BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

EFECTOS SOBRE EL PENSAMIENTO PRE-ALGEBRAICO DE UNA INTERVENCIÓN EN ESTUDIANTES DE 6° GRADO DE PRIMARIA

TESIS
PARA OBTENER EL TÍTULO DE
MAESTRA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

PRESENTA
LICENCIADA TZINDEJEH RODRÍGUEZ QUINTERO

DIRECTOR DE TESIS
DR. JOSÉ ANTONIO JUÁREZ LÓPEZ
CO-DIRECTOR DE TESIS
DRA. DINAZAR ISABEL ESCUDERO ÁVILA

PUEBLA, PUE. FEBRERO 2020

BUAP

Dra. LIDIA AURORA HERNÁNDEZ REBOLLAR
SECRETARIA DE INVESTIGACIÓN Y
ESTUDIOS DE POSTGRADO, FCFM-BUAP
P R E S E N T E:

Por este medio le informo que la C:

TZINDEJEH RODRIGUEZ QUINTERO

Estudiante de la Maestría en Educación Matemática, ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 05 de diciembre de 2019, con la tesis titulada:

"EFECTOS SOBRE EL PENSAMIENTO PRE ALGEBRAICO DE UNA INTERVENCIÓN EN ESTUDIANTES DE 6º GRADO DE PRIMARIA"

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

A T E N T A M E N T E.
H. Puebla de Z. a 18 de febrero de 2020

Dr. JOSIP SLISKO IGNJATOV
COORDINADOR DE LA MAESTRÍA
EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA.

Ccp. Archivo.
DR JSI / l'agm*

Facultad
de Ciencias
Físico Matemáticas

Av. San Claudio y 18 sur, edif. FM1
Ciudad Universitaria, Col. San
Manuel, Puebla, Pue. C.P. 72570
01 (222) 229 55 00 Ext. 7550 y 7552

Agradezco al Consejo de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por haberme brindado la beca con la cual logré dedicarme de tiempo completo a este proyecto de investigación.

A la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP) por aceptarme en esta Maestría, la cual ha dejado en mí una enorme satisfacción.

Agradezco a la vida que sabiamente supo encaminarme hacia esta dirección en el tiempo que me correspondía estar. Porque a través de tropiezos es que uno logra entender mejor el significado de las cosas y su verdadero valor.

A mi madre, por llenarme de un amor infinito que logró hacerme sentir en casa, aunque estuviera fuera de mi hogar. Por recibirme con una sonrisa cuando los visitaba, por animar mi espíritu cuando éste se encontraba un tanto triste.

A mi padre que a través de los años he visto cambiar para convertirse en una mejor versión de sí mismo y cuyo apoyo incondicional siento como respaldo ante cualquier adversidad.

A mis hermanos menores, que, aunque ya crecidos sigo viéndoles como unos niños. Gracias por que no me dejan de sorprender día con día, valoro sus consejos, sus locuras, su sinceridad y su cariño.

Familia, gracias por ser mis pilares, por siempre estar ahí para mí, por llenarme de tanto gozo y alegría que, a pesar de nuestras imperfecciones los amo infinitamente, porque en ustedes encuentro consejos, amistad, amor y la fuerza que recarga mi alma después de un día difícil. Gracias por esperarme ya que después de una larga ausencia regreso a donde pertenezco.

A mi director de tesis, le agradezco por haber apostado por una colega normalista para emprender este proyecto, gracias por dedicarme su tiempo, consejos y enseñanzas.

A los destacables miembros que forman parte de mi jurado, muchas gracias por su apoyo al revisar este documento y por todas sus observaciones.

ÍNDICE

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE FIGURAS

RESUMEN DE LA TESIS

El presente escrito muestra una investigación realizada durante dos años de ardua labor. Se incluye una revisión de trabajos previos relacionados con la incorporación del álgebra desde edades tempranas, por otra parte, también se hace mención de otras investigaciones vinculadas directamente al uso del modelo 3UV con estudiantes que cursan la educación primaria.

Está basada en un paradigma interpretativo cuyo diseño pre-experimental de pre-prueba y pos-prueba permitió implementar durante seis semanas unidades didácticas basadas en el modelo 3UV. Lo anterior, fue la pauta para incorporar el trabajo pre-algebraico con los tres principales usos de la variable.

Como se mencionó anteriormente se decidió abordar el trabajo a través de un cuestionario como pre-test y pos-test aplicado en un grupo de sexto grado de educación primaria. Al culminar el trabajo con los estudiantes, se aplicó el pos-test para analizar los resultados obtenidos y así descubrir la efectividad de dichas sesiones, además de poder comparar los resultados entre ambos test mediante la prueba T de Student.

En este documento también se pueden apreciar las respuestas que los alumnos propusieron durante las sesiones. A través de ellas, es posible observar con mayor detalle el avance que los estudiantes demostraron al trabajar consecutivamente con actividades vinculadas al modelo 3UV. También se incluyeron respuestas que los alumnos escribieron en los ítems del pre-test y pos-test, únicamente se decidieron incluir aquellas que más llamaron la atención por su misma naturaleza.

A su vez, están plasmadas las reflexiones sobre el trabajo realizado durante las seis semanas de trabajo con el grupo, además de las conclusiones sobre esta investigación.

ABSTRACT

This paper shows an investigation carried out during two years of hard work. A review of previous work related to the incorporation of algebra from early ages is included. On the other hand, other research directly linked to the use of the 3UV model with students in primary education is also mentioned.

It is based on an interpretative paradigm whose pre-test and post-test experimental design allowed the implementation of didactic units based on the 3UV model during six weeks. This allowed the incorporation of pre-algebraic work with the three main uses of the variable.

As mentioned above, it was decided to approach the work through a questionnaire as pre-test and post-test applied in a group of sixth grade primary education. When the work with the students was completed, the post-test was applied to analyze the results obtained and thus discover the effectiveness of these sessions, in addition to being able to compare the results between both tests by means of the Student T test.

In this document we can also see the answers that the students proposed during the sessions. Through them, it is possible to observe in more detail the progress that the students showed when working consecutively with activities linked to the 3UV model. Also included were answers that the students wrote in the pre-test and post-test items, only those that most called the intention by its very nature were included.

At the same time, this paper shows the reflections on the work done during the six weeks of work with the group, in addition to the conclusions on this research.

INTRODUCCIÓN

La presente investigación muestra el trabajo llevado a cabo con estudiantes de primaria al introducir la variable por medio de sus tres principales usos, como lo son: la variable como incógnita, la variable como número general y la variable en relación funcional. La importancia de introducir este concepto y trabajar a través de los usos antes mencionados recae en el álgebra temprana, mediante la cual se fomenta un vínculo estrecho entre la aritmética y el álgebra formal, entonces, resulta conveniente que los alumnos trabajen con la variable desde edades tempranas.

Algunas investigaciones previas como es el caso de Duran (1999) y Lluvia y López (2011) han señalado que después de llevar a cabo algunas intervenciones en las que se planteó a alumnos de primaria el trabajo con variables resultó conveniente, ya que los estudiantes lograron los objetivos propuestos.

En el caso de esta investigación se especificó la siguiente pregunta: ¿Cuál es el efecto sobre el pensamiento pre-algebraico que tienen unidades didácticas basadas en el modelo 3UV en alumnos de 6to grado de primaria? A través de ella se pretendió analizar lo sucedido durante y después de trabajar en un grupo específico con los tres principales usos de la variable que se estudian en secundaria. Otra de las pretensiones de esta investigación fue verificar el avance del grupo mediante el análisis cualitativo y cuantitativo de los resultados en el pre y pos-test. A través del diseño de las secuencias y las actividades llevadas a cabo durante las semanas de intervención con los alumnos se pretende aportar una base perfectible, la cual pueda ser tomada en cuenta principalmente por docentes interesados en el trabajo de álgebra temprana con estudiantes de primaria. La intencionalidad del trabajo no excluye al resto de la comunidad que pueda encontrarse interesada en retomar o refutar los resultados que más adelante se presentan, o bien apoyarse en ellos, según convenga a sus propios fines.

La distribución del presente escrito se ha establecido de la siguiente manera, para comenzar, en el primer capítulo se podrá apreciar la revisión de trabajos anteriores que nutrieron el desarrollo de la investigación, algunos de ellos fueron tomados en cuenta para llevarlos a cabo en la elaboración de las unidades didácticas. A su vez, se pueden encontrar la pregunta y objetivos de la investigación.

Posteriormente, en el segundo capítulo correspondiente al marco teórico, fue necesario justificar la importancia de la investigación a través de su relevancia en la educación actual ya que pone de manifiesto lo trascendental que resulta incluir actividades relacionadas con el pensamiento algebraico, además de mostrar y describir el Modelo 3UV que ya ha sido previamente empleado a nivel primaria.

Para la mejor comprensión del estudio se incluye también un tercer capítulo dedicado al diseño metodológico, en el cual se describe con detalle el motivo de la selección del paradigma interpretativo. Para ahondar más en el diseño de la investigación se describe con detalle otras características del estudio explicando por qué se decidió optar por un estudio mixto con preponderancia en lo cualitativo. Por otra parte, se incluyen también los instrumentos para la recolección de información, así como los resultados esperados. En este capítulo, también se incluyó una breve descripción del grupo con el que se trabajó.

En el cuarto capítulo se muestra el diagnóstico del grupo, obtenido a través de un pre-test realizado casi para finalizar el ciclo escolar pasado, aun cuando los alumnos se encontraban cursando el quinto grado de primaria. Es posible observar un análisis descriptivo y cualitativo de los resultados de dicho test, los cuales sirvieron para el diseño de las unidades didácticas.

El quinto capítulo contiene la descripción de las sesiones trabajadas a lo largo de seis semanas. Se podrán apreciar fragmentos de los diálogos entre los estudiantes y la profesora, además de las respuestas ofrecidas por los alumnos ante las actividades que resolvieron.

El siguiente capítulo, el sexto, presenta los resultados del pos-test, que fue aplicado apenas terminadas las sesiones. En él se hace una comparación y análisis entre los resultados obtenidos en el pre y pos-test.

El séptimo y último capítulo muestra las conclusiones de este trabajo de investigación, así como algunas reflexiones para la mejora de algunos aspectos desarrollados durante el trabajo.

Capítulo 1

ANTECEDENTES

En este capítulo se encuentran organizados los antecedentes de la investigación acerca de la perspectiva que se tenía y que aún prevalece acerca del álgebra, también se incluye la descripción de estudios realizados acerca de la incorporación del álgebra en la escuela primaria y, por supuesto, las investigaciones relacionadas con el empleo del modelo 3UV.

1.1. Algunas concepciones sobre el álgebra

Las matemáticas escolares están conformadas por varios peldaños que "son alcanzados" (nótese que se ha señalado entre comillas la frase anterior ya que es una mera suposición), una vez que se haya concluido el anterior. En México, la matemática escolar se organiza en Ejes y Temas que abarcan gran variedad de contenidos representantes de determinada área de la materia. El álgebra, por ejemplo, ha sido considerada hasta no hace mucho tiempo como una parte de las matemáticas que debía ser atendida por separado en la educación básica. Se le había relegado a ser considerada como una materia que seguía después de haber dominado la aritmética. Bajo ese supuesto se podría pensar que, después de varios años de educación preescolar y primaria, los alumnos se encontrarían perfectamente preparados para asumir y superar los retos que el álgebra propuesta en secundaria les demanda. La realidad discrepa bastante de lo que se supone debería suceder, ya que la verdad puede apreciarse claramente en los resultados en pruebas internacionales, los cuales no han sido favorables para países como México. Estas pruebas, aunque son estandarizadas y evalúan solo una parte del desempeño estudiantil, son un parámetro que ha permitido medir el rendimiento en el área de las matemáticas y compararlo con el de otros países, esto ha demostrado que el camino correcto no es atenderlas por separado, o sea una después de la otra, sino entrelazarlas de manera que sus raíces se vean fortalecidas desde la educación inicial.

> La gente piensa que la aritmética debería preceder al álgebra en el currículo escolar. Esta gente puede encontrar amplia evidencia para sostener su enfoque: la aritmética es fácil; el álgebra es difícil. La aritmética trata sobre operaciones que involucran números particulares; el álgebra involucra números generalizados. La aritmética aparece en todas las culturas; el álgebra aparece solo en algunas, y, aun en esas, ha hecho su aparición recientemente (Schliemann, Carraher, y Brizuela, 2011, p.15).

Esto permite reflexionar acerca del estigma que carga el álgebra, la que puede parecer dirigida solo para aquellos que tengan cualidades específicas para lograr entenderla, hasta podría creerse que aún se tiene en mente que esta área sigue siendo para un grupo selecto. El hecho de enfocarse en decir que la aritmética resulta fácil posiblemente se deba a que es relacionada con mayor familiaridad con situaciones que se pueden vivir diariamente como ir a comprar mercancías y pagar por ello o en el caso contrario venderlas y dar el cambio. Pero con el álgebra es distinto, se le percibe como una cuestión aislada que raramente o tal vez nunca será empleada en la cotidianeidad de la vida.

Algunos investigadores se han dado a la tarea de romper con esas concepciones y han realizado trabajos relacionados con el álgebra, como Serres (2011), quien hace una remembranza acerca de las concepciones que tienen algunos autores acerca de cómo desarrollar el pensamiento algebraico en los estudiantes. Las propuestas planteadas sugieren comenzar por algo menos complejo como el desarrollo de las generalizaciones para después pasar al uso de las ecuaciones y no al revés, porque consideran que emplear ecuaciones desde un principio significaría generar un obstáculo difícil de superar para los alumnos, que podrían manifestarse inseguros ante la idea de trabajar con las variables sin antes comprender de dónde surgieron o cuál es su finalidad. Aunque no solo debería tratar de desarrollar el pensamiento, sino relacionarlo con cuestiones más realistas que tengan que ver con el contexto en el que se desenvuelven los alumnos.

Socas y Palarea (1995) hacen notar en su trabajo que el álgebra no es una generalización de la aritmética como otros autores sostienen. Ellos comentan que trabajar con álgebra significa ver las cosas de otra forma, lo cual implica un cambio en el cual la manera de razonar de los estudiantes debe ser diferente y que se desapeguen de lo que tiene preconcebido en la aritmética.

Para Papini (2003), el álgebra es percibida desde dos dimensiones; la primera como un instrumento que le permite ser empleada como herramienta al momento de resolver problemas y la segunda dimensión es la del objeto que puede ser representado como incógnita, variable, ecuación, función y parámetro.

Mientras tanto, Kieran (2004) hace notar también que el álgebra es usada como una herramienta que permite a los participantes llevar a cabo tareas como solucionar problemas y desarrollar la generalización. Esta autora propone trabajar el álgebra desde edad temprana, pero bajo un enfoque más bien pre-algebraico en el que no es necesario que se les introduzca a los alumnos a la representación simbólica de la letra, sino más bien, proponer actividades las cuales sean la antesala “no simbólica o pre simbólica”, como ella las nombra, del pensamiento algebraico.

1.2. Estudios relacionados con el álgebra en la educación básica

Hablar del cambio entre aritmética y álgebra, incluyendo las dificultades y errores que conlleva dicha transición es algo que ha llamado la atención de distintos investigadores desde hace tiempo. Van Amerom (2003) describe lo acontecido en 1995 con un proyecto llamado “Reinvención del álgebra" cuyos orígenes se encuentran en el Instituto Freudenthal. En ese proyecto se dedicaron a investigar los medios didácticos que permitían a los estudiantes realizar una transición más placentera y sin dificultades de la aritmética al álgebra temprana.

El aprendizaje del álgebra es sin duda una cuestión que debe ser atendida, pero las propuestas son distintas, por ejemplo, Van Amerom (2003) realizó un estudio en el cual se enfocó en utilizar métodos informales, en específico llevó a cabo actividades pre-algebraicas de razonamiento enfocadas a la optimización de la transición del pensamiento aritmético al algebraico en cuanto a la resolución de problemas. El propósito del estudio fue el de descubrir enfoques bajo los cuales los estudiantes lograran implementar métodos informales algebraicos para que de esa forma se pudiera minimizar esa separación entre aritmética y álgebra que resulta tan notoria para los alumnos. El estudio fue llevado a cabo con estudiantes de 5° y 6° grado de primaria y 7° año, que en México sería equivalente al primer año de educación secundaria. Durante el estudio se desarrollaron diferentes actividades como comparar cantidades e igualarlas, otorgar diferentes significados a símbolos, resolución de problemas de razonamiento, entre otros.

La introducción del álgebra al currículo de primaria no es algo tan novedoso, ya muchos otros han realizado trabajos de intervención en el aula que apoyan la idea del álgebra temprana. La edad para comenzar a trabajar con el álgebra en actividades escolares no está especificada, es por ello que resulta bastante común observar estudios cuyo rango de edad puede resultar bastante amplio ya que pueden comenzar con alumnos que se encuentran en grados preescolares. También se ha percibido el gran empeño que tienen algunos investigadores por enfocarse en trabajar con alumnos de primaria como a continuación se informa.

Para comenzar se hará mención de los resultados hallados por Sutherland y Rojano (1993) citados en Schliemann et al. (2011) encontraron que estudiantes mexicanos e ingleses quienes habían estado involucrados en actividades que implicaban el uso de la hoja de cálculo pudieron desempeñarse relativamente bien en tareas algebraicas.

Schliemann et al. (2011) decidieron encaminar su trabajo hacia el desarrollo del pensamiento algebraico en alumnos de tercer grado de primaria. Su investigación demostró que después de trabajar a través de problemas verbales y notación algebraica existió un avance considerable en el desarrollo del pensamiento algebraico. En los resultados comentaron que los alumnos llegaron a reconocer a las variables no solo como incógnitas, sino como representaciones generales.

Chalouh y Herscovics (1999) trabajaron con estudiantes de primaria y secundaria. Su experimento consistió en plantear y aplicar problemas a través de un enfoque geométrico para enseñar expresiones algebraicas. Durante sus primeras lecciones buscaron que se hiciera bastante perceptible la incógnita en una ecuación, posteriormente propusieron otra clase de problemas en los que la variable ya se mostraba para que los alumnos pudieran visualizarla como el valor faltante de la expresión y que así lograran obtener el área de algunos rectángulos.

Ferrini-Mundy, Lappan y Phillips (1999) se enfocaron en trabajar el desarrollo del pensamiento algebraico desde el uso de patrones, lo realizaron con alumnos de preescolar, primaria y secundaria, aunque con diferente grado de dificultad. Su trabajo consistió en utilizar material manipulativo para que los alumnos crearan piscinas con diferentes tamaños a través de cuadrados de color azul y blanco que representaban los azulejos. A los alumnos se les permitió formar las piscinas para que lograran percibir más fácilmente la relación del incremento de azulejos entre una figura y la siguiente apoyándose también en el registro de datos mediante tablas.

Los autores antes mencionados parecen haber sido recordados y tomados como fuente de inspiración para la intervención realizada por Pinto y Cañadas (2017). El trabajo fue realizado en España con alumnos de tercer grado de primaria. En la investigación también optaron por facilitarles a los estudiantes materiales manipulativos que representaban de igual manera los azulejos de las piscinas. En este caso, los investigadores decidieron ahondar más en el pensamiento de los estudiantes ya que optaron por entrevistar a aquellos participantes en los cuales habían observado un trabajo más complejo, el cual denotaba un grado más profundo de pensamiento algebraico.

Los trabajos mencionados anteriormente comparten algunas características, pero no todas las investigaciones relacionadas con el álgebra necesariamente deben emplear material manipulable o deben utilizar lo que es más común como lápiz y papel, es por ello que algunos investigadores decidieron cambiar un poco los métodos ya usados para desarrollar el pensamiento algebraico en los alumnos. Autores como Ploger, Klingler y Rooney (1999) decidieron seguir bajo la propuesta de los patrones, pero esta vez se aventuraron y llevaron a cabo su trabajo con el apoyo de las hojas de cálculo, que, aunque se pueda percibir como algo no tan novedoso definitivamente es accesible para ser aplicado en las escuelas.

Battista y Borrow (1999) no se quedan fuera de esta línea, decidieron abordar esta temática con el apoyo de la tecnología al usar también las hojas de cálculo para promover el pensamiento algebraico.

Las investigaciones dan soporte al hecho de que los alumnos son capaces de desenvolverse eficazmente en situaciones algebraicas, por ejemplo, Mason (1999) se plantea la idea de que los alumnos tienen la capacidad de detectar y expresar patrones y llevarlos a una generalización, claro está que a medida que transcurre su vida escolar estos procesos irán mejorando poco a poco y aumentando en complejidad para posteriormente usar las variables.

Otros autores que se encuentran dentro de las mismas ideas son Schoenfeld y Arcavi (1999) quienes también apoyan esta concepción mencionando que los estudiantes necesitan emplear patrones y realizar generalizaciones antes de que comiencen a usar las variables.

Se puede apreciar claramente que en la mayoría de los estudios mencionados anteriormente se hace énfasis en que al trabajar con variables es necesario, o al menos eso parece, abordarlas partiendo desde la generalización y que posteriormente se avance a otros aspectos del pensamiento algebraico. Debido a que tantas investigaciones se han realizado bajo un camino similar, podría parecer que esa es la manera más viable de trabajar con las variables, pero es necesario tomar en cuenta otras visiones que permitan ir trabajando con ellas bajo un enfoque distinto al acostumbrado, o bien realizar algunos ajustes sobre las propuestas que ya han sido efectuadas con anterioridad y que por supuesto han permitido tener un punto de partida para futuras investigaciones.

> La mayoría de los estudiantes necesitarán muchas experiencias en interpretación de relaciones entre cantidades en una variedad de contextos problema antes de que

> puedan trabajar significativamente con variables y expresiones simbólicas. Una comprensión de los significados y de los usos de las variables se desarrolla gradualmente mientras los estudiantes crean y usan expresiones simbólicas y la relacionan con representaciones verbales, tabulares y gráficas. Las relaciones entre cantidades usualmente pueden expresarse simbólicamente en más de una forma, dando oportunidad a los estudiantes de examinar la equivalencia de varias expresiones algebraicas (NCTM, 2000, p. XX).

De acuerdo con lo citado anteriormente se puede percibir que el trabajo con variables debe ofrecer una gama diversa de situaciones que permitan a los alumnos experimentar con los distintos usos de las variables.

Se puede apreciar claramente que las investigaciones respecto al aprendizaje del álgebra son tema de interés entre la comunidad de educación matemática. Como menciona Ursini (2011), desde los setentas las investigaciones relacionadas con las dificultades en el aprendizaje del álgebra han resultado ser vastas. En ellas los investigadores han realizado numerosas propuestas, pero desgraciadamente las dificultades que presentan los estudiantes aún siguen siendo palpables. No es un tema desconocido el hecho de que a los alumnos les resulta difícil usar las variables, que para lograr una comprensión profunda del álgebra debieran entenderlas y también manipularlas.

1.3. La importancia del álgebra en la educación primaria

Las razones que justifiquen el motivo de la investigación pueden variar dependiendo del enfoque bajo el cual se pretende trabajar, pero independientemente de eso se deben demostrar los motivos por los cuales el estudio es relevante o hasta necesario en el campo en el que el investigador pretenda desarrollarlo. Para esta investigación se considera importante el trabajo algebraico en primaria ya que como menciona Castro (2012) "El aprendizaje del álgebra se hace difícil a la mayoría de los estudiantes. Esta es una afirmación con la que están de acuerdo las comunidades de profesores y de investigadores en educación matemática" (p.76). Como resultado se han llevado a cabo gran cantidad de trabajos de investigación para encontrar las causas de esas dificultades y a su vez implementar soluciones que erradiquen esos obstáculos cada vez más palpables en las aulas.

> El álgebra es una de las principales ramas (o subárea) de la matemática y el álgebra escolar (elemental) es la forma más básica de la misma. El álgebra escolar y la

> aritmética (otra rama de la matemática) están tan relacionadas que en ocasiones es considerada el álgebra como aritmética generalizada (Castro, 2012, p.79).

Con base en lo anterior podríamos asegurar que incorporar el álgebra en los contenidos escolares no desencadenaría un desbalance en los procesos cognitivos propios de los escolares más pequeños. En cambio, si es abordada como parte de la matemática escolar resultaría benéfico para los alumnos quienes no la percibirían como otra materia más, sino como parte del desarrollo y fortalecimiento de su pensamiento matemático.

El modelo de enseñanza que aún se encuentra en la actualidad parece haber sido tomado de la industria en el que la materia prima (el alumno) es sometida a una serie de pasos (años escolares) para que posteriormente salga totalmente transformada en otra cosa, tal vez distinta, ya que por fuera tiene una apariencia completamente diferente, pero guarda su origen en el fondo. En ocasiones, estos procesos no se llevan a cabo con la rigidez necesaria y el producto final no es conseguido. En este caso, pueden ser muchos los factores que influyan en que los alumnos no transiten por sus años escolares como se supone deberían hacerlo, o sea que no todos pasan de un grado a otro sabiendo todo lo que deberían saber o habiendo desarrollado las habilidades que deberían poseer según los estándares curriculares de su país. Debido a esto, en muchas ocasiones al separar el álgebra de la aritmética se llegaba a culpar a la poca comprensión de la primera o a seguir arrastrando errores que no se habían superado en etapas anteriores, lo cual se traducía como el fracaso de los estudiantes al comenzar a trabajar con temáticas del álgebra.

Si bien es cierto que resulta difícil comprender un nuevo tema sin antes haber interiorizado el que le precede no se puede solo culpar al hecho de haber tenido un “mal año de aritmética”, lo que se debe precisar es que separar ambas ramas de la matemática solo generará descontento y culpas en lugar de centrarse en trabajar ambas desde el inicio.

Castro (2012) comenta “Hay una gran tradición de enseñar, en las escuelas, aritmética antes que álgebra. El aprendizaje de la aritmética se produce en la educación primaria y el aprendizaje del álgebra en la educación secundaria” (p. 80). Lo anterior aún se puede apreciar claramente en el currículo de algunos países, si las instituciones educativas proponen que se trabaje de forma segmentada, primero la aritmética y luego álgebra, la consecuencia será que sean percibidas por los alumnos como algo separado, por consiguiente, encontrarán pocas veces relación entre una y otra. Ese vínculo inexistente causa conflicto, ya que al abordarse por separado los estudiantes no hacen las conexiones necesarias para resolver las situaciones que se plantean. Con base en las investigaciones se ha logrado que algunos currículos hayan cambiado la manera en que organizan los contenidos y han optado por implementar actividades que incluyan el desarrollo de pensamiento algebraico a través del uso de patrones, generalización, entre otros métodos.

En palabras de Van Amerom (2003) "La aritmética se ocupa de cálculos directos con números conocidos, mientras que el álgebra requiere razonar sobre cantidades desconocidas o variables y reconocer la diferencia entre situaciones específicas y generales" (p. 64). Tanto la aritmética como el álgebra poseen cualidades que las diferencian, probablemente por eso mismo en años anteriores se consideró que una debía ser la antecesora de la otra. En la actualidad, es notoria una propuesta de cambio que ha hecho reflexionar a los investigadores acerca de ese antiguo pensamiento. Esta misma autora también hace énfasis en que las diferencias no solo están presentes en los procedimientos que se deben llevar a cabo, explica que a su vez "existen diferencias con respecto a la interpretación de letras, símbolos, expresiones y el concepto de igualdad. Por ejemplo, las letras aritméticas comúnmente se usan para abreviaturas o unidades, mientras que las letras algebraicas son suplentes para números variables o desconocidos". He aquí uno de los obstáculos principales, la interpretación de las variables. El valor que le asignen los alumnos dependerá de la manera en que se ha trabajado con ellos, ya que pueden seguir relacionándolas solamente con situaciones geométricas como cuando resolvían problemas que implicaban obtener áreas y perímetros, o hasta asignarles significados que jamás podríamos imaginar, porque a simple vista parecería de lo más sencillo o hasta existe la posibilidad de que este obstáculo sea pasado por alto por quienes ya tienen una perspectiva más desarrollada y madura del álgebra.

El álgebra es un tema que por lo general se asocia a los grados posteriores a la primaria. Su aparición en esos grados sorprende a los estudiantes y en algunos casos hasta logra atemorizarles. Es por ello que Kilpatrick (2011) dice que "El álgebra no es algo que deba posponerse hasta que se haya dominado la aritmética, sino que debe estar presente en el plan de estudios desde el principio" (p.126), lo mencionado anteriormente tiene lógica porque las dos se pueden desarrollar simultáneamente, esto les permitiría a los alumnos desarrollar con eficiencia su pensamiento algebraico y se detendría la transición abrupta entre ambas.

Se podría decir que muchos estudiantes de secundaria, inclusive de otros niveles superiores en la educación pueden resolver ecuaciones, pero solamente porque aprendieron a hacerlo, esto no quiere decir que en realidad hayan interiorizado ese conocimiento y que puedan aplicarlo en distintas situaciones fuera de lo que de manera mecanizada grabaron en su memoria. La realidad es que, primeramente, no en todos los currículos se encuentra presente el álgebra desde etapas tempranas, se puede apreciar la separación entre ambas en países como Estados Unidos, en donde se decide retrasar su inclusión ya que el álgebra es presentada en las aulas hasta después de concluida la primaria. Esto obviamente ha traído serias consecuencias, una de ellas es la dificultad que los alumnos tienen al transitar por ese puente entre aritmética y álgebra. Lo mismo sucedió en nuestro país con el plan y programas de estudio 2011, en el que se proponía como uno de los ejes el "sentido numérico y pensamiento algebraico", donde el pensamiento algebraico era apenas vislumbrado por los profesores, por consiguiente, indistinguible a los ojos de los alumnos.

> El pensamiento algebraico en los primeros grados implica el desarrollo de formas de pensar dentro de actividades para las cuales el álgebra de letras simbólicas se puede usar como una herramienta, pero que no son exclusivas del álgebra y que se podrían realizar sin utilizar ninguna letra de álgebra simbólica, tales como, analizar las relaciones entre cantidades, observar la estructura, estudiar el cambio, generalizar, resolver problemas, modelar, justificar, probar y predecir (Kieran, 2004, p.149).

Debe existir un replanteamiento de lo que las matemáticas escolares en primaria deben ser, y esto lograría que tal vez se concibiera al álgebra desde una perspectiva distinta, se podría decir que más accesible. En algunos países, como mencionan Cai, Ng y Moyer (2011) han decidido que el álgebra debe estudiarse formalmente e incluirla directamente en los programas de estudio al contrario de otros que postergan su aparición hasta el octavo o noveno grado. Al incluir el álgebra desde un inicio esos países han logrado resaltar de entre los demás, debido al destacable rendimiento que muestran sus estudiantes en pruebas internacionales y que, por supuesto, ha llamado la atención del mundo, más específicamente se ha percibido en los estudiantes asiáticos. Esos éxitos están acompañados de diferentes factores, como la formación que tienen los docentes, la cultura y sociedad en que se desenvuelven los alumnos. También se hace notorio el plan de estudios, puesto que al observarlo con mayor detenimiento se puede apreciar que en sus raíces está el estudio formal del álgebra logrando entrelazarla con la aritmética.

Cai et al. (2011) comentan que el beneficio de empezar con el estudio del álgebra desde la primaria puede notarse a simple vista; en el caso de Singapur los conceptos algebraicos son introducidos desde sexto grado. Watanabe (2011) explica lo que sucede en Japón, en donde no hay una materia que se llame álgebra en primaria ni en secundaria, pero en el currículo de primaria se encuentran establecidas actividades algebraicas desde primer grado.

Al parecer, México se pretende sumar a los países más competentes en matemáticas mediante el nuevo modelo educativo, en éste se reformuló el eje "sentido numérico y pensamiento algebraico" por "procesos de cambio y pensamiento algebraico", aunque parezcan similares, en el segundo se propuso que se abordaran la proporcionalidad, los patrones y expresiones equivalentes, funciones y ecuaciones. Aunque no tardó mucho en replantearse esa propuesta y que en los aprendizajes clave el eje quedó establecido como número, álgebra y variación; el cual se desglosa en número, adición y sustracción, multiplicación y división, proporcionalidad, ecuaciones, funciones, patrones, figuras geométricas y expresiones equivalentes.

Con respecto a esta transición se han tomado en consideración algunas investigaciones en las cuales se habla acerca del álgebra temprana y cómo resulta positiva para disminuir las dificultades que los alumnos de secundaria presentan al dejar de trabajar con temas puramente aritméticos. Estas investigaciones tienen lugar en China y Japón, en donde se aprecia con claridad que la inclusión del álgebra formal desde la primaria ha beneficiado el desempeño de sus estudiantes. En el caso de Singapur, Kieran (2004) describe que la inclusión formal aparece hasta el último grado de primaria o sea 6°, con esto no quiere decir que no se incluyen actividades relacionadas con el álgebra en grados anteriores, simplemente han decidido trabajar en ese grado con más rigor haciendo énfasis en los procesos que impliquen la manipulación de la variable como incógnita en ecuaciones y resolver problemas que involucren expresiones algebraicas.

Recordando un poco lo mencionado al inicio de este trabajo, pero en palabras de Castro, Godino y Rivas (2011) quienes perciben al álgebra como un "guardián" que no permite el acceso a los estudiantes hacia niveles superiores de estudio. Entonces pues es necesario un cambio para que ese "guardián" sea derrocado y al fin se deje pasar a todo aquel que lo desee o lo requiera. Podríamos decir que el álgebra debe presentarse a los alumnos como algo diferente, alcanzable, en lugar de hacerles ver que se trata de cuestiones tan complicadas que hasta resultan difíciles de explicar para los mismos profesores. Para suprimir cualquier cuestión negativa que se le atañe al álgebra y dejarla de presentar como algún pariente lejano del cual nunca se ha escuchado hablar, algunos autores coinciden en que debe ser introducida desde la primaria, Kaput (2000) llama a esta introducción "la algebrización" del currículo. El hecho de que los alumnos sean introducidos al mundo del álgebra desde edad temprana podría ser mejor que dejar que terminen la primaria con conocimientos puramente aritméticos.

Carpenter, Franke y Levi (2003) señalan en su estudio, a través del trabajo en conjunto con profesores enfocados en el desarrollo del razonamiento algebraico de los estudiantes, que en los primeros grados o educación inicial se puede percibir que los alumnos poseen una gran cantidad de conocimiento de sus operaciones aritméticas, pero al analizarlo desde un punto de vista en el que los niños pueden lograr hacer más que eso, desafortunadamente solo se quedan en ese peldaño, no exploran las generalizaciones que pueden llegar a elaborar. Es por esto mismo que la clave más importante es que los profesores logren impulsar a sus alumnos hacia un contexto que les ayude a desarrollar habilidades que ya poseen pero que no han puesto a prueba.

> Un supuesto universalmente aceptado es que el álgebra está relacionada con una mejor comprensión de la aritmética, con la geometría, el análisis y otros temas matemáticos, parece que no hay duda que una buena experiencia temprana con el álgebra podría servir para mejorar la formación matemática de los niños (Castro et al., 2011, p. 93).

Ese supuesto es apoyado por Socas (2011) quien se encuentra de acuerdo con el desarrollo del pensamiento algebraico desde la primaria. Menciona también que el álgebra se compone de aspectos de lenguaje como las letras a las cuales se les otorga un significado algebraico y que también son conocidas como variables que, por cierto, su comprensión, manipulación y desarrollo son tema esencial de este trabajo.

Bednarz, Kieran y Lee (1996), ofrecen un análisis y reflexión desde el punto de vista de la investigación sobre las distintas vías de introducción del álgebra en el ámbito escolar. Las aproximaciones que plantean son: la generalización de patrones numéricos y geométricos y de las leyes que gobiernan las relaciones numéricas; la resolución de problemas, la modelización de fenómenos físicos y matemáticos y la introducción de problemas funcionales.

Socas (2011) hace mención del enfoque que estuvo presente durante las décadas de los 80 y 90. Este enfoque se basaba en las investigaciones dirigidas a las dificultades y errores de los alumnos con respecto al álgebra. Los investigadores dedujeron que lo más óptimo sería introducirla en los últimos cursos de la Educación Obligatoria, además comenzaron por sugerir a las nuevas tecnologías como facilitadores del proceso de enseñanza y aprendizaje de la misma. Las nuevas tecnologías siguen siendo parte importante de la educación debido a su fácil acceso y familiaridad con la generación actual, queda claro que al implementarlas correctamente es posible obtener los resultados esperados, pero sugerir que los estudiantes deben acceder al álgebra hasta los últimos cursos de educación obligatoria no es algo que esté a la vanguardia, así que seguir bajo ese enfoque no permitiría que se cumplieran con las demandas actuales de la sociedad en cuanto a educación respecta.

