BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

"UN ESTUDIO SOBRE LA ILUSIÓN DE LA LINEALIDAD EN ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR: EL CASO DEL CECYTE 15 HUACTZINCO"

Tesis

Para obtener el título de:
Maestría en Educación Matemática

Presenta:
Roberto Sánchez Sánchez

Asesor de tesis:
José Antonio Juárez López

Puebla, Pue. **Junio 2017**

Índice

Antecedentes

LAS MATEMÁTICAS EN LA EDUCACIÓN Y SUS DIFICULTADES

Existen diversas cuestiones que interconectan a las matemáticas con los programas escolares para construir fundamentos en el aprendizaje de las matemáticas y desarrollar el razonamiento lógico-matemático.

Las matemáticas en la educación

En las reformas y programas de estudio de diversos países consideran que uno de los principales objetivos de la educación matemática es propiciar la capacidad de desarrollar y utilizar modelos para dar sentido a las diversas situaciones que rodean la vida diaria y de los sistemas complejos derivados de nuestra sociedad moderna (Blum, 2002; Consejo Nacional de profesores de Matemáticas [NCTM], 1989, 2000, citado en Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D. & Verschaffel, L., 2005, 58).

Regularmente, la forma tradicional de la enseñanza de modelos matemáticos y la solución de problemas en la escuela primaria y secundaria es por medio del uso de problemas de aplicación, es decir, la solución de un problema matemático es principalmente una cuestión de encontrar y ejecutar la fórmula matemática correcta previamente enseñado en la escuela (Schoenfeld, 1992, citado en De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D. & Verschaffel, L., 2007, p. 36) o la respuesta se puede encontrar mediante la realización de una o más operaciones aritméticas (+, -, x, :) en las cantidades del problema (Verschaffel, Greer, y de Corte, 2000, citado en Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D. & Verschaffel, L., 2005, 58).

Dificultades en la resolución de problemas

Frecuentemente, en los libros de texto, los estudiantes pueden encontrar señales muy superficiales tales como palabras o frases clave, la sección donde aparece el problema o el contexto del problema. Estas señales superficiales le permiten al alumno decidir qué operación se requiere para resolver el problema de manera exitosa (Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D. & Verschaffel, L., 2005).

Además, los alumnos codifican en su memoria las correlaciones entre las características superficiales y el método utilizado para la solución del problema y proceden a ejecutar dicho método en otros problemas debido a la detección de estas características superficiales (Ben-Zeev, 1998; Ben-Zeev y estrella, 2001; Chi y Bassok, 1989; Schoenfeld, 1988, citado en Van Dooren et al., 2005;~~,~~ 58).

Con el~~Al~~ paso del tiempo, los estudiantes comienzan a perder la capacidad para distinguir cuando determinada operación aritmética es apropiada para solucionar un problema y cuando no es apropiada, más bien, resuelven los problemas mediante conductas estereotipadas (Van Dooren, De Bock, Hessels, Janssens, & Verschaffel, 2005).

También, debido a un "contrato didáctico" (Brousseau, 1997, citado en Van Dooren et al., 2005;~~,~~ 62) los estudiantes saben que pueden resolver los problemas asumiendo que los problemas tienen una respuesta exacta, numérica y deben proporcionar esa respuesta. Existe una amplia evidencia empírica de la presencia de este contrato didáctico en la solución de problemas y por su impacto en la aparición de respuestas inapropiadas (Reusser y Stebler, 1997; Verschaffel, 2000, citado en Van Dooren et al., 2005:~~,~~ 62).

PROPORCIONALIDAD Y PROBLEMAS DE VALOR FALTANTE

Dentro de la investigación en educación matemática, amplias investigaciones se han realizado sobre la enseñanza y aprendizaje del razonamiento proporcional y cómo puede ser mejorado este proceso. Se presta una particular atención en los problemas de tipo proporcional debido a su amplia utilidad en situaciones de la vida cotidiana y en muchos problemas de matemáticas.

Proporcionalidad en la educación

En la infancia, los niños se encuentran con las relaciones proporcionales en su forma más simple (Van den Brink y Streefland, 1979, citado en Van Dooren et al., 2005:~~,~~ 59) en situaciones como: “si un coche de juguete tiene cuatro ruedas entonces en dos coches de juguete hay ocho ruedas”. A partir de los primeros años de educación primaria los niños aprenden a multiplicar y dividir y aprenden a reconocer cuándo se deben de aplicar estas operaciones aritméticas de manera simple, es decir, de un solo paso, en problemas como: “1 kg de naranjas cuesta 5 pesos. ¿Cuánto costarán 3 kilogramos de naranja?”. Posteriormente, los estudiantes son introducidos en el razonamiento proporcional (Van Dooren et al., 2005:~~,~~ 59).

Por lo general, a partir de cuarto grado en adelante, los estudiantes se enfrentan frecuentemente a problemas de proporcionalidad. A menudo, se afirma que tales problemas pueden ser un sustituto de situaciones de la vida cotidiana en la que los estudiantes necesitarán estas habilidades matemáticas (Verschaffel, Greer, y De Corte, 2000).

El concepto de proporcionalidad aparece como un "hilo conductor" de los problemas de proporcionalidad típica en la escuela primaria y secundaria en la idea de los modelos lineales, aproximaciones de cálculo y estadística en el nivel bachillerato y para la noción abstracta de mapas lineales entre espacios vectoriales en el nivel universitario (Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, 2002, citado en Van Dooren et al., 2005:~~,~~ 60).

Problemas de valor faltante

A largo de la educación primaria y secundaria, la mayoría de las tareas de razonamiento proporcional que los estudiantes encuentran se formulan en un formato de valor faltante (Cramer & Post, 1993, citado en Van Dooren, W., De Bock, D., Evers, M. & Verschaffel, L., 2009:~~,~~ 187), es decir, problemas de aplicación en el que se conocen tres números (dos formando una relación y el tercero es uno de los dos valores de otra relación), y el cuarto número tiene que ser encontrado (Kaput & West, 1994, citado en Van Dooren et al., 2009:~~,~~ 187) o como Vergnaud (1983, 1988, citado en Van Dooren et al., 2009:~~,~~ 187) los denominó, "problemas de regla de tres".

Es por este tipo de ejercicios y soluciones que se espera que los estudiantes adquieran una comprensión de las relaciones multiplicativas que existen en situaciones de proporción, o como ha señalado Vergnaud (1983, citado en Van Dooren et al., 2005;~~,~~ 60) una comprensión de la relación de multiplicación entre las cantidades en dos espacios de medida: las cantidades de dos espacios de medida se relacionan entre sí mediante la multiplicación, por ejemplo: “5 naranjas pesan 1000 gramos ¿Cuál es el peso de 20 naranjas?” por lo que una naranja pesa 200 gramos, por lo tanto 20 naranjas pesarán 4000 gramos la relación entre los espacios de medida se da entre número de naranjas y peso pues si multiplicas 200 gramos por la cantidad de naranjas, obtienes el peso correspondiente y también existe una relación multiplicativa entre los elementos dentro de cada espacio de medida pues si se triplica el número de naranjas, el peso se triplica.

LINEALIDAD

Uno de los ejemplos más comunes de un comportamiento corrompido en la resolución de problemas es la tendencia de los alumnos a generalizar en exceso la aplicabilidad del modelo proporcional (De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D. & Verschaffel, L., 2002; Van Dooren, W., De Bock, D., Evers, M. & Verschaffel, L., 2009).

Freudenthal (1983, p. 267, citado en Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D. & Verschaffel, L., 2005;~~,~~ 59) advirtió que

> *“La linealidad es una propiedad tan sugestiva de las relaciones que uno se rinde fácilmente a la seducción para hacer frente a cada relación numérica como si fuese lineal.”*

A partir del contexto de esta cita, queda claro que Freudenthal utilizó el término lineal como sinónimo de proporcional, en referencia a las relaciones representadas gráficamente por una línea recta a través del origen (Van Dooren, De Bock, Hessels, Janssens, & Verschaffel, 2004, citado en Van Dooren et al., 2005;~~,~~ 59).

El mal uso de la linealidad en situaciones no lineales (a veces referido como la "ilusión de la linealidad o proporcionalidad”, la “trampa de la linealidad”, el “obstáculo lineal”, etc.) es un error “clásico”, probablemente una de las más antiguo~~a~~s de la literatura del pensamiento matemático (De Bock et al., 2002).

Un ejemplo muy famoso y de los más antiguos de la literatura es la duplicación de un cuadrado en el diálogo *Menón* de Platón, en el que se pide a un esclavo que duplique el área de un cuadrado dado. El esclavo aplica de manera inmediata la idea de proporcionalidad (entre la longitud y el área), es decir, el esclavo piensa que si duplica la longitud del cuadrado entonces el área se duplicará y cambia de opinión sólo cuando Sócrates le ayuda a diagnosticar y corregir el error en su razonamiento al confrontarlo con un dibujo (De Bock et al., 2002).

Otro ejemplo famoso de una mala especificación del razonamiento lineal, es la afirmación de Aristóteles la cual sugiere que si se tienen dos objetos (un objeto 10 veces más pesado que el otro) y se sueltan a determinada altura, el objeto que pesa 10 veces más, llegará a la tierra 10 veces más rápido que el objeto menos pesado (Galilei, 1638/1954, citado en Van Dooren et al., 2005;~~,~~ 59).

El concepto de linealidad (o proporcionalidad) es un concepto clave en las matemáticas y en la educación desde la escuela primaria hasta la universidad (De Bock et al., 2002) pues como ya se ha mencionado, aparece en muchas formas: desde el uso de la "regla de tres" en la escuela primaria, la idea de los modelos lineales en el nivel secundaria, aproximaciones de cálculo y estadística en el nivel bachillerato, y para la abstracción en un vector en el espacio en los cursos universitarios (Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, 2002, citado en Van Dooren et al., 2005;~~,~~ 60).

Sin embargo, el refuerzo de la linealidad en numerosas ocasiones en la matemática escolar, junto con su sencillez intrínseca, puede dar lugar a una tendencia en los estudiantes e incluso en adultos para ver y aplicar el modelo lineal "en todas partes". (De Bock et al., 2002). Debido a su simplicidad, las funciones lineales aparecen inmediatamente en la mente del ser humano porque, sin duda, no hay funciones que son más simples que las lineales (Rouche, 1989, p. 17, citado en De Bock et al., 2002, 311).

Un estudio realizado por Van Dooren et al. (2005) demostró que los estudiantes de secundaria distinguieron con mayor frecuencia las situaciones en las que la proporcionalidad es aplicable y cuando no lo era, pero incluso en el último grado, se realizaron un número considerable de errores proporcionales.

Autenticidad de problemas

La actividad de resolución de problemas admite problemas “reales” aceptables (o buenos) que los estudiantes puedan encontrar fuera de sus clases de matemáticas (Van Dooren et al., 2005), sin embargo, varias investigaciones (Reusser y Stebler, 1997; Verschaffel, De Corte, y Lasure, 1994 citado en Van Dooren et al., 2005, 58) han demostrado que los estudiantes comienzan a resolver problemas con poca o ninguna relación con el mundo real y como algo bastante lejos del auténtico proceso de elaboración de modelos matemáticos que se prevé en los documentos de reforma y planes de estudios debido a lo estereotipado de los problemas que se ofrecen a los estudiantes y a la forma en que estos problemas son manejados por los profesores (Verschaffel, 2000, citado en Van Dooren et al., 2005, 58).

Verschaffel, De Corte, y Lasure (1994, p. 276, citado en Van Dooren et al., 2009, 187) encontraron que más del 90% de los estudiantes de entre 10 y 12 años de edad, respondió 170 segundos para el problema: “el mejor tiempo de John para correr 100 metros es de 17 segundos. ¿Cuánto tiempo le llevará correr 1 kilometro?“. La situación del mundo real que evoca el problema no permite una respuesta única y precisa, pero casi todos los estudiantes buscaron la operación matemática escondida en el planteamiento del problema en vez de concebir y abordar estos problemas como problemas ilegítimos en matemática realista (Nesher, 1996; Reusser y Stebler, 1997; Wyndhamn & Säljö, 1997, citado en Van Dooren et al., 2009, 188).

La gran mayoría de los estudiantes tienden a ignorar su conocimiento realista y se acercan a los problemas mediante la construcción de un modelo que no tiene en cuenta algunos aspectos esenciales de la situación del problema en la vida real (Verschaffel et al., 2000, citado en Van Dooren et al, 2005, 61).

Varias investigaciones han señalado los beneficios de la construcción y organización de las actividades matemáticas alrededor de contextos ricos, atractivos y realistas (Palm, 2002, citado en De Bock at al., 2007, 55). De Bock et al. (2007) mencionan que tienen la función de ayudar a hacer una correcta representación del problema y encontrar una estrategia de solución correcta al provocar la activación y el uso del conocimiento previo contextualizado (experiencias del mundo real, intuiciones, modelos, estrategias,...) que pueden ser útiles para comprender y resolver el problema.

El término “autenticidad” no tiene un significado único, pero en general, los autores la utilizan para referirse a las tareas que se encuentran fuera de la escuela (simulaciones de alta fidelidad en un contexto), y que contrastan con las tareas matemáticas “no auténticas”", que son las simulaciones de baja fidelidad que se encuentran habitualmente en el entorno escolar (Palm, 2002, citado en De Bock at al., 2007, 128).

La teoría propuesta por Torulf Palm marca aspectos importantes que deberían tener los problemas para ser considerados auténticos. Uno de estos aspectos se refiere al realismo de los datos y la información, pues para considerar auténticos a los problemas debe de haber un grado razonable de fidelidad, los números y valores indicados deben ser realistas o muy cercanos a los correspondientes (Verschaffel, L., Greer, B., Van Dooren, W., & Mukhopadhyay, S., 2009).

De Bock et al. (2002) demostraron que, debido a la amplia atención que prestan los estudiantes de primaria y secundaria en matemáticas al razonamiento proporcional, tienden a confiar demasiado en métodos proporcionales en diversos dominios de las matemáticas tales como la probabilidad (Van Dooren, W., De Bock, D., Depaepe, F., Janssens, D. & Verschaffel, L., 2003) y la geometría, la cual es motivo de investigación en el presente anteproyecto.

Constantes

Van Dooren et al., (2005) realizaron una investigación sobre el uso excesivo de la linealidad para resolver problemas, cómo se originan y su desarrollo en el transcurso de la edad en relación a las experiencias de aprendizaje de los estudiantes y sus habilidades de razonamiento proporcional emergentes.

Los estudiantes se enfrentaron a una prueba que constaba de 8 problemas de valor faltante, dentro de dicha prueba había problemas pertenecientes a la categoría constantes. A continuación, se muestra un ejemplo de dicha categoría: “Mamá~~a~~ puso 3 toallas en el tendedero. Después de 12 horas estaban secas. La abuela puso 6 toallas en el tendedero. ¿Cuánto tiempo les toma secarse?” (Respuesta correcta: 12 horas, respuesta proporcional: 24 horas). Uno esperaría que el problema con un modelo “constante” (como el problema del “tendedero” mencionado anteriormente) sería un problema que los estudiantes podrían solucionar fácilmente en la prueba (debido a que no había necesidad de cálculos), pero tiene la más alta tasa de errores proporcionales (hasta un 80% en quinto grado).

De Bock at al., (2007) sugieren que estos estudiantes demostraron una visión simplista en la resolución de problemas, debido a que todos los problemas no pueden ser resueltos mediante el uso de cálculos matemáticos simples con los números que se proporcionan en el problema, y que las consideraciones basadas en el conocimiento y en el contexto del mundo real no participan en el proceso de solución.

