BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

CUATRO REPRESENTACIONES PARA LA COMPRENSIÓN Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE ESPACIOS MUESTRALES REDUCIDOS DE ESTUDIANTES DE BACHILLERATO

TESIS
PARA OBTENER EL TÍTULO DE
MAESTRA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

PRESENTA
LIC. RUTH GARCIA SOLANO

DIRECTOR DE TESIS
DRA. ESTELA DE L. JUÁREZ RUIZ
CODIRECTOR DE TESIS
DRA. MARÍA ARACELI JUÁREZ RAMÍREZ

PUEBLA, PUE., MARZO 2020.

BUAP

DRA, LIDIA AURORA HERNÁNDEZ REBOLLAR
SECRETARIA DE INVESTIGACIÓN Y ESTUDIOS
DE POSGRADO, FCFM – BUAP
P R E S E N T E

Por este medio le informo que la C.

RUTH GARCIA SOLANO

estudiante de la Maestría en Educación Matemática, ha cumplido con las indicaciones que el jurado le señaló en el Coloquio que se llevó a cabo el día 06 de diciembre de 2019, con la tesis titulada:

"CUATRO REPRESENTACIONES PARA LA COMPRENSIÓN Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE ESPACIOS MUESTRALES REDUCIDOS DE ESTUDIANTES DE BACHILLERATO"

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

A T E N T A M E N T E
H. Puebla de Z. a 06 de marzo de 2020

DR. JOSIP SLISKO IGNJATOV
COORDINADOR DE LA MAESTRÍA
EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA · 1578

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Av. San Claudio y 18 sur, edif. FM1 Ciudad Universitaria, Col. San Manuel, Puebla, Pue. C.P. 72570 01 (222) 229 55 00 Ext. 7550 y 7552

Esta investigación se realizó gracias al financiamiento del

Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT).

De enero de 2018 a diciembre de 2019.

N° de CVU 888829

Este trabajo
está dedicado
al amor de mi vida
y en mi vida
mis hijas:
Isabella y Renata

En un momento histórico tan turbulento
y violento para con las mujeres;
aquí el ejemplo que les doy de
constancia y superación,
mis amores.

OMNIA VINCIT AMOR

Largo es el camino de la enseñanza
por medio de teorías;
breve y eficaz por medio de ejemplos.
Lucio Anneo Séneca

A lo largo de mis estudios de maestría a menudo pensaba: esto debo anotarlo para ponerlo en los agradecimientos de mi tesis. Llegó el día de entregar la tesis y mis pensamientos solo quedaron en buenas intenciones… Así que el primer agradecimiento es para ti, que estás leyendo esto y que quizá tengas la curiosidad de saber si te recordé entre estas líneas, perdóname si no puse especial cuidado en mencionarte, pero tú y yo sabemos que estuviste ahí cuando lo necesité, cuando el cansancio fue extremo y la labor interminable, justo para brindarme aliento, alimento, crítica constructiva o consuelo, muchas gracias por acompañarme en este tramo del camino y mas aún por leer este agradecimiento y saber que lo escribí pensando en ti.

En cuanto a los agradecimientos puntuales, el primero es para mí asesora de tesis Dra. Estela de L. Juárez Ruiz. Quien ordena todo en el universo vio su calidad humana, sus cualidades y habilidades, su historia y la mía. De tal forma que orquestó todo para bendecirme con su liderazgo y acompañamiento a lo largo de este proyecto; son de esas cosas inesperadas que suceden y lo hacen para trascender. Gracias por el honor de ser su tesista y compartir su conocimiento conmigo.

A mis docentes, que contribuyeron a mi formación académica y humana, gracias. Por su tiempo, dedicación, paciencia, apoyo, acompañamiento, retroalimentación y ejemplo. Dra. Dinazar, Dr. José Antonio, Dr. Zacarías, Dra. Araceli, Dr. Erick. Dr. Gabriel, gracias, además por animarme a llevar el trabajo de clase a los TEMBI. Dra. Lidia, gracias por leer y retroalimentar mis trabajos, es algo que valoré y atesoraré por siempre, muchas gracias por su dedicada lectura y enriquecedoras precisiones, gracias por sus valiosas aportaciones en mi formación.

A mis colegas, con quienes compartí la experiencia de cursar la maestría. En algún momento del camino se los dije: intenté ingresar a esta maestría más de una vez. Finalmente ingresé justo cuando, quien ordena todo en el universo, tenía una cuidadosa selección de maravillosos seres humanos con quienes se enriquecería mi vida. Mag, Paky, Paty, la amistad es un tesoro, gracias por ser parte de mi fortuna. Gracias también a todos mis amigos a quienes considero ángeles y bendiciones.

Gracias a mis estudiantes de la preparatoria Emiliano Zapata de los ciclos escolares 2017-2018, 2018-2019 y 2019-2020 quienes participaron en este trabajo, directa o indirectamente. Gracias Pao, Mariana Lima, Hugo y Mario, solo tuve que decir: “necesito ayuda”, para contar incondicionalmente con su presencia y apoyo. Gracias Amanda Brown Sevilla, por hacerme prometer que haría la maestría, promesa cumplida.

Gracias, Yolanda y Enrique por el amor con el que me formaron. Gracias a Myriam, Beto, Enrique y Carol, por su generosidad y cuidado cuando fui a Cuba. Gracias, Diana por poner los estándares tan altos siempre. Gracias Renato, por hacerme encontrar fuerza, paciencia y entereza, donde solo veía agotamiento. Gracias Isabella y Renata por estar a mi lado y hacer todo lo que estuvo a su alcance para que yo trabajara en la tesis. Gracias a Lilia, Paty, Aitana y Samy por ser y estar en las buenas y no tan buenas como la familia que somos. Gracias, María Luisa y Samuel, por cuidarme y nunca dejar que algo malo me pasara cuando las noches se volvían amaneceres y días completos de labor sin dormir. Siempre pienso en ustedes, los extraño mucho.

Índice

Índice de tablas

Índice de Figuras

Resumen

El trabajo de investigación realizado presenta los resultados obtenidos por los estudiantes de un curso de recuperación de la materia de Estadística, Probabilidad y Temas Selectos de Matemáticas, en la resolución de problemas verbales. En la educación media superior, una de las principales competencias disciplinares es la resolución de problemas matemáticos, sin embargo, en ese proceso, hay dos factores que hacen que los estudiantes no logren la respuesta correcta. Por un lado, las dificultades en el lenguaje natural y la comprensión conceptual, por otro, las dificultades en el procesamiento matemático. Estos dos factores son fuentes de errores que se analizan mediante el modelo propuesto por Newman (1977), que clasifica y categoriza los errores que cometen los estudiantes al resolver problemas en: error de lectura, error de comprensión, error de transformación, error en habilidades de proceso y error de codificación. En el curso de recuperación, se da a conocer al estudiante cuatro representaciones gráficas: el cuadrado unitario, el diagrama de árbol, el diagrama de Venn y la tabla de doble entrada, como una herramienta para favorecer la comprensión conceptual y facilitar el procesamiento matemático de problemas verbales de probabilidad en espacios muestrales reducidos. Los resultados muestran que los estudiantes se apropian de una sola visualización como herramienta en la resolución de problemas, aunque hay evidencias de que pueden transitar eficientemente entre las cuatro visualizaciones. Los resultados también reportan un decremento en la cantidad de errores que cometen en la resolución de problemas, así como un incremento en su capacidad de respuesta.

Palabras clave: Visualización, espacios muestrales reducidos, cuadrado unitario.

Abstract

This research paper presents the results obtained by the students of a course in the recovery of the subject of Statistics, Probability and Selected Mathematics Topics, in solving verbal problems. In higher secondary education, one of the main disciplinary competences is the resolution of mathematical problems, however, in that process, there are two factors that cause students not to achieve the correct answer. On the one hand, the difficulties in natural language and conceptual understanding, on the other, the difficulties in mathematical processing. These two factors are sources of errors that are analyzed by the model proposed by Newman (1977), which classifies and categorizes the mistakes that students make when solving problems in: reading error, comprehension error, transformation error, error in skills of process and coding error. In the recovery course, four graphical representations are made known to the student: the unit square, the tree diagram, the Venn diagram and the double entry table, as a tool to promote conceptual understanding and facilitate mathematical processing of verbal problems of probability in small sample spaces. The results show that students appropriate a single visualization as a tool in solving problems, although there is evidence that they can travel efficiently between the four visualizations. The results also report a decrease in the number of errors they make in solving problems, as well as an increase in their ability to respond.

Keywords: Visualization, reduced sample spaces, unit square

Introducción

Formular y resolver problemas matemáticos aplicando diferentes enfoques es una de las competencias disciplinares medulares de la educación matemática en la actualidad, aunque la inquietud sobre la resolución de problemas surge algunas décadas atrás, Alan H. Schoenfeld en el prefacio de su libro publicado en 1985, después de conocer las estrategias heurísticas en la resolución de problemas comparte la siguiente reflexión:

"Este tipo de estrategias no se mencionaron en ningún momento de mi carrera académica". Las ideas que Polya planteo en 1945 en su libro "How to Solve It", resultan de una amplia y vigente aplicación no solo en el campo de las matemáticas; Polya afirma que hay cuatro pasos a seguir en la resolución de problemas: primer paso entender el problema, segundo trazar un plan, tercero ejecutar el plan y cuarto verificar la solución. Pero incluir los cuatro pasos de Polya ya sea de forma local en la práctica docente o más general en los planes de estudio no es suficiente para lograr resultados en la resolución de problemas. En efecto, solo algunos estudiantes son capaces de resolver problemas y muchos otros tienen dificultades, por lo que cometen varios tipos de errores. Algunos estudios han demostrado que el modelo propuesto por Newman (1977) sirve para analizar esos errores ya que es un modelo confiable para los profesores de matemáticas, utilizado para clasificar y categorizar los errores que cometen los estudiantes al resolver problemas y una base confiable para cuantitativamente determinar los resultados de una cierta estrategia propuesta. En el modelo de análisis de errores propuesto por Newman (1977) los errores que se consideran son los siguientes: (1) error de lectura, (2) error de comprensión, (3) error de transformación, (4) error en habilidades de proceso y (5) error de codificación.

Esta investigación está basada en un diseño de ingeniería didáctica con una evaluación cuantitativa en la cuarta fase; evalúa la siguiente hipótesis: Los estudiantes que usan más de una representación como estrategia de solución en problemas verbales de probabilidad en espacios muestrales reducidos cometen menos errores de comprensión.

Este documento está organizado de la siguiente manera: el primer capítulo define y delimita la problemática de estudio, plantea las preguntas de investigación, así como los objetivos tanto generales como específicos y los argumentos que justifican la presente investigación.

En el segundo y tercer capítulo se exponen los fundamentos teóricos y metodológicos en los que se fundamenta el presente trabajo.

El capítulo cuatro expone la aplicación en un grupo de voluntarios de una secuencia didáctica, en la cual tal como la ingeniería didáctica lo indica se analizó y evalúo constantemente para guiar las decisiones más pertinentes en un ciclo de mejora continua.

En el capítulo cinco se presentan las cuatro fases de la ingeniería didáctica en su implementación final en el grupo específico de estudio para el cual fue diseñada la secuencia didáctica.

Finalmente, se exponen los resultados y conclusiones del presente estudio.

Capítulo 1

PLANTEAMIENTO DE LA INVESTIGACIÓN

1.1 Planteamiento del problema

En la educación media superior, una de las principales competencias disciplinares es la resolución de problemas de matemáticas, sin embargo, los esfuerzos en el desarrollo de estas habilidades han reportado resultados poco alentadores. Como se puede observar en la Figura 1, los resultados de la prueba Planea en Matemáticas del 2017 indican que seis de cada 10 estudiantes se ubican en el nivel uno (insuficiente), casi dos de cada 10 se ubican en el nivel dos (regular), 8 de cada 100 se ubican en el nivel 3 (bueno) y 3 de cada 100 en el nivel cuatro (sobresaliente).

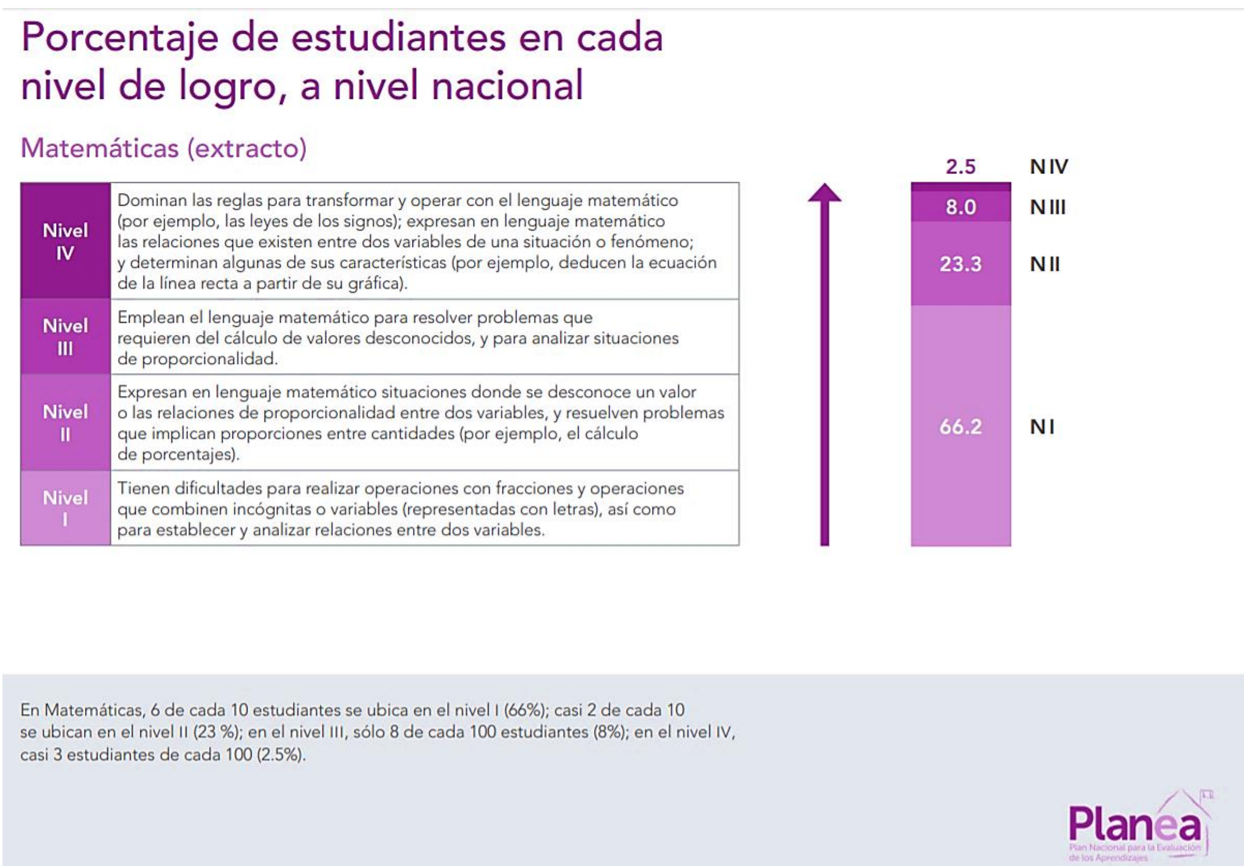


Figura 1 Porcentaje de logro en matemáticas a nivel nacional
Fuente: Resultados Planea 2017

Desde la perspectiva de los planes de estudio de referencia del componente básico del marco curricular común de la educación media superior (Secretaría de Educación Pública [SEP], 2017), se considera que las personas que saben matemáticas, pueden utilizarlas dentro y fuera de la clase, dentro y fuera de la escuela, no basta entonces, con resolver problemas típicamente escolares mediante técnicas más o menos sofisticadas. Se pretende darle el estatus de saber al conocimiento matemático escolar, es decir, hacerlo funcional y transversal para dotarlo de significado mediante el uso, por encima de la resolución de problemas de la matemática escolar.

El eje propuesto para articular el campo de las matemáticas en el nivel medio superior establece como base tres competencias disciplinares:

1) Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas y formales.
2) ***Formula y resuelve problemas matemáticos aplicando diferentes enfoques.***
3) Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos y variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las Tecnologías de la información y la comunicación (SEP, 2017).

Una educación matemática basada en la resolución de problemas puede dar cohesión a los conceptos y procesos matemáticos, creando y fomentando, dentro del salón de clases, una comunidad de aprendizaje, con una comprensión profunda del uso y aplicación de temas matemáticos. La resolución de problemas se enseña y forma parte de los planes de estudio alrededor de todo el mundo (Tömer, Schoenfeld y Reiss, 2007), y se ha estudiado durante décadas (Liljedahl, Santos-Trigo, Malaspina, y Bruder, 2016). Desde la Agenda para la Acción (1980) el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) promueve el poder de la resolución de problemas afirmando que el verdadero poder de la resolución de problemas requiere un amplio repertorio de conocimientos, no solo de habilidades y conceptos particulares, sino también de las relaciones entre ellos y los principios fundamentales que los unifican.

Con el fin de atender el segundo componente disciplinar y las recomendaciones del NCTM se plantea la siguiente:

Pregunta general de investigación

¿Cómo favorecer la comprensión de espacios muestrales reducidos en estudiantes de nivel medio superior que presentan dificultades para la resolución de problemas verbales de este tipo?

Preguntas específicas de investigación

- ¿Cuáles son los errores que presentan los estudiantes de nivel medio superior al solucionar problemas de probabilidad en espacios muestrales reducidos?
- ¿Existen correlaciones estadísticamente significativas entre los errores que presentan los estudiantes de nivel medio superior, al solucionar problemas de probabilidad en espacios muestrales reducidos?
- ¿En qué medida la visualización como estrategia, favorece la compresión y resolución de problemas de probabilidad en espacios muestrales reducidos?
- ¿Cómo diseñar una ingeniería didáctica que favorezca la comprensión y resolución de problemas a través de la visualización de espacios muestrales reducidos?

1.2 Objetivos

Objetivo General

Evaluar la implementación de un diseño de ingeniería didáctica basada en el uso de cuatro representaciones para la resolución de problemas de probabilidad en espacios muestrales reducidos, en estudiantes de nivel medio superior.

Objetivos Particulares

- Identificar qué errores del modelo de Newman presentan los estudiantes de nivel medio superior al solucionar problemas de probabilidad en espacios muestrales reducidos.
- Establecer si existen correlaciones estadísticamente significativas entre los errores desde el modelo de Newman, que presentan los estudiantes del nivel medio superior, al solucionar problemas de probabilidad en espacios muestrales reducidos.

- Evaluar cómo la utilización de cuatro representaciones gráficas favorece la comprensión y resolución de problemas de probabilidad en espacios muestrales reducidos en estudiantes de un curso remedial en el nivel medio superior.
- Diseñar una ingeniería didáctica que permita al estudiante explorar cuatro representaciones gráficas: diagrama de Venn, diagrama de árbol, cuadrado unitario y tabla de doble entrada, para que adopte la que más favorece su comprensión del problema.

1.3 Justificación

Durante los ciclos escolares 2016-2017 y 2017-2018 se atendieron a los grupos de la Unidad de Aprendizaje Curricular (UAC) de Estadística, Probabilidad y Temas Selectos de Matemáticas del plan 06 para el bachillerato universitario que se imparte en el nivel medio superior de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. De los registros del desempeño académico de los estudiantes, se recopiló información sobre los resultados de la segunda evaluación parcial, la cual consideró los temas de probabilidad condicionada y Teorema de Bayes, que corresponde con espacios muestrales reducidos. Los registros mostraron un promedio general bajo y un alto porcentaje de reprobados, como se muestra en la Tabla 1.

