipiente de peltre y colóquelo sobre la parrilla eléctrica. Ésta tiene la posibilidad de rotar el agitador magnético colocado en el seno del fluido, con lo que se asegura una distribución uniforme de la temperatura del agua. Coloque un termómetro en la parte central de la masa de agua y fíjelo mediante un soporte universal (Véase la Figura 14). Asegúrese que el termómetro quede alejado de la superficie del agua, así como de las paredes y del fondo del recipiente. Permita que la parrilla trabaje en Heat-5 y Stir-2 y conéctela a la corriente eléctrica. Desde este instante, inicie la medición de la temperatura del agua y el tiempo de calentamiento hasta que se alcance el punto de ebullición. Tome datos cada dos minutos y regístrelos en una tabla.



Figura 14. Materiales utilizados para el experimento.

Nota: Cuando inició el registro de los datos, el recipiente con el agua y la parrilla están a la temperatura ambiente, 20 °C.

La tabla 2 muestra los datos obtenidos de la medición.

Tiempo (min)	Temperatura (°C)
0	20
2	25
4	37
6	49
8	60
10	69
12	76
14	80
16	83
18	84
20	85
22	85.5
24	85,5
26	86
28	86
30	86
32	86
34	86
36	86

Tabla 2. Datos experimentales del calentamiento.

En la Figura 15 se grafican los datos experimentales de la Tabla 2. La ecuación punto-pendiente de la línea recta que modela el calentamiento de la masa de agua se obtiene de los datos (2min, 25°C) y (8min, 60°C). La línea recta se obtiene de la expresión,

$$T(t) = \left(\frac{35 \text{ }^\circ\text{C}}{6 \text{ min}}\right)(t - 2 \text{ min}) + 25 \text{ }^\circ\text{C}$$

Este modelo predice que, a los 26 min, el agua alcanza la temperatura, 86 °C.

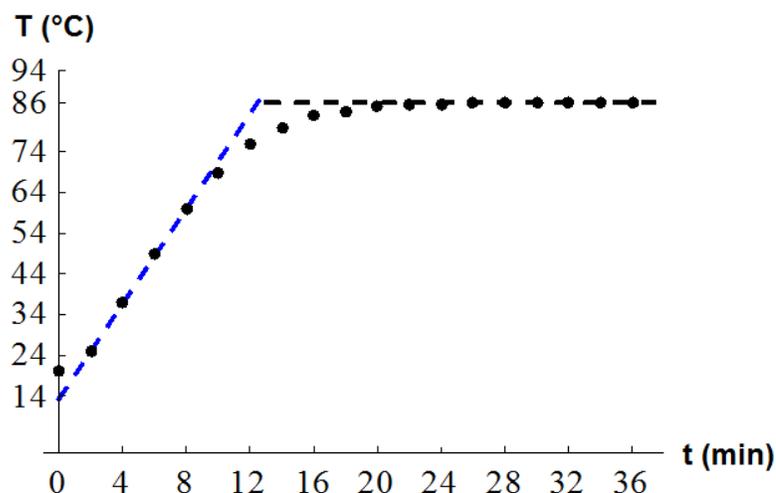


Figura 15. Temperatura contra el tiempo.

Nota: Los datos experimentales de la Tabla 2 se señalan con círculos rellenos, línea punteada de pendiente positiva modela el calentamiento del agua y la de pendiente cero da cuenta del comportamiento del agua hirviendo. La temperatura de ebullición del agua es 86 °C.

Al comparar los datos experimentales con el problema matemático, podemos observar que después de dos minutos de haber empezado el experimento, la temperatura cambió y media hora después el agua alcanzó su punto de ebullición, pero en el problema del libro de texto se mantuvo la temperatura después de los dos minutos y el agua alcanzó su punto de ebullición antes de los 20 minutos. Cabe destacar, que en el problema del texto se utilizó vidrio, y nosotros, un metal, el cual es mejor conductor de calor, aun así, el comportamiento inicial de los datos del problema no podría ser así porque la parrilla, la base del recipiente y el agua que está sobre esta superficie se van calentando y se requiere un lapso de tiempo hasta que alcanzan una temperatura dada. Una vez que esto sucede, el calor suministrado por la parrilla se invierte en el calentamiento del agua y a esto se debe el incremento lineal que se observa en la Tabla 2.

Este hecho es rescatado por los autores del problema como se observa en la Figura 13. De la Tabla 2 y la Figura 15 se observa que a la masa de agua le llevo un lapso de tiempo de 14 min desde que comenzó a hervir hasta que alcanzó el punto de ebullición, en contraposición con la propuesta de texto, donde el tránsito es abrupto. Concluimos que en el problema se observa la adecuación que se hace del calentamiento de sustancias y su cambio de fase, con tal de usarlos como contextos en la enseñanza de la variación lineal.

No se puede asegurar que los datos del problema no son experimentales porque hace falta más información, como el lugar donde se realizó, por ejemplo, en Puebla la muestra de agua destilada hirvió a 86°C , o si la temperatura inicial del recipiente y el agua coincidían con el ambiente. Tampoco se pueden comparar las pendientes de las expresiones porque dependen de qué tanto calor fue suministrado por unidad de tiempo. Se puede afirmar que los datos propuestos son adecuados porque la gráfica modela apropiadamente la temperatura del agua en tiempos medios, así como la temperatura máxima que concuerda con el conocido hecho experimental, a saber, al nivel del mar el agua alcanza su punto de ebullición a 100°C .

En síntesis, el problema es *No auténtico* porque cumple con el **Evento** y podría cumplir con **Información y datos**.

4.2 COLOMBIA

El análisis de los libros de texto colombianos comprende la identificación de problemas matemáticos en contextos de temperatura, los tipos de contextos usados y los conceptos matemáticos que se pretenden desarrollar. Asimismo, se evalúa la presencia del **Evento**, **Pregunta** y **Datos e Información** en tres problemas seleccionados al azar.

4.2.1 LOS LIBROS DE TEXTO DE MATEMÁTICAS COLOMBIANOS

La Secretaría de Educación Pública tiene aproximadamente 60 años proporcionando libros a los estudiantes mexicanos a través de La Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos (CONALITEG). El Ministerio Educativo Colombiano los proporcionó hasta el año 2017, lanzando el proyecto piloto “Vamos a aprender”, el cual es el primer paso hacia la meta de hacer de Colombia la nación más educada de América Latina en el año 2025.

En los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas planteados por el Ministerio de Educación Nacional Colombiano, MEN (2006), se establece que:

...podría convertirse en el principal eje organizador del currículo de matemáticas, porque las situaciones problema proporcionan el contexto inmediato en donde el quehacer matemático cobra sentido, en la medida en que las situaciones que se aborden estén ligadas a experiencias cotidianas y, por ende, sean más significativas para los alumnos. Estos problemas pueden surgir

del mundo cotidiano cercano o lejano, pero también de otras ciencias y de las mismas matemáticas, convirtiéndose en ricas redes de interconexión e interdisciplinariedad (p. 52).

Lo anterior es evidencia de la importancia del contexto en la formulación de los problemas matemáticos en la política educativa de Colombia, por tanto, se esperaría que los libros de texto reflejen concordancia entre los problemas verbales de las matemáticas escolares y las situaciones del mundo real.

Cabe aclarar que, por ser una prueba piloto, sólo algunas instituciones educativas tienen acceso a estos libros y que sólo es un libro por cada grado de secundaria de la misma editorial. Es menester mencionar que, en el sistema educativo colombiano, la educación básica secundaria está conformada por 4 grados: 6°, 7°, 8° y 9°. Se reporta que en estos libros no se hallaron problemas relacionados con este contexto en grado sexto ni noveno. Se encontraron nueve en séptimo y dos en octavo. Fueron un total de 11 problemas que usan dos contextos de la temperatura como se muestra en la Tabla 3.

Concepto Matemático	Cantidad de problemas matemáticos	Contexto de Temperatura	
		Proceso de calentamiento y/o enfriamiento	Registro de temperatura
Números Enteros	6	1	5
Variación Lineal	5	2	3
Total	11	3	8

Tabla 3. Clasificación de los problemas según conceptos matemáticos y el tipo de contexto: Colombia

4.2.2 EL CONTEXTO DE LA TEMPERATURA EN LIBROS COLOMBIANOS

A continuación, se presentan tres ejemplos representativos de los conceptos matemáticos que pretenden que el estudiante aprenda, el primero dentro de un contexto de registro de temperatura, y el segundo y tercero en un contexto de enfriamiento. En términos de la autenticidad, estos problemas no cumplen con ninguno de los aspectos fundamentales de la taxonomía de Palm porque omiten información del contexto y del fenómeno.

4.2.2.1 PROBLEMA 8

El problema de la Figura 16 no evidencia un **Evento** explícito, sino que traslada directamente al estudiante a una gráfica que muestra la temperatura de una ciudad en un mes determinado. Realmente hay un uso superficial del contexto porque no se especifica la ciudad que presenta esas variaciones de temperatura, ¿a qué lugar se refiere? Con respecto a la **Información** y **datos**, estos no coinciden con la realidad porque en la actualidad el registro de la temperatura se hace en intervalos de una hora y en la gráfica se presenta cada tres horas con cambios muy drásticos. Además, al parecer, en ese lugar está ocurriendo un cambio de estación climática porque cada vez desciende más la temperatura, pero no se menciona en el enunciado; por tanto, no satisface este aspecto porque no hay claridad de lo que está sucediendo en la mencionada ciudad para compararla con la realidad.

En cuanto a las preguntas, se cuestiona a los estudiantes acerca de las variaciones de la temperatura sin indicar el intervalo de tiempo a considerar. En la vida cotidiana es común hacer referencia a la temperatura del día previo. No es clara la intención con esta **Pregunta** abierta. En síntesis, el problema es *No Auténtico* porque no satisface ningún aspecto.

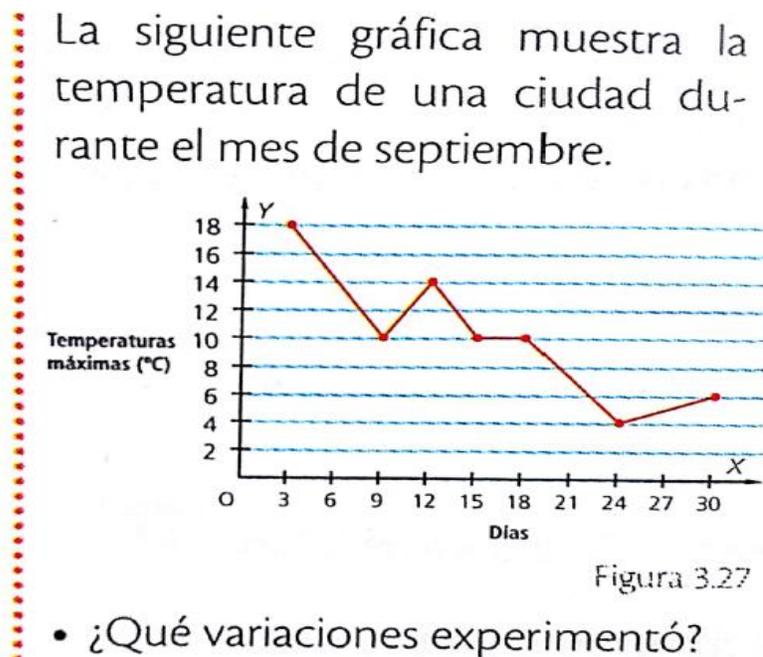


Figura 16. Recuperado de un libro de matemáticas para séptimo (2017).