Es cierto que las demandas actuales dentro de la escuela deben estar enfocadas al desarrollo de capacidades que les permitan a los estudiantes desarrollarse óptimamente dentro de la sociedad, es por ello que el argumento principal es el hecho de incorporar actividades algebraicas a través de sesiones de trabajo. Es cierto también que resultaría una batalla perdida si se espera que los estudiantes, de forma espontánea, sepan manipular una variable o al menos sepan lo qué es una.

Aquí entra la implementación de actividades pre-algebraicas que ayudarán a los alumnos a irse inmiscuyendo en ese campo para posteriormente presentarles actividades con dificultad cada vez mayor.

Para apoyar el hecho de que el álgebra tiene un lugar importante en el currículo de la Educación Primaria, Carraher y Schliemann (2007) efectuaron una vasta revisión acerca de investigaciones en relación con el razonamiento algebraico de los alumnos de 6 a 12 años. Entonces, se puede decir que esta corriente conocida ya como “Álgebra temprana” ha influenciado a varios investigadores que han realizado diferentes estudios acerca del pensamiento algebraico en edades tempranas con la finalidad de conocer más a fondo las capacidades que poseen los estudiantes de primaria al proponerles situaciones en las que irán desarrollando poco a poco habilidades que antes se enfocaban solamente en la aritmética.

1.4. Álgebra temprana

El surgimiento del álgebra temprana se debe principalmente, como menciona Socas (2011), a la forma en que se ha tratado de comprender la relación existente entre Aritmética y el Álgebra. Debe existir un cambio curricular donde no solo se les vea como una transición entre una y otra sino encontrar verdaderamente cómo se relacionan para incorporarlas simultáneamente. Esto puede lograrse tomando en cuenta los resultados de las investigaciones enfocadas sobre las dificultades y errores en la enseñanza de ambas.

> Álgebra temprana es una propuesta de cambio curricular que propone introducir el Álgebra desde la Educación Primaria integrada en los otros bloques de contenido matemático de esta Etapa. Emerge como consecuencia de diversas investigaciones que se han desarrollado en la última década (Bastable y Schifter, 2007; Carraher y Schliemann, 2007; Kaput,1998, 2000). En sentido amplio, la expresión "Álgebra temprana" considera el Álgebra en una concepción amplia que abarca el estudio y generalización de patrones y relaciones numéricas, el estudio de relaciones funcionales, el desarrollo y la manipulación del simbolismo, el estudio de estructuras abstraídas de cálculos y relaciones, y la modelización (Kaput, 1998, 2000; Schliemann, et al., 2003), comprende en definitiva la instrucción a alumnos de 6 a 12 años tanto del razonamiento algebraico como de las relaciones algebraicas (Socas, 2011, p. 14).

La propuesta del álgebra temprana se basa en algunas investigaciones como las ya mencionadas anteriormente. Se considera que, a partir de ellas, trabajar bajo ese enfoque puede aportar más en el campo de la Educación Matemática, ya que trabajar con patrones, relaciones y propiedades matemáticas son cuestiones que los niños asimilarán mejor además de que gracias a esto su pensamiento matemático cobrará mayor madurez.

El hecho de seguir la propuesta de álgebra temprana e incorporar el Álgebra al currículo de la Educación Primaria tienen como finalidad ayudar a los estudiantes a desarrollar mejor su pensamiento matemático y que de esta manera no existan esos sobresaltos que fácilmente surgían al pasar de la Aritmética al Álgebra. Trabajar bajo esa propuesta tiene como objetivo brindar a los alumnos herramientas necesarias para que los errores y dificultades que antes sobresalían en los estudios se vayan dejando a un lado.

Socas (2011) menciona que “existe un cierto acuerdo general en la comunidad investigadora internacional en que el Álgebra debe tener un lugar en el currículo de la Educación Primaria, como Pre-Álgebra o como Álgebra temprana” (p.27), de hecho, hace ver que este enfoque aún se encuentra en desarrollo y que pueden hacerse más aportaciones con respecto a este tema. Por otra parte, hace notar también que en algunos currículos como el español ya se han incorporado cuestiones relacionadas al álgebra temprana como lo son el lenguaje pre-algebraico donde se hacen presentes algunos aspectos de la variable como incógnita.

Ya se ha mencionado con respaldo de algunos autores que introducir el álgebra desde la educación primaria es de lo más oportuno, ahora es necesario seleccionar bajo qué criterio se realizará esa introducción.

Godino y Font (2003) afirman que, aunque se apoye el hecho de introducir el álgebra desde edades tempranas no se trata simplemente de impartir un curso formal de ella. El principal objetivo es que se desarrolle en los educandos el pensamiento algebraico desde que se inicia la educación infantil y que prosiga en grados posteriores. Entonces, no se trata simplemente de añadir otra materia en primaria, en su lugar, lo que se propone es la creación de un currículo que permita implementar actividades que resulten en una experiencia que logre entrelazar los contenidos de aritmética y álgebra. Las afirmaciones anteriores son retomadas por Causado (2010) quien menciona que la propuesta de cambio curricular sobre el álgebra temprana no pretende figurar como una asignatura sino como una manera en que los alumnos piensen, reflexionen acerca de las relaciones, patrones, estructuras y situaciones que le ayuden a comprender el significado de lo que están realizando.

1.5. Estudios relacionados con el modelo 3UV

El modelo 3UV surge como una propuesta que engloba a los tres usos principales de la variable que se estudian en la educación secundaria: la variable como incógnita, la variable como número general y la variable en relación funcional. Aunque el modelo 3UV se enfoca principalmente en el trabajo con estudiantes de secundaria, no descarta la idea de incorporarlo en otros grados. Tal es el caso del estudio realizado por Juárez (2011), quien detectó las dificultades que se manifestaron en docentes de matemáticas en educación secundaria al aplicárseles un cuestionario de álgebra elemental, en el que se observó la necesidad de mejorar sus destrezas algebraicas centradas en esa rama para que su conocimiento sea más sólido y por consiguiente sus clases se vean fortalecidas con una mejor preparación.

Investigaciones previas como la de Socas (2011), ya han sentado un precedente importante acerca de cómo los alumnos han logrado desarrollar o potenciar su pensamiento algebraico a través de propuestas enfocadas en la generalización, pero para este estudio se considera que, en lugar de trabajar con las variables de manera aislada, el mejor camino es haciendo uso del modelo 3UV desarrollado por Ursini y Trigueros (2001). El motivo principal para hacer uso de este modelo es debido a la flexibilidad que ofrece al abordar cada una de las diferentes conceptualizaciones de la variable.

Como se mencionó anteriormente, con el modelo 3UV es posible trabajar con grupos de diferentes edades, tal es el caso de Lluvia et al. (2011) quienes decidieron implementarlo en tercer grado de primaria. En este estudio se pudo apreciar que no trabajaron con todas las variables propuestas en el modelo, únicamente se enfocaron en la variable como incógnita y como número generalizado. Decidieron llevar a cabo su trabajo con un grupo control y experimental a través de intervenciones didácticas. En los resultados de su investigación encontraron diferencias entre pre-test y pos-test en el grupo experimental pero no el de control, concluyendo que haber aplicado el modelo 3UV como herramienta resultó bastante útil.

Por otra parte, Durán (1999) se basó en el modelo 3UV con la finalidad de potenciar el pensamiento algebraico en un grupo de estudiantes de sexto grado de primaria. En este caso únicamente empleó en sus intervenciones la variable como número general. El progreso de los estudiantes es plausible en los resultados que presenta como anexos llegando a concluir que las intervenciones basadas en el modelo son adecuadas para lograr los objetivos fijados desde el inicio de su trabajo.

Las investigaciones mencionadas anteriormente sientan un precedente idóneo para trabajar el pensamiento pre-algebraico, en específico emplear el modelo 3UV con estudiantes de primaria, y así, usar unidades didácticas en las que figuren los tres principales usos de la variable.

1.6. Planteamiento del problema

Al comenzar este proceso de investigación se optó por revisar bibliografía relacionada con el cambio curricular de álgebra temprana. Después de analizar la manera en que ha sido abordada en las escuelas primarias, o sea, a través de algunas tareas o secuencias, se decidió establecer al Modelo 3UV como fundamento para desarrollar este análisis. Después de eso surgieron varias dudas con respecto a qué era lo que se pretendía lograr mediante este trabajo incluyendo los medios con los cuales hacerlo. Fue en ese momento que se comenzaron a considerar algunas preguntas, de las cuales se concibió para la presente investigación la siguiente pregunta: ¿Cuál es el efecto sobre el pensamiento pre-algebraico que tiene una intervención basada en el modelo 3UV en alumnos de 6° grado de primaria? Esta pregunta es la guía que ha encaminado todo el trabajo, a través de ella, se pretende describir detalladamente las consecuencias que tuvo en el pensamiento pre-algebraico mediante una intervención en el aula a través de unidades didácticas basadas en el modelo 3UV.

Objetivo general:

Analizar el efecto sobre el pensamiento pre-algebraico que tiene una intervención basada en el modelo 3UV con estudiantes de 6° grado de primaria.

Objetivos específicos:

1. Evaluar el desempeño de un grupo de estudiantes de 6° grado como resultado de la implementación de unidades didácticas diseñadas con base en el modelo 3UV.
2. Valorar los procedimientos y estrategias mostrados por los estudiantes en cada una de las actividades propuestas para los tres usos de la variable.
3. Desarrollar en los alumnos los tres usos de la variable.
4. Describir el avance entre el conocimiento aritmético y pre-algebraico.
5. Medir el rendimiento en el uso de las variables a través de un pre y post test.

Capítulo 2

MARCO TEÓRICO

Como se mencionó anteriormente existen estudios que apoyan la idea de incorporar el álgebra desde edad temprana, algunos de ellos partiendo únicamente desde la generalización, otros empleando tecnologías o bien, trabajarlo desde la perspectiva del álgebra temprana. Al momento de describir el marco teórico y en palabras de Barreiro, Leonian, Marino, Pochulu y Rodríguez (2017) podremos encontrarlo de la siguiente forma "son los lentes a través de los cuales miramos nuestro problema" (p. 138). Entonces, si bien es cierto que el problema es que los estudiantes de primaria no emplean las variables durante su paso por la escuela, debido a que no se lleva a cabo trabajo algebraico, esto llega a ocasionar un "efecto dominó", por así llamarlo, que se puede ver reflejado en secundaria ya que la transición entre la aritmética y el álgebra es demasiado abrupta y los estudiantes, a pesar de su esfuerzo, no logran concretar tareas de índole algebraico.

Para esta investigación los lentes a través de los cuales se ha visto y trabajado el problema es el modelo 3UV porque en él se han encontrado características que se consideran únicas y favorecedoras para poner en práctica en la escuela primaria.

2.1. Características del modelo 3UV

Este modelo es descrito por Ursini (2011) "como una herramienta teórica desarrollada durante varios años de trabajo y pruebas" (p.69), así que es parte de una seria investigación cuyo desarrollo no ha sido fortuito. Este modelo ya ha sido ampliamente utilizado, pero en palabras de la autora "es perfectible". Esto permite que las actividades que se deseen realizar sean suficientes y no solamente se deban aplicar las que hayan sido realizadas previamente. Este modelo realiza una labor triple, primero, trabajar con cada uno de los usos de la variable, después reunirlas todas en una actividad integradora donde los alumnos puedan pasar de uno de los usos a otro y por último seguir en la espiral de actividades trabajando con cada uso, pero ahora con un grado mayor de dificultad.

Para este trabajo se ha contemplado el empleo del modelo 3UV propuesto por Ursini et al. (2001), ya que se considera como el más adecuado debido a su forma de introducir cada uso de las variables y relacionarlas de manera que no se perciban como algo aislado, además mencionan que tanto la interpretación, la simbolización y la manipulación de la variable tienen el mismo grado de relevancia, lo cual parece ser lo más pertinente, de lo contrario se enfrascaría a los alumnos a visualizar de una sola manera a las variables lo cual podría representarles obstáculos en grados de escolaridad posteriores.

2.2. Aspectos del modelo 3UV

El modelo surge principalmente como propuesta para la enseñanza y manipulación de los tres principales usos de las variables. Cada uno de los tres usos se desglosa en aspectos descritos por Ursini, Escareño, Montes y Trigueros (2005) como a continuación se muestra:

2.2.1. Incógnita específica

I1 Reconocer e identificar, en una situación problemática, la presencia de algo desconocido que puede ser determinado considerando las restricciones del problema.

I2 Interpretar la variable simbólica que aparece en una ecuación, como la representación de valores específicos.

I3 Sustituir la variable por el valor o valores que hacen de la ecuación un enunciado verdadero.

I4 Determinar la cantidad desconocida que aparece en ecuaciones o problemas, realizando operaciones algebraicas, aritméticas o de ambos tipos.

I5 Simbolizar las cantidades desconocidas identificadas en una situación específica y utilizarlas para plantear ecuaciones.

2.2.2. Número general

G1 Reconocer patrones y percibir reglas y métodos, en secuencias y en familias de problemas.

G2 Interpretar la variable simbólica como la representación de una entidad general, indeterminada, que puede asumir cualquier valor.

G3 Deducir reglas y métodos generales, en secuencias y en familias de problemas.

G4 Manipular (simplificar, desarrollar) la variable simbólica.

G5 Simbolizar enunciados, reglas o métodos generales.

2.2.3. Relación funcional

F1 Reconocer la correspondencia entre variables relacionadas, independientemente de la representación utilizada (tablas, graficas, problemas verbales, expresiones analíticas).

F2 Determinar los valores de la variable dependiente, dados los valores de la independiente.

F3 Determinar los valores de la variable independiente, dados los valores de la dependiente.

F4 Reconocer la variación conjunta de las variables involucradas en una relación funcional, independientemente de la representación utilizada (tablas, graficas, problemas verbales, expresiones analíticas).

F5 Determinar los intervalos de variación de una de las variables, dado el intervalo de variación de la otra.

F6 Simbolizar una relación funcional, con base en el análisis de los datos de un problema.

Para la presente investigación se seleccionaron solo algunos aspectos de cada uno de los tres usos como se pude apreciar a continuación.

Tabla 2.1
Aspectos seleccionados para cada variable

Variable como incógnita	Variable como número general	Variable en relación funcional
I1, I2, I3, I4	G1, G3, G5	F1, F2, F3, F6

Esta selección se debió a que se consideraron como los más pertinentes para que fuesen trabajados con estudiantes de primaria, primeramente, porque en los aprendizajes clave uno de sus ejes es Número, álgebra y variación, lo que abre la puerta al trabajo algebraico. Se trabajó también bajo el supuesto de que esos aspectos se podrían desarrollar eficazmente, ya que en los aprendizajes esperados para sexto grado se pueden apreciar algunos que son la antesala para el trabajo con dichos aspectos. Tales aprendizajes desarrollados por la Secretaria de Educación Pública (2017) dicen que el estudiante “Analiza sucesiones de números y de figuras con progresión aritmética y geométrica, calcula valores faltantes en problemas de proporcionalidad directa, con un número natural como constante, resuelve problemas de suma y resta con números naturales, decimales y fracciones” (p. 234). En la sección de orientaciones didácticas se pueden percibir como sugerencias algunas actividades o preguntas que se pueden plantear en el grupo, como ¿Cuánto necesito sumar o restar a cierta cantidad para obtener otra previamente determinada?, se les muestran tablas para que calculen los valores faltantes en situaciones de proporcionalidad, dándoles el valor unitario y en otros ejemplos no. También se les proponen secuencias de figuras para que ellos las completen y expliquen la regularidad de la sucesión.

Trabajar con el modelo 3UV permite diseñar unidades en las cuales no necesariamente deben aparecer todos los aspectos a la vez, también pueden introducirse con diferentes grados de dificultad según sean las características de los alumnos. Las unidades didácticas diseñadas incluyen actividades enfocadas en cada uno de los tres usos de la variable, además de actividades integradoras.

Al interior de este modelo podemos destacar que "propone una enseñanza en espiral que acerque gradualmente a los alumnos al trabajo con los distintos usos de la variable en situaciones cada vez más complejas, para así abordar las diversas temáticas del álgebra" (Ursini et al., 2005, p.39). Esto quiere decir que se deben trabajar por separado actividades que inmiscuyan solo uno de los usos de la variable para posteriormente llevar a cabo tareas que involucren los tres usos. La primera fase de esta enseñanza en espiral juega un papel importante, ya que mediante ella se pretende lograr la comprensión de cada uno de los distintos usos de la variable, mientras que en la fase integradora se tiene como finalidad la de desarrollar en los alumnos la capacidad de pasar entre los diferentes usos. Es necesario contemplar que al ser una espiral en ascenso cada actividad debe tener un grado de complejidad cada vez más demandante; cada espira representa una actividad para diferenciar los usos y al terminar debe seguirle una actividad integradora.

Capítulo 3

DISEÑO METODOLÓGICO

En el presente capítulo se describe lo correspondiente a los procedimientos metodológicos establecidos para desarrollar este trabajo de investigación. Se incluye la descripción de la selección del paradigma, a su vez se puede encontrar el diseño de la investigación y una breve justificación de la misma. También están especificados los instrumentos empleados para el análisis de las intervenciones. Asimismo, otra cuestión relevante que se desglosa en este capítulo son los instrumentos para la evaluación de la secuencia.

Este capítulo también incluye una explicación acerca del trabajo de la elaboración de unidades didácticas. Además de un apartado en el que se comenta la visión que tiene la investigadora de sí misma sobre su participación durante todo el estudio, así como lo que se espera lograr con esta investigación.

3.1. Selección del paradigma y perspectivas

El paradigma en el que se basa esta investigación es el interpretativo, su finalidad es interpretar, comprender y describir los fenómenos educativos, partiendo de los significados e intenciones de los participantes del escenario educativo. Se tiene la posibilidad de generar nuevas hipótesis en el transcurso de la investigación, además, intenta profundizar en el conocimiento del porqué ocurren las cosas en el ámbito educativo.

Con base en lo anterior, durante esta investigación se pretendió comprender, describir e interpretar el proceso de trabajo y los resultados obtenidos por un grupo de estudiantes de sexto grado de primaria al ser partícipes en la implementación de las unidades didácticas basadas en el modelo 3UV, y, de esta manera, conocer los resultados que se obtendrían al trabajar con un tipo de actividades específicas diseñadas bajo ese esquema. Entonces, también se consideró verificar si es que a través de ellas se lograría introducir a los alumnos a los distintos usos de las variables. Por otra parte, se pensó que era oportuno desarrollar este trabajo bajo un enfoque interpretativo para que se pudieran tomar en cuenta nuevas cuestiones que en un principio no se habían vislumbrado, pero por supuesto sin perder la noción principal de la investigación.

3.2. Diseño de la investigación

3.2.1. Tipo de investigación

La investigación es pre-experimental con un diseño de preprueba/posprueba con un solo grupo. Se aplicó un pre-test, posteriormente se realizó la intervención a través de las unidades didácticas basadas en el modelo 3UV y al finalizar se aplicó un post-test para revisar el avance de los alumnos.

Es una investigación de tipo mixta con un enfoque cualitativo mixto (CUAL-cuan) lo cual quiere decir que su preponderancia radica en lo cualitativo. Lo que llama la atención de este tipo de método es el hecho de que se logra tener un panorama mucho más amplio de lo que se podría llegar a conseguir si se seleccionara uno solo.

En lo relativo a la parte cualitativa se tomó en cuenta la interpretación del desarrollo mostrado por los estudiantes durante las sesiones, todo esto a través de sus respuestas y procedimientos empleados. A su vez, tomó en cuenta a la triangulación propuesta por Fernández, Elortegui, Rodríguez y Moreno (2002) para evaluar tanto el desempeño del docente como el de las sesiones llevadas a cabo, además de recurrir a herramientas de evaluación que permitieron describir con mayor detalle el desempeño logrado por cada alumno.

Para determinar si existía diferencia significativa entre los resultados del pre-test y post-test se decidió recurrir a la prueba paramétrica de T de Student para muestras relacionadas. También fue necesario recurrir a lo cuantitativo al momento de validar el instrumento de evaluación, ya que a pesar de que en su mayoría fue extraído del cuestionario de Trigueros, Reyes, Ursini, y Quintero (1996) no permaneció totalmente igual, así que el diseñado fue sometido a una validación a través expertos verificándola mediante una escala tipo Likert.

Una vez determinado lo anterior se debe mencionar que es necesario tomar en consideración los tiempos de los métodos empleados, así que se ha recurrido a una ejecución de tipo concurrente. Los datos cualitativos y cuantitativos deben recabarse por separado para que su análisis no se vea mermado por el otro. Otra cuestión importante es que las interpretaciones de los resultados, que, a pesar de haber sido obtenidos por separado, necesitan ser comparadas al final para observar con mayor detenimiento las similitudes o discrepancias que hayan resultado.

Después de analizar los datos, fue posible llegar a establecer “metainferencias”, que no son otra cosa que las deducciones realizadas a partir de los conocimientos previamente adquiridos y en contraste con los resultados obtenidos, además, a través de estas deducciones fue posible palpar la mezcla entre ambos métodos.

Acerca del diseño establecido para el presente trabajo se decidió utilizar el Diseño anidado o incrustado concurrente de modelo dominante (DIAC). La importancia de describir tan minuciosamente el diseño se debe a que sus características se fusionan perfectamente con la ejecución de temporalidad mencionada anteriormente. Según Hernández, Fernández y Baptista (2014) este diseño es definido como aquel que:

> Colecta simultáneamente datos cuantitativos y cualitativos. Pero su diferencia con el de triangulación concurrente reside en que en un método predominante guía el proyecto (pudiendo ser éste cuantitativo o cualitativo). El método que posee menor prioridad es anidado o insertado dentro del que se considera central (Hernández et al., 2014, p. 559).

Con lo anterior se respalda lo que se pretende para este trabajo en el cual el método de menor predominancia es el cuantitativo que se ve insertado dentro del de mayor relevancia, o sea el cualitativo. Al emplear este diseño se llega a tener una visión más amplia del estudio, ya que como lo mencionan sus características, los dos tipos de análisis convergen entre sí para formar una explicación mejor fundamentada.

3.2.2. Instrumentos de recolección de información

Durante las sesiones, se llevó a cabo la observación participante de tipo no estructurada. Este tipo de observación fue seleccionada para registrar las acciones realizadas por los estudiantes sin enfocarse únicamente a una sola cuestión, y así poder analizar otras variables que pudieran surgir durante el desarrollo de las sesiones; al mencionar que se trata de un tipo de observación no estructurada no quiere decir que se perderá de vista el objetivo principal.

Los instrumentos para complementar de una mejor manera el análisis de la información fueron la grabación en video y audio de las clases, esto permitió revisar con mayor detalle lo acontecido durante ellas ya que existieron cuestiones que en un inicio pudieron ser imperceptibles o bien, bastante interesantes y que debido a la dinámica que se desarrolló en las sesiones no se analizaron con mayor profundidad, sino hasta revisar las grabaciones. A pesar de contar con los videos, que resultaron de gran ayuda, también se decidió complementar esos instrumentos con el registro de lo acontecido en una bitácora o diario del profesor, sobre todo para resaltar algunas sugerencias con respecto al diseño de las actividades.

3.2.3. Unidades didácticas

Al revisar lo propuesto por Fernández et al. (2002) acerca del diseño de unidades didácticas innovadoras se pudo comenzar con el diseño de las sesiones de trabajo. Los mismos autores mencionan que lo que usualmente sucede es que se les muestra a los profesores la forma en que un aprendizaje logre ser eficaz pero raramente se les ayuda a reflexionar acerca de cómo enseñarlo. Entonces se podría decir que "la planificación es un proceso de reflexión, previsión y propuesta de acción del profesor con sus propias limitaciones: el pensamiento del profesor, contexto de enseñanza, realidad del aula, etc." (p.15). Mientras que la unidad didáctica se define como:

> Un conjunto de ideas, una hipótesis de trabajo, que incluye no solo los contenidos de la disciplina y los recursos necesarios para el trabajo diario, si no unas metas de aprendizaje, una estrategia que ordene y regule en la práctica escolar los diversos contenidos del aprendizaje. También incluirá la forma de pensar del equipo de docentes que impregna todo el conjunto con su filosofía y sus métodos de trabajo, casi siempre implícitos pero determinantes. Todo ello debe ser acorde, en la medida de lo posible, con las nuevas investigaciones en el campo de la educación y con los principios que se han venido desarrollando alrededor del nuevo sistema educativo (Fernández et al., 2002, pp. 18-19).

Para desarrollar las unidades didácticas es necesario seguir un modelo didáctico, en este caso se optó por basarse en actividades relacionadas con el modelo 3UV. El diseño inició con la selección del tópico bajo el cual se trabajaría. De entre los cuatro tópicos mencionados por Fernández et al. (2002) se eligió el de: información acerca de conocimientos, habilidades y destrezas de los alumnos con los que se va a trabajar. Una vez seleccionado el tópico fue necesario determinar la línea en la cual se enfocaría el tema. Para nuestro caso, de las dos líneas señaladas por los autores previamente mencionados, la que concordaba más resultó ser la "Disciplinar" que se enfoca en el desarrollo de temas específicos en este caso los tres usos de la variable.

Acto seguido, se seleccionaron las ideas fuerza que son descritas por los autores como un grupo de metas que en su conjunto se aplican a la práctica y que conforman el centro de los aprendizajes que se esperan alcanzar, al mismo tiempo se redactaron los objetivos de las unidades, separándolos por cada grupo de actividades.

Posteriormente se seleccionaron actividades que los alumnos vivirían como experiencias dentro del proceso de trabajo. Algunas actividades fueron tomadas de estudios anteriores cuyos resultados ya fueron comprobados y parecieron acomodarse a la perfección dentro de las unidades, otras actividades se crearon e incorporaron con base en la experiencia docente. Como se analizaron los resultados del pre-test se consideró necesario establecer actividades que precedieran a las variables con el fin de crear un ambiente de más confianza que considerara el hecho de que resultaría complicado para los estudiantes comprender sus usos sin antes establecer ciertas bases.

3.2.4. Instrumentos de análisis de las unidades didácticas.

En las implementaciones de las sesiones un factor importante fue la validez de la propia unidad didáctica, lo cual quiere decir que tanto la unidad didáctica como el aprendizaje de los alumnos debe ser evaluado por separado, aunque en ambos casos los resultados pudieran adquirir adjetivos bastante vagos como decir que han resultado ser buenos o malos. Lo que se pretendió en realidad es que el análisis fuera previsto desde un punto de vista formativo, por lo tanto, en este trabajo no se encontrarán esos calificativos, los cuales en realidad se quedarían bastante cortos al momento de pretender analizar las mismas unidades diseñadas.

Para analizar las unidades se optó por utilizar la triangulación propuesta por Fernández et al. (2002) en la que a través de las interpretaciones del mismo profesor y en conjunto con las observaciones de un agente externo que funge como observador se puede determinar si el desarrollo de la clase fue exitoso o si es considerable realizarle algunos ajustes para futuras aplicaciones. Aunque otra propuesta es que se tome en consideración una triangulación hecha solamente entre profesor y alumnos, cada uno redactando en su diario las observaciones de lo acontecido, se consideró que lo mejor era incluir a un agente externo que pudiera tener una visión más objetiva del desarrollo de las secuencias. El observador llevó a cabo un registro el cual tomó en cuenta lo planificado, las habilidades del profesor y también el desempeño de los alumnos. Además, este análisis fue complementado por lo que el profesor redactó en su diario sumado a las escalas de rango elaboradas para cada sesión, cuya finalidad fue evaluar los aspectos que se pretendía lograran los estudiantes en cada uno de los usos de las variables.

3.3. Tareas desempeñadas dentro del trabajo de investigación

Durante el presente trabajo se asumieron diferentes roles, cada uno de ellos con la misma importancia. Para comenzar se asumió el rol de investigadora al buscar los antecedentes previos del trabajo, posteriormente se pasó a realizar un rol de escritura y análisis al momento de estructurar la información recabada desde el inicio del trabajo. Otra cuestión importante es que se tuvo que mantener una postura neutral al momento de analizar los resultados de la investigación para que la validez del estudio no fuera afectada por intereses personales.

Otra de las tareas que se asumieron fue la del diseño de las actividades tomando como base a las unidades didácticas ya antes descritas. Además, un papel que permaneció durante toda la investigación fue el de maestro-investigador, rol nunca antes efectuado, el cual dejó en claro la importancia que tiene mantener ese estatus en un futuro ya que es relevante seguir trabajando bajo un constante análisis de las experiencias que surgen en el aula.

3.4. Resultados esperados

Dentro de los principales objetivos se pretendió que cada uno de los alumnos lograran visualizar las variables desde otra perspectiva, o sea que las dejaran de percibir como parte de las fórmulas para obtener áreas y perímetros, para que ampliaran esa visión que impera durante la educación primaria. Otra cuestión considerada fue el hecho de que los alumnos manipularan las variables y que de esta manera les resultara de mayor facilidad asimilarlas cuando ingresen a secundaria.

No se espera que los resultados del presente trabajo se tomen como una generalización, pero sí que se puedan tomar en cuenta para futuras investigaciones.

3.5. Características generales del grupo

La escuela en la que se llevó a cabo el trabajo de investigación es una primaria federal de organización completa ubicada en Puebla, Puebla. La zona en la que se encuentra la escuela es considerada de economía media, la primaria está rodeada de fraccionamientos cerrados que cuentan con vigilancia y a su lado se encuentra establecida una universidad privada, sin embargo, la población que acude a la primaria se caracteriza por formar parte de un sector económico de escasos recursos.

El motivo por el cual se decidió trabajar en esa primaria se debió a que existió apertura hacia la investigadora, ya que antes había laborado ahí, precisamente con el mismo grupo que formó parte de esta investigación cuando cursaban el segundo grado. Por ello, tanto como los padres de los niños, como las autoridades correspondientes, no se negaron a que la escuela fuera partícipe del presente trabajo.

El grupo en el que se aplicó el diagnóstico o pre-test fue en el quinto año durante el mes de junio en el ciclo escolar 2017-2018. En ese momento el grupo estaba conformado por un total de 34 alumnos de los cuales 21 eran niños y 13 eran niñas. Ese mismo grupo fue al que se implementaron las unidades didácticas, pero ya cursando el sexto año, cuyas edades oscilaban entre los 11 y 12 años.

En el grupo se identificaron tres estudiantes con dislalia, específicamente con problemas para pronunciar la letra r, que fueron canalizados a terapia de lenguaje desde que cursaban segundo año. Por otra parte, siete estudiantes, incluyendo dos de los que presentaban dislalia, recibían apoyo por parte del departamento de psicopedagogía ya que demostraron dificultades para el aprendizaje.

El trabajo requirió de un total de 23 horas distribuidas entre las seis semanas que duró la intervención. La cantidad de alumnos en cada una de las sesiones de la secuencia varió, algunas faltas se debieron a enfermedades y otras por causas no justificadas.

Las sesiones fueron planificadas como una clase extra a las que ya tenían normalmente, pero fue implementada durante el horario escolar establecido por la normatividad de la escuela, específicamente se llevó a cabo de las 12:00 p.m. a la 1:00 p.m.

Para la presente investigación se llevó a cabo un pre-test y pos-test, que puede ser identificado como el Anexo A. Para la intervención en el aula se diseñaron unidades didácticas correspondientes al Anexo B, a su vez, para ellas fueron necesarios algunas hojas de trabajo que forman parte del Anexo C.

Capítulo 4

RESULTADOS DEL PRE-TEST

4.1. Análisis de resultados

Para el tratamiento de los resultados se realizó un análisis descriptivo y cualitativo. Lo anterior fue posible gracias a los aportes teóricos, los cuales señalan que “El Modelo 3UV proporciona una base teórica, fundamentada en la investigación educativa, que sirve de guía tanto en el desarrollo de instrumentos de evaluación y diagnóstico, como el análisis de las respuestas que dan los estudiantes” (Ursini et al., 2011, p. 130).

4.1.1. Análisis descriptivo de los datos

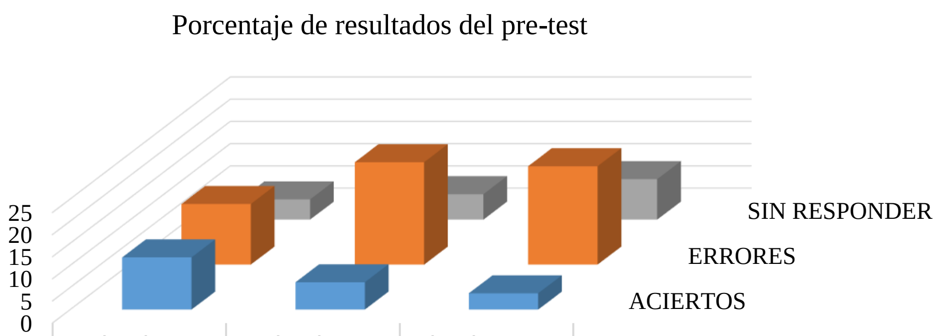
Al comenzar el análisis del pre-test se realizó una primera clasificación de todas las respuestas. La clasificación fue organizada de la siguiente manera: contestadas correctamente (aciertos), contestadas incorrectamente (errores) y para finalizar el conteo de preguntas no resueltas. Posteriormente, se obtuvo el porcentaje para graficar los resultados tomando en consideración las mismas categorías de clasificación.

El pre-test fue organizado en apartados según el uso de las variables propuesto en el modelo 3UV, en total fueron tres hojas, como se puede apreciar en el Anexo A. La primera contiene actividades relacionadas con la variable como incógnita que abarcó las preguntas de la 1 a la 6, la segunda hoja estuvo enfocada en actividades relacionadas con la variable como número general, preguntas de la 7 a la 13 y la tercera hoja incluyó actividades enfocadas a la variable en relación funcional de la cual forman parte las preguntas de la 12 a la 20.

Cada uno de los apartados incluyó al menos una actividad al final de la hoja que reflejara un grado mayor de complejidad en comparación con las demás. Para la variable como incógnita fue la pregunta 6. En la variable como número general fueron las preguntas 12 y 13. En el caso de la variable en una relación funcional las preguntas 19 y 20. Al finalizar el conteo, clasificación y análisis de las respuestas se pudo observar que en las preguntas con mayor dificultad solo se obtuvo un acierto en la variable como incógnita, mientras que en la variable como número general y en una relación funcional ningún alumno logró contestar correctamente esos ítems. En realidad, se esperaba que ningún estudiante pudiera completar con éxito esos aparatados, por lo que fue sorpresivo que al menos uno de ellos lograra completar satisfactoriamente una de las preguntas debido a que en estudios previos, como es el caso de Juárez (2011), este tipo de actividades representaron un verdadero reto para profesores de matemáticas que ejercen en secundaria.

Los resultados demostraron que, para la variable como incógnita, el porcentaje de ítems resueltos superó al porcentaje sin responder. Probablemente se deba a que están acostumbrados a trabajar de esta manera. Aunque su esfuerzo por responder la mayor cantidad de preguntas no se vio reflejado en el porcentaje de éxito, ya que los errores superaron a los aciertos que obtuvieron. Las preguntas contestadas de manera incorrecta se incrementaron en la variable como número general y en la variable en relación funcional, de hecho, para ambos casos el porcentaje de preguntas contestadas disminuyó, o sea que las pocas preguntas contestadas fueron respondidas incorrectamente. Entonces, al observar la cantidad de aciertos, errores y sin responder, es posible distinguir que las actividades relacionadas con la incógnita resultaron más sencillas que los ítems propuestos para los otros dos usos de la variable.

Se consideró que, posiblemente, una cuestión que influyó en el alto porcentaje de errores y preguntas sin responder fue el hecho de que el tiempo no fuera suficiente, aunque se les dio una hora completa para contestarlo. Otro factor podría ser, en definitiva, el hecho de que algunas de las actividades presentadas resultaron ser más complejas comparadas con las que están acostumbrados a resolver. A continuación, se presenta la gráfica del porcentaje de los resultados del pre-test, a partir de ella es posible constatar lo dicho anteriormente.