Tabla 1 Registro del promedio general y porcentaje de reprobados

	2016-2017		2017-2018
	Tercer Año Grupo A, Vespertino	Tercer Año Grupo D, Matutino	Tercer Año Grupo A, Vespertino
Promedio	4.96	3.78	5.08
Reprobados	69.69%	92.30 %	70.27%

Por otro lado, durante el ciclo escolar 2018-2019 se implementó y desarrolló un proyecto de clase en la unidad Académica Preparatoria Emiliano Zapata de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, en su sede principal ubicada en la colonia centro de la ciudad de Puebla.

El objetivo general de este proyecto consistió en aplicar y relacionar los contenidos de la UAC de Probabilidad, Estadística y Temas Selectos de Matemáticas con la UAC de Psicología y competencias exitosas de los estudiantes.

Los estudiantes participantes en el proyecto, motivados por temas de su interés personal, registraron información estadística en su contexto. En particular, en el grupo de tercer año de Humanidades del turno matutino, los estudiantes Benjamín Aldana Juárez, Francisco Javier

Hernández Leal y Rubén Asael Sánchez Reyes presentaron el trabajo titulado: *Implementación de herramientas para la mejora del desempeño académico en la materia de Estadística de los estudiantes del área de ciencias sociales y humanidades del tercer año turno matutino de la preparatoria Emiliano Zapata*.

La recolección de datos que realizaron los estudiantes correspondió con una muestra representativa con un nivel de confianza del 90% con 15% de error, constituida por 22 estudiantes: 7 correspondieron al área de ciencias sociales y 15 al área de humanidades, de una población total de 70 estudiantes activos e inscritos en los grupos de humanidades y sociales del turno matutino. La encuesta de este proyecto estudiantil se realizó en la semana del 11 al 15 de febrero de 2019. Los resultados coinciden con el registro de la docente titular. En efecto, desde la percepción de los estudiantes, al 56.5 % se les dificultan los temas de probabilidad en espacios muestrales reducidos, repercutiendo en el rendimiento académico correspondiente al segundo parcial.

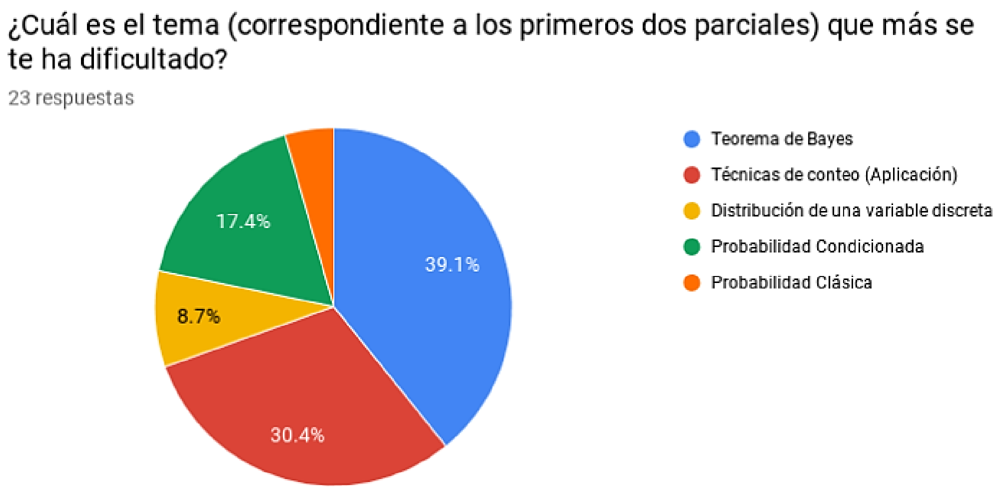


Figura 2 Distribución de la percepción de dificultad por parte de los estudiantes.

Estos resultados motivaron a la profesora titular de la materia y responsable de esta investigación, a centrar su investigación en estos temas, principalmente en el problema de la comprensión, buscando proponer una intervención que incidiera en la resolución de problemas de probabilidad en espacios muestrales reducidos.

Capítulo 2

MARCO TEORICO

2.1 La resolución de problemas

La propuesta curricular del componente básico del marco curricular común de la Educación Media Superior (SEP, 2017) privilegia la construcción del conocimiento matemático en situaciones contextuales, incorporando la algoritmia y la memorización como medios necesarios, pero no suficientes, para la construcción de conocimiento matemático. Así, limita el empleo de las estrategias memorísticas y repetitivas de la enseñanza tradicional, para fortalecer el sentido de "lo propiamente matemático" en diversas situaciones de aprendizaje: mencionando una enseñanza más activa, realista y crítica.

El Marco Curricular Común de la Educación Media Superior para México propone una articulación jerárquica en tres dimensiones: Ejes, Componentes y Contenidos (centrales y específicos):

- Eje: Organiza y articula los conocimientos, destrezas, habilidades, actitudes y valores de las competencias de los campos disciplinares y es el referente para favorecer la transversalidad interdisciplinar.

- Componente: Genera y/o integra los contenidos centrales y responde a formas de organización específica de cada campo disciplinar.

- Contenido central: Corresponde a los aprendizajes fundamentales y se refiere al contenido de mayor jerarquía dentro de los programas de estudio.

- Contenido específico: Corresponde a los contenidos centrales y, por su especificidad, establece el alcance y profundidad de su abordaje.

El eje propuesto para articular el campo de las matemáticas en el nivel medio superior establece como base tres competencias disciplinares:

1) Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas y formales.

2) Formula y resuelve problemas matemáticos aplicando diferentes enfoques.

3) Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos y variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las Tecnologías de la información y la comunicación (SEP, 2017).

A pesar de ser fundamental en uno de los ejes principales, en el actual currículo en la enseñanza de las matemáticas, no se cuenta con una definición única de lo que es un problema. Rico (2002) la concibe como una actividad científica vinculada a la educación. Meyer (1986) lo considera un sinónimo de pensamiento y cognición. Brandsfor y Stein (1986) lo describen como un obstáculo que separa la situación actual de una meta deseada. Para Pelares (1993) son situaciones que requieren una búsqueda de solución y Puig (1996) lo plantea desde la percepción de los sujetos quienes determinan o no la existencia de un problema.

Los estudios sobre resolución de problemas incluyen algunos aspectos como: estrategias heurísticas para resolver problemas (Polya, 1945), investigaciones de cómo los estudiantes resuelven problemas matemáticos (Schoenfeld, 1985), identificar las etapas en la solución de problemas matemáticos y sus errores (Rohmah y Sutiarso, 2018) y evaluar las habilidades de resolución de problemas en los estudiantes (Sugrue, 1995).

La primera etapa para resolver un problema matemático consiste, por un lado, en desentrañar la información relevante del enunciado y por otro, reestructurarla o transformarla en una que el individuo entienda. En esta traducción, quien soluciona el problema, extrae conceptos de la descripción textual del problema mediante el uso de su conocimiento semántico y lingüístico. Utiliza su conocimiento lingüístico para comprender el lenguaje escrito y su conocimiento semántico para establecer el significado de las expresiones lingüísticas. Quien soluciona el problema conecta las oraciones en una descripción y produce una representación coherente del mismo (Pribul y Bodner, 1987, citado en Solaz-Portolés y Lopez, 2007).

En esta etapa, el solucionador realiza procesos de pensamiento internos que le permiten establecer representaciones internas y externas del problema a resolver. Una representación interna es la forma en que el solucionador de problemas almacena los componentes del problema en su mente. En contraste, las representaciones externas son manifestaciones físicas de esta información, como un dibujo o una lista de información que captura elementos particulares de una representación interna o una ecuación (Bodner y Domin, 2000).

Larkin, McDermott, Simon y Simon (1980) establecen que "para trabajar en el problema, el solucionador debe convertir la cadena de palabras con la que se presenta, en una representación mental interna que puede ser manipulada en un esfuerzo por resolver el problema. Comprender el problema significa construir para él una de estas representaciones internas" a partir de la comprensión lingüística y semántica.

Estudiando los métodos de resolución de problemas, percibimos dos facetas de las matemáticas. En efecto, las matemáticas presentan dos caras: Por un lado, son la ciencia rigurosa de Euclides, una ciencia deductiva; pero también están en constante formación y desarrollo, entonces se presentan como una ciencia inductiva. El procedimiento para resolver un problema matemático se plantea en cuatro simples pasos: comprender el problema, concebir un plan, ejecutar el plan y examinar la solución obtenida (Polya, 1945). El inconveniente de este plan es que está tan ampliamente definido que también es vago como para servir de guía para su implementación, este plan general contiene una serie de sub-estrategias más precisas. El uso exitoso de tales estrategias no solo sirve para conocer "las estrategias", también permite el desarrollo de habilidades de orden superior para una buena toma de decisiones ejecutivas y un extenso repertorio de habilidades secundarias (Schoenfeld, 1985).

Las ideas que Polya planteó en 1945 en su libro *"*How to Solve It*"*, resultan de una amplia y vigente aplicación, no solo en el campo de las matemáticas. El uso efectivo de alguna herramienta demanda que los estudiantes desarrollen recursos y estrategias que les permitan apropiarse de la herramienta y transformarla en un instrumento importante en la compresión y resolución de problemas matemáticos (Santos Trigo, 2007), sin caer en la dependencia.

2.1.1 Modelo de análisis de errores de Newman

Como ya se menciona en el proceso de resolución de problemas, los estudiantes deben pasar por varias fases antes de obtener la solución. Según Polya (1945), el proceso de resolución de problemas tiene cuatro fases, que son: (1) entender el problema, (2) planificar la estrategia, (3) ejecutar los planes y (4) revisar las respuestas. Mientras tanto, Newman (1977) declaró que vinculado a este proceso hay cinco fases en la resolución de problemas, a saber: (1) lectura, (2) comprensión, (3) transformación, (4) habilidades de proceso y (5) codificación. Integrando los aportes de Polya y Newman, los estudiantes pueden resolver problemas más fácil y sistemáticamente, incluso si se les dan problemas con varios niveles de dificultad. Sin embargo, no todos los estudiantes son capaces de resolver los problemas ya que tienen dificultades en fases específicas. Por ejemplo, en el estudio de Effandi y Siti (2010), los estudiantes muestran dificultades en las fases de transformación y habilidades de proceso en la resolución de problemas de ecuaciones cuadráticas. Un estudio realizado por Susanti, Kusumah, y Sabandar (2014) descubrió que algunas de las dificultades que enfrentan los estudiantes al resolver problemas son (1) leer e interpretar datos, (2) determinar y delegar datos y (3) hacer conclusiones y argumentos. Por lo tanto, los maestros deben darse cuenta de las dificultades y errores cometidos por los estudiantes y adoptar enfoques apropiados para mejorar sus prácticas de enseñanza (Ashlock, 2005).

Algunos estudios (Prakitipong y Nakamura, 2006; Effandi y Siti, 2010; Abdullah, Abidin, y Ali 2015) han demostrado que el modelo propuesto por Newman es un modelo confiable para los profesores de matemáticas utilizado para clasificar y categorizar los errores de los estudiantes en la resolución de problemas matemáticos. Según Effandi y Siti (2010), el modelo de análisis de errores de Newman tiene la jerarquía que clasifica los tipos de error en función de los niveles de resolución de problemas por parte de los alumnos. La declaración anterior está en línea con Ellerton y Clements (1996), quienes declararon que Newman usó la "jerarquía", dando la razón por la que si los estudiantes que fallan en cualquier nivel de resolución de problemas se ven impedidos de obtener la solución requerida.

En el modelo de análisis de errores propuesto de Newman los errores que se consideran son los siguientes:

a) *Error en la lectura*, implica la capacidad de los estudiantes para leer problemas matemáticos e identificar oraciones y símbolos matemáticos utilizados.
b) *Error de comprensión* básicamente consiste en que los estudiantes puedan o no comprender problemas matemáticos desde el lenguaje natural.
c) *Error de transformación* que es la capacidad de los estudiantes para determinar el método de solución matemática.
d) *Error en habilidades de proceso* que es la capacidad del estudiante para realizar operaciones básicas necesarias para resolver el problema de forma correcta o no.

e) *Error de codificación* que es la capacidad del alumno para integrar los elementos en una respuesta acorde con la pregunta.

Una descripción grafica de modelo propuesto por Newman se muestra en la Figura 1.

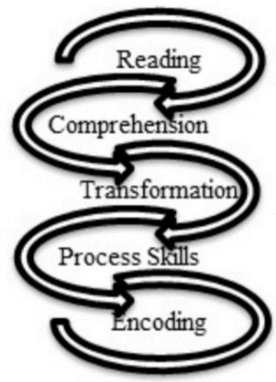


Figura 3 Modelo de Newman para el análisis de errores en la resolución de problemas
Fuente: Abdullah, et al., 2015

2.2 Visualización

Debido a que las matemáticas implican el uso de signos como símbolos y diagramas para representar nociones abstractas, hay un aspecto espacial involucrado, es decir, la visualización está implicada en su representación. La investigación sobre el uso del pensamiento visual en el aprendizaje de las matemáticas es relativamente nueva. Dicha investigación ha crecido en volumen y profundidad desde la década de 1970 (Presmeg y Lerman, 2014).

Bishop (1980) creó distinciones para el análisis de las tareas sobre aspectos espaciales de la educación matemática en dos tipos de construcciones de habilidades: la interpretación de la información figurativa y el procesamiento visual.

La interpretación de la información figurativa se refiere a "comprender las representaciones visuales y el vocabulario espacial utilizado en trabajos geométricos, gráficos, cuadros y diagramas de todo tipo", mientras que el procesamiento visual, más dinámico, "implica la visualización y la traducción de relaciones abstractas e información no figurativa en términos visuales" como "la manipulación y transformación de representaciones e imágenes visuales" (p. 184).

La interpretación de la información figurativa es una habilidad que se basa en la comprensión del contenido y el contexto que se relaciona particularmente con la forma del material de estímulo. Por el contrario, el procesamiento visual no se relaciona con la forma del material de estímulo porque es una capacidad de proceso en lugar de contenido (Presmeg, 2008).

Bishop (1983) hizo dos preguntas con respecto al procesamiento visual, una de ellas es si es enseñable. La investigación de Krutetskii (1969) sugirió que la respuesta es afirmativa hasta cierto punto, aunque afirmó que las preferencias individuales son determinantes. Lean y Clements (1981) llevaron la pregunta más allá, sugiriendo que los estímulos figurativos y no figurativos deberían usarse en una enseñanza que fomente el procesamiento visual.

Lohman (1996) definió la visualización espacial como la capacidad de generar, recordar, mantener y manipular imágenes y soluciones visuales-espaciales.

Arcavi (2003, p. 217) combinó las definiciones dadas por autores anteriores (Hershkowitz et al. 1989, citado en Presmeg, 2014; Zimmermann y Cunningham 1991) en el siguiente resumen:

> La visualización es la capacidad, el proceso y el producto de la creación, interpretación, uso y reflexión sobre imágenes, diagramas, en nuestras mentes, en papel o con herramientas tecnológicas, con el propósito de representar y comunicar información, pensar y desarrollar ideas previamente desconocidas y entendimientos avanzados.

Presmeg (2008) definió una imagen visual como un signo mental que representa información visual o espacial e inscripciones como símbolos, diagramas, información en pantallas de computadora o cualquier representación externa con un componente visual.

Wai, Lubinski y Benbow (2009) en una muestra representativa a nivel nacional de 400,000 estudiantes de secundaria en Estados Unidos, descubrieron que las habilidades de visualización espacial revelaban a los estudiantes qué disfrutaban, ingresaban y tenían éxito en las disciplinas de ciencia, tecnología, ingeniería y matemáticas (STEM). Los estudios de seguimiento de esta misma muestra indicaron que las habilidades de visualización espacial también se vinculaban con la creatividad y la innovación en el ámbito laboral.

Un metaanálisis de 217 estudios de entrenamiento espacial realizado por Uttal et al. (2013) indicaron que el pensamiento espacial se puede mejorar en personas de todas las edades y a través de una amplia variedad de enfoques de capacitación (por ejemplo, trabajo de curso, capacitación basada en tareas, videojuegos). Además, los investigadores concluyeron que los efectos de la capacitación espacial se transfieren a una variedad de tareas espaciales novedosas y no capacitadas, aunque aún se requiere evidencia adicional.

La habilidad de visualización espacial parece representar un sistema cognitivo flexible y adaptativo. Las habilidades de visualización espacial pueden desempeñar un papel más importante en tareas numéricas que enfatizan la necesidad de generar soluciones novedosas (por ejemplo, problemas verbales, problemas aplicados (Hawes y Ansari, 2020).

Como se señaló en el documento de los Estándares del Consejo Nacional de Maestros de Matemáticas [NCTM] (2000), una representación "se refiere tanto al proceso como al producto, al acto de capturar un concepto o relación matemática de alguna forma y a la forma misma "(p. 67).

Duval (2002) trató de explicar los profundos procesos de comprensión y aprendizaje de las matemáticas estableciendo que la representación y la visualización están en el centro de la comprensión de las matemáticas. Distinguió entre visión y visualización. La visión es la percepción directa de un objeto espacial; la percepción visual necesita exploración mediante movimientos físicos, del sujeto que ve, o del objeto que se mira, porque nunca da una aprehensión completa del objeto. Entiende la visualización como representación semiótica de un objeto, una organización bidimensional de relaciones entre algunos tipos de unidades.

Una estrategia a menudo recomendada para resolver problemas matemáticos verbales es usar representaciones visuales (externas), en particular, un diagrama (Lesh, 1999). Las formas más estratégicas en las que se utilizó un diagrama (por ejemplo, no solo para comprender el problema sino también para resolver y monitorear la resolución de problemas) se han correlacionado positivamente con un mayor rendimiento para resolver problemas verbales (van Garderen, Scheuermann, Jackson, 2012).

Una representación, en el caso de un diagrama, puede servir (1) como un medio para comprender la situación problemática, (2) como una forma de registrar información tanto de la situación problemática como de ideas a medida que se resuelve el problema, (3) como una herramienta para facilitar la exploración de conceptos críticos del problema que se está resolviendo, y (4) como una forma de monitorear y evaluar el progreso (van Garderen, Scheuermann, y Poch 2014).

No se debe subestimar la capacidad de usar un diagrama como herramienta para resolver problemas verbales; es una tarea compleja. Este proceso de "traducción" depende de la capacidad de codificar selectivamente lo que es relevante, combinar selectivamente la información en una forma integrada y comparar selectivamente esa información para identificar nuevos conocimientos y conectarse con los conocimientos previos sobre el problema (Sternberg, 1990, citado en Diezmann, 2000).

Presmeg (1986) señaló que para que las imágenes sean útiles, deben combinarse con análisis y pensamiento. Cuando se usa un diagrama para resolver un problema, debe usarse como parte del proceso de razonamiento (es decir, "pensar lógicamente sobre la relación entre conceptos y situaciones" [NRC, 2001, p. 129]) para no solo alcanzar una solución, pero también como una forma de explicar y justificar (es decir, "proporcionar una razón suficiente para" [NRC, 2001, p. 130]) la solución.

Capítulo 3

METODOLOGÍA

En este capítulo abordaremos el método que se utilizó y el procedimiento que se llevó a cabo en la investigación.

3.1 Ingeniería didáctica

La presente investigación se abordó desde la metodología de la *ingeniería didáctica*. En esta metodología se distinguen por lo general dos niveles: la *micro ingeniería didáctica,* de carácter local que se implementa en un salón de clases y el de la *macro ingeniería didáctica,* que involucra a las instituciones educativas, sus estructuras, elementos y componentes tanto internos como externos (Artigue, 1995). La presente investigación pertenece, con mayor precisión a la *micro ingeniería didáctica*.