El uso de relaciones lineales se percibe como correcta sin necesidad de ninguna otra justificación, los estudiantes eran demasiado confiados en ella, y eran reacios a cuestionar la exactitud de su enfoque lineal cuando se enfrentan a pruebas contradictorias.

Cuando se observa en varios casos el uso excesivo de la linealidad, la conexión con la teoría de Fischbein (1987, 1999, citado en De Bock at al., 2007, 146) de la intuición en el razonamiento matemático es sorprendente. Fischbein describe el conocimiento intuitivo como un tipo de conocimiento inmediato, implícito, evidente por sí mismo, basándose en las características sobresalientes del problema, lo que lleva predominantemente a las generalizaciones, lo que genera una gran confianza y, a menudo persiste a pesar de la enseñanza formal.

Problemas geométricos

De Bock~~,~~ et al., (2007) sugiere que probablemente los casos más conocidos de la excesiva dependencia de los estudiantes en el modelo lineal se encuentran en el dominio de la geometría. Por ejemplo, se informa de que los razonamientos lineales incorrectos ocurren con frecuencia en problemas acerca de las relaciones entre los ángulos y lados de figuras geométricas (véase, por ejemplo, Bold, 1969; De Block-Docq, 1992; Rouche, 1992, citado en De Bock, et al., 2007, p. 17).

Los estándares del Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas [NCTM] (1989, p. 114-115, citado en De Bock, et al., 2007, p. 18) indican que

> *"... la mayoría de los estudiantes entre el quinto y octavo grados erróneamente creen que si se duplican los lados de una figura para producir una cifra similar, el área y el volumen también se duplicará"*

En otras palabras, los estudiantes tienden fuertemente a relacionar la longitud y el área o la longitud y el volumen como si fuese lineal en lugar de, respectivamente, lo relacionen~~ara~~ de forma cuadrática y cúbica, en consecuencia, se aplica~~n~~ el factor lineal en lugar de su cuadrado o cubo para determinar el área o volumen de una figura ampliada o reducida (De Bock~~,~~ et al., 2007).

Una ampliación o reducción lineal de factor *r*, se multiplica por el factor *r* para longitud, para el área por el factor de r^2 y para volúmenes por el factor r^3. Un aspecto crucial de la comprensión de este principio es la idea de que estos factores dependen únicamente de la dimensionalidad de las magnitudes involucradas (longitud, área y / o volumen), y no en las particularidades de las figuras, es decir, si son cuadrados, círculos, etc. (De Bock~~,~~ et al., ~~(~~2007).

Freudenthal (1983 citado en De Bock~~,~~ et al., 2007:~~, p.~~ 18), sostiene que el principio que rige la ampliación (o reducción) de las figuras geométricas es más fundamental en las matemáticas y la ciencia y, por lo tanto, merece nuestra mayor atención, tanto lo fenomenológico como desde un punto de vista didáctico.

La idea matemática de una ampliación lineal no siempre se ajusta a la realidad física y biológica de escala (Haldane, 1928; Kindt y de Lange, 1986; Thompson, 1961, citado en De Bock~~,~~ et al., 2007: ~~, p.~~ 20). Algunos ejemplos de ello que encontramos en la naturaleza es que los árboles viejos son más gordos que los ejemplares más jóvenes; los tigres tienen patas más gruesas que los gatos; las alas de un águila son comparativamente mayores que los de una golondrina; pequeños mamíferos deben seguir comiendo para mantenerse caliente. En el caso de los bebés, no son adultos linealmente reducidos. Las longitudes no se amplían o se reducen en todas las dimensiones por el mismo factor.

Un estudio realizado por De Bock~~,~~ et al., (2007) en estudiantes de 12-13 años de edad comprobó el uso excesivo de linealidad en la solución de los problemas planteados por el efecto de un aumento lineal o reducción de una figura geométrica en el perímetro o área.

Problemas de área

Los estándares del Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas [NCTM] (1989, p. 114-115, citado en Van Dooren et al., 2005, 59) sugieren que:

> *La mayoría de los estudiantes en los últimos grados de primaria y alumnos de secundaria creen que si los lados de una figura se duplican para producir una cifra similar, el área y el volumen también se duplicará.*

Una investigación realizada por De Bock~~,~~ et al., (2007), demostró lo anterior con el problema siguiente:

> *Bart es un pintor publicitario. En los últimos días, tuvo que pintar las decoraciones de navidad en varias ventanas de una tienda. Ayer hizo un dibujo de 56 cm de altura de un Santa Claus en la puerta de una panadería. Necesitó 6 ml de pintura. Ahora se le pide hacer una versión ampliada del mismo dibujo en una ventana de supermercado. Esta copia debe ser de 168 cm de alto. ¿Qué cantidad de pintura necesitará aproximadamente Bart para hacer esto?*

La mayoría de los alumnos solo aplicó regla de tres, obteniendo como resultado que se necesitan 16 ml de pintura. Incluso, al responder a las preguntas sobre el efecto de la reducción a la mitad o duplicar los lados de una figura para producir una figura similar, futuros profesores o profesores en formación, afirman que el área y el volumen se reduce a la mitad o se duplica también (Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas, 1989; Outhred y Mitchelmore, 2000; Simon y Blume, 1994;~~.~~ Tierney et al, 1990 citado en De Bock et al., 2002:~~,~~ 313).

En general, hay una tendencia casi irresistible en los estudiantes en diferentes niveles educativos, a creer que si una figura se agranda $k\ veces$, el área y el volumen es ampliada $k\ veces$ también (De Bock et al., 2002).

Por ejemplo, al aplicarles el problema siguiente: "El granjero Carlos necesita aproximadamente 8 horas para abonar un terreno cuadrado de 200 m de lado ¿Cuántas horas necesitará para abonar un terreno cuadrado con 600 m de lado?" La mayoría de los estudiantes en estos estudios fracasó en los problemas no proporcionales a causa de su fuerte tendencia para aplicar el razonamiento proporcional "en todas partes".

A partir de una investigación realizada por De Bock et al., (2007) con respecto al tipo de figura encontraron que hubo puntuaciones más altas en los problemas con figuras regulares (cuadrados, círculos) y puntuaciones más bajas para los problemas con figuras irregulares.

El tipo de figura desempeñó un papel importante debido a que los estudiantes se desempeñaron significativamente mejor en los problemas no proporcionales cuando la figura implicada era regular (De Bock et al., 2007).

Incluso sólo muy pocos estudiantes hicieron el cambio al razonamiento correcto no proporcional cuando se les proporcionaban considerables apoyos tales como estímulos metacognitivos o dibujos (De Bock, et al., 2002).

ESQUEMAS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS NO LINEALES

Existen investigaciones teóricas y empíricas sobre cómo y por qué los dibujos y diagramas son una herramienta útil en la mejora de la capacidad de las personas para representar y resolver matemáticos problemas (De Corte, Greer, y Verschaffel, 1996; Schoenfeld, 1992, citado en De Bock, et al., 2007, p. 27).

El papel de los esquemas en la resolución de problemas matemáticos

En este sentido, hacer un dibujo o diagrama de la situación planteada en el problema puede resultar crucial para el que intenta resolver un problema matemático (Diezmann, 2000a, citado en Juárez et al., 2014). Se encontró que si se construye una representación (mental) apropiada de los elementos esenciales y las relaciones que intervienen en el problema (Pólya, 1945; Schoenfeld, 1992, citado en De Bock, et al., 2007, p. 27), las representaciones esquemáticas son más positivas con respecto el éxito de la resolución de problemas matemáticos (van Garderen y Montague, 2003, citado en Juárez et al., 2014).

Estas investigaciones también sugieren que un dibujo o esquema puede reflejar una comprensión errónea del problema y será de poca ayuda para la solución de problemas (Van Essen y Hamaker, 1990). Existen diversas investigaciones que intentan explicar las razones por las cuales los estudiantes tienen dificultades al elaborar representaciones esquemáticas de problemas, señalando que una inadecuada representación puede limitar las capacidades de los niños en la resolución de problemas (Diezmann, 2000b; Mejía, 2014, citado en Juárez, J. A., Mejía, A., González A. & Slisko, J., 2014).

Esquemas para la resolución de problemas no lineales

En los problemas no proporcionales, esta actividad representacional debería ayudar a los estudiantes para detectar la inadecuación de un razonamiento lineal, y para determinar la naturaleza de la relación no lineal que conecta los elementos conocidos y desconocidos en esta representación del problema.

Por supuesto, realizar un dibujo o diagrama no garantiza que se va a encontrar la solución de un problema dado (De Bock, et al., 2007). Cuando los estudiantes no tienen éxito al realizar un esquema “correcto”, podría ser más eficaz y de gran ayuda presentar un diagrama “correcto” ya hecho.

De Bock, et al., (2007) realizaron una investigación para determinar el efecto de los dibujos en el rendimiento de los estudiantes al resolver problemas. Encontraron un ligero aumento en las puntuaciones de los estudiantes en general o en su rendimiento en los problemas no proporcionales pero en ciertas circunstancias. Al grupo de estudiantes que realizaron su propio dibujo, inesperadamente mantuvieron el porcentaje de respuestas correctas (2%) en las pruebas. Al grupo que se les proporcionó el dibujo ya hecho, el porcentaje de respuestas correctas en los problemas no proporcionales aumentó ligeramente de 2% a 5%, pero aún sigue siendo extremadamente baja.

El análisis de las hojas de respuesta de la primera prueba reveló que sólo el 2% de los estudiantes construyó de manera espontánea un dibujo o esquema de los problemas que no son proporcionales. Al parecer, los estudiantes no estaban habituados a realizar dicho esquema o dibujo para modelar y resolver una situación problemática. El análisis de las respuestas de la segunda prueba reveló que a pesar de la instrucción explícita de realizar el esquema, los estudiantes producen dibujos para los elementos no proporcionales en sólo el 46% de los casos.

La realización de los dibujos o la prestación de los dibujos ya hechos era demasiado débil para romper el predominio del modelo lineal en el razonamiento de los estudiantes pues no se encontró un efecto benéfico significativo en el rendimiento de los estudiantes. El análisis cualitativo de las hojas de respuesta de los estudiantes de esta investigación sugiere que la instrucción para hacer dibujos o incluso los dibujos dados eran a menudo ignorados por estos estudiantes (De Bock, et al., 2007).

Posiblemente, la calidad de representación de estos dibujos era en su mayoría demasiado baja para ayudar realmente a los estudiantes en la interpretación y resolución de estos problemas no proporcionales correctamente. Incluso, no podemos determinar si la baja calidad de la mayoría de los dibujos de los estudiantes fue debido a su incapacidad para realizar mejores dibujos o de su falta de voluntad para hacer dibujos de problemas que parecían sumamente fáciles para ellos.

Figuras regulares vs figuras irregulares en problemas no lineales

A partir de una investigación realizada por De Bock, et al., (2007) con respecto al tipo de figura

- Los porcentajes de respuestas correctas en los diferentes tipos de problemas no proporcionales fueron en la dirección esperada, es decir, puntuación más alta en los problemas con figuras regulares (cuadrados, círculos) y puntuaciones más bajas para los problemas con figuras irregulares.
- Los porcentajes de las respuestas correctas de los problemas proporcionales estaban en la dirección opuesta, es decir, un mayor porcentaje de respuestas correctas en los problemas con figuras irregulares que para los problemas con figuras regulares. Un análisis detallado de las respuestas incorrectas de los estudiantes sobre los problemas proporcionales demostró que eran por lo general debido a un proceso de razonamiento inadecuado no proporcional.

El 92% de los problemas proporcionales fueron resueltos correctamente por estudiantes de 12-13 años, mientras que sólo un 2% de los problemas no proporcionales fueron resueltos correctamente; en el grupo estudiantes de 15-16 años, el porcentaje de los respuestas correctas en los problemas proporcionales fue del 93% y de los problemas no proporcionales fue del 17% (De Bock, et al., 2007).

El tipo de figura desempeñó un papel importante debido a que los estudiantes se desempeñaron significativamente mejor en los problemas no proporcionales cuando la figura implicada era regular (un cuadrado o un círculo), sin embargo, se observó un inconveniente, que fue peor en los problemas proporcionales sobre estas figuras regulares, pues algunos estudiantes empezaron a aplicar un razonamiento no proporcional en los problemas proporcionales.

CAUSAS DE LA ILUSIÓN DE LA LINEALIDAD

Como ya se ha mencionado, la linealidad es una tendencia en los estudiantes e incluso en adultos, por ello, De Bock, et al., (2007) sugieren que existen tres causas prncipales para que persista la ilusión de la linealidad.

- La manera en que a menudo se enseña la proporcionalidad. Algunas partes del plan de estudios prestan una atención casi exclusiva a la proporcionalidad con respecto a las relaciones no lineales. Existe un uso desmedido de los problemas de valor faltante y un énfasis excesivo con procesos de rutina para su resolución, en comparación con un análisis significativo de situaciones. La proporcionalidad es más que una relación de cuatro términos. Si la enseñanza se mantiene confinado al estrecho dominio de preguntas de valor faltante de cuatro términos, y si no contrasta la proporcionalidad con la no proporcionalidad, en consecuencia, los estudiantes son propensos a permanecer “prisioneros” de la linealidad.
- Deficiencias del conocimiento geométrico general de los estudiantes. Esta segunda causa se refiere a una enseñanza éxito de la geometría en general. En la resolución de problemas de proporcionalidad, los estudiantes muestran algunas lagunas en su conocimiento geométrico general. Esto significa que su comprensión de proporcionalidad carece de algunos vínculos estructurales con preguntas geométricas significativas. Generalizando el comentario anterior, se podría decir que la matemática no es una relación de elementos.
- Intuición y simplicidad de la relación lineal. Supongamos que un estudiante recibe una formación apropiada en la proporcionalidad y la no proporcionalidad. Él o ella podrían ser seducidos por los encantos de la proporcionalidad. Este es un efecto de lo que podría llamarse la inercia de los conceptos. Cuando se tiene una herramienta intelectual a disposición, si esta herramienta resuelve adecuadamente muchos de los problemas anteriores, si parece más simple y más elegante que otros, entonces se apoyan de ella hasta nuevo aviso. Lo que sucede aquí se refiere al mismo tiempo a la agradable y sencilla propiedad de los conocimientos y la naturaleza indolente de la mente humana. Incluso cuando los estudiantes han sido debidamente orientados para identificar situaciones no lineales, muestran una tendencia a abusar de un modelo no lineal.

En los últimos 10-15 años, se han realizado esfuerzos considerables de investigación para llenar el vacío en nuestro conocimiento sobre el uso excesivo de la linealidad de los estudiantes. Además de las investigaciones que se han hecho por mostrar sus causas principales, también se han hecho investigaciones para proporcionar las tendencias al resolver los problemas.

TENDENCIAS PARA RESOLVER PROBLEMAS NO LINEALES

Como ya se ha mencionado, diversas investigaciones han demostrado que los estudiantes tienen una tendencia a utilizar métodos de solución proporcionales para resolver problemas en los que no es apropiado. De Bock, et al., (2007) han observado tres tipos de estudios.

Falta de sentido de decisiones en la solución de problemas de matemáticas.