	VARIABLE COMO INCÓGNITA	VARIABLE COMO NÚMERO GENERAL	VARIABLE EN RELACIÓN FUNCIONAL
ACIERTOS	11.8	6.18	3.68
ERRORES	13.7	23.1	22.2
SIN RESPONDER	4.56	5.74	9.12

Figura 4.1 **Resultados del pre-test**

En la figura anterior se puede apreciar que el porcentaje de aciertos va decreciendo en cada una de las variables. También es necesario recalcar que las preguntas sin responder fueron en aumento en cada apartado, lo cual hace notar lo complicado que les resultó a los alumnos la última parte del diagnóstico. A través de los resultados fue posible comprobar que los alumnos presentan menor dificultad en el uso de la variable como incógnita, aunque no precisamente porque la identifiquen con certeza.

Por otro lado, la variable como número general representó mayor dificultad para ellos. En el caso de la variable en una relación funcional, al ser el último apartado del pre-test, fue la que en comparación con los otros dos usos tuvo mayor cantidad de preguntas sin contestar, lo cual hace imposible determinar si fue a causa del tiempo o en verdad fue causado por el grado de dificultad que representó para los estudiantes.

4.1.2. Análisis cualitativo

4.1.2.1. Primer parte del pre-test: La variable como incógnita

En la primera actividad (preguntas de la 1 a la 3) se les pidió a los alumnos que escribieran el valor que podría tomar la letra para que la expresión que se les mostraba fuera correcta. En esta actividad tres alumnos respondieron la actividad de una forma poco convencional, ya que todos interpretaron a la primera variable como un signo de multiplicar como se puede apreciar en la Figura 4.2.

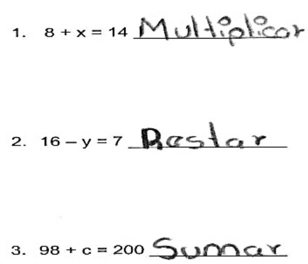


Figura 4.2 **Ejemplo de respuestas para los ítems 1-3**

En el caso de las demás preguntas decidieron ignorarla lo cual lo sitúa en la categoría de letra no utilizada según Kücheman (1980).

El segundo apartado constó de 3 problemas de razonamiento, se logró apreciar que la comprensión de los problemas verbales les resultó difícil, además el dominio del algoritmo de la resta aún no se encontraba consolidado en todos los estudiantes. Algunos de los alumnos emplearon el cálculo mental o el azar para determinar sus respuestas ya que no escribieron ningún procedimiento.

4.1.2.2. Segunda parte del pre-test: La variable como número general

La primera actividad consistió en completar una tabla según el número de puntos de las figuras previamente dadas. Casi ningún alumno logró encontrar el patrón a seguir en la secuencia, por lo que no pudieron completar correctamente la actividad, por consiguiente, no lograron contestar satisfactoriamente las preguntas 10 y 11.

Al momento de contestar las preguntas 12 y 13 cuyo grado de dificultad es mayor, ningún estudiante pudo realizar las generalizaciones necesarias. Por una parte, algunos alumnos contestaron con números, probablemente con el afán de cumplir con la tarea, mostrando con ello una mayor adhesión al contrato didáctico como lo menciona Brousseau (1997).

Imagínate que puedes seguir dibujando figuras hasta conseguir alguna que tenga una cantidad cualquiera de puntos.

12. ¿Cómo representarías ese número de figura? 2

13. ¿Cómo representarías el número de puntos de esa figura? 3

Figura 4.3 **Ejemplos de respuesta para los ítems 12 y 13**

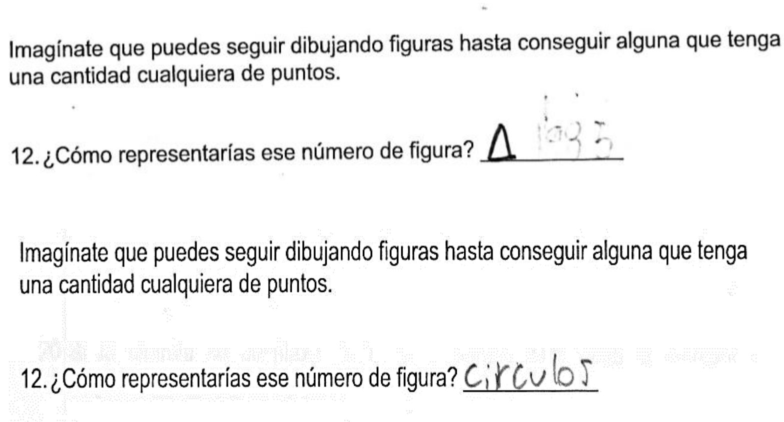
Otros alumnos probablemente no comprendieron las indicaciones y la actividad en general porque asumieron que al hablarles de representaciones se les pedía que eligieran una figura para hacerlo, como en la actividad previa de la tabla en la cual se empleaban puntos. Algunos estudiantes, siendo fieles al ejemplo, propusieron una cantidad cualquiera de puntos mediante los mismos, como se puede apreciar en la Figura 4.4.

Imagínate que puedes seguir dibujando figuras hasta conseguir alguna que tenga una cantidad cualquiera de puntos.

12. ¿Cómo representarías ese número de figura? con puntos

Figura 4.4 **Ejemplo de respuesta para el ítem 12**

En otros casos algunos alumnos propusieron utilizar figuras geométricas como cuadrados o triángulos, como se puede apreciar en las Figura 4.5.


Imagínate que puedes seguir dibujando figuras hasta conseguir alguna que tenga una cantidad cualquiera de puntos.

12. ¿Cómo representarías ese número de figura? Δ

Imagínate que puedes seguir dibujando figuras hasta conseguir alguna que tenga una cantidad cualquiera de puntos.

12. ¿Cómo representarías ese número de figura? circulos

Figura 4.5 **Ejemplos de respuesta para el ítem 12**

4.1.2.3. Tercera parte del pre-test: La variable en relación funcional

En este último apartado se había considerado que era más probable que los estudiantes no tuvieran tantas dificultades como en los dos usos anteriores porque las preguntas de la 14 a la 18 son actividades bastante similares a las que se trabajan en la escuela primaria. Aunque hubiera familiaridad en las actividades, no se esperaba que identificaran la relación entre las variables dependiente e independiente, y se contempló el hecho de que era bastante probable que trataran de resolver la actividad a través del uso de la regla de tres. Pero resultó sorprendente que muchos alumnos dejaron sin resolver esos ítems y que para otros tantos resultara imposible contestarla exitosamente.

A partir de los datos analizados se logró determinar que el pensamiento pre-algebraico no estaba desarrollado en el grupo, y como se esperaba, no se encuentran familiarizados con el uso de variables. Además, aun presentan algunas dificultades aritméticas en los algoritmos de la resta, suma y multiplicación.

Este pre-test permitió realizar un diagnóstico del grupo y tomarlo como base para diseñar las unidades a partir de las habilidades que los alumnos poseen en relación a las variables y posteriormente realizar una comparación de los resultados en contraste con el post-test.

Capítulo 5

IMPLEMENTACIÓN DE LAS UNIDADES DIDÁCTICAS

En este capítulo se describe lo ocurrido al llevar a cabo las unidades didácticas durante seis semanas. Dentro de esta misma sección también se incluyen fragmentos de las discusiones que se efectuaron en el grupo, así como las reflexiones y propuestas realizadas por los estudiantes.

Las sesiones elaboradas para trabajar los tres usos de las variables en el grupo de primaria, se sustentan en la propuesta de Fernández et al. (2002) quienes sugieren la creación de unidades didácticas innovadoras para llevar a cabo la enseñanza de algún tema. Los autores mencionan que las unidades didácticas son un grupo de ideas que buscan la organización de la enseñanza y el aprendizaje de una manera que resulte eficiente, la cual incluirá la forma de pensar del docente o los docentes implicados en su elaboración. En las unidades diseñadas se incluyeron ideas fuerza, que no son otra cosa que las metas que se pretenden alcanzar en cada sesión.

5.1. Descripción de las sesiones

En la primera semana únicamente se trabajaron tres sesiones en las cuales se cubrieron temas introductorios que se consideraron imperativos antes de empezar con las actividades diseñadas bajo el modelo citado. Las sesiones quedaron distribuidas de la siguiente manera:

Tabla 5.1
Distribución de las sesiones de trabajo por semana

	SEMANAS					
	1	2	3	4	5	6
Variable como incógnita	Sesión 1 Sesión 2	Sesión 3	Sesión 4	Sesión 5	Sesión 6	Sesión 7
Variable como número general	No hay sesión	Sesión 1	Sesión 2	Sesión 3	Sesión 4	Sesión 5
Variable en relación funcional	Sesión 1	Sesión 2	Sesión 3	Sesión 4	Sesión 5	Sesión 6
Actividad integradora	No hay sesión	Sesión 1	Sesión 2	Sesión 3	Sesión 4	Sesión 5

Es posible percibir que no hay un número igual de sesiones para cada uno de los usos de la variable, ya que a partir de los resultados del pre-test y tomando en cuenta los contenidos que se abordarían se decidió que sería más conveniente agregar dos sesiones previas para la variable como incógnita en la cual se trabajó el tema de la igualdad y de la introducción a la incógnita. Para la variable en relación funcional, al ser el de resultados menos favorecedores, se decidió llevar a cabo una sesión previa para dedicarle mayor tiempo.

5.1.1. Primera semana

5.1.1.1. Sesión 1. Igualdad en ecuaciones

En la primera sesión se organizó en equipos a los 31 alumnos que asistieron para fomentar el trabajo colaborativo. La actividad que se llevó a cabo tuvo como objetivo que los estudiantes tuvieran otro tipo de acercamiento con el concepto de igualdad ya que se consideró necesario que los alumnos supieran que en una ecuación debe existir la igualdad en ambos lados, una equivalencia, y que el símbolo de igual no solo fuera empleado como usualmente lo hacen en la primaria, algo que debe escribirse cuando se encuentra el resultado en una ecuación. La actividad fue tomada de una de las estrategias propuestas por Robles (2006), a cada equipo se le dio una balanza, así como un grupo de costales de diferente color y peso.

Cuando todos tuvieron su material para trabajar se les entregó una hoja en la cual debían escribir en los recuadros vacíos los costales que habían necesitado para que la balanza pesara lo mismo de ambos lados. Al comienzo todos los equipos emplearon los costales, probando uno a uno para encontrar la igualdad en ambos lados de la balanza, sin tomar en cuenta el peso de los costales, pero después de un rato, uno de los equipos dejó de estar simplemente tratando y prestó atención en el peso de cada costal para así decidir qué colores debían colocar del otro lado para equilibrar el peso.

Al discutir acerca de lo que implicó el colocar el signo igual en la actividad de la balanza, los alumnos respondieron que ese signo quería decir que tanto de un lado como del otro lado había una "equivalencia". Otros mencionaron que el signo igual quería decir que la balanza estaba equilibrada, o sea que estaba igual de un lado y del otro, por eso se escribía el signo igual.

La actividad resultó ser para los alumnos algo diferente a lo que usualmente trabajan y a través de ella se logró trabajar desde otra perspectiva el concepto de igualdad que posteriormente serviría para las sesiones de la variable cómo incógnita.

5.1.1.2. Sesión 2. Introducción a la incógnita

La segunda sesión trató sobre la introducción a la incógnita. Durante esta sesión asistió un total de 32 estudiantes de los 34 que conformaban la totalidad del grupo. Se les mostraron algunas ecuaciones las cuales tenían cubierta una de las cantidades, casi inmediatamente y sin antes escuchar la indicación los alumnos murmuraban el valor de las cantidades cubiertas, al ver que se encontraban ansiosos por revelar el valor faltante, se decidió retomar el tema anterior acerca de la igualdad preguntándoles si es que en las ecuaciones se satisfacía la igualdad. Se quedaron pensativos un rato ya que no era la pregunta que estaban esperando, así que se les preguntó de manera particular a algunos de ellos y respondieron que no. En sus respuestas comentaron que era porque en cada una faltaba algo que la completara.

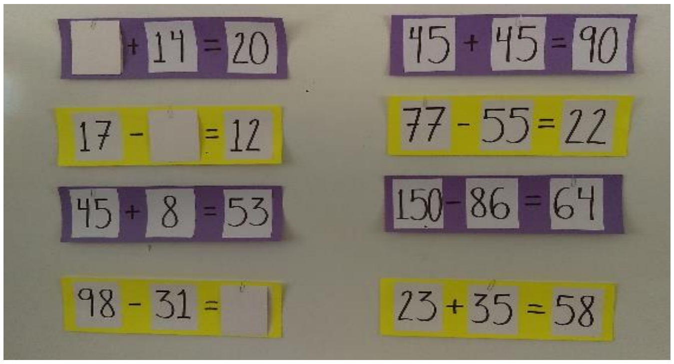


Figura 5.1 **Actividad introductoria a la incógnita: cantidades cubiertas**

Posteriormente se decidió preguntar a otros alumnos acerca de la cantidad que debía estar debajo de los recuadros para que existiera igualdad en las ecuaciones, a lo que respondieron acertadamente y luego pasaron a quitar el papel para corroborar sus respuestas.

Como siguiente actividad se les entregó individualmente a los alumnos una hoja en la cual debían escribir sobre una línea la cantidad faltante como se puede apreciar en la Figura 5.2.

TEMA	Introducción a la incógnita	SEMANA 1. SESIÓN 2 DE 7

- **Encuentra la cantidad que falta en las ecuaciones y escríbela en la línea.**

a) 15 +______= 33 b) ______ - 45= 15

c) ______+ 23= 50 d) 287 – ______= 182

Figura 5.2 **Fragmento de la actividad realizada por los estudiantes**

Para la mayoría de los alumnos no representó gran dificultad resolverla y descubrir los números faltantes, pero sí se pudo constatar que las restas les costaron mucho más trabajo que las sumas como se puede observar a continuación.

Tabla 5.2
Porcentaje de aciertos y errores en la actividad de completar con la cantidad faltante

	Porcentaje de aciertos	Porcentaje de errores
Sumas	86.8 %	13.1 %
Restas	59.3 %	40.6 %

Aunque la actividad en sí no representó un gran reto, en los argumentos que escribieron para explicar por qué habían decidido escribir esas cantidades en los números fue notorio observar que recurrieron a la palabra “resultado”, dejando a un lado el concepto de equivalencia que habían exteriorizado anteriormente, y que obviamente no habían interiorizado aún. En realidad, se esperaba que al menos algunos estudiantes pudieran argumentar que, en efecto, era necesario colocar esos números en las líneas para que en las sumas y restas hubiera equivalencia en ambos lados, en su lugar, se obtuvo una variada gama de respuestas como se puede apreciar a continuación.

Tabla 5.3
Porcentaje de respuestas para la pregunta: ¿por qué escogiste esos números para completar los espacios vacíos?

Respuestas	Porcentaje de respuestas
a) Porque fui sumando y restando	37.5 %
b) Porque ese es el resultado correcto	31.2 %
c) Porque son los números que completan los problemas	15.6 %
d) Porque si pusiera otro número estaría mal y daría otro resultado, tenía que encontrar lo que equivalía.	3.1 %
e) Porque lo calculé mentalmente	3.1 %
f) Porque según yo esos son los números	3.1 %
g) Eso me dieron las multiplicaciones	3.1 %
h) Eso me dieron las fracciones	3.1 %

La mayoría de los alumnos estuvieron conscientes de que solo podrían anotar una cantidad, que en efecto a esos espacios vacíos únicamente les podría corresponder un número, aunque solo un pequeño porcentaje haya involucrado la idea de la igualdad en las ecuaciones. La mayoría respondió como se espera lo hagan en ese grado, ya que por lo que comentaron los mismos estudiantes, no están acostumbrados a argumentar sus respuestas.

En la misma actividad se les preguntó si era posible anotar otras cantidades en los espacios vacíos el porcentaje de respuestas por parte de los alumnos se distribuyó de la siguiente manera.

Tabla 5.4
Porcentaje de respuestas para la pregunta: ¿Se podían anotar otras cantidades en los espacios?

Respuestas	Porcentaje de respuestas
No	81.1 %
Si	18.6 %

Se logró apreciar que la mayoría de los alumnos no consideró que fuera posible escribir otras cantidades en los espacios vacíos, ya que, como mencionaron de manera general, no daría la respuesta correcta. Las argumentaciones ofrecidas fueron variadas, pero no muy extensas y sin una explicación que permitiera pensar que estaban conscientes de la necesidad de, por así decirlo, equilibrar la balanza.

En la tabla siguiente se puede verificar que no existió unanimidad al momento de contestar, ya que el grupo se dividió entre los que consideraban que solo correspondía una cantidad en los espacios vacíos y los que insistieron en que se podría escribir cualquier otro número y aun así las ecuaciones tendrían sentido. Aunque los segundos representan un porcentaje mucho menor, sus argumentaciones permiten saber que no comprendieron correctamente la pregunta.

Tabla 5.5
Porcentaje de respuestas para la pregunta: ¿Se podían anotar otras cantidades en los espacios?

Respuestas	Porcentaje de respuestas
No	
a) Porque no daría el resultado/daría otro resultado	40.6 %
b) Porque estaría mal/ no estaría correcto	31.2 %
c) Porque tiene que ser exacto el número	3.1 %
d) Porque cada número tiene un lugar	3.1 %
e) No es lo mismo	3.1 %
Si	
a) Cada uno tiene otra respuesta	6.2 %
b) Cada número es diferente	3.1 %
c) Porque los espacios no tienen ningún número	3.1 %
d) Depende de las cifras	3.1 %
e) Porque va agarrando más formas	3.1 %

Aunque en menor porcentaje, llama la atención las respuestas proporcionadas por los alumnos que se inclinaron a afirmar que sí era posible anotar otras cantidades en los espacios vacíos. Se puede notar que no estaban totalmente consientes de las operaciones que realizaron y que la igualdad que ahí se encontraba escrita además de representar una respuesta, también implicaba balancear ambos lados de las ecuaciones.

Para concluir con esa sesión se decidió platicar con los alumnos con respecto a cómo podrían ser representadas esas cantidades y cómo podrían ser llamadas. Algunos respondieron que podría ser "número faltante" o bien "cantidad desconocida", pero para establecer un concepto que se llegaría a utilizar bastante durante las demás sesiones se decidió llevar a cabo un proceso de institucionalización en el que se les explicó que a las cantidades "faltantes" o "desconocidas" se les llamaría incógnitas. Para la representación de esas cantidades desconocidas una de las alumnas sugirió que podría ser a través de un signo de interrogación mientras que otro estudiante comentó que se podría usar una *x*. Cuando los demás alumnos estaban trabajando se le preguntó con mayor profundidad con respecto a su propuesta:

P: *Tu sugeriste que en lugar del cuadrito blanco colocáramos una x, ¿sí?, ¿por qué sugeriste eso?*

E24: *Pues porque este…x es pues un número como cualquiera haz de cuenta es como si ahí te dice 7 menos y después igual, entonces x podría ser un número cualquiera porque no sabes cuál es, y pues ya si hace una suma. Por ejemplo, si se hace una resta, haces una suma entonces x ya se transforma en el número que falta.*

P: *¿Cómo se te ocurrió eso?, ¿lo viste en otro lugar?*

E24: *No, pues cuando yo hago mis tareas a veces me ayuda mis hermanos.*

P: *Ah, ok.*

E24: *Entonces me lo explican con haz de cuenta, si x es esto…y así.*

Cuando el estudiante propuso que se pudiera considerar a la *x* para representar una incógnita fue algo bastante sorpresivo, de hecho, se esperaba bastante de este estudiante ya que había sobresalido en el pre-test previamente aplicado en el grupo, pero no tanto como para que tuviera en su mente esa propuesta y la exteriorizara con tal seguridad.

5.1.1.3. Sesión 1. Variable en relación funcional

En la tercera y última sesión de la primera semana asistieron 24 alumnos en total. Esta sesión trató acerca de la variable en una relación funcional comenzando con una actividad bastante sencilla tomada de Blanton y Kaput (2004).

Se les mostró a los alumnos el dibujo de un perro y se les pidió que contaran el número de patas, entonces se les preguntó por el número de patas que habría en total si fueran dos perros, luego tres y cuando se les preguntó por el número de patas de 5 perros (ya que en ese momento se decidió pasarse un número, en este caso el 4), la mayoría respondió que en total habría 16 patas si se tenían 5 perros. Solo algunos repararon en el error que se había cometido y casi de inmediato cambiaron su respuesta a 20 patas.

Después se les realizaron preguntas como ¿a cuántos perros corresponden 10 patas?, cambiando el número de patas. También se les dio el número de perros para que determinaran las patas que habría en total.

En esta actividad se trató de que los alumnos determinaran los valores de la variable dependiente dados los de la independiente y viceversa, sin introducirlos formalmente en esos conceptos. Se les pidió que elaboraran una gráfica, como lo sugiere el aspecto F1, en el que se promueve que los alumnos reconozcan la correspondencia entre las variables relacionadas (en este caso el número de perros y las patas) mediante diferentes representaciones como lo es una gráfica.

De los 24 estudiantes, el 12.5% decidió acomodar las cantidades desde las más grandes. Solo uno de esos estudiantes anotó la categoría correspondiente en cada eje como se muestra a continuación (Figura 5.3).

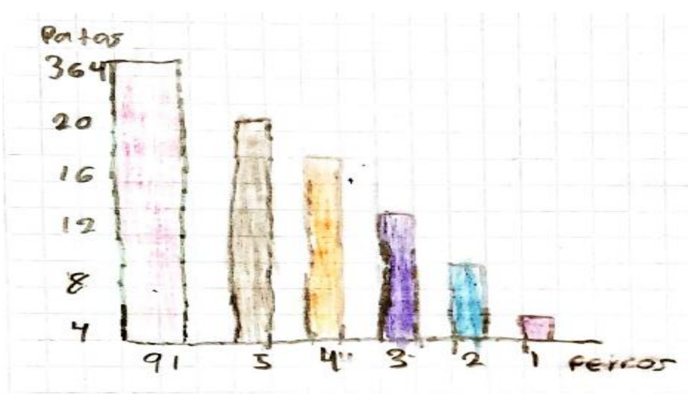


Figura 5.3 **Ejemplo de gráfico Sesión 1: variable en relación funcional**

En el grupo se pudo constatar que un 12.5 % no completó la actividad y un 16.6 % no lograron establecer una relación entre las variables al acomodarlas en la gráfica y tampoco incluyeron las categorías como se muestra a continuación.

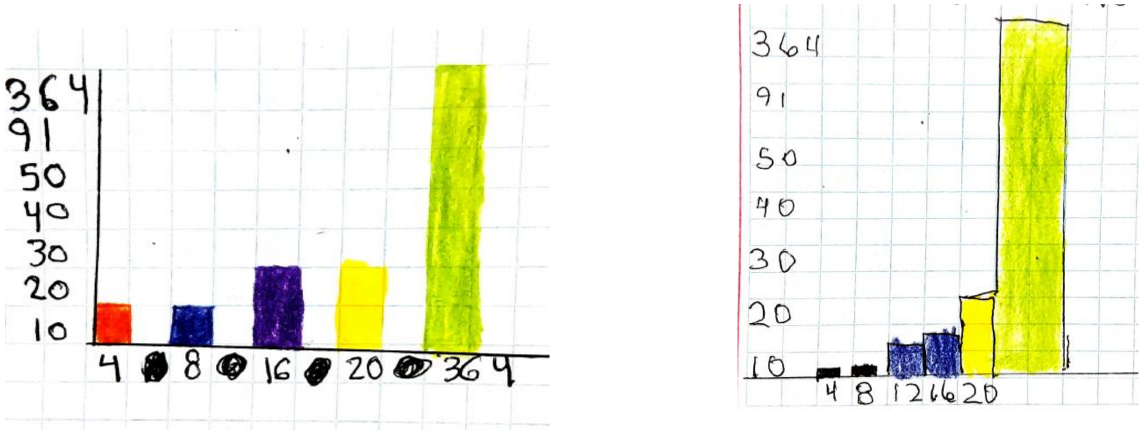


Figura 5.4 **Ejemplos de gráficos Sesión 1: variable en relación funcional**

Otra cuestión interesante es que la totalidad del grupo comenzó una secuencia entre las sucesiones de números de las patas, pero como se les pidió que incluyeran un número más grande como el 364 simplemente lo anotaron sin tomar en cuenta una secuencia que les permitiera incluirlo sin tener que pasarse directamente a él.

La elaboración de la gráfica se dejó a su criterio. De todos los estudiantes solo uno de ellos elaboró un gráfico cartesiano (Figura 5.5) a través del cual es más cómodo visualizar la relación entre las variables, los demás optaron por emplear gráficas de barras, en las cuales no se puede llegar a apreciar claramente la función analizada.

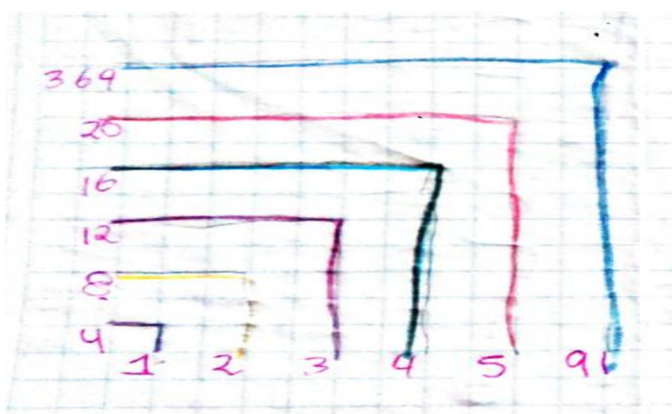


Figura 5.5 **Gráfica propuesta por una estudiante de sexto grado para representar la función**

5.1.2. Segunda semana

5.1.2.1. Sesión 3. Variable como incógnita

Para la segunda semana se decidió proseguir con una sesión más acerca de la introducción a la incógnita, en esta ocasión asistieron 32 alumnos. Para comenzar, se les pidió que recordaran la actividad que se había llevado a cabo la semana anterior acerca de las ecuaciones que tenían una cantidad cubierta. Posteriormente se les pidió a dos estudiantes que escribieran en el pizarrón una ecuación en la cual faltara una de las cantidades, uno de ellos decidió dejar un espacio vacío mientras que el otro dibujó un recuadro en el que se debía anotar la cantidad faltante. Cuando se les preguntó acerca de otras maneras de representar la cantidad que desconocían, algunos comentaron lo que otros compañeros habían propuesto la clase anterior, o sea, emplear un signo de interrogación o una *x*.

Posteriormente se les entregó una hoja con una actividad similar a la que habían realizado la sesión anterior, la cual en esta ocasión fue contestada en binas. A las parejas que terminaron rápidamente se les entregó una actividad extra llamada actividad de profundización, descrita por Fernández et al. (2002), en la cual se aborda la misma temática, pero con un grado mayor de complejidad.

Para finalizar se comentaron las preguntas de la actividad sobre todo la que mencionaba si existía alguna otra manera de representar el dato que faltaba. Se comenzó por preguntar acerca de qué era lo que representaba el recuadro y posteriormente se les preguntó, con base en las ideas que algunos de ellos habían externado anteriormente, si es que también se podría usar una *x*. Al contestar que sí era posible usarla se les cuestionó acerca de qué representaba esa *x*. Algunas de las respuestas fueron que significaba que no había número, que era otro tipo de número, o bien, que era un número aleatorio. Entonces, se decidió indagar un poco más al preguntarles si se podía escribir cualquier número, a lo que respondieron que no, que lo que representaba era el número faltante de esa ecuación.

Tabla 5.6
Porcentaje de respuestas para la pregunta: ¿Se te ocurre otra manera de representar el dato que faltaba? ¿cuál sería esa manera?

Respuestas	Porcentaje de respuestas
No	
a) Sin responder	12.5 %
b) No se	6.2 %
c) Ninguna	6.2 %
Si	
f) Con un signo de interrogación	43.7 %
g) Con una *x*	25 %
h) Con una línea	6.2 %

Con las respuestas de los estudiantes fue posible darse cuenta que más de la mitad del grupo seguía sin relacionar los datos faltantes como una incógnita. Es posible apreciar en la tabla anterior que, de hecho, casi la mitad del grupo lo relacionó con un signo de interrogación, muy probablemente, y como se podrá recordar en sesiones anteriores, esta fue una de las propuestas realizadas por el grupo para simbolizar una cantidad desconocida. Aunque también se puede verificar que un cuarto del grupo propuso el uso de la *x* como la mejor manera de representar el dato que faltaba.

5.1.2.2. Sesión 1. Variable como número general

El segundo día de la semana dos, se trabajó con la variable como número general. Para esta sesión se decidió comenzar mostrándoles a los alumnos una tabla con 10 casillas en las que estaban colocados algunos frijoles. En la primera casilla había dos frijoles, en la segunda tres frijoles, en la tercera cuatro (Figura 5.6).

Figura 5.6 **Tabla con frijoles para trabajar con el grupo**

Cuando se les preguntó sobre la cantidad de frijoles que tendrían las demás casillas respondieron correctamente. Posteriormente se desarrolló el siguiente dialogo:

P: *¿Por qué en la casilla 4 habrá 5 frijoles?*

E34: *Porque en la uno hay dos.*

E12: *Porque, a lo mejor va aumentando de uno.*

E13: *Va aumentando de uno en uno.*

Después se les pidió a algunos alumnos que pasaran al pizarrón para que pegaran los frijoles que faltaban en las demás casillas. Cuando acabaron de realizar esa labor se conversó con ellos partiendo de la siguiente pregunta.

P: *Cómo podemos saber, sin los frijoles, ¿cuántos puede haber en cada casilla?*

E34: *Solo aumentando uno.*

E22: *Aumentar un frijol por el número de la casilla.*

P: *¿Podrías explicar mejor tu respuesta?*

E22: *Por ejemplo, si es la primera se aumenta uno, en la dos se aumentó uno y nos dio 3.*

E13: *Se aumenta uno al número que está arriba.*

P: *Con lo que acaban de decir, ¿se podría saber cuántos frijoles habrá en la casilla 30?*

Todos: *¡sí!, 31.*

P: *¿Cómo supieron eso?*

E12: *Sumándole uno al 30.*

Aunque no dicen exactamente que la regla debería ser *n +1*, sí logran reconocer el procedimiento que se debe llevar a cabo para conocer la cantidad de frijoles que habrá en cada casilla.

Posteriormente se les repartió el material por binas que consistió en una bolsa con frijoles y una tabla igual a la del pizarrón. En ella se les pidió que completaran las demás casillas colocando en la primera casilla 10 frijoles, 11 en la segunda, 12 en la tercera y 16 en la séptima, ellos solos llenaron las demás casillas como se puede observar en la Figura 5.7.

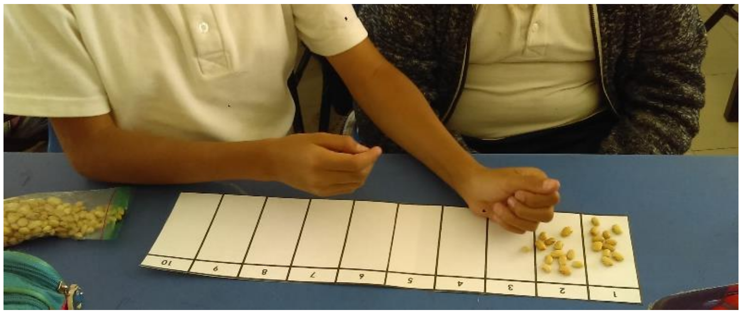


Figura 5.7 **Ejemplo del llenado de casillas realizado por los alumnos**

Cuando terminaron se les pidió que compartieran sus resultados. Todas las casillas fueron llenadas con el número de frijoles correcto a excepción de la casilla 10 en la cual de manera grupal contestaron que debería haber 20 frijoles, pero casi de inmediato, algunos recapacitaron mencionando que debía haber 19 frijoles. Las opiniones estaban divididas, algunos decían 19 y otros 20, por lo cual se les pidió que argumentaran sus respuestas. Al escuchar el argumento de los que mencionaban que debían colocarse 19 en la casilla 10 se logró notar que no todos habían descubierto la regla *n+9*, ya que dijeron que como la casilla 9 tenía 18 se iba aumentando de uno en uno, por lo que la siguiente casilla debía tener 19. Mientras que los que mencionaron la otra opción en la que debían colocarse 20 frijoles no lograron argumentar su respuesta. A continuación, se muestran los porcentajes de respuestas de los 28 alumnos que asistieron ese día y participaron en la actividad.

Tabla 5.7
Porcentajes de respuestas para la pregunta: ¿Cómo puedes calcular el número de frijoles de cada casilla?

Respuestas	Porcentaje de respuestas
a) Sumando un frijol al número anterior	35.7%
b) Sumando uno	14.2%
c) Viendo la sucesión	14.2%
d) Sumándole un frijol a cada casilla	10.7%
e) Sumando 9 al número de casilla	7.1 %
f) Restando un número	7.1 %
g) Es aumentar 12 y nada más le aumentas 3	3.5 %
h) Sin respuesta	3.5 %
i) Contando cada frijol	3.5 %

En esta actividad fue bastante evidente que la mayoría del grupo no logró proponer una regla que funcionara para casillas posteriores, ya que únicamente se enfocaron en el conteo de los frijoles que tenían a su alcance, contemplando el material proporcionado. Para ellos fue más sencillo y oportuno contabilizar los frijoles determinando así que en cada casilla iban aumentando un frijol. Ese tipo de respuestas, que se pueden observar en los primeros cuatro incisos, representan más de la mitad del porcentaje de respuestas mientras que solamente un 7.1% fue capaz de descubrir a regla.

Acto seguido se les dio una hoja que incluía una actividad en la cual debían responder algunas preguntas basándose en las casillas que habían completado. Al finalizar se analizaron de manera grupal las respuestas que escribieron en la hoja. Lo que se pretendió con el hecho de comentar las preguntas fue averiguar si habían empleado alguna regla para contestarlas, para ello se les cuestionó por la cantidad de frijoles de una casilla mayor, como por ejemplo el número 153.

E22: *Se puede multiplicar 7 por el 153.*

P: *¿Por qué?*

E22: *Porque es la cantidad de la primera casilla.*

Cuando se les preguntó por la cantidad de frijoles de la casilla 23 sugirieron emplear la misma dinámica de multiplicar el número de casilla por 7.

Se consideró apropiado preguntar al alumno que había descubierto la regla en la primera tabla por la cantidad de frijoles que habría en la casilla 35, pero desafortunadamente pareció contagiarse por lo propuesto por los demás contestando que se podría multiplicar 7 por 35.

Queda claro que existió un problema porque no lograron descubrir que la regla de la última tabla era $n+6$. De hecho, algunos de ellos querían aplicar la regla de la primera actividad $n+1$.

5.1.2.3. Sesión 2. Variable en relación funcional

En la tercera sesión asistieron 28 alumnos. A través de la participación grupal, se les pidió que recordaran la actividad que habían realizado en la primera sesión de la variable en relación funcional. Los alumnos recordaron que dependiendo del número de perros el número de patas aumentaría, además de eso también se platicó nuevamente acerca de cómo se podía organizar la información, los alumnos comentaron que podría ser a través de tablas o gráficas.

Para esta sesión se les preguntó si en alguna ocasión habían ido a comprar pan a la tienda, a lo que respondieron que sí. Para apoyar la sesión se dibujaron algunas donas en el pizarrón y el precio de cada pieza de pan, después se les preguntó acerca de los datos que se debían tener en cuenta cuando realizaran esas compras. Los alumnos mencionaron que el precio era algo importante a considerar, así como la cantidad de pan.

Retomando el ejemplo de las donas en el que cada pieza costaba 3 pesos, se les preguntó si el precio de las piezas cambiaría en algún momento a lo que respondieron que solo el total cambiaría, pero cada pieza seguiría costando lo mismo. Un par de estudiantes estaba murmurando algo relacionado con el tema, así que se les exhortó a realizar sus comentarios al resto del grupo.

E12: *Es que cuando fuimos a misa, había una señora que vendía dos piezas a 60 y el pan solo costaba 30. Si costara 30 y te vende 2 por 50 si convendría, porque se le quitarían 10 pesos.*

Lo anterior demuestra que algunos de los alumnos están en contacto con situaciones matemáticas en las que necesitan verificar a través de la reflexión ciertas cuestiones que les permitirán tomar o no las mejores decisiones para su economía.