La población objeto de estudio consistió en el grupo de estudiantes inscritos en el curso extraordinario uno del ciclo escolar 2018-2019 de la UAC: Estadística, Probabilidad y Temas Selectos de Matemáticas, correspondiente al plan 06 del programa de bachillerato universitario en la "Preparatoria Emiliano Zapata" de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. Dicho grupo estuvo integrado por 18 estudiantes, con edades entre 17 y 18 años, la mayoría residentes de la ciudad de Puebla, que se encontraban distribuidos por género, turno y área terminal de acuerdo con la Tabla 2.

Tabla 2 Distribución por género, turno y área terminal en el curso ordinario de los estudiantes inscritos en el curso extraordinario uno de la UAC Estadística, Probabilidad y Temas Selectos de Matemáticas del ciclo 2018-2019 en la Preparatoria Emiliano Zapata

	Matutino		**Vespertino**	
	Hombres	Mujeres	Hombres	Mujeres
Humanidades	3	2	3	1
Ciencias Sociales	0	0	5	4

Fuente: Generación propia

La ingeniería didáctica, en el rol de mejora y adaptación continua, repite un ciclo de cuatro fases partiendo de una versión inicial de la secuencia didáctica hasta su última versión, este ciclo continúa de forma semejante en las actualizaciones de las aplicaciones en un dispositivo móvil. En este proceso de transmisión iterativa se presentan a su vez dos fenómenos: la obsolescencia y replicabilidad. Al respecto se considera lo siguiente:

> En el transcurso de experimentaciones repetidas, se encuentran las siguientes características a situaciones replicables:
>
> 1. Los mismos procedimientos deben aparecer (al menos aquellos que no son marginales) con jerarquías comparables.
> 2. La historia de la clase debe poder describirse con un número reducido de órbitas.
> 3. Las regularidades observadas en el nivel de los procedimientos y de las órbitas deben ser en esencia el resultado de regularidades individuales. Éstos no deben depender de acciones repetidas de reubicación o de desbloqueo que realice el profesor.
> 4. Las perturbaciones leves que no dejan de presentarse de una clase a otra no deben tender a amplificarse (Artigue, 1995, p.51).

En el presente trabajo, el ciclo de cuatro fases de la ingeniería didáctica se cumplió en dos ocasiones. La secuencia didáctica que se muestra en el apéndice A es la segunda y última versión desarrollada en este trabajo de investigación. La primera implementación se realizó en un grupo de 45 estudiantes voluntarios inscritos en el turno matutino, que compartían las características replicables que se han citado con anterioridad. Pertenecían a los grupos de Humanidades y Ciencias Sociales, se encontraban inscritos a la materia de Estadística, Probabilidad y Temas Selectos de Matemáticas, en la Preparatoria Emiliano Zapata, con edades entre 17 y 19 años. Coincidiendo además en que participaron en la secuencia didáctica como repaso o refuerzo de los temas correspondientes a probabilidad condicionada y Teorema de Bayes, dado que habían presentado un bajo desempeño en la evaluación correspondiente. Cabe señalar que los cinco estudiantes del turno matutino inscritos en el curso extraordinario no fueron parte del grupo de voluntarios que participaron en la primera implementación, la cual estuvo integrada como indica la Tabla 3.

Tabla 3 Distribución por género, turno y área terminal de los estudiantes participantes en la primera implementación

	Humanidades		**Ciencias Sociales**	
	Hombres	Mujeres	Hombres	Mujeres
Turno matutino	5	27	3	9

La metodología de ingeniería didáctica, a diferencia de otras metodologías basadas en la experimentación, que se validan mediante un enfoque comparativo externo a través de análisis estadísticos del rendimiento entre grupos experimentales y grupos de control, emplea una validación interna, basada en una comparación y análisis a priori y posteriori. Dicha comparación forma parte de cuatro fases bien definidas:

- **Fase 1** Análisis preliminar.
- **Fase 2** Concepción y análisis a priori de la situación didáctica de la ingeniería.
- **Fase 3** de experimentación.
- **Fase 4** de análisis a posteriori y evaluación.

3.1.1 Fase 1 Análisis preliminar.

En una investigación de ingeniería didáctica, la fase de concepción se basa no sólo en un cuadro teórico general y en los conocimientos didácticos previamente adquiridos en el campo de estudio, sino también en un determinado número de análisis preliminares. Los más frecuentes tocan:

- Un análisis epistemológico de los contenidos contemplados en la enseñanza.
- Un análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos.
- Un análisis de las concepciones de los estudiantes de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución.
- Un análisis del campo de restricciones donde se va a situar la realización didáctica efectiva.
- Y, por supuesto, todo lo anterior se realiza teniendo en cuenta los objetivos específicos de la investigación (Artigue, 1995, p.38).

La primera fase del análisis preliminar de la investigación se basó en el análisis de la enseñanza tradicional y las concepciones de los estudiantes sobre las dificultades y obstáculos que determinan su desempeño académico. Después se realizó un estudio *cuantitativo descriptivo correlacional*, cuya finalidad inicial fue determinar cuantitativamente la presencia de errores del modelo de Newman en la resolución de problemas de probabilidad en espacios muestrales reducidos, posteriormente, se comprobaron correlaciones significativas entre los errores del modelo de Newman, confirmando su carácter jerárquico.

3.1.1.1 El instrumento de recolección de datos.

Un grupo de profesores expertos, miembros de la Academia de Matemáticas de la unidad académica ya descrita, acordaron la evaluación, conformada por cuatro problemas verbales del tema de probabilidad que incluía también los temas de probabilidad condicionada y teorema de Bayes. En la Figura 4 se muestra el problema 3 de dicho instrumento de recolección.

3. Una empresa que fabrica camisetas posee tres máquinas (**A**, **B**, **C**), que producen el 45%, 30% y 25% respectivamente, del total de las piezas producidas en la fábrica. Los porcentajes de producción defectuosa de estas máquinas son: 3%, 4% y 5% respectivamente.
   a) Realice el diagrama de Venn que representa el problema.
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que una camiseta, elegida al azar, esté defectuosa?
   c) Si al seleccionar al azar la camiseta sale defectuosa. ¿Cuál es la probabilidad de haber sido producida por la máquina **B**?

Figura 4 Reactivo tres de la prueba diagnóstica
Fuente: Academia de Unidad de la preparatoria Emiliano Zapata.

3.1.2 Fase 2 Concepción y análisis a priori de la situación didáctica de la ingeniería.

Tradicionalmente, el análisis a priori comprende una parte descriptiva y una predictiva que se centra en las características de una situación a-didáctica que se ha querido diseñar y que se va a llevar a los estudiantes:

- Se describen las selecciones del nivel local (relacionándolas eventualmente con las selecciones globales) y las características de la situación didáctica que de ellas se desprenden.
- Se analiza qué podría ser lo que está en juego en esta situación para un estudiante en función de sus posibilidades de acción, de selección, de decisión, de control y de validación de las que él dispone, una vez puesta en práctica en un funcionamiento casi aislado del profesor.
- Se prevén los campos de comportamiento posibles y se trata de demostrar cómo el análisis realizado permite controlar su significado y asegurar, en particular, que los comportamientos esperados, si intervienen, sean resultado de la puesta en práctica del conocimiento contemplado por el aprendizaje. (Artigue, 1995, p. 45)

En esta segunda fase se realizó el diseño de una secuencia didáctica que coadyuvara a reducir los errores del modelo de Newman presentes en la resolución de problemas de probabilidad en espacios muestrales reducidos, considerando los resultados del estudio cuantitativo descriptivo correlacional de la fase 1.

3.1.3 Fase 3 de experimentación.

Es la fase de la realización de la ingeniería con una cierta población de estudiantes. Esta etapa se inicia en el momento en que se da el contacto investigador/profesor/observador con la población de estudiantes objeto de la investigación.
La experimentación supone:

> • La explicitación de los objetivos y condiciones de realización de la investigación a los estudiantes que participarán de la experimentación;
> • El establecimiento del contrato didáctico;
> • La aplicación de los instrumentos de investigación;
> • El registro de observaciones realizadas durante la experimentación.
> Es recomendable, cuando la experimentación tarda más de una sesión, hacer un análisis *a posteriori* local, confrontando con los análisis *a priori*, con el fin de hacer las correcciones necesarias. Durante la experimentación se busca respetar las selecciones y deliberaciones hechas en los análisis *a priori* (De Faria, 2006, p.5).

En la fase de experimentación se implementó la secuencia didáctica durante cuatro sesiones, de 100 minutos cada una. En la quinta sesión se aplicaron los instrumentos de recolección de datos a posteriori para el análisis correspondiente en la fase 4.

3.1.4 Fase 4 de análisis a posteriori y evaluación.

Esta es la última fase de la ingeniería didáctica. Esta fase se basa en el conjunto de datos recolectados a lo largo de la experimentación, es decir, las observaciones realizadas de las secuencias de enseñanza, al igual que las producciones de los estudiantes en el aula o fuera de ella. Estos datos se completan con otros obtenidos mediante la utilización de metodologías externas: cuestionarios, entrevistas individuales o en pequeños grupos, realizadas durante cada sesión de la enseñanza, etc.

> La validación o refutación de las hipótesis formuladas en la investigación se fundamenta en la confrontación de los análisis, a priori y a posteriori. (De Faria, 2006)

En el análisis a posteriori y evaluación de la investigación se solicitó a los estudiantes que redactaran una situación familiar en su contexto, que considerara el tema de los espacios muestrales reducidos, sobre la que ellos mismos plantearan cuatro preguntas: la primera pregunta referente a porcentaje, la segunda pregunta de probabilidad clásica, la tercera pregunta de probabilidad condicionada y la cuarta pregunta de teorema de Bayes. Posteriormente se aplicó una evaluación de cierre equivalente a la evaluación diagnóstica.

Capítulo 4

PRIMERA IMPLEMENTACIÓN

4.1. Fase 1 análisis preliminar

Como ya se mencionó con anterioridad, en el desarrollo de esta investigación se realizó un primer ciclo de ingeniería didáctica, la primera fase del primer ciclo consideró una muestra representativa al 90% de confianza con 5% de error conformada por 88 estudiantes participantes, 61 fueron mujeres y 27 hombres con edades entre 17 y 19 años, distribuidos en las áreas terminales de Humanidades (43.1%) y Ciencias Sociales (56.9%). Esta primera fase consistió en la aplicación de una evaluación a priori denominada: evaluación diagnóstica.

La finalidad de esta evaluación fue identificar y cuantificar los errores del modelo de Newman que cometen los estudiantes del tercer año del nivel medio superior de Humanidades y Ciencias Sociales al resolver problemas de probabilidad en espacios muestrales reducidos.

El instrumento utilizado para la recolección de los datos estuvo conformado por cuatro problemas verbales del tema de probabilidad condicionada y Teorema de Bayes los cuales fueron seleccionados por un grupo de profesores expertos, miembros de la Academia de Matemáticas de la Preparatoria Emiliano Zapata, cuyo documento, en el formato de aplicación, se puede encontrar en el Apéndice A que contiene la secuencia didáctica.

Los criterios para evaluar cada uno de los errores del modelo de Newman en esta investigación fueron los siguientes:

- Se consideró un ***error de lectura*** cuando el estudiante no realizó ninguna acción u omitió algún dato proporcionado en el enunciado del problema.
- Un ***error de comprensión*** se consideró cuando utilizó incorrectamente conceptos o propiedades o bien no logró integrar la información del problema en un esquema o representación gráfica en la que se aprecie el espacio muestral al que se refiere el problema.
- Un ***error de transformación*** se consideró cuando el estudiante eligió incorrectamente un modelo de solución. Para este análisis se consideraron apropiadas las transformaciones correspondientes al diagrama de árbol, el diagrama de Venn, el cuadrado unitario, las tablas de doble entrada y las representaciones analíticas de probabilidad condicionada o Teorema de Bayes.

- Se consideró un ***error en habilidades de proceso*** si el estudiante realizó incorrectamente procedimientos u operaciones o si incluyó datos extraños durante el procedimiento al implementar el modelo de transformación elegido.
- Finalmente, se consideró un ***error de codificación*** cuando la respuesta al problema planteado no fue coherente con la pregunta realizada, careció de unidades de medida o no logró la conversión al registro verbal. Es decir, si la pregunta refiere a la cantidad de camisetas y el estudiante contesta exclusivamente con una cantidad.

Después de aplicar el cuestionario, se evaluaron cada uno de los errores del modelo de Newman asignando el valor 0 si el estudiante no cometió el error de acuerdo con la codificación antes mencionada y 1 si cometió error. Al capturar la información, en la base de datos se consideraron espacios en blanco cuando la evidencia recabada no permitió identificar la ausencia o presencia del error, esto ocurrió cuando el estudiante simplemente no contestó la pregunta, por ejemplo, si el estudiante presentaba el error de lectura por no realizar ninguna acción, no se contaba con evidencia para indicar que además se había presentado cualquiera de los otros errores. De esta forma se evaluaron cada uno de los errores de manera independiente, para no establecer de antemano ninguna relación entre ellos, con el propósito de estudiar si en realidad estaban relacionados. El análisis de los datos de realizó con el paquete estadístico R.

En esta primera fase se recopilaron 3960 datos de los cuales, 1471 correspondieron a errores del modelo de Newman (37.14%).

En la Figura 5 se muestra la distribución de porcentajes por cada tipo de error del modelo de Newman. El error que con mayor frecuencia se presentó fue el error de lectura con un 23.57%, seguido de los errores de transformación y codificación, con porcentajes muy cercanos (20.59% y 20.238%) respectivamente. Un punto porcentual abajo se presentó el error de habilidades de proceso (19.32%) y finalmente, el error de comprensión, con un 16.14%.

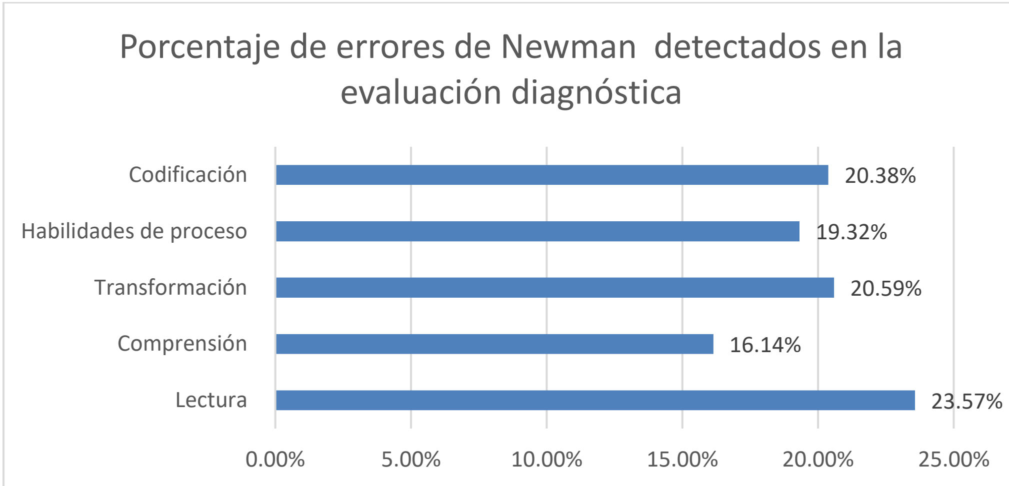


Figura 5 Porcentajes de errores del modelo de Newman detectados en la evaluación diagnóstica de la primera implementación
Fuente: generación propia

Un ejemplo de error de lectura se muestra en la Figura 6 en el que al resolver el tercer problema de la prueba se observa que el estudiante realiza un diagrama de Venn en el que no aplica ningún concepto o propiedad.

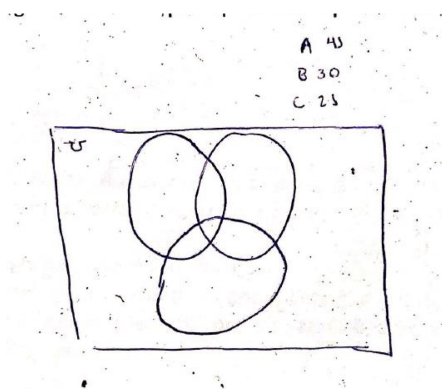


Figura 6 Ejemplo de error de lectura en uno de los estudiantes

En la Figura 7 se muestra un ejemplo de error de comprensión en el cuarto reactivo donde el estudiante realiza el diagrama de Venn asignando valores incorrectos.

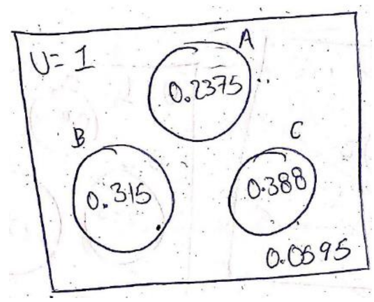


Figura 7 Ejemplo de error de comprensión

En la Figura 8 se muestra un error de transformación, cuando el estudiante al resolver el cuarto problema no logra integrar la información en un solo diagrama de Venn, de forma coherente.

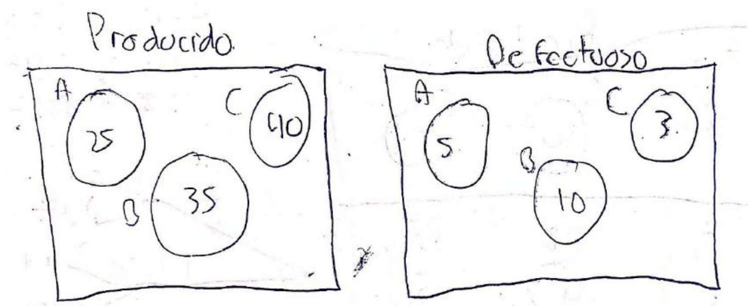


Figura 8 Ejemplo de error de transformación

En la Figura 9 se muestra un error de habilidades de proceso, ya que el estudiante interpreta un 3% y un 5% como un 0.3 y 0.5, al responder el inciso b) del tercer reactivo.

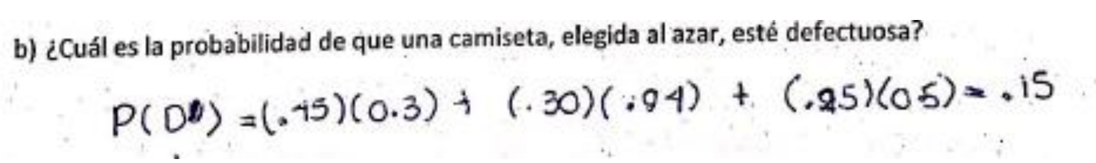


Figura 9 Ejemplo de error de habilidades de proceso

En la Figura 10 se muestran los incisos b), c), y d) del segundo problema que muestran un error de codificación en el que el estudiante interpreta la probabilidad como un porcentaje a pesar de tratarlo en todo el procedimiento como una razón.