Tiene principalmente por objeto descubrir la “suspensión de la construcción de sentido” de los estudiantes en matemáticas de la escuela. En los estudios realizados por Verschaffel et al., (2000) muestran cómo los estudiantes de primaria ~~superior~~ se enfrentaron con los llamados problemas de “pseudo-proporcionalidad” (por ejemplo, "*el mejor tiempo de John para correr 100 metros es de 17 segundos. ¿Cuánto tiempo le llevará correr 1 kilometro?*, "*Una tienda vendió 312 Tarjetas de Navidad en diciembre. Aproximadamente, ¿cuántas tarjetas crees que se van a vender en total en enero, febrero y marzo?*").

En lugar de tomar en cuenta su conocimiento del sentido común y las consideraciones realistas acerca de la situación descrita en el problema, los estudiantes simplemente jugar el “juego de los problemas de aplicación de la escuela”, en el cual consiste en simplemente identificar la(s) operación(es) aritmética(s) con los números dados para obtener la respuesta supuestamente correcta.

Dicho estudio también permitió mostrar cómo muy pocos estudiantes parecían expresar conciencia de que la proporcionalidad directa no serviría para obtener la respuesta exacta, sólo (en el mejor de los casos) una respuesta aproximada. Para el problema del corredor, el porcentaje de estudiantes que mostraron esa conciencia variaron de 0% a 7% en una gama de repeticiones, en muchos países.

Las respuestas de los alumnos estuvieron basadas en el razonamiento: k veces a, entonces, k veces b. Por ejemplo, para el primer problema: “John necesita correr 10 veces más lejos, entonces, necesita 10 veces más tiempo” y para el segundo problema: “la tienda venderá 312 + 312 + 312 = 936 tarjetas”.

Una dificultad que presentan las respuestas de los alumnos es, que estos problemas son “irresolubles” debido a que no existe una relación lógico-matemática precisa entre los resultados obtenidos, por lo que no se puede obtener una respuesta exacta al problema, y por lo tanto “inusual” o incluso “complicado” (De Bock, et al., 2007).

Los estudiantes no esperan problemas “irresolubles” en un contexto de prueba y asumen que los problemas tienen una respuesta numérica y exacta, por lo que, deben hacer algunos cálculos con los números dados en el problema de proporcionar dicha respuesta o como Brousseau (1997, citado en De Bock, et al., 2007, p. 7) lo denomina, debido a la acción del “contrato didáctico”.

Razonamiento en las tareas de razón y proporción

Este tipo de investigaciones comprende los estudios que tratan explícitamente de la enseñanza y el aprendizaje del razonamiento proporcional.

También incluyen la investigación de los “errores y estrategias primitivas”, como los errores conocidos debido a la suma (por ejemplo, "3 naranjas con 5 partes de agua tienen el mismo sabor como 7 naranjas con 9 partes de agua", véase Hart, 1981; Karplus, Pulos, y escenarios, 1983b; Lin, 1991, citado en De Bock, et al., 2007, p. 7).

En un estudio realizado por De Bock, et al., (2007) a 33 maestros de primaria en formación a los cuales les aplicaron el siguiente problema aditivo: “Sue y Julie estaban corriendo igual de rápido alrededor de una pista. Sue inició primero. Cuando ella había recorrido 9 vueltas, Julie había recorrido 3 vueltas. Cuando Julie había completado 15 vueltas, ¿cuántas vueltas había recorrido Sue?” Observaron que treinta y dos de los maestros de primaria en formación respondieron a este problema mediante la construcción y resolución de una proporción: $9/3 = x / 15$; $3x = 135$; $x = 45$.

Estos profesores en formación poseían todas las herramientas matemáticas necesarias para resolver el problema. Sin embargo, la presentación de esta situación aditiva en un formato de valor faltante les hizo caer en la ilusión de la linealidad.

Cramer, Post, y Currier (1993, p. 160, citado en De Bock, et al., 2007, p. 8) sostienen que “*no podemos definir a un razonador proporcional simplemente como alguien que sabe cómo establecer y resolver una proporción*” y determinaron que los libros de texto no hacen suficientemente hincapié para desarrollar la capacidad de discriminar situaciones lineales y no lineales.

Centrados explícitamente en el exceso de confianza de la linealidad

Van Dooren, et al., (2005) investigaron cómo se originan y se han desarrollado la tendencias a la sobre-dependencia de la linealidad para resolver tales problemas tomando en cuenta la edad y por consiguiente las experiencias de aprendizaje de los estudiantes y sus habilidades de razonamiento proporcional emergentes.

Por ejemplo, se realizó una prueba a un gran grupo de estudiantes de segundo a octavo grado que consta de 8 problemas de valor faltante: 2 problemas proporcionales (para lo cual la solución proporcional es correcta) y 6 unidades no proporcionales pertenecientes a tres categorías diferentes: 2 problemas aditivos, 2 afín y 2 constantes.

- Problema aditivo*: “Ellen y Kim están corriendo alrededor de una pista. Ellas corren igual de rápido, pero Ellen comenzó más tarde. Cuando Ellen ha corrido 5 vueltas, Kim ha corrido 15 vueltas. Cuando Ellen ha corrido 30 vueltas, ¿cuántas vueltas ha recorrido Kim” (respuesta correcta: 40 vueltas, la respuesta proporcional: 90 vueltas)?*

- Problema afín: *"La locomotora de un tren mide 12 metros de largo. Si hay 4 vagones conectados a la locomotora, el tren mide 52 m de largo. ¿Cuánto medirá el tren si hay 8 vagones conectados a la locomotora?" (respuesta correcta:? 92 m, la respuesta proporcional: 104metro)*

- Problema constante: *"Mama puso 3 toallas en el tendedero. después de 12 horas estaban secas. La abuela puso 6 toallas en el tendedero. ¿Cuánto tiempo les toma secarse?" (respuesta correcta: 12 horas, respuesta proporcional: 24 horas)*

Aunque en segundo grado mostraron cierta capacidad emergente de razonamiento proporcional, el mayor progreso en la solución correcta de los problemas proporcionales se hizo entre tercer y sexto grado. Con respecto a los problemas no proporcionales, más de un tercio de todas las respuestas implicó la aplicación errónea del modelo proporcional.
No es sorprendente que la tendencia a confiar demasiado en la proporcionalidad desarrollada simultáneamente con la capacidad para resolver problemas proporcionales:

- Ya era notable desde segundo grado, pero aumentó considerablemente en los próximos años, con un pico en quinto grado (los alumnos habían recibido una formación intensiva en la solución de problemas de proporcionalidad), donde más de la mitad de las respuestas a los problemas no proporcionales fueron errores.
- Después de este pico, el número de errores proporcionales disminuyó gradualmente, pero no desapareció por completo.
- En octavo grado todavía más de una quinta parte de las respuestas refleja una mala aplicación de la proporcionalidad.
- Aunque la cantidad entre las distintas categorías de problemas difería, esta tendencia fue general.

Los investigadores De Bock, et al., (2007) esperaban que los problemas de tipo "constante" (como el problema "tendedero" mencionado anteriormente) serían los problemas más fáciles en la prueba debido que no había necesidad de cálculos, sin embargo obtuvieron la más alta tasa de errores proporcionales (hasta un 80% en quinto grado).

Con base en los resultados obtenidos de la investigación, Van Dooren et al. (2005) demostraron que los alumnos de primaria tienden fuertemente a aplicar estrategias de solución proporcionales cuando se enfrentan a problemas no proporcionales en problemas de valor faltante

.También existen investigación en otros niveles escolares, por ejemplo la realizada por Esteley, Villarreal, y Alagia (2004). Dicha investigación fue realizada en estudiantes universitarios que participaban en un primer curso de cálculo con de problemas como: "*Si una planta mide 30 cm en el comienzo de un experimento, y su altura aumenta un 50% mensual, ¿cuánto va a medir después de 3 meses?"*. Observaron que el 62% de los estudiantes razonó de forma lineal con respecto al aumento de la altura en función del tiempo, en lugar de tomar en cuenta el carácter exponencial de este proceso de crecimiento.

Se observa fuertemente el manejo de esquemas y procedimientos proporcionales porque la mayoría de las tareas de razonamiento proporcional que los estudiantes encuentran en sus carreras escolares están expresadas en un formato de valor faltante mientras que, los problemas no proporcionales son rara vez (o nunca) presentados en este tipo de formato.

Con base en los datos mostrados, puede observarse una fuerte evidencia en los estudiantes del uso excesivo de la linealidad, lo anterior suscitó una gran cantidad de asombro e incredulidad entre los profesionales a los que se han presentado los resultados de estos estudios. La mayoría de ellos eran conscientes del problema, pero no se habían dado cuenta de que afectó a las soluciones de sus alumnos con tanta fuerza (De Bock, et al., 2007).

SUGERENCIAS PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS NO LINEALES

Existen diversos procesos para la resolución de los problemas, dichos procesos de solución subyacen a una respuesta correcta en un problema. Tomando en cuenta el problema: "El granjero Carlos necesita aproximadamente 8 horas para abonar un terreno cuadrado de 200 m de lado ¿Cuántas horas necesitará para abonar un terreno cuadrado con 600 m de lado?". De Bock, et al., (2007) clasificaron los procesos correctos de resolución del problema en las siguientes categorías:

- La estrategia “pavimentación”. Consiste en recubrir el área más grande con las más pequeñas. Por ejemplo, observando que hay 9 cuadraditos pequeños, después se puede concluir que el agricultor por lo tanto necesitan 9 veces 8 horas = 72 horas.
- Comparación de la longitud o el área de ambas figuras. Calcular el área de ambos cuadrados (200 × 200 = 40 000 m^2 y 600 × 600 = 360 000 m^2), la determinación del resultado de la división (360 000 / 40 000 = 9), y por lo tanto la conclusión de que el agricultor necesitará 9 veces 8 horas = 72 horas.
- Aplicación de la regla general. Inmediatamente aplicar la regla general “lado × r, así el área × r^2” es decir, si la longitud es el triple, entonces, el área es $3^2=9$ por lo tanto el tiempo de fertilización tiene que ser multiplicado por 9 entonces 9 por 8 horas = 72 horas.

Un análisis más detallado en las evidencias escritas de los estudiantes reveló que la segunda estrategia de solución fue (por el momento) la más frecuente. Es curioso que muy pocos estudiantes utilizaran la estrategia “pavimentación”. De hecho, la estrategia “pavimentación” es un método muy fácil e intuitivo, ligado al contexto que requiere sólo poco conocimiento formal-matemático (De Bock, et al., 2007).

Planteamiento del problema

La forma tradicional de la enseñanza de modelos matemáticos y la solución de problemas en la escuela primaria y secundaria es por medio del uso de problemas de aplicación, es decir, la solución de un problema matemático consiste en encontrar y ejecutar la fórmula matemática correcta previamente enseñada en la escuela (Schoenfeld, 1992, citado en De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D. & Verschaffel, L., 2007, p. 36) o la respuesta se puede encontrar mediante la realización de una o más operaciones aritméticas (suma, resta, multiplicación, división) en las cantidades del problema (Verschaffel, Greer, y de Corte, 2000, citado en Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D. & Verschaffel, L., 2005, 58).

Las reformas y programas de estudio de varios países tienen como uno de los principales objetivos de la educación matemática propiciar la capacidad de desarrollar y utilizar modelos para dar sentido a las diversas situaciones que rodean la vida diaria y de los sistemas complejos derivados de nuestra sociedad moderna (Blum, 2002; Consejo Nacional de profesores de Matemáticas [NCTM], 1989, 2000, citado en Van Dooren et al., 2005, 58).

En la educación matemática contemporánea, la linealidad (o proporcionalidad) recibe mucha atención debido a que las relaciones lineales son el modelo apropiado para acercarse a diversos problemas prácticos (situaciones de la vida diaria) y teóricos, en las matemáticas y la ciencia (De Bock et al., 2007).

La linealidad es uno de los conceptos clave en la matemática escolar debido a que aparece en diferentes formas: la “regla de tres” en educación primaria, modelos lineales en secundaria, aproximaciones de cálculo y probabilidad en bachillerato, y abstracciones de un espacio vectorial en la universidad (De Bock, Van Dooren, Janssens & Verschaffel, 2002).

El refuerzo de la linealidad en numerosas ocasiones en la matemática escolar, junto con su sencillez intrínseca, puede dar lugar a una tendencia en los estudiantes e incluso en adultos para ver y aplicar el modelo lineal "en todas partes". (De Bock et al., 2002). Debido a su simplicidad, las funciones lineales aparecen inmediatamente en la mente del ser humano porque, sin duda, no hay funciones que son más simples que las lineales (Rouche, 1989, p. 17, citado en De Bock et al., 2002, 311).

PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

Con base en los antecedentes, las problemáticas y tendencias de los estudiantes e incluso los adultos para aplicar modelos lineales "en todas partes" y caer en la “seducción” de la linealidad, se tienen las siguientes preguntas:

- ¿Cuáles son las tendencias que presentan los alumnos de tercer semestre de bachillerato de CECyTE 15 Huactzinco al resolver problemas en los que se hace presente la ilusión de la linealidad?
- ¿Qué efecto tiene una intervención didáctica diseñada para disminuir el uso del modelo lineal al resolver problemas en alumnos de tercer semestre de bachillerato de CECyTE 15 Huactzinco?

SUPUESTOS INICIALES

Debido a que se toman en cuenta problemas que van enfocados a áreas, volúmenes y falta de autenticidad, se considera que los alumnos al tratar de obtener la solución a dichos problemas, caerán en la linealidad. Con base en lo anterior y en los antecedentes, se tienen estos supuestos:

- Mostrar que cuando los alumnos resuelvan problemas del cuestionario en los que se amplíen o disminuyan las longitudes de determinadas figuras o cuerpos geométricos, aplicarán métodos lineales y tratarán de generalizar para obtener las áreas y/o volúmenes de dichas figuras o cuerpos geométricos.
- Probar que al resolver los problemas con falta de autenticidad en el cuestionario, los alumnos obtendrán y proporcionarán una respuesta dejando a un lado e/o ignorando su conocimiento del mundo real.
- Mediante la intervención didáctica basada en la investigación-acción se pueden disminuir los efectos de la linealidad cuando los alumnos resuelvan problemas relacionados con áreas, volúmenes o con falta de autenticidad.

OBJETIVOS

Para el presente anteproyecto de tesis se han fijado los siguientes objetivos:

General:

- Debido a que la mayoría de los estudiantes inciden en la ilusión de la linealidad entonces se tiene como objetivo aplicar una propuesta didáctica enfocada en la investigación-acción y determinar el efecto de dicha propuesta.

Específicos

- Analizar las tendencias que presentan al resolver problemas de área, volumen y con falta de autenticidad en los que se hace presente la linealidad.
- Examinar las manifestaciones esquemáticas de los alumnos cuando resuelven problemas de área, volumen y con falta de autenticidad en los que se hace presente la linealidad.
- Observar el desarrollo de los alumnos durante la aplicación de la intervención didáctica para confrontar la linealidad en problemas de área, volumen y con falta de autenticidad para tratar de disminuirla.
- Analizar el efecto de la intervención didáctica para confrontar la linealidad en problemas de área, volumen y con falta de autenticidad para tratar de disminuirla.

JUSTIFICACIÓN

En la educación básica en México se proponen formalmente problemas de proporcionalidad a partir del cuarto grado. A partir de este grado y durante la formación académica se resuelven problemas sobre proporcionalidad, incluso se tienen textos que abordan este tema pero dirigido a profesores (Block, D., Mendoza, T. y Ramírez, M., 2010). La mayoría de los problemas que se resuelven son de tipo valor faltante y se resuelven usualmente con lo que se conoce como "regla de tres".