4.2.2.2 PROBLEMA 9

El enunciado del problema de la Figura 17 hace mención de un experimento científico, pero no lo describe y tampoco al proceso que está generando el enfriamiento de la sustancia, ni a la sustancia que hace referencia. Si la sustancia inicia a 0°C y debe llegar hasta -78°C , ¿qué proceso o dispositivo va a generar ese enfriamiento tan extremo? No cumple con el aspecto del **Evento**, porque un experimento científico no forma parte de las vivencias de un estudiante de secundaria.

En relación a **Información y datos** no lo satisface porque el enfriamiento de agua muy caliente en un medio ambiente de menor temperatura (como experimentado por los estudiantes) no es un proceso lineal como el narrado en este problema matemático. Además, el problema deja muchas cosas inconclusas que evidencia un mal uso del contexto. En cuanto a la **Pregunta**, es un enfriamiento muy extremo, sin sentido para un estudiante que no tiene la experiencia de un científico. En síntesis, el problema es *No Auténtico* porque no cumple los aspectos fundamentales de autenticidad.

Analiza

En cierto experimento científico se debe disminuir la temperatura de una sustancia a razón de 13°C cada hora.



• Si el experimento da inicio con una temperatura de 0°C , ¿cuántas horas habrán transcurrido cuando la temperatura alcance los 78°C bajo cero?

Figura 17. Recuperado de un libro de matemáticas para séptimo (2017).

4.2.2.3 PROBLEMA 10

Saberes previos

En la Tabla 3.26 se presentan los datos sobre la variación de la temperatura de una taza de té respecto al tiempo.

Tiempo (minutos)	0	2	4	6	8	10
Temperatura (°C)	88	80	72	64	56	48

Tabla 3.26

- ¿Qué sucede con la temperatura a medida que avanza el tiempo?
- ¿Es posible predecir en qué tiempo la taza de té tendrá una temperatura de 0 °C?

Figura 18. Recuperado de un libro de matemáticas para séptimo (2017).

El ejemplo mostrado en la Figura 18 informa del enfriamiento de una taza de té, cabe anotar que en el enunciado del problema no hay ninguna información con relación a las condiciones a la que está expuesta la taza de té. Con respecto a la **Información y Datos** podría pensarse que la taza está en un medio ambiente a 0°C porque se pregunta acerca del instante de tiempo donde el té alcanzaría esta temperatura. Sin embargo, de la tabla de datos se observa que la temperatura disminuye de manera lineal, de acuerdo con la expresión:

$$T(t) = 88^{\circ}\text{C} - \left(4 \frac{^{\circ}\text{C}}{\text{min}}\right)t$$

Este modelo corresponde a un enfriamiento controlado mediante una rampa de temperatura. Las rampas de enfriamiento o calentamiento son de uso frecuente en la industria de la metalurgia, pero no para enfriar una taza de té. No es de esperar que los autores hayan pensado en esta situación. Más bien, ellos no pensaron en las características propias del enfriamiento espontáneo. Les pareció que el enfriamiento de la taza de té era un buen contexto para que los estudiantes pensarán en la línea recta con pendiente negativa. En relación a la segunda **Pregunta**, piden predecir el tiempo a

una temperatura de 0°C . Su intención es que los alumnos obtengan la ecuación de la recta que pasa por los datos y escriban la ecuación para responderla, es decir,

$$0^{\circ}\text{C} = 88^{\circ}\text{C} - \left(4 \frac{^{\circ}\text{C}}{\text{min}}\right) t$$

Los 22 minutos requeridos para que la taza de té alcance los 0°C van más allá del rango de tiempo observado. Los alumnos ven la robustez del modelo lineal involucrado y esto es un acierto de los autores del problema presentado en la Figura 18. Sin embargo, es una pregunta confusa porque no es claro si la taza de té es dejada a la temperatura ambiente o se mete en un refrigerador para que alcance tal temperatura. Hace falta información en el problema. En términos de Palm y Korsunsky, estas carencias impiden la realización una simulación apropiada del enfriamiento de la taza de té que se discute en el ejemplo, y en consecuencia, *no es un problema matemático auténtico*.

CAPÍTULO V

5. LAS SOLUCIONES DE ESTUDIANTES DE DIFERENTES NIVELES EDUCATIVOS A UN PROBLEMA NO AUTÉNTICO

A continuación, se presenta el problema matemático seleccionado junto con su solución experta y el instrumento que fue aplicado a los estudiantes. Cabe resaltar que en este momento se usa a los libros de texto como una **Variable Independiente** porque se pretende observar su influencia en el aprendizaje de los estudiantes.

5.1 EL PROBLEMA Y EL INSTRUMENTO DE INVESTIGACIÓN

Se seleccionó el problema 6 analizado en la sección anterior. El problema se encuentra en un libro mexicano de primero de secundaria que está dividido en 3 bloques que corresponden a los tres trimestres escolares avalados por la Nueva Reforma Educativa; cada bloque consta de 6 u 8 lecciones y cada lección presenta los aprendizajes esperados, que se pretenden lograr con el desarrollo progresivo de las siguientes tres etapas: Reflexiona y discute, Aprende y aplica y Crea y evalúate. Son un total de 22 lecciones. El problema se localiza en el período 3 en su lección 17 correspondiente al contenido “Razón de cambio y pendiente de la recta”.

El enunciado del problema consta de la situación problemática y tres cuestionamientos que se deben resolver en parejas de alumnos. Éste se acompaña de una figura (Vea la Figura 19) que muestra las gráficas de tres líneas rectas que representan la forma en que responden los tres materiales. El problema dice textualmente:

Pendiente de una recta

En parejas, resuelvan las siguientes actividades.

Una constructora puso a tres materiales que se usarán como aislantes térmicos en techos de casas. Se desea saber cuál de ellos se calienta más conforme pasa el tiempo. Para hacer la prueba, se aplica a los materiales una temperatura de 35°C. Después, se inicia la medición de los cambios térmicos que experimenta, por minuto, cada material. Las gráficas muestran el comportamiento de los tres materiales:

a) *Determina la razón de cambio de cada caso.*

Material A: _____ *Material B:* _____

Material C: _____

b) ¿Cuál de las rectas tiene la mayor pendiente, es decir, cuál muestra la mayor inclinación?

c) ¿Cómo se puede establecer qué recta tiene mayor pendiente a partir de la razón de cambio?

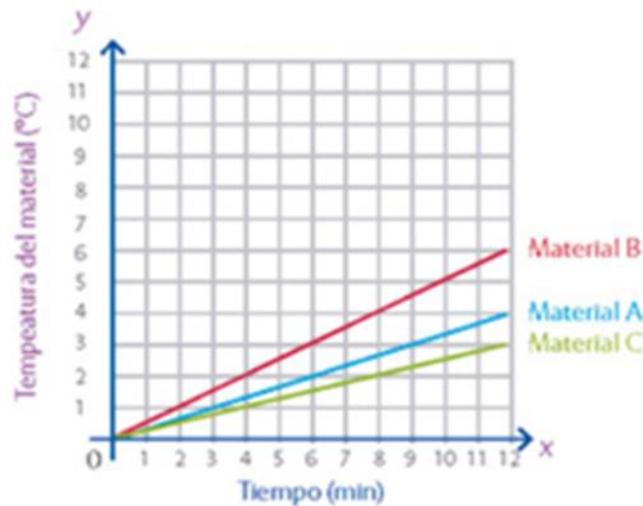


Figura 19. Temperatura en grados Celsius contra tiempo en minutos, tomada del libro de texto de primero de secundaria, publicado en el 2018.

Lee cuidadosamente el siguiente problema y contesta los incisos. Muestra en la hoja anexa todos los cálculos que utilizaste para resolverlos y en el enunciado del problema anota únicamente los resultados obtenidos.

El problema matemático más la anterior instrucción le dan forma al instrumento que se formula para indagar acerca de las interpretaciones y las soluciones que elaboraron estudiantes de diferentes niveles educativos. Cabe resaltar que se omitió el título de “Pendiente de una recta” para no condicionar a los estudiantes en sus soluciones, y además, se aplicó de forma individual.

5.2 LA SOLUCIÓN EXPERTA

Considere que un fenómeno se puede representar en términos del par de variables X Y . La razón de cambio de la variación $\Delta y = y_a - y_b$ con respecto al cambio $\Delta x = x_a - x_b$ se define

como el cociente $(\Delta y/\Delta x)$, donde los subíndices a y b indican, respectivamente, la situación inicial y la final considerada en la propiedad en cuestión.

Ahora, la pendiente, λ , de una línea recta es el grado de inclinación de ésta con respecto a otra línea recta (la horizontal). Este grado de inclinación se define como el cociente,

$$\lambda = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$$

donde (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son las coordenadas cartesianas de dos puntos que pertenecen a la línea recta.

Ahora, con relación al inciso **a)**, la razón de cambio de la temperatura de cualquiera de los tres materiales es:

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = (T_2 - T_1)/(t_2 - t_1)$$

donde T_2 es la temperatura del material al tiempo t_2 y similarmente para T_1 .

De la Figura 19, se observa que es conveniente usar, para todos los materiales, la lectura inicial de la temperatura y tiempo: $t_1 = 0 \text{ min}$ y $T_1 = 0^\circ\text{C}$. El segundo par de datos que se puede leer con facilidad de esta figura se dan en la Tabla 4.

Material	$t_2(\text{min})$	$T_2(^\circ\text{C})$	$\frac{\Delta T}{\Delta t} (\text{°C}/\text{min})$
A	9	3	$\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$
B	10	5	$\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$
C	8	2	$\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

Tabla 4. Razón de cambio de la temperatura de cada material con el tiempo de calentamiento.

Como $\frac{1}{4} \frac{^\circ\text{C}}{\text{min}} < \frac{1}{3} \frac{^\circ\text{C}}{\text{min}} < \frac{1}{2} \frac{^\circ\text{C}}{\text{min}}$, de la Tabla 4 se concluye que el Material B presenta la mayor razón de cambio de temperatura al transcurrir el tiempo de calentamiento y, como consecuencia, se calienta más rápido que el resto de los materiales.

Para dar respuesta al inciso **b)** se requiere calcular la pendiente de las tres rectas que aparecen en la Figura 19. Observe que, las tres líneas rectas comparten el punto de coordenadas $(t_1 = 0 \text{ min}, T_1 = 0^\circ\text{C})$ y que el segundo punto de cada una de estas tres rectas está dado en la Tabla 4. Por lo tanto, la línea recta que modela el comportamiento del Material A tiene una pendiente igual a, $\lambda_A = \frac{1}{3} \frac{^\circ\text{C}}{\text{min}}$, y de manera similar, la que representa la forma en que se calienta el Material B tiene una pendiente de valor, $\lambda_B = \frac{1}{2} \frac{^\circ\text{C}}{\text{min}}$ y la pendiente correspondiente al Material C es $\lambda_C = \frac{1}{4} \frac{^\circ\text{C}}{\text{min}}$. Así que la recta que tiene mayor pendiente es la correspondiente al Material B.

Para dar solución al inciso **c)**, se debe tener claridad de que la pendiente de la recta que pasa por los puntos (t_1, T_1) y (t_2, T_2) es:

$$\lambda = (T_2 - T_1)/(t_2 - t_1),$$

la cual se puede reescribir en términos de la variación de la temperatura T y el tiempo t ,

$$\lambda = \Delta T / \Delta t$$

que es justamente la razón de cambio de la temperatura del material porque T cambia con t de manera proporcional. Lo que significa que la razón de cambio de la temperatura con el tiempo coincide en el presente problema con la pendiente de la línea recta, porque es justamente la recta la que modela el fenómeno de calentamiento de los materiales aislantes evocados en el problema matemático seleccionado.