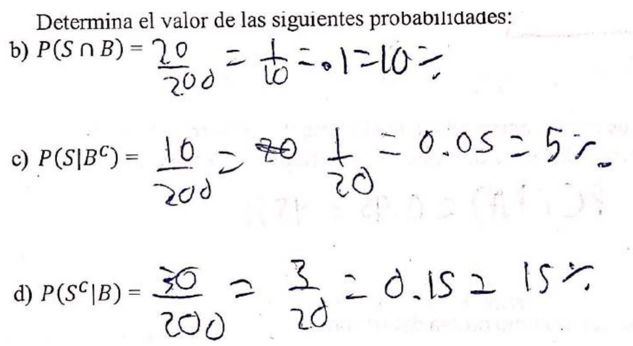


Figura 10 Ejemplo de error de codificación

Utilizando el paquete estadístico R 64 versión 3.6.1, se calcularon las correlaciones entre los pares de errores del modelo de Newman y se realizaron pruebas estadísticas por cada par, para verificar la existencia de una correlación no nula. Las hipótesis nula y alternativa que se plantearon son las siguientes:

$$Ho: r_{x,y} = 0; \qquad Ha: r_{x,y} \neq 0$$

En la Tabla 4 se presentan las correlaciones entre todos los posibles pares de errores del modelo de Newman, los resultados de las pruebas de hipótesis indicaron que todas las correlaciones fueron estadísticamente significativas, con p-valores < 0.05. Las correlaciones más altas se dieron entre el error de comprensión vs el error en habilidades de proceso, entre el error de comprensión vs el error de codificación y entre el error en habilidades de proceso vs el error de codificación, todos ellos con un p-valor menor a 2.2e-16.

Tabla 4 Coeficientes de correlación y p-valor primera implementación

		Error de				
		Lectura	Comprensión	Transformación	En habilidades de proceso	Codificación
Error de	Lectura	1				
	Comprensión	0.3698 $p = 3{,}744 \times 10^{-9}$	1			
	Transformación	0.2599 $p = 4.57 \times 10^{-5}$	0.5964 $p < 2.2 \times 10^{-6}$	1		
	En habilidades de proceso	0.2810 $p = 5.05 \times 10^{-5}$	0.6059 $p < 2.2 \times 10^{-6}$	0.5353 $p = 1.78 \times 10^{-14}$	1	
	Codificación	0.2651 $p = 1.58 \times 10^{-4}$	0.6283 $p < 2.2 \times 10^{-6}$	0.4998 $p = 1.562 \times 10^{-12}$	0.8856 $p < 2.2 \times 10^{-6}$	1

4.1.1 Discusión de los resultados obtenidos en la fase uno.

Esta Fase 1 de la investigación se implementó con el objetivo de realizar un análisis descriptivo de los errores del modelo de Newman cometidos por un grupo de estudiantes de nivel medio superior (17 a 19 años) al resolver problemas verbales de temas de probabilidad y, al mismo tiempo, determinar si dichos errores se encontraban correlacionados, ya que la literatura indica que los errores del modelo de Newman son jerárquicos, vinculados a fases o etapas específicas, de manera que, si un estudiante presenta un error en una etapa, difícilmente podrá pasar a la siguiente correctamente. Los hallazgos en el análisis de los datos indicaron que los estudiantes presentaron porcentajes de error cercanos al 20% en cada uno de los cinco errores del modelo de Newman y que todos los errores están correlacionados significativamente, dándose las correlaciones más altas entre el error de comprensión con el error de transformación (0.5964), entre el error de comprensión con el error de habilidades de proceso (0.6059), el error de comprensión con el error de codificación (0.6283) y entre el error de habilidades de proceso con el error de codificación (0.8856), todas con p-valores menores a 0.05 (ver Tabla 4).

Con respecto al análisis descriptivo, los porcentajes obtenidos en los errores de comprensión (16.14%), proceso (19.32%) y codificación (20.38%) cercanos a 20%, concuerdan con los obtenidos en el estudio de Rohmah y Sutiarso (2018) con 17.39% en el error de comprensión, 23.91% en habilidades de proceso y 19.75% en codificación. Sin embargo, ellos obtuvieron un porcentaje de error de lectura de 4.35% y de transformación de 34.78%, ambos lejanos a lo que reporta nuestro estudio.

En comparación con el estudio de Abdullah, et al., (2015), quienes no encontraron error de lectura y la distribución de porcentajes en los restantes errores de comprensión, transformación, habilidades de proceso y codificación fue de 20.92%, 24.17%, 27.33% y 27.58% respectivamente. Como se observa, estos porcentajes se encuentran en el rango del 20 al 28 por ciento. A pesar de no haberse presentado error de lectura, sus resultados son coherentes con los obtenidos en nuestro estudio, en donde sí se presentó error de lectura.

El estudio correlacional indica que, aunque el error de comprensión tuvo un porcentaje menor de presencia con un 16.14 % comparado con el registro de los otros cuatro errores del modelo de Newman, todos ellos con presencia superior al 19%, la correlación del error de comprensión con los errores de transformación, habilidades de proceso y codificación en todos los casos es superior al 0.59 con un p-valor menor al 2.2e-16; solamente superado por la correlación entre el error de habilidades de proceso y el error de codificación con un coeficiente de correlación de 0.8856 con p-valor menor al 2.2e-16.

Tres de las correlaciones más altas fueron compartidas con el error de comprensión: error de comprensión vs error de transformación, error de comprensión vs el error en habilidades de proceso y error de comprensión vs error de codificación, indicando que cuando un estudiante se equivoca en la comprensión de un problema verbal, difícilmente elige la estrategia de solución apropiada y que además es muy probable que tampoco realice el procedimiento correctamente ni integre la información obtenida para dar una respuesta coherente y correcta con el problema.

4.2. Fase 2 concepción y análisis a priori

Los resultados de la Fase 1 presentaron dos situaciones que se tomaron en cuenta para el diseño de la secuencia didáctica. Por una parte, intervenir sobre la correlación más alta, dada entre el error de habilidades de proceso y el error de codificación, y por otra centrar el diseño en disminuir el error de comprensión que se observó se encuentra correlacionado con los errores de transformación, habilidades de proceso y codificación. La decisión se tomó en función del mayor porcentaje de errores involucrados en un caso o el otro. Si se optaba por el mayor coeficiente de correlación, el porcentaje de errores a considerar es 39.70%, si se optaba por el error de comprensión, el porcentaje de errores a considerar es de 76.43%, por lo tanto, el diseño de la secuencia didáctica se enfocó principalmente en reducir el error de comprensión.

En otro orden de ideas, se observó que a principios del siglo XXI en educación matemática, se aceptó ya, que las representaciones y visualizaciones tienen un impacto considerable en el aprendizaje de los estudiantes (Böcherer-Linder y Eichler, 2018). Por su parte Duval (2002) afirmó que las visualizaciones de los conceptos matemáticos están "en el núcleo de la comprensión en matemáticas" (p. 312). Sin embargo, en la investigación en educación matemática y psicología cognitiva hay evidencia de que la visualización por sí sola no necesariamente fomenta la comprensión de los conceptos matemáticos en los estudiantes, pero si un buen inicio. Fernández (2013) estableció que un concepto matemático se ha aprendido y comprendido cuando se ha desarrollado una variedad de representaciones internas apropiadas, junto con las relaciones funcionales entre ellas. Sin embargo, no basta con las representaciones internas, según Goldin (2007), la interacción entre las representaciones internas y externas es fundamental para la enseñanza y el aprendizaje de un concepto matemático. Una representación externa apropiada debe mostrar los aspectos principales de un concepto matemático y sus relaciones funcionales para apoyar la comprensión del concepto por parte de los estudiantes.

El cambio en las herramientas tecnológicas del siglo XXI propicia un cambio en los recursos semióticos y en las representaciones, lo que lleva a investigar sobre los procesos de representación (Rivera 2011). En la actualidad las representaciones están siendo reconocidas como un componente clave del razonamiento para la resolución de problemas (Fernández, 2013). Por su parte, Arcavi (2003) argumenta que la representación puesta al servicio de la resolución de problemas puede también, ir más allá de su papel procedimental e inspirar una solución general. Por su parte Batanero (2001) indica que los profesores suponen que la elaboración de tablas y gráficos es muy sencilla y dedican poco tiempo a su aplicación y enseñanza, sin embargo elaborar un gráfico supone una primera reducción estadística de la información que se pretende representar.

Sin embargo, la representación por sí misma, como ya se mencionó anteriormente, no necesariamente fomenta la comprensión en los estudiantes (Böcherer-Linder y Eichler, 2018) si no muestra apropiadamente ciertas características, la principal de ellas atribuida por Arcavi (2003, p. 216) es que "ofrece un método de ver lo invisible", es decir, percibir las relaciones e interacciones que la tecnología no puede ver por nosotros. En el contexto de la probabilidad y la visualización del espacio muestral: cualquier manipulación que incremente la transparencia en la relación de los eventos debería aumentar la respuesta correcta (Sloman, Oyer, Slovak y Stibel 2003).

En el campo de la Educación Matemática, son importantes dos aspectos con respecto a la visualización, su apropiación por parte del estudiante y su eficiencia. En el contexto del razonamiento probabilístico, la investigación en psicología cognitiva indica que la claridad del conjunto de relaciones establecidas en la representación del espacio muestral impacta en el desempeño de tareas relacionadas con la probabilidad condicionada y el Teorema de Bayes, las principales dificultades que se atribuyen a los problemas de probabilidad en espacios muestrales reducidos, es el hecho que algunos eventos están anidados (Lesage, Navarrete y Neys, 2013; Sloman et al., 2003) o son dependientes por naturaleza.

Existen diferentes visualizaciones que pretenden representar gráficamente las relaciones o situaciones establecidas en el espacio muestral de manera eficiente, para el cálculo de probabilidades en espacios muestrales reducidos. Cuatro de ellas son: el diagrama de árbol, el diagrama de Venn, el cuadrado Unitario y la Tabla de doble entrada.

En el diagrama de árbol, las relaciones lógicas entre conjuntos y subconjuntos se visualizan mediante líneas. Los subconjuntos están en un nivel más bajo que los conjuntos en el diagrama de árbol conectados y relacionados mediante ramas (Böcherer-Linder y Eichler, 2018), lo que implica jerarquía.

Para utilizar el diagrama de Venn como una visualización del espacio muestral se sugiere cambiar la notación del conjunto universo U por S de espacio muestral (Sample Space) e integrar los eventos como si se tratasen de conjuntos, respetando sus operaciones básicas (unión, intersección, resta y complemento) que también son útiles y reconocidas en el campo de la probabilidad.

La tabla de doble entrada permite visualizar la mayoría de las interacciones entre los conjuntos y subconjuntos representándolos mediante filas y columnas, apreciando las diversas interacciones entre los eventos en el espacio muestral.

En el cuadrado unitario, las relaciones de subconjuntos se visualizan por áreas que se sobreponen e incrustan en otras áreas, esto a diferencia del diagrama de árbol se lleva a cabo sin relación jerárquica, lo que significa que las relaciones de conjuntos y subconjuntos se pueden considerar tanto horizontales como verticales (Böcherer-Linder y Eichler, 2018). Por tanto, el cuadrado unitario se puede entender como una conexión visual entre fracciones y probabilidades, al considerar las subdivisiones como una fracción del cuadrado unitario.

Muy a menudo las investigaciones se enfocan en cuáles son las representaciones correctas o cuál sería el registro más accesible para lograr que los estudiantes comprendan el objeto matemático, en este caso el problema planteado usando algún conocimiento matemático particular (Duval, 2016). De hecho, en el contexto del razonamiento en espacios muestrales reducidos, los resultados de Binder, Krauss, y Bruckmaier (2015) sugieren una ventaja de la tabla de doble entrada en comparación con el diagrama de árbol, aunque no hay diferencia estadística reportada.

Böcherer-Linder y Eichler (2018) realizan un estudio cuantitativo comparando la eficiencia entre el cuadrado unitario y el diagrama de árbol. La finalidad de este estudio no es comparar las ventajas entre las cuatro visualizaciones sino, más bien, valorar cuantitativamente la disposición de los estudiantes de nivel medio superior a utilizar diversas visualizaciones e incluso transitar entre ellas para comprender y solucionar problemas de razonamiento en espacios muestrales reducidos.

Si se considera que, la comprensión en matemáticas supone la coordinación de al menos dos registros de representación semiótica (Duval, 2016) se propone entonces el uso de una unidad didáctica que posibilite convertir eficientemente el registro del lenguaje natural al registro gráfico mediante el uso de cuatro representaciones, para proporcionar al estudiante la posibilidad de transitar entre estos dos registros semióticos favoreciendo la comprensión del problema a través de la visualización del espacio muestral.

4.3. Fase tres de experimentación

Para la implementación de la unidad didáctica se invitó a participar a un grupo de estudiantes con dificultades en los temas de probabilidad condicionada y Teorema de Bayes asistiendo durante cuatro sesiones, cada una de 100 minutos, para conocer una propuesta didáctica diferente a la impartida en el curso ordinario. Su participación sería voluntaria y con ella podrán cubrir las actividades extracurriculares desarrolladas por la unidad académica durante las semanas del 1° al 11 de abril de 2019, logrando la participación de 45 estudiantes del turno matutino integrado como indica la Tabla 5:

Tabla 5 Distribución por género y área terminal de los estudiantes voluntarios en la primera implementación

	Matutino	
	Hombres	Mujeres
Humanidades	5	28
Ciencias Sociales	3	9

La segunda y tercera sesión de la unidad didáctica estuvieron enfocadas en lograr la conversión del registro de lenguaje natural al registro grafico utilizando cualquiera de las cuatro representaciones gráficas que se intentó propiciar. Durante el desarrollo de la cuarta sesión se centró el trabajo en la conversión del lenguaje natural de preguntas de probabilidad condicionada y Teorema de Bayes y su vinculación con la interpretación del espacio muestral. La unidad didáctica finalizó con la aplicación de dos instrumentos, en el primero se solicitó la redacción de un problema contextualizado donde pudieran identificar cuatro preguntas: una pregunta de porcentaje, una de probabilidad clásica, una pregunta de probabilidad condicionada y una pregunta de Teorema de Bayes. Finalmente se aplicó una evaluación equivalente a la evaluación diagnóstica con la que inició la unidad didáctica.

4.4 Fase 4 el análisis a posteriori y evaluación

Para realizar el análisis de contraste entre la evaluación diagnóstica y la de cierre de la unidad didáctica se extrajeron los resultados logrados por los 45 voluntarios que participaron en la implementación de la unidad didáctica. Correspondiente a una muestra al 90% de confianza con menos del 9 % de error de la muestra inicial.

A continuación, se muestran los gráficos obtenidos en la evaluación diagnóstica y en la evaluación de cierre:

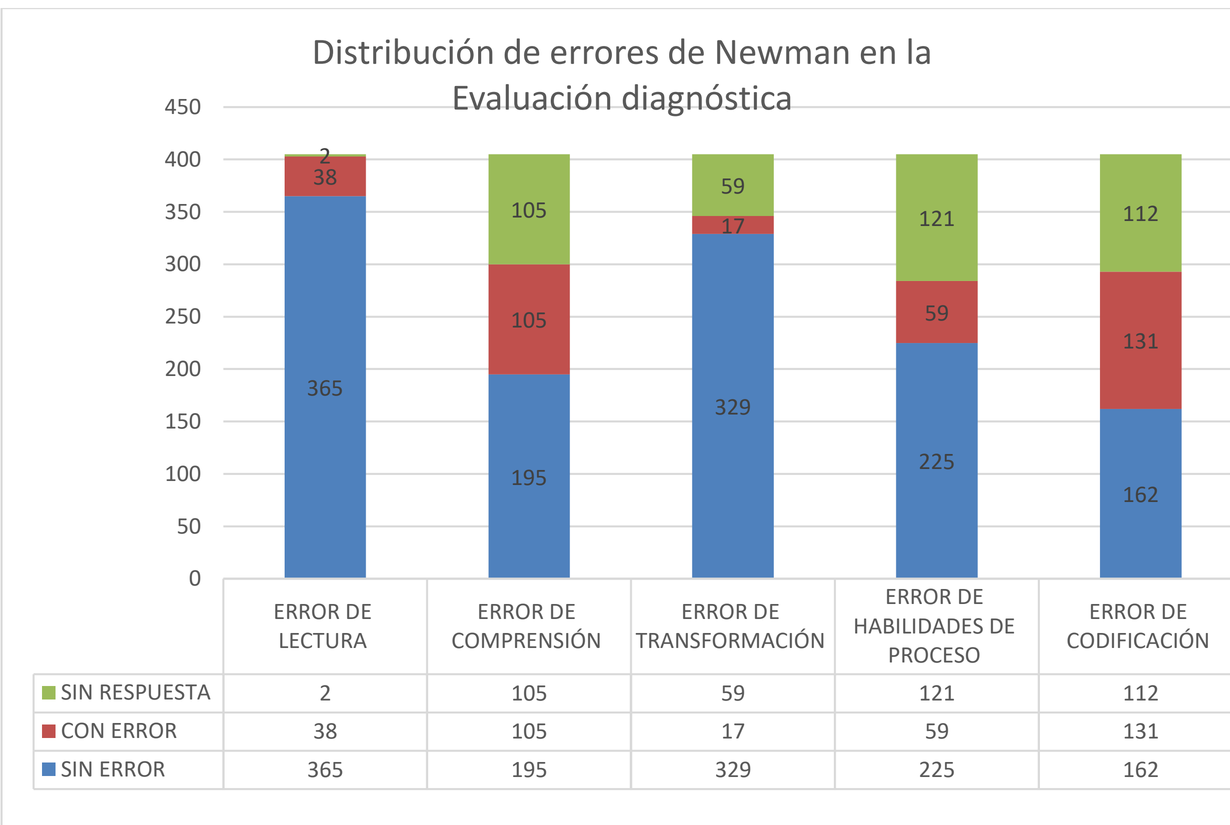


Figura 11 Distribución de errores del modelo de Newman en la evaluación diagnostica primera implementación
Fuente: generación propia

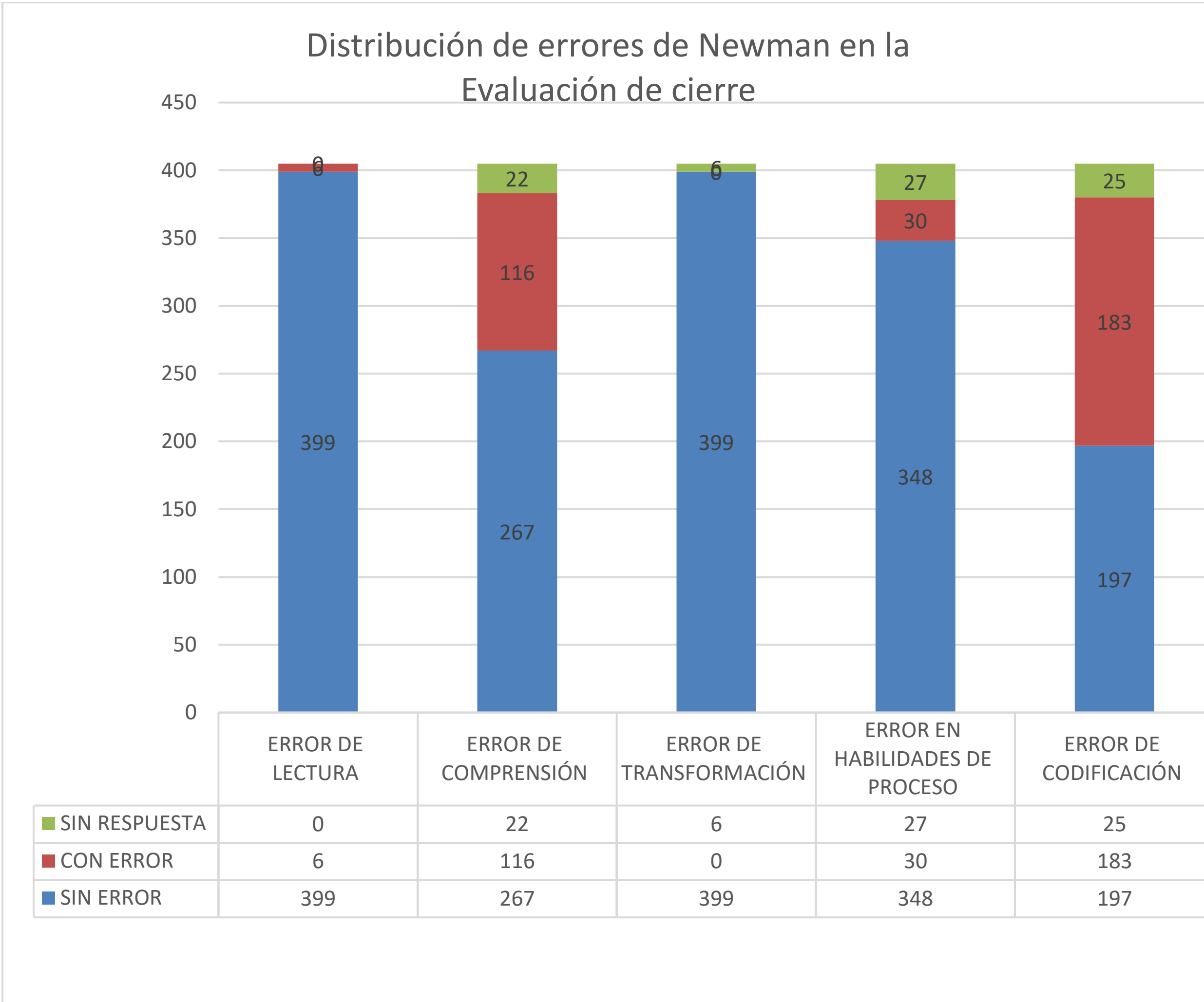


Figura 12 Distribución de errores del modelo de Newman cierre primera implementación

Fuente: generación propia

La información en las gráficas indica que, además de la modificación en la frecuencia absoluta de los errores del modelo de Newman entre la evaluación diagnóstica y la evaluación de cierre, se registró un aumento en la capacidad de respuesta en los estudiantes al reducir el porcentaje de preguntas sin solucionar. Cuando se evalúa el error de lectura se observa una reducción de 0.49%, el porcentaje de preguntas sin respuesta, para el error de comprensión decrece en 20.49%, 13.09% para el error de transformación, en el error de habilidades de proceso se presenta un 23.21 % de decremento y 21.48% se redujo la presencia de respuestas vacías al analizar los errores de codificación. Esto explica por qué se registraron incrementos en el error de comprensión (incremento del 2.72%) y en el error de codificación (incremento del 12.84%). El error de lectura se redujo en 7.9%, el error de transformación en 4.2% y el de habilidades de proceso registró un decremento de 7.16%.