Desafortunadamente, en el país se abordan problemas "ideales" que se resuelven directamente de esta manera, debido a esto, poco a poco los alumnos van perdiendo la capacidad de discernir cuándo es posible aplicar este método para resolver los problemas.

Una rama de las matemáticas en las que usualmente se presenta este tipo de problemas es cuando se les pide a los alumnos determinar el área o volumen, pues ellos piensan que si aumentamos al doble o disminuimos a la mitad determinada longitud de una arista en determinado cuerpo geométrico entonces el área o volumen aumentará al doble o disminuirá a la mitad respectivamente, situación que no es cierta (De Bock et al., 2002). Debido a este tipo de pensamiento, los alumnos llevan este tipo de razonamiento hasta altos niveles educativos, lo cual representa un serio problema para el aprovechamiento educativo del alumno.

Los alumnos están acostumbrados a obtener un resultado numérico cuando resuelven problemas matemáticos sin importar lo alejados de la realidad en que se encuentren, esto representa un serio problema, pues lo que se pretende hoy en día en la educación en el país es que los problemas resueltos por los alumnos pertenezcan a algún contexto de la vida diaria.

MÉTODO

La presente investigación tiene una naturaleza cualitativa. Dicho estudio se realizó con 75 alumnos de cuarto semestre de bachillerato del Centro de Estudios Científicos y Tecnológicos del Estado de Tlaxcala (CECyTE) del Plantel 15 ubicado en San Juan Huactzinco, Tlaxcala. Los 75 alumnos están distribuidos en 3 grupos a los cuales denotaremos por A, B y C. El grupo A consta de 28 alumnos, el grupo B de 22 alumnos y el grupo C de 25 alumnos.

Se aplicó un cuestionario que debía ser resuelto con lápiz y papel. Éste consistió en problemas no lineales (Anexo 1) de tipo: constante, área, volumen y falta de autenticidad, cabe señalar que algunos de los problemas que se propusieron en el instrumento son los utilizados por Van Dooren et al., (2005) y De Bock et al., (2007) con algunas modificaciones superficiales y, otros más fueron propuestos por los autores de la presente investigación. Para facilitar lecturas posteriores, se asociará cada problema con un ícono (representativo al problema) para que sea más práctico relacionarlos, además de no repetir constantemente el enunciado del problema. ~~Éste consistió en problemas no lineales (Anexo 1) de tipo: constante, área, volumen y falta de autenticidad.~~ Los ocho problemas que se propusieron en el instrumento son los siguientes:

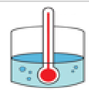
Tipo de problema	Problema	Texto	Ícono
Lineal	"Castillo"	3. Ricardo necesita 10 minutos para cavar una zanja alrededor de un castillo de arena cuadrado cuyo lado mide 50 cm. ¿Cuánto tiempo se necesita aproximadamente para cavar una zanja alrededor de un castillo de arena cuadrado de 150 cm de lado?	
Falta de autenticidad	"Corredora"	1. El mejor tiempo de Alicia para correr 100 metros es de 16 segundos. ¿Cuánto tiempo le llevará correr 1000 metros?	
	"Altura de los mexicanos"	6. Los mexicanos miden a los 10 años aproximadamente 1.30 m. ¿Cuánto medirán a los 30 años?	
Constante	"Temperatura del agua"	2. Si 500 ml de agua se encuentran a 20°C en el ambiente. ¿Qué temperatura tendrán 1000 ml de agua?	
	"Toallas"	5. Mamá puso 3 toallas en el tendedero. Después de 12 horas estaban secas. La abuela puso 6 toallas en el tendedero. ¿Cuánto tiempo les toma secarse?	
Área	"Pintor"	4. Luis es un pintor publicitario. En los últimos días, tuvo que pintar las decoraciones de varias ventanas de una tienda. Ayer hizo un dibujo de 56 cm de altura de Bart Simpson en la puerta de una tienda de regalos. Necesitó 6 ml de pintura. Ahora se le pide hacer una versión ampliada del mismo dibujo en una ventana de una tienda de videojuegos. Esta copia debe ser de 168 cm de alto. ¿Qué cantidad de pintura necesitará aproximadamente Luis para hacerlo?	
	"Agricultor"	7. Un agricultor se tarda 8 horas en arar un terreno cuadrado de 100 m de lado. ¿Cuánto tardará en arar un terreno de la misma forma pero con el triple de longitud?	
Volumen	"Dados"	8. En su caja de juguetes, María tiene dados en varios tamaños. El más pequeño mide 10 mm de lado y tiene un peso de 800 mg. ¿Cuál sería el peso de un dado más grande cuyo lado mide 30 mm?	

Figura 1. Asignación de íconos a cada problema

Siete problemas son considerados no lineales, de los cuales el problema 1 y 6 son considerados con falta de autenticidad, el 2 y 5 son catalogados como constantes, el 4 y 7 son problemas de área, el 8 de volumen y el problema 3 se resuelve mediante el modelo lineal.

Posteriormente a la aplicación, se analizaron los instrumentos para observar las tendencias de los alumnos al resolver los problemas y las representaciones externas para observar si se ~~en donde se~~ hace presente la ilusión de la linealidad.

~~Después de haber analizado los instrumentos se construyó una propuesta didáctica bajo el enfoque de investigación acción con el propósito de disminuir la linealidad en los diferentes tipos de~~

~~problemas, para luego aplicarla a los alumnos así como dar seguimiento puntual a los alumnos. Por último se aplicará un cuestionario final y se realizarán entrevistas para determinar si la intervención realizada tuvo un efecto favorable para la erradicación o disminución de la linealidad en los alumnos.~~

Análisis del instrumento

Con base en el análisis realizado al instrumento de diagnóstico se calculó el porcentaje con respecto a la forma en cómo los 58~~75~~ alumnos a los cuales se les aplicó dicho instrumento resuelven problemas en los cuales se hace presente la ilusión de la linealidad, lo anterior con la finalidad de obtener una visión general sobre las características y tendencias de los alumnos al solucionar tales problemas.

Cabe señalar que para el presente análisis no se habla con profundidad del problema~~ "el~~ "castillo ~~de arena~~" debido a que este problema se resuelve por medio del modelo lineal~~ proporcionalidad~~ y será abordado en secciones posteriores para analizar si los alumnos después de aplicarles la propuesta didáctica abusan de la no linealidad.

LA LINEALIDAD EN LOS ALUMNOS

La siguiente ~~tabla~~ Figura muestra de manera general la cantidad de alumnos que caen en la ilusión de la linealidad

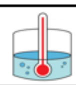
Tipo	Proporcional	Falta de autenticidad		Constantes		Área		Volumen
Ícono								
Lineal	47	52	28	46	37	52	48	55
%	81	89.7	48.3	79.3	63.8	89.7	82.8	94.8

Figura 2~~Tabla 1~~. Frecuencia y porcentaje de los alumnos que aplican el modelo lineal

La Figura~~tabla~~ anterior muestra notablemente que los alumnos tienden a aplicar métodos lineales y caen en la ilusión de la linealidad. Los problemas~~ en~~ donde presentaron la aplicación del modelo lineal con mayor frecuencia fue~~ron~~ en los problemas "~~corredora~~pintor" y "dados" pertenecientes a problemas de ~~falta de autenticidad~~área y volumen respectivamente. Los problemas en donde se presentó con meno~~s~~r frecuencia este tipo de modelo fue~~ron~~ en los problemas~~ de~~ "toallas" y "altura de los mexicanos" pertenecientes a problemas constantes y con~~ de~~ falta de autenticidad.

Con respecto a los problema con falta de autenticidad l~~L~~os alumnos presentan un~~el~~ porcentaje más elevado en la aplicación del modelo lineal en el problema "~~corredora~~corredora" y~~ a su vez presentan la~~ menor incidencia en el problema de "la altura de los mexicanos",~~ lo cual es bastante contrastante debido a que ambos problemas están clasificados dentro de la misma categoría (falta de autenticidad),~~ al analizar los instrumentos,~~parecer,~~ cierta cantidad de alumnos logró concebir que la altura de los mexicanos no puede ser de 3.9 metros, sin embargo, casi~~más d~~el 50% de ellos no se dio cuenta de este hecho pues ellos hicieron a un lado su sentido común y/o conciencia con respecto de lo que conocen del mundo ~~se les plantea en el problema~~. Para el caso del problema que la respuesta correcta es exacta pues no toman en cuenta ciertas consideraciones realistas y solo buscan la o las operaciones aritméticas para resolver dicho problema y no se dan cuenta que su respuesta es solo una aproximación. En general, para la resolución de ambos problemas de autenticidad los alumnos asumieron que éstos tenían una respuesta numérica y por ende la debían de proporcionar o lo que Brousseau (1997) denominó “contrato didáctico”.

Dentro de los problemas denominados “constantes” sucede algo semejante a lo que sucede con los problemas con “falta de autenticidad” debido a que los alumnos hacen a un lado ciertas consideraciones realistas. Para el problema “temperatura del agua”, el 79.3% de los estudiantes utilizan el modelo lineal para resolver dicho problema, pero los alumnos hacen a un lado su sentido realista pues ellos piensan que como la cantidad de agua aumenta al doble, entonces la temperatura también aumenta al doble, pareciera que hubiera una fuente de calor que hace que aumentara la temperatura del recipiente donde hay más cantidad de agua. Con base en los datos propuestos en este problema sería interesante que en lugar de 1000 ml se propusieran 2500 ml o una cantidad más elevada para que al aplicar el modelo lineal nos diera como resultado 100 °C o más, lo que indicaría que el agua estaría en su punto de ebullición o hirviendo en el ambiente. Para el problema “toallas” los estudiantes creen que a mayor cantidad de toallas el tiempo de secado será mayor, en específico, para el problema planteado los estudiantes creen que el tiempo de secado será el doble (24 horas).

En los problemas “pintor”, “agricultor” y “dados” pertenecientes los primeros dos de ellos a problemas de área y el restante a volumen se observó que hay una tendencia en los estudiantes, a creer que si una figura se agranda $k - veces$ entonces el área y el volumen también es ampliada $k - veces$ como lo mencionan De Bock et al. (2002). Los alumnos a los que se les aplicó el instrumento echaron mano de este recurso y ello conllevo a que más del 80 ~~60~~% resolvieron estos problemas de forma lineal. Cabe señalar que el problema de ~~volumen~~volumen (“~~dados~~dados”) h~~t~~ub~~v~~o un mayor porcentaje en la aplicación del modelo lineal ~~que los problemas de área~~, en general, en los problemas de área, volumen y “corredora” ~~lo cual implica que e~~existe una mayor dependencia a utilizar el modelo lineal ~~proporcionalidad~~ para resolver este tipo de problemas.

~~Dentro de los problemas denominados “constantes” sucede algo semejante a lo que sucede con los problemas con “falta de autenticidad” debido a que los alumnos hacen a un lado ciertas consideraciones realistas. Para el problema “temperatura del agua”, el 64% de los estudiantes utilizan el modelo lineal para resolver dicho problema, pero los alumnos hacen a un lado su sentido realista pues ellos piensan que como la cantidad de agua aumenta al doble, entonces la temperatura también aumenta al doble, pareciera que hubiera una fuente de calor que hace que aumentara la temperatura del recipiente donde hay más cantidad de agua. Con base en los datos propuestos en este problema sería interesante que en lugar de 1000 ml se propusieran 2500 ml para que al aplicar el modelo lineal nos diera como resultado 100 °C, lo que indicaría que el agua estaría en su punto de ebullición o hirviendo en el ambiente.~~

LA LINEALIDAD EN LOS DIFERENTES GRUPOS

Los problemas fueron aplicados a tres diferentes grupos de alumnos a los que denominaremos grupo A ~~en~~ el cual consta de~~hay~~ 24~~8~~ alumnos y los~~,~~ grupos B y C~~,~~ integrados de 17~~22~~ alumnos ~~y el grupo C, conformado por 28 alumnos~~cada uno de ellos. Por lo anterior es necesario observar la frecuencia con la que los alumnos de cada grupo aplicaron el modelo lineal en los diferentes problemas propuestos.

La siguiente ~~tabla~~ Figura muestra la aplicación del modelo lineal para cada grupo:

Tipo	Proporcional	Falta de autenticidad		Constantes		Área		Volumen
Ícono								
A (24)	18	23	11	21	14	21	20	22
% A	75	95.8	45.8	87.5	58.3	87.5	83.3	91.7
B (17)	13	13	9	9	12	15	13	17
% B	76.5	76.5	52.9	52.9	70.6	88.2	76.5	100
C (17)	16	16	8	16	11	16	15	16
% C	94.1	94.1	47.1	94.1	64.7	94.1	88.2	94.1

Figura 3~~Tabla 2~~. Frecuencia y porcentaje por grupo que aplican el modelo lineal

Gracias a la ~~tabla~~ Figura anterior, se puede observar que el grupo A~~A~~ utiliza menos el modelo lineal para resolver el problema "altura de los mexicanos" mientras que en los problemas de área, volumen y constante ("temperatura del agua") presenta una fuerte tendencia para aplicar ~~el~~ el modelo lineal~~l con mayor frecuencia que los otros grupos en problemas de autenticidad ("corredora")~~, sin embargo,~~-~~ el problema donde se presenta mayor uso de dicho modelo es en un problema de tipo ~~constante~~falta de autenticidad, en específico, en el problema "corredora" debido a que más del 95% de los estudiantes utilizan dicho modelo~~ ("temperatura del agua") y de área ("agricultor") y tiene menos incidencia en el resto de los problemas~~, incluso, en este grupo (A) que se les aplicó el instrumento.

~~.~~

El grupo C utiliza con mayor frecuencia el modelo lineal en diferentes tipos de problema, incluso, de entre los tres grupos tomados en cuenta, destaca en los problemas de tipo constante ("temperatura del agua"), área ("pintor" y "agricultor") y volumen ("dados") pues utilizan con mayor frecuencia el modelo lineal para resolver dichos problemas. De los cuatro problemas mencionados, en 3 de ellos ("temperatura del agua", "pintor" y "dados") casi la totalidad de los estudiantes utilizaron el modelo lineal pues 16 de los 17 estudiantes de este grupo lo resolvieron de dicha manera.

~~El grupo B aplica con mayor frecuencia y porcentaje la linealidad en problemas de área ("pintor"), constante ("toallas"), autenticidad ("altura de los mexicanos") y tienen el porcentaje intermedio en~~

~~problemas de área (“agricultor”) y volumen (“dados”). Este grupo presenta una especial~~ lo anterior no indica que los ~~alumnos~~ estudiantes que no aplicaron el modelo lineal tienen un razonamiento apropiado, por lo que es necesario realizar un análisis más profundo, para~~or~~ ello se construyeron algunas categorías que muestran cómo ~~es conveniente realizar un análisis por cada grupo para observar qué sucede con la forma~~los estudiantes~~ en que~~ resuelven los problemas~~ los alumnos~~.

CATEGORÍAS

Es necesario mencionar que con base en la estrategia con la cual los alumnos resolvieron el problema se obtuvieron las siguientes categorías:

- Razonamiento lineal. Aplica proporcionalidad o “regla de tres”.
- Razonamiento no lineal. No aplica el modelo lineal o aunque lo aplica, observa que no es apropiado u observa que la respuesta obtenida es inapropiada.
- Otro. Aplica diferentes operaciones aritméticas o solo escribe la respuesta.
- Sin respuesta.