5.3 PROPUESTAS DE SOLUCIÓN DE CADA GRUPO DE ESTUDIANTES

En este apartado se presentan las propuestas de solución de los estudiantes encuestados junto con su respectivo análisis. Fueron tres grupos: uno de nivel universitario, uno de preparatoria y otro de secundaria.

5.3.1 GRUPO 1: EDUCACIÓN UNIVERSITARIA

El instrumento fue aplicado a un grupo de 31 estudiantes de licenciatura de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla-México, 23 hombres y 8 mujeres. Cabe destacar que estos alumnos están iniciando su programa de licenciatura y que en su tránsito por la secundaria y la preparatoria debieron haber estudiado los conceptos de Razón de Cambio y Pendiente.

Para evaluar las soluciones propuestas por los estudiantes universitarios, se tendrá en cuenta la solución experta expuesta en el 5.2 y respuestas parcialmente correctas, y para fijar el criterio de calificación, la solución experta tendrá una puntuación de 2, las respuestas parcialmente correctas de 1 y la respuesta incorrecta de 0. Al tener tres incisos el problema, la calificación máxima que puede alcanzar un estudiante es de 6 puntos. Los incisos **a)**, **b)** y **c)** se categorizan como aparece en las Tablas 5, 6 y 7, respectivamente. Los estudiantes de este primer grupo serán identificados por la letra U seguidos de un número del 1 al 31.

Inciso a)

Solución	Descripción	Puntaje
Respuesta Incorrecta (AI)	Algoritmo errado; calcula la pendiente.	0
Respuesta Parcialmente Correcta (APC)	Calcula la razón; usa $\Delta x/\Delta y$; usa $\Delta y/\Delta x$ omitiendo las unidades.	1
Respuesta Correcta (AC)	Calcula la razón de cambio $\Delta y/\Delta x$ con sus unidades.	2

Tabla 5. Criterios de calificación para inciso **a)** Grupo 1.

Inciso b)

Solución	Descripción	Puntaje
Respuesta Incorrecta (BI)	Algoritmo errado; resultado o cálculos sin argumentación; calcula la razón o la razón de cambio.	0
Respuesta Parcialmente Correcta (BPC)	No usa la sugerencia, pero calcula la pendiente de cada recta.	1
Respuesta Correcta (BC)	Usa la sugerencia, no calcula la pendiente.	2

Tabla 6. Criterios de calificación para inciso **b)** Grupo 1.

Inciso c)

Solución	Descripción	Puntaje
Respuesta Incorrecta (CI)	Sin contestar; operaciones con la pendiente; ecuación de la recta.	0
Respuesta Parcialmente Correcta (CPC)	Asume igualdad entre la razón de cambio y la pendiente sin argumentar o errado.	1
Respuesta Correcta (CC)	Identifica la relación con base en la comparación de los incisos a) y b) .	2

Tabla 7. Criterios de calificación para inciso **c)** Grupo 1.

De forma general, en la Tabla 8 se muestra la calificación del problema obtenida por cada uno de los estudiantes del Grupo 1. En ella se puede observar que más del 80% de los estudiantes se encuentran ubicados en las cuatro calificaciones más bajas.

Calificación	No. de estudiantes	Porcentaje
0	2	6.4
1	9	29.0
2	8	25.8
3	7	22.6
4	2	6.4
5	1	3.2
6	2	6.4
TOTAL	31	99.8

Tabla 8. Calificación obtenida en el problema por los estudiantes del Grupo 1.

En relación al inciso **a)**, se puede afirmar que el 77.3% de los estudiantes se encuentran ubicados en las categorías incorrectas y parcialmente correctas. De los 31 estudiantes, 13 confunden la razón de cambio con la pendiente y 11 sólo calculan la razón omitiendo la variación de las variables, como se puede apreciar en la Tabla 9.

Solución A	N° de alumnos	Porcentaje
AI	13	41.9
APC	11	35.4
AC	7	22.5
TOTAL	31	99.8

Tabla 9. Tipos de soluciones del inciso **a)** Grupo 1.

En la Figura 20 se puede observar un ejemplo de una propuesta de solución de un estudiante con calificación 0, cuya respuesta del inciso **a)** se ubica en la solución AI, dado que, al solicitarle la razón de cambio, el estudiante calcula la pendiente, aunque con un poco de confusión en la fórmula, lo cual se nota por las correcciones. Lo que deja pensar que existe un conflicto con estos dos conceptos matemáticos y que el estudiante los iguala sin argumentación.

$$\begin{array}{l}
 1 \\
 3
 \end{array}
 \left\{
 \begin{array}{ll}
 x_1 = 6 & y_1 = 3 \\
 x_2 = 10 & y_2 = 5
 \end{array}
 \right.
 \quad m = \frac{1}{2}
 \quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5 - 3}{10 - 6} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{array}{l}
 M \\
 A
 \end{array}
 \left\{
 \begin{array}{ll}
 x_1 = 6 & y_1 = 2 \\
 x_2 = 9 & y_2 = 3
 \end{array}
 \right.
 \quad m = \frac{1}{3}$$

$$\begin{array}{l}
 M \\
 C
 \end{array}
 \left\{
 \begin{array}{ll}
 x_1 = 4 & y_1 = 1 \\
 x_2 = 8 & y_2 = 2
 \end{array}
 \right.
 \quad m = \frac{1}{4}$$

Figura 20. Solución universitaria de U7 con calificación 0.

Del inciso **b)**, se puede afirmar que más de la mitad de los estudiantes se encuentran ubicados en la categoría parcialmente correcta, lo que significa que recurren directamente al algoritmo de la pendiente sin tener en cuenta la sugerencia del texto, la Figura 21 es un ejemplo de ello. Los autores del libro de texto orientan a los lectores recordándoles que la pendiente de una recta es su grado de inclinación. Ellos suponen que los alumnos recuerdan que el grado de inclinación se mide con respecto al eje horizontal. Da la impresión que esta información debiera facilitar la resolución de este inciso. Sin embargo, solo 5 de los 31 estudiantes (en su intento de resolución) tomaron en cuenta la frase que aparece en este inciso: “*es decir, ¿cuál muestra mayor inclinación?*”, como se puede muestra en la Tabla 10.

Solución B	N° de alumnos	Porcentaje
BI	9	29.0
BPC	17	54.8
BC	5	16.1
TOTAL	31	99.9

Tabla 10. Soluciones del inciso b) Grupo 1.

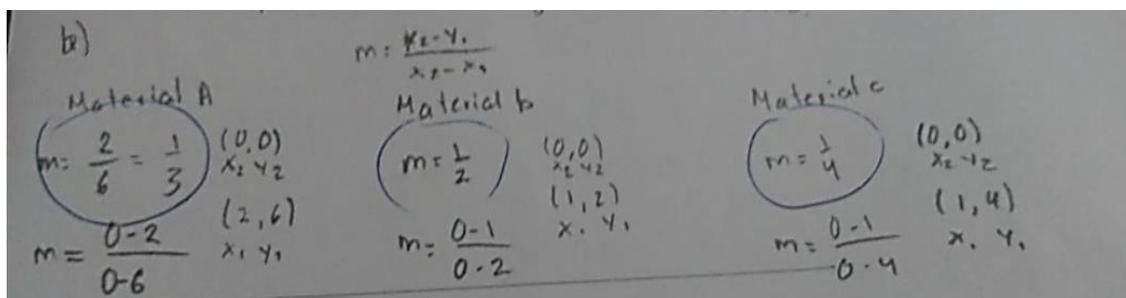


Figura 21. Solución universitaria de U14 con calificación 1.

En el inciso c), 4 del total de los estudiantes respondieron de forma correcta, como se percibe en la Tabla 11, lo que significa que la mayoría no logró identificar la relación existente entre la pendiente y la razón de cambio en esta situación específica. Se observó que los estudiantes antes de mencionar la recta que tenía mayor pendiente se preocuparon más por explicar cuál sería la recta que cumpliría con ese requisito.

Solución C	N° de alumnos	Porcentaje
CI	16	51.6
CPC	11	35.4
CC	4	12.9
TOTAL	31	99.9

Tabla 11. Soluciones del inciso c) Grupo 1.

Un ejemplo de ese reducido grupo de estudiantes ubicados en CC fue la propuesta de un estudiante con calificación 5 como se muestra en la Figura 22, quien en sus respuestas anteriores a los incisos a) y b), identifica que en este problema la razón de cambio y la pendiente son la misma. El estudiante no asume que son iguales desde el inicio, como lo demostraron muchos otros alumnos, sino que después de cálculos certeros llega a esa conclusión. Sin embargo, no menciona

nunca cuál es la recta de mayor pendiente, sino que se interesa más por explicar su razonamiento de la relación entre razón de cambio y pendiente.

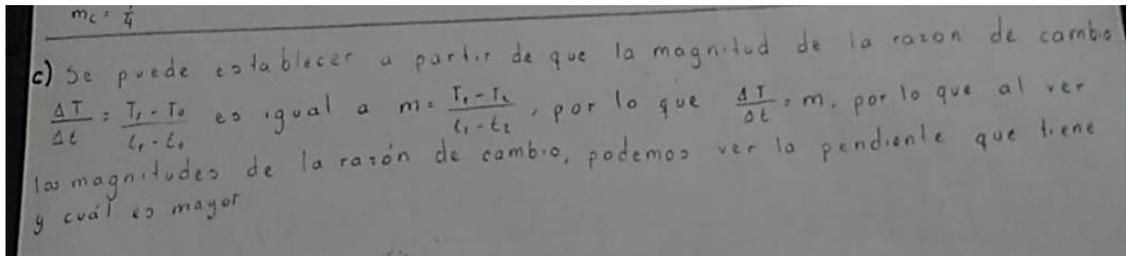


Figura 22. Solución universitaria de U31 con calificación 5.

En relación a los conceptos matemáticos en juego, se puede afirmar que el inciso **b)** fue el que les resultó más fácil de resolver a los estudiantes con un porcentaje de 70.9% de respuestas correctas y parcialmente correctas en comparación de los otros dos incisos que no superan el 58%. El inciso **b)** evalúa el concepto de Pendiente y aunque muchos estudiantes no usaron la sugerencia de la pregunta, si recordaron su fórmula y la emplearon en su solución. Sin embargo, los otros dos incisos fueron de difícil solución, el inciso **a)** ubicó a más del 40% de los estudiantes en la respuesta incorrecta, y el inciso **c)** en más del 50%; lo que significa que los estudiantes presentan confusión en el concepto de Razón de Cambio, y en consecuencia, no lograron establecer la relación entre estos dos conceptos matemáticos (razón de cambio y pendiente).

5.3.2 GRUPO 2: EDUCACIÓN PREPARATORIA

Se encuestó a 58 estudiantes, 30 mujeres y 28 hombres, con edad promedio de 15 años y 6 meses. Al momento de resolver el problema, ellos estaban cursando el primero de preparatoria en una escuela privada de Puebla, México. Ingresaron a la preparatoria en agosto de 2018 y en su paso por la secundaria estudiaron los conceptos de Razón de Cambio y Pendiente, de acuerdo con los libros de texto de matemáticas de la CONALITEG. Los estudiantes de este segundo grupo serán identificados por la letra E seguidos de un número del 1 al 58.