En cuanto al uso de representaciones se puede observar cómo el uso del diagrama de Venn pasó del 68% en la evaluación diagnóstica al 33% en la de cierre, y cómo el diagrama de árbol se ubicó como el preferido por los estudiantes después de la implementación.

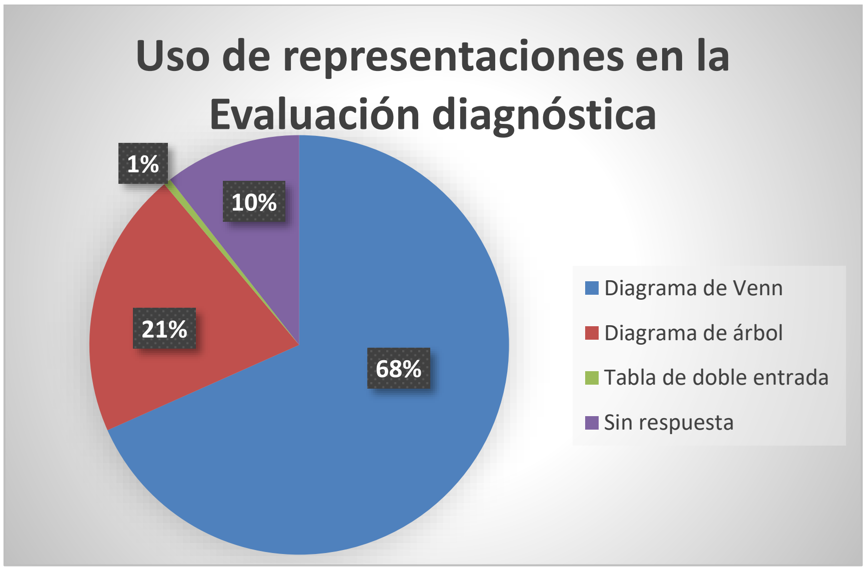


Figura 13 Porcentajes de uso de las representaciones en la Evaluación diagnóstica primera implementación
Fuente: generación propia

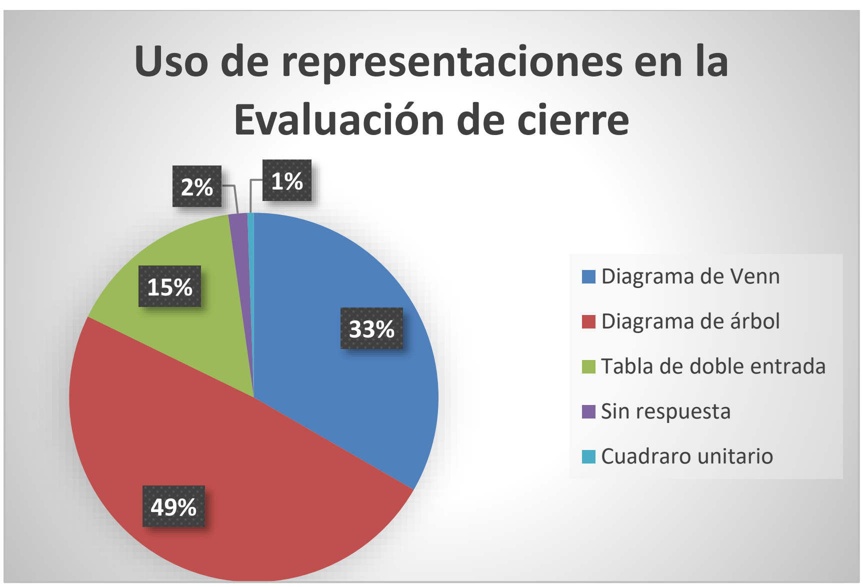


Figura 14 Porcentaje de uso de representaciones en la Evaluación de cierre primera implementación
Fuente: generación propia

Para poder realizar pruebas de hipótesis entre las medias antes y después de la implementación, se realizaron pruebas de normalidad, que resultaron positivas mostrando p-valores mayores a .05 (Tabla 6):

Tabla 6 Concentrado de pruebas de normalidad primera implementación

Dimensión	**Shapiro-Wilk**		**Kolmogorov-Smirnov**		**Jarque Bera**	
	W	p	D	p	χ^2	p
Antes	0.97166	0.3322	0.87602	0.5229	0.45391	0.7970
Después	0.9591	0.1129	0.12781	0.06292	0.80863	0.6674

Por tanto, fue posible realizar una prueba T Student para comparar la evaluación diagnóstica con la Evaluación de cierre planteando las siguientes hipótesis:

$$\text{Ho:}\mu_{final} - \mu_{diagnóstica} = 0,\ \ \text{Ha: } \mu_{final} - \mu_{diagnóstica} > 0.$$

El resultado indica un $t = -3.345$, con un p- valor = 0.001211 por lo que se rechaza la hipótesis nula aceptando que sí existen diferencias significativas en las medias antes y después de aplicar la unidad didáctica.

En los resultados de la creación de problemas, todos los estudiantes lograron plantear una situación contextualizada susceptible de conversión del registro verbal al gráfico y plantear las preguntas solicitadas, la probabilidad condicionada mostró dificultades en el registro verbal y por tanto también en su conversión al registro gráfico y/o analítico.

Capítulo 5

SEGUNDA IMPLEMENTACIÓN

5.1. Fase 1 análisis preliminar

La UAC: Estadística, Probabilidad y Temas Selectos de Matemáticas se imparte en el tercer año de educación media superior, en los grupos de Humanidades y Ciencias Sociales. El grupo del curso extraordinario uno se integró con todos los estudiantes de ambos turnos y grupos que no lograron acreditar, según los criterios establecidos.

Durante el curso ordinario se presentaron cuatro evaluaciones parciales, si el resultado de una evaluación parcial no fue aprobatorio los estudiantes asistieron durante dos semanas a sesiones de asesorías para presentar una segunda evaluación de los temas abordados durante el parcial, esta evaluación se considera como el ordinario por partes. Para aprobar el curso se requiere que los estudiantes obtengan una sumatoria igual o superior a 24 puntos en los cuatro parciales sin acumular dos parciales con calificaciones no aprobatorias después de presentar el ordinario por partes. Por tanto, el grupo de extraordinario uno estuvo conformado por estudiantes que conocieron el contenido temático en el curso ordinario, además recibieron asesorías tanto por su docente titular como por otros docentes y contaron con el apoyo de estudiantes de la Facultad de Físico Matemáticas que prestan su servicio social y prácticas profesionales en la Unidad Académica apoyando a los estudiantes en el estudio de los temas que indica el programa, todo ello sin lograr aprobar el contenido temático del curso.

Este grupo estuvo conformado por 18 estudiantes que durante el curso ordinario se encontraban distribuidos como se muestra en la Tabla 7:

Tabla 7 Distribución por género, área terminal y turno de los estudiantes en la segunda implementación

	Matutino		**Vespertino**	
	Hombres	Mujeres	Hombres	Mujeres
Humanidades	3	2	3	1
Ciencias Sociales	0	0	5	4

A la evaluación diagnóstica aplicada en la primera implementación se le realizaron algunos ajustes para que, tanto el planteamiento de la situación como las preguntas, se encontraran en el registro del lenguaje natural, los ajustes que se realizaron fueron los siguientes:

- La notación de decimales es cambiada a registro de lenguaje natural, por ejemplo 0.95 se cambia a 95 de las 100 veces.
- Los incisos que correspondían a la segunda pregunta y estaban dados en forma analítica se realizaron en el registro de lenguaje natural.
- En las preguntas 3 y 4 se eliminó el uso de porcentajes y se brindó la información en valores enteros.

Esto con la finalidad de aplicar la Evaluación Diagnóstica en su mayoría en el registro del lenguaje natural. En cuanto al contenido, no se realizaron ajustes ni modificaciones, la Evaluación estuvo conformada por cuatro problemas verbales del tema de probabilidad condicionada y Teorema de Bayes propuestos en la evaluación diagnóstica de la primera implementación.

La finalidad de esta evaluación coincide con la de la primera implementación y su objetivo fue identificar y cuantificar los errores del modelo de Newman que comenten los estudiantes del curso extraordinario uno al resolver problemas de probabilidad en espacios muestrales reducidos.

La evaluación de los criterios, la recolección de datos y el análisis de la segunda implementación, coinciden con la expuesta en el capítulo anterior por lo que no se describe en este capítulo.

Se recopilaron 810 datos de los cuales, 243 correspondieron a errores del modelo de Newman (30%).

En la Figura 15 se muestra la distribución de porcentajes por cada tipo de error del modelo de Newman. El error que con mayor frecuencia se presentó fue el error de codificación con un 33.33 %, seguido del error de comprensión con un porcentaje de 30.04% los errores de transformación y habilidades de proceso con valores cercanos (18.52 % y 16.46 %) respectivamente y una presencia del 1.65 % de error de lectura.

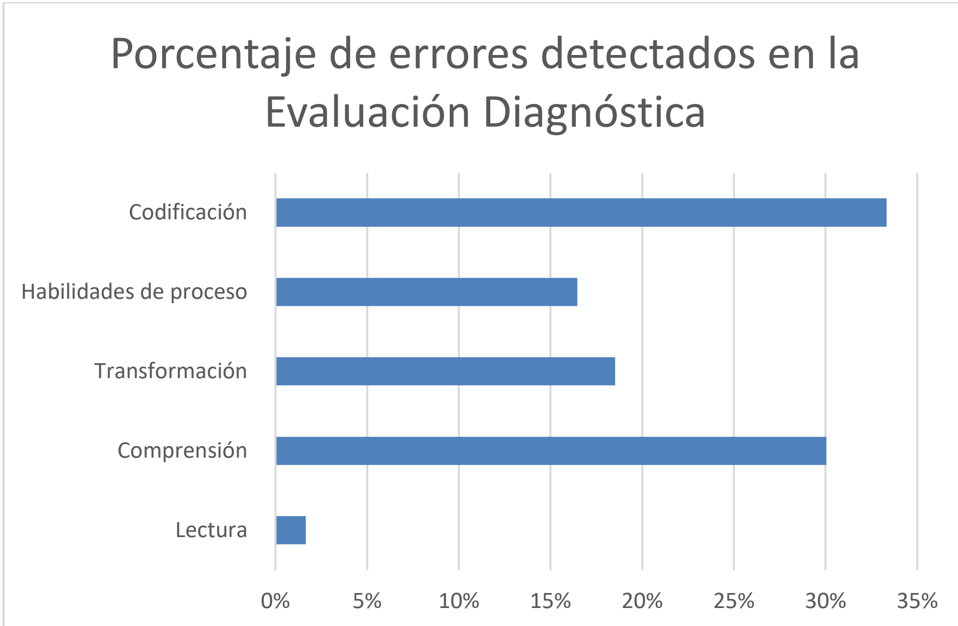


Figura 15 Porcentajes de errores del modelo de Newman detectados en la evaluación diagnóstica de la primera implementación
Fuente: generación propia

Utilizando el paquete estadístico R 64 versión 3.6.1 se calcularon las correlaciones entre los pares de errores del modelo de Newman y se realizaron pruebas estadísticas por cada par, para verificar la existencia de una correlación no nula, la hipótesis que alternativa que se planteó fue:

$$Ho: r_{x,y} = 0; \qquad Ha: r_{x,y} \neq 0$$

En la Tabla 8 se presentan las correlaciones que se pueden calcular entre todos los posibles pares de errores del modelo de Newman, los resultados de las pruebas de hipótesis indican que son pocos datos para establecer todas las correlaciones y las que sí lograron ser calculadas todas fueron estadísticamente significativas, con p-valores < 0.05. Las correlaciones más altas se dieron entre el error de comprensión vs el error de codificación, entre el error de comprensión vs el error de en habilidades de proceso y entre el error de comprensión vs el error de transformación, todos ellos con un p-valor menor o igual a 9.80e-4.

Tabla 8 Coeficientes de correlación y p-valor segunda implementación

		Error de				
		Lectura	Comprensión	Transformación	En habilidades de proceso	Codificación
Error de	Lectura	1				
	Comprensión		1			
	Transformación		0.345 $p = 1.19 \times 10^{-4}$	1		
	En habilidades de proceso		0.4630 $p = 9.80 \times 10^{-4}$	0.2780 $p = 6.98 \times 10^{-3}$	1	
	Codificación		0.6590 $p = 1.09 \times 10^{-4}$	0.2780 $p = 3.10 \times 10^{-3}$	0.493 $p = 9.6 \times 10^{-4}$	1

Estos resultados son consistentes con los obtenidos en la primera fase de la primera implementación, tres de las correlaciones más altas son compartidas con el error de comprensión: error de comprensión vs error de transformación, error de comprensión vs el error en habilidades de proceso y error de comprensión vs error de codificación, indicando que cuando un estudiante se equivoca en la comprensión de un problema verbal, difícilmente elige la estrategia de solución apropiada y que además es muy probable que tampoco realice el procedimiento correctamente ni integre la información obtenida para dar una respuesta coherente y correcta con el problema.

5.2. Fase 2 Concepción y análisis a priori

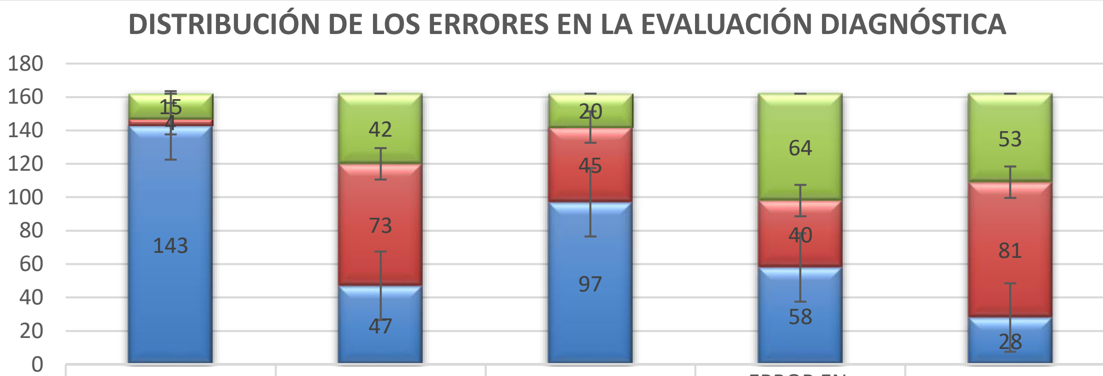
Las similitudes en los resultados de la fase 1 con la primera implementación permiten continuar con el diseño de la unidad didáctica con adecuaciones mínimas en la evaluación diagnóstica y la Evaluación de cierre eliminando el uso de decimales, porcentajes y expresiones analíticas como ya se mencionó con anterioridad para darle prioridad al registro del lenguaje natural.

5.3. Fase 3 de experimentación

La implementación de la unidad didáctica se llevó a cabo durante cuatro sesiones de 100 minutos cada una y una sesión inicial de 50 minutos en la que se implementó la evaluación diagnóstica, continuando con el esquema de la primera implementación.

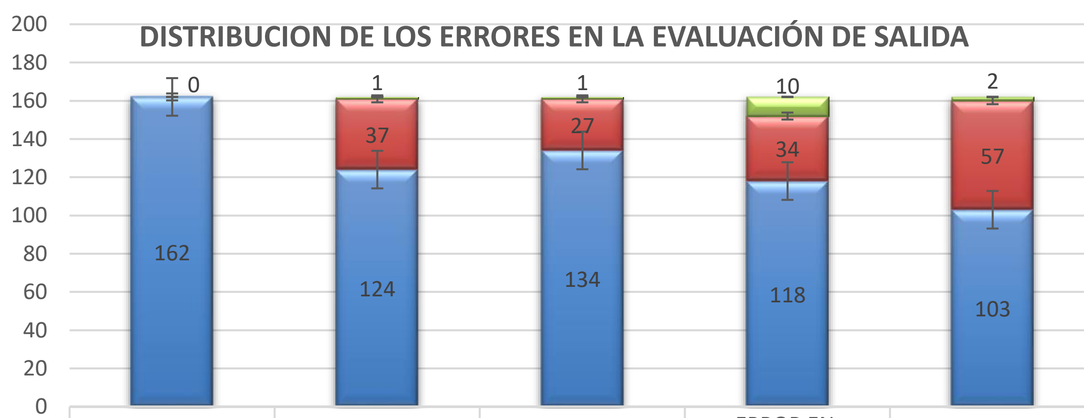
5.4 Fase 4 El análisis a posteriori y la evaluación

Se realiza el análisis de contraste entre la evaluación diagnóstica y la evaluación de cierre de la unidad didáctica registrándose la siguiente información:



	ERROR DE LECTURA	ERROR DE COMPRENSIÓN	ERROR DE TRANSFORMACIÓN	ERROR EN HABILIDADES DE PROCESO	ERROR DE CODIFICACIÓN
SIN RESPUESTA	15	42	20	64	53
CON ERROR	4	73	45	40	81
SIN ERROR	143	47	97	58	28

Figura 16 Distribución de errores en la evaluación diagnóstica
Fuente: Generación propia



	ERROR DE LECTURA	ERROR DE COMPRENSIÓN	ERROR DE TRANSFORMACIÓN	ERROR EN HABILIDADES DE PROCESO	ERROR DE CODIFICACIÓN
SIN RESPUESTA	0	1	1	10	2
CON ERROR	0	37	27	34	57
SIN ERROR	162	124	134	118	103

Figura 17 Distribución de errores en la evaluación de salida
Fuente: Generación propia

La información en las gráficas indica que además de la modificación en la frecuencia absoluta de los errores entre la evaluación diagnóstica y la evaluación de cierre, se registró un aumento en la capacidad de respuesta en los estudiantes al reducir el porcentaje de preguntas sin responder.