Cada una de las primeras tres categorías está dividida en diferentes subcategorías.

Razonamiento lineal

- Aplica proporcionalidad. El alumno utiliza el modelo lineal, proporcionalidad o “regla de tres” para resolver el problema.
- Aplica proporcionalidad con error al aplicar algoritmo. El alumno intenta aplicar el modelo lineal, proporcionalidad o “regla de tres” pero tiene algún error al realizar sus cálculos.

Razonamiento ~~Aplica proporcionalidad inversa. El alumno piensa que no es adecuada una proporcionalidad directa para resolver el problema, por lo cual lo resuelve por proporcionalidad inversa.~~

- Razonamiento no lineal aunque de forma inadecuada. El alumno sabe que no es apropiado utilizar proporcionalidad, sin embargo, su razonamiento no es del todo apropiado.
- Razonamiento no lineal adecuado. El alumno comprende que para resolver el problema no es apropiado utilizar proporcionalidad y argumenta de manera adecuada porqué no es conveniente.

Otro

- Realiza diversas operaciones. El alumno se centra en realizar una o varias~~múltiples~~ operaciones aritméticas para resolver el problema y/o no argumenta porqué utiliza dichas operaciones.
- Procedimiento confuso. No es muy claro el método o técnica utilizada por el alumno para resolver el problema o en su defecto solo coloca la respuesta sin argumentar o utilizar operaciones aritméticas.
- Aplica proporcionalidad inversa. El alumno piensa que no es adecuada una proporcionalidad directa para resolver el problema, por lo cual lo resuelve por proporcionalidad inversa.

ANÁLISIS DEL INSTRUMENTO

Con formato: Título 2

La siguiente ~~tabla~~ Figura muestra de manera general las tendencias de los alumnos al resolver los problemas que se ~~les~~ aplicaron en el instrumento, las cuales están desglosadas en sus diferentes subcategorías para un mejor análisis.

	proporcionalidad inversa	0	3	0	0	1	0	0	0
No lineal	Razonamiento no lineal aunque de forma inadecuada	1	1	0	1	0	11	0	0
	Razonamiento no lineal adecuado	0	7	0	0	20	11	1	1
Otro	Realiza diversas operaciones	2	0	4	5	1	0	2	1
	Procedimiento confuso	1	2	8	1	2	7	8	3
Sin responder		2	1	1	2	1	7	2	1

								...a ...nalidad ...sa	Sin respuesta
									2
									5
									0
									1
	49	3	1	0	4	0	0		1
	46	2	0	1	2	5	0		2
	48	7	0	1	1	1	0		0

~~Tabla~~ Figura 4~~3~~. Frecuencia general de las tendencias de los alumnos al resolver los problemas.

Problemas con falta de autenticidad

Con formato: Título 3

En el problema “corredora” se puede observar que de los 58 estudiantes, 51 de ellos tuvieron un razonamiento lineal, de los cuales 5 de ellos tuvieron algún error al aplicar el modelo lineal, cabe señalar que los estudiantes consideraron que la repuesta es exacta (160 segundos) y no fueron capaces de percatarse que la repuesta proporcionada solo corresponde a una aproximación pues existen otros factores que no fueron tomados en cuenta. Algunos estudiantes (2) tomaron en cuenta algunas consideraciones del entorno, sin embargo, no lograron concretar de manera correcta el problema. Un estudiante realizó algunas operaciones para resolver el problema y 2 más realizaron un procedimiento confuso. Otros 2 alumnos simplemente no resolvieron el problema.

El problema “altura de los mexicanos” es uno de los problemas donde los estudiantes presentan una mayor disposición a utilizar sus conocimientos del mundo real o de su entorno pues fue el problema que mayor repuestas no lineales tuvo (20) y el segundo más elevado en razonamiento no lineal adecuado, estos alumnos al parecer se pudieron percatar que el uso del modelo lineal no era adecuado pues al utilizar dicho modelo la repuesta obtenida era excesiva para ser la altura de los mexicanos (3.9 metros). Algunos alumnos (5) no respondieron el problema, posiblemente porque al responderlo mental o aritméticamente con el modelo lineal y obtener el resultado, les pudo causar conflicto. Solo 28 estudiantes respondieron con ayuda del modelo lineal e incluso es el problema donde hubo menor dependencia del modelo lineal, sin embargo, los estudiantes "suspendieron" su conocimiento del mundo al dar como repuesta 3.9 metros. Un estudiante realizó diversas operaciones y 4 más realizaron un procedimiento confuso.

Problemas constantes

Dentro de los problemas de tipo constante hubo ciertas particularidades pues el problema "temperatura del agua" fue el único en el cual 3 estudiantes utilizaron proporcionalidad inversa (posteriormente se presentarán ejemplos de esta situación) y respondieron que la temperatura para 1000 mililitros de agua es de 10 °C. Solo 6 alumnos se pudieron percatar que al estar bajo las mismas condiciones e independientemente de la cantidad de agua que haya en los recipientes, la temperatura debe de ser la misma para ambos (20 °C). De los estudiantes restantes, 46 utilizaron el modelo lineal y dijeron que la temperatura era de 40 °C, 1 utilizó los datos para dar solución y 2 presentaron un procedimiento confuso.

El otro problema de tipo constante ("toallas") es el problema donde los estudiantes presentan mayor disposición a utilizar sus conocimientos del mundo real o de su entorno pues fue el problema que mayor repuestas no lineales adecuadas presenta (17) y se dieron cuenta que no importa la cantidad de toallas, el tiempo de secado será el mismo (12 horas). Cabe señalar que de los 6 estudiantes que respondieron de manera correcta el problema "temperatura del agua", 4 de ellos también respondieron correctamente el problema "toallas". Algunos alumnos (2) utilizaron los datos para dar solución, 1 presentó un procedimiento confuso y 1 estudiante no respondió. El resto de los estudiantes (37) respondieron que el tiempo de secado para 6 toallas es de 24 horas utilizando el modelo lineal.

Problemas de área

Los problemas de área fueron de los problemas en los que más se utilizó el modelo lineal. Por ejemplo, para el problema "pintor" se puede observar que de los 58 estudiantes, 49 de ellos tuvieron un razonamiento lineal pues resolvieron dicho problema con proporcionalidad o "regla de tres", de los cuales 3 de ellos tuvieron algún error al aplicar el modelo, cabe señalar que ningún estudiante se percató que si el dibujo crece en una dimensión (largo por ejemplo) entonces también tiene que crecer en la otra dimensión (ancho) la misma cantidad de veces, en específico, si crece en un dimensión 3 veces, en la otra también tiene que crecer 3 veces (para guardar uniformidad en el nuevo dibujo, de lo contrario estaría "deforme"), es decir, sería 9 veces más grande que el original, por lo tanto, necesitaría aproximadamente 9 veces más de pintura (54 mililitros). Solo 1 estudiante tomó algunas consideraciones pero no logró concretarlo correctamente. Otros estudiantes (4) realizaron algunas operaciones para resolver el problema y 1 más no resolvió el problema.

En el problema "agricultor" sucede algo semejante que en el problema anterior, pues si se considera un terreno 3 veces y se debe de conservar la misma figura (cuadrado) entonces debe de

Con formato: Título 3

Con formato: Título 3

crecer 3 veces del otro lado, es decir, sería 9 veces más grande que el original, por lo tanto, necesitaría aproximadamente 9 veces más de tiempo (72 horas). Solo un estudiante logró responder de manera correcta este problema. 48 estudiantes utilizaron el modelo lineal aunque 2 de ellos presentaron algún error al aplicar el algoritmo. Otros estudiantes (2) realizaron algunas operaciones para resolver el problema, 5 realizaron un procedimiento confuso y 2 más no resolvió el problema.

Problema de volumen

Con formato: Título 3

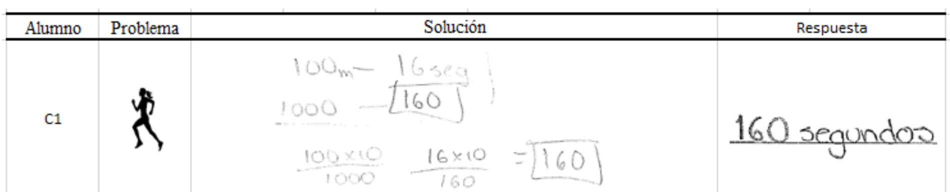
El problema de volumen fue el problema en el que más se utilizó el modelo lineal. De los 58 estudiantes a los cuales se les aplicó el instrumento, 55 de ellos tuvieron un razonamiento lineal pues resolvieron dicho problema con proporcionalidad o "regla de tres", de los cuales 7 tuvieron algún error al aplicar el modelo. Cabe señalar que solo un estudiante se percató que al ser el cubo una figura tridimensional y cada arista crece 3 veces entonces en total crecerá 27 veces, es decir, el cubo con mayores dimensiones es 27 veces más grande con respecto del primero, por lo tanto, el peso del cubo más grande sería de aproximadamente 21600 miligramos. El estudiante que resolvió correctamente es el mismo que resolvió correctamente el problema "agricultor". Un estudiante realizó algunas operaciones para resolver el problema y 1 más lo resolvió de forma confusa.

Aunque se menciona cómo resuelven los diferentes tipos de problemas, es importante visualizar algunos ejemplos de los procedimientos y/o argumentos que los estudiantes utilizaron para resolver dichos problemas, con base en lo anterior, se presenta la siguiente sección.

EJEMPLOS DE LAS DIFERENTES CATEGORÍAS

Con formato: Título 2, Izquierda

En la presente sección se muestran algunos ejemplos de las estrategias, procedimientos y/o argumentos que los estudiantes utilizaron para resolver los diferentes problemas presentados en el instrumento. Es necesario familiarizar con la estructura de las Figuras que se mostrarán, por ello se a continuación se muestra un ejemplo.



Alumno	Problema	Solución	Respuesta
C1		100m — 16seg 1000 — 160 $\frac{100\times10}{1000}$ $\frac{16\times10}{160}$ = 160	160 segundos

Figura 5~~3~~. Ejemplo de la estructura de Figuras posteriores

A continuación se hace una breve descripción de los elementos que conforman a la Figura 5.

- La columna "Alumno" hace referencia al grupo (A, B o C) y al número de instrumento aplicado en ese grupo, por ejemplo, en la Figura 5 muestra "C1" lo cual indica que es un estudiante del grupo "C" y el número de instrumento aplicado en ese grupo es el 1.

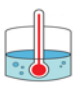
- La columna “Problema” muestra un ícono el cual indica el problema al que se está haciendo referencia, por ejemplo, el ícono de la Figura 5 hace referencia al problema “corredora”, si es necesario recordar los íconos, ver Figura 1.
- La columna “Solución” indica la estrategia, procedimiento, algoritmo y/o argumento utilizado para resolver el problema, por ejemplo, en la columna “Solución” de la Figura 5 se observa que el estudiante utiliza el algoritmo de la “regla de tres” para resolver el problema “corredora”.
- La columna “Respuesta” muestra el resultado que el estudiante obtuvo, por ejemplo, el resultado del estudiante C1 es 160 segundos.

Razonamiento Lineal

Primero se abordará la categoría “Razonamiento lineal”, en esta categoría se incluyen los estudiantes que utilizaron el modelo lineal, proporcionalidad o “regla de tres” para resolver los problemas. A modo de recordatorio, en esta categoría existen dos subcategorías: aplica proporcionalidad y aplica proporcionalidad con error en algoritmo.

Aplica proporcionalidad

Primero se muestran algunos ejemplos incluidos ~~D~~dentro de la subcategoría denominada~~a como lineal y~~ aplica proporcionalidad.~~,~~ ~~los alumnos tienden a aplicar el algoritmo de la “regla de tres” y/o argumentan que aplican dicho algoritmo, a continuación se muestran algunos ejemplos de~~

Alumno	Problema	Solución	Respuesta
A1		56 × 3 = 168 6 × 3 = 18	18 ml de pintura
C1		100m — 16seg 1000 — $\boxed{160}$ $\frac{100\times10}{1000}$ $\frac{16\times10}{160}$ = $\boxed{160}$	160 segundos
A5		Si en 8 horas se hace en arar 100 m el triple son 300 entonces solo sume las horas al triple. "Si en 8 horas se hace en arar 100 m el triple son 300 entonces solo sume el triple"	24 horas
B5		Porque es el doble de ml de agua así que por lo tanto es lo doble de temperatura.	40°C
B1		dividí el numero de toallas que pedia con las que colgo y el resultado lo multiplique por el tiempo que se seca $3\overline{)6}$ 2 $\frac{2\times12}{24}$ "dividi el numero de toallas que pedia con las que colgo y el resultado lo multiplique por el tiempo que se seca"	24 Horas
C1		Lo que hice fue una regla de 3. 10 mm — 800 mg 30 mm — x x = 2400	2400 g

~~Tabla~~ Figura 64. Tendencias de los alumnos al aplicar el modelo lineal.

Como se puede observar en la Figura anterior, existieron tres casos: estudiantes que aplican el algoritmo de la “regla de tres”, estudiantes que argumentan que utilizan “regla de tres” o describen la relación proporcional y, estudiantes que aplicaron el algoritmo de la regla de tres y además argumentan que utilizaron dicho algoritmo.

Para el caso de los estudiantes A1 y C1 que se muestran en la Figura 6 se observa que aplicaron el algoritmo de la “regla de tres” aunque, también se puede observar que ambos estudiantes no utilizan la división (posiblemente por la dificultad o incapacidad que les representa resolverla) y en lugar de ello realizan una multiplicación para determinar cuántas veces crece una cantidad con respecto de la otra, por ejemplo, el estudiante A1 realiza la siguiente operación para el problema “pintor”: $56\ x\ 3\ =\ 168$ lo cual indica que la figura de 56 cm crece 3 veces y formar la figura de 156 cm, con base en lo anterior, el estudiante sabe que la figura crece 3 veces por lo tanto necesita 3 veces más de pintura por ello realiza la operación siguiente: $6\ x\ 3\ =\ 18$, es decir, necesita 18 mililitros de pintura para la figura de 168 cm. Una situación semejante sucede con el estudiante C1 pues realiza la multiplicación $100\ x\ 10\ =\ 1000$, con lo cual el estudiante observa que la distancia incrementa 10 veces por ende necesitará 10 veces más de tiempo y realiza la operación $16\ x\ 10\ =\ 160$, obteniendo como resultado 160 segundos para recorrer 1000 metros.

En el caso de los estudiantes A5 y B5 que se muestran en la Figura anterior se observa que argumentan que utilizan proporcionalidad o “regla de tres”, por ejemplo, el estudiante A5 argumenta que aplica proporcionalidad para solucionar el problema “agricultor” pues menciona que: *“Si en 8 horas se hace en arar 100 m el triple son 300, entonces, solo sume el triple”* por lo tanto necesita el triple de horas para arar el terreno de 300 m de lado y obtiene como resultado 24 horas. En el caso del estudiante B5 para resolver el problema “temperatura del agua” argumenta que: *“porque es el doble de ml de agua así que por lo tanto es el doble de temperatura”* y con base en dicho argumento escribe 40 °C como resultado.