Cabe destacar que ningún estudiante resolvió correctamente el problema. No presentaron justificaciones en ningún inciso, sólo anotan los resultados en la hoja de trabajo. Sin embargo, para discutir las respuestas de los alumnos de preparatoria, fue necesario ampliar la descripción de las respuestas parcialmente correctas y las incorrectas presentadas en el grupo anterior de los

estudiantes universitarios, como se muestra en la Tabla 12. La respuesta correcta no tuvo cambios en su descripción.

Solución	Descripción	Puntaje
Respuesta Incorrecta (AI)	<p>Escriben expresiones matemáticas sin sentido o palabras relacionadas con el problema (E28). Dan coordenadas de puntos en el plano cartesiano (E12). Proporcionan valores numéricos relacionados con el problema (E10).</p>	0
Respuesta Parcialmente Correcta (APC)	<p>Calculan la razón y/x o x/y sin tener en cuenta las unidades (E34) o considerándolas en una (E56) o las dos variables.</p>	1

Tabla 12. Criterios de calificación ajustados para inciso a) del Grupo 2.

En la Figura 23 y 24 se muestran algunos ejemplos de soluciones incorrectas y parcialmente correctas respectivamente, presentadas por los estudiantes de preparatoria, según la descripción de la tabla anterior.

<p>E28</p> <p>a) Determina la razón de cambio en cada caso.</p> <p>Material A: $a \cdot b^3$ (20) Material B: $a \cdot b^2$ (22.5)</p> <p>Material C: $a \cdot b^4$ (18.5)</p>	<p>E12</p> <p>a) Determina la razón de cambio en cada caso.</p> <p>Material A: $4y - 12x$ Material B: $6y - 12x$</p> <p>Material C: $3y - 3x$</p>
<p>E10</p> <p>a) Determina la razón de cambio en cada caso.</p> <p>Material A: <u>4</u> Material B: <u>6</u></p> <p>Material C: <u>3</u></p>	

Figura 23. Ejemplos de soluciones incorrectas del inciso a).

<p>E34</p> <p>a) Determina la razón de cambio en cada caso.</p> <p>Material A: <u>4</u> Material B: <u>6</u></p> <p>Material C: <u>3</u></p>	<p>E56</p> <p>a) Determina la razón de cambio en cada caso.</p> <p>Material A: <u>0.3</u> Material B: <u>0.3</u></p> <p>Material C: <u>0.15</u></p>
----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Figura 24. Ejemplos de soluciones parcialmente correctas del inciso a).

De acuerdo a los nuevos criterios para la puntuación del inciso **a**), en la Tabla 13 se observa que 39 de 58 alumnos proporcionaron una solución incorrecta, 19 estudiantes ofrecieron una solución parcialmente correcta y ninguno calculó correctamente la razón de cambio para cada uno de los tres materiales. Es más, el término “razón de cambio” pareciera que es desconocido para los estudiantes encuestados porque ellos proporcionaron una razón.

Puntajes (inciso a)	No. alumnos
0	39
1	19
2	0
Total	58

Tabla 13. Calificación del inciso **a**) obtenida por cada uno de los estudiantes del Grupo 2

En relación a las 39 respuestas incorrectas, tres estudiantes escribieron expresiones matemáticas sin conexión con la razón, doce escribieron puntos del plano y usaron indistintamente la notación (x, y) o (y, x) . Otros trece alumnos dan valores de las temperaturas más altas que alcanzan los tres materiales. Once proporcionan valores numéricos que obtienen mediante algún procedimiento no declarado. Y con respecto a las 19 soluciones parcialmente correctas, cinco estudiantes escribieron la razón (y/x) y 14 la razón (x/y) . Algunos no se percatan que las variables y y x tienen unidades y otros se dan cuenta que la variable x tiene unidades de tiempo.

En cuanto al inciso **b**), la categorización hecha para el Grupo 1 no se ajusta a las propuestas de los estudiantes de preparatoria porque ellos tomaron en cuenta la sugerencia de los autores del problema y lo resolvieron, identificando la recta de mayor pendiente por medio de su grado de inclinación, ya sea con respecto al eje horizontal o al vertical. A diferencia de los estudiantes universitarios, no escribieron la expresión para la pendiente ni operaciones relacionadas. En la Tabla 14 se presenta la categorización de las propuestas de los estudiantes de preparatoria para este inciso.

CATEGORÍAS	DESCRIPCIÓN	NÚMERO DE ESTUDIANTES
Respuesta correcta	Cuando el estudiante anota la pendiente con respecto al eje x .	34
Respuesta parcialmente correcta	Cuando el estudiante anota la pendiente con respecto al eje y .	21
Respuesta incorrecta	El material A o la recta A	3
TOTAL		58

Tabla 14. Categorías del inciso b) Grupo 2.

Destaca en este inciso que los estudiantes usan la sugerencia dada por los autores pero es evidente que hay confusión con respecto a la forma correcta para obtener la pendiente, dado que 34 de los 58 estudiantes seleccionaron correctamente la recta B, midiéndola con respecto al eje x y 21 eligieron la recta C porque de manera equivocada midieron la pendiente con respecto al eje y .

Resulta importante mencionar que los estudiantes sólo se limitaron a seleccionar una recta sin ningún tipo de argumento ni de algoritmo a excepción de E5 y E39, ambos alumnos escogen la respuesta correcta pero el primero, en la Figura 25, curiosamente tacha la sugerencia de los autores y lo reemplaza por la frase “se calienta más rápido”, de esta forma se evitó la confusión de con respecto a cuál eje se mide la pendiente. El segundo, en la Figura 26, explica que es la recta que presenta más temperatura en el mismo tiempo para los tres materiales. En la gráfica del problema el material B siempre estuvo a una temperatura mayor que los demás materiales.

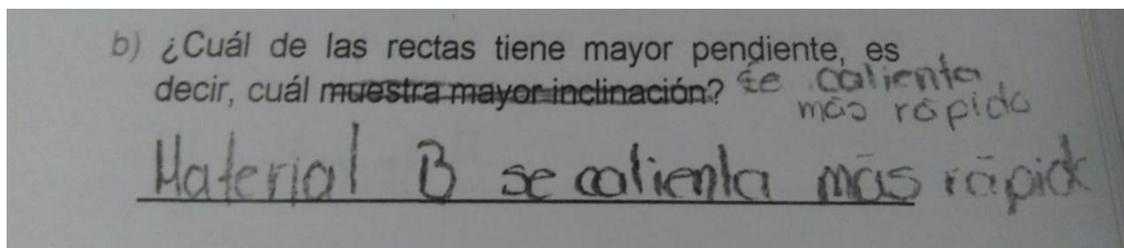


Figura 25. Solución inciso b) de E5.

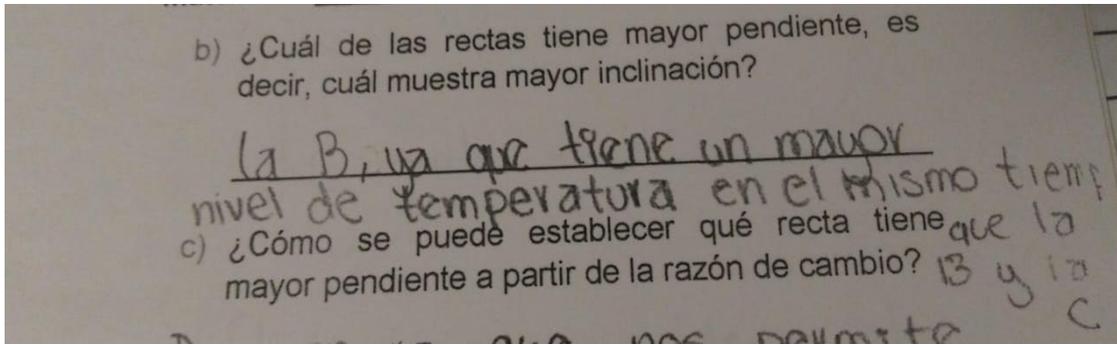


Figura 26. Solución inciso **b)** de E39.

Con respecto al inciso **c)** se pedía la relación entre ambos conceptos matemáticos en juego, lo cual fue muy complicado para los estudiantes de preparatoria al no tener una comprensión de razón de cambio ni de pendiente. Al ser respuestas muy alejadas de las que presentaron los estudiantes universitarios, no se ajustaron a la categorización hecha para este inciso en el Grupo 1 y se diseñaron otras como se muestra en la Tabla 15, donde se observa que sólo dos estudiantes seleccionaron una recta sin hacer ningún tipo de argumento, y que la mayoría de los encuestados afirma que se puede establecer qué recta tiene mayor pendiente a partir de la razón de cambio usando la inclinación, el ángulo de las rectas, como se muestra en la Figura 27, o usando la relación entre el tiempo y la temperatura del material, al analizar el cambio que tiene cada material con respecto a la temperatura a medida que aumenta el tiempo, como se observa en la Figura 28.

CATEGORÍAS	NÚMERO DE ESTUDIANTES
Selección de una recta sin justificación	2
Por su inclinación	14
Por el tiempo y la temperatura del material	24
Otras respuestas	15
Sin Contestar	3
TOTAL	58

Tabla 15. Categorías del inciso **c)** del Grupo 2.

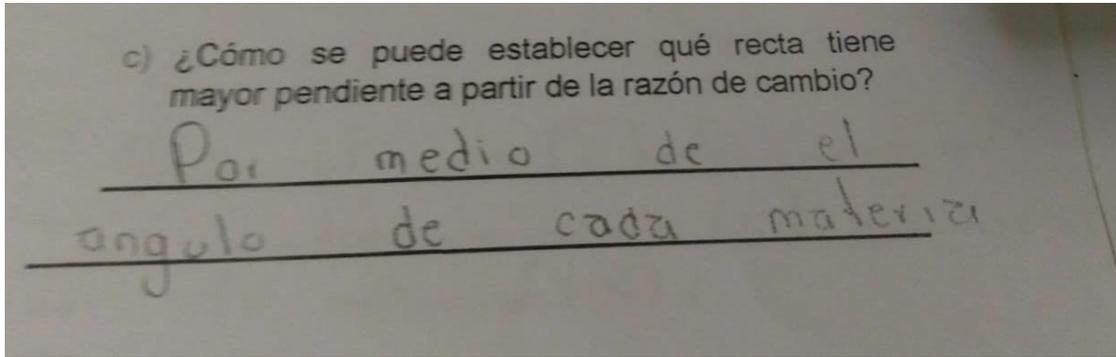


Figura 27. Solución inciso c) de E40

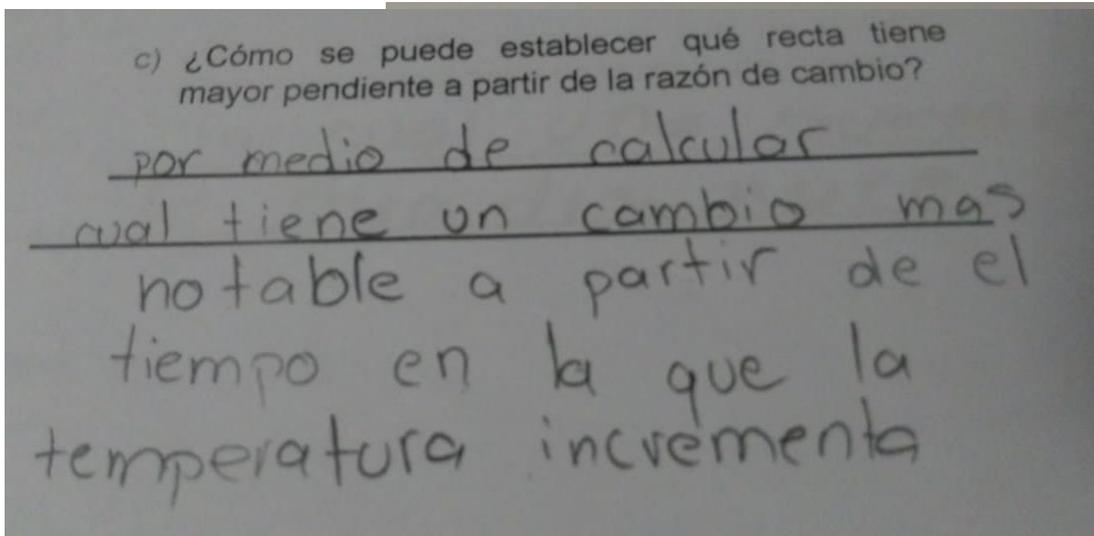


Figura 28. Solución inciso c) de E53

Por otro lado, en la categoría de Otras respuestas, encontramos soluciones muy variadas como se muestra en la Figura 29, algunas referentes a operaciones aritméticas como la multiplicación (E43), división (E11), otras hacían referencia a la razón de cambio (E49) o aspectos de la gráfica (E58). Es evidente que los estudiantes no lograron encontrar la relación entre el concepto de razón de cambio y pendiente porque no hay una comprensión de ellos.