Posteriormente se realizaron algunas preguntas con respecto a la información del pizarrón.

P: *Si quiero tres piezas de pan ¿cuánto dinero debo pagar?*

Todos: *9.*

P: *¿Tu qué hiciste?*

E10: *Como valen de 3, fui sumando de tres en tres.*

P: *Muy bien, ¿alguien lo realizó de otra manera?*

E21: *Multiplicando 3 por 3.*

P: *Pero, ¿por qué 3 por 3?*

E12: *Porque son las tres piezas por los tres pesos.*

P: *Ok, y si quieres llevar 15 piezas de pan.*

E5: *15 por 3.*

P: *Y, ¿de qué va a depender el total que voy a pagar?*

E27: *Depende el número de piezas que compre.*

P: *Si voy a gastar 45 pesos ¿va depender de número de piezas?*

Todos: *Sí.*

P: *¿Por qué?*

E32: *Porque entre más piezas más dinero vas a pagar.*

P: *Si en lugar de 15 llevo solo 10 pesos ¿voy a gastar igual 45 pesos?*

Todos: *¡No!, 30.*

Los alumnos comprendieron que entre más piezas se compraran más dinero pagarían y que la cantidad pagada dependería únicamente del número de piezas compradas. También identificaron que cuando se les mencionaba que contaban con cierta cantidad de pesos, este dato reflejaría la cantidad de piezas de pan que podrían llevar:

P: *Si tengo… nada más 9 pesos ¿me va alcanzar para comprar* 6 *piezas? O ¿para cuántas piezas me alcanza?*

E31: *Para 3 piezas.*

Para finalizar la sesión, se decidió apoyarse del proceso de institucionalización. En dicho proceso, se les comentó que era importante añadir otra palabra al vocabulario que se estaría empleando en las demás sesiones, así que se les preguntó si habían escuchado la palabra "variable", a lo que la mayoría respondió con un no, después se les invitó a que mencionaran lo que creían que eran las variables. Comenzaron diciendo que era algo relacionado con la equivalencia, luego que podrían ser números, que eran varios datos o bien que significaba que podría variar un número. Después de eso, se prosiguió a identificar las variables del problema presentado:

P: *En este caso existen dos variables, ¿cuáles son?*

E28: *Las donas y el dinero.*

Cuando se trató de avanzar con los nuevos conceptos como los de variable dependiente e independiente les resultó bastante confuso. Aunque con bastante dificultad lograron identificarlas en el problema. Para no crear más confusión se les pidió a los alumnos que propusieran algunas preguntas con respecto al problema. Algunas de las preguntas fueron las siguientes:

E25: *Si tengo 9 pesos, ¿cuántas piezas compro?*

E13: *Si quiero 5 piezas, ¿cuánto dinero debo pagar?*

E34: *Si quiero 12 piezas, ¿cuánto dinero voy a gastar?*

5.1.2.4. Sesión 1. Actividad integradora

El diseño de esta actividad fue tomado de la propuesta realizada por Ferrini-Mundy et al. (1999). Tal y como se realizó en el resto de las actividades integradoras se incorporó a los tres usos del modelo 3UV. Para esta sesión intervinieron los aspectos I1, I2, I3, I4, G1, G3, G5, F1, F2 y F3.

Para iniciar se les mostraron en el pizarrón tres figuras, posteriormente se les pidió que comentaran acerca de ellas, para que averiguaran de qué se trataba. La mayoría de los alumnos mencionaron inmediatamente que se trataban de albercas, porque tenían cuadrados azules que representarían el agua y cuadrados blancos que representarían el borde de la alberca.

Posteriormente se les pidió que contaran el número de azulejos azules y blancos de cada una de las tres figuras para que empezaran a comparar la cantidad de azulejos que cada figura poseía.

Luego se les preguntó acerca de la cantidad de azulejos azules y blancos que tendría la figura 4. Los estudiantes empezaron a proponer varios números, algunos argumentaban que los azulejos blancos eran fáciles de determinar porque iban aumentando de 4 en 4, entonces, la figura 4 tendría 20 azulejos blancos. Al momento de preguntar por los azulejos azules no fue sencillo, algunos alumnos argumentaban que en este caso los números eran impares, pero no lograban observar que había una regularidad entre el aumento de los azulejos en las figuras.

Uno de los estudiantes logró explicar cómo era posible determinar la cantidad de azulejos azules. A continuación, su explicación:

E24: *Porque la regularidad, lleva a otra regularidad.*

P: *A ver explícame esa regularidad.*

E24: *Primero sería más 3 y luego se le aumentan 2, entonces sería más 5, luego se le aumentan 2, entonces sería más 7 y así.*

Luego de las propuestas que hicieron y que fueron anotadas en el pizarrón se les invitó a elaborar con material manipulable las primeras 4 figuras para comprobar las respuestas que habían dado (Figura 5.8).

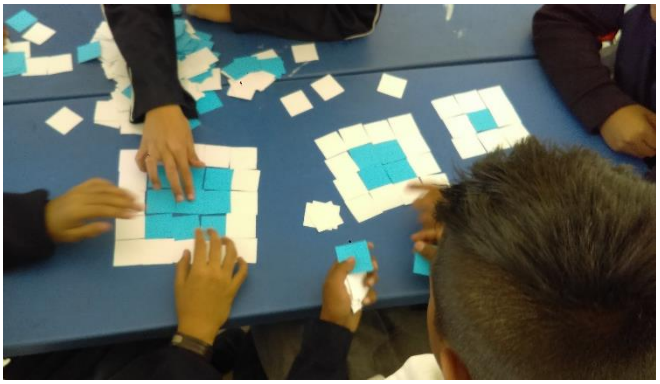


Figura 5.8 **Alumnos trabajando con el material manipulable para formar las piscinas**

Los alumnos fueron organizados en equipos de 5 a 6 integrantes. Durante las interacciones se logró observar que, aunque tenían las primeras tres figuras en el pizarrón batallaron un poco para elaborarlas en sus lugares. Para la figura 4 optaron por colocar primero los azulejos blancos, formando una especie de marco y rellenarlo con los azulejos azules.

Después se les preguntó acerca de lo que sucedía con las figuras y su número de azulejos, los estudiantes comentaron que ambos aumentaban. Posteriormente se les preguntó que, si tenían una figura con 16 azulejos azules y en total 36 azulejos cuántos azulejos blancos debía tener esa figura, entonces respondieron que 20 ya que podrían saberlo haciendo una resta de los azulejos totales menos los azulejos azules.

A cada equipo le fue entregada una hoja en la cual debían anotar el número de figura, azulejos azules, azulejos blancos y total de azulejos (Figura 5.9).

NÚMERO DE PISCINA	NÚMERO DE AZULEJOS AZULES	NÚMERO DE AZULEJOS BLANCOS	NÚMERO TOTAL DE AZULEJOS

Figura 5.9 **Fragmento de la actividad integradora**

Algunos equipos se repartieron el trabajo por figuras o escribir en la hoja la información que se pedía. Otro equipo no terminó de hacer todas las figuras, pero aun así ya estaban completando la tabla, cuando se les pidió una explicación uno de los miembros del equipo mencionó lo siguiente:

E19: *Por ejemplo, aquí son 16, o sea aquí son 4 y otros 4, y otros 4 y otros 4* [señalando los azulejos azules]. *Pero los blancos están más complicados.*

P: *¿Por qué son más complicados? ¿Dime de cuánto en cuánto van a aumentando los blancos?*

E19: *Los blancos van aumentando de 4 en 4.*

Posteriormente se comprobaron las propuestas que habían dado al inicio con las figuras que habían elaborado. Al analizar las respuestas que colocaron los alumnos para llenar la tabla con el número de azulejos, se pudo notar que todos completaron correctamente el apartado de los azulejos blancos, mientras que el 75% contestó correctamente el número de azulejos azules. Aunque el llenado de la actividad fue en su mayoría correcto, los alumnos no lograron distinguir la regla para determinar el aumento entre los azulejos azules ni en los blancos.

Cuando se les preguntó acerca de la cantidad de azulejos blancos en comparación con los azules, esto es, si en las demás figuras los blancos serían más que los azules dijeron que sí. Después se les invitó a que observaran sus figuras para que contaran y comprobaran. Posteriormente corrigieron su respuesta para comentar que al inicio los azulejos blancos sí eran más que los azules, pero después los blancos se hacían menos que los azules, según ellos porque los blancos solo son líneas, refiriéndose al contorno y por eso conforme aumentaban los azules los blancos iban disminuyendo.

5.1.3. Tercera semana

5.1.3.1. Sesión 4. Variable como incógnita

En la cuarta sesión de la variable como incógnita asistieron 33 estudiantes. Al iniciar la clase se optó por presentarles a los estudiantes algunas ecuaciones en las que faltaba un dato. Como fue una actividad que ya se había trabajado en clase para la introducción de la incógnita, no demoraron en empezar a decir en voz alta la cantidad que faltaba en cada ecuación, aunque aún no se les había pedido que lo hicieran. Acto seguido se les invitó a que esperaran un poco, ya que primero era importante que recordaran cómo es que se llamaba a esa cantidad desconocida. La mayoría de los alumnos respondió que se le conocía como incógnita, aunque algunos pocos aún no la identificaban por su nombre. La incógnita en las ecuaciones no fue representada con letras, en su lugar se dejó el espacio en blanco para que de esta manera los estudiantes sugirieran cómo se podría representar. La primera sugerencia fue que podría ser a través de un signo de interrogación, pero otra propuesta fue que con una *x*. Cuando los alumnos sugirieron que con una *x* se les preguntó acerca de qué era lo que representaba esa *x*, otro alumno respondió que representaba un número. Esa respuesta es válida, pero para este caso era necesario que se ahondara un poco más para aclarar la situación, por lo que se les preguntó si esa *x* representaba cualquier número, y una alumna respondió que no, que dependía de la suma o resta que se estaba haciendo.

Posteriormente se les mostraron tres figuras: un cuadrado, un rectángulo y un pentágono regular, para que primero identificaran sus características y recordaran sus nombres. Después se les preguntó si sabían qué era el perímetro y cómo se podría obtener. Ante esa pregunta se presentaron algunas dificultades, ya que se notó que el tema no se había logrado consolidar en los alumnos. Una de las respuestas que llamó la atención fue el hecho de que uno de alumnos mencionó que era necesario conocer el área para saber el perímetro, aunque algunos de los estudiantes no estuvieron de acuerdo haciéndolo notar a través de sus reacciones de sorpresa o simplemente mencionando que no estaban de acuerdo con esa propuesta, otros estudiantes sugirieron que para obtenerlo podrían ir midiendo los lados, la segunda propuesta pareció tener más aceptación con el resto del grupo. Después de escuchar las sugerencias era obvio que aún no quedaba claro, así que se decidió recurrir nuevamente a las figuras que estaban en el pizarrón para que quedará más claro y así proseguir con la tarea, en esta aclaración surgió la propuesta de sumar todos los lados o bien, en el caso del cuadrado y pentágono regular, podrían multiplicar la medida de uno de sus lados por el número total de lados de cada figura.

Para continuar con la clase se les repartieron unas hojas de trabajo para que analizaran las figuras por separado una a una, en la hoja los alumnos explicaron cómo podrían obtener el perímetro de cada figura y cómo podrían representar los datos faltantes, entre otras cosas.

Para concluir la clase se les pidió que comentaran sus respuestas. Algunos escribieron que para representar un dato desconocido podían usar una letra, entonces se desarrolló la siguiente conversación:

P: *Algunos de ustedes comentan que podrían usar una x para representar la cantidad faltante, pero… en lugar de x ¿podrían usar una letra y?*

E24: *Podría ser, es que no se, podrías usar cualquier letra.*

P: *¿Qué otras letras podrían usar?*

E3: *Una a.*

P: *Y, ¿qué representa esa letra?*

E7: *Representa una cantidad que no conocemos.*

E15: *También podría ser una r.*

P: *Sí, también una r.*

E15: *Si, una r de respuesta.*

Claramente se pudo apreciar que para este alumno era mejor relacionar la *r* con una palabra que tuviera un significado para él, o mejor dicho por Küchemann (1980), se encuentra aún en la categoría de percibir a la letra como objeto, pues la considera como una simple abreviación de un objeto o en este caso de la palabra "respuesta".

Tabla 5.8
Porcentajes de respuestas para la pregunta: ¿Cómo puedes representar los datos desconocidos?

Respuestas	Porcentaje de respuestas
a) Con una *x*	63.6 %
b) Con un signo de interrogación	24.2 %
c) Con una incógnita	12.1 %

Como se puede apreciar en la tabla anterior la mayoría de los estudiantes propusieron una *x* para representar la incógnita, aunque algunos de ellos aun mostraron gran apego por relacionar la incógnita directamente con un signo de interrogación. Es posible notar que en comparación con los resultados de la tabla en donde apenas una cuarta parte del grupo lograba proponer a la *x* como el número faltante, o en este caso desconocido, para esta sesión los papeles se invirtieron siendo casi la cuarta parte quienes seguían sin reconocerla.

5.1.3.2. Sesión 2. Variable como número general

Al iniciar la clase se les mostró una tabla en la cual se podía apreciar el número de caramelos y el lugar de la casilla en la que estaban. No todas las casillas estaban completas por lo que se les pidió que las completaran, de hecho, lo hicieron bastante rápido y sin ningún problema. Cuando se les preguntó sobre el procedimiento que habían empleado para completarla mencionaron que era la tabla del 4 o que iba de 4 en 4.

P: *¿Qué se puede hacer para obtener este 24?* [señalando la columna de los caramelos]

E20: *Sumando de cuatro en cuatro.*

P: *Es una buena opción. ¿Alguna otra que se les ocurra?*

E22: *Multiplicando 6 por 4.*

Se les pidió que en parejas dialogaran y discutieran acerca de una regla que pudieran proponer y que explicara cómo obtener el número de caramelos de la casilla que se les dijera, o sea de cualquier número de casilla. Cuando había pasado suficiente tiempo se le preguntó a uno de los alumnos lo siguiente:

P: *Explícame la regla que hicieron tú, y tu compañero.*

E17: *Pues, multiplicar el número de caramelos por cuatro* [su compañero lo interrumpe].

E31: *¡No!, es el multiplicar el número de la casilla por cuatro.*

P: *¿Alguien más quiere explicar su regla?*

E25: *Por ejemplo, si dices que la casilla 81, sería muy difícil estar contando de 4 en 4. Entonces sería multiplicar cuatro por la casilla.*

Posteriormente se les invitó a probar la regla que habían propuesto a través de algunas preguntas efectuadas por la profesora. Después de comprobarla se escribió en el pizarrón toda la regla: "Multiplicar la casilla x 4". Se les preguntó si se les ocurría algo para no tener que escribir toda la regla completa y surgieron las siguientes propuestas:

E26: *Podemos escribir la operación.*

E22: *L x 4*

P: *Es buena idea, pero esa letra ¿qué va estar representando?*

E12: *Lugar.*

P: *¿Podríamos usar otra letra?*

E28 y E12: *No.*

P: *¿Por qué no?*

E14: *Porque la L indica el lugar donde están los números.*

P: *Y si no dijera lugar si no casilla, ¿qué letra se usaría?*

E14: *la C.*

P: *Entonces, ¿tenemos que usar a fuerzas la letra con la que empieza?*

E24: *No.*

P: *¿Por qué?*

E24: *Por que las letras no siempre van a representar de lo que estamos hablando, podemos usar cualquier letra.*

P: *¿Se te ocurre alguna otra letra?*

E20: *n.*

Posteriormente se les preguntó a los alumnos acerca de lo que era necesario para saber el número de caramelos que habría en la casilla 21, obviamente mencionaron la regla, además de eso se les preguntó lo siguiente:

P: *¿Qué tengo que escribir en lugar de n?*

E30: *Pues el número de la casilla.*

P: *¿Cuál es ese número?*

E34: *La 21.*

Se realizó la misma dinámica con otras casillas y pidiéndole a otros alumnos su participación.

P: *Si quiero saber el número de caramelos de a casilla 18, ¿qué representa n?*

E31: *El número de casilla.*

P: *Entonces, ¿qué número debería escribir en lugar de n?*

E31: *El 18.*

Como algunos de los 27 estudiantes no habían comprendido completamente la actividad, se les volvió que explicar y quedaron satisfechos. Pero para comprobar si habían comprendido se les pidió que participaran para observar el grado de comprensión de la regla.

Para finalizar la actividad se les pidió que escribieran en una hoja la regla propuesta por ellos mismos y que se había estado trabajando en la clase. A continuación, se muestran las propuestas elaboradas por los alumnos, así como el porcentaje para cada una (Tabla 5.9).

Tabla 5.9
Porcentaje y ejemplos de las reglas respuestas por los alumnos

Respuestas	Porcentaje de respuestas
a) Multiplicar el número de casilla por 4	51.8 %
b) Multiplicar el número de casilla por 4 (en este caso escribieron *n x 4*, además explicaron que n representaba al número de casilla)	33.3 %
c) Multiplicar por el número de casillas	14.8 %

Es posible apreciar que la mayoría logró identificar la regla, pero solo un 33.3 %, además de explicarla decidió escribirla mencionando también qué significaba la letra incorporada, en este caso la *n*.

5.1.3.3. Sesión 3. Variable en relación funcional

Para iniciar la clase se les comentó que en una dulcería se venden gomitas en bolsas y en cada bolsa hay 120 gramos de producto, se les preguntó por los gramos que habría en 2 bolsas y respondieron que 240 gramos. Posteriormente se les preguntó sobre la manera en que podrían organizar esa información y comentaron que en una tabla. Acto seguido se les presentó una tabla en la cual únicamente aparecía la cantidad de gramos de gomitas que tendría una bolsa, posteriormente se les preguntó acerca de lo que sucedería con los gramos si la cantidad de bolsas aumentaba a lo cual respondieron que también aumentaría. Cuando se les pidió sugerir otra manera de representar los datos, lo pensaron por largo tiempo, hasta que una de las alumnas comentó que podría ser mediante una gráfica.

Para proseguir con la clase se les entregó una hoja en la cual debían completar la tabla con los datos del problema presentado al inicio. La tarea de completar la tabla fue realizada con éxito en la mayoría de los casos, pero solo al inicio, o sea en las primeras bolsas de gomitas. Conforme la cantidad de bolsas iba en aumento, las respuestas que los alumnos escribieron en la cantidad de gramos comenzaron a ser erróneas. Esto quizás se deba a que las multiplicaciones de cantidades mayores representan un problema para los estudiantes, el proceso de ese algoritmo aún no ha sido interiorizado por ellos ya que menos de la mitad de los estudiantes logró completar correctamente la tabla. Al momento de representar de otra manera los datos la mayoría sugirió emplear una gráfica, pero desafortunadamente menos de la mitad pudo graficar correctamente los datos.

Para terminar la clase, que por motivos extraescolares se vio en la necesidad de ser acortada, se les preguntó lo siguiente:

P: *¿De qué depende el total de gramos de gomitas?*

E32: *De la cantidad de bolsas.*

P: *¿Por qué?*

E32: *Porque cuando se van incrementado el número de bolsas se van incrementando también los gramos.*

P: *¿Se puede saber los gramos que tendrán en total 30 bolsas?*

E26: *Sí.*

P: *¿Por qué?*

E26: *Porque, solo tenemos que multiplicarlo por 120 que son los gramos de una bolsa.*

El 81 % de los estudiantes contestó al igual que E26, mencionando que sí era posible saber cuántos gramos tendrían en total 30 bolsas. A continuación, se muestran las respuestas proporcionadas por el grupo.

Tabla 5.10
Porcentaje de respuestas para la pregunta: ¿Se puede saber los gramos que tendrán en total 30 bolsas? ¿Por qué?

Respuestas	Porcentaje de respuestas
a) Sí, porque vas multiplicando 120 x 30	56.2 %
b) Sin respuesta	18.7 %
c) Sí, porque se multiplica	6.2 %
d) Sí, porque se va sumando	6.2 %

e)	Sí, porque vas haciendo la sucesión puedes llegar al número que sea	6.2 %
f)	Sí, porque ves cuánta cantidad hay en la bolsa	6.2 %

La mayoría de las respuestas proporcionaron una argumentación que incluyó la operación que llevaron a cabo, sin embargo, casi una cuarta parte del grupo no pudo explicar con claridad el por qué habían respondido de esa manera, se puede apreciar también que, dentro de ese porcentaje, algunos alumnos interpretaron el problema como una sucesión, lo cual hace pensar que estaban tratando de resolverlo al proponer una regla, como se había hecho en la variable como número general.

5.1.3.4. Sesión 2. Actividad integradora

En esta sesión se utilizó una actividad propuesta en el libro de Ursini et al. (2005) en la cual se presentó una tabla en la que están los dólares y su conversión en pesos mexicanos, en la tabla únicamente se mostraba la cantidad de cinco dólares en la columna izquierda y 98 pesos en la columna de la derecha. A partir de ese material se les preguntó sobre la información que proporcionaba la tabla y acerca de lo que representaba cada columna. Se les preguntó si era posible viajar a Estados Unidos y gastar en pesos mexicanos. Los alumnos respondieron que no era posible, que para gastar allá sería necesario que se transformaran los pesos a dólares.

P: *¿Qué se puede hacer para saber cuántos pesos equivalen a un dólar?*

E24: *Dividir 98 entre 5.*

Se le pidió al resto del grupo que realizaran la operación para que comprobaran lo que había propuesto su compañero encontrando que un dólar equivaldría a 19.6 pesos mexicanos. Para continuar con el análisis de los datos proporcionados en la tabla se les realizaron otras preguntas.

P: *¿Qué se debe hacer para saber este resultado?* [señalando el 176.4].

E13: *Multiplicar el precio de un dólar por la cantidad de dólares 19.6 x 9 = 176.4.*

P: *¿Es cierto?*

E26: *Sí, si da.*

P: *¿Cuántos pesos equivalen a 40 dólares?, ¿qué debes hacer?*

Todos: *Multiplicar 19.6 por 40.*

E34: *Da 784.*

P: *Bien, ahora analicemos esta expresión, 19.6 x 36, ¿qué representa 19.6?*

E25: *Es el valor del dólar.*

P: *¿Y el 36?*

E13: *Son los dólares que necesitas.*

P: *Ok, ya me dijeron que para saber el número de pesos multiplicas por 19.6. Pero, si cómo se pueden obtener estos datos* [señalando la columna de la izquierda, la de los dólares].

E18: *Dividir 705.6 entre 19.6.*

P: *Bueno, realicen la operación para comprobar si es verdad lo que ha dicho su compañero.*

Cuando los alumnos realizaron la operación lograron comprobar que de esa manera podrían obtener los datos de la columna de los dólares.

P: *Pero para obtener los resultados de la columna de los pesos, ¿qué se tiene que hacer?*

Todos: *Multiplicar.*

P: *¿Qué se debe multiplicar?*

E32: *5 x 19.6.*

P: *Y, ¿en todos se va a multiplicar 5 por 19.6?*

E32: *No.*

E27: *Se multiplica el total de dólares por 19.6.*

Posteriormente se les pidió que recordaran la clase en la ya se había trabajado de manera similar. Entonces se les pidió que mencionaran cuál regla podrían escribir para saber la cantidad de pesos que equivaldrían a cualquier número de dólares.

E25: *Pues los 19.6 por los dólares.*

P: *¿Y para no escribir todo eso?*

E25: *Se escribe la n.*

P: *¿Pero esa n que representa?*

Todos: *El número de dólares.*

P: *Observa lo siguiente* [se le pidió a E5 que observara la expresión del pizarrón h x 19.6] *¿qué representa la h?*

E5: *El número de dólares.*

P: *Ok.*

Posteriormente se les pidió que sustituyeran la variable por diferentes números de la columna que representaba (la columna de los pesos) para que comprobaran si esa regla era correcta.

P: *Entonces, ¿cuántos valores puede tener h?*

En esta pregunta los alumnos se quedaron en silencio, algunos de ellos movían la cabeza en señal de negación, pero tardaron en participar.

E25: *Puede tener varios. Puede tener el que sea.*

E24: *Puede tener el que sea.*

P: *¿Estás de acuerdo con eso?*

E19: *Sí, porque no dice un número específico.*

P: *Ok. y ¿qué pasa si de este lado escribo otra letra?* [se les mostró lo siguiente h x 19.6 = z]

E13: *O sea el resultado.*

P: *Ahora tenemos dos incógnitas. ¿De qué va depender el resultado, o sea el valor de z?*

E14: *Del número cualquiera* [refiriéndose a los valores que representa h]

P: *Si en lugar de h escribo 9, ¿z puede ser cualquier valor?*

E20: *No.*

E3: *Porque te daría el resultado.*

P: *¿z cuánto tiene que valer?*

E4: *El resultado de la multiplicación.*

P: *Por acá tengo 19.6 y de resultado 1960 y por acá escribiré n* [mostrándole esta expresión 19.6 x n = 1960] *¿cuánto va a valer n?, ¿n puede ser cualquier valor?*

E1: *No.*

P: *¿Por qué?*

E15: *Porque si escribes cualquier número no va a darte el resultado.*

P: *¿Si escribes 1 en lugar de n dará 1960?*

Todos: *No.*

P: *¿Qué número tendría que escribir aquí?* [señalándoles n x 19.6= 1960]

E5: *100.*

P: *Ahora tienes 75 x 19.6 = z, ¿z puede vale cualquier número?*

Algunos: *Sí.*

P: *O sea que aquí puedo escribir 2 en lugar de z ¿y la expresión será correcta?*

E8: *No.*

P: *¿Y si en lugar de z escribo 1?*

Todos: *No.*

P: *Entonces, ¿Cuántos valores puede tener z?*

E14: *Varios.*

P: *¿Cuánto vale z?*

E25:*1470.*

P: *¿Cuántos valores puede tener z?*

La mayoría: *4.*

Aquí se notó que no se había comprendido la pregunta, así que se explicó con más detalle lo que se estaba preguntando diciéndoles que al referirse a la cantidad de valores no se estaba preguntando por los dígitos o la cantidad de números del resultado, sino a cuántos resultados podría haber. De esa manera lograron comprobar que solo habría un valor, que sería el resultado de la multiplicación. En lugar de la *z* se sustituyó por otra variable y se les preguntó si el valor sería el mismo para ambas en la misma multiplicación, comentaron que era lo mismo por que representaba el resultado.

5.1.4. Cuarta semana

5.1.4.1. Sesión 5. Variable como incógnita

Para iniciar la clase se les mostró a los alumnos un cuadrado y un rectángulo para que comentaran cómo podrían obtener el área de cada figura. Una de las respuestas, casi inmediata fue proporcionar una fórmula, dijeron que para el área de un rectángulo habría que multiplicar base por altura y dividirla entre dos, casi a coro se pudo escuchar esa propuesta, aunque errada, parecía ser que se encontraban bastante seguros de ella. Algunos alumnos mencionaron que primero era necesario conocer el perímetro para luego obtener el área. La respuesta anterior llamó la atención, por lo cual se decidió brevemente comentar acerca de las concepciones que tenían con respecto de lo que era el área y trabajar sobre esas confusiones.

Posteriormente se les preguntó si podrían obtener el área del cuadrado si se sabían sus medidas de 8 cm por lado. Uno de ellos mencionó que sí se podía obtener el área con esos datos porque todos los lados de un cuadrado miden lo mismo. Cuando se les pidió que propusieran la manera de obtener su área se estableció que la fórmula para obtenerla era multiplicar lado por lado. Pero mencionaron que para la otra figura no se podría obtener el área porque faltaba un dato. En el rectángulo solamente se les dio la medida de la altura sin escribir nada en la base.

Cuando se les preguntó sobre la manera en que podrían nombrar al dato que faltaba mencionaron que era una incógnita, entonces, al preguntarles ¿cómo se podía representar la incógnita? se desarrolló lo siguiente:

E22: *con una x.*

P: *Y si yo pongo una y también puede representar una incógnita.*

Todos: *Sí.*

P: *¿Por qué?*

E13: *Porque cualquier letra puede representar una incógnita.*

P: *En este caso, ¿la x qué representa?*

E26: *Puede ser un número cualquiera.*

Después se prosiguió a repartirles una hoja de trabajo por equipo. Al darse cuenta de que el trabajo estaba relacionado con las figuras y su área E32 preguntó que cómo harían para saber el valor de la base del rectángulo.

Cuando pasaron a la actividad del rectángulo se les dio la medida del área 325 cm^2, y con eso se les pidió determinar la incógnita que en este caso era la medida de la base.

Cuando entregaron las hojas se les preguntó sobre la actividad con algunas modificaciones, si la fórmula para el cuadrado es *l*x*l* ¿qué representa la letra *l* en este caso?

E3: *8.*

P: *Entonces, ¿qué debían hacer para obtener el área?*

E27: *Multiplicar 8 por 8.*

Se pudo notar que solo dos equipos aplicaron la fórmula correctamente a pesar de que ésta ya se había determinado desde el inicio.

Al analizar la segunda actividad se les cuestionó sobre los datos que conocían, ellos comentaron que el área y la altura. Después se les preguntó lo siguiente:

P: *¿Qué hicieron para saber la medida de la base*?

E22: *325 entre 13.*

P: *¿Cuándo media la base?*

E13: *25.*

5.1.4.2. Sesión 3. Variable como número general

Como actividad introductoria se les mostró un tablero en el pizarrón en el que se les indicó que cierta rana debía llegar a la meta sin que esta tocara ciertos números del tablero, así que se les preguntó ¿de cuánto en cuánto tiene que brincar la rana para que no caiga en las trampas? Además de pedirles que explicaran cómo habían hecho para no caer en las trampas.

Posteriormente se les mostró un patrón de figuras, en la figura uno había 5 cuadrados, en la segunda 10, en la tercera 15, solo se les mostraron las primeras tres figuras, y así sucesivamente hasta completar 9 figuras. Se les entregó una actividad para que determinaran el número de cuadros que tendrían las figuras siguientes.

Durante la clase, los alumnos observaron y contaron los cuadros de cada figura, posteriormente se desarrolló el siguiente diálogo.

P: *¿De cuánto en cuánto está aumentando cada figura?*

Todos: *De 5 en 5.*

P: *Entonces, ¿cuántos cuadros tendrá la figura 4?*

E7: *20.*

P: *Pero, ¿por qué 20?*

E7: *Porque es una sucesión que va de 5 en 5.*

P: *Entonces, ¿cuántos cuadros tendrá la figura 5?*

E12: *25*

P: *¿Cómo supieron eso?*

E11: *Sumando.*

P: *¿De qué manera se les ocurre que podrían saber, si seguimos haciendo figuras, cuantos cuadros tenga la figura 9?*

E29: *45.*

P: *¿Por qué va tener 45 la figura 9?*

E21: *Por que va de 5 en 5.*

E32: *Porque multiplicar 5 por 9 te va dar 45.*

E34: *Esa sería la forma de no ir sumando.*

P: *Si sigo haciendo figuras, ¿cuántos cuadros va a tener la figura 100?*

E4: *500, por que 100 por 5 son 500.*

P: *Y la figura 150, ¿cuántos cuadritos va a tener?*

E31: *750, multiplicando 150 por 5.*

Se les propusieron otros números de figura para que posteriormente propusieran la regla.

P: *¿Y para la figura 220?*

E4: *1200 multipliqué 220 por 5.*

P: *¿Ahora se puede escribir una regla para saber el número de cuadritos que tendrá cualquier figura?*

E9: *Multiplicando por 5.*

P: *Pero ¿qué voy a multiplicar por 5?*

E29: *Los cuadros.*

P: *¿Entonces la regla seria multiplicar por 5 el número de cuadros?*

E25: *Es multiplicar 5 por el número de la figura* [lo dice bajito].

P: *Probemos la regla* [se les pidió que la comprobaran así pudieron darse cuenta que la regla propuesta no podría ser utilizada].

E25: *Multiplicas por 5 por el número de la figura* [ahora lo dice más alto y confiado].

Posteriormente se comprobó la regla de manera grupal. Luego se les pidió que propusieran una manera de representar la regla que habían mencionado.

E3: *La f.*

E12: *La n.*

P: *Entonces, ¿que representa la n?*

Todos: *El número de la figura.*

P: *¿Y si escribo la letra c, también seguirá representando el número de figura?*

E14: *Si, por que podemos usar cualquiera.*

Acto seguido se les entregó una hoja de trabajo que realizaron individualmente. Al analizar las respuestas, se logró notar que había gran variedad en ellas (Tabla 5.11), pero, gran parte del grupo logró identificar que era necesario realizar una multiplicación, aunque solo un pequeño porcentaje propuso una regla que funcionaría para cualquier figura.

Tabla 5.11
Tipos y porcentaje de respuestas para la pregunta: ¿Cómo supieron cuántos cuadros tendría la figura 4?

Respuestas	Porcentaje de respuestas
a) Sumando de 5 en 5	40.6 %
b) Multiplicar el número de figura por 5 (escribieron también *n x 5*)	18.7 %
c) Multiplicando	12.5 %
d) Multiplicar 5 x 4	12.5 %
e) Multiplicar el número de figura por 5 (escribieron también *f x 5*)	9.3 %
f) Multiplicar el número de cuadros	3.1 %
g) Ir poniendo cuadros	3.1 %

5.1.4.3. Sesión 4. Variable en relación funcional

El inicio de la actividad consistió en que los alumnos comentaran si realizaban alguna actividad física después de clases y cuánto tiempo le dedicaban a ella. Posteriormente se les presentó un problema en el cual se plantea que una persona corre 30 minutos al día y con base en esa información ellos deberían registrar el total de tiempo que habría corrido en 10 días, acumulando el tiempo del día anterior. Cuando se les preguntó por la manera en que se podría registrar propusieron que una tabla de datos que tuviera el tiempo y los días.

Posteriormente se les entregó una hoja con actividades para que la contestaran individualmente. Se notó que hubo complicaciones al momento de determinar cuál era la relación entre las variables.

Una vez que terminaron la actividad se les pidió que explicaran por qué los datos se relacionaban entre sí a lo que comentaron que los minutos y los días se relacionaban entre sí porque cuando los días aumentaban también lo hacían los minutos y cuando disminuían también el tiempo lo hacía.

5.1.4.4. Sesión 3. Actividad integradora

En esta sesión asistió la mayoría del grupo ya que se presentaron 31 estudiantes. Se les mostraron tres figuras en el pizarrón, un triángulo con perímetro de 135 cm, un cuadrado de 51 cm de lado y un rectángulo de altura 30 pero la base solo se daba la medida de una parte de la base 20 cm. Algunos pensaban que se trataba de toda la medida de la base, pero otros mencionaban que solo representaba un pedazo de toda la base. Se discutieron los datos proporcionados en las diferentes figuras, pero, nuevamente hubo confusión sobre cómo obtener perímetro y área, ya que mencionaron que para el perímetro del triángulo era necesario también la altura, por lo que nuevamente se realizó una breve discusión para esclarecer esas ideas.

P: *¿Cómo se pueden representar los datos faltantes?*

E25: *Con una letra.*

Se les pidió que sugirieran la manera de representar los datos desconocidos en cada figura, por lo que propusieron diferentes letras.

Se les entregaron hojas de trabajo por equipo para que determinaran las incógnitas de las figuras. Para el caso de la variable en relación funcional se les propuso la siguiente (Figura 5.10).

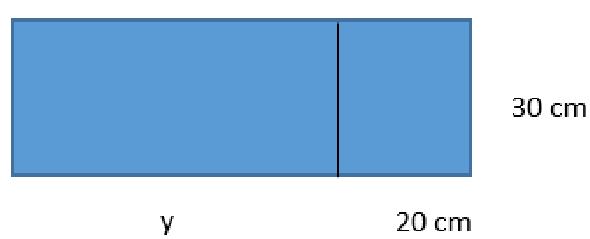


Figura 5.10 **Fragmento de la actividad integradora**

En esta actividad, además de que debían determinar el valor de *y*, también se les pidió que respondieran ¿Qué representaba *y*?, a continuación, se muestran las respuestas propuestas por el grupo (Tabla 5.12).

Tabla 5.12
Porcentaje de respuestas para la pregunta: ¿Qué representa y?