Los estudiantes B1 y C1 argumentan que utilizaron “regla de tres” o la describen y además realizan dicho algoritmo, por ejemplo, para resolver el problema “toallas” el estudiante B1 argumenta: *“dividí el número de toallas que pedía con las que colgó y el resultado lo multipliqué por el tiempo que se seca”* y al lado derecho de este argumento podemos observar las operaciones aritméticas utilizadas, primero divide $6\ \div\ 3\ =\ 2$, lo cual indica que hay el doble de toallas y posteriormente multiplica $2\ x\ 12\ =\ 24$, para obtener como resultado 24 horas. En el caso del estudiante C1 solo argumenta: *“Lo que hice fue una regla de 3”*y posteriormente se observan la típica notación de la “regla de tres”, $10\ mm\ -\ 800\ mg$ y $30\ mm\ -\ x$ y, por último obtiene el valor faltante $x\ =\ 2400$, es decir, el peso del dado de 30 mm es de 2400 mg, cabe mencionar que el estudiante cambia la unidad de medida mg (miligramos) por g (gramos) en su respuesta.

Aplica proporcionalidad con error al aplicar algoritmo

En la categoría denominada como razonamiento lineal y aplica proporcionalidad con error al aplicar algoritmo, los alumnos tienden a aplicar el algoritmo de la “regla de tres”, sin embargo al realizar los cálculos correspondientes tienen ciertas complicaciones como se muestra a continuación.

Alumno	Problema	Solución	Respuesta
A12		16 + 16 = 32; 32 – 2: 32 + 32 = 64 – 4; 64 + 64 = 128; 128 + 16 = 144	144 segundos
C11		cada 100 metros corre 16 segundos "cada 100 metros corre 16 segundos"	144 segundos
B4		16s, 32, 48, 64, 80, 96, 112, 126, 144 1m 15s, 1m 20s, 1m 36s, 1m 52s, 2m 6s, 2m 24s, 2m 30s 100m, 200m, 300m, 400m, 500, 600, 700, 800, 900, 1000m	2 minutos 30 segundos

~~Tabla~~ Figura 7~~4~~. Tendencias de los alumnos al aplicar el modelo lineal con error al aplicar el algoritmo.

Para en análisis de este tipo de caso se tomó en cuenta el problema “corredora”. El estudiante A12 realiza sumas para determinar la solución, primero realiza una suma $(16 + 16 = 32)$ lo cual correspondería al tiempo que se tarda en recorrer 200 metros, incluso, en la siguiente operación (32 + 32 = 64) en la cifra superior coloca una línea y un “2” posiblemente para recordar que la corredora ha recorrido 200 metros, en el resultado de dicha suma (64) coloca otra línea y el número 4 posiblemente para recordar que la corredora ha recorrido 400 metros. Posteriormente realiza otra suma, 64 + 64 = 128 lo que correspondería a 800 metros y a ese resultado le suma 16 (128 + 16 = 144) los cuales corresponden a otros 100 metros, entonces, la respuesta del estudiante A12 es 144 segundos pero tal suma corresponde a 900 metros recorridos, por lo tanto, existe un error pues no se tomó la distancia que se propone en el problema (1000 metros) pues le falta tomar en cuenta otros 100 metros.

El estudiante C11 realizó algo semejante al caso anterior pues aunque argumenta que en 16 segundos recorre 100 metros, en su respuesta escribe 144 segundos, lo cual correspondería a 900 metros recorridos utilizando el modelo lineal. El estudiante B4 realiza una especie de recta, por encima de ella coloca los segundos transcurridos y por debajo de ella la distancia recorrida e incluso, en donde están colocadas las cantidades de segundos transcurridos realiza una conversión a minutos. Sin embargo, su respuesta es 2 minutos 30 segundos (lo que sería equivalente a 150 segundos) pero si utilizamos el modelo lineal la respuesta debería ser 160 segundos, el error radica en los 900 y 1000 metros pues para 900 metros recorridos han transcurrido 144 segundos o 2 minutos con 24 segundos pero al agregar los últimos 100 metros y los 16 segundos sucede lo siguiente con el tiempo: $2\,minutos\ 24\,segundos + 16\,segundos =$

$2\ minutos\ 30\ segundos$ lo cual es erróneo pues $2\ minutos\ 24\ segundos\ +\ 16\ segundos\ =\ 2\ minutos\ 40\ segundos$ (160 segundos).

Razonamiento no lineal

Con base en las ~~tablas~~ Figuras anteriores se pudo observar que la ilusión de la linealidad se hace presente en la mayoría de los estudiantes a los cuales se les aplicó el intrumento, pero hubo algunos que se pudieron percatar de que la aplicación del modelo lineal no era adecuado, estos estudiantes fueron agrupados dentro de la categoría razonamiento no lineal, cabe mencionar que dicha categoría tiene dos subcategorías: inadecuado y adecuado, ejemplos de ello se presentan en la siguiente sección.

Inadecuado

Un ejemplo del tipo de razonamiento no lineal aunque no del todo adecuada se presenta en el estudiante A9, pues el toma en cuanta ciertas persepciones, conocimientos o experiencias personales para resolver tres problemas, en específico, el problema “corredora”, “temperatura del agua” y “pintor”.

Alumno	Problema	Solución	Respuesta
A9		Basandome en el tiempo que tarda corriendo 100 metros y pensando que en 100 m divide sus energias y para poder resistir 1000 m deveria correrlos en una velocidad mejor	1 min 40 seg
		La cantidad de agua es muy poca como para que esta cantidad vastante chica afecte la temperatura podra decender su temperatura de momento pero con calor constante y su evaporizacion regresaria a su temperatura inicial 	20°C
		El dibujo es 3 veces mas grande que el original son exactamente 3 veces mas de pintura, 18 ml son suficientes, en mi caso agregue 2 ml mas en caso de que faltaran por detalles	20 ml

~~Tabla~~ Figura 8~~6~~. Tendencias del alumno A9 al utilizar razonamiento no lineal aunque de forma inadecuada.

El estudiante A9 se dio cuenta de que el modelo lineal no se puede aplicar perfectamente a los problemas planteados, sin embargo, presenta algunas dificultades. En el problema “corredora”, él se basa en su experiencia para argumentar que la corredora no puede recorrer los 1000 m en 160 segundos puesto que debe dividir sus energías lo cual es un razonamiento aceptable, desafortunadamente después él argumenta que debería de recorrer la distancia en una velocidad mejor lo cual no es del todo correcto pues no toma en cuenta ciertos factores como el cansancio de la corredora.

En el problema "temperatura del agua" su respuesta es correcta pero no está tomando en cuenta las cantidades que se le presentan originalmente pues son 500 ml y 1000 ml, el estudiante esta tomando en cuenta 50 ml y 100 ml respectivamente, al observar que son cantidades pequeñas de agua, él argumenta que la temperatura permanece invariante pero, ¿su razonamiento podría cambiar al tomar los datos presentados en el problema?.

Al resolver el problema "pintor", el estudiante desafortunadamente solo hace crecer una dimensión (ancho) de la figura y por ello utilizará 18 ml lo cual es erroneo pues también el largo debería aumentar, sin embrago, él rompe algunas estructuras mentales cuando hace uso de su experiencia y argumeta que va a utilizar más pintura "*en caso de que faltara por detalles*", él incluso expresa que con 2 ml más es suficiente.

Existe también una particular atención en la resolución del problema "altura de los mexicanos" debido a que 9 de los 11 estudiantes que se tienen registrados en esta categoría no tomaron en cuenta el dato que se les proporcionaba (1.30 m) sino que simplemente tomaron en cuenta la parte de los 0.30 m o 30 cm para resolver el problema para obtener como resultado 1.90 m.

Alumno	Problema	Solución	Respuesta
A2		10 años 1.30m 20 años 1.60m 30 anos 1.90m	1.90m
B5		Por que por cada año tienen que crecer 2 c si a los 10 mide 1.30 m. A esos .30m se le multiplican nos da un resultado de 1.90m	1.90 m
C7		10años — 1.30m 20años — 1.60cm 30 años — 1.90cm Solo se fueron sumando 30cm a los años que tenia "Solo se fueron sumando 30 cm a los años que tenía"	1.90 m

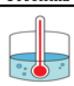
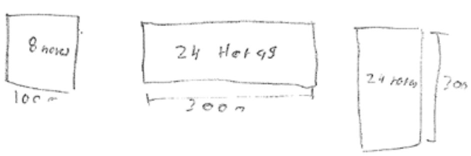
~~Tabla~~ Figura 9~~7~~. Tendencias de los alumnos al utilizar razonamiento no lineal aunque de forma inadecuada en el problema de "la altura de los mexicanos".

Con base en la ~~tabla~~ Figura anterior se puede observar que los estudintes aplicaron la "regla de tres" solo a los 30 cm sin mencionar porqué pero se tiene la suposición de que los alumnos posiblemente obtuvieron como resultado 3.90 m, lo cual les causó cierta “sorpresa” pero no quisieron dejar el problema sin resolver por lo cual hicieron uso de los 30 cm y lo multiplicron por 2 o 3 (dependiendo el caso) para obtener como resultado 1.90 m.

Hasta el momento solo se han presentado las formas incorrectas o “no apropiadas” para resolver los problemas que se presentaron en el intrumento aplicado a los 58 estudiantes del CECyTE 15 Huactzinco, a pesar de que la mayoria de los alumnos incurrieron en el modelo lineal, hubo algunos que no recurrieron a él y lograron resolver el problema de forma adecuada.

Correcto

En cinco de los siete problemas propuestos hubo respuestas correctas, en orden desendente, el mayor numero de respuestas correctas se encontró en el problemas de “toallas” (17), “altura de los mexicanos” (9) , “temperatura del agua” (6), en el problema del “agricultor” y “los dados” solamente una persona respondió bien, incluso, fue el mismo estudiante el que respondió correctamente a estos dos últimos problemas.

Alumno	Problema	Solución	Respuesta
B7		La temperatura no cambia, siempre y cuando se aplique un cambio calorifico	La misma
A3		no tiene nada que ver el tiempo pues terminarian al mismo tiempo por que lo que puede cambiar solo seria el sol	12 horas
A12		Podrian medir 1.90 si sumamos 10 cm por año pero pide exactitud a respuesta y la considero controversial	Es confuso colocar algo con exactitud
A24		 por que se mantiene la forma pero se amplia la medida lo que hace que el terreno	72 horas
		 multiplicando lado por lado por lado dividiendo el cubo en 27 partes	216 000 mg

~~Tabla~~ Figura 10~~8~~. Tendencias de los alumnos al aplicar razonamiento no lineal adecuado.

A pesar de que fue una minoría de estudiantes la que logró resolver de forma adecuada los problemas propuestos en el intrumento, podemos observar que los alumnos no tienen un método definido y que cada uno utiliza sus experiencias, conocimientos y destrezas para dar solución de forma adecuada.

Otro

Además de las dos categorías ya analizadas, existe una más en la cual los alumnos aportan una respuesta a los problemas denominada "otro" debido a que son respuestas espurias pues los alumnos solo realizan operanciones o en su defecto dan resultados de los cuales su procedimiento es un tanto confuso.

Operaciones diversas

Algunos estudiantes simplemente utilizaron los datos que se proporcionaban en cada uno de los diferentes problemas y con dichos datos realizaban operaciones aritmeticas.

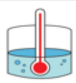
Alumno	Problema	Solución	Respuesta
B10		100 – 16 seg 1000 – 16,000	16,000 segundos
A10		Multipliqo	1008
B10		56 cm – 6 ml 168 cm – 28 ml 168 – 6 = 28 ml.	28 ml
C11		solo se suman las horas empleados "solo se suman las horas empleadas"	72 horas
C12		10 años – 1.30 m 30 años – ? 1.30 × 30 = 000 + 390 = 3900 3900 ÷ 10 = 390	1.39 m

~~Tabla~~ Figura 11~~9~~. Tendencias de los alumnos al aplicar operaciones aritméticas.

El estudiante B10 solo multiplica $1{,}000\ x\ 16\ =\ 16{,}000$, es decir, la solución para el problema "corredora" indicaría que para recorrer 1000 metros se necesitarian 16,000 segundos. En el caso del problema "pintor" el estudiante A10 argumenta que multiplica pero no realiza ninguna operación y propone como resultado 1008, preciera que simplemente multiplica $168\ x\ 6$ y obtiene dicho resultado. Para el mismo problema pero el etsudiante B10 realiza $168\ \div\ 6\ =\ 28$, es decir, el pintor necesita 28 ml de pintura para la nueva figura ampliada. En el problema "toallas" el estudiante argumenta *"solo se suman las horas empleadas"* y propone como resultado 72 horas, pareciera que el estudiante multiplica las 6 toallas por 12 horas, es decir, $6\,x\,12\;=\;72$. El estudiante C12 aplica el modelo lineal para obtener como resultado 390, sin embargo, hace una especie de transformción y el resultado obtenido (390) lo convierte en 0.39 metros y le sum 1 metro para obtener como resultado 1.39 metros.

Procedimiento confuso

Se observaron otros casos al realizar el análisis de las respuestas de los alumnos en los problemas, los procedimientos utilizados resultaron ser confusos pues los alumnos no argumentaron cómo obtuvieron dicho resultado ni se encontró qué operación aritmetica utilizaron.

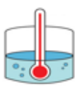
Alumno	Problema	Solución	Respuesta
B12			2 minutos
B14		Por que considero que son Faciles	200°C
C4		10 años — 1.30 cm 20 años — 2.00 30 años — 2.30 cm	2.30 m
A7		sumando	300 mt

~~Tabla~~ Figura 12~~0~~. Tendencias de los alumnos al aplicar procedimientos confusos.

Podemos observar en la Figura 12 que el alumno B12 solo escribe en la respuesta *"2 minutos"* sin embargo, no argumenta o escribe qué realizó para obtener tal resultado en el problema "corredora". En el problema "temperatura del agua" el estudiante B14 propone como resultado 200 °C y argumenta *"porque considero que son fáciles"* pero no existe alguna operación aritmética que refuerce su respuesta, tal pareciera que multiplicó 20 °C por 10 para obtener la respuesta pero 10 no es un dato que se proponga en el problema. El estudiante C4 propone como resultado 2.30 m realizando una especie de correspondencia entre datos además de que cambia la unidad de medida de metros a centímetros como se muetra en la Figura 13, el estudiante propone $10\ años - 1.30\ cm$, 20 años – 2.00, es decir, de los 10 años a los 20 años creció 0.70 m, uno esperaría que ese mismo patrón de crecimiento se mantuviera pero de $20\ años -$ 2.00 a 30 años – 2.30 no se cumple pues de los 20 a los 30 años crece 0.30 metros, desafortunadamente el estudiante no argumenta el motivo de estos dos crecimientos diferentes.

Aplica proporcionalidad inversa

Algunos alumnos no aplicaron el modelo lineal directo, ellos creyeron conveniente aplicar proporcionalidad inversa. Se observa que los estudiantes que resolvieron el problema con proporcionalidad inversa lo hicieron en el problema “temperatura del agua”. Se muestran los ejemplos de este tipo de respuestas.

Alumno	Problema	Solución	Respuesta
A23		Pues es la mitad de grados por que es el doble de agua	10°C
B3		porque si ponemos poca agua en un estufa por logica se calentara más rapido por lo mismo de ser poca en cambio si ponemos un recipiente con mayor agua y lo ponemos el mismo tiempo de pusimos el otro tiende a decender la temperatura ya que es un poco de agua. "porque si ponemos poca agua en un estufa por logica se calentara más rapido por lo mismo de ser poca en cambio si ponemos un recipiente con mayor agua y lo ponemos el mismo tiempo el otro tiende a decender la temperatura ya que es un poco de agua"	10°C
B16		Por que al ser el doble de agua esta el doble de fria entonces estaria a 10 °C “Por que al ser el doble de agua esta el doble de fria entonces estaría a 10 °C”	10°C

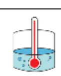
~~Tabla~~ Figura 13~~5~~. Tendencias de los alumnos al aplicar proporcionalidad inversa.