Cuando se evalúa el error de lectura, se redujo en 9.26 % el porcentaje de preguntas sin respuesta, el error de comprensión decrece en 25.31%, 11.73% para el error de transformación, en el error de habilidades de proceso se presentó un 33.33 % de decremento y 31.48% se redujo la presencia de respuestas vacías al analizar los errores de codificación.

Al analizar los errores también se detectó que en todos los casos se registró un decremento en la presencia de errores, se reduce en 2.47 % el error de lectura, el error de comprensión sobre el que se diseña la unidad didáctica presenta la mayor reducción pasando de un 45.06 % de presencia en la evaluación diagnóstica a un 22.83 % en la evaluación de cierre es decir decreció en más del 22%, el error de transformación se reduce en 11.11% , 3.70% es lo que decrece el error de habilidades de proceso y 14.81% el error de codificación.

Estos resultados coinciden con el caso de estudio de Abdullah, et al., (2015), ellos no encontraron error de lectura y la distribución de porcentajes en los restantes errores de comprensión, transformación, habilidades de proceso y codificación fue de 20.92%, 24.17%, 27.33% y 27,58%, respectivamente. Sus resultados con coherentes con los obtenidos en nuestro estudio donde el error de comprensión (22.83%), el error de transformación (16.66%), el error de habilidades de proceso (20.98%) son muy cercanos, observándose la mayor diferencia entre el error de codificación (35.18%) con 7.6% de diferencia.

En cuanto al uso de representaciones (Figura 18) se puede observar en la evaluación diagnóstica la presencia de un 15% sin respuesta, porcentaje que desaparece completamente en la evaluación de cierre.

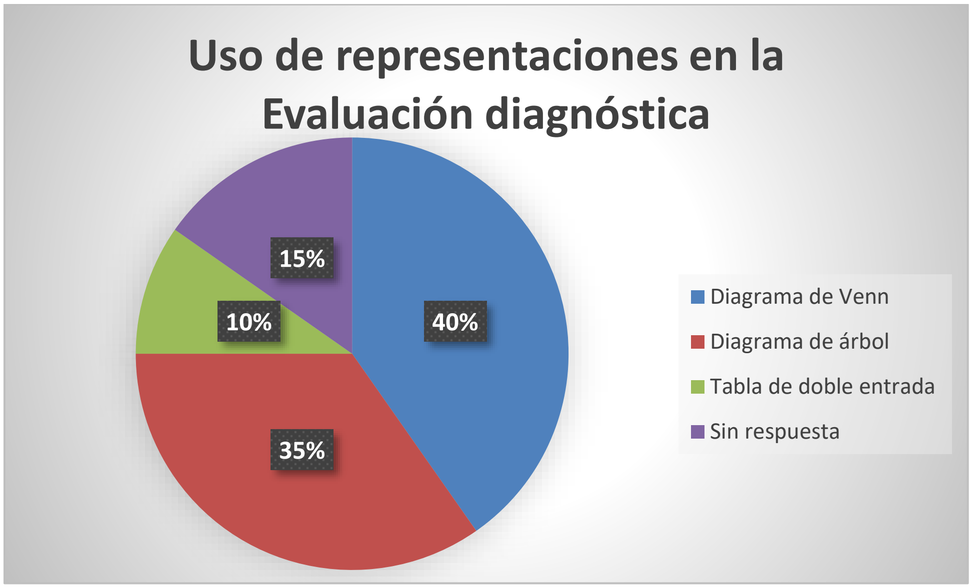


Figura 18 Porcentajes de uso de las representaciones en la Evaluación diagnóstica segunda implementación

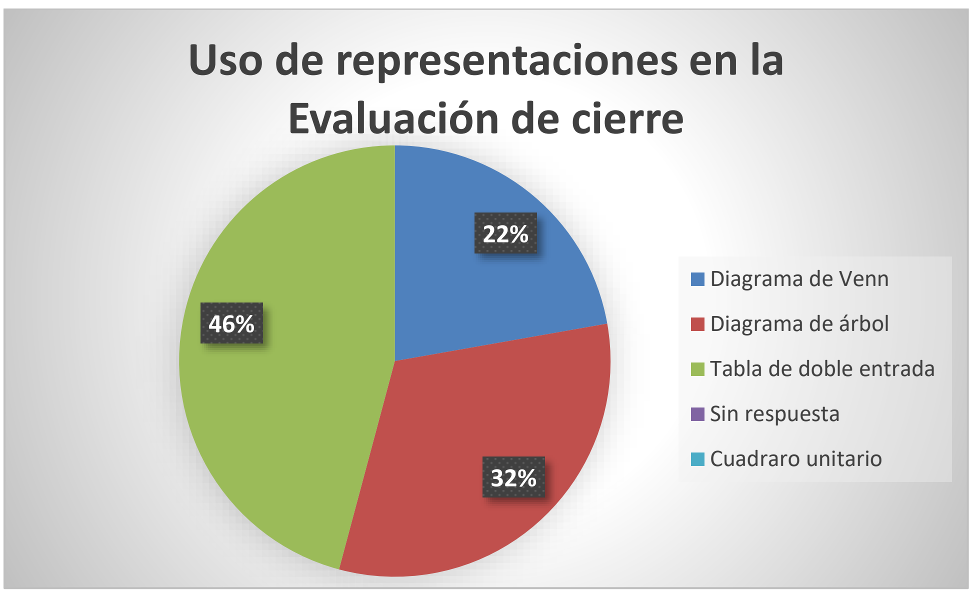


Figura 19 Porcentaje de uso de representaciones en la Evaluación de cierre segunda implementación

La propuesta del cuadrado unitario no fue representativa para los estudiantes, teniendo un bajo porcentaje en la primera aplicación y nulo en la segunda aplicación.

Cuando se realizan las pruebas de normalidad se detecta un caso atípico que es retirado, al repetir las pruebas se registran los siguientes datos:

Tabla 9 Concentrado de pruebas de normalidad segunda implementación

Dimensión	Shapiro-Wilk		Kolmogorov-Smirnov		Jarque Bera	
	W	p	D	p	χ^2	p
Antes	0.95464	**0.5338**	0.18525	**0.604**	0.95569	0.6201
Después	0.95607	**0.5591**	0.14108	0.8876	0.99282	0.6087

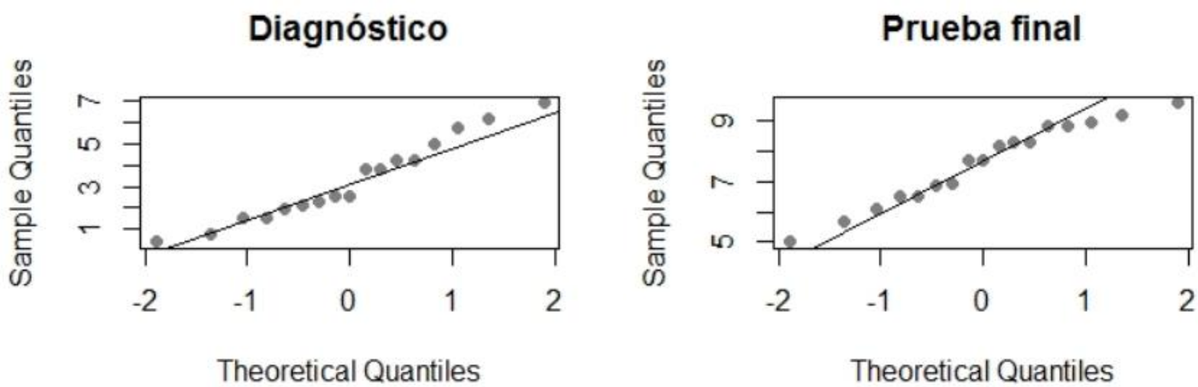


Figura 20 Gráfica QQ (cuantil-cuantil)

Fuente: Generación propia

Estos resultados permiten realizar una prueba T Student para comparar la evaluación diagnóstica con la evaluación de cierre, consistentemente con el primer ciclo. El valor de t = -7.4263, p-valor= 1.436e-06 por lo que se rechaza la hipótesis nula y se acepta la alternativa de que las medias son significativamente diferentes antes y después de la implementación de la secuencia didáctica.

$$\text{Ho:}\mu_{final} - \mu_{diagnóstica} = 0,\ \text{Ha: } \mu_{final} - \mu_{diagnóstica} > 0.$$

Lo que nos permite afirmar que si hay diferencia significativa entre la muestra de entrada y la muestra de salida al implementar la secuencia didáctica.

CONCLUSIONES

La investigación se implementó con dos objetivos particulares que pueden vincularse, por un lado se identificaron los errores que desde el modelo de **Newman** presentan los estudiantes de nivel medio superior al solucionar problemas de probabilidad en espacios muestrales reducidos y por otro determinar si dichos errores se encuentran correlacionados, ya que la literatura indica que los errores desde el modelo de **Newman** son jerárquicos vinculados a fases o etapas específicas, de manera que, si un estudiante presenta un error en una etapa, difícilmente podrá pasar a la siguiente correctamente u obtener el resultado correcto.
Con respecto al análisis descriptivo de la prueba de salida los porcentajes obtenidos en el error de comprensión (22.83%), el error de transformación (16.66%), el error de habilidades de proceso (20.98%) y error de codificación (35.18%) son consistentes con el caso del estudio de Abdullah, et al., (2015), que tampoco reporta la presencia de error de lectura y la distribución de porcentajes en los restantes errores de comprensión, transformación, habilidades de proceso y codificación fue de 20.92%, 24.17%, 27.33% y 27,58%, respectivamente.

El estudio correlacional en la prueba diagnóstica indica que, el error de comprensión que mostró una presencia de 30.04% también muestra coeficientes de correlación del error de comprensión con los errores de transformación (0.3450), habilidades de proceso (0.4630) y codificación (0.6590) con un p-valor inferior al 9.8e-4. Esta información puede orientar la práctica del docente en implementar actividades que propicien una mayor comprensión del problema impactando indirectamente en una disminución de errores de transformación, habilidades de proceso y codificación que incrementaran su desempeño en la resolución de problemas.

Tres de las correlaciones más altas son compartidas con el error de comprensión: error de comprensión vs error de transformación, error de comprensión vs el error en habilidades de proceso y error de comprensión vs error de codificación, indicando que cuando un estudiante se equivoca en la comprensión de un problema verbal, difícilmente estará en posibilidades de elegir la estrategia de solución apropiada y que además es muy probable que tampoco podrá realizar el procedimiento correctamente ni integrará la información obtenida para dar una respuesta coherente y correcta con el problema.

Las tres pruebas de normalidad realizadas (Shapiro- Wilk, Kolmogorov-Smirnov y Jarque Bera) después de retirar un dato atípico son positivas, lo que permite realizar una prueba T- Student para comparar la evaluación diagnostica con la evaluación de cierre con un valor de t = -7.4263, p-valor= 1.436e-06 por lo que se rechaza la hipótesis nula y se acepta la alternativa de que las medias son significativamente diferentes antes y después de la implementación de la secuencia didáctica.

$$\text{Ho:}\mu_{final} - \mu_{diagnóstica} = 0,\ \text{Ha: } \mu_{final} - \mu_{diagnóstica} > 0.$$

Lo que nos permite aceptar la hipótesis, de que los estudiantes que desarrollan más de una representación gráfica, como estrategia de solución en problemas verbales de probabilidad de espacios muestrales reducidos comenten menos errores y además incrementan su capacidad de respuesta.

Como continuidad al presente trabajo se puede plantear añadir alguna otra estrategia enfocada en abatir el error de codificación que también mostró resultados sobresalientes en las dos implementaciones que analiza el presente trabajo. Y por otro lado ampliarla a una investigación mixta que evalúe otros aspectos cualitativos como la creación de problemas o la motivación.

Referencias

Abdullah, A. H., Abidin, N. L. Z., y Ali, M. (2015). Analysis of students' errors in solving Higher Order Thinking Skills (HOTS) problems for the topic of fraction. *Asian Social Science*, *11*(21), 133–142.htps://doi.org/10.5539/ass.v11n21p133

Arcavi, A. (2003). *The role of visual representations in the learning of mathematics. Educational Studies in Mathematics*, 52(3), 215–241. https://doi.org/10.1023/A:1024312321077

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno, P. Gómez (Eds.). *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp. 33-60). Colombia. Una empresa docente.

Ashlock, R. B. (2005). Error patterns in computation (8th ed.). New York: Merrill

Batanero, C. (2001). *Didáctica de la Estadística*: Granada: GEEUG.

Bishop, A. J. (1980). Spatial abilities and mathematics education—A review. *Educational studies in mathematics*, *11*(3), 257-269.

Bishop, A. J. (1983). Space and geometry. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematical concepts and processes* (pp. 175–203). New York: Academic Press.

Binder, K., Krauss, S., y Bruckmaier, G. (2015). Effects of visualizing statistical information an empirical study on tree diagrams and 2 × 2 tables. *Frontiers in psychology*, *6*, 1-9. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2015.01186

Bodner, G., y Domin, D., (2000). Mental models: The role of representations in problem solving in Chemistry. *University Chemistry Education*, 4, 24-30.

Brandsford, J. y Stein, B. (1986). *Solución IDEAL de problemas. Guía para mejor pensar, aprender y crear*. Madrid: Labor.

Böcherer-Linder, K., Eichler, A. (2017). The Impact of Visualizing Nested Sets. An Empirical Study on Tree Diagrams and Unit Squares. *Frontiers in Psychology*, *7*, 1-11. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2016.02026

Böcherer-Linder, K., Eichler, A., Vogel, M., (2017). *Representing subset relations with tree diagrams or unit squares? CERME 10, Dublin Irland.* Recuperado de https://hal.archives-ouvertes.fr/hal 01950553

De Faria, E., (2006). Ingeniería Didáctica *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*, (1), 1–9.

Duval, R. (2002) Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. En F. Hitt, (Ed.), *Representations and Mathematics Visualization*, (pp. 311-335). North American Chapter of PME: Cinvestav-IPN.

Diezmann, C. M. (2000). The difficulties students experience in generating diagrams for novel problems. In T. Nakahara y M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 25 th annual conference of the international group for the psychology of mathematics education* (pp. 241–248). Japan: Hiroshima.

Effandi, Z., Siti, M., (2010). Analysis of students´error in learning of quadratic equations. *International Education Studies*, 3(3), 105-110.

Ellerton, N. F., y Clements, M. A., (1996). Newman error analysis. A comparative study involving Year 7 students in Malaysia and Australia. *Technology and mathematics education*, 186-193.

Fernández, J., Elortegui, N., Moreno, T., y Rodríguez, J., (2002). *Como hacer unidades didácticas innovadoras.* (2ª ed). Sevilla, España: Diada.

González, J. (2001). El paradigma interpretativo en la investigación social y educativa: nuevas respuestas para viejos interrogantes. *Cuestiones pedagógicas*, 15, 227-246.

Hawes, Z., y Ansari, D. (2020). What explains the relationship between spatial and mathematical skills? A review of evidence from brain and behavior. *Psychonomic Bulletin & Review*. https://doi.org/10.3758/s13423-019-01694-7

Johnson-Laird, P., (2010). Mental models and human reasoning. *PNAS Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 107(43), 1824318250. https://doi.org/10.1073/pnas.1012933107

Kemmis, S. y Mc Tagart, R (1988). *Cómo planificar la investigación-acción*. Barcelona: Laertes.

Krutetskii, V. A. (1969). Papers in J. Kilpatrick y I. Wirszup (Eds.), *Soviet studies in mathematics education: Vol. II, The structure of mathematical abilities*. Chicago: University of Chicago Press.

Larkin, J., Mc Dermott, J., Simon, D., y Simon, H., (1980). Expert and Novice Performance in Solving Physics Problems. *Science*, 208(4450), 1335-1342.

Lean, G. A., y Clements, M. A. (1981). Spatial ability, visual imagery and mathematical performance. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 267–299.

Lesh, R. (1999). The development of representational abilities in middle school mathematics. In Irving E. Sigel (Ed.), *Development of mental representation: Theories and application* (pp. 323-349). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Liljedahl, P., Santos-Trigo, M., Malaspina, U., Bruder, R., (2016). *Problem Solving in Mathematics Education.* Springer International Publishing. Springer International Publishing.

Lohman, D. F. (1996). Spatial ability and G. En I. Dennis y P. Tapsfield (Eds.), *Human abilities: Their nature and assessment* (pp. 97–116). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Meyer, R. (1986). *Pensamiento, resolución de problemas y cognición*. Barcelona: Paidós

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (1980). *Agenda para la Acción: recomendaciones para Matemáticas Escolares de los años 80.* VA: Author. Recuperado de http://www.nctm.org/standards/content.aspx?id=17278

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: Author

Newman, N. A. (1977). An analysis of sixth-grade pupils' errors on written mathematical tasks. *Victorian Institute of Educational Research Bulletin*, (39), 31-43.

Perales, F. (1993). La resolución de problemas: una revisión estructurada. Enseñanza de las ciencias: *Revista de investigación y experiencias didácticas* 11 (2). 170-178

Polya, G. (1945). *Cómo plantear y resolver problemas.* México, D. F.: Trillas.

Presmeg, N. C. (1986). Visualization in high school mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *6*, 42–46. htpps//org.doi/10.1007/BF00305075.

Presmeg, N. (2008). Spatial abilities research as a foundation for visualization in teaching and learning mathematics. In *Critical issues in mathematics education* (pp. 83-95). Boston, MA: Springer.

Presmeg, N., y Lerman, S. (2014). Visualization and learning in mathematics education. *Encyclopedia of mathematics education*, 636-640.

Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*. Granada: Comares

Prakitipong, N., y Nakamura, S. (2006). Analysis of mathematics performance of grade five students in Thailand using Newman procedure. *Journal of International Cooperation in Education, 9*(1), 111-122.

Presmeg, N. (2008). Spatial abilities research as a foundation for visualization in teaching and learning mathematics. In *Critical issues in mathematics education* (pp. 83-95). Springer, Boston, MA.

Pribul, J., y Bodner, G., (1987). Spatial ability and its role in organic chemistry: a study of four organic courses. *Journal of Research in Science Teaching*, 24, 229-240.

Rico, L. (2002). Aproximación a la Investigación en Didáctica de la Matemática. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 1*, 39-63.

Rohmah,M., y Sutiarso, S., (2018). Analysis Problem Solving in Mathematical Using Theory Newman. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education,* 14(2):671-681. https://doi.org/10.12973/ejmste/80630

Santos Trigo, L. M. (2007). *La resolución de problemas matemáticos fundamentos cognitivos. México*: Trillas.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando Florida: Academic Press, INC.

Secretaría de Educación Pública (SEP) (2017). Planes de estudio de referencia del componente básico del marco curricular común de la Educación Media Superior (Primera Edición). Ciudad de México.