Respuestas	Porcentaje de respuestas
a) Un número faltante	45.1 %
b) Una incógnita	32.2 %
c) Lo que falta de la base	22.5 %

En esta sesión se consideró reestructurar las hojas de trabajo para que las actividades en ellas fueran más significativas. Cuando se les preguntó si *y* podría ser cualquier número, el 35.4 % contestó que no podría escribirse otro número ya que el resultado ya estaba y solo tenían que completar con el valor de *y*.

Cuando se les preguntó si las variables habían sido usadas de la misma manera para cada actividad se generaron bastantes dudas, ya que, aunque las emplearon de diferente manera para cada uno de los usos de la variable, no se percataron de eso, aunque habían completado las actividades.

5.1.5. Quinta semana

5.1.5.1. Sesión 6. Variable como incógnita

Se comenzó la clase platicando acerca de lo que es una incógnita. Los alumnos participaron mencionando que era algo que es un misterio, algo que representa diferentes cosas, cuando falta un número, cuando tenemos que descubrir la cantidad que falta.

Se les presentaron dos problemas verbales en los cuales se involucraba su conocimiento aritmético además de algebraico. Además, deberían proponer la representación de la incógnita en la ecuación. Se les pidió que lo resolvieran en su cuaderno para posteriormente pasar al pizarrón y compartir con los demás la manera en que lo habían resuelto.

El primer problema decía lo siguiente: Susana perdió algunas canicas. En total tenía 37 y ahora solo tiene 14, ¿Cuántas canicas perdió?

E2: *23.*

P: *¿Por qué 23? ¿cómo le hiciste?*

E2: *Bueno es que yo resté al 37 14.*

Algunos recurrieron a colocar un recuadro en la ecuación, pero los compañeros que estaban sentados les comentaban que lo mejor era colocar una *x*.

El segundo problema propuesto decía así: Jaime y Lucía vendieron cajas de galletas a $35.00 cada una, su ganancia total fue de $875.00. Si Lucía juntó la cantidad de $325.00 ¿Cuánto dinero juntó Jaime?

Al pasar al pizarrón para que escribieran una ecuación en la cual colocaran la incógnita esto fue lo que realizaron.

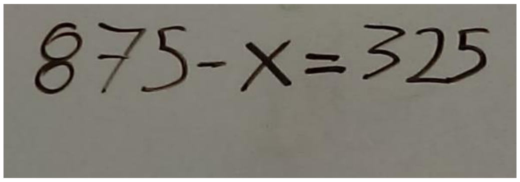


Figura 5.11 **Ejemplo escrito por los estudiantes para resolver el segundo problema**

Se logró observar que aún existe complicación al momento de posicionar la incógnita, algunos mencionaron que debía estar siempre en medio de la ecuación, pero otros argumentaron que no era siempre así, que dependía de lo que te preguntaran.

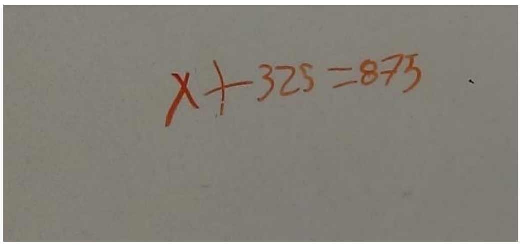


Figura 5.12 **Ejemplo escrito por los estudiantes para resolver el segundo problema**

En el segundo problema hubo una confusión al acomodar los números en la resta, ya que colocaron el número más pequeño al principio expresando que debían sustraer el mayor.

Al terminar la clase se les preguntó acerca de lo que habían empleado para representar a las incógnitas y cuál fue el valor de cada variable. coincidieron que para estos casos solamente podría tener un solo valor.

5.1.5.2. Sesión 4. Variable como número general

Para iniciar la clase se les preguntó si ellos ahorraban y cuánto era lo que procuraban ahorrar. Algunos alumnos mencionaron que sí tenían ahorros del dinero que les daban para gastar. Posteriormente se les mostró una tabla en el pizarrón en la cual estaba expresada la cantidad que tendrían si ahorraran 6 pesos por día.

P: *¿Qué se observa en la tabla?*

E20: *El dinero y los días.*

E15: *Que va de 6 en 6.*

E27: *Que hay recuadros vacíos.*

P: *Si cada día ahorra 6 pesos, ¿cuánto dinero tendría en 3 días?*

E12: *18 pesos.*

P: *Y, ¿cómo supieron eso?*

E32: *Si multiplicas 3 por 6 son 18.*

E26: *12+6 son 18.*

P: *¿Cuánto crees que habrá en la casilla 7?*

E10: *42*

E33: *Por que va de 6 en 6.*

P: *¿Es posible calcular cuando dinero tendrá ahorrado en 200 días? ¿creen que sea posible calcularlo?*

Todos: *Sí.*

E29: *Multiplicando 6 por 200 y serían 1200.*

P: *Ok, entonteces existirá alguna regla que me ayude a saber la cantidad de dinero que voy a ahorra sin tener que completar una tabla.*

E12: *Sería multiplicando el dinero por los días.*

P: *Ahora, ¿cómo pueden expresar esa regla?*

E13: *Multiplicar cualquier día por 6.*

P: ¡*Así lo dejamos? o ¿se puede representar de otra manera?*

E24: *6 por una letra, para representar el día que quieres poner.*

E10: *Puede ser 6 por x.*

P: *¿Y qué representa la letra?*

E14: *Los días.*

Posteriormente se les proporcionó una hoja de trabajo, solo contestaron la primera hoja. Después se comentó si habían ido a la tirolesa de un parque conocido por todos, en el cual se discutió acerca del precio por subirse a ella. Para completar la tabla se les dio el precio que cobran por una persona, o sea $40. 00.

P: *Para obtener el precio de dos personas ¿qué se tendría que hacer?*

E17: *Sumar 40 más 2*

P: *Ok, entonces ¿cuánto sería?*

E17: *42, ah no… se queda pensando un rato, sería 40 por 2.*

E26: *También 40 más 40.*

P: *En la tercera casilla, que representa que son tres personas, ¿cuánto dinero cimbrarán por esas personas?*

E6: *120.*

P: *¿Cómo se puede saber que son 120?*

E10: *80 más 40.*

P: *Otra forma sería…*

E29: *40 por 3.*

P: *¿Qué regla podemos usar para encontrar los resultados de las casillas que faltan?*

E23: *Ir sumando de 40 en 40.*

E29: *No, es mejor multiplicar los 40 por las personas, puede ser n por 40.*

P: *¿Y qué representa la n?*

E9: *El número de personas.*

En esta actividad se les propusieron cuatro diferentes reglas. Pero las seleccionadas por el grupo solo fueron dos de esas cuatro como se muestra en la (Tabla 5.13). La mayoría de los estudiantes lograron seleccionar la regla correcta ya que previamente habían completado una tabla que les permitió analizar cómo determinar la cantidad de dinero que se ganaba por las personas que se subían a la tirolesa.

Tabla 5.13
Porcentaje de respuestas para la pregunta: ¿Cuál regla se podría usar para saber la cantidad que ganarán si se sube cualquier número de personas a la tirolesa?

Respuestas	Porcentaje de respuestas
a) nx40	93.7 %
b) n+40	3.1 %
c) Sin responder	3.1 %

Para finalizar la clase se comentó con el grupo acerca de sus respuestas en la actividad, así como mostrarles otra manera de representar una multiplicación sin necesidad de emplear el símbolo al que están acostumbrados.

5.1.5.3. Sesión 5. Variable en relación funcional

Al inicio de la clase se les preguntó acerca de cómo se puede organizar la información, esto, con el fin de recordar las clases anteriores en las cuales ya se había trabajado con información a organizar.

Acto seguido se les platicó sobre la cantidad de estacas que se necesitan para una casa de campaña. Se les entregó una hoja de trabajo en la cual contestaron algunas preguntas relacionadas a la información proporcionada. Se eliminó la actividad de la gráfica debido al tiempo.

P: *¿Podríamos encontrar una manera de decir cuántas casas completo si tienes 28 estacas?*

E26: *7 casas, por que 7 por 4 son 28.*

En lugar de la gráfica se les pidió que realizaran una tabla con los datos.

P: *Para dos casas de campaña ¿cuántas estacas necesitas?*

Todos: *8.*

P: *En este caso ¿cuántas casas de campaña puedo armar con 16 estacas?*

Todos: *4.*

P: *¿Por qué 4?*

E12: *Porque vas sumando de 4 en 4.*

P: *¿Cómo se pueden encontrar los demás datos que faltan en la tabla?*

E34: *Multiplicar las estacas por las casas de campaña.*

P: *¿Se les ocurre otra manera?*

E27: *4 por c.*

P: *Y la letra c, ¿qué representa?*

E27: *Las casas de campaña.*

E29: *Aunque puede ser cualquier letra.*

P: *¿Cuántas estacas se necesitan si tienes 5 casas de campaña?*

E6: *20.*

P: *¿Por qué 20?*

E6: *Por que 5 por 4 son 20.*

P: *Entonces, ¿de qué depende el número de estacas que vayamos a necesitar?*

E12: *Del tamaño de la casa.*

E13: *No, del número de casas.*

P: *En este caso, ¿cómo se pude expresar la relación entre el número de casas y estacas? recuerden que una relación es… ¿cómo se puede expresar esa relación?*

E13: *Que el número de casas es multiplicado por 4 te va dar el resultado.*

P: *¿Qué sucedió con las cantidades?*

E25: *Aumentaban las estacas si había más casas y si había más casas se necesitan más estacas.*

De los 30 alumnos que participaron en la actividad el 63.3 % expresó de las siguientes maneras la relación entre las variables: $E= 4 \times n$ donde E representaba las estacas y n el número de las casas de campaña, o bien cambiaron la E por la variable t que representaba el total de estacas.

5.1.5.4. Sesión 4. Actividad integradora

Para comenzar la clase se les preguntó a los alumnos si alguna vez habían ido a algún acuario y platicaran brevemente esa experiencia, si les había gustado y cuánto les había costado.

Posteriormente se les presentó un problema en el cual se mencionó que por 50 alumnos que visitaron un acuario habían pagado \$9750.00, entonces se les pidió que obtuvieran el precio de cada boleto.

E18: *Se puede saber dividiendo el total de dinero entre los alumnos.*

Al comentar sobre los datos que se conocían o desconocían mencionaron que había una incógnita, o sea el precio por persona. Posteriormente se les pidió que representaran una ecuación que representara el problema. La representación que realizó uno de los alumnos fue la siguiente:

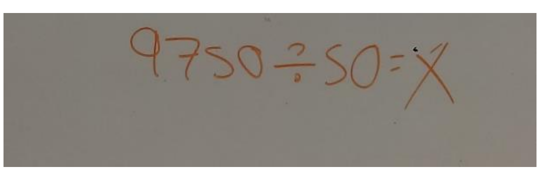


Figura 5.13 **Ecuación de la incógnita propuesta por uno de los alumnos**

Para representar la incógnita sugirieron usar letras. Una vez que calcularon el precio por persona y para trabajar la variable en relación funcional, se les preguntó por el precio a pagar por 5, 10, 15, 20 hasta llegar a 50 estudiantes. Para esto se les pidió que acomodaran los datos como creyeran conveniente y que contestaran una hoja de actividades.

P: *¿Qué relación existe entre los boletos y el precio?*

E13: *Que casi todos tienen novecientos y el precio de boleto aumenta por el número de personas.*

E32: *195 se multiplica por el número de personas.*

E18: *195 por n, pero junto* [se refería a colocar 195n].

Cuando se les preguntó acerca de cómo se podría determinar el total a pagar de cualquier número de estudiantes.

E2: *Multiplicar el precio del boleto por el total de estudiantes.*

5.1.6. Sexta semana

5.1.6.1. Sesión 7. Variable como incógnita

Para el inicio de la clase se mostraron algunas ecuaciones en el pizarrón, en las cuales se encontraba un espacio en blanco para señalar la incógnita. Esto se hizo con la finalidad de preguntarles si es que conocían todos los datos y si la incógnita era la misma para cada situación. Posteriormente se les pidió que mencionaran el valor de cada una de las incógnitas y también que sugirieran de qué manera podrían representarla.

Al terminar con esa actividad de inicio se prosiguió con presentarles otras ecuaciones, pero esta vez, representando a la incógnita con una variable.

Se les pidió que copiaran las ecuaciones y asignaran un valor a la variable para que fueran correctas. Cuando acabaron de realizar la actividad se les pidió también que escribieran su propia ecuación en la cual también tuviera una incógnita.

Al preguntarles acerca de la finalidad de las letras en las ecuaciones mencionaron que eran para representar una incógnita y que podrían ser otras letras. Para este caso y profundizar en el análisis de lo que se estaba comentando se les preguntó si es que el valor de la incógnita cambiaría si es que se cambia de letra, a lo que respondieron que el valor permanecería igual, que no importaba la letra que se colocara, argumentando que para cómo se tenía un resultado, las incógnitas solo podrían tener una valor, de lo contrario no habría igualdad, retomando lo que se había trabajado con ellos al inicio de las sesiones acerca de la igualdad en las ecuaciones.

5.1.6.2. Sesión 5. Variable como número general

Al inicio de la clase se les organizó en equipos y se les repartieron algunos cerillos para que formaran 5 figuras, la primera con tres cerrillos, la segunda con cinco y así con las demás agregando dos cerillos por figura, como se muestra a continuación (Figura 5.14).

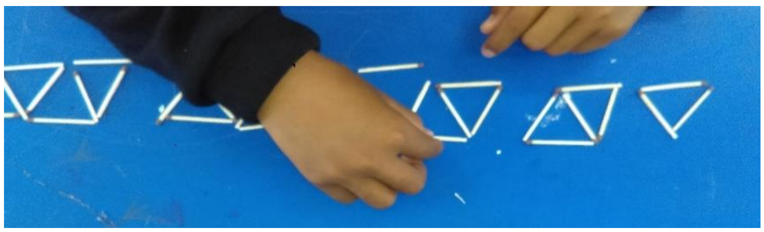


Figura 5.14 **Figuras de cerillos formadas por equipos**

Cuando completaron las figuras se les pidió que comentaran sobre la cantidad de cerillos de cada figura para que pudieran deducir el patrón que había en esa sucesión además de que comenzaran a proponer alguna regla que les permitiera seguir creando nuevas figuras. Esta última actividad propuso un grado de complejidad mayor ya que la regla por construir no era como las que se habían propuesto anteriormente, como $n+1$. Al inicio, entre los equipos se argumentaba que solo podía ser sumarle dos a la cantidad de cerillos de las figuras anteriores.

Posteriormente se les mostró una tabla en el pizarrón para que la completaran grupalmente, en la cual aparecía el número de la figura, la cantidad de cerillos y el procedimiento usado para determinar la cantidad de cerillos por figura. En la misma tabla, en el último espacio de la columna donde se especificó el número de figura se colocó la letra *n*. Para esto se les preguntó a los alumnos acerca del significado de esa letra, el porqué de su presencia. Se pudo notal algo de confusión al inicio ya que casi de inmediato algunas voces de manera presurosa mencionaron que era una incógnita, pero aquellos que fueron más cautelosos mencionaron que representaba cualquier número de figura. Al pedirles que explicaran el por qué representaba cualquier número de figura y no una incógnita, mencionaron que no estaba dentro de una ecuación, y que no se estaba pidiendo un resultado.

A los alumnos se les entregó una hoja de actividades para que contestaran algunas preguntas relacionadas con la tabla. En esa misma actividad se les propusieron cuatro opciones para que ellos seleccionaran una regla que creyeran fuera la adecuada para determinar cualquier cantidad de cerillos independientemente del número de figura propuesta.

Tabla 5.14
Porcentaje de respuestas para la pregunta: ¿Cuál regla se podría usar para saber la cantidad de cerillos de las demás figuras?

Respuestas	Porcentaje de respuestas
a) *(nx2)+1*	53.1 %
b) *(nx2)-1*	21.8 %
c) *nx2*	12.5 %
d) *n+2*	9.3 %
e) *nx20*	3.1 %

Cuando terminaron la hoja de actividades, se les pidió que comentaran cuál de las opciones de regla habían seleccionado y argumentaran el porqué de esa selección. Algunos argumentos fueron bastante simples como decir que la opción que escogieron había sido más sencilla, pero otros alumnos explicaron a detalle que la regla usada era la correcta, sustituyendo las variables por algunos ejemplos de la tabla. Ante el hecho de que las respuestas no habían sido uniformes se optó por verificar cada una de las opciones de la hoja de actividades para demostrar cuál era la respuesta correcta y de esa manera los alumnos quedaron más satisfechos.

5.1.6.3. Sesión 6. Variable en relación funcional

Se les presentó a los alumnos una gráfica en la que se observaba en el eje de las abscisas la cantidad de globos y en el de las ordenadas el precio de dichos globos. Después de comentar sobre la información de la tabla se les dio a los alumnos una hoja de trabajo para que completaran una tabla con ayuda de la información proporcionada en la gráfica.

Al terminar ese trabajo se les pidió que mencionaran el costo de un globo y cómo habían obtenido ese resultado.

E22: *Como 10 globos cuestan 65 pesos pues un globo costaría 6.5 pesos.*

E25: *Yo dividí 39 entre 6.*

P: *Ok, ¿Cuáles son las variables aquí?*

Todos: *Los globos y el precio.*

P: *¿Cómo se relaciona la cantidad de globos con el precio?*

E12: *Si la cantidad de globos aumentan también el precio.*

Identificaron como en clases anteriores que cuando una de las variables aumentaba la otra también lo hacía y de igual manera si alguna disminuía.

5.1.6.4. Sesión 5. Actividad integradora

Esta última sesión se basó en la actividad descrita por Ursini et al. (2005). Primero se les presentó un pentágono irregular a los alumnos dándoles todas las medidas a excepción de la base. Posteriormente se les preguntó sobre la manera de representar la cantidad que se desconocía, a lo que comentaron que como se trataba de una incógnita se podría hacer uso de una letra.

P: *En este caso, ¿qué representa la letra?*

E3: *Cualquier número.*

La respuesta del estudiante puede ser cierta, sin tomar en cuenta los parámetros para formar figuras reales, ya que no se había mencionado aun el perímetro.

Cuando se les planteó la idea de obtener el perímetro de esa figura, los alumnos propusieron que primero se debería de multiplicar 4 por 2 y luego 6 por 2, pero hasta ahí se quedaron en silencio, posteriormente uno de los estudiantes comentó.

E24: *Pues hasta ahí tenemos que es 8 y 12 pero faltaría contar lo que vale la letra.*

P: *Bien, pero ¿cómo podría quedar una ecuación con los datos que tenemos?, si ahorita no sabemos el valor de r, ¿cuál de las ecuaciones podemos usar para expresar el perímetro?* [mostrándoles lo siguiente $20 + r$, $20 + r = 25$ y $20 + r = F$].

E27: *Sería la tercera, porque nada más dice que sumas 20 más r.*

P: *Pero, ¿qué significa ese 20?*

E12: *Pues la suma de los números.*

P: *¿De cuáles números?*

E27: *De los lados, de 8 y 12.*

Se les preguntó si en la ecuación seleccionada la variable podría tener cualquier valor, los alumnos contestaron que si, por que no había un signo igual que dijera un resultado.

Para proseguir se les comentó que el perímetro de esa figura era 27 cm por lo que nuevamente se les pidió que pensaran en una manera de expresar esos datos en una ecuación. Eligieron la expresión 20+r= 27. Para este caso se les preguntó si la variable podría tener cualquier valor y los alumnos mencionaron que para este caso solo podría valer 7, se les cambió el perímetro para los alumnos asignaran diferentes valores relacionados con el cambio del perímetro. Cuando se les preguntó por qué en esos casos la variable debía tener un valor específico comentaron que era así debido al resultado.

Al analizar la última expresión *20+r= F* se les preguntó acerca de lo que representaban las variables.

P: *¿Qué sucedería si r vale 1? ¿cuánto va a valer F?*

Todos: *21.*

Se le asignaron diferentes valores a *r* para que los alumnos comentaran el valor que se le asignaría a *F*.

P: *¿Qué pasa cuando r tiene un valor más grande?*

E29: *Aumenta la F.*

P: *Y si tiene un valor pequeño como el 1.*

E29: *Pue la F valdrá 21.*

E13: *El valor que tenga la r va aumentar el valor que tenga en la F.*

P: *¿Y siempre lo va aumentar?*

Todos: *No.*

E34 y E13: *Depende del valor de r.*

P: *¿Qué sucedería si el valor de r aumentara?*, por ejemplo, *si F vale 25, ¿qué sucederá con r?*

E21: *La r se convierte en un 5.*

Se le asignaron diferentes valores a *F* para que los alumnos observaran distintos ejemplos de cómo cambiaban los valores de *r* dependiendo de *F*.

P: *¿Qué está pasando con la r cuando a la F se asigna un valor?*

E21: *Aumenta.*

P: *Y, ¿están relacionadas estas variables?*

Todos: *Si.*

P: *¿Cómo estarán relacionadas?*

E13: *Porque al sumar el número que está en la r aumenta la F.*

Al finalizar se les pidió que comentaran acerca de la finalidad que tuvieron las variables en cada una de las tres expresiones, se les preguntó si en todos los casos las variables tendrían los mismos valores, y los alumnos mencionaron las diferencias entre cada expresión, aunque claro sin diferenciar con certeza que una la variable representaba una incógnita, un número general o si era una relación funcional. Solamente a través de las respuestas que mencionaron se pudo averiguar que pueden diferenciar que los usos de cada una de ellas son distinguibles sin necesidad de que les asignen un nombre.

Capítulo 6

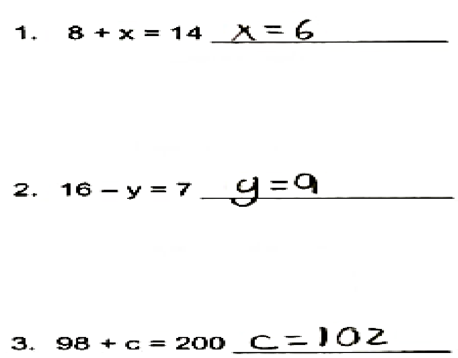
RESULTADOS DEL POS-TEST

Al finalizar las seis semanas de sesiones, en donde se trabajó con los alumnos los tres usos de la variable a través del modelo 3UV, se les aplicó el pos-test. El test aplicado fue el mismo instrumento empleado como pre-test o diagnóstico. A continuación, se describen los resultados encontrados tras su análisis.

6.1. Análisis cualitativo de los datos

6.1.1. Primera parte del pos-test: La variable como incógnita

Durante el pos-test fue posible observar que los alumnos identificaron las incógnitas, encontrando su valor como se puede apreciar en la Figura 6.1 y no se presentaron los mismos errores del pre-test.

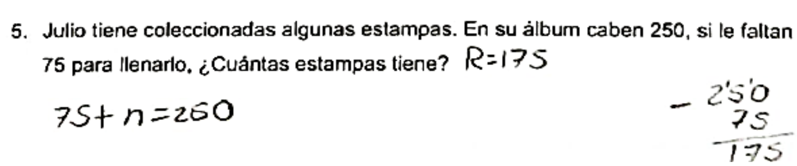

1. 8 + x = 14 x = 6

2. 16 − y = 7 y = 9

3. 98 + c = 200 c = 102

Figura 6.1 **Valores asignados por un estudiante para cada una de las incógnitas**

Algunos de ellos incorporaron las variables como incógnita al plantear sus respuestas como se muestra en la siguiente figura.


5. Julio tiene coleccionadas algunas estampas. En su álbum caben 250, si le faltan 75 para llenarlo, ¿Cuántas estampas tiene? R=175

75+ n=260

− 250
75
175

Figura 6.2 **Ecuación propuesta por un estudiante para determinar el valor de la incógnita**

6.1.2. Segunda parte del pos-test: La variable como número general

La variable como número general representó un reto aun mayor que la variable como incógnita, ya que la mayoría de los estudiantes durante el pre-test no logran encontrar un patrón para seguir dibujando las figuras, y menos llegar a generalizar una regla que les permitiera encontrar el número de puntos.

En este test se verificó que gran parte de los alumnos pudo determinar una regla y aplicarla para encontrar el número de puntos de cada figura como se puede observar a continuación.

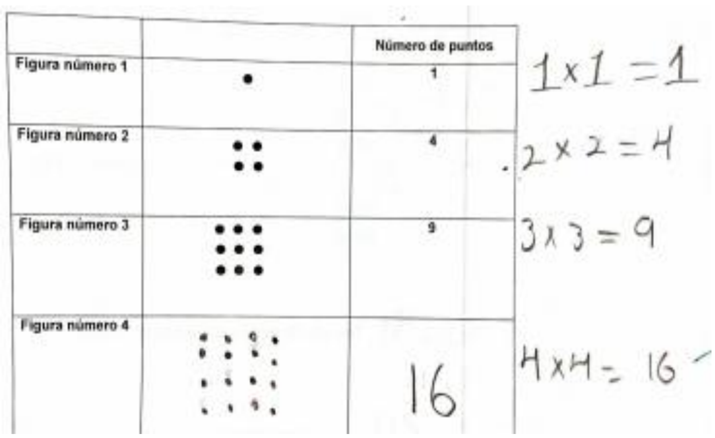


Figura 6.3 **Ejemplo de resolución de la primera actividad de la variable como número general**

Algunos de ellos escribieron su regla, explicando con detalle lo que habían realizado para determinar el número de puntos como se aprecia en la Figura 6.4. Aunque una gran parte determinó su regla y la llevó a cabo solo uno de los estudiantes la escribió como aparece en la Figura 6.5 donde *y* representa el número de figura y *x* el total de puntos de la figura.

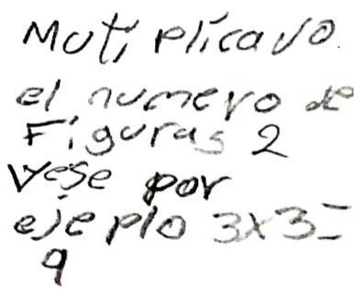


Figura 6.4 **Ejemplo de regla para determinar el número de puntos**

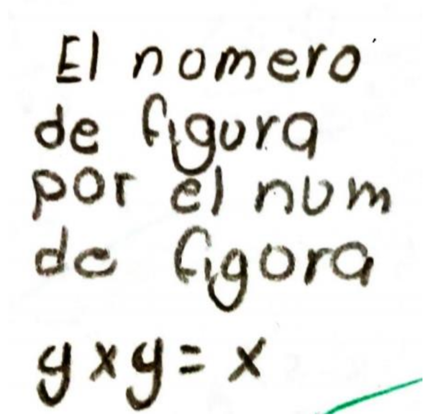


Figura 6.5 **Ejemplo de regla para determinar el número de puntos**

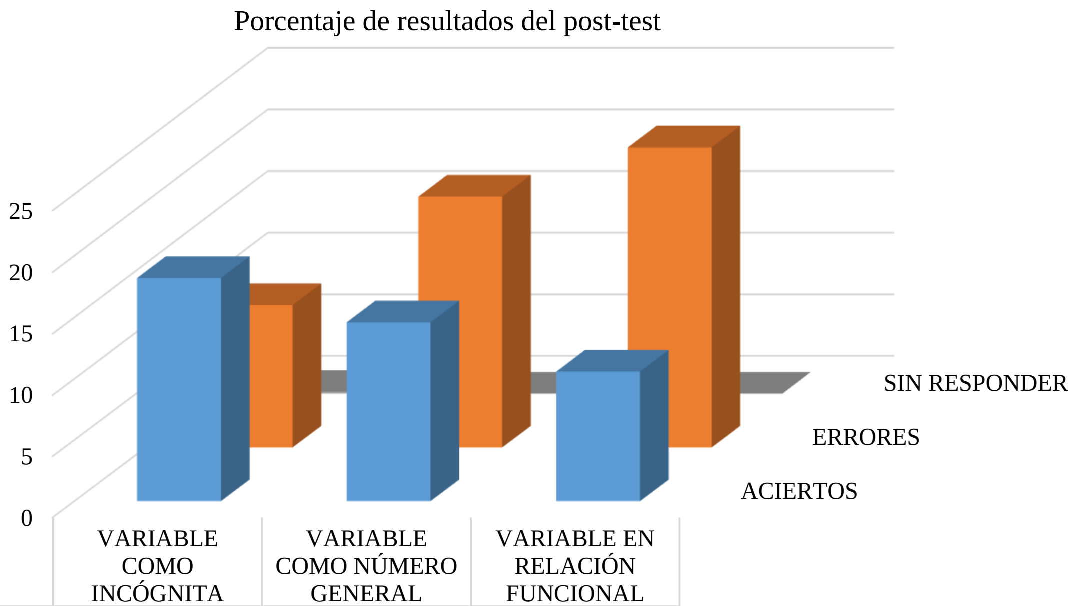
Con ayuda de la regla que encontraron lograron determinar la cantidad de puntos que tendría la figura número 20, tarea que había significado un reto bastante difícil para la mayoría durante el pre-test. Aunque la regla para esta tarea era n^2, el hecho de multiplicar por sí mismo el número de figura nos habla de que sí existe comprensión de esa regla aunque no se exprese de la misma manera.

6.1.3. Tercera parte del pos-test: La variable en relación funcional

Como se pudo analizar anteriormente y durante las sesiones, esta variable representó un reto bastante complejo, al incorporar vocabulario que podría confundir a los alumnos. Aunque la mayoría de los estudiantes no representó la relación entre las variables del problema a través de una ecuación, si explicaron que con cada kilogramo de peso que se colocara en la balanza, ésta se desplazaría, o bien, que entre más peso fuera colocado más se desplazaría la charola.

6.2. Análisis cuantitativo de los datos

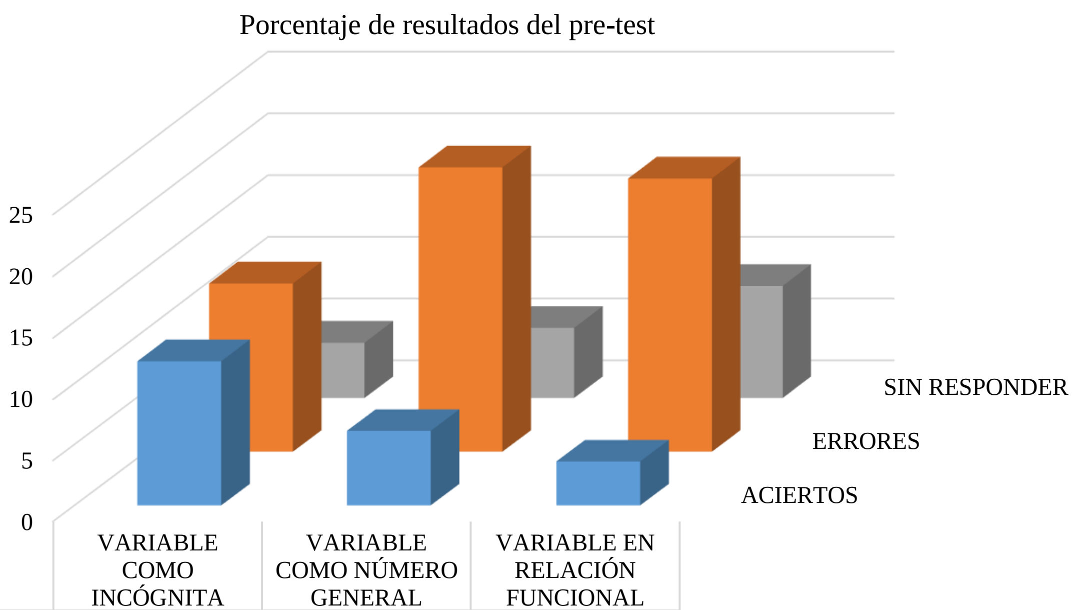
La población seleccionada para esta investigación consistió en un solo grupo, entonces, la población coincidió con la muestra, por lo cual se trató de un muestreo censal. En la siguiente gráfica se pueden apreciar los porcentajes obtenidos por el grupo de 6° grado en cada una de las secciones en las que se dividió el test.



	VARIABLE COMO INCÓGNITA	VARIABLE COMO NÚMERO GENERAL	VARIABLE EN RELACIÓN FUNCIONAL
ACIERTOS	18.2	14.6	10.6
ERRORES	11.6	20.4	24.4
SIN RESPONDER	0.15	0	0

Figura 6.6 **Resultados del post-test**

El porcentaje de preguntas sin responder disminuyó a cero en casi todos los usos de las variables, y si se compara en el pre-test, como se puede apreciar en la Figura 6.7, este aspecto avanzó considerablemente.



	VARIABLE COMO INCÓGNITA	VARIABLE COMO NÚMERO GENERAL	VARIABLE EN RELACIÓN FUNCIONAL
ACIERTOS	11.8	6.1	3.6
ERRORES	13.7	23.1	22.2
SIN RESPONDER	4.5	5.7	9.1

Figura 6.7 **Resultados del pre-test**

En cada una de las variables el porcentaje de aciertos aumentó. Para el caso de la variable como incógnita fue de un 25%, en la variable como número general fue de un 27.3 % y en el caso de la variable en relación funcional 21.4%.

El porcentaje de errores disminuyó en el caso de la variable como incógnita con un 9.8%, en la variable como número general fue de un 9.2%. En el caso de la variable en relación funcional hubo un aumento de errores de un 7.5% en comparación con los resultados del pre-test. Para esta última hay que tomar en cuenta el hecho de que registró un mayor porcentaje de preguntas sin responder durante el pre-test, además, es importante hacer hincapié del incremento en el porcentaje de aciertos en relación al porcentaje de aumento en los errores registrados.

Una vez obtenidos los datos del pre y pos-test, se prosiguió a realizar las siguientes gráficas en la cuales se pueden apreciar el número de aciertos, errores y preguntas sin responder por cada estudiante.

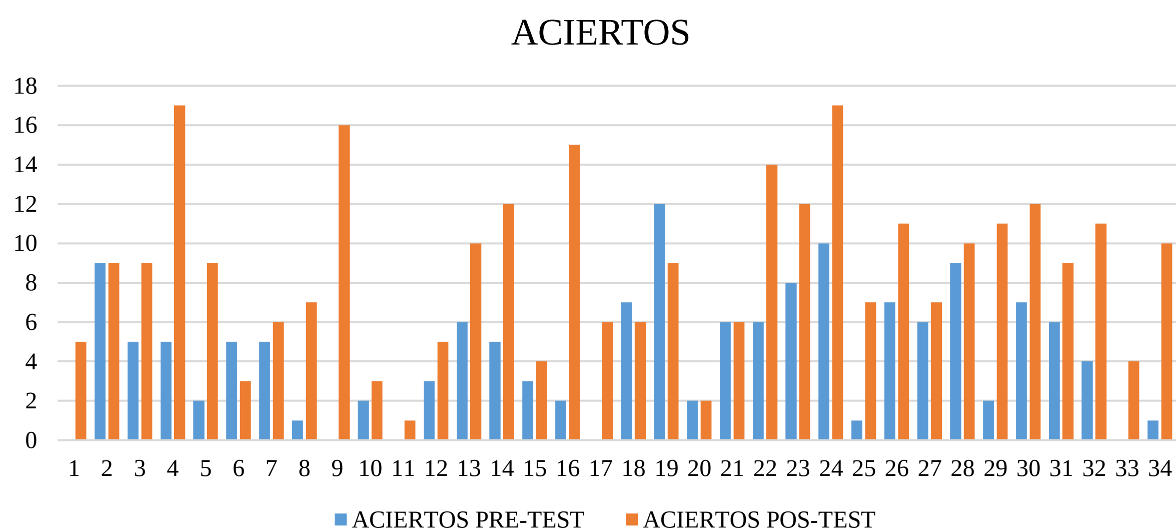


Figura 6.8 **Cantidad de aciertos obtenidos por estudiante**

Es posible observar que casi todos los alumnos lograron aumentar la cantidad de aciertos obtenidos en la primera prueba en contraste con la segunda, por lo cual se sospechó que podría haber un cambio significativo, así que fue necesario ahondar más para verificar ese avance. Para ello se consideró realizar una prueba de hipótesis comparando las medias muéstrales entre el pre-test y pos-test.

Antes de contar la cantidad de errores obtenidos por cada uno de los estudiantes se había considerado la posibilidad de que existiera una disminución abrupta, pero al momento de contabilizar los datos se obtuvieron los siguientes resultados.