<p>E11</p> <p>c) ¿Cómo se puede establecer qué recta tiene mayor pendiente a partir de la razón de cambio? <u>Dividiendo temperatura entre</u> <u>tiempo</u></p>	<p>E43</p> <p>c) ¿Cómo se puede establecer qué recta tiene mayor pendiente a partir de la razón de cambio? <u>multiplicando la razón de cambio</u> <u>por el número de minutos requeridos</u></p>
<p>E58</p> <p>c) ¿Cómo se puede establecer qué recta tiene mayor pendiente a partir de la razón de cambio? <u>acorde a la gráfica</u></p>	<p>E49</p> <p>c) ¿Cómo se puede establecer qué recta tiene mayor pendiente a partir de la razón de cambio? <u>Por que su razón de</u> <u>cambio es mayor.</u></p>

Figura 29. Ejemplos de Otras respuestas para el inciso c).

5.3.3 GRUPO 3: EDUCACIÓN SECUNDARIA

El instrumento fue aplicado a un grupo de 27 alumnos de segundo de secundaria: 10 mujeres y 17 hombres, con edad promedio de 13 años 10 meses. Ellos estudian en una escuela privada de la ciudad de Puebla. En el momento de la encuesta, los estudiantes estaban concluyendo el segundo grado de secundaria, esto significa que ya habían revisado los conceptos de razón de cambio y pendiente, material que corresponde al primer grado de secundaria.

Es importante destacar que, las propuestas estudiantiles de este grupo no se ajustan a las categorías elaboradas para los dos grupos anteriores porque estos alumnos de secundaria no comprenden el concepto de Razón de cambio ni de Pendiente, para ellos es un poco más cercano este último concepto, aunque no tiene claridad con respecto a qué eje del plano cartesiano es correcto medirla. Además, no hubo algoritmos, expresiones algebraicas ni fórmulas matemáticas en sus respuestas, y no dieron una mínima argumentación. Los estudiantes de este tercer grupo serán identificados por la letra S seguidos de un número del 1 al 27.

En relación al inciso a), las propuestas de los estudiantes de secundaria se distancian mucho de los otros dos grupos, por tanto no fue útil la categorización hecha para los alumnos universitarios

o de preparatoria porque sólo uno presentó un acercamiento razonable al concepto de Razón de cambio, como se observa en la Figura 30, donde se puede asegurar que el alumno con ayuda de la gráfica del problema percibió el incremento de la temperatura con respecto al tiempo, aunque no coloca las unidades de temperatura, pero si las del tiempo.

a) Determina la razón de cambio en cada caso.

Material A: 1 cada 3 min Material B: 1 cada 2 min
 Material C: 1 cada 4 min

Figura 30. Única solución razonable del concepto de Razón de S16.

Para el resto de los estudiantes, se presentan concepciones que se describen en la Tabla 16, con base en lo que interpretan del concepto de Razón de cambio.

CONCEPCIONES DE LA RAZÓN DE CAMBIO	NÚMERO DE ESTUDIANTES
P1: La razón de cambio como expresiones comparativas	4
P2: La razón de cambio como coordenadas de un punto en el plano	8
P3: La razón de cambio como la máxima temperatura del material	6
P4: La razón de cambio depende el tipo de material	3
P5: La razón de cambio como las variables involucradas en el problema	2
P6: La razón de cambio como conservación de una propiedad física	1
Sin contestar	2
Total	26

Tabla 16. Concepciones del concepto de razón de cambio del Grupo 3.

Las concepciones más arraigadas entre este grupo de estudiantes son del tipo P2, un ejemplo de ello se muestra en la Figura 31 donde se interpreta como una coordenada (x, y) de un punto en el plano cartesiano, y P3 donde se interpreta la razón de cambio como la temperatura máxima que alcanza cada material como se observa en la Figura 32.

Yo entendi en el a) Determina la razón de cambio en cada caso.
 ejercicio a) tengo que poner cual + es su posición
 Material A: $y=4$ $x=12$ Material B: $y=6$ $x=12$
 Material C: $y=3$ $x=12$

Figura 31. Concepción P2 de razón de cambio de S27.

a) Determina la razón de cambio en cada caso.

Material A: 4°C Material B: 6°C
 Material C: 3°C

Figura 32. Concepción P3 de razón de cambio de S25.

Con respecto al inciso b), se puede mencionar que los estudiantes tienen una comprensión intuitiva del concepto de Pendiente al relacionarla con la inclinación de la recta, pero presentan confusiones con el eje adecuado para medirla. Las respuestas de los alumnos de secundaria fueron similares a los alumnos de preparatoria, por tanto, encajaron perfectamente en la categorización del Grupo 2. A continuación los resultados para los estudiantes de secundaria se muestran en la Tabla 17.

CATEGORÍAS	DESCRIPCIÓN	NÚMERO DE ESTUDIANTES
Respuesta correcta	Cuando el estudiante anota la pendiente con respecto al eje X.	16
Respuesta parcialmente correcta	Cuando el estudiante anota la pendiente con respecto al eje Y.	8
Respuesta incorrecta	El material A o la recta A	3
TOTAL		27

Tabla 17. Categorías del inciso b) del Grupo 3.

El aspecto a destacar en este inciso, es que los estudiantes presentan confusión con respecto a la forma correcta para calcular la pendiente, donde 16 de 27 estudiantes lo hacen usando el eje adecuado y 11 el eje equivocado. En la Figura 33 se observa que el estudiante S14 usa la inclinación con respecto al eje X y en la Figura 34 el alumno S21 emplea el eje Y.

b) ¿Cuál de las rectas tiene mayor pendiente, es decir, cuál muestra mayor inclinación?

La b porque esta mas arriba

Figura 33. Propuesta con respuesta correcta de S14.

b) ¿Cuál de las rectas tiene mayor pendiente, es decir, cuál muestra mayor inclinación?

el material C por que es la mas acostada

Figura 34. Propuesta con respuesta parcialmente correcta de S21.

En cuanto al inciso c) se usó la misma categorización del Grupo 2 porque presentaron respuestas semejantes, caracterizadas por la ausencia de procedimientos matemáticos, con la excepción de que no hubo ninguna respuesta dentro de la categoría de Otras respuestas. En la Tabla 18 se muestra que la mayoría de encuestados usó la pregunta b) para dar respuesta a este inciso, guiándose únicamente por la sugerencia de que “a mayor inclinación, mayor pendiente”.

CATEGORÍAS	NÚMERO DE ESTUDIANTES
Selección de una recta sin justificación	2
Por su inclinación	12
Por el tiempo y la temperatura del material	8
Sin Contestar	5
TOTAL	27

Tabla 18. Categorías del inciso c) del Grupo 3.

Cabe resaltar, que como usaron su percepción de inclinación con respecto a la vertical, hubo conclusiones incorrectas, como la que se observa en la Figura 35.

c) ¿Cómo se puede establecer qué recta tiene mayor pendiente a partir de la razón de cambio?

al tener menor cambio en su temperatura, se representara con mayor inclinación en el plano.

Figura 35. Propuesta basada en la inclinación de S25

En síntesis, con respecto a los conceptos matemáticos involucrados en la tarea, los alumnos de secundaria y bachillerato encuestados, no escriben ecuaciones ni realizan operaciones. Ellos ofrecen puntos del plano como respuesta para la razón de cambio y también tres valores de

temperaturas que corresponden a las más altas que alcanzan los tres materiales. De los documentos generados por estos alumnos se concluye que los estudiantes de preparatoria dominan en mayor medida el concepto de razón en comparación con aquellos de secundaria. Pero ambos grupos presentan confusiones con respecto al eje correcto para medir la pendiente de una recta. En cuanto a los estudiantes universitarios conocen la razón de cambio y la pendiente de una recta, son capaces de describirla y calcularla, e incluso de hallar la relación entre ambos conceptos.

Con respecto a la autenticidad, siendo el **Evento** el único aspecto que se satisface, se puede afirmar que los tres grupos ignoraron completamente el **Evento** en sus propuestas de solución, ninguno usó “aislantes térmicos” en sus repuestas, a pesar de que las preguntas no los invitan a usarlo. No consideran el párrafo que describe el contexto y se concretan a usar los datos que aparecen en la figura que acompaña la redacción del problema. Los estudiantes no están acostumbrados a trabajar en contexto, ellos pueden eliminar la información que consideren que no tiene relación con las preguntas y operar con los números que tienen. Sin embargo, casi todos los estudiantes de los tres niveles educativos omitieron el dato de 35°C en su solución, ni se cuestionaron de su significado, a excepción de un alumno de preparatoria E22, quien lo usa para dar respuesta al inciso a) de la tarea, como se muestra en la Figura 36. En síntesis, sólo se limitaron a responder las preguntas del problema sin ningún tipo de cuestionamiento.