Un estudiante (B3) supone que el recipiente con agua esta en la estufa e incluso toma en cuenta un tiempo de 2 minutos, sin embargo en la descripción del problema se menciona que los recipientes estan a temperatura ambiente. Los estudiantes A23 y B16 basicamente argumentan que al ser el doble de la cantidad de agua entonces, la temperatura será la mitad, es decir, 10 °C.

Como podemos observar, los alumnos tienen diferentes formas para resolver problemas en donde se presenta la ilusión de la linealidad, algunos aplican el modelo lineal, muy pocos rompen con este tipo de razonamiento, otros más realizan cálculos aritméticos con los datos que se proponen en los problemas para otorgar alguna respuesta numérica y algunos mas simplemente no responden. También podemos observar que cada alumno tiene su propio técnica para resolver los diferentes problemas.

APOYOS UTILIZADOS POR LOS ALUMNOS

Los alumnos no solo cayeron en la ilusión de la linealidad sino que se pudieron apoyar con algunas herramientas matemáticas y/o visuales tales como la suma, tablas, gráficas, rectas o diagramas.

								
	Autent.	Const.	Lineal	Área	Const.	Autent.	Área	Vol.

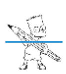
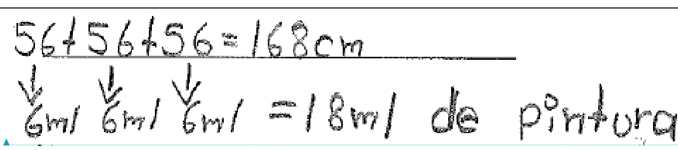
Suma	3	4	3	3	0	1	2	3
Tabla	5	1	7	4	2	6	4	5
Gráfica	1	2	1	1	0	1	0	0
Recta	7	0	1	0	0	0	1	0
Diagrama	8	11	12	7	8	4	11	5
Total	24	18	24	15	10	12	18	13

~~Tabla~~ Figura 14~~11~~. Frecuencias de los apoyos utilizados por los alumnos.

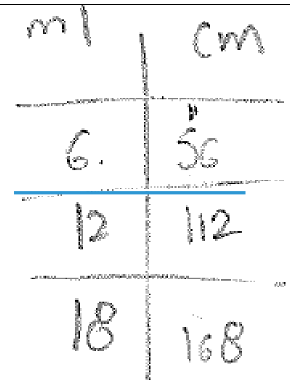
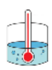
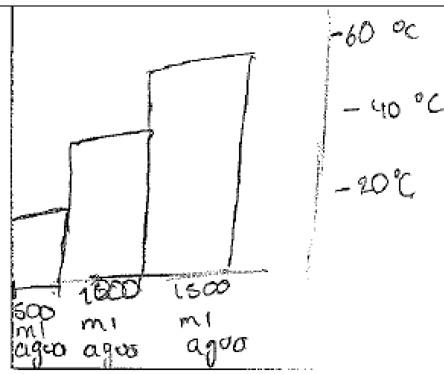
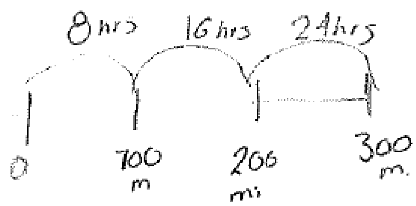
Podemos observar de manera general que los alumnos se apoyan de diferentes herramientas, pero en los problemas constantes ("la temperatura del agua" y "las toallas"), de área ("el pintor" y "el agricultor") y de volumen ("los dados") la herramienta más utilizada por los alumnos fueron los diagramas realizados por ellos mismos. De forma general, en los problemas de falta de autenticidad ("la corredora" y "la altura de los mexicanos") los alumnos se apoyaron de tablas y de la recta en el caso del problema de "la corredora", incluso en este problema es donde hubo una mayor gama de herramientas utilizadas y con una mayor frecuencia que los demás.

También podemos observaar que la suma, tablas y diagramas son las herramientas que al menos se utilizaron una vez en cada uno de los diferentes problemas. En cambio, la utilización de la recta y de gráficas se dio con menos frecuencia en los diferentes problemas, por ejemplo, el uso de la recta solo se dio en dos de los siete posibles problemas, en específico en el problema de "la corredora" y "el agricultor".

A continuación se presentan algunos ejemplos de las herramientas utilizadas por los alumnos (suma, tabla, gráfica y recta).

Alumno	Problema	Solución
~~B12~~		

Con formato: Fuente: 12 pto

~~A26~~		
A7		
B2~~3~~		

~~Tabla~~ Figura 15~~1~~. Tendencias de las representaciones externas utilizadas por los alumnos.

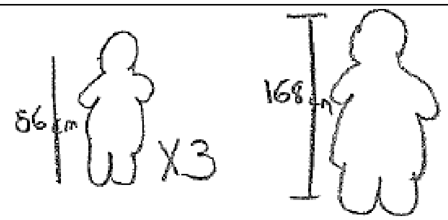
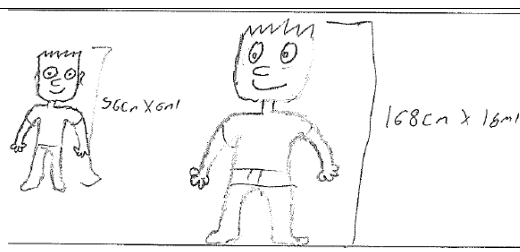
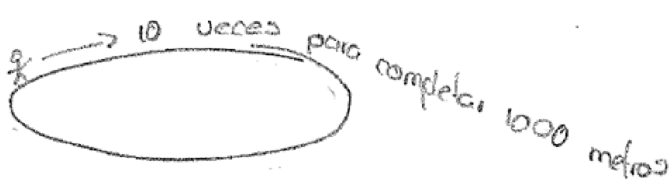
A pesar de que los alumnos a los cuales se les aplicó el instrumento cursan el tercer semestre de bachillerato podemos observar que utilizan herramientas básicas para resolver los problemas. Utilizan la suma porque posiblemente se sientan inseguros para realizar la multiplicación o en su defecto porque tienen problemas para aplicar el algoritmo de la “regla de tres”.

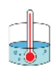
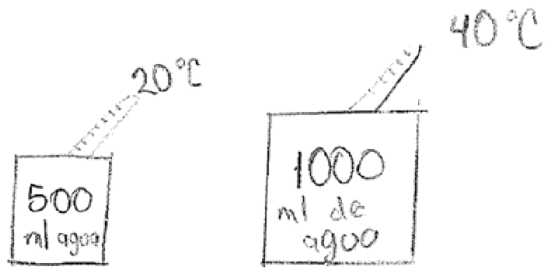
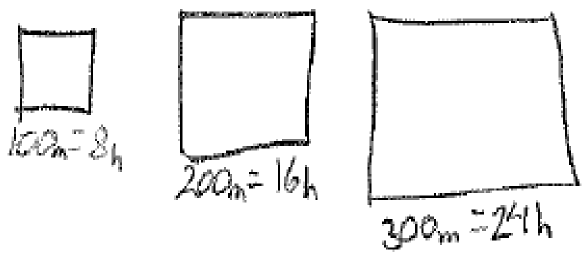
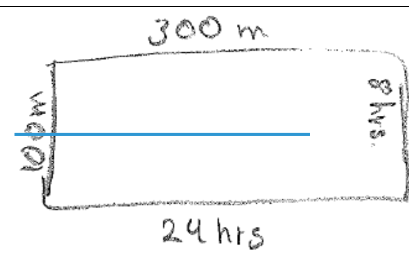
Los alumnos utilizaron tablas en cada uno de los distintos problemas al menos una vez, sin embargo no fue una herramienta muy eficiente o de mucha ayuda pues al resolver los problemas los alumnos incurrian en la ilusión de la linealidad. En pocos casos se utilizaron gráficas en específico, graficas de barras.

Los alumnos utilizaron también la recta para resolver los problemas, pero incluso en algunos de los casos como el que se muestra en la ~~tabla~~ Figura 15~~1~~ del alumno B3, tienen arraigados los "saltos de la rana" y utilizan dicho apoyo para resolver el problema aunque este tipo de conocimiento lo adquieren desde la educación primaria.

A pesar del apoyo y uso de las cuatro herramientas (suma, tabla, gráfica y recta) que se mencionan, los alumnos no tuvieron un avance significativo en la resolución correcta de los problemas.

Los esquemas creados por los alumnos fueron otra herramienta utilizada para resolver los problemas y aunque pareciera que es una herramienta visual poderosa pues si los diagramas son bien realizados pueden observar ciertas características que les pudieran ayudar a resolver los problemas, por ejemplo, en los problemas de área se puede observar que las figuras crecen tanto en largo como en ancho lo cual puede ser una sustacial ayuda para obsevar que el crecimiento no es lineal.

Alumno	Problema	Solución
A11		
B17~~23~~		
A12~~4~~		

<table>
<tr><td>A2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>A11</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>B4~~5~~</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>~~A12~~</td><td></td><td></td></tr>
</table>

~~Tabla~~ Figura 16~~2~~. Diagramas utilizados por los alumnos.

En los problema de área, “el agricultor” es donde se crearon más diagramas que en el problema del “pintor” lo anterior supone a la idea de que es más fácil para los alumnos dibujar una figura regular que una irregular, para el problema del “agricultor” se hace enfasis en un terreno cuadrado mientras que en el problema del “pintor” se necesita un Bart Simpson.

Con base en la tabla 12 podemos observar que los alumnos crean sus diagramas pero en algunas ocasiones no son de muchas ayuda pues no estan realizados de manera correcta, por lo cual esto en lugar de ayudarles les presenta un obstáculo para resolver dicho problema. Cuando los diagramas son realizados de forma correcta sucede algo peculiar pues en lugar de servir como un apoyo visual para los alumnos pareciera que dichos diagramas los hacen a un lado para enfocarse en la parte numérica o aritmética del problema sin analizar los que está sucediendo con los diagramas.

Como se puede observar en las diferentes tablas, los alumnos resuelven de diversas formas cada uno de los problema debido a que el razonamiento de cada uno de ellos es diferente y por consiguiente la técnica utilizada para resolverlo.

Propuesta didáctica

Con formato: Título 1

Después de haber analizado los instrumentos se construyó una propuesta didáctica bajo el enfoque de investigación-acción con el propósito de disminuir la linealidad en los diferentes tipos de problemas, para luego aplicarla a los alumnos así como darles seguimiento puntual. La propuesta didáctica constó de 12 sesiones, se abordaron los 4 diferentes tipos de problemas (área, volumen, constante y falta de autenticidad), las sesiones estuvieron distribuidas de la siguiente forma y orden: 4 sobre área, 4 de volumen, 2 constantes y 2 con falta de autenticidad (ver anexo 2).

Para la propuesta didáctica se pretendió que los alumnos pudieran resolver problemas a partir de una situación problemática del entorno, utilizar material manipulativo y las TIC´s. Cabe mencionar que el número de sesiones para área y volumen es mayor debido a que en este tipo de problemas se presenta una mayor dependencia del modelo lineal para resolver dichos problemas (como se pudo observar en el análisis del pre-test). Las sesiones de la propuesta didáctica para problemas de área estuvieron estructurada de la siguiente manera:

Área

Sesión 1

Se pretendía que el alumno analizara qué sucede con el perímetro y el área de figuras cuadradas al hacer variar las medidas de las aristas a través de recubrimiento o “pavimentación” y/o comparación de las medidas de dichas figuras a partir de una situación problemática.

Sesión 2

El fin de esta sesión radicaba en que el alumno analizara y verificara por medio de dibujos dados qué sucede con el perímetro y el área de figuras irregular contenidas en un marco cuadrado al hacer variar las medidas de las aristas de dicho marco y hacer recubrimientos de pintura y/o comparación de las medidas de dichas figuras.

Sesión 3

Por medio del software Geogebra se pretendió que los alumnos analizaran y generalizaran qué sucede con el perímetro y el área de figuras geométricas al hacer variar las medidas de sus respectivas aristas.

Sesión 4

Utilizando nuevamente el software Geogebra se tuvo la intensión de que los alumnos analizaran y generalizaran qué sucede con el perímetro y las aristas de figuras geométricas al hacer variar las medidas de su respectiva área.

Volumen

Sesión 1:

Los alumnos analizaron qué sucede con el volumen de un cuerpo geométrico, en específico un cubo, al hacer variar las medidas de sus aristas a través de la comparación de las medidas de dichas figuras a partir de una situación problemática.

Sesión 2

Esta sesión tuvo el propósito de que los alumnos analizaran y verificaran por medio de llenado de cubos de plástico qué sucede con el volumen de dichos cuerpos al hacer variar las medidas de sus aristas y/o comparando las medidas de dichos cuerpos.

Sesión 3

Para esta sesión se utilizó el software Geogebra debido a que es fácil manipular las figuras que aquí se construyen, lo anterior con el fin de que los alumnos analicen y generalicen qué sucede con el volumen de dichos cuerpos geométricas al hacer variar las medidas de sus aristas.

Sesión 4

De forma semejante, se utiliza el software Geogebra para esta sesión pero ahora para que los alumnos analicen y generalicen qué sucede con la medida de las aristas del cuerpo geométricas al hacer variar las medidas de su volumen.

Constante

Sesión 1

Los alumnos pusieron a secar toallitas húmedas con el propósito de observar y analizar qué sucede al variar la cantidad de objetos o las condiciones que intervienen en algunas situaciones cotidianas.

Sesión 2

Los alumnos tomaron la temperatura de un líquido para que pudieran observar qué sucede al variar la cantidad de sustancia en determinada situación.

Falta de autenticidad

Sesión 1

Con ayuda de tablas de peso y estatura, la sesión tuvo el propósito de que los alumnos observaran algunos situaciones cotidianos o del mundo y analizaran la influencia de las matemáticas en dichas situaciones.

Sesión 2

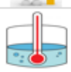
Para esta sesión se utilizaron videos de atletas para que los alumnos observaran dichas situaciones y analizaran la influencia de las matemáticas en dichas situaciones.

Análisis del post-test

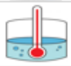
Con formato: Título 1

Por último se aplicó un cuestionario final para determinar el efecto de la intervención realizada y tratar de erradicar o disminuir de la linealidad en los alumnos.

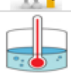
A continuación se presentan los resultados del pre y post test de los diferentes grupos

Problema	Razonamiento lineal		Razonamiento no lineal		Otro			Sin respuesta
	Aplica proporcionalidad	Aplica proporcionalidad con error en algoritmo	Inadecuado	Adecuado	Operaciones diversas	Procedimiento confuso	Aplica proporcionalidad inversa	
	19	4	1	0	0	0	0	0
	11	0	4	7	0	0	0	2
	21	0	0	1	1	0	1	0
	14	0	0	9	0	1	0	0
	20	1	1	0	2	0	0	0
	20	0	0	1	1	2	0	0
	20	1	0	1	0	1	0	0

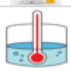
~~Tabla~~ Figura 17~~2~~. Pretest grupo A.