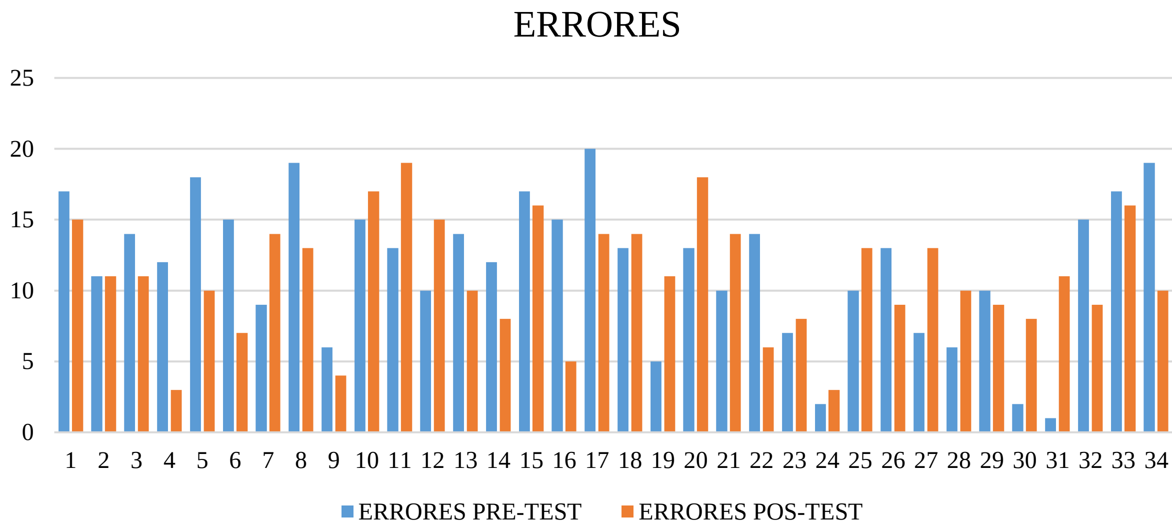


Figura 6.9 **Cantidad de errores por estudiante**

En cuanto a la gráfica anterior es notorio que una gran cantidad de errores siguió prevaleciendo, pero al ser más meticulosos en su revisión es posible observar que más de la mitad de los estudiantes lograron disminuir la cantidad de errores en comparación con los que habían obtenido en el pre-test. Una cuestión destacable de la intervención realizada fue que el principio había muchas dudas por lo que los alumnos dejaron sin contestar muchos de los ítems, pero se puede apreciar que en el caso del pos-test esto disminuyó.

Figura 6.10 **Cantidad de preguntas sin responder por estudiante**

A partir de los datos que se muestran en las gráficas se puede decir que, aunque los estudiantes se esforzaron por responder todo el examen, algunas de esas respuestas fueron incorrectas aumentando en algunos casos la cantidad de errores en comparación del pre-test.

El análisis anterior no bastó para asegurar un avance entre ambas pruebas, así que se optó por llevar a cabo un análisis estadístico de dos muestras relacionadas, en este caso la cantidad de aciertos obtenidos por alumnos en el pre y pos-test. Con la finalidad de decidir qué prueba resultaría como la más efectiva, que de hecho se tenía pensado ver si era posible utilizar le estadístico paramétrico T de Student, fue necesario constatar si las muestras eran normales, por lo cual, se llevaron a cabo algunas pruebas de normalidad. La primera que se realizó fue la kurtosis, con la finalidad de determinar el grado de concentración que presentaban los valores en la región central de distribución. Se logró identificar que existió poca concentración de los datos en la media con k=2.337611 para los aciertos del pre-test y k=2.374359 para los aciertos del pos-test.

Posteriormente se formularon una hipótesis nula y una alternativa. H0: las muestras son normales y H1: las muestras no son normales. Si $p > 0.05$, se acepta H0. Una vez determinadas las hipótesis se llevaron a cabo las pruebas que se muestran a continuación.

Tabla 6.1
Pruebas de normalidad de los datos

Shapiro-Wilk		Kolmogorov-Smirnov		Jarque Bera	
W	p	D	p	χ^2	p
Pre-test					
0.9440	0.0814	0.1466	0.0614	1.3469	0.5100
Pos-test					
0.9715	0.5058	0.0951	0.6069	0.8833	0.6430

Con los resultados de la tabla anterior se evidenció que los datos son normales. Además, las muestras son dependientes ya que están relacionados los datos de los aciertos de ambos test. De esta manera, fue posible aplicar la prueba T de Student para muestras relacionadas. Para poder realizar dicha prueba fueron necesarias las calificaciones obtenidas por los estudiantes en ambos test únicamente enfocándose en los aciertos.

Para la prueba aplicada se designaron las siguientes hipótesis: H0: $\mu pre-\mu pos = 0$ y H1: $\mu pre-\mu pos \neq 0$, con un nivel de significancia del 5%, lo que quiere decir que si p-valor < 0.05 se rechaza H0 y se acepta H1. A continuación, se muestran los resultados de la prueba.

Tabla 6.2
Prueba T-Student.

Prueba T-Student

t	*gl*	*p*	95 % *IC*
-5.8663	33	.00000143	[-2.19, -2.15]

El resultado mostrado donde p-valor fue de .00000143 lo cual permite aceptar la H1, con lo que se puede afirmar que existió una diferencia significativa entre las medias de los aciertos obtenidos entre el pre y el pos-test. La diferencia entre las medias del pre y pos test fue de -2.17 que se encuentra dentro del intérvalo de confianza. A través los resultados obtenidos se puede afirmar que existió un avance significativo entre ambas pruebas después de aplicada la intervención.

Hay una diferencia significativa en las medias de los aciertos de los alumnos antes y después de trabajar con ellos. Por lo cual se concluye que la intervención sí tuvo efectos positivos sobre los aciertos de los alumnos.

CONCLUSIONES

La redacción de este último capítulo requiere, para empezar, que se retome la pregunta de investigación la cual fue: ¿Cuál es el efecto sobre el pensamiento pre-algebraico que tiene una intervención basada en el modelo 3UV en alumnos de 6° grado de primaria?**,** a través de ella se pudo describir detalladamente lo sucedido durante el transcurso de las sesiones. Después de seis semanas de arduo trabajo, se logró notar que los alumnos pudieron percibir a las variables, en lugar de ignorarlas como algunos de ellos lo manifestaron en un inicio. Por otra parte, les asignaron un valor cuando así lo requería al tratarse de la variable como incógnita, se permitieron incluirlas al plantear ecuaciones para resolver problemas verbales. Además, comprendieron que las variables no necesariamente están relacionadas con algún objeto o nombre, o sea que se puede hacer uso de cualquier símbolo o letra para representar la variable como una incógnita específica.

Los alumnos estaban bastante acostumbrados al uso de la regla de tres para obtener fácilmente los resultados, eso se pudo observar en las primeras sesiones. Operar con ella parece ser un requisito indispensable de los que cursan la primaria, sobre todo cuando se les presenta información en una tabla de datos la cual deben completar. Lo interesante de haber trabajado la variable como número general fue el hecho de permitirle a los estudiantes acceder a un panorama distinto, el cual sin duda causó algo de confusión al inicio, pero durante el desarrollo de las sesiones fueron adoptando la nueva manera de trabajar con agrado, y ¿por qué no?, fascinación. Esta nueva manera que implicaba el analizar los datos, encontrar patrones y proponer reglas que les permitieran determinar cantidades mayores les agradó bastante.

La variable en relación funcional resultó ser un poco más confusa debido al vocabulario que implica trabajar con este uso. Al tratar de introducir los términos variable dependiente e independiente, se logró notar incertidumbre en el grupo, más que en las sesiones aplicadas con los otros usos de la variable. Pese al poco entendimiento de los nuevos conceptos, los alumnos lograron comprender e identificar que existían dos variables implicadas en el problema y que una dependía de la otra. Debido a la experiencia de ese día se decidió proseguir con las sesiones, pero sin el empleo de los conceptos variable dependiente e independiente.

El aumento de errores en el apartado de la variable en relación funcional durante el pos-test llamó bastante la atención, debido a eso, se analizaron las respuestas proporcionadas por los alumnos. Se logró notar el cálculo incorrecto de cantidades con punto decimal, ya que escribieron respuestas cercanas al resultado correcto, por ejemplo, cuando se les preguntó sobre cuántas copias podían sacar con 2.5 pesos, contestaron 1 copia en lugar de 2 copias. A su vez en lugar de contestar 2.625 kg, la mayoría de las respuestas erróneas escribieron 2.5 kg. Las respuestas analizadas sugirieron que los estudiantes realizaron un cálculo aproximado de las cantidades.

Otra cuestión interesante y que en definitiva causó revuelo en los estudiantes, fue el empleo de la palabra relación y cómo poder expresarla, para ellos no significaba nada en el campo de las matemáticas. Durante el pos-test, muy pocos estudiantes lograron establecer la relación entre el peso de compra y el desplazamiento. En la mayoría de los errores registrados, contestaron que la relación entre el peso y deslazamiento era que iban de 4 en 4. Otros anotaron que entre más kilos la charola se desplazaría más, lo cual es un análisis correcto, pero no era lo que se les pedía que realizaran. Debido a lo anterior, se considera necesario haber incluido actividades preliminares que permitan a los alumnos expresar una relación matemática.

Es necesario mencionar que los cinco objetivos específicos fueron alcanzados. Para empezar, se logró el diseño de unidades didácticas basadas en el modelo 3UV. El desempeño del grupo fue evaluado al trabajar las sesiones, valorando procedimientos y estrategias empleados durante las actividades propuestas. En estas mismas sesiones, se describió el avance entre el conocimiento aritmético y pre-algebraico. Se logró también desarrollar en los alumnos los tres principales usos de la variable. Por último, fue posible medir el rendimiento en el uso de las variables a través de un pre y post-test.

En la redacción de lo ocurrido en las sesiones, es posible apreciar que los alumnos pueden pasar de un uso al otro, sin necesidad de señalárselos, aunque algunos mostraron dificultad, ya que en un inicio pretendían que todas las variables fuesen concebidas como una incógnita.

A partir del desarrollo de las sesiones se logró percibir que los alumnos aún no habían podido dominar con éxito los algoritmos aritméticos, además, fue notorio el hecho de que estaban bastante acostumbrados a que se les indicara lo que debían hacer en todo momento, así que esa carencia de autonomía causó en ellos un problema ya que buscaban aprobación y apego, el cual se trató de hacer caso omiso, pero con el paso de los días se presentó cada vez menos.

Si bien es cierto que existen carencias en el rubro antes mencionado, existen alumnos que demostraron que pueden argumentar y proponer soluciones relacionadas con el pensamiento algebraico, dejando a un lado las típicas resoluciones de tipo aritmético.

Lo encontrado en esta investigación corrobora lo reportado por Durán (1999) ya que en esta investigación los alumnos también fueron capaces de reconocer patrones en las secuencias que se les mostraron, ya fueran numéricas o de figuras. Así mismo en su investigación, hace mención de algo que también fue bastante recurrente durante el pre-test y las primeras sesiones de la secuencia didáctica, y es que, tanto en sus observaciones como en las realizadas en esta investigación, los alumnos de sexto grado consideraron a las variables de una expresión simbólica como etiquetas o como la abreviatura de una palabra, aunque como ya se mencionó anteriormente, esta idea fue cambiando conforme avanzaron las sesiones, además, este mismo progreso logró verificarse en las respuestas que dieron los alumnos en el pos-test.

Al igual que la población con la que el autor previamente citado trabajó, los alumnos lograron describir la regla que usaban para calcular términos de una secuencia, aunque fueran términos grandes. Por otra parte, también fueron capaces de simbolizar la regla mediante variables.

Pudo detectarse un avance significativo entre los resultados del pre-test y pos-test al trabajar actividades relacionadas con la variable como incógnita, como número general y relación funcional, esto coincide con los resultados mostrados por Lluvia et al. (2011), la única diferencia es que, en la investigación de las autoras, se centraron en emplear solo dos de los tres usos de la variable que se utilizaron en el presente documento.

La implementación del modelo 3UV resultó ser bastante útil, ya que a través de él los alumnos lograron acercase a trabajar con las variables, esta afirmación coincide con lo mencionado por las autoras quienes afirmaron que el modelo 3UV resultó ser una herramienta muy útil en el desarrollo del pensamiento algebraico, permitiendo a los alumnos trabajar contenidos algebraicos de manera exitosa.

Los resultados de esta investigación coinciden con lo mencionado por Carraher et al. (2007) ya que introducir contenidos de carácter algebraico en edades tempranas no resultó desfavorable, convino a los alumnos al momento de permitirles aproximarse a las variables a través de un desarrollo paulatino mediante el cual pudieron asimilar la utilidad que tienen al resolver problemas matemáticos.

En el caso de la variable en relación funcional, es notorio apreciar que el desempeño de los estudiantes no fue óptimo, sobre todo si se compara con los resultados obtenidos en las otras dos variables, esto recuerda a lo encontrado por Juárez (2011) quien hace notar que la variable en relación funcional presentó el porcentaje promedio más bajo de aciertos. Es cierto que su investigación fue realizada con profesores que enseñan matemáticas a nivel secundaria, pero es una coincidencia que valdría la pena investigar.

A través del desarrollo de las unidades y de los resultados del pos-test es posible afirmar que la variable en relación funcional representó un gran reto para los estudiantes, desde comprender los conceptos de variable dependiente e independiente, hasta poder representar las relaciones entre las mismas variables a través de letras. Lo cual permite recordar lo mencionado por Willoughby (1999) ya que comenta que, si bien es cierto que los alumnos pueden comprender conceptos abstractos, como es el caso de la función y por consiguiente lo relacionado a ella, es necesario que se les introduzca a través de actividades concretas que le permitan a través de un tiempo prolongado asimilar esos conceptos.

Los resultados de esta investigación demuestran que es posible acercar a los alumnos a los tres usos de la variable, aunque para el caso de la variable en relación funcional es cierto que no fue tan sencillo y que para ella se considera pertinente profundizar más.

Para finalizar, hay que recordar que los resultados mostrados en este documento hacen ver un avance significativo entre los aciertos del pre-test y pos-test, pero no por ello deben generalizarse. Lo que si se espera es que los diseños de las unidades didácticas puedan resultar útiles para que los profesores, principalmente que laboran a nivel primaria y que se encuentren interesados en desarrollar este tipo de actividades, puedan usarlas como una base de apoyo a su práctica docente y como una guía en la incorporación de los tres principales usos de la variable desde la perspectiva del modelo 3UV.

Referencias bibliográficas

Barreiro, P., Leonian, P. Marino T., Pochulu, M. y Rodríguez, M. (2017). Estado del arte y marco teorico. En Rodríguez, M. (Coord.), *Perspectivas metodológicas en la enseñanza y en la investigación en educación matemática* (pp. 135-140). Argentina: UNGS.

Battista, M. T. y Borrow, C. (1999). Using Spreadsheets to Promote Algebraic Thinking. En B. Moses (Ed.), *Algebraic thinking, grades K–12: reading from NCTM´s school- based journals and other publications* (pp. 238-246). Virginia: NCTM.

Bednarz, N., Kieran, C. y Lee, L. (1996). *Aproximaciones al álgebra: perspectivas para la investigación y la enseñanza.* Canadá: Kluwer academic publishers.

Blanton, M. y Kaput, J. (2004). *Elementary grades students´capacity for functional thinking.* Recuperado de la base de datos de ERIC. (ED489632)

Brousseau G. (1997). *Theory of didactical situation in mathematics*. Dordrecht: Kluwer.

Cai, J., Ng, S. F. y Moyer, J. C. (2011). Developing students. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early Algebraization: A Global Dialogue from Multiple Perspectives* (pp. 25-40). Berlín: Springer.

Carpenter, T. P., Franke, M. L., y Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Portsmouth: Heinemann.

Carraher, D. W. y Schliemann, A.D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En F. K. Lester (Ed*). Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (p.p. 669-706). Virginia: NCTM.

Castro, E. (2012). Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. García, L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática, Vol. 16. Seminario II: Fines de la investigación en pensamiento algebraico* (pp. 75 – 94). España: Baeza.

Castro, F., Godino, G., y Rivas, M., (2011). Razonamiento algebraico en educación primaria: Un reto para la formación inicial de profesores. *Unión: Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 11*(25), 73-88.

Causado, R. (2010). *La Perspectiva de Cambio Curricular Early-Algebra como Posibilidad para desarrollar el Pensamiento Algebraico en Escolares de Educación Primaria: Una Mirada* *al Proceso Matemático de Generalización.* Trabajo presentado en el 11° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa, Bogotá, Colombia.

Chalouh, L. y Herscovics, N. (1999). Teaching Algebraic Expressions in a Meaningful Way. En B. Moses (Ed.), *Algebraic thinking, grades K–12: reading from NCTM´s school- based journals and other publications* (pp. 168-174). Virginia: NCTM.

Durán, R. (1999). *Reconocimiento de patrones en secuencias numéricas y de figuras, por los alumnos de sexto grado de primaria* (Tesis de maestría). Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav, IPN.

Férnandez, J., Elortegui, N., Rodriguez J. y Moreno, T. (2002). ¿Cómo hacer unidades didácticas innovadoras? España: DíADA

Ferrini-Mundy, J., Lappan, G. y Phillips, E. (1999). Experiences with Patterning. En B. Moses (Ed.), *Algebraic thinking, grades K–12: reading from NCTM´s school- based journals and other publications* (pp. 112-119). Virginia: NCTM.

Godino, J. D. y Font, V. (2003). *Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros.* Granada: ReproDigital.

Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2014). Definiciones de los enfoques cuantitativo y cualitativo, sus similitudes y diferencias. *Metodología de la investigación* (pp. 2-20). México: McGraw-Hill Interamericana.

Juárez, J. A. (2011). Dificultades en la interpretación del concepto de variable en profesores de matemáticas de secundaria: un análisis mediante el modelo 3UV. *Números, Revista de Didáctica de las Matemáticas, 76*(3), 83-103.

Kaput, J. (2000). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum*. Dartmouth, MA: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Kieran, C. (2004). Algebraic Thinking in the Early Grades: What is it? *The Mathematics Educator. 8*(1), 139-151.

Kilpatrick, J. (2011). Comentary part 1. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early Algebraization: A Global Dialogue from Multiple Perspectives* (pp. 125-129). Berlín: Springer.

Küchemann, D. (1980). The Understanding of Generalised Arithmetic (Algebra) by Secondary School Children (tesis doctoral). Universidad de Londres, Londres.

Lluvia, D. y López, A. (junio, 2011). *Empleo del modelo 3UV en álgebra temprana.* Trabajo presentado en la XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática, Recife, Brasil. Resumen recuperado de https://ciaem-redumate.org/ocs/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/viewFile/1216/368

Mason, J. (1999). Incitación al estudiante para que use su capacidad natural de expresar generalidad: Las secuencias de Tunja. *Revista EMA*, *4*(3), 232-246.

N.C.T.M. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Virginia: NCTM.

Papini, M. (2003). Algunas explicaciones vigotskianas para los primeros aprendizajes del álgebra. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. 6*(1), 41-71.

Pinto, E. y Cañadas, M. C. (2017). *Generalization in fifth graders within a functional approach.* En Kaur, B.; Ho, W. K.; Toh, T.L.; Choy, B. H. (Eds.), Proceedings of the 41st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (pp. 49-56). Singapur: PME.

Ploger, D., Klingler, L. y Rooney, M. (1999). Spreadsheets, Patterns and Algebraic Thinking. En B. Moses (Ed.), *Algebraic thinking, grades K–12: reading from NCTM´s school- based journals and other publications* (pp. 232-237). Virginia: NCTM.

Robles, N. (2006). *Uso de estrategias didácticas encaminadas a desarrollar formas de uso e interpretaciones adecuadas del signo igual.* (Tesis de maestría inédita). Universidad de Sucre, Colombia.

Schliemann, A. D., Carraher, D. W., Brizuela, B. M. (2011). *El carácter algebraico de la aritmética: De las ideas de los niños a las actividades en el aula*. Buenos Aires: Paidós.

Schoenfeld, A. H. y Arcavi, A. (1999). On the Meaning of Variable. En B. Moses (Ed.), *Algebraic thinking, grades K–12: reading from NCTM´s school- based journals and other publications* (pp. 150-156). Virginia: NCTM.

Secretaria de Educación Pública. (2017). *Aprendizajes Clave para la Educación Integral. Educación primaria 6°. Plan y programas de estudio, orientaciones didácticas y sugerencias de evaluación.* México: Autor.

Serres Voisin, Y. (2011). Iniciación del aprendizaje del álgebra y sus consecuencias para la enseñanza. *Sapiens. Revista Universitaria de Investigación, 12*(1), 122-142.

Socas, M. (2011). La enseñanza del álgebra en la educación obligatoria. Aportaciones de la investigación. *Números, Revista de Didáctica de las Matemáticas, 77*, 5-34.

Socas, M. y Palarea, M. M. (1995). El uso de sistemas de representación con imágenes en la Enseñanza-aprendizaje del Álgebra escolar. *Suma*, (20), 29-35.

Trigueros, M., Reyes, A., Ursini, S. y Quintero, R. (1996). Diseño de un cuestionario de diagnóstico acerca del manejo del concepto de variable en álgebra. *Enseñanza de las Ciencias, 14*(3), 351-363.

Ursini, S. (2011) Il Modello 3UV: uno strumento teorico a disposizione degli insegnanti di matemática. *QuaderniCIRD, 2*(10), *59-70.*

Ursini, S., & Trigueros, M. (2001). A model for the uses of variable in elementary algebra, En M. Van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of PME 25* (vol. 4, pp. 327–334). Utrecht, the Netherlands: Freudenthal Institute, Utrecht University.

Ursini, S., Escareño, F., Montes, D. y Trigueros, M. (2005). *Enseñanza del álgebra elemental: una propuesta alternativa.* México: Trillas.

Van Amerom, B.A. (2003). Focusing on Informal Strategies When Linking Arithmetic to Early Algebra. *Educational Studies in Mathematics*, *54* (1), 63-75.

Watanabe, T. (2011). Shiki: A Critical Foundation for School Algebra in Japanese Elementary School Mathematics. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early Algebraization: A Global Dialogue from Multiple Perspectives* (pp. 109-124). Berlín: Springer.

Willoughby**,** S. (1999). Functions from Kindergarten through Sixth Grade**.** En B. Moses (Ed.), *Algebraic thinking, grades K–12: reading from NCTM´s school- based journals and other publications* (pp. 197-201). Virginia: NCTM.

ANEXOS

ANEXO A. PRE-TEST Y POS-TEST

Nombre de la escuela: ____

Nombre del alumno (a): ____

Grado: ____________ Edad: _________________

- **Escribe en la línea el valor que puede tomar la letra para que la expresión sea correcta.**

1. 8 + x = 14 ______________

2. 16 – y = 7 _______________

3. 98 + c = 200 _____________

- **Lee y contesta los siguientes problemas.**

4. Andrea recibió $ 48.00 en su cumpleaños y los colocó dentro de su alcancía. Ahora sabe que tiene $ 500.00, ¿Cuánto dinero tenía antes de su cumpleaños?

5. Julio tiene coleccionadas algunas estampas. En su álbum caben 250, si le faltan 75 para llenarlo, ¿Cuántas estampas tiene?

6. Juan es 15 años mayor que Santiago. La suma de las dos edades es 41. ¿Cuáles son las edades de Juan y Santiago?

- **Observa lo siguiente, primero, dibuja las figuras 4,5 y 6, luego contesta las preguntas.**

		Número de puntos
Figura número 1	●	**1**
Figura número 2	● ● ● ●	**4**
Figura número 3	● ● ● ● ● ● ● ● ●	**9**
Figura número 4		
Figura número 5		
Figura número 6		

10. ¿Cuántos puntos hay en la figura número 8? _____________

11. ¿Cuántos puntos tendrá la figura número 20? _____________

Imagínate que puedes seguir dibujando figuras de puntos como las anteriores hasta conseguir alguna que tenga una cantidad cualquiera de puntos.

12. ¿Cómo representarías ese número de figura? _____________

13. ¿Cómo representarías el número de puntos de esa figura? _____________

- **Completa la siguiente tabla y contesta las preguntas.**

Número de copias	**Precio**
5	6.25
10	12.50
15	
20	25.00
25	
35	43.75
	62.50

15. ¿Cuánto dinero necesitas para pagar 45 copias? ____________________

16. ¿Cuánto tendrás que pagar por 100 copias? ________________________

17. ¿Cuántas copias puedes sacar con 2.5 pesos? ______________________

18. ¿Cuántas copias puedes sacar con 187.50 pesos? ___________________

- **Lee y contesta el siguiente problema.**

El peso de la mercancía que se compra en el mercado se mide con una báscula. En el puesto de Don Panchito, por cada kilogramo de peso la charola de la báscula se desplaza 4 cm.

19. Si la charola se desplaza 10.5 cm, ¿cuántos kilos pesa la mercancía? __________________________

20. Encuentra la relación entre el peso de la compra y el desplazamiento de la charola. _____________________

ANEXO B. UNIDADES DIDÁCTICAS

<table>
<tr><td>TÓPICO</td><td colspan="5">Información acerca de conocimientos, habilidades y destrezas de los alumnos con los que se va a trabajar.</td></tr>
<tr><td>TEMA</td><td colspan="2">Igualdad en ecuaciones.</td><td>LÍNEA DISCIPLINAR</td><td colspan="2">SEMANA 1. SESIÓN 1 DE 7</td></tr>
<tr><td colspan="3">OBJETIVOS</td><td colspan="3">IDEAS FUERZA</td></tr>
<tr><td colspan="3">• Analizar e introducir el concepto de igualdad en las ecuaciones.</td><td colspan="3">• Perciban la igualdad dentro de una ecuación.</td></tr>
<tr><td colspan="2">HERRAMIENTAS DE EVALUACIÓN</td><td colspan="2">PRODUCTOS</td><td colspan="2">RECURSOS</td></tr>
<tr><td colspan="2">Diario de clase del profesor.
Triangulación.
Escala de rango.
Autoevaluación.</td><td colspan="2">Tablas de registro con las igualdades de la balanza.
Conclusiones.</td><td colspan="2">Balanzas.
Costales de color amarillo, azul, verde, rojo y negro.
Hoja de registro para la actividad de la balanza.
Ecuaciones.</td></tr>
<tr><td colspan="6">CONTENIDOS</td></tr>
<tr><td>Conceptuales</td><td colspan="3">Procedimentales</td><td colspan="2">Actitudinales</td></tr>
<tr><td>Igualdad.</td><td colspan="3">Reconocer e identificar la igualdad en las ecuaciones mediante el uso de la balanza.</td><td colspan="2">Reflexionar acerca de lo que representa la igualdad en una ecuación.
Respetar las opiniones de otros. Trabajar colaborativamente.</td></tr>
<tr><td colspan="6">ACTIVIDADES Y EXPERIENCIAS</td></tr>
<tr><td colspan="6">Inicio (10 minutos)
Observen la balanza y en conjunto con su equipo piensen en algunas preguntas con respecto a ella.
Compartan las preguntas que se hicieron, así como sus respuestas.
Comenten acerca de la utilidad de una balanza, cómo se usa, qué es necesario para que ambos lados estén con la misma inclinación.
Desarrollo (30 minutos)
Escuchen la explicación acerca de lo que realizarán.
Utilicen una balanza para igualar las cantidades que se le pidan.
Registren en una hoja lo que realizaron.
Platiquen acerca del significado del signo igual, ¿para qué fue necesario que se escribiera?, ¿qué representa?
Observen algunas ecuaciones (correctas e incorrectas).
Determinen si las ecuaciones son correctas o incorrectas argumentando sus respuestas.
Comenten acerca de la finalidad que tiene el signo igual en las ecuaciones.
Cierre (10 minutos)
Respondan ¿Qué se necesita para que en una ecuación se satisfaga la igualdad?</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>TÓPICO</td><td colspan="5">Información acerca de conocimientos, habilidades y destrezas de los alumnos con los que se va a trabajar.</td></tr>
<tr><td>TEMA</td><td colspan="2">Introducción a la incógnita</td><td colspan="2">LÍNEA DISCIPLINAR</td><td>SEMANA 1. SESIÓN 2 DE 7</td></tr>
<tr><td colspan="3">OBJETIVOS</td><td colspan="3">IDEAS FUERZA</td></tr>
<tr><td colspan="3">Introducir a los alumnos al concepto de incógnita.
Analizar las concepciones que los alumnos tienen respecto a la incógnita.
Utilizar el Cover-up para representar la incógnita.</td><td colspan="3">Perciban la incógnita dentro de una ecuación y en problemas verbales.</td></tr>
<tr><td colspan="2">HERRAMIENTAS DE EVALUACIÓN</td><td colspan="2">PRODUCTOS</td><td colspan="2">RECURSOS</td></tr>
<tr><td colspan="2">Diario de clase del profesor.
Triangulación.
Escala de rango.
Autoevaluación.</td><td colspan="2">Actividad: encuentra la incógnita.</td><td colspan="2">Ecuaciones con cantidades faltantes a través del cover-up.
Actividad: encuentra la cantidad faltante.</td></tr>
<tr><td colspan="6">CONTENIDOS</td></tr>
<tr><td>Conceptuales</td><td colspan="3">Procedimentales</td><td colspan="2">Actitudinales</td></tr>
<tr><td>Igualdad.
Incógnita.</td><td colspan="3">I1. Reconocer e identificar, en una situación problemática, la presencia de algo desconocido que puede ser determinado considerando las restricciones del problema.
I4. Determinar la cantidad desconocida que aparece en ecuaciones o problemas, realizando operaciones algebraicas, aritméticas o de ambos tipos.</td><td colspan="2">Darse cuenta de que a los valores faltantes en una igualdad se llaman incógnitas.
Respetar las opiniones de otros.
Trabajar colaborativamente.
Resolver de manera autónoma los problemas planteados.</td></tr>
<tr><td colspan="6">ACTIVIDADES Y EXPERIENCIAS</td></tr>
<tr><td colspan="6">Inicio (10 minutos)
Observen algunas ecuaciones que tendrán cubierto uno de los números.
Discutan en equipo acerca de las ecuaciones, sus características, si ya habían visto algo así antes, qué pueden hacer con esa ecuación, otras cualidades que noten en ellas (si aparecen todos los datos).
Platiquen acerca de la manera en la que se podría obtener la igualdad en las ecuaciones.
Desarrollo (30 minutos)
Revisen otros ejemplos y responda ¿Conoces todos los datos? ¿Qué es lo que desconoces?, así como están las ecuaciones ¿Existe igualdad en ellas?
Comenten acerca de cómo podrían determinar la cantidad faltante y cómo podrían señalar que falta una cantidad a parte de cubrirla.
Cierre (10 minutos)
Contesten la actividad: Encuentra el número faltante, en la cual deberán escribir sobre las líneas los números que permitan que las ecuaciones sean verdaderas.
¿Por qué escogiste esos números para completar los espacios vacíos?
¿Se podían anotar otras cantidades en los espacios? ¿Por qué?
¿Resultó difícil la actividad? ¿Por qué?, si fue así, ¿Cuál parte resultó complicada?
Participen en el proceso de institucionalización para que le asignen un nombre a las cantidades faltantes “incógnitas”.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>TÓPICO</td><td colspan="5">Información acerca de conocimientos, habilidades y destrezas de los alumnos con los que se va a trabajar.</td></tr>
<tr><td>TEMA</td><td colspan="2">La variable en una relación funcional</td><td>LÍNEA DISCIPLINAR</td><td colspan="2">SEMANA 1. SESIÓN 1 DE 6</td></tr>
<tr><td colspan="3">OBJETIVOS</td><td colspan="3">IDEAS FUERZA</td></tr>
<tr><td colspan="3">Determinen los valores de la variable dependiente dados los de la independiente y viceversa.</td><td colspan="3">Analicen y determinen los valores de la variable dependiente e independiente.</td></tr>
<tr><td colspan="2">HERRAMIENTAS DE EVALUACIÓN</td><td colspan="2">PRODUCTOS</td><td colspan="2">RECURSOS</td></tr>
<tr><td colspan="2">Diario de clase del profesor.
Triangulación.
Escala de rango.
Autoevaluación.</td><td colspan="2">Tablas con el registro de la información.
Preguntas de cierre contestadas.</td><td colspan="2">Hojas para el registro.
Imagen de un perro.</td></tr>
<tr><td colspan="6">CONTENIDOS</td></tr>
<tr><td>Conceptuales</td><td colspan="3">Procedimentales</td><td colspan="2">Actitudinales</td></tr>
<tr><td>Correspondencia.
Variables.</td><td colspan="3">F1. Reconocer la correspondencia entre variables relacionadas, independientemente de la representación utilizada (tablas, gráficas, problemas verbales, expresiones analíticas).
F2. Determinar los valores de la variable dependiente, dados los valores de la independiente.
F3. Determinar los valores de la variable independiente, dados los valores de la dependiente.</td><td colspan="2">Ser consciente de la correspondencia entre las variables dependiente e independiente.
Respetar las opiniones de otros.
Trabajar colaborativamente.
Resolver de manera autónoma los problemas planteados.</td></tr>
<tr><td colspan="6">ACTIVIDADES Y EXPERIENCIAS</td></tr>
<tr><td colspan="6">Inicio (5 minutos)
Observen la imagen de un perro y cuenten sus patas.
Desarrollo (20 minutos)
Platiquen acerca del número de patas que habrá en total si hay 2, 3, 4, hasta 5 perros.
¿Cuántas patas le corresponden a cada perro?
Propongan alguna manera de organizar la información.
¿A cuántos perros corresponden 36 patas?
Si en total hay 40 perros ¿Cuantas patas habrá en total?
¿A cuántos perros corresponden 72 patas?
Si, quieres saber el número de patas que habrá por 91 perros ¿de qué dependerá el número total de patas?
Cierre (10 minutos)
¿Qué sucede con el número de patas cuando la cantidad de perros aumenta? ¿por qué? ¿Y, si la cantidad de perros disminuye?</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>TÓPICO</th><td colspan="3">Información acerca de conocimientos, habilidades y destrezas de los alumnos con los que se va a trabajar.</td></tr>
<tr><th>TEMA</th><td>Introducción a la incógnita</td><th>LÍNEA DISCIPLINAR</th><th>SEMANA 2. SESIÓN 3 DE 7</th></tr>
</table>

<table>
<tr><th>OBJETIVOS</th><th>IDEAS FUERZA</th></tr>
<tr><td>Introducir a los alumnos al concepto de incógnita.
Analizar las concepciones que los alumnos tienen respecto a la incógnita.
Utilizar un recuadro para representar la incógnita.</td><td>Perciban la incógnita dentro de una ecuación y en problemas verbales.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>HERRAMIENTAS DE EVALUACIÓN</th><th>PRODUCTOS</th><th>RECURSOS</th></tr>
<tr><td>Diario de clase del profesor.
Triangulación.
Escala de rango.
Autoevaluación.</td><td>Actividad: encuentra la incógnita.</td><td>Ecuaciones con cantidades faltantes a través de un recuadro
Actividad: encuentra la incógnita.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="3">CONTENIDOS</th></tr>
<tr><th>Conceptuales</th><th>Procedimentales</th><th>Actitudinales</th></tr>
<tr><td>Igualdad.
Incógnita.</td><td>I1. Reconocer e identificar, en una situación problemática, la presencia de algo desconocido que puede ser determinado considerando las restricciones del problema.
I4. Determinar la cantidad desconocida que aparece en ecuaciones o problemas, realizando operaciones algebraicas, aritméticas o de ambos tipos.</td><td>Darse cuenta de que a los valores faltantes en una igualdad se llaman incógnitas.
Respetar las opiniones de otros.
Trabajar colaborativamente.
Resolver de manera autónoma los problemas planteados.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>ACTIVIDADES Y EXPERIENCIAS</th></tr>
<tr><td>Inicio (10 minutos)
Recuerden lo visto en la clase anterior acerca de las actividades del Cover-up, ¿Para qué se usó?, aparte de eso ¿Qué se podría usar para representar que falta una cantidad?
Desarrollo (30 minutos)
Propongan otras ecuaciones a las que les falte un dato y usen lo que sugirieron para representarlo.
Resuelvan las ecuaciones escritas en el pizarrón propuestas previamente por ellos.
Si lo que proponen para representar la incógnita es distinto a esto $13+\square = 22$, se procede a contestar una actividad que implique resolver ecuaciones similares.
Cierre (10 minutos)
¿Por qué decidieron escribir esos números en los recuadros?
¿Se podían anotar otras cantidades en los recuadros? ¿Por qué?
¿Resultó difícil la actividad? ¿Por qué?, si fue así, ¿Cuál parte resultó complicada?
¿Se te ocurre otra manera de representar el dato que faltaba? ¿Cuál sería esa manera?</td></tr>
</table>

TÓPICO	Información acerca de conocimientos, habilidades y destrezas de los alumnos con los que se va a trabajar.		
TEMA	La variable como número general	**LÍNEA DISCIPLINAR**	**SEMANA 2. SESIÓN 1 DE 5**

OBJETIVOS	IDEAS FUERZA
Reconocer los patrones dentro de las secuencias. Encontrar las reglas en las secuencias.	Identifiquen los patrones en los problemas.