Sloman, S. A., Over, D., Slovak, L., y Stibel, J. M. (2003). Frequency illusions and other fallacies. *Organizational Behavior and Human Decision Processes*, 91, 296–309.

Solaz-Portolés, J., y López V., (2007). Representations in problem solving in science: Directions for practice. *Asia-Pacific Forum on Science Learning and Teaching, 8*(2),1-17. Recuperado de https://www.eduhk.hk/apfs1t/.

Sugrue, B. (1995). A Theory Based Framework for Assessing Domain l- Specific Problem- Solving Ability. *Educational Measurement: Issues and Practice, 14*(3), 29-35. http://doi.org/10.1111/j.1745-3992.1995.tb00865.x

Susanti, E., Kusumah, Y. S., y Sabandar, J. (2014). Computer-Assisted Realistic Mathematics Education for Enhancing Students' Higher-Order Thinking Skills (Experimental Study in Junior High School in Palembang, Indonesia*). Journal of Education and Practice*, *5*(18), 51-58.

Uttal, D. H., Meadow, N. G., Tipton, E., Hand, L. L., Alden, A. R., Warren, C., y Newcombe, N. S. (2013). The malleability of spatial skills: A meta-analysis of training studies. *Psychological Bulletin*, *139*(2), 352–402. https://doi.org/10.1037/a0028446

van Garderen, D., Scheuermann, A., y Jackson, C. (2012). Examining how students with diverse abilities use diagrams to solve mathematics word problem. *Learning Disability Quarterly*, htpps://doi.org/10.1177/0731948712438558.

van Garderen, D., Scheuermann, A., y Poch, A. (2014). Challenges students identified with a learning disability and as high-achieving experience when using diagrams as a visualization tool to solve mathematics word problems. *ZDM*, *46*(1), 135-149.

Wai, J., Lubinski, D., y Benbow, C. P. (2009). Spatial Ability for STEM Domains: Aligning Over 50 Years of Cumulative Psychological Knowledge Solidifies Its Importance. *Journal of Educational Psychology*, *101*(4), 817–835. https://doi.org/10.1037/a0016127

Zimmermann, W., y Cunningham, S. (1991). Editors' Introduction: What Is Mathematical Visualization? In S. C. W. Zimmermann (Ed.), *Visualization in teaching and learning mathematics* (pp. 1–8). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Anexo

Ingeniería didáctica

<table>
<tr><td colspan="5">Esquema general de la ingeniería aplicada</td><td rowspan="2">Materiales</td><td rowspan="2">Productos</td></tr>
<tr><td colspan="5">Sesiones</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="9">Aplicación de la evaluación diagnostica</td><td colspan="3">Parte inicial</td><td rowspan="9">Aplicación de la evaluación de cierre</td><td rowspan="8">Presentación de Power Point

Material elaborado

Material de escritura</td><td rowspan="8">Hojas de respuesta</td></tr>
<tr><td colspan="3">Socializar método de Polya</td></tr>
<tr><td>Plantear y solucionar el problema de las madres e hijas</td><td>Resaltar la importancia de realizar esquemas como parte del que hacer matemático</td><td>Recordar las cuatro representaciones</td></tr>
<tr><td colspan="3">Parte media</td></tr>
<tr><td>Presentar los cuatro esquemas a promover que involucran
2 eventos
Presentación
Power point</td><td>Presentar los cuatro esquemas a promover que involucran
Mas de 2 eventos
Presentación
Power point</td><td>Diferenciar entre probabilidad clásica, condicionada y teorema de Bayes en un problema dado
Presentación
Power point</td></tr>
<tr><td colspan="3">Parte Final</td></tr>
<tr><td colspan="3">Proporcionar el material diseñado de forma escalonada, primero una hoja, dar unos minutos, entregar la siguiente hasta que completen el material.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Cierre</td></tr>
<tr><td colspan="3">Recuperar de forma oral las dificultades que presentaron al resolver la actividad y recomendar como solucionarlas</td><td colspan="2"></td></tr>
</table>

Material utilizado en la primera sesión de la ingeniería didáctica Evaluación diagnóstica

EVALUACIÓN DIAGNOSTICA

CICLO 2018-2019

P7.1,4 B

MATERIA:		GRUPO:	
PROFESOR:		TIPO DE EXAMEN:	Diagnóstico
NOMBRE DEL ALUMNO:		FECHA:	
MATRICULA:		RESULTADO:	

Instrucciones: Para cada uno de los reactivos de la prueba representa de forma gráfica todos los datos del problema integrados correctamente. Escribe apropiadamente la simbología de la probabilidad según lo que se solicita: probabilidad P (A), probabilidad condicionada P(A|B), Teorema de Bayes P(H|E) y escribe la respuesta en el ejemplo: 3 de 5 veces.

1. Un sistema detector de humo utiliza dos sensores: sensor A y sensor B. Se registran los datos de 100 pruebas donde hay presencia de humo. El sensor A se activa por la presencia de humo en 95 de las 100 veces que se probó; el sensor B, 98 de las 100 pruebas realizadas. El humo es detectado de forma simultánea por ambos sensores 94 de las 100 veces que se probó.
   a) Realiza una representación gráfica que muestre e integre los datos del problema correctamente.
   b) Si hay humo, encuentre la probabilidad de que éste sea detectado única y exclusivamente por el sensor A.
   c) Calcula la probabilidad de que el humo no sea detectado por ninguno de los sensores.

2. En la evaluación de un programa de capacitación de ventas, una empresa descubrió que de los 50 vendedores que recibieron un bono el año anterior, 20 habían asistido a un programa especial de capacitación en ventas, al que asistieron un total de 30 empleados. En la empresa laboran 200 personas en el área de ventas. Se nombra B al suceso de que un vendedor recibió bono y S al suceso de que asistió al programa especial.
   a) Realiza una representación gráfica que muestre e integre los datos del problema correctamente.
   b) Calcula la probabilidad de que un empleado del área de ventas recibiera bono y asistiera al programa especial.
   c) Calcula la probabilidad de que un empleado del área de ventas asistiera el programa especial de ventas dado que no recibió bono.
   d) Si se sabe que un empleado recibió el bono. ¿Cuál es la probabilidad de que no asistiera al programa especial de ventas?

3. Una empresa que fabrica camisetas posee tres máquinas (**A, B, C**), que producen 450, 300 y 250 piezas diarias respectivamente. La producción defectuosa de estas máquinas equivale a 50 piezas de la máquina A, 30 de la máquina B y solo 20 piezas en la maquina C.
   a) Realiza una representación gráfica que muestre e integre los datos del problema correctamente.
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que una camiseta, elegida al azar, esté defectuosa?
   c) Si al seleccionar al azar la camiseta sale defectuosa, ¿Cuál es la probabilidad de haber sido producida por la máquina B?

4. Una industria dedicada a la fabricación de bolsas tiene 3 máquinas (A, B y C). La máquina A contribuye con 250 unidades a la producción total de bolsas; la máquina B con 350 unidades y la máquina C, con 400. Se ha determinado que en la producción de la máquina A hay 35 unidades defectuosas; en la máquina B 10 tienen defecto y la máquina C se produce solo 5 unidades defectuosas. De acuerdo con estos datos:
   a) Realiza una representación gráfica que muestre e integre los datos del problema correctamente.
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que una bolsa, elegida al azar, esté defectuosa?
   c) Si al seleccionar al azar la bolsa no sale defectuosa, ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido producida por la máquina A?

Material utilizado en la segunda sesión de la ingeniería didáctica

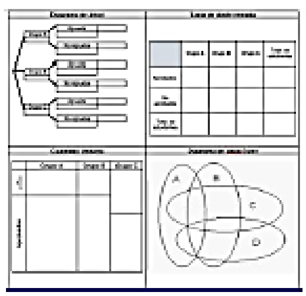
Probabilidad condicionada
y Teorema de Bayes 1

1

Dos madres y dos hijas entraron
al cine con solo 3 boletos

2

Las cuatro representaciones gráficas que son útiles al solucionar problemas de probabilidad en espacios muestrales reducidos



3

Situación:
Una empresa que fabrica camisetas posee tres máquinas (A, B, C), que producen el 45%, 30% y 25% respectivamente, del total de las piezas producidas en la fábrica. Los porcentajes de producción defectuosa de estas máquinas son: 3%, 4% y 5% respectivamente

1. ¿Qué probabilidad hay de que al seleccionar una camiseta al azar de las producidas por la empresa no este defectuosa?
2. ¿Qué probabilidad hay de que al seleccionar una camiseta al azar de toda la producción este defectuosa porque la fabricó la máquina C?
3. Si selecciono una camiseta y no esta defectuosa, ¿Cuál es la probabilidad de que la fabricará la máquina B?

4

Método en la resolución de problemas
Polya

1. Entender el problema
2. Plantear una estrategia de solución
3. Llevar a cabo la solución
4. Comprobar que la solución es correcta

5

¿Qué probabilidad hay de que al seleccionar una camiseta al azar de las producidas por la empresa este defectuosa?

- Probabilidad Clásica (Regla de Laplace)

$$P(D) = \frac{\text{Total de camisetas defectuosas producidas}}{\text{total de camisetas producidas}}$$

6

¿Qué probabilidad hay de que al seleccionar una camiseta al azar de toda la producción este defectuosa porque la fabricó la máquina C?

- Probabilidad condicionada

$$P(D|C) = \frac{P(D \cap C)}{P(C)}$$

7

Si selecciono una camiseta y esta defectuosa, ¿Cuál es la probabilidad de que la fabricará la máquina B?

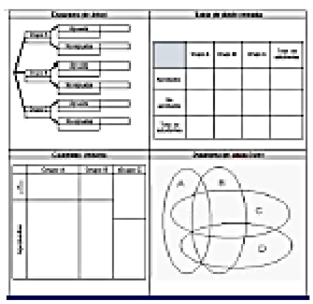
- Teorema de Bayes
  - Evidencia
  - Hipótesis

    Probabilidad condicionada

$$P(H|E) = \frac{P(E \cap H)}{P(E)}$$

8

¿Cómo puedo responder las preguntas de probabilidad utilizando Las cuatro representaciones gráficas que son útiles al solucionar problemas de probabilidad en espacios muestrales reducidos



9

¿Qué información necesito?

- Total de mi producción
- Total de producción con defectos
- Total de la producción de la máquina B y C
- Total de la producción sin defectos

10

1. ¿Qué probabilidad hay de que al seleccionar una camiseta al azar de las producidas por la empresa no este defectuosa?
2. ¿Qué probabilidad hay de que al seleccionar una camiseta al azar de toda la producción este defectuosa porque la fabricó la máquina C?
3. Si selecciono una camiseta y no esta defectuosa, ¿Cuál es la probabilidad de que la fabricará la máquina B?

11

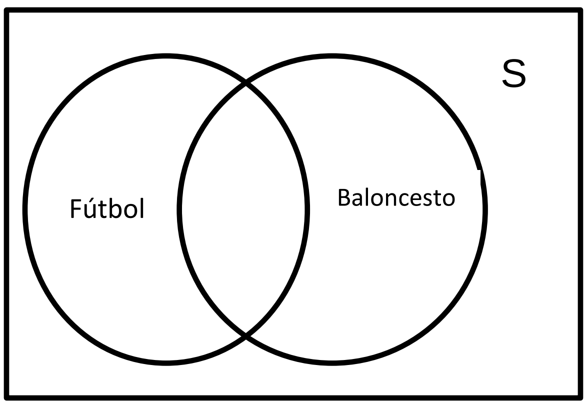
Gracias

12

Instrucciones: Lee el siguiente problema, utilizando alguna o algunas de las representaciones gráficas que se presentan, integra la información del problema de forma coherente. A continuación, responde las preguntas.

1. En un grupo de estudiantes en el que todos practican algún deporte: ciclismo, natación, baloncesto, fútbol, etc. El 60% de los estudiantes juegan al fútbol o al baloncesto, el 10% practica ambos deportes y del total del grupo 60% no juega al fútbol, pero si otros deportes.

Diagrama de Venn Euler



Cuadrado Unitario

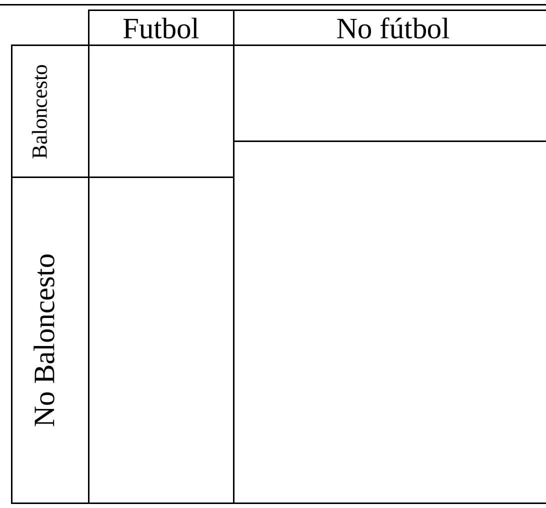
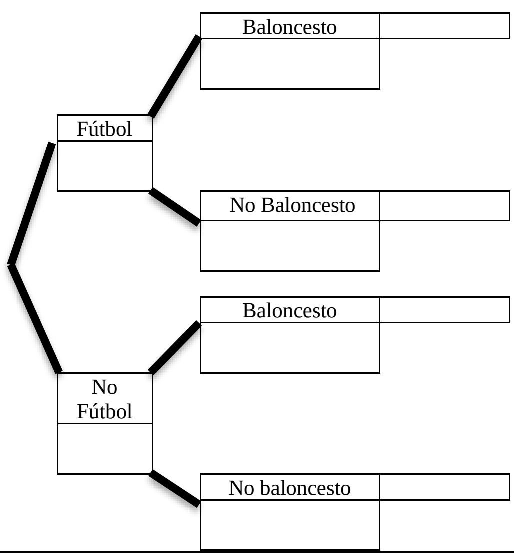


Tabla de doble entrada

	Fútbol	No Fútbol	Total
Baloncesto			
No Baloncesto			
Total			

Diagrama de árbol



Contesta las siguientes preguntas:

a) ¿Qué porcentaje del grupo practica baloncesto?

b) ¿Por qué crees que tu respuesta es correcta? Explica lo más ampliamente posible.

c) ¿Qué porcentaje del grupo practica un deporte diferente al fútbol o al baloncesto?

d) ¿Por qué crees que tu respuesta es correcta? Explica lo más ampliamente posible.

e) ¿Crees que te fue útil organizar la información en algún diagrama para responder las preguntas?, si ____ no _______ ¿Por qué? Explica lo más ampliamente posible.

f) Enumera los diagramas del 1 al 4 de acuerdo con el apoyo que te proporcionaron para responder la pregunta. (Donde 1 es el que te apoyo más y 4 el que te apoyo menos)

___ Diagrama de árbol

___ Tabla de doble entrada

___ Cuadrado unitario

___ Diagrama de Venn

Instrucciones: Lee el siguiente problema, si lo crees necesario utiliza alguna representación gráfica (diagrama de árbol, tabla de doble entrada, cuadro unitario, diagrama de ven) para integrar la información de forma coherente.

2. En un centro escolar los estudiantes pueden optar por cursar como lengua extranjera inglés o francés. En un determinado curso, el 90 de los estudiantes se registra en inglés y el resto en francés. De los que estudian inglés 3 son hombres y de los que estudian francés, 4 son hombres.

Procedimiento de solución (puede ser una representación gráfica)

a) ¿Qué porcentaje de estudiantes de ese curso son mujeres?
¿Por qué crees que tu respuesta es correcta? Explica lo más ampliamente posible.

b) ¿Qué porcentaje de todos los estudiantes son mujeres que estudian francés?
¿Por qué crees que tu respuesta es correcta? Explica lo más ampliamente posible.

Material utilizado en la tercera sesión de la ingeniería didáctica

Probabilidad condicionada y Teorema de Bayes 2

1

Método en la resolución de problemas Polya

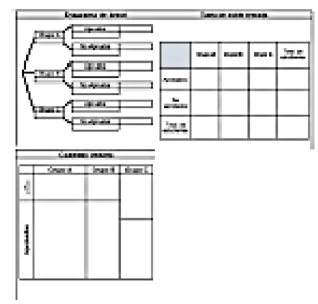
1. Entender el problema
2. Plantear una estrategia de solución
3. Llevar a cabo la solución
4. Comprobar que la solución es correcta

2

"los matemáticos profesionales dibujan (en realidad realizan esquemas), es parte de su trabajo y una herramienta útil para comprender un problema"

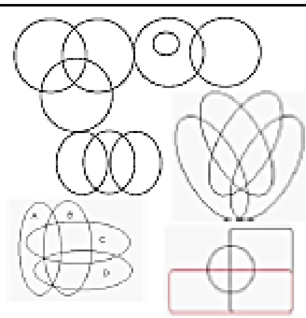
3

Las cuatro representaciones gráficas que son útiles al solucionar problemas de probabilidad en espacios muestrales reducidos



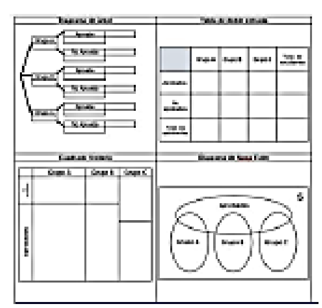
4

Diagramas de Venn

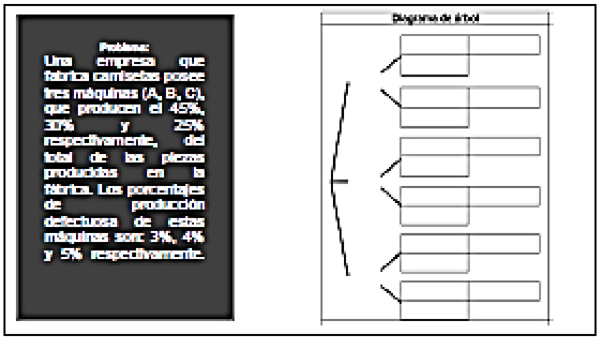


5

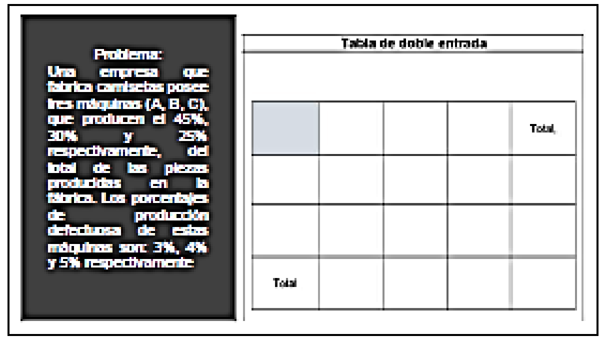
Las cuatro representaciones gráficas que son útiles al solucionar problemas de probabilidad en espacios muestrales reducidos



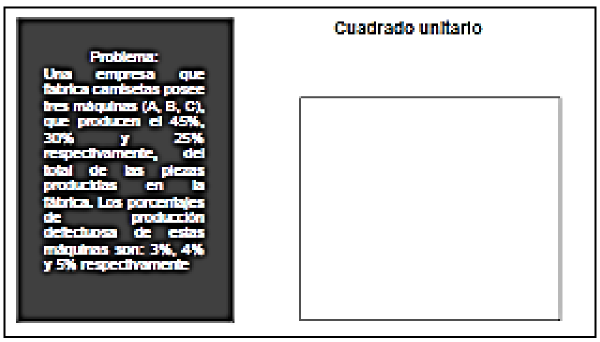
6


Problema:
Una empresa que fabrica camisetas posee tres máquinas (A, B, C), que producen el 45%, 30% y 25% respectivamente, del total de las piezas producidas en la fábrica. Los porcentajes de producción defectuosa de estas máquinas son: 3%, 4% y 5% respectivamente.
Diagrama de árbol

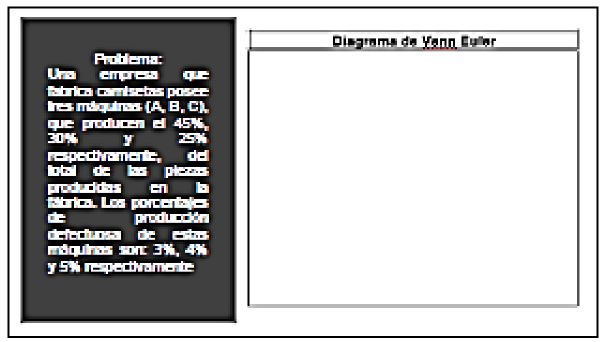
7


Problema:
Una empresa que fabrica camisetas posee tres máquinas (A, B, C), que producen el 45%, 30% y 25% respectivamente, del total de las piezas producidas en la fábrica. Los porcentajes de producción defectuosa de estas máquinas son: 3%, 4% y 5% respectivamente.
Tabla de doble entrada
Total
Total

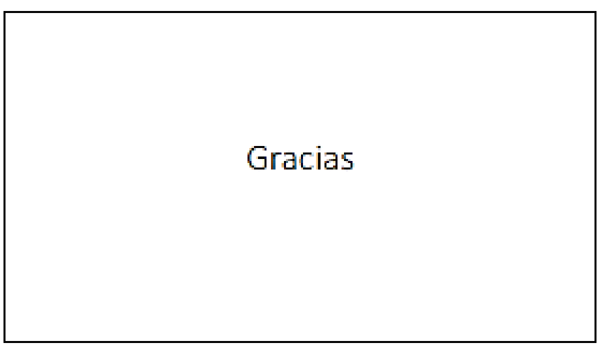
8


Problema:
Una empresa que fabrica camisetas posee tres máquinas (A, B, C), que producen el 45%, 30% y 25% respectivamente, del total de las piezas producidas en la fábrica. Los porcentajes de producción defectuosa de estas máquinas son: 3%, 4% y 5% respectivamente.
Cuadrado unitario

9


Problema:
Una empresa que fabrica camisetas posee tres máquinas (A, B, C), que producen el 45%, 30% y 25% respectivamente, del total de las piezas producidas en la fábrica. Los porcentajes de producción defectuosa de estas máquinas son: 3%, 4% y 5% respectivamente.
Diagrama de Venn Euler

10


Gracias

11

Instrucciones: Lee el siguiente problema y utilizando alguna o algunas de las representaciones gráficas que se presentan, integra la información del problema de forma coherente, después responde las preguntas.