Problema	Razonamiento lineal		Razonamiento no lineal		Otro			Sin respuesta
	Aplica proporcionalidad	Aplica proporcionalidad con error en algoritmo	Inadecuado	Adecuado	Operaciones diversas	Procedimiento confuso	Aplica proporcionalidad inversa	
	17	1	1	0	5	0	0	0
	5	0	8	7	0	1	0	3
	15	0	0	8	0	0	1	0
	5	0	0	14	0	0	5	0
	15	2	1	0	0	5	0	1
	16	0	0	1	0	7	0	0
	16	3	1	0	1	3	0	0

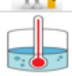
~~Tabla~~ Figura 18~~2~~. Postest grupo A.

Problema	Razonamiento lineal		Razonamiento no lineal		Otro			Sin respuesta
	Aplica proporcionalidad	Aplica proporcionalidad con error en algoritmo	Inadecuado	Adecuado	Operaciones diversas	Procedimiento confuso	Aplica proporcionalidad inversa	
	12	1	0	0	1	2	0	1
	9	0	4	2	0	1	0	1
	9	0	0	4	0	2	2	0
	12	0	0	4	1	0	0	0
	14	1	0	0	2	0	0	0
	11	2	0	0	1	1	0	2
	13	4	0	0	0	0	0	0

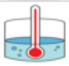
~~Tabla~~ Figura 19~~2~~. Pretest grupo B.

Problema	Razonamiento lineal		Razonamiento no lineal		Otro			Sin respuesta
	Aplica proporcionalidad	Aplica proporcionalidad con error en algoritmo	Inadecuado	Adecuado	Operaciones diversas	Procedimiento confuso	Aplica proporcionalidad inversa	
	9	0	7	0	1	0	0	0
	1	0	1	14	0	0	0	1
	2	0	0	14	0	1	0	0
	1	0	0	16	0	0	0	0
	11	0	3	0	1	2	0	0
	7	0	2	5	0	2	0	1
	9	2	0	3	0	3	0	0

~~Tabla~~ Figura 20~~2~~. Postest grupo B.

Problema	Razonamiento lineal		Razonamiento no lineal		Otro			Sin respuesta
	Aplica proporcionalidad	Aplica proporcionalidad con error en algoritmo	Inadecuado	Adecuado	Operaciones diversas	Procedimiento confuso	Aplica proporcionalidad inversa	
	15	1	0	0	0	0	0	1
	8	0	3	0	1	3	0	2
	16	0	0	1	0	0	0	0
	11	0	0	4	1	0	0	1
	15	1	0	0	0	0	0	1
	15	0	0	0	0	2	0	0
	15	0	0	0	1	1	0	0

~~Tabla~~ Figura 21~~2~~. Pretest grupo C.

Problema	Razonamiento lineal		Razonamiento no lineal		Otro			Sin respuesta
	Aplica proporcionalidad	Aplica proporcionalidad con error en algoritmo	Inadecuado	Adecuado	Operaciones diversas	Procedimiento confuso	Aplica proporcionalidad inversa	
	14	1	0	0	1	1	0	0
	2	0	2	10	1	1	0	2
	9	1	0	5	0	2	0	0
	7	0	2	7	1	0	0	0
	14	2	0	0	0	1	0	0
	13	0	0	0	0	2	0	2
	13	2	0	0	0	1	0	1

~~Tabla~~ Figura 22~~2~~. Postest grupo A.

Propuesta didáctica

Con base en los resultados obtenidos en el instrumento y parte de la literatura se diseñó la siguiente propuesta didáctica:

ÁREA

Sesión 1: Recubrimiento (“pavimentación”) de áreas de situaciones problemáticas.

Objetivo:

Que el alumno analice qué sucede con el perímetro y el área de figuras cuadradas al hacer variar las medidas de las aristas a través de recubrimiento o “pavimentación” y/o comparación de las medidas de dichas figuras.

Conocimientos previos:

- Figura geométrica
- Cuadrado
- Medida
- Perímetro
- Área

Material

- Hojas de papel milimétrico
- Lápiz
- Tijeras
- Regla

Responde de manera individual lo siguiente.

1.- Recientemente, un albañil colocó azulejos en una casa. Él necesitó 4 azulejos cuadrados para cubrir una parte de piso de una habitación que tenía forma cuadrada con lados de 1 metro. Otro piso de la casa también de forma cuadrada pero con lados de 2 metros necesita que le coloquen azulejos los cuales aún no se han comprado.

a) ¿Cuántos azulejos cuadrados necesitarán comprar? ___________ azulejos
b) Si cada caja contiene 4 azulejos. ¿Cuántas cajas necesitará? ___________ cajas

2.- En equipos de tres personas, construyan en papel milimétrico las figuras que se mencionan en el problema de tal manera que un cm en la hoja milimétrica represente un metro.

a) El piso cuadrado de 1 metro de lado.
b) Los 4 azulejos cuadrados para cubrir el piso cuadrado de un metro de lado.
c) El piso cuadrado de 2 metros de lado.
d) A partir del inciso b, los azulejos necesarios para cubrir el piso cuadrado de 2 metros de lado.

3.- Responde lo que se te indica

a) Completa el siguiente cuadro

	Piso 1	Piso 2
¿Cuánto mide de lado?		
¿Cuánto mide su perímetro?		
¿Cuánto mide su área?		
¿Cuántos azulejos se necesitaron para cubrir el área?		

b) ¿Qué sucede con el perímetro del cuadrado al hacer crecer sus lados?
____
____

¿El perímetro crece de manera proporcional con respecto al aumento de sus lados, es decir, si los lados del cuadrado aumentan al triple entonces el perímetro aumenta el triple? _________ ¿Por qué? ____
____

c) ¿Qué sucede con el área del cuadrado al hacer crecer sus lados?
____
____

¿El área crece de manera proporcional con respecto al aumento de sus lados, es decir, si los lados del cuadrado aumentan al triple entonces el área aumenta el triple? __________
¿Por qué? ____
____

4.- Le preguntaron al albañil que si tuviera que colocar azulejo en una habitación cuadrada de 5 metros de lado, ¿cuántas cajas de azulejo necesitará? El respondió que necesitaría 5 cajas (20 azulejos) porque si para cubrir el piso en forma cuadrada con 1 metro de lado se necesitan 4 azulejos, entonces para una habitación cuadrada de 5 metros (el quíntuple de un metro) de lado necesitará el quíntuple de azulejos, es decir, $5\ x\ 4\ azulejos\ =\ 20\ azulejos$.

a) ¿Qué opinas sobre el razonamiento del albañil?___________________________________
¿Por qué? ____
____

Si tu fueras la persona a la que le preguntaran. ¿Qué responderías? __________________
¿Por qué? ____
____

b) Con base en tus respuestas del punto 3 inciso a, para el piso de 2 metros de lado se necesitan ______ azulejos. ¿Consideras que es correcto lo que propone el albañil, es decir, para el piso con 5 metros de lado necesitaría 20 azulejos? ____________
¿Por qué? ____
____
¿Qué le dirías al albañil a cerca de su razonamiento y sepa la cantidad de azulejos necesarios para el piso de 5 metros de lado? Comparar sus soluciones.
____
____
____

5.- Tiempo después, el albañil fue contratado nuevamente para colocar azulejos en otro piso cuadrado. Los dueños saben que se necesitan 4 azulejos cuadrados para cubrir piso cuadrado con lados de 1 metro por lo cual compraron 15 cajas con azulejos.

a) Sin romper o fragmentar los azulejos ¿Cuáles son las posibles medidas del piso (cuadrado) que se desea cubrir? ____
____
____

A partir de lo mencionado en el problema, el albañil pensó en dos posibles opciones para el piso cuadrado al que se le iban a colocar los azulejos.

- Opción uno: que sobrarán 11 azulejos
- Opción dos: faltará una caja con azulejos.

6.- Responde lo que se te indica

a) Completa el siguiente cuadro

	Piso cuadrado	Opción 1	Opción 2
Total de azulejos necesarios para cubrir el piso	4		
Azulejos necesarios para cubrir cada lado	2		
¿Cuánto mide de lado?	1 m		
¿Cuánto mide su perímetro?	4 m		
¿Cuánto mide su área?	1 m^2		

b) ¿Qué realizaste para completar la tabla?
____
____
____
____

c) ¿Qué sucedió con el perímetro y el área de las dos opciones que pensó el albañil con respecto del piso de 1 metro de lado?
____
____

d) ¿El perímetro del piso creció de manera proporcional con respecto del cuadrado de 1 metro de lado al aumentar la medida de los lados? ____________________ ¿Cuántas veces creció respectivamente? ____

e) ¿El área del piso creció de manera proporcional con respecto del cuadrado de 1 metro de lado al aumentar la medida de los lados, es decir, el área aumenta al doble cuando los lados del cuadrado aumentan al doble? _________________________ ¿Cuántas veces aumentó el área? ____

Sesión 2: Recubrimiento de figuras con pintura y su respectiva ampliación y/o reducción.

Objetivo:

Que el alumno analice y verifique con material concreto qué sucede con el perímetro y el área de figuras irregulares contenidas en un marco cuadrado al hacer variar las medidas de las aristas de dicho marco y hacer recubrimientos de pintura y/o comparación de las medidas de dichas figuras.

Conocimientos previos:

- Medida
- Perímetro
- Área

Material

- 3 Dibujos (A partir de un dibujo, realizar una ampliación y una reducción)
- Pintura líquida
- Recipientes para la pintura
- Regla
- Lápiz
- Pipeta o jeringas
- Bombillas*

1.- De forma individual, pinta el dibujo proporcionado (Anexo 2.1, 2.2, 2.3, y 2.4)

2.- Completa el siguiente cuadro.

	Figura 1
¿Cuánto mide el lado del marco?	
¿Cuánto mide su perímetro?	
¿Cuánto mide su área?	
¿Qué cantidad de pintura necesitaste para cubrir la figura?	

3.- Si tuvieras una figura ampliada al doble de la medida del lado. ¿Cuántos ml de pintura crees que necesitarías? ______________________________________ ¿Por qué? __________________
____
____

4.- Pinta el dibujo proporcionado.

5.- Completa el siguiente cuadro.

	Figura 2
¿Cuánto mide el lado del marco?	
¿Cuánto mide su perímetro?	
¿Cuánto mide su área?	
¿Qué cantidad de pintura necesitaste para cubrir la figura?	

7.- Responde los siguientes cuestionamientos.

a) ¿Cuántas veces aumentó el lado del marco? ___________________________________

b) ¿Cuántas veces aumentó el perímetro del marco? _______________________________

c) ¿Cuántas veces aumentó el área del marco? ____________________________________

d) ¿La cantidad de pintura que utilizaste fue proporcional al aumento de la medida de los lados, es decir, utilizaste el doble de pintura cuando los lados aumentaron al doble? ____
¿A qué crees que se debe? ____
____

e) ¿Cuántas veces aumentó la cantidad de pintura utilizada? __________________________

f) ¿La cantidad de pintura que pensaste que utilizarías (número 3) fue lo que en realidad utilizaste? ____
¿A qué crees que se deba? ____
____

g) ¿Qué podrías concluir con respecto del aumento de los lados y el área de las figuras?
____
____

8.- Si ahora en lugar de aumentar el lado del marco se quisiera disminuir el área de la figura 4 veces con respecto de la primera figura que se te entregó. Responde lo siguiente:

a) ¿Cuánto debe medir el lado del marco? ______________________________________

b) ¿Cuánto debe medir el perímetro del marco? ____________________________

c) ¿Cuánto debería medir el área del marco? ___________________________

d) ¿Qué cantidad de pintura necesitarías para cubrir la figura? ________________________

9.- Con base en la figura proporcionada completa el siguiente cuadro.

	Figura 3
¿Cuánto mide el área del marco?	
¿Cuánto mide su perímetro?	
¿Cuánto mide cada lado?	
¿Qué cantidad de pintura necesitaste para cubrir la figura?	

10.- Responde los siguientes cuestionamientos.

a) ¿Cuántas veces aumentó el lado del marco? ____________________________________

b) ¿Cuántas veces aumentó el perímetro del marco? ________________________________

c) ¿Cuántas veces aumentó el área del marco? ____________________________________

d) ¿La cantidad de pintura que utilizaste fue proporcional al aumento de la medida del área, es decir, utilizaste el cuádruple (cuatro veces) de pintura cuando el área aumentó cuatro veces? _______________
¿A qué crees que se debe? ____
____

e) ¿Cuántas veces aumentó la cantidad de pintura utilizada? _________________________

f) ¿La cantidad de pintura que pensaste que utilizarías (número 8) fue lo que en realidad usaste? ______ ¿Por qué? ____
____

g) ¿Qué podrías concluir con respecto del aumento del área y la medida de los lados de las figuras? ____
____

Sesión 3: Variación de las aristas con ayuda de las TIC´s.

Objetivo:

Que el alumno analice y generalice qué sucede con el perímetro y el área de figuras geométricas al hacer variar las medidas de sus respectivas aristas por medio de las TIC´s (Geogebra).

Conocimientos previos:

- Figura geométrica
- Cuadrado y rectángulo
- Medida
- Perímetro
- Área

Material

- Geogebra (software o aplicación)
- Lápiz

1.- Con Geogebra construye un cuadrado de la medida que deseen. Anexo 1 (Instrucciones para realizar las figuras en Geogebra.)

2.- Construye otro cuadrado que mida el doble de lado que el primero.

3.- Completen la siguiente tabla.

	Cuadrado 1	Cuadrado 2
¿Cuánto mide de lado?		
¿Cuánto mide su perímetro?		
¿Cuánto mide su área?		

4.- Construye un rectángulo de las medidas que desees.

5.- Construye otro rectángulo que tenga el doble de las medidas que el primero.

6.- Complete la siguiente tabla

	Rectángulo 1	Rectángulo 2
¿Cuánto miden los lados?		
¿Cuánto mide su perímetro?		

¿Cuánto mide su área?		

7.- Reúnete con otro compañero para comparar los datos obtenidos y responder las siguientes preguntas.

a) ¿Qué sucede con el perímetro del cuadrado y el rectángulo al hacer crecer sus lados?
____
____

b) ¿Cuál es la relación que existe entre la medida de los lados de los cuadrados y rectángulos con respecto a la medida de su perímetro?
____

c) ¿El perímetro crece de manera proporcional con respecto al aumento de sus lados? _____
¿Por qué? ____
____

d) ¿Qué sucede con el área del cuadrado y el rectángulo al hacer crecer sus lados? ________
____

e) ¿Cuál es la relación que existe entre la medida de los lados de los cuadrados y rectángulos con respecto a la medida de su área? ____
____

f) ¿El área crece de manera proporcional con respecto al aumento de sus lados? ________
¿Por qué? ____
____
____

8.- Si ahora construyeras un cuadrado y un rectángulo 5 veces más grande comparado con los primeros respectivamente.

a) ¿Cuánto veces crecería su perímetro y cuántas veces su área? ___________________
____

b) ¿Cuánto mediría su perímetro y su área? ______________________________________
____

9.- Construye las figuras geométricas y verifica si tus respuestas son correctas.

a) ¿Sucedió lo que pensaste? _________________ ¿Por qué? ______________________

____

10.- Lluvia de ideas de los puntos 7-9.

11.- Genera una conclusión individual de lo realizado en la sesión.

____
____
____
____

Sesión 4: Variación de las áreas con ayuda de las TIC´s.

Objetivo:

El alumno analice y generalice qué sucede con el perímetro y las aristas de figuras geométricas al