HERRAMIENTAS DE EVALUACIÓN	PRODUCTOS	RECURSOS
Diario de clase del profesor. Triangulación. Escala de rango. Autoevaluación.	Actividad de los patrones de figuras. Preguntas contestadas del cierre.	Tabla para colocar los frijoles. Frijoles.

CONTENIDOS

Conceptuales	Procedimentales	Actitudinales
Patrones. Secuencias.	G1. Reconocer patrones y percibir reglas y métodos, en secuencias y en familias de problemas. G3. Deducir reglas y métodos generales, en secuencias y en familias de problemas.	Percatarse de la existencia de patrones dentro de las secuencias. Resolver de manera autónoma los problemas planteados. Respetar las opiniones de otros. Trabajar colaborativamente.

ACTIVIDADES Y EXPERIENCIAS

Inicio (10 minutos)
Se les pedirá que observen una tabla con frijoles dibujados, en el primero 2 frijoles, en el segundo 3 frijoles, en el tercero cuatro y así sucesivamente.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Se les preguntará ¿Cómo pueden calcular el número de frijoles de cada casilla?
Desarrollo (30 minutos)
Usando el mismo recuadro se les pedirá que coloquen 10 frijoles en el recuadro uno, 11 en el dos, 12 en el tercero, 16 en el séptimo y así deberá hacerlo sucesivamente hasta llegar a la casilla 10.
Contestarán las siguientes preguntas.
¿Cómo puedes calcular el número de frijoles de cada casilla?, ¿Cuántos frijoles habrá en la casilla 11?, ¿Cuántos frijoles habrá en la casilla 13?
Coloquen 7 frijoles en la primera casilla, 8 en la segunda, 11 en la quinta y así hasta completar los 10 recuadros.
¿Cómo puedes calcular el número de frijoles de cada casilla?
¿Cuántos frijoles tendrá la siguiente casilla?, ¿Cuántos frijoles tendrá la casilla número 20?, ¿Cuántos frijoles tendrá la casilla número 35?
Expliquen cómo obtuvieron las respuestas.
Cierre (10 minutos)
Si quieren calcular el número de frijoles de la casilla 100 ¿qué deberían hacer?
¿Existieron complicaciones al calcularlo como propusieron? ¿Cuáles fueron?

TÓPICO	Información acerca de conocimientos, habilidades y destrezas de los alumnos con los que se va a trabajar.		
TEMA	La variable en una relación funcional	**LÍNEA DISCIPLINAR**	**SEMANA 2. SESIÓN 2 DE 6**

OBJETIVOS	**IDEAS FUERZA**
Determinen los valores de la variable dependiente dados los de la independiente y viceversa.	Analicen y determinen los valores de la variable dependiente e independiente.

HERRAMIENTAS DE EVALUACIÓN	**PRODUCTOS**	**RECURSOS**
Diario de clase del profesor. Triangulación. Escala de rango. Autoevaluación.	Tablas con la información completa. Preguntas de cierre contestadas.	Imágenes piezas de pan y costo. Cuadrados.

CONTENIDOS		
Conceptuales	Procedimentales	Actitudinales
Correspondencia. Variables.	F1. Reconocer la correspondencia entre variables relacionadas, independientemente de la representación utilizada (tablas, gráficas, problemas verbales, expresiones analíticas). F2. Determinar los valores de la variable dependiente, dados los valores de la independiente. F3. Determinar los valores de la variable independiente, dados los valores de la dependiente.	Ser consciente de la correspondencia entre las variables dependiente e independiente. Respetar las opiniones de otros. Trabajar colaborativamente. Resolver de manera autónoma los problemas planteados.

ACTIVIDADES Y EXPERIENCIAS
Inicio (10 minutos) Recuerden mediante participaciones lo realizado en la **SEMANA 1. SESIÓN 1 DE 6** acerca de determinar el número de patas y cantidad de perros. **Desarrollo (30 minutos)** Discutan acerca de los siguiente. Una pieza de pan cuesta $3.00, ¿Cuánto costarán 6, 10 y 13 piezas de pan? ¿Qué variables pueden identificar? ¿Cuál es el dato que es constante? ¿De qué dependerá la cantidad de dinero que debemos pagar? Expliquen sus respuestas. **Cierre (10 minutos)** Identifiquen las variables y comenten porqué una de las variables depende de la otra.

<table>
<tr><td>TÓPICO</td><td colspan="5">Información acerca de conocimientos, habilidades y destrezas de los alumnos con los que se va a trabajar.</td></tr>
<tr><td>TEMA</td><td colspan="2">Actividad integradora</td><td>LÍNEA DISCIPLINAR</td><td colspan="2">SEMANA 2. SESIÓN 1 DE 6</td></tr>
<tr><td colspan="3">OBJETIVOS</td><td colspan="3">IDEAS FUERZA</td></tr>
<tr><td colspan="3">Integren los tres usos de la variable para resolver los problemas.</td><td colspan="3">Seleccionen y empleen cada uno de los usos de la variable.</td></tr>
<tr><td colspan="2">HERRAMIENTAS DE EVALUACIÓN</td><td colspan="2">PRODUCTOS</td><td colspan="2">RECURSOS</td></tr>
<tr><td colspan="2">Diario de clase del profesor.
Triangulación.
Autoevaluación.</td><td colspan="2">Tabla con los datos de los azulejos.
Preguntas de cierre.</td><td colspan="2">Cuadrados de color azul y blanco.
Tabla para organizar la información.</td></tr>
<tr><td colspan="6">CONTENIDOS</td></tr>
<tr><td>Conceptuales</td><td colspan="3">Procedimentales</td><td colspan="2">Actitudinales</td></tr>
<tr><td>Correspondencia.
Variables.
Relación.
Patrones.
Secuencias.
Incógnita.</td><td colspan="3">I1, I2, I3, I4.
G1, G3, G5.
F1, F2, F3.</td><td colspan="2">Ser consciente de los 3 diferentes usos de la variable.
Reflexione acerca de la manera en que se muestran los tres usos de la variable.</td></tr>
<tr><td colspan="6">ACTIVIDADES Y EXPERIENCIAS</td></tr>
<tr><td colspan="6">Inicio (10 minutos)
NÚMERO GENERAL. Mostrarles las tres primeras figuras de unas piscinas compuestas por azulejos blancos y azules.
Cuenten el número de azulejos azules y blancos en cada figura.
¿De qué color hay más azulejos?
En cada ejemplo ¿qué sucede con los azulejos?
¿Cuántos azulejos blancos rodearían la siguiente figura? ¿Por qué?
Desarrollo (30 minutos)
INCÓGNITA. Una de las figuras tiene 16 azulejos azules, pero se desconoce la cantidad de azulejos blancos, si en total tiene 36 azulejos ¿Cuántos azulejos blancos tendrá?
Manipulen los azulejos para que elaboren las figuras siguientes.</td></tr>
<tr><td colspan="6">SEMANA 2. SESIÓN 2 DE 6</td></tr>
</table>

Desarrollo (30 minutos)
Recuerden lo realizado la sesión anterior y organicen la información en la siguiente tabla.

Número de piscina	Número de azulejos azules	Número de azulejos blancos	Número total de azulejos

RELACIÓN FUNCIONAL. ¿Qué sucedería si los azulejos blancos aumentan?
Comenten de qué otra forma se podría organizar la información.

Cierre (10 minutos)
Comenten cómo hicieron para resolver las situaciones anteriores.

<table>
<tr><td>TÓPICO</td><td colspan="3">Información acerca de conocimientos, habilidades y destrezas de los alumnos con los que se va a trabajar.</td></tr>
<tr><td>TEMA</td><td>La variable como incógnita</td><td>LÍNEA DISCIPLINAR</td><td>SEMANA 3. SESIÓN 4 DE 7</td></tr>
<tr><td colspan="2">OBJETIVOS</td><td colspan="2">IDEAS FUERZA</td></tr>
<tr><td colspan="2">Utilizar el concepto de incógnita.
Analizar las concepciones que los alumnos tienen respecto a la variable.
Utilizar las variables para representar las cantidades que hagan de los enunciados una expresión verdadera.</td><td colspan="2">Perciban a las variables como incógnitas dentro de una ecuación y en problemas verbales.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>HERRAMIENTAS DE EVALUACIÓN</td><td>PRODUCTOS</td><td>RECURSOS</td></tr>
<tr><td>Diario de clase del profesor.
Triangulación.
Escala de rango.
Autoevaluación.</td><td>Actividad acerca de las cantidades faltantes.
Actividad con las resoluciones de los problemas de las figuras.
Preguntas del cierre contestadas.</td><td>Cuadrado con perímetro de 32 cm.
Rectángulo que tiene de base 20 cm.
Pentágono regular de 15 cm de lado.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="3">CONTENIDOS</td></tr>
<tr><td>Conceptuales</td><td>Procedimentales</td><td>Actitudinales</td></tr>
<tr><td>Incógnita
Variable
Igualdad</td><td>I1. Reconocer e identificar, en una situación problemática, la presencia de algo desconocido que puede ser determinado considerando las restricciones del problema.
I2. Interpretar la variable simbólica que aparece en una ecuación, como la representación de valores específicos.
I3. Sustituir la variable por el valor o valores que hacen de la ecuación un enunciado verdadero.
I4. Determinar la cantidad desconocida que aparece en ecuaciones o problemas, realizando operaciones algebraicas, aritméticas o de ambos tipos.</td><td>Reflexionar acerca de lo que representa la variable cómo incógnita en una ecuación.
Respetar las opiniones de otros.
Trabajar colaborativamente.
Resolver de manera autónoma los problemas planteados.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>ACTIVIDADES Y EXPERIENCIAS</td></tr>
<tr><td>Inicio (10 minutos)
Recuerden la clase anterior participando en un concurso en el que deberán encontrar las incógnitas en las ecuaciones.
Cuando acaben, se les preguntará. ¿Conocías todas las cantidades?
¿Qué se puede hacer para escribir o señalar que nos falta una cantidad?

Desarrollo (30 minutos)
Perímetros
Se les mostrará un cuadrado que tenga de perímetro 32 cm.</td></tr>
</table>

En equipos realícense preguntas respecto lo que se les mostró ¿Qué datos hay? ¿Qué es el perímetro? ¿Cómo se obtiene el perímetro? Escriban en una hoja los datos que conoce y cuáles desconoce. ¿Cómo puedes representar los datos desconocidos? ¿Cuánto mide cada lado? Expliquen cómo supieron la medida de cada lado. Posteriormente se les mostrará un rectángulo que tiene de base 20 cm. Se les harán las siguientes preguntas: ¿Qué pueden observar de esta figura? ¿Qué datos conocen y desconocen? ¿Qué necesitan para saber su perímetro? ¿Cómo puedo representar los datos faltantes? Como última figura se les mostrará un pentágono regular de 15 cm de lado. Se les harán las siguientes preguntas: ¿Cómo pueden determinar su perímetro? ¿Su perímetro puede ser 60? ¿Por qué? ¿Qué datos conocen y desconocen? **Cierre (10 minutos)** ¿Qué usaron para representar las cantidades que desconocían? ¿Por qué se usaron letras? ¿Creen que las letras solo pueden usarse en los perímetros?

TÓPICO	Información acerca de conocimientos, habilidades y destrezas de los alumnos con los que se va a trabajar.		
TEMA	La variable como número general	**LÍNEA DISCIPLINAR**	**SEMANA 3. SESIÓN 2 DE 5**

OBJETIVOS	IDEAS FUERZA
Reconocer los patrones dentro de las secuencias. Encontrar las reglas en las secuencias.	Identifiquen los patrones en los problemas.

HERRAMIENTAS DE EVALUACIÓN	PRODUCTOS	RECURSOS
Diario de clase del profesor. Triangulación. Escala de rango. Autoevaluación.	Actividad de los patrones de figuras. Preguntas contestadas del cierre.	Tabla. Caramelos.

CONTENIDOS		
Conceptuales	Procedimentales	Actitudinales
Patrones. Secuencias.	G1. Reconocer patrones y percibir reglas y métodos, en secuencias y en familias de problemas. G3. Deducir reglas y métodos generales, en secuencias y en familias de problemas.	Percatarse de la existencia de patrones dentro de las secuencias. Resolver de manera autónoma los problemas planteados. Respetar las opiniones de otros. Trabajar colaborativamente.

ACTIVIDADES Y EXPERIENCIAS

Inicio (10 minutos)

Se les pedirá que observen una tabla similar a la de la clase pasada pero esta vez con caramelos dibujados, el primer espacio se encontrará vacío, en el segundo 8, en el tercero 12, el cuarto vacío, el quinto 20 y los demás vacíos.

Lugar	Número de caramelos
1	
2	8
3	12
4	
5	20
6	
7	
8	

9	
10	
11	
12	
13	

Se les preguntará acerca de los datos que proporciona la tabla y cómo pueden ser utilizados para saber el número de caramelos de las demás casillas.

Desarrollo (30 minutos)

Completen las demás casillas.

Expliquen el procedimiento que usaron para completar las demás casillas.

Contesten las siguientes preguntas:

¿Cuántos caramelos estarían en la casilla 14?

¿Cuántos en la casilla 18?

¿Cuántos en la casilla 21?

Cierre (10 minutos)

Escriban una regla para que explique el aumento de caramelos de cada casilla.

¿Será sencillo calcular cuántos caramelos habrá en la casilla 305? ¿Por qué?

¿Consideran que pueden usar la regla que escribieron para encontrar la cantidad de caramelos de la casilla 305?

Calculen la cantidad de caramelos de esa casilla usando su regla.

Comparen sus procedimientos y resultados con los demás.

TÓPICO	Información acerca de conocimientos, habilidades y destrezas de los alumnos con los que se va a trabajar.		
TEMA	La variable en una relación funcional	**LÍNEA DISCIPLINAR**	**SEMANA 3. SESIÓN 4 DE 6**

OBJETIVOS	**IDEAS FUERZA**
Determinen los valores de la variable dependiente dados los de la independiente y viceversa.	Analicen y determinen los valores de la variable dependiente e independiente.

HERRAMIENTAS DE EVALUACIÓN	**PRODUCTOS**	**RECURSOS**
Diario de clase del profesor. Triangulación. Escala de rango. Autoevaluación.	Tablas con la información completa. Preguntas de cierre contestadas.	Tablas de registro.

CONTENIDOS

Conceptuales	Procedimentales	Actitudinales
Correspondencia. Variables.	F1. Reconocer la correspondencia entre variables relacionadas, independientemente de la representación utilizada (tablas, gráficas, problemas verbales, expresiones analíticas). F2. Determinar los valores de la variable dependiente, dados los valores de la independiente. F3. Determinar los valores de la variable independiente, dados los valores de la dependiente.	Ser consciente de la correspondencia entre las variables dependiente e independiente. Respetar las opiniones de otros. Trabajar colaborativamente. Resolver de manera autónoma los problemas planteados.

ACTIVIDADES Y EXPERIENCIAS

Inicio (10 minutos)
Recuerden mediante participaciones cómo organizaron la información en la sesión anterior.
Desarrollo (30 minutos)
En la dulcería se venden bolsas de gomitas. Cada bolsa contiene 120 g de gomitas. Escribe y organiza los datos hasta obtener la cantidad de gramos que contienen en total 13 bolsitas.
¿Qué sucederá con los gramos de gomitas si la cantidad de bolsas aumenta?

Bolsas	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Gramos	120	240	360	480	600	720	840	960	1080	1200	1320	1410	1560

Representen los datos de otra manera.
Comenten de qué depende el total de gramos de gomitas y por qué depende una variable de la otra.
Cierre (10 minutos)
Retomando el ejemplo anterior. ¿Se pueden saber los gramos que tendrán en total 30 bolsas? ¿Por qué? ¿Cómo?
Comenten si existe relación entre la cantidad de bolsas y gramos totales que se depositan en ellas. Si es así ¿Cuál es esa relación?

TÓPICO	Información acerca de conocimientos, habilidades y destrezas de los alumnos con los que se va a trabajar.		
TEMA	Actividad integradora	**LÍNEA DISCIPLINAR**	**SEMANA 3. SESIÓN 3 DE 6**

OBJETIVOS	IDEAS FUERZA
Integren los tres usos de la variable para resolver los problemas.	Seleccionen y empleen cada uno de los usos de la variable.

HERRAMIENTAS DE EVALUACIÓN	PRODUCTOS	RECURSOS
Diario de clase del profesor. Triangulación. Autoevaluación.	Tabla con los datos de los dólares y pesos. Preguntas.	Tabla con los datos de los dólares.

CONTENIDOS		
Conceptuales	Procedimentales	Actitudinales
Correspondencia. Variables. Relación. Patrones. Secuencias. Incógnita.	I1, I2, I4. G1, G3, G5. F1, F2, F3.	Ser consciente de los 3 diferentes usos de la variable. Reflexión acerca de la manera en que se muestran los tres usos de la variable.

ACTIVIDADES Y EXPERIENCIAS

Inicio (10 minutos)

VARIABLE EN RELACIÓN FUNCIONAL

Analicen la siguiente tabla.

Dólares	Pesos
5	98
9	176.4
17	333.2
36	705.6
58	1136.8
100	1960

¿Qué información proporciona la tabla?
¿Qué representa cada columna?
¿Qué se está relacionando en la tabla?

Desarrollo (30 minutos)
¿Qué operación debemos hacer para saber cuántos pesos corresponden a cinco dólares?
¿Cuántos pesos equivalen a un dólar?
¿Qué representa el 5?
¿Qué tenemos que hacer para saber cuántos pesos equivales a 9 dólares?
¿Qué tenemos que hacer para saber cuántos pesos equivales a 40 dólares?
Analicen la expresión 19.6 x 36
VARIABLE COMO NÚMERO GENERAL
Según la información que han obtenido de la tabla ¿Qué representa el 19.6? ¿Y 36?
Reflexionen:
Para determinar la cantidad de pesos que corresponden a cierto número de dólares se debe multiplicar la cantidad de dólares por el valor de esta tabla. ¿Qué valores podremos poner en esta columna? (señalar la de los dólares)
Un valor cualquiera. ¿Qué símbolo se puede utilizar para representar en general ese valor? ¿Cuál letra podría ser?
¿Qué representa esa letra? En este caso ¿Qué representa?
VARIABLE COMO INCÓGNITA
¿Qué operación se debe hacer para saber la cantidad de pesos que corresponden a un número (h) de dólares?
h x19.6=, y como no sabemos el número que resultará ¿Cómo se puede expresar? h x19.6= z.
¿Qué valores puede tener h? ¿Qué valores puede tener z?
¿De qué depende el valor de la z?
En la siguiente expresión h x 19.6= 1960 ¿Cuál es el valor de h?¿De qué depende el valor de h?

En la expresión 75 x 19.6= z ¿Cuántos valores puede tener z? ¿z puede tener cualquier valor?
¿De qué depende su valor? Si la expresión fuera así 75 x 19.6= n ¿Cambia lo que queremos decir? O en esta expresión *z* x 19.6= *n* ¿El valor de n sería el mismo que el de z? ¿Cuál es el valor de z o n?
Cierre (10 minutos)
Reflexionen acerca de la manera en que emplearon las variables para cada caso.

<table>
<tr><td>TÓPICO</td><td colspan="4">Información acerca de conocimientos, habilidades y destrezas de los alumnos con los que se va a trabajar.</td></tr>
<tr><td>TEMA</td><td colspan="2">La variable como incógnita</td><td>LÍNEA DISCIPLINAR</td><td>SEMANA 4. SESIÓN 5 DE 7</td></tr>
<tr><td colspan="3">OBJETIVOS</td><td colspan="2">IDEAS FUERZA</td></tr>
<tr><td colspan="3">Utilizar el concepto de incógnita.
Analizar las concepciones que los alumnos tienen respecto a la variable.
Utilizar las variables para representar las cantidades que hagan de los enunciados una expresión verdadera.</td><td colspan="2">Perciban a las variables como incógnitas dentro de una ecuación y en problemas verbales.</td></tr>
</table>

HERRAMIENTAS DE EVALUACIÓN	PRODUCTOS	RECURSOS
Diario de clase del profesor. Triangulación. Escala de rango. Autoevaluación.	Actividad acerca de las cantidades faltantes. Actividad con las resoluciones de los problemas de las figuras. Preguntas del cierre contestadas.	Cuadrado que mida 8 cm de lado. Rectángulo que mide 13 cm de lado.

<table>
<tr><td colspan="3">CONTENIDOS</td></tr>
<tr><td>Conceptuales</td><td>Procedimentales</td><td>Actitudinales</td></tr>
<tr><td>Incógnita
Variable
Igualdad</td><td>I1. Reconocer e identificar, en una situación problemática, la presencia de algo desconocido que puede ser determinado considerando las restricciones del problema.
I2. Interpretar la variable simbólica que aparece en una ecuación, como la representación de valores específicos.
I3. Sustituir la variable por el valor o valores que hacen de la ecuación un enunciado verdadero.
I4. Determinar la cantidad desconocida que aparece en ecuaciones o problemas, realizando operaciones algebraicas, aritméticas o de ambos tipos.</td><td>Reflexionar acerca de lo que representa la variable cómo incógnita en una ecuación.
Respetar las opiniones de otros.
Trabajar colaborativamente.
Resolver de manera autónoma los problemas planteados.</td></tr>
</table>

ACTIVIDADES Y EXPERIENCIAS

Inicio (10 minutos)
Observen el cuadrado y rectángulo de la clase anterior y en equipos discutan acerca de ¿Qué es el área de una figura? ¿Cómo se puede obtener el área de esas figuras?

Desarrollo (30 minutos)
Áreas

Se les mostrará un cuadrado que mida 8 cm de lado.
En equipos realícense preguntas con respecto a lo que se les mostró ¿Qué datos hay?

Escriban en una hoja los datos que conoce y cuáles desconoce.
¿Cómo puedes representar los datos desconocidos?
¿Cuál es el área de esa figura?
Expliquen cómo llegaron al resultado.

Posteriormente se les mostrará el rectángulo que mide 13 cm de lado.
Contesten:
¿Qué datos conocen y desconocen?
¿Qué necesitan para saber su área?
¿Cómo pueden representar los datos faltantes?

Cierre (10 minutos)
¿Qué usaron para representar las cantidades que desconocían? ¿Se usaron letras? ¿Por qué? ¿Qué representaban las letras?
¿Creen que las letras solo pueden usarse en los perímetros y áreas?

TÓPICO	Información acerca de conocimientos, habilidades y destrezas de los alumnos con los que se va a trabajar.		
TEMA	La variable como número general	**LÍNEA DISCIPLINAR**	**SEMANA 4. SESIÓN 3 DE 5**

OBJETIVOS	**IDEAS FUERZA**
Reconocer los patrones dentro de las secuencias. Encontrar las reglas en las secuencias.	Identifiquen los patrones en los problemas.

HERRAMIENTAS DE EVALUACIÓN	**PRODUCTOS**	**RECURSOS**
Diario de clase del profesor. Triangulación. Escala de rango. Autoevaluación.	Actividad de los patrones de figuras. Preguntas contestadas del cierre.	Tablero. Rana. Obstáculos. Cuadrados de 7 cm de lado.

CONTENIDOS

Conceptuales	Procedimentales	Actitudinales
Patrones. Secuencias.	G1. Reconocer patrones y percibir reglas y métodos, en secuencias y en familias de problemas. G3. Deducir reglas y métodos generales, en secuencias y en familias de problemas.	Percatarse de la existencia de patrones dentro de las secuencias. Resolver de manera autónoma los problemas planteados. Respetar las opiniones de otros. Trabajar colaborativamente.

ACTIVIDADES Y EXPERIENCIAS

Inicio (10 minutos)
Se les mostrará un tablero donde se colocarán algunos obstáculos que tendrá que brincar una rana.
¿De cuánto en cuánto tiene que brincar la rana para que no caiga en las trampas? ¿Cómo hicieron para no caer en las trampas?

Desarrollo (30 minutos)
Se les mostrará un patrón de figuras.
En la primer figura 5 cuadrados, en la segunda 10, en la tercera 15 y así sucesivamente hasta tener 9 figuras.
Se les preguntará:
¿Cuántos cuadrados tendrá la figura que sigue?
¿Cómo lo supieron? ¿Cómo puedes calcular el número de cuadrados de cada casilla?
Si siguen haciendo figuras, ¿Cuántos cuadrados tendrá la figura 220?, ¿Cuál sería el camino más fácil para resolverlo? ¿Crees que exista alguna regla para explicar la secuencia? ¿Cuál sería?

Cierre (10 minutos)
Expliquen su regla a los demás y verifiquen con otras figuras.

TÓPICO	Información acerca de conocimientos, habilidades y destrezas de los alumnos con los que se va a trabajar.		
TEMA	La variable en una relación funcional	**LÍNEA DISCIPLINAR**	**SEMANA 4. SESIÓN 3 DE 6**

OBJETIVOS	**IDEAS FUERZA**
Determinen los valores de la variable dependiente dados los de la independiente y viceversa.	Analicen y determinen los valores de la variable dependiente e independiente.

HERRAMIENTAS DE EVALUACIÓN	**PRODUCTOS**	**RECURSOS**
Diario de clase del profesor. Triangulación. Escala de rango. Autoevaluación.	Tablas con el registro de la información. Preguntas de cierre contestadas.	Hojas para tablas de registro.

CONTENIDOS

Conceptuales	Procedimentales	Actitudinales
Correspondencia. Variables.	F1. Reconocer la correspondencia entre variables relacionadas, independientemente de la representación utilizada (tablas, gráficas, problemas verbales, expresiones analíticas). F2. Determinar los valores de la variable dependiente, dados los valores de la independiente. F3. Determinar los valores de la variable independiente, dados los valores de la dependiente.	Ser consciente de la correspondencia entre las variables dependiente e independiente. Respetar las opiniones de otros. Trabajar colaborativamente. Resolver de manera autónoma los problemas planteados.

ACTIVIDADES Y EXPERIENCIAS

Inicio (10 minutos)

Comenten sobre si hacen ejercicio y qué clase de actividad física les gusta hacer.

Lean y analicen la siguiente información.

Laura corre 30 minutos al día. ¿Cuánto tiempo habrá dedicado a correr en dos días? Si quiere registrar el total de tiempo que habrá dedicado a correr hasta 10 días. ¿De qué manera puede registrar esa información?

Desarrollo (30 minutos)

Registra la información.

Minutos	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300
Días	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Contesten

¿De qué depende la cantidad de tiempo que ha dedicado a correr?

¿Qué sucede con los minutos cuando los días aumentan?

¿Qué sucede con los días cuando se disminuye el tiempo?

¿Cómo se puede determinar la cantidad de minutos? ¿Y la cantidad de días?

¿De qué otra manera se pueden representar los datos de la tabla? Si sigue corriendo 30 minutos al día, después de 17 días ¿habrá corrido más o menos que el quinto día? ¿Se puede determinar cuántos minutos habrá corrido en 25 días? ¿Cómo? **Cierre (10 minutos)** ¿Los datos del registro están relacionados entre sí? Expliquen por qué.

TÓPICO	Información acerca de conocimientos, habilidades y destrezas de los alumnos con los que se va a trabajar.		
TEMA	Actividad integradora	**LÍNEA DISCIPLINAR**	**SEMANA 4. SESIÓN 4 DE 6**

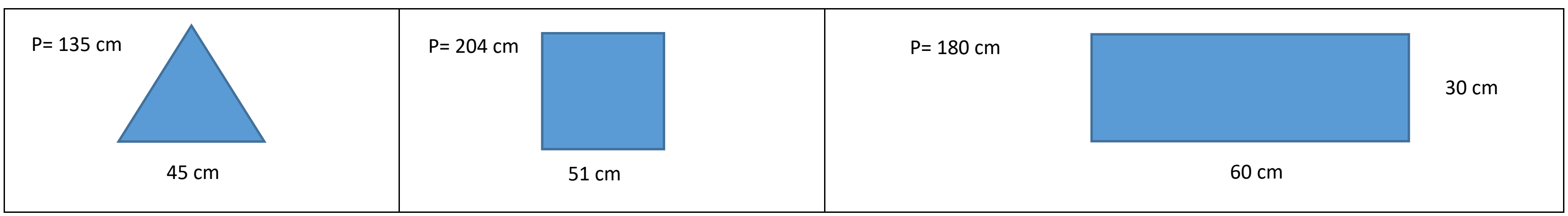
OBJETIVOS	IDEAS FUERZA
Integren los tres usos de la variable para resolver los problemas.	Seleccionen y empleen cada uno de los usos de la variable.

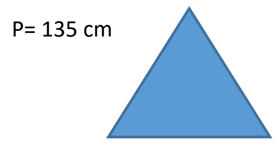
HERRAMIENTAS DE EVALUACIÓN	PRODUCTOS	RECURSOS
Diario de clase del profesor. Triangulación. Autoevaluación.	Tabla con los datos de los azulejos. Preguntas de cierre.	Figuras.

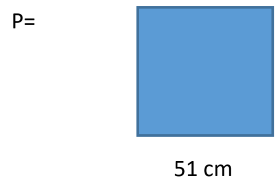
CONTENIDOS		
Conceptuales	Procedimentales	Actitudinales
Correspondencia. Variables. Relación. Patrones. Secuencias. Incógnita.	I1, I2, I3, I4. G1, G3, G5. F1, F2, F3.	Ser consciente de los 3 diferentes usos de la variable. Reflexione acerca de la manera en que se muestran los tres usos de la variable.

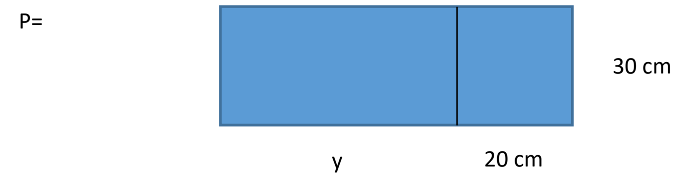
ACTIVIDADES Y EXPERIENCIAS

Inicio (10 minutos) VARIABLE COMO INCÓGNITA
Mostrarles tres figuras geométricas en las que estén presentes algunas incógnitas o falten datos.









Analicen las figuras y comenten acerca de los datos que aparecen.

Desarrollo (30 minutos)
Se les preguntará ¿Qué datos aparecen con el triángulo?
En ese caso ¿Qué representa la letra P? ¿Cuánto vale P?
¿Qué datos fueron necesarios para obtener P?
¿Cómo se pueden representar los valores de los lados si se desconocen?
¿Cómo se puede obtener el perímetro?
¿Qué expresión se puede escribir para representar la manera de obtener el perímetro?

¿Cuáles datos se conocen en la segunda figura?
¿Qué representa P? ¿Cuánto vale P?
¿Cómo se pueden representar los datos faltantes?
La mitad del perímetro del cuadrado es 102 cm.
Escribe una ecuación que ayude a obtener los datos faltantes.

¿Cuáles datos se conocen y desconocen en la tercera figura?
¿Qué representa P? ¿Cuánto vale P?
¿Qué representa *y*? ¿*y* puede ser cualquier número?

VARIABLE EN RELACIÓN FUNCIONAL
Completa la siguiente tabla para determinar el perímetro que tendrían otros cuadrados más grandes.

Número de figura	Perímetro del cuadrado
1	204
2	408
4	816
6	1224

8	1632

¿De qué otra manera puedes representar la información de la tabla?

VARIABLE COMO NÚMERO GENERAL
¿Cuál será el perímetro de la figura 17?
Si el perímetro es de 4488 cm ¿qué número de figura será?
¿Cuál regla se podría escribir para explicar la información de la tabla anterior?

Cierre (10 minutos)

Reflexiona y comenten acerca del uso de las variables para cada caso, ¿se usaron de la misma forma? ¿Qué cambió?

<table>
<tr><th>TÓPICO</th><td colspan="3">Información acerca de conocimientos, habilidades y destrezas de los alumnos con los que se va a trabajar.</td></tr>
<tr><th>TEMA</th><td>La variable como incógnita</td><th>LÍNEA DISCIPLINAR</th><th>SEMANA 5. SESIÓN 6 DE 7</th></tr>
<tr><th colspan="2">OBJETIVOS</th><th colspan="2">IDEAS FUERZA</th></tr>
<tr><td colspan="2">Utilizar el concepto de incógnita.
Analizar las concepciones que los alumnos tienen respecto a la variable.
Utilizar las variables para representar las cantidades que hagan de los enunciados una expresión verdadera.</td><td colspan="2">Perciban a las variables como incógnitas dentro de una ecuación y en problemas verbales.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>HERRAMIENTAS DE EVALUACIÓN</th><th>PRODUCTOS</th><th>RECURSOS</th></tr>
<tr><td>Diario de clase del profesor.
Triangulación.
Escala de rango.
Autoevaluación.</td><td>Actividad con problemas verbales.
Preguntas del cierre contestadas.</td><td>Problemas verbales.</td></tr>
<tr><th colspan="3">CONTENIDOS</th></tr>
<tr><td>Conceptuales</td><td>Procedimentales</td><td>Actitudinales</td></tr>
<tr><td>Incógnita
Variable
Igualdad</td><td>I1. Reconocer e identificar, en una situación problemática, la presencia de algo desconocido que puede ser determinado considerando las restricciones del problema.
I2. Interpretar la variable simbólica que aparece en una ecuación, como la representación de valores específicos.
I3. Sustituir la variable por el valor o valores que hacen de la ecuación un enunciado verdadero.
I4. Determinar la cantidad desconocida que aparece en ecuaciones o problemas, realizando operaciones algebraicas, aritméticas o de ambos tipos.</td><td>Reflexionar acerca de lo que representa la variable cómo incógnita en una ecuación.
Respetar las opiniones de otros.
Trabajar colaborativamente.
Resolver de manera autónoma los problemas planteados.</td></tr>
<tr><th colspan="3">ACTIVIDADES Y EXPERIENCIAS</th></tr>
<tr><td colspan="3">Inicio (10 minutos)
Participen en una tormenta de ideas recordando la clase anterior.
Platiquen acera de lo que creen que es una incógnita.

Desarrollo (30 minutos)
Lean el siguiente problema y lo resuelva.

Susana perdió algunas canicas. En total tenía 37 y ahora solo tiene 14. ¿cuántas canicas perdió?</td></tr>
</table>

¿Qué datos conocen y desconocen?
¿Cuál es la incógnita del problema?
¿Cómo puedes representar la incógnita?
¿Qué necesitas hacer para saber la respuesta?

Jaime y Lucía vendieron cajas de galletas a $35.00 cada una. Su ganancia total fue de $875.00. Si Lucía juntó la cantidad de $325.00. ¿Cuánto dinero juntó Jaime?
¿Qué datos conocen y desconocen?
¿Cuál es la incógnita del problema?
¿Cómo puedes representar la incógnita?
¿Qué necesitas hacer para saber la respuesta?

Cierre (10 minutos)
¿Qué usaron para representar las cantidades que desconocían?
¿Tuviste dificultades al resolver los problemas? ¿Cuáles fueron esas dificultades?

TÓPICO	Información acerca de conocimientos, habilidades y destrezas de los alumnos con los que se va a trabajar.		
TEMA	La variable como número general	**LÍNEA DISCIPLINAR**	**SEMANA 5. SESIÓN 4 DE 5**

OBJETIVOS	**IDEAS FUERZA**
Reconocer los patrones dentro de las secuencias. Encontrar las reglas en las secuencias.	Identifiquen los patrones en los problemas.