1. La profesora Luisa atendió tres grupos, el 39 de sus estudiantes estaban en el grupo A. En los grupos B y C hubo la misma cantidad de estudiantes 31 en cada uno. En los grupos A y B, aprobaron 28 estudiantes en cada uno y del tercer grupo 30 aprobó.

Diagrama de árbol

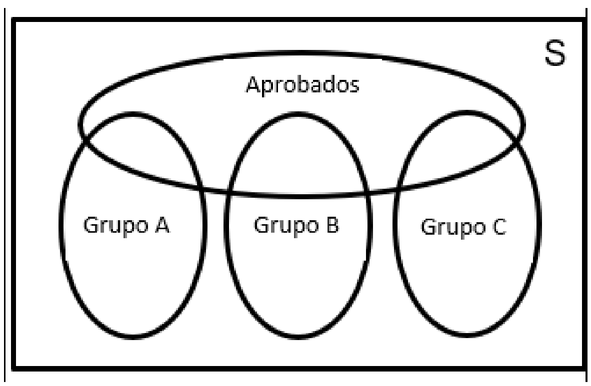


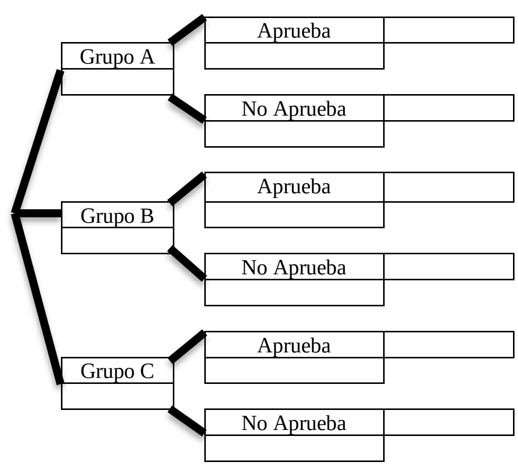
Tabla de doble entrada

	Grupo A	Grupo B	Grupo C
No aprobados			
Aprobados			

Cuadrado Unitario

	Grupo **A**	Grupo **B**	Grupo **C**	Total, de estudiantes
Aprobados				
No aprobados				
Total, de estudiantes				

Diagrama de Venn Euler



a) ¿Qué porcentaje del total de sus estudiantes está reprobado?

b) ¿Por qué crees que tu respuesta es correcta? Contesta lo más ampliamente posible.

c) ¿Qué porcentaje de sus estudiantes reprobados pertenece al grupo B?

d) ¿Por qué crees que tu respuesta es correcta? Contesta lo más ampliamente posible.

e) ¿Crees que te fue útil organizar la información en algún diagrama para responder las preguntas?, si _____ no ________ ¿Por qué? Explica lo más ampliamente posible.

f) Enumera los diagramas del 1 al 4 de acuerdo con el apoyo que te proporcionaron para responder la pregunta. (Donde 1 es el que te apoyo más y 4 el que te apoyo menos)

____ Diagrama de árbol

____ Tabla de doble entrada

____ Cuadrado unitario

____ Diagrama de Venn

Instrucciones: Lee el siguiente problema, si lo crees necesario utiliza alguna representación gráfica (diagrama de árbol, tabla de doble entrada, cuadro unitario o diagrama de Venn) para integrar la información de forma coherente.

2. En una florería hay 150 rosas, 60 claveles y 40 orquídeas. Son de color blanco: 15 de las rosas, 40 de los claveles y 20 de las orquídeas.

Procedimiento de solución (puede ser una representación gráfica)

c) ¿Qué porcentaje de todas las flores que hay en la florería no son blancas?
¿Por qué crees que tu respuesta es correcta? Explica lo más ampliamente posible.

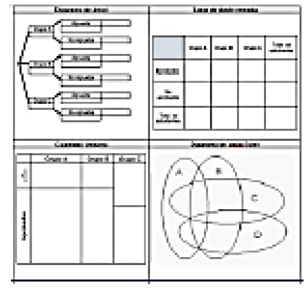
d) ¿Qué porcentaje de todas las flores que no son blancas son orquídeas?
¿Por qué crees que tu respuesta es correcta? Explica lo más ampliamente posible.

Material utilizado en la cuarta sesión de la ingeniería didáctica

Probabilidad condicionada
y Teorema de Bayes 3

1

Las cuatro representaciones gráficas que son útiles al solucionar problemas de razonamiento Bayesiano



2

Situación:
Una empresa que fabrica camisetas posee tres máquinas (A, B, C), que producen el 45%, 30% y 25% respectivamente, del total de las piezas producidas en la fábrica. Los porcentajes de producción defectuosa de estas máquinas son: 3%, 4% y 5% respectivamente

1. ¿Qué probabilidad hay de que al seleccionar una camiseta al azar de las producidas por la empresa no este defectuosa?
2. ¿Qué probabilidad hay de que al seleccionar una camiseta al azar de toda la producción este defectuosa porque la fabricó la máquina C?
3. Si selecciono una camiseta y no esta defectuosa, ¿Cuál es la probabilidad de que la fabricará la máquina B?

3

Método en la resolución de problemas
Polya

1. Entender el problema
2. Plantear una estrategia de solución
3. Llevar a cabo la solución
4. Comprobar que la solución es correcta

4

¿Qué probabilidad hay de que al seleccionar una camiseta al azar de las producidas por la empresa este defectuosa?

- Probabilidad Clásica (Regla de Laplace)

$$P(D) = \frac{\text{Total de camisetas defectuosas producidas}}{\text{total de camisetas producidas}}$$

5

¿Qué probabilidad hay de que al seleccionar una camiseta al azar de toda la producción este defectuosa porque la fabricó la máquina C?

- Probabilidad condicionada

$$P(D|C) = \frac{P(D \cap C)}{P(C)}$$

6

Si selecciono una camiseta y esta defectuosa, ¿Cuál es la probabilidad de que la fabricará la máquina B?

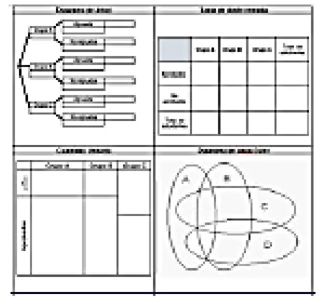
- Teorema de Bayes
  - Evidencia
  - Hipótesis

    Probabilidad condicionada

$$P(H|E) = \frac{P(E \cap H)}{P(E)}$$

7

¿Cómo puedo responder las preguntas de probabilidad utilizando Las cuatro representaciones gráficas que son útiles al solucionar problemas de razonamiento Bayesiano?



8

¿Qué información necesito?

- Total de mi producción
- Total de producción con defectos
- Total de la producción de la máquina B y C
- Total de la producción sin defectos

9

1. ¿Qué probabilidad hay de que al seleccionar una camiseta al azar de las producidas por la empresa no este defectuosa?
2. ¿Qué probabilidad hay de que al seleccionar una camiseta al azar de toda la producción este defectuosa porque la fabricó la máquina C?
3. Si selecciono una camiseta y no esta defectuosa, ¿Cuál es la probabilidad de que la fabricará la máquina B?

10

Gracias

11

INSTRUCCIONES: Lee cuidadosamente cada uno de los incisos siguientes, y responde correctamente de acuerdo con el planteamiento de la situación.

1. En un grupo de estudiantes en el que todos practican algún deporte: ciclismo, natación, baloncesto, fútbol, etc. El 60% de los estudiantes juegan al fútbol o al baloncesto, el 10% practica ambos deportes y del total del grupo 60% no juega al fútbol, pero si otros deportes.

Planteamiento de la situación

a) ¿Qué probabilidad hay de seleccionar a un estudiante de entre todos que solamente juegue al baloncesto?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que juegue al baloncesto dado que también juega fútbol?

c) Si al seleccionar a un estudiante al azar, no juega baloncesto, ¿Qué probabilidad hay de que tampoco juegue fútbol?

INSTRUCCIONES: Lee cuidadosamente cada uno de los incisos siguientes, y responde correctamente de acuerdo con el planteamiento de la situación.

2. En un centro escolar los estudiantes pueden optar por cursar como lengua extranjera inglés o francés. En un determinado curso, el 90% de los estudiantes se registra en inglés y el resto en francés. De los que estudian inglés 30% son hombres y de los que estudian francés, 40% son hombres.

   Planteamiento de la situación

a) ¿Qué probabilidad hay, de seleccionar una mujer den el curso que se menciona?

b) ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar a un hombre dado que estudia inglés?

c) Si al seleccionar al azar a un estudiante estudia francés. ¿Qué probabilidad hay de que sea una mujer?

INSTRUCCIONES: Lee cuidadosamente cada uno de los incisos siguientes, y responde correctamente de acuerdo con el planteamiento de la situación.

3. La profesora Luisa atendió tres grupos, el 40% de sus estudiantes estaban en el grupo A. En los grupos B y C hubo la misma cantidad de estudiantes. De los grupos A y B, aprobaron el 90% de los estudiantes y del tercer grupo solo el 80% aprobó.

   Planteamiento de la situación

a) ¿Qué probabilidad hay de seleccionar a un estudiante de la profesora Luisa que no está aprobado?

b) ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar a un estudiante del grupo B dado que está aprobado?

c) Si al seleccionar al azar a un estudiante resulta que no aprobó, ¿Qué probabilidad hay, de que este inscrito en el grupo C?

INSTRUCCIONES: Lee cuidadosamente cada uno de los incisos siguientes, y responde correctamente de acuerdo con el planteamiento de la situación.

4. En una florería hay rosas, claveles y orquídeas en un porcentaje de 60%, 30% y 10%, respectivamente; el 10% de las rosas, el 20% de los claveles y el 50% de las orquídeas son blancas

   Planteamiento de la situación

a) ¿Qué probabilidad hay, de seleccionar una flor que no sea blanca?

b) ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar una orquídea dado que es una flor blanca?

c) Si se selecciona una flor que no es blanca, ¿Qué probabilidad hay de que sea un clavel?

Material utilizado en la quinta sesión de la ingeniería didáctica Evaluación de cierre

BUAP	**PREPARATORIA EMILIANO ZAPATA** **PRIMER EXAMEN** **CICLO 2018-2019**

UAC:	ESTADÍSTICA, PROBABILIDAD Y TEMAS SELECTOS DE MATEMÁTICAS		**GRADO Y GRUPO:**		
NOMBRE DEL DOCENTE:	RUTH GARCIA SOLANO		**TIPO DE EXAMEN:**	EXTRAORDINARIO I	
NOMBRE DEL ALUMNO:			**FECHA:**		
MATRICULA:		**ACIERTOS:**		**CALIFICACIÓN:**	

Instrucciones: Para cada uno de los reactivos de la evaluación representa de forma gráfica todos los datos del problema integrados correctamente. Escribe apropiadamente la simbología de probabilidad según lo que se solicita: probabilidad P(A), probabilidad condicionada P(A|B), Teorema de Bayes P(H|E). Escribe la respuesta de la forma: 3 de 5 veces, en tinta de color azul. Sin realizar manchones ni tachones.

1. En una purificadora de agua, el sistema detector de impurezas utiliza dos sensores, *P* y *Q*. Si hay presencia de impurezas, la probabilidad de que ésta sea detectada por el sensor P es 95 de 100; por el sensor Q; de 97 de 100. Por ambos sensores, de forma simultánea la detección disminuye a 94 de 100.

   a) Si hay impurezas en el agua, ¿Cuál es la probabilidad de que sean detectadas únicamente y exclusivamente por el sensor P?

   b) Encuentre la probabilidad de que las impurezas no sean detectadas.

2. Se prueba un software educativo en 250 estudiantes de bachillerato, el evaluador descubre que de los 50 estudiantes que recibieron notas sobresalientes, 38 asistieron al taller de habilidades digitales, al que estaban inscritos 60 de los estudiantes que probaron el software. Considera el evento A cono notas altas y el evento H como participó en el curso de habilidades digitales.

   Determina el valor de las siguientes probabilidades:

   a) Calcula la probabilidad de que un estudiante asistiera al taller de habilidades digitales y obtuviera notas sobresalientes.

   b) Calcula la probabilidad de que un estudiante logrará notas altas dado que no asistió al taller de habilidades digitales.

   c) Calcula la probabilidad de que un estudiante que asistió al taller de habilidades digitales no lograra obtener notas altas.

3. Una fábrica posee tres máquinas (**A**, **B**, **C**), que producen el 20%, 35% y 45% respectivamente, del total de las piezas producidas. Los porcentajes de producción defectuosa de estas máquinas son: 5%, 4% y 2% respectivamente.

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que un producto, elegido al azar, esté defectuoso?

   b) Si al seleccionar al azar un producto no está defectuoso ¿Cuál es la probabilidad de haber sido producida por la máquina **B**?

4. Una industria dedicada a la fabricación de neumáticos tiene 3 máquinas (**A**, **B** y **C**). La máquina **A** contribuye con 300 piezas de la producción diaria; la máquina **B** con 450 y la máquina **C**, con 250 piezas. Se ha determinado que la producción de la máquina **A** tienen 5 piezas defectuosas; la máquina **B** tiene 10 con defectos y la máquina **C**, 8 piezas de producción defectuosa. De acuerdo con estos datos:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un neumático, elegido al azar, esté defectuoso?

b) Si al seleccionar al azar el neumático no sale defectuoso, ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido producida por la máquina **A**?

Material utilizado como trabajo independiente entre la cuarta y quinta sesión

NOMBRE: ______________________________ EDAD: ________ GRADO GRUPO Y NÚM. LISTA: __________

INSTRUCCIONES: Lee cuidadosamente cada uno de los reactivos siguientes, y responde la pregunta correctamente.

1. En una oficina donde todos tienen equipos celulares el 22% tiene tanto un equipo Samsung como un plan tarifario. Del total de oficinistas, el 68% tiene un smartphone de marca diferente a Samsung. Y el 30% de todos los oficinistas cuenta con plan tarifario.
   Planteamiento de la situación

   a) ¿Qué porcentaje de oficinistas no cuenta ni con plan tarifario ni con equipo marca Samsung?

   b) Si seleccionas al azar a un oficinista, ¿Cuál es la probabilidad de que tenga un equipo Samsung?

   c) ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga un equipo Samsung, pero si un plan tarifario?

   d) Seleccionas a un oficinista que no tiene plan tarifario, ¿Cuál es la probabilidad de que tenga un equipo Samsung?

2. El 75% de los estudiantes que acude a cierta institución educativa lo hacen en transporte público y el resto en transporte privado. Llegan puntualmente a clase el 60% de los que utilizan el transporte público y el 92% de los que cuentan con transporte privado.
   Planteamiento de la situación

NOMBRE: ____________________ EDAD: ________ GRADO GRUPO Y NÚM. LISTA: ________

a) ¿Qué porcentaje de estudiantes llega puntual a la institución educativa?

b) ¿Qué probabilidad hay de qué al seleccionar un estudiante al azar, éste llegue tarde?

c) ¿Qué probabilidad hay de llegar tarde a la institución educativa dado que utiliza transporte privado?

d) Si seleccionas al azar un estudiante y resulta que es puntual, ¿Qué probabilidad hay de que use el transporte público para llegar a la escuela?

NOMBRE: ______________________________ EDAD: ________ GRADO GRUPO Y NÚM. LISTA: ____________

3. En el estéreo de mi auto tengo pre sintonizadas tres estaciones de radio (A, B y C) que escucho por igual. La estación A siempre ofrece música, mientras que la B tiene programas como noticieros y reporte vial el 80% del tiempo, la estación C balancea su tiempo de transmisión entre música y mensajes informativos.

   Planteamiento de la situación

   a) ¿Qué porcentaje del tiempo de transmisión de las tres estaciones es dedicado a mensajes informativos y noticieros?

   b) ¿Qué probabilidad hay de que al encender el estéreo de mi auto, escuche música?

   c) ¿Cuál es la probabilidad de que al escuchar música esté sintonizada la estación B?

   d) Si al encender el estéreo se escucha una capsula informativa ¿Cuál es la probabilidad de que esté sintonizada la estación C?

NOMBRE: ______________________ EDAD: ________ GRADO GRUPO Y NÚM. LISTA: ____________

4. Un joven permanece conectado a redes sociales a través de sus tres equipos electrónicos. Utilizando el 50% del tiempo su smartphone, el 20% su Tablet y el 30% su computadora. Del tiempo que está conectado, dedica a WhatsApp el 80% del tiempo que usa su Smartphone, 30% del tiempo que usa la Tablet y 40% del tiempo que pasa en la computadora.
   Planteamiento de la situación

   a) ¿Qué porcentaje del tiempo que está conectado dedica a WhatsApp?

   b) ¿Cuál es la probabilidad de que no esté usando WhatsApp a pesar de estar conectado?

   c) ¿Cuál es la probabilidad de que esté usando WhatsApp dado que esta usando su computadora?

   d) Si está en línea en WhatsApp ¿Qué probabilidad hay de que esté usando su Tablet?