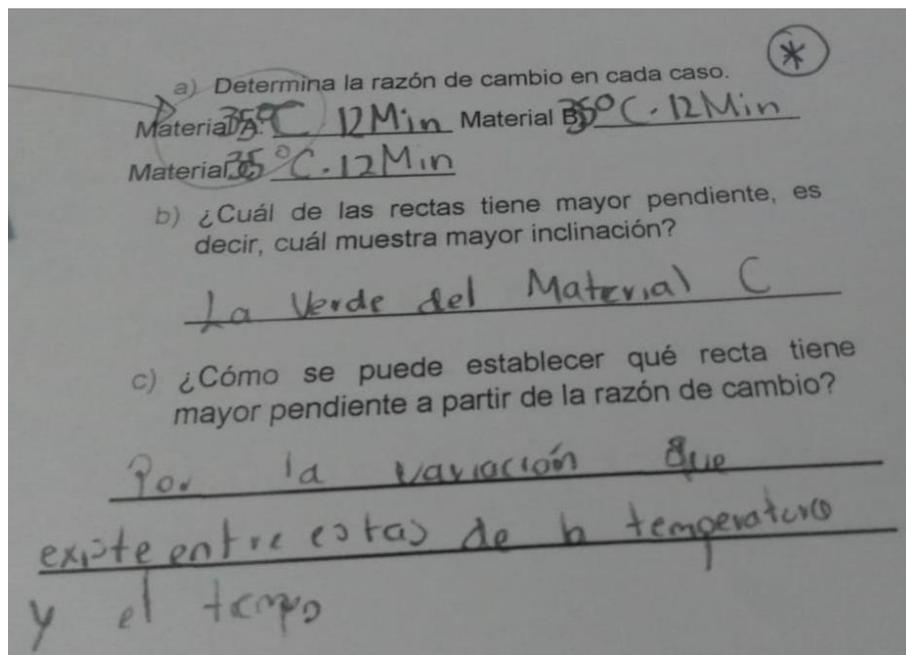


Figura 36. Propuesta de solución de la tarea por E22

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Durante el exhaustivo análisis documental, hallamos 111 problemas matemáticos en contextos de temperatura. Por un lado, en los libros mexicanos dichos problemas pretenden desarrollar la variación lineal y cuadrática, números enteros y conceptos básicos de estadística, usando tres tipos de contextos: registro de temperatura, fenómenos de calentamiento y/o enfriamiento y cambios de la fase sólido-líquido-gas. Por otro lado, en los libros colombianos pretenden desarrollar la variación lineal y los números enteros, usan dos contextos de la temperatura: registro de temperatura y fenómenos de calentamiento y/o enfriamiento. Observando una primacía de estos dos últimos contextos en ambos países.

En términos de la autenticidad, los siete problemas matemáticos de los libros de texto mexicanos cumplen en su mayoría con el **Evento**, pero no la **Pregunta** y la **Información y datos** porque contienen datos no experimentales, información confusa, uso artificial del contexto y preguntas que nadie en la vida real se formularía. En cuanto, a los tres problemas de los libros de texto colombianos, ninguno satisface los tres aspectos fundamentales de la taxonomía de Palm. Por lo anterior, podemos concluir que los problemas analizados de los libros de México tratan de acercar a los estudiantes a la realidad, aunque hay fallas en su formulación, a diferencia de los de Colombia que los aleja por la forma artificial de usar el contexto de temperatura.

En relación a la autenticidad del problema aplicado a los tres grupos de estudiantes, como discutimos previamente, es un problema *no auténtico* porque satisface únicamente el **Evento**. Fue evidente que todos los alumnos respondieron a las preguntas sin observar el párrafo contextual. Ellos solo usaron la información contenida en la figura para resolver los tres cuestionamientos. Nadie se preguntó ¿qué relación tienen las respuestas que encontré con la intención de la constructora de usar alguno de los tres materiales como aislantes en techos de casas? Es evidente que los estudiantes no están acostumbrados a trabajar en contexto, ellos eliminan la información que consideran que no tiene relación con las preguntas y operan con los números que tienen.

Solamente un estudiante usó el dato de 35°C en su solución, los demás no se cuestionaron acerca de su significado físico, sólo lo omitieron. Cabe resaltar que la sugerencia de Korsunsky (2002), en este caso, no afectó a la correcta solución del problema. Posiblemente, por el reto conceptual para diferenciar entre la temperatura y calor. Este hecho es relevante para garantizar la

autenticidad de un problema matemático. La naturaleza intrínseca del contexto que enmarca a un problema matemático es necesaria para simularlo apropiadamente. En consecuencia, el aporte de este trabajo es complementar la taxonomía que Palm (2009) propuso para identificar a los problemas verbales auténticos.

Es importante resaltar que, se hace énfasis en la autenticidad de los contextos en la Nueva Reforma Educativa de la SEP, direccionada a situaciones contextualizadas, reales y significativas donde se haga uso de las matemáticas. Haciendo énfasis en el problema aplicado, al parecer da lo mismo si se escribió en contextos auténticos o no, porque las preguntas no los invita a conectar sus respuestas con el contexto, e incluso no describe adecuadamente el contexto. La autenticidad no se usa ni en la redacción del problema ni en su solución. Por su parte, Palm sugiere que la autenticidad de los problemas verbales es crucial en el aprendizaje de los estudiantes y su propuesta para garantizarla es más estricta; sin embargo, le aplicamos sólo los tres aspectos fundamentales de su taxonomía y cumple con un solo aspecto porque los otros dos están aislados del contexto.

Con respecto a la parte matemática, observamos que hay carencias matemáticas en los estudiantes, dado que se observó en los universitarios que al no saber qué es una razón de cambio acuden a diversas estrategias erróneas para calcularla, y los de secundaria y preparatoria no escriben ecuaciones ni realizan operaciones sino que ofrecen puntos del plano como respuesta para la razón de cambio y también tres valores de temperaturas que corresponden a las más altas que alcanzan los tres materiales. Sin embargo, los universitarios sí conocen el algoritmo para obtener la pendiente de una recta, a diferencia de los de secundaria y preparatoria que no utilizan ningún tipo de algoritmo, sino que guiados por la sugerencia seleccionan una recta de la gráfica, pero es evidente que presentan confusiones con respecto al eje correcto para medir la pendiente de una recta. Todos los anteriores son obstáculos que les impide percibir la conexión que hay entre ambos conceptos en el problema.

Es importante destacar el hecho de que el problema matemático seleccionado para la investigación se encontró en uno de los libros de tercer grado de secundaria con año de publicación 2014, y nos encontramos con la sorpresa de que en las preguntas sí le piden a los estudiantes discutir sobre cuál material se calienta más rápido y cuál menos rápido, e incluso que anoten conclusiones sobre la relación entre la rapidez con que se calienta cada material y la inclinación de la recta que lo representa. Resulta paradójico porque a medida que se actualizan los textos, sus problemas

debieran ser de mayor calidad. Lo anterior hace entender, que toman los mismos problemas y los recortan para que haya una variante, perdiendo muchas veces el sentido del contexto.

Por último, siguiendo las ideas de Fan, el análisis de libros de textos debe trascender a la descripción y centrar la atención en explorar su repercusión en el aprendizaje y la enseñanza, por lo que resulta necesario el desarrollo de esta línea de investigación, especialmente, en el área de matemáticas, debido a su uso frecuente en las aulas. Además, las editoriales deberían contar con personal especializado no sólo en matemáticas sino en otras áreas para que se haga un buen uso del contexto en los problemas matemáticos con los que pretendemos que el estudiante aprenda.

REFERENCIAS

- Bassey, M. (2003). *Case study research in educational settings*. Maidenhead, Philadelphia: Open University Press.
- Chamoso, J. M., Vicente, S., Manchado, E. y Múñez, D. (2014). Los problemas de matemáticas escolares de primaria, ¿son solo problemas para el aula? *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 12, 261-279.
- Depaepe, F., De Corte, E., y Verschaffel, L. (2009). Analysis of the realistic nature of word problems in upper elementary mathematics education in Flanders. En L. Verschaffel, B. Greer, W. Van Dooren y S. Mukhopadhyay (Eds.), *Words and worlds: Modeling verbal descriptions of situations* (pp. 245-263). Rotterdam, Países Bajos: Sense Publishers.
- Depaepe, F., De Corte, E. & Verschaffel, L. (2010). Teachers' approaches towards word problem solving: Elaborating or restricting the problem context. *Teaching and Teacher education*, 26,152-160
- Fan, L. (2010). Principles and processes for publishing textbooks and alignment with standards: A case in Singapore. *Paper presented in the APEC Conference on Replicating Exemplary Practices in Mathematics Education*, Koh Samui, Thailand.
- Fan, L. (2013). Textbook research as scientific research: towards a common ground on issues and methods of research on mathematics textbooks. *ZDM Mathematics Education*, 45(5), 765-777.
- Greer, B. (1993). The modeling perspective on wor(l)d problems. *Journal of Mathematical Behavior*, 12, 239-250.
- Hernández-Sampieri, R., Fernández Collado, C., & Baptista Lucio, P. (2006). *Metodología de la investigación* (Vol. 3). México: McGraw-Hill.
- Korsunsky, B. (2002). Improper Use of Physics-Related Context in High School Mathematics Problems: Implications for Learning and Teaching. *School Science and Mathematics*, 102(3), 107-113.

- Mecalux (2017). *El aislamiento térmico en las cámaras frigoríficas*. México: Soluciones de Almacenaje. Recuperado de <https://www.mecalux.com.mx/articulos-de-logistica/aislamiento-termico-camaras-frigorificas>.
- MEN (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Guía sobre lo que los estudiantes deben saber y saber hacer con lo que aprenden. Colombia: Ministerio de Educación Nacional.
- Ministerios de Educación, Cultura y Deporte [MECD] (2014). *PISA 2012 Resolución de problemas de la vida real. Resultados de matemáticas y lectura por ordenador*. Madrid, España: Ministerio de Educación, Ciencia y Deporte.
- Palm, T. (2008). Impact of authenticity on sense making in word problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, 67, 37-58. doi: 10.1007/s10649-007-9083-3.
- Palm, T. (2009). Theory of authentic task situations. In B. Greer, L. Verschaffel, W. Van Dooren, & S. Mukhopadhyay (Eds.), *Word and worlds: Modelling verbal descriptions of situations* (pp. 3-19). Rotterdam: Sense Publishers.
- Palm, T. y Burman, L. (2004). Reality in mathematics assessment: An analysis of task-reality concordance in finnish and swedish national assessments. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 9(3), 1-33.
- Palm, T. y Nyström, P. (2009). Gender aspects of sense making in word problem solving. *Journal of Mathematical Modelling and Applications*, 1(1), 59-76.
- Pollak, H. O. (1968). On some of the problems of teaching applications of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 1(1), 24-30.
- Pollak, H. O. (1969). How can we teach applications of mathematics? *Educational studies in mathematics*, 2(2), 393-404.
- Pollak, H. O. (1978). On mathematics application and real problem solving. *School Science & Mathematics*, 78(3), 232-239.
- Quiroz, R., Rodríguez, R. (2015). Análisis de praxelogías de la modelación matemática en libros de texto de la educación primaria, *Educación Matemática*, 27, 45-79.

- Ruiz-Estrada, H., Slisko, J., Nieto-Frausto, J. (2018). Detección de errores y contradicciones en un problema de un libro de texto de matemáticas: una exploración inicial del pensamiento crítico de los maestros. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 31(1), 106-114.
- Secretaría de Educación Pública (2016). *El modelo educativo 2016. El planteamiento pedagógico de la reforma educativa*, Ciudad de México, México: Autor.
- Secretaría de Educación Pública (2017). *Aprendizajes claves para la educación integral, plan y programas para la educación básica*, Ciudad de México, México: Autor.
- Servicio Meteorológico Nacional (2018). *Pronóstico Meteorológico General*. México: gob.mx. Recuperado de <https://smn.cna.gob.mx/es/pronosticos/pronosticossubmenu/pronostico-meteorologico-general>
- Verschaffel, L., De Corte, E. y Lasure, S. (1994). Realistic considerations in mathematical modelling of school arithmetic word problems. *Learning and Instruction*, 4, 273-294.
- Vicente, S. y Manchado, E. (2016). Resolución de problemas aritméticos verbales. ¿Se resuelven mejor si se presentan como problemas auténticos? *Infancia y Aprendizaje*, 39(2), 349-379. doi: 10.1080/02103702.2016.1138717.
- Zamora Corona, Y. (2017). *El uso de la balanza para el aprendizaje de las ecuaciones de primer grado: el caso de los libros de texto autorizados*. Tesis de maestría no publicada. BUAP.

ÁPENDICE

ÁPENDICE A. TAXONOMÍA DE PALM

Palm (2008,2009) propone ocho aspectos para garantizar la autenticidad de tareas escolares:

- A. *Evento*. Se refiere al suceso descrito en la tarea, o en la simulación de una situación real, es un requisito previo que el acontecimiento descrito en la tarea de la escuela debe haber sucedido o podría suceder en la vida real más allá de la escuela.
- B. *Pregunta*. Se refiere a la concordancia entre la asignación dada en la tarea escolar y en una situación extraescolar correspondiente. La pregunta en la tarea escolar es una que se pudo presentar realmente en el acontecimiento del mundo real descrito, es un requisito previo para que una situación del mundo real correspondiente exista.
- C. *Información/datos*. Se refiere a la información y a los datos de la tarea, los valores proporcionados, modelos y condiciones dadas se consideren reales y específicas. Se integra por los tres sub-aspectos siguientes:
 - C1 *Existencia*. Este sub-aspecto se refiere a la coincidencia existente entre la información disponible en la tarea escolar y la información disponible en la situación simulada.
 - C2 *Realismo*. El realismo de los valores dados en las tareas escolares en el sentido de valores idénticos o muy cercanos a la situación que se simula, es un sub-aspecto de importancia en simulaciones de situaciones de la vida real.
 - C3 *Especificidad*. Este sub-aspecto se refiere a la coincidencia en especificidad de la información disponible en la situación escolar y la situación simulada. Esta relación es importante para que el alumno pueda resolver la situación dentro y fuera de la escuela. El texto de la tarea que describe una situación específica en que los sujetos, objetos y lugares en el contexto configurativo son concretos. Estos elementos pueden ayudar a proporcionar evidencia de situaciones reales en las que las matemáticas de la escuela son útiles.
- D. *Presentación*. El aspecto de la tarea la presentación se refiere a la forma en que la tarea se transmite o se comunica a los estudiantes. Este aspecto se divide en dos sub-aspectos:
 - D1 *Modo*. El modo de transporte de la tarea se refiere, por ejemplo, si la palabra problema se comunica oralmente o por escrito a los estudiantes y si la información se presenta en palabras, diagramas o tablas.
 - D2 *El uso del lenguaje*. Este aspecto se refiere a la estructura de la oración de terminología, y la cantidad de lenguaje utilizado en la presentación de la situación de trabajo. Las tareas

escolares requieren diversas capacidades en la interpretación de las tareas extraescolares correspondientes, por lo que es importante que el lenguaje utilizado en la tarea escolar no sea tan diferente de una situación de tarea extraescolar correspondiente que afecte negativamente las posibilidades de que los alumnos utilicen las mismas matemáticas que habrían utilizado en la situación que se simula.

E. *Estrategias de solución.* Para ser simulado, una situación de tarea incluye el rol y el propósito de alguien que soluciona la tarea. Este aspecto se divide en dos sub-aspectos:

E1. *Disponibilidad.* La disponibilidad de estrategias de solución tiene que ver con la coincidencia en las estrategias de solución relevantes disponibles para los estudiantes que resuelven tareas escolares y aquellas disponibles para las personas descritas en las tareas como la solución de las tareas correspondientes en la vida real más allá de la escuela. Si estas estrategias no coinciden, entonces los estudiantes no tienen las mismas posibilidades de utilizar las mismas matemáticas que podrían haber sido utilizadas en la situación simulada.

E2. *Plausibilidad experimentada.* Este sub-aspecto se refiere a la coincidencia en las estrategias experimentadas como plausibles para resolver la tarea en la situación escolar y aquellas experimentadas como plausibles en la situación simulada.

F. *Circunstancias.* Las circunstancias bajo las cuales la tarea debe ser resuelta son factores en el contexto social y se dividen en los siguientes sub-aspectos:

F1. *Disponibilidad de herramientas externas.* Las herramientas externas se refieren a herramientas concretas fuera de la mente, como una calculadora, mapa o regla.

F2. *Dirección.* Este sub-aspecto se refiere a la orientación en forma de sugerencias explícitas o implícitas, por ejemplo, métodos de solución y tipos de respuestas requeridas.

F3. *Consulta y colaboración.* Las situaciones de tareas fuera de la escuela se resuelven únicamente por uno mismo, a través de la colaboración dentro de grupos o con la posibilidad de asistencia. En las simulaciones, esas circunstancias también deben tenerse en cuenta, ya que los aportes de otras personas pueden afectar qué habilidades y competencias se requieren para resolver una tarea.

F4. *Oportunidades de discusión.* Este sub-aspecto se refiere a las posibilidades para que los estudiantes pregunten y discutan el significado y la comprensión de la tarea. La falta de concordancia entre situaciones dentro y fuera de la escuela en este sub-aspecto puede causar diferencias en las matemáticas utilizadas, ya que se ha demostrado que esta comunicación

tiene el poder de afectar el significado experimentado de la tarea y las estrategias de solución aplicadas.

- F5. *Tiempo*. Se sabe que la presión del tiempo impide el éxito de la solución de tareas. En simulaciones, por lo tanto, es importante que las restricciones de tiempo sean tales que no causen diferencias significativas en las posibilidades de resolver las tareas escolares en comparación con las situaciones que se simulan.
- F6. *Consecuencias del éxito (o fracaso) de la resolución de tareas*. Las diferentes soluciones a los problemas pueden tener diferentes consecuencias para los solucionadores. Las presiones sobre los solucionadores y sus motivaciones para la tarea afectan el proceso de resolución de tareas y, por lo tanto, son un aspecto a considerar en las simulaciones. Este aspecto puede incluir esfuerzos para promover la motivación para resolver problemas verbales.
- G. *Requisitos de solución*. La noción de solución se debe interpretar de manera amplia, es decir, tanto el método de solución como la respuesta final a una tarea. Los juicios sobre la validez de las respuestas y la discusión de métodos de solución (en libros de texto y esquemas de evaluación) o frases en el texto de la tarea pueden constituir requisitos para las soluciones a las tareas escolares. En una simulación, estos requisitos deben ser consistentes con lo que se considera como una solución apropiada en una situación simulada correspondiente, y los estudiantes deben ser conscientes de esto. Para evitar que los estudiantes se vean obligados a pensar de forma diferente a como lo harían en las situaciones extracurriculares correspondientes, los cálculos y las respuestas basadas en dichos supuestos también deben recibir crédito.
- H. *Propósito en el contexto figurativo*. La idoneidad de la respuesta a una tarea, y por lo tanto las consideraciones necesarias que deben hacerse, a veces dependen del propósito de encontrar la respuesta. Por lo tanto, en simulaciones a veces es esencial que el propósito de la tarea en el contexto figurativo sea tan claro para los estudiantes como lo es para el solucionador en la situación simulada.

ANEXOS

ANEXO 1. TABLAS DE LIBROS DE TEXTO MEXICANOS DE MATEMÁTICAS DE SECUNDARIA

ETIQUETA	AÑO	TÍTULO	AUTORES	EDITORIAL	TEMA	CONTEXTO
L1	2018	Matemáticas 1	Jorge Aurelio Díaz Mori (S00339)	Ediciones Impresas y Digitales del Río	Números Enteros	Proceso de calentamiento y enfriamiento
L2	2018	Matemáticas 1	María Leticia Martínez Hernández		Números Enteros	Proceso de enfriamiento
L2	2018	Matemáticas 1	Martínez, M. y Mohar, D. (Clave: S00328)	Innova Ediciones	Variación de una relación lineal	Proceso de calentamiento
L3	2018	Matemáticas 1. Interacciones	Mancera, E. y Basurto E.	Pearson Educación	Razón de cambio	Proceso de calentamiento
L3	2018	Matemáticas 1	Eduardo Mancera Martínez		Pendiente de la recta	Proceso de calentamiento
L3	2018	Matemáticas 1	Eduardo Mancera Martínez		Razón de cambio	Proceso de enfriamiento
L4	2018	Matemáticas 1. Aprendizajes claves para la educación integral	Trigueros, M., Lozano, M., Sandoval, I., (Clave: S00336)	Santillana	Números Enteros	Proceso de calentamiento y enfriamiento
L4	2018	Matemáticas 1	María Trigueros Gaisman		Números Enteros	Proceso de calentamiento y enfriamiento
L4	2018	Matemáticas 1	María Trigueros Gaisman		Números Enteros	Proceso de calentamiento y enfriamiento
L4	2018	Matemáticas 1	María Trigueros Gaisman		Medidas de tendencia central	Proceso de calentamiento y enfriamiento
L4	2018	Matemáticas 1	María Trigueros Gaisman		Función lineal	Proceso de enfriamiento
L4	2018	Matemáticas 1	María Trigueros Gaisman		Razón de cambio	Cambio de fase (sólido-líquido-gaseoso)
L5	2018	Matemáticas 1	Rosa Isela González Polo (S00334)	SM	Variación	Proceso de calentamiento
L6	2018	Matemáticas 1	Escareño, F. y López, O. (Clave: S00332)	Trillas	Números Enteros	Proceso de enfriamiento
L6	2018	Matemáticas 1	Fortino Escareño		Números Enteros	Cambio de fase (sólido-líquido-gaseoso)
L6	2018	Matemáticas 1	Fortino Escareño		Variación lineal	Proceso de calentamiento y enfriamiento
L7	2018	Matemáticas 1. Pensamiento Matemático	Riva Palacio y Santana Marco (S00337)	Santillana	Números Enteros	Proceso de calentamiento y enfriamiento
L7	2018	Matemáticas 1	Riva Palacio y Santana Marco Aurelio		Medidas de tendencia central	Proceso de calentamiento y enfriamiento
L7	2018	Matemáticas 1	Riva Palacio y Santana Marco Aurelio		Razon de cambio	Proceso de calentamiento
L7	2018	Matemáticas 1	Riva Palacio y Santana Marco Aurelio		Razón de cambio	Proceso de calentamiento
L8	2018	Matemáticas 1	E. Canché, E. Domínguez, María José Peñón	Ediciones Castillo	Medidas de tendencia central	Proceso de calentamiento y enfriamiento
L9	2018	Matemáticas 1	Martínez, P. y Carrasco, G. (S00331)	Santillana	Números Enteros	Proceso de calentamiento y enfriamiento
L9	2018	Matemáticas 1	P. Martínez		Números Enteros	Proceso de calentamiento y enfriamiento
L9	2018	Matemáticas 1	P. Martínez		Números Enteros	Proceso de calentamiento y enfriamiento
L9	2018	Matemáticas 1	P. Martínez		Números Enteros	Registro de temperatura
L9	2018	Matemáticas 1	P. Martínez		Números Enteros	Registro de temperatura
L9	2018	Matemáticas 1	P. Martínez		Números Enteros	Proceso de calentamiento
L10	2018	Matemáticas 1	D. Block (S00333)	Ediciones SM	Análisis de datos	Proceso de calentamiento y enfriamiento
L10	2018	Matemáticas 1	D. Block		Análisis de datos	Proceso de calentamiento y enfriamiento
L11	2018	Matemáticas 1	D. Cetina, E.V. Jiménez (S00335)	EK editores	Medidas de tendencia central	Proceso de calentamiento y enfriamiento
L12	2018	Matemáticas 1	V. Jiménez	EDELVIVES	Números Enteros	Registro de temperatura
L12	2018	Matemáticas 1	V. Jiménez		Organizadores de información	Proceso de calentamiento y enfriamiento
L13	2018	Matemáticas 1	A. Alberro y R. García (S00341)	Correo del maestro	Números Enteros	Registro de temperatura
L13	2018	Matemáticas 1	A. Alberro		Números Enteros	Registro de temperatura
L13	2018	Matemáticas 1	A. Alberro		Números Enteros	Proceso de calentamiento y enfriamiento
L14	2018	Matemáticas 1	E. Sánchez y V. Aguilar (S00342)	Patria educación	Medidas de tendencia central	Proceso de calentamiento y enfriamiento
L15	2018	Matemáticas 1	J. Hernández y L. Jiménez (S00343)	Iarousse	Números Enteros	Proceso de calentamiento y enfriamiento
L16	2018	Matemáticas 1	C. Bosch (S00330)	Ediciones Castillo	Medidas de tendencia central	Proceso de calentamiento y enfriamiento

ETIQUETA	AÑO	NOMBRE	AUTORES	EDITORIAL	TEMA	CONTEXTO
L1	2013	Matemáticas 2	Castañeda Apolo y Rosa Isela Gonzalez	SM	Expresión algebraica	Proceso de calentamiento y/o enfriamiento
L2	2013	Matemáticas 2	De Icaza Peña Alejandro	Santillana	Representación algebraica	Proceso de calentamiento y/o enfriamiento
L3	2013	Matemáticas 2	Apolo Castrejón Villar	Ediciones SM	Gráficas y ecuaciones lineales	Proceso de calentamiento y/o enfriamiento
L4	2012	Matemáticas 2	Olea Díaz Alejandro	Norma ediciones	Gráfica de la función lineal	Proceso de calentamiento y/o enfriamiento
L5	2016	Matemáticas 2	Arriaga Robles Alan	Pearson	Análisis y representación de datos: Histograma	Registro de temperatura
L5	2016	Matemáticas 2	Arriaga Robles Alan	Pearson	Análisis y representación de datos: Gráfica poligonal	Proceso de calentamiento y/o enfriamiento
L6	2017	Matemáticas 2	Reyes García Lidia	Terracota	Proporcionalidad	Proceso de calentamiento y/o enfriamiento
L7	2018	Matemáticas 2	Iturrave Ramiro Fernando	Terracota	Manejo de la información: Media	Registro de temperatura
L7	2018	Matemáticas 2	Iturrave Ramiro Fernando	Terracota	Manejo de la información: Media	Registro de temperatura
L7	2018	Matemáticas 2	Iturrave Ramiro Fernando	Terracota	Manejo de la información: Media	Registro de temperatura
L8	2018	Matemáticas 2	Hernandez Soto Jesus Manuel	Grupo Editorial Patria	Expresión algebraica	Proceso de calentamiento y/o enfriamiento
L9	2018	Matemáticas 2	Balderas Robledo Rocío	Correo del maestro	Manejo de la información	Proceso de calentamiento y/o enfriamiento
L9	2018	Matemáticas 2	Balderas Robledo Rocío	Correo del maestro	Manejo de la información	Registro de temperatura
L10	2018	Matemáticas 2	Escareño Fortino	Trillas	Propiedades de la media y la mediana	Registro de temperatura
L10	2018	Matemáticas 2	Escareño Fortino	Trillas	Propiedades de la media y la mediana	Registro de temperatura
L10	2018	Matemáticas 2	Escareño Fortino	Trillas	Gráfica de la función lineal	Proceso de calentamiento y/o enfriamiento
L11	2018	Matemáticas 2	Fidel Sanchez	Fernandez editores	Problemas multiplicativos Z	Proceso de calentamiento y/o enfriamiento
L11	2018	Matemáticas 2	Fidel Sanchez	Fernandez editores	Gráficas lineales	Proceso de calentamiento y/o enfriamiento
L12	2018	Matemáticas 2	Gabriel Hernandez Moreno	Oxford	Problemas multiplicativos Z	Proceso de calentamiento y/o enfriamiento
L13	2018	Matemáticas 2	Carlos Baltazar Vicencio	Castillo	Histogramas y gráficas poligonales	Registro de temperatura
L14	2018	Matemáticas 2	Lilia Raul, Ana María Fernández	Ignis Esfinge	Medidas de tendencia central	Registro de temperatura
L15	2018	Matemáticas 2	Juan Carlos Xique Anaya	Larousse	Análisis y representación de datos	Registro de temperatura
L16	2018	Matemáticas 2	Ruben Arteaga García	Oxford	Funciones	Proceso de calentamiento y/o enfriamiento

ETIQUETA	AÑO	GRADO	AUTORES	TEMA	CONTEXTO
L1	2014	Matemáticas 3	Apolo Castrejón Villar	Variación lineal y cuadrática	Proceso de calentamiento y enfriamiento
L2	2014	Matemáticas 3	Alejandro Olea Díaz	Funciones cuadráticas	Registro de temperatura
L3	2015	Matemáticas 3	Alfonso Arriaga Coronilla	Funciones cuadráticas	Proceso de calentamiento y enfriamiento
L3	2015	Matemáticas 3	Alfonso Arriaga Coronilla	Razón de una función lineal e inclinación	Cambio de fase
L4	2013	Matemáticas 3	Javier Angeles Angeles	Variación	Registro de temperatura
L4	2013	Matemáticas 3	Javier Angeles Angeles	Pendiente de la recta	Proceso de calentamiento y enfriamiento
L4	2013	Matemáticas 3	Javier Angeles Angeles	Razón de cambio	Cambio de fase
L5	2016	Matemáticas 3	Olga Saíz Maregatti	Funciones cuadráticas	Registro de temperatura
L6	2016	Matemáticas 3	Silvia García Peña	Razón de cambio	Cambio de fase
L6	2016	Matemáticas 3	Silvia García Peña	Razón de cambio	Proceso de calentamiento y enfriamiento
L7	2018	Matemáticas 3	Santiago Alonso Palmas Perez	Funciones cuadráticas	Proceso de calentamiento y enfriamiento
L7	2018	Matemáticas 3	Santiago Alonso Palmas Perez	Funciones cuadráticas	Proceso de calentamiento y enfriamiento
L7	2018	Matemáticas 3	Santiago Alonso Palmas Perez	Gráficas formadas por secciones rectas y curvas	Registro de temperatura
L8	2018	Matemáticas 3	Mariana Ramírez Cantú	Proporcionalidad y funciones	Registro de temperatura
L9	2018	Matemáticas 3	Carlos Baltazar Vicencio	Proporcionalidad	Registro de temperatura
L9	2018	Matemáticas 3	Carlos Baltazar Vicencio	Angulo de inclinación y pendiente	Proceso de calentamiento y enfriamiento
L9	2018	Matemáticas 3	Carlos Baltazar Vicencio	Razón de cambio	Proceso de calentamiento y enfriamiento
L10	2018	Matemáticas 3	Silvana Patricia Romero Hidalgo	Expresiones algebraicas de relaciones cuadráticas	Registro de temperatura
L11	2016	Matemáticas 3	María Trigueros Gaisman	Desviación media	Registro de temperatura
L12	2017	Matemáticas 3	Guadalupe Almaguer Garza	Lectura y construcción de gráficas	Registro de temperatura
L13	2015	Matemáticas 3	Omar Viguera Herrera	Razón de una función lineal	Cambio de fase
L14	2014	Matemáticas 3	Rosa María Farfán	Variación Cuadrática	Proceso de calentamiento y enfriamiento
L15	2016	Matemáticas 3	Elena Emilia García Solana	Variación lineal y cuadrática	Proceso de calentamiento y enfriamiento
L16	2016	Matemáticas 3	Emilio Covián Rué	Gráficas que modelan fenómenos de movimiento	Cambio de fase
L16	2016	Matemáticas 3	Emilio Covián Rué	Razón de cambio	Proceso de calentamiento y enfriamiento
L16	2016	Matemáticas 3	Emilio Covián Rué	Razón de cambio y pendiente	Registro de temperatura
L17	2014	Matemáticas 3	Eduardo Mancera Martínez	Proporcionalidad y funciones	Proceso de calentamiento y enfriamiento
L17	2014	Matemáticas 3	Eduardo Mancera Martínez	Proporcionalidad y funciones	Proceso de calentamiento y enfriamiento
L17	2014	Matemáticas 3	Eduardo Mancera Martínez	Proporcionalidad y funciones	Proceso de calentamiento y enfriamiento
L18	2016	Matemáticas 3	Marcos Manuel Benítez Castañeda	Proporcionalidad y funciones	Registro de temperatura
L19	2014	Matemáticas 3	Carlos Armando Cuevas Vallejo	Cálculo y análisis de la razón de cambio	Proceso de calentamiento y enfriamiento
L19	2014	Matemáticas 3	Carlos Armando Cuevas Vallejo	Proporcionalidad y funciones	Registro de temperatura
L20	2017	Matemáticas 3	Nelson Eduardo Nuñez Aguilar	Lectura y construcción de gráficas	Cambio de fase
L21	2018	Matemáticas 3	Víctor García Montes	Proporcionalidad y funciones	Proceso de calentamiento y enfriamiento
L21	2018	Matemáticas 3	Víctor García Montes	Proporcionalidad y funciones	Proceso de calentamiento y enfriamiento
L22	2018	Matemáticas 3	Fortino Escareño	Razón de cambio	Registro de temperatura
L22	2018	Matemáticas 3	Fortino Escareño	Razón de cambio	Registro de temperatura
L22	2018	Matemáticas 3	Fortino Escareño	Razón de cambio	Proceso de calentamiento y enfriamiento
L23	2018	Matemáticas 3	Rubén Arteaga García	Proporcionalidad y funciones	Proceso de calentamiento y enfriamiento

ANEXO 2. TABLA DE LIBROS DE TEXTO COLOMBIANOS DE MATEMÁTICAS DE SECUNDARIA

ETIQUETA	AÑO	TÍTULO	EDITORIAL	GRADO	AUTORES	TEMA	CONTEXTO
L1	2017	Vamos a aprender matemáticas 7	Ediciones SM	7°	Mineducación	Números enteros	Proceso de calentamiento y/o enfriamiento
L1	2017	Vamos a aprender matemáticas 7	Ediciones SM	7°	Mineducación	Números enteros	Registro de temperatura
L1	2017	Vamos a aprender matemáticas 7	Ediciones SM	7°	Mineducación	Números enteros	Registro de temperatura
L1	2017	Vamos a aprender matemáticas 7	Ediciones SM	7°	Mineducación	Números enteros	Registro de temperatura
L1	2017	Vamos a aprender matemáticas 7	Ediciones SM	7°	Mineducación	Números enteros	Registro de temperatura
L1	2017	Vamos a aprender matemáticas 7	Ediciones SM	7°	Mineducación	Números enteros	Registro de temperatura
L1	2017	Vamos a aprender matemáticas 7	Ediciones SM	7°	Mineducación	Variación lineal	Proceso de calentamiento y/o enfriamiento
L1	2017	Vamos a aprender matemáticas 7	Ediciones SM	7°	Mineducación	Variación lineal	Registro de temperatura
L1	2017	Vamos a aprender matemáticas 7	Ediciones SM	7°	Mineducación	Variación lineal	Registro de temperatura
L2	2017	Vamos a aprender matemáticas 8	Ediciones SM	8°	Mineducación	Variación lineal	Registro de temperatura
L2	2017	Vamos a aprender matemáticas 8	Ediciones SM	8°	Mineducación	Variación lineal	Proceso de calentamiento y/o enfriamiento