HERRAMIENTAS DE EVALUACIÓN	**PRODUCTOS**	**RECURSOS**
Diario de clase del profesor. Triangulación. Escala de rango. Autoevaluación.	Problema del ahorro y la tirolesa. Preguntas contestadas del cierre.	Tablas con los datos de los problemas.

CONTENIDOS		
Conceptuales	Procedimentales	Actitudinales
Patrones. Variables. Secuencias.	G1. Reconocer patrones y percibir reglas y métodos, en secuencias y en familias de problemas. G3. Deducir reglas y métodos generales, en secuencias y en familias de problemas. G5. Simbolizar enunciados, reglas o métodos generales.	Percatarse de la existencia de patrones dentro de las secuencias. Resolver de manera autónoma los problemas planteados. Respetar las opiniones de otros. Trabajar colaborativamente.

ACTIVIDADES Y EXPERIENCIAS

Inicio (10 minutos)

Recuerden lo trabajado en las sesiones anteriores para que externen lo que han aprendido y las dificultades que se les han presentado.

Desarrollo (30 minutos)

El ahorro

Comenten sobre si tienen la costumbre de ahorrar, cuánto y cómo ahorran.

Analicen lo siguiente:

Si cada día ahorraras 6 pesos, ¿cuánto dinero tendrías en 3 días?

Completa la tabla con esa información.

Días	1	2	3	4	5	6	7	8	19	30	87
Dinero	6	12	18	24	30	36	42	48			

¿Cómo se puede calcular la cantidad de dinero?

¿Podrían saber cuánto dinero juntarían después de que pasen 200 días?

Escriban una regla en para saber la cantidad de dinero de cualquier día.

Intercambien su regla con los demás equipos para que ellos la verifiquen.

La tirolesa
Analicen los datos para que completes la tabla.
En el parque ecológico hay una tirolesa. Puedes subirte pagando $40.00.

Personas	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	13	55	n
Precio	40	80	120	160	200	240	280	320	360	400	440			

Calcula ¿cuánto dinero ganarán cuando se suban 18 personas?
¿Creen que podrán calcular el dinero ganado de un mayor número de personas? Por ejemplo, cuando se suban 608. ¿Por qué?
¿Y, cuando se suban 1345?
¿Ustedes creen que exista alguna manera de hacer esos cálculos más rápido?
¿Cuál sería esa forma?
¿Se puede saber el dinero que se obtuvo de cualquier número de personas?
¿Cómo se puede representar?
¿Cómo se puede representar ese “cualquier número de personas”?
¿Crees que para representar cualquier número de personas se pueden usar las variables? ¿Por qué? ¿Cuál variable se podría usar?

Cierre (10 minutos)
Tomando el ejemplo de la tirolesa ¿Cuál de las siguientes reglas se podría usar para saber la cantidad que ganarán si se sube cualquier número de personas? Explica porque la elegiste y si tiene similitud con lo que habías propuesto antes.

a) n x 40
b) n / 40
c) n + 40
d) n - 40

Platicar con los alumnos acerca de la posibilidad de representar de otra manera el símbolo que representa la multiplicación.
Comentarles que para poder representar una multiplicación también es posible representarla de la siguiente manera: $n \bullet 40$.

<table>
<tr><th>TÓPICO</th><td colspan="5">Información acerca de conocimientos, habilidades y destrezas de los alumnos con los que se va a trabajar.</td></tr>
<tr><th>TEMA</th><td colspan="3">La variable en una relación funcional</td><th>LÍNEA DISCIPLINAR</th><th>SEMANA 5. SESIÓN 5 DE 6</th></tr>
<tr><th colspan="4">OBJETIVOS</th><th colspan="2">IDEAS FUERZA</th></tr>
<tr><td colspan="4">Determinen los valores de la variable dependiente dados los de la independiente y viceversa.</td><td colspan="2">Analicen y determinen los valores de la variable dependiente e independiente.</td></tr>
<tr><th colspan="3">HERRAMIENTAS DE EVALUACIÓN</th><th colspan="2">PRODUCTOS</th><th>RECURSOS</th></tr>
<tr><td colspan="3">Diario de clase del profesor.
Triangulación. Escala de rango. Autoevaluación.</td><td colspan="2">Gráfica y preguntas de la actividad el campamento. Preguntas contestadas del cierre.</td><td>Problema del campamento.</td></tr>
<tr><th colspan="6">CONTENIDOS</th></tr>
<tr><td colspan="2">Conceptuales</td><td colspan="3">Procedimentales</td><td>Actitudinales</td></tr>
<tr><td colspan="2">Correspondencia.
Variables.</td><td colspan="3">F1. Reconocer la correspondencia entre variables relacionadas, independientemente de la representación utilizada (tablas, gráficas, problemas verbales, expresiones analíticas).
F2. Determinar los valores de la variable dependiente, dados los valores de la independiente.
F3. Determinar los valores de la variable independiente, dados los valores de la dependiente.
F6 Simbolizar una relación funcional, con base en el análisis de los datos de un problema.</td><td>Ser consciente de la correspondencia entre las variables dependiente e independiente.
Respetar las opiniones de otros.
Trabajar colaborativamente.
Resolver de manera autónoma los problemas planteados.</td></tr>
<tr><th colspan="6">ACTIVIDADES Y EXPERIENCIAS</th></tr>
<tr><td colspan="6">Inicio (10 minutos)
Recuerden mediante participaciones las formas en que se puede organizar la información.
Desarrollo (30 minutos)
El campamento
Para instalar una casa de campaña rectangular se necesitan 4 estacas.
¿La cantidad de estacas aumentará si también lo hace el número de casas de campaña?
Represéntalo en una tabla hasta llegar a 24 estacas.
¿Puedes representarlo en una gráfica?
¿Cómo se podría expresar la relación entre el número de casas y el número de estacas?
Cierre (10 minutos)
¿Qué sucedió cuando una de las cantidades relacionadas aumentaba?
¿De qué dependió el número de estacas a utilizar?
¿Cuál es la variable dependiente? ¿por qué? ¿Cómo lo determinaron?
¿Cuál es la variable independiente? ¿por qué? ¿Cómo lo determinaron?</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>TÓPICO</th><td colspan="4">Información acerca de conocimientos, habilidades y destrezas de los alumnos con los que se va a trabajar.</td></tr>
<tr><th>TEMA</th><td colspan="2">Actividad integradora</td><th>LÍNEA DISCIPLINAR</th><th>SEMANA 5. SESIÓN 5 DE 6</th></tr>
<tr><th colspan="3">OBJETIVOS</th><th colspan="2">IDEAS FUERZA</th></tr>
<tr><td colspan="3">Integren los tres usos de la variable para resolver los problemas.</td><td colspan="2">Seleccionen y empleen cada uno de los usos de la variable.</td></tr>
</table>

HERRAMIENTAS DE EVALUACIÓN	PRODUCTOS	RECURSOS
Diario de clase del profesor. Triangulación. Autoevaluación.	Problema del acuario contestado. Tabla con los datos del acuario.	Actividad del acuario.

<table>
<tr><th colspan="3">CONTENIDOS</th></tr>
<tr><th>Conceptuales</th><th>Procedimentales</th><th>Actitudinales</th></tr>
<tr><td>Correspondencia.
Variables.
Relación.
Patrones.
Secuencias.
Incógnita.</td><td>I1, I2, I3, I4.
G, G3, G5.
F1, F2, F3.</td><td>Ser consciente de los 3 diferentes usos de la variable.
Reflexión acerca de la manera en que se muestran los tres usos de la variable.</td></tr>
</table>

ACTIVIDADES Y EXPERIENCIAS

Inicio (10 minutos)

Comenten acerca de los acuarios, si han ido a alguno, qué observaron y cuánto costó.

Desarrollo (30 minutos)

Visitando el acuario.

VARIABLE COMO INCÓGNITA

Al acuario asistirán 50 alumnos, por el total de boletos deben pagar $9750.00. ¿Cuánto cuesta cada boleto?

¿Qué datos se saben? ¿Cuáles se desconocen?

¿Cómo se puede representar la incógnita?

VARIABLE EN RELACIÓN FUNCIONAL

Organiza la información en una tabla para que todos conozcan cuál será el costo por 1, 5, 10, 15, 20, así hasta llegar a 50 estudiantes.

¿Qué relación existe entre los boletos y el precio?

VARIABLE COMO NÚMERO GENERAL

¿Cómo harías para calcular el total a pagar por 130 estudiantes?

Analiza nuevamente la tabla. ¿Cómo podrías determinar el total de cualquier número de estudiantes?

Cierre (10 minutos)

¿Qué finalidad tuvieron las variables en el problema anterior?

TÓPICO	Información acerca de conocimientos, habilidades y destrezas de los alumnos con los que se va a trabajar.		
TEMA	La variable como incógnita	**LÍNEA DISCIPLINAR**	**SEMANA 6. SESIÓN 7 DE 7**

OBJETIVOS	IDEAS FUERZA
Utilizar las variables para representar las cantidades que hagan de los enunciados una expresión verdadera.	Perciban a las variables como incógnitas dentro de una ecuación y en problemas verbales.

HERRAMIENTAS DE EVALUACIÓN	PRODUCTOS	RECURSOS
Diario de clase del profesor. Triangulación. Escala de rango. Autoevaluación.	Preguntas del cierre contestadas.	Cartulina con expresiones que tengan una incógnita.

CONTENIDOS		
Conceptuales	Procedimentales	Actitudinales
Incógnita Variable Igualdad	I1. Reconocer e identificar, en una situación problemática, la presencia de algo desconocido que puede ser determinado considerando las restricciones del problema. I2. Interpretar la variable simbólica que aparece en una ecuación, como la representación de valores específicos. I3. Sustituir la variable por el valor o valores que hacen de la ecuación un enunciado verdadero. I4. Determinar la cantidad desconocida que aparece en ecuaciones o problemas, realizando operaciones algebraicas, aritméticas o de ambos tipos.	Darse cuenta de que a los valores faltantes en una igualdad se llaman incógnitas. Reflexionar acerca de lo que representa la variable cómo incógnita en una ecuación. Respetar las opiniones de otros. Trabajar colaborativamente. Resolver de manera autónoma los problemas planteados.

ACTIVIDADES Y EXPERIENCIAS

Inicio (10 minutos)

Se les mostrará lo siguiente para que lo resuelvan.

a) 96 + 10 = ____
b) 28 +____= 39
c) ____ + 54= 100
d) 33 – ____ = 12
e) ___ - 75 = 37

¿Conocen todos los datos? ¿La incógnita es la misma para cada situación? ¿Cuál es el valor de la incógnita en cada caso? ¿De qué otra manera se podría representar la incógnita?

Desarrollo (30 minutos)

Se les mostrará lo siguiente:
23 + y = 78
x + 45= 93
75+ p = 104
99 – z = 84
U – 10= 51
¿Qué me pueden decir de las expresiones?
¿Qué representan las letras?
¿Podríamos cambiar las letras? Si hacemos eso, ¿cambiará su valor? ¿Por qué?
Escriban una ecuación que tenga una incógnita y la presenten al grupo.
Resuelvan las ecuaciones propuestas y comprueben si existe igualdad en cada una de ellas.

Cierre (10 minutos)
¿Por qué se usaron letras? ¿Se puede usar cualquier letra? ¿Por qué?

<table>
<tr><td>TÓPICO</td><td colspan="3">Información acerca de conocimientos, habilidades y destrezas de los alumnos con los que se va a trabajar.</td></tr>
<tr><td>TEMA</td><td>La variable como número general</td><td>LÍNEA DISCIPLINAR</td><td>SEMANA 6. SESIÓN 5 DE 5</td></tr>
<tr><td colspan="2">OBJETIVOS</td><td colspan="2">IDEAS FUERZA</td></tr>
<tr><td colspan="2">Reconocer los patrones dentro de las secuencias.
Encontrar las reglas en las secuencias.</td><td colspan="2">Identifiquen los patrones en los problemas.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>HERRAMIENTAS DE EVALUACIÓN</td><td>PRODUCTOS</td><td>RECURSOS</td></tr>
<tr><td>Diario de clase del profesor.
Triangulación.
Escala de rango.
Autoevaluación.</td><td>Actividad de los patrones de figuras.
Preguntas contestadas del cierre.</td><td>Cerillos.
Tabla de registro.</td></tr>
<tr><td colspan="3">CONTENIDOS</td></tr>
<tr><td>Conceptuales</td><td>Procedimentales</td><td>Actitudinales</td></tr>
<tr><td>Patrones.
Secuencias.</td><td>G1. Reconocer patrones y percibir reglas y métodos, en secuencias y en familias de problemas.
G3. Deducir reglas y métodos generales, en secuencias y en familias de problemas.
G5. Simbolizar enunciados, reglas o métodos generales.</td><td>Percatarse de la existencia de patrones dentro de las secuencias.
Resolver de manera autónoma los problemas planteados.
Respetar las opiniones de otros.
Trabajar colaborativamente.</td></tr>
<tr><td colspan="3">ACTIVIDADES Y EXPERIENCIAS</td></tr>
</table>

Inicio (10 minutos)
Se les pedirá que formen con los cerillos un triángulo y que lo coloquen en la casilla correspondiente a la figura uno.
Formen la siguiente figura agregando dos cerillos más y así hasta formar 5 figuras.
Comenten y comparen con los demás equipos la cantidad de cerillos tiene cada figura.
Desarrollo (30 minutos)
Se les mostrará una tabla con los cerillos dibujados para que participen completando las casillas.

Figura	Número de cerillos	Procedimiento
1	3	
2	5	
3	7	
4	9	
5	11	
6		

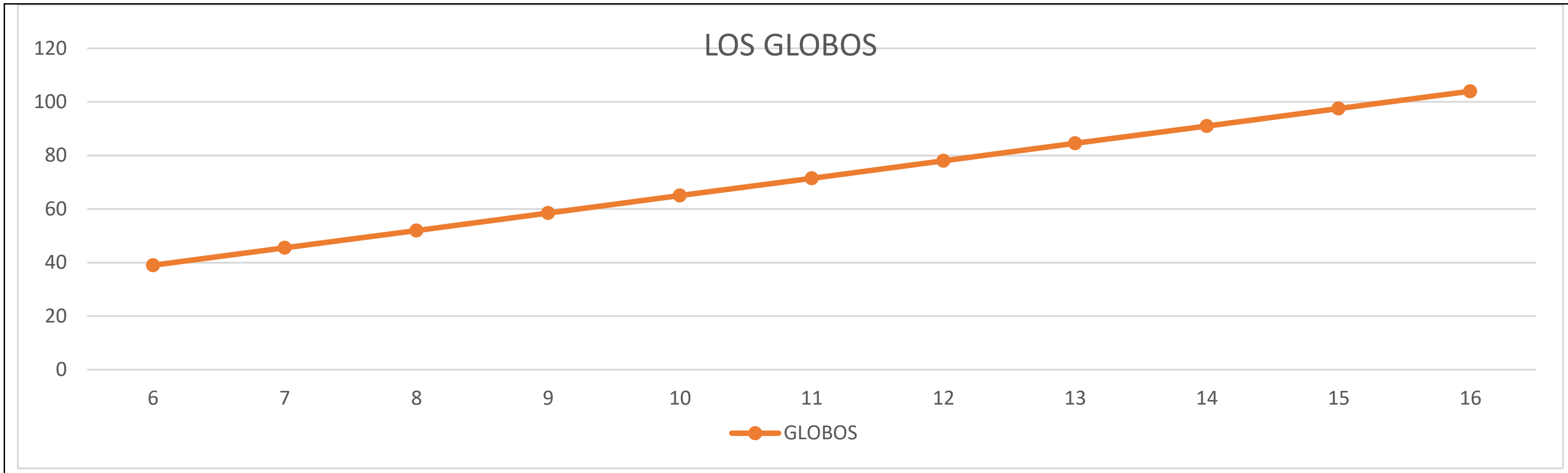
8		
19		
53		
150		
n		

Se les entregará una hoja de actividades para que contesten:
¿Cómo puedes calcular el número de cerillos que tiene cada figura?
¿Qué significa la n?
Analicen las siguientes opciones:

a) n+2
b) (nx2) +1
c) n -2
d) (nx2) - 1

¿Podrías usar alguna de ellas para saber la cantidad de cerillos de las demás figuras?
¿Cuál elegirías? Explica por qué
Cierre (10 minutos)
Expliquen la regla que utilizaron y la comparen con la opción que eligieron.

<table>
<tr><td>TÓPICO</td><td colspan="6">Información acerca de conocimientos, habilidades y destrezas de los alumnos con los que se va a trabajar.</td></tr>
<tr><td>TEMA</td><td colspan="3">La variable en una relación funcional</td><td colspan="2">LÍNEA DISCIPLINAR</td><td>SEMANA 6. SESIÓN 6 DE 6</td></tr>
<tr><td colspan="4">OBJETIVOS</td><td colspan="3">IDEAS FUERZA</td></tr>
<tr><td colspan="4">Determinen los valores de la variable dependiente dados los de la independiente y viceversa.</td><td colspan="3">Analicen y determinen los valores de la variable dependiente e independiente.</td></tr>
<tr><td colspan="3">HERRAMIENTAS DE EVALUACIÓN</td><td colspan="2">PRODUCTOS</td><td colspan="2">RECURSOS</td></tr>
<tr><td colspan="3">Diario de clase del profesor.
Triangulación.
Escala de rango.
Autoevaluación.</td><td colspan="2">Gráfica y preguntas de la actividad.
Tabla completa.
Preguntas contestadas del cierre.</td><td colspan="2">Gráfica de los globos.</td></tr>
<tr><td colspan="7">CONTENIDOS</td></tr>
<tr><td colspan="2">Conceptuales</td><td colspan="3">Procedimentales</td><td colspan="2">Actitudinales</td></tr>
<tr><td colspan="2">Correspondencia.
Variables.</td><td colspan="3">F1. Reconocer la correspondencia entre variables relacionadas, independientemente de la representación utilizada (tablas, gráficas, problemas verbales, expresiones analíticas).
F2. Determinar los valores de la variable dependiente, dados los valores de la independiente.
F3. Determinar los valores de la variable independiente, dados los valores de la dependiente.
F6 Simbolizar una relación funcional, con base en el análisis de los datos de un problema.</td><td colspan="2">Ser consciente de la correspondencia entre las variables dependiente e independiente.
Respetar las opiniones de otros.
Trabajar colaborativamente.
Resolver de manera autónoma los problemas planteados.</td></tr>
<tr><td colspan="7">ACTIVIDADES Y EXPERIENCIAS</td></tr>
<tr><td colspan="7">Inicio (10 minutos)
Analicen la información de la gráfica y comenten acerca de los datos que proporciona.
¿Qué preguntas se pueden hacer a partir de la información?</td></tr>
</table>



Desarrollo (30 minutos)

Completen la información de la tabla apoyándose de la gráfica.

Precio	39	45.5	52	58.5	65	71.5	78	84.5	91	97.5	104	110.5	117	123.5	130	136.5	143
Globos	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22

Identifiquen las dos variables.
Determinen cuál de las variables es dependiente e independiente. ¿Por qué?
¿Cuánto cuesta un solo globo?
Contesten: ¿Qué sucede con los valores de la variable dependiente cuando los de la independiente crecen o decrecen?

Cierre (10 minutos)
Explica la relación entre ambas variables.
¿Cómo puedes representar esa relación? ¿Podrías representar la información a través de variables?

<table>
<tr><td>TÓPICO</td><td colspan="4">Información acerca de conocimientos, habilidades y destrezas de los alumnos con los que se va a trabajar</td></tr>
<tr><td>TEMA</td><td colspan="2">Actividad integradora</td><td>LÍNEA DISCIPLINAR</td><td>SEMANA 6. SESIÓN 6 DE 6</td></tr>
<tr><td colspan="3">OBJETIVOS</td><td colspan="2">IDEAS FUERZA</td></tr>
<tr><td colspan="3">Integren los tres usos de la variable para resolver los problemas.</td><td colspan="2">Seleccionen y empleen cada uno de los usos de la variable.</td></tr>
<tr><td colspan="2">HERRAMIENTAS DE EVALUACIÓN</td><td colspan="2">PRODUCTOS</td><td>RECURSOS</td></tr>
<tr><td colspan="2">Diario de clase del profesor.
Triangulación.
Autoevaluación.</td><td colspan="2">Problema del acuario contestado.
Tabla con los datos del acuario.</td><td>Cartulina con expresiones: 20+r=25, 20+r, 20+r=F.
Pentágono irregular, con lados de 4cm, 4cm, 6cm, 6cm y r.</td></tr>
<tr><td colspan="5">CONTENIDOS</td></tr>
<tr><td>Conceptuales</td><td colspan="3">Procedimentales</td><td>Actitudinales</td></tr>
<tr><td>Correspondencia.
Variables.
Relación.
Patrones.
Secuencias.
Incógnita.</td><td colspan="3">I1, I2, I3, I4.
G, G3, G5.
F1, F2, F3, F6.</td><td>Ser consciente de los 3 diferentes usos de la variable.
Reflexión acerca de la manera en que se muestran los tres usos de la variable.</td></tr>
<tr><td colspan="5">ACTIVIDADES Y EXPERIENCIAS</td></tr>
<tr><td colspan="5">Inicio (10 minutos)
VARIABLE COMO NÚMERO GENERAL
Se le presentará un pentágono irregular, con lados de 4cm, 4cm, 6cm, 6cm y r.
¿Qué representa r?
Desarrollo (30 minutos)
VARIABLE COMO INCÓGNITA
Si se quiere obtener el perímetro de la figura ¿Cómo se puede expresar esa ecuación?
Si el perímetro es igual 27, ¿r puede representar cualquier número? ¿Cuánto valdrá r?
VARIABLE EN RELACIÓN FUNCIONAL
En la siguiente expresión 20+r=F ¿Qué representa F? ¿y r?
¿Qué sucedería si el valor de r aumentara? ¿Qué sucedería con F?
¿Qué sucedería si el valor de F aumenta? ¿Qué sucedería con r?
Cierre (10 minutos)
¿Qué finalidad tuvieron las variables en el problema anterior?</td></tr>
</table>

ANEXO C. ACTIVIDADES DE LAS UNIDADES DIDÁCTICAS: SEMANA 1

TEMA	Igualdad en ecuaciones.	**SEMANA 1. SESIÓN 1 DE 7**

- **Escribe en los recuadros vacíos los costales que necesitaste para que la balanza pesara lo mismo de ambos lados.**

Lado izquierdo		**Lado derecho**
1 costal de 100g	=	
	=	2 costales de 25g
6 costales de 10 g	=	
	=	3 costales de 25 g
2 costales de 100 g	=	

TEMA	Introducción a la incógnita	SEMANA 1. SESIÓN 2 DE 7

- **Encuentra la cantidad que falta en las ecuaciones y escríbela en la línea.**

a) 15 +_______= 33

b) _______ - 45= 15

c) _______+ 23= 50

d) 287 – _______= 182

e) 89 + 42=_______

f) 907 – 89= _______

g) 19 + _______=100

h) _______ – 39= 501

i) _______ + 207= 620

j) 649 – _______ = 427

¿Por qué escogiste esos números para completar los espacios vacíos?

____

____

¿Se podían anotar otras cantidades en los espacios? ______________________________

¿Por qué? ____

____

¿Resultó difícil la actividad? _______________________________

¿Por qué? ____

____

¿Cuál parte resultó complicada? ____

____

ACTIVIDADES DE LAS UNIDADES DIDÁCTICAS: SEMANA 2

TEMA	Introducción a la incógnita	**SEMANA 2. SESIÓN 3 DE 7**

- **Encuentra la incógnita de cada ecuación y escríbela en el recuadro blanco.**

a) $\boxed{}$ + 206 = 1097

b) $\boxed{}$ – 25 = 50

c) 712 + 609 = $\boxed{}$

d) 1000 – 900 = $\boxed{}$

e) 425 + $\boxed{}$ = 900

f) 386 – $\boxed{}$ = 100

g) $\boxed{}$ + 133 = 360

h) $\boxed{}$ – 64 = 3

i) 102 + $\boxed{}$ = 219

j) 504 – $\boxed{}$ = 229

¿Se podrán anotar otras cantidades en los recuadros? ______________________

¿Por qué? ____

____

¿Resultó difícil la actividad? _________________ ¿Por qué? __________________

____

¿Cuál parte resultó complicada? ____

____

¿Se te ocurre otra manera de representar el dato que faltaba? _______________

¿Cuál sería esa manera? ____

____

TEMA	La variable como número general	SEMANA 2. SESIÓN 1 DE 5

- **Completa la tabla y luego responde las preguntas.**

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	**11**	**12**				**16**			

¿Cómo puedes calcular el número de frijoles de cada casilla? ____

____

¿Cuántos frijoles habrá en la casilla 11? ____________________

¿Cuántos frijoles habrá en la casilla 13? ____________________

- **Coloquen 7 frijoles en la primera casilla, 8 en la segunda, 11 en la quinta y así hasta completar las 10 casillas.**

¿Cómo puedes calcular el número de frijoles de cada casilla? ____

____

¿Cuántos frijoles tendrá la siguiente casilla? ________________

¿Cuántos frijoles tendrá la casilla número 20? ________________

¿Cuántos frijoles tendrá la casilla número 35? ________________

Explica cómo obtuvieron las respuestas.

____

____

____

TEMA	Actividad integradora	SEMANA 2. SESIÓN 1 DE 6

- **Organiza la información en la siguiente tabla.**

NÚMERO DE PISCINA	NÚMERO DE AZULEJOS AZULES	NÚMERO DE AZULEJOS BLANCOS	NÚMERO TOTAL DE AZULEJOS

ACTIVIDADES DE LAS UNIDADES DIDÁCTICAS: SEMANA 3

TEMA	La variable como incógnita	SEMANA 3. SESIÓN 4 DE 7

- **Contesta las preguntas a partir de la información de las figuras del pizarrón.**

¿Qué datos hay? ____

____

¿Cuáles datos faltan? ____

____

¿Cómo se obtiene el perímetro? ____

____

¿Cómo puedes representar los datos desconocidos? ______________________________

____

¿Cuánto mide cada lado? ____

Expliquen cómo supieron la medida de cada lado. ______________________________

____

____

____

____

____

____

____

TEMA	La variable en relación funcional	SEMANA 3. SESIÓN 4 DE 6

- **Lee el siguiente problema y contesta las actividades.**

En la dulcería se venden bolsas de gomitas. Cada bolsa contiene 120 g de gomitas. Escribe y organiza los datos hasta obtener la cantidad de gramos que contienen en total 13 bolsitas.

¿Qué sucederá con los gramos de gomitas si la cantidad de bolsas aumenta?

___

- **Completa la siguiente tabla con la información del problema.**

Bolsas													
Gramos													

- **Representa los datos de otra manera.**

Retomando el ejemplo anterior. ¿Se pueden saber los gramos que tendrán en total 30 bolsas? ____________ ¿Por qué? ____

____

¿Cómo? ____

____

____

¿Existe relación entre la cantidad de bolsas y gramos totales que se depositan en ellas? ____

ACTIVIDADES DE LAS UNIDADES DIDÁCTICAS: SEMANA 4

TEMA	La variable como incógnita	SEMANA 4. SESIÓN 5 DE 7

- **Contesta las siguientes preguntas.**

¿Qué datos hay? ____

____

¿Cuáles datos faltan? ____

____

¿Cómo puedes representar los datos desconocidos? ______________________

____

¿Cuál es el área de la figura? ______________________________________

Expliquen cómo supieron la medida de cada lado. ______________________

____

____

____

____

____

____

____

TEMA	La variable como número general	SEMANA 4. SESIÓN 3 DE 5

- **Con base en las figuras que se te mostraron contesta las siguientes preguntas.**

¿Cuántos cuadros tendrá la figura que sigue? ______________________________

¿Cómo lo supieron? ___________________________________

Si siguen haciendo figuras, ¿Cómo podrían saber la cantidad de cuadros que tendrán? ____

____

Si quieren saber el número de cuadrados que tendrá la figura 220, ¿Cuál sería el camino más fácil para resolverlo? ____

____

____

____

¿Crees que exista alguna regla para explicar la secuencia? ______________________

¿Cuál sería? ____

____

____

TEMA	La variable en relación funcional	SEMANA 4. SESIÓN 3 DE 6

- **Con base en la información acerca de la cantidad de tiempo que corre completa la tabla y contesta las preguntas.**

Minutos										
Días										

¿Qué sucede con los minutos cuando los días aumentan? ______________________

____

¿Qué sucede con los días cuando se disminuye el tiempo? ______________________

____

¿Cómo se puede determinar la cantidad de minutos? __________________________

¿Y la cantidad de días? ____

¿De qué otra manera se pueden representar los datos de la tabla? ______________

____

Si sigue corriendo 30 minutos al día, después de 17 días ¿habrá corrido más o menos que el quinto día? ______________________________

¿Se puede determinar cuántos minutos habrá corrido en 25 días? ________________

¿Cómo? ____

____

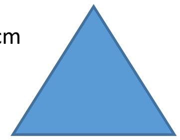
¿Los datos del registro están relacionados entre sí? _________________

¿Por qué? ____

TEMA	Actividad integradora	**SEMANA 4. SESIÓN 3 DE 6**

- **Observa las figuras y contesta las preguntas.**

P= 135 cm



¿Qué datos aparecen con el triángulo? ____________________

En ese caso ¿Qué representa la letra P? ____________________
¿Cuánto vale P? ____________________

¿Qué datos fueron necesarios para obtener P? ____________________

____

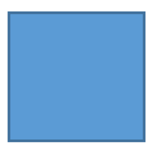
¿Cómo se pueden representar los valores de los lados si se desconocen? ________

____

¿Qué expresión se puede usar para representar la manera de obtener el perímetro? ____________________

____

P=



51 cm

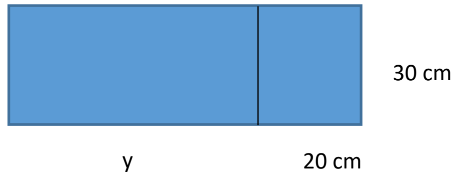
¿Cuáles datos se conocen la figura de arriba? ____________________

¿Qué representa P? ____________________

¿Cuánto vale P? ____________________

¿Cómo se pueden representar los datos faltantes? ____________________

P=



¿Cuáles datos se conocen y desconocen en la figura de arriba?

____

¿Qué representa P? ____

¿Cuánto vale P? ____

¿Qué representa *y*? ____

¿*y* puede ser cualquier número? __________ ¿Porqué? _____________________

____

Completa la siguiente tabla para determinar el perímetro que tendrían otros cuadrados más grandes.

Número de figura	Perímetro del cuadrado
	204
2	408
4	
	1224
8	1632

¿De qué otra manera puedes representar la información de la tabla? ____
____

¿Cuál será el perímetro de la figura 17? ____________________________________

Si el perímetro es de 4488 cm ¿qué número de figura será? ____________________

¿Cuál regla se podría escribir para explicar la información de la tabla anterior?

____

ACTIVIDADES DE LAS UNIDADES DIDÁCTICAS: SEMANA 5

TEMA	La variable como incógnita	SEMANA 5. SESIÓN 6 DE 7

- **Resuelve los problemas y contesta las preguntas.**

Susana perdió algunas canicas. En total tenía 37 y ahora solo tiene 14. ¿cuántas canicas perdió?

¿Qué datos conocen y desconocen? ____

____

¿Cuál es la incógnita del problema? ____

¿Cómo puedes representar la incógnita? ____

¿Qué necesitas hacer para saber la respuesta? ___________________________________

____

Jaime y Lucía vendieron cajas de galletas a $35.00 cada una. Su ganancia total fue de $875.00. Si Lucía juntó la cantidad de $325.00. ¿Cuánto dinero juntó Jaime?

¿Qué datos conocen y desconocen? ____

____

¿Cuál es la incógnita del problema? ____

¿Cómo puedes representar la incógnita? ____

¿Qué necesitas hacer para saber la respuesta? ___________________________________

____

¿Qué se puede hacer cuando se desconoce una cantidad? _____________________

¿Por qué se usaron letras? ______________________________

¿Se puede usar cualquier letra? ______________________________

¿Por qué? ______________________________

TEMA	La variable como número general	SEMANA 5. SESIÓN 4 DE 5

- **Completa la tabla con la información previamente comentada.**

Días	1	2	3	4	5	6	7	8
Dinero	6	12		24		36		

¿Cómo obtuvieron los números faltantes? ________________________________

____

¿Podrían saber cuánto dinero juntarían después de que pasen 30 días? ___

¿Cómo harían para saber eso? ____________________________________

____

Y si en lugar de 30, fueran 87 días ¿Cuánto dinero sería? ________________

¿Sería sencillo calcular todos esos días? ________________________________

Escriban una regla en para saber la cantidad de dinero de cualquier día

____

____

____

Tomando el ejemplo de la tirolesa ¿Cuál de las siguientes reglas se podría usar para saber la cantidad que ganarán si se sube cualquier número de personas?

e) n x 40
f) n / 40
g) n + 40
h) n – 40

Explica por qué la elegiste y si tiene similitud con lo que habías propuesto

antes

TEMA	La variable en relación funcional	**SEMANA 5. SESIÓN 5 DE 6**

- **Analiza la información y contesta las preguntas.**

Para instalar una casa de campaña rectangular se necesitan 4 estacas.

¿La cantidad de estacas aumentará si también lo hace el número de casas de campaña? ____________

¿Puedes representarlo en una gráfica? ______________

- **Representa la información con una gráfica en el siguiente espacio.**

¿Cómo se podría expresar la relación entre el número de casas y el número de estacas? ____

____

¿Qué sucedió cuando una de las cantidades relacionadas aumentaba? ____

¿De qué dependió el número de estacas a utilizar?

____

TEMA	Actividad integradora	SEMANA 5. SESIÓN 4 DE 6

- **Lee el siguiente problema y contesta las preguntas.**

Al acuario asistirán 50 alumnos, por el total de boletos deben pagar $9750.00.

¿Cuánto cuesta cada boleto? _______________________________________

¿Qué datos se saben? ____

____

¿Cuáles se desconocen?____

¿Cómo se puede representar la incógnita? _________________________

Organiza la información en una tabla para que todos conozcan cuál será el costo por 1, 5, 10, 15, 20, así hasta llegar a 50 estudiantes.

¿Qué relación existe entre los boletos y el precio? _________________

____

¿Cómo harías para calcular el total a pagar por 130 estudiantes? _________

____

Analiza nuevamente la tabla. ¿Cómo podrías determinar el total a pagar por cualquier número de estudiantes? ___________________________________

____

ACTIVIDADES DE LAS UNIDADES DIDÁCTICAS: SEMANA 6

TEMA	La variable como número general	**SEMANA 6. SESIÓN 5 DE 5**

- **Contesta las siguientes preguntas basándote en la actividad de con los cerillos.**

¿Cuántos cerillos aumenta cada figura?	
¿Cuántos cerillos tendrá la figura que sigue?	
¿Cuántos cerillos tendrá la figura 8?	
¿Cuántos cerillos tendrá la figura 19?	
¿Cuántos cerillos tendrá la figura 30?	
¿Cuántos cerillos tendrá la figura 53?	
¿Cuántos cerillos tendrá la figura 150?	

¿Cómo puedes calcular el número de cerillos que tiene cada figura? ____________

____

____

¿Qué significa la n? ____

____

Analicen las siguientes opciones:

e) n+2
f) (nx2) +1
g) n -2
h) (nx2) - 1

¿Podrías usar alguna de ellas para saber la cantidad de cerillos de las demás figuras?

____

¿Cuál elegirías? (Explica por qué) _______________________________________

____

____

____

TEMA	La variable en relación funcional	**SEMANA 6. SESIÓN 6 DE 6**

- **Completen la información de la tabla apoyándose de la gráfica.**

Precio	**39**		**52**	**58.5**	**65**	**71.5**			**91**	**97.5**			**117**			**136.5**	**143**
Globos		**7**	**8**	**9**		**11**	**12**		**14**	**15**	**16**		**18**	**19**	**20**	**21**	

¿Cuánto cuesta un solo globo? ___________________

¿Qué sucede con los valores del precio cuando la cantidad de globos aumenta? ________________________________
____

Explica la relación entre ambas variables: ____
____

¿Cómo puedes representar esa relación? _____________________________________

¿Podrías representar la información a través de variables? _________________. Escribe esa representación ______________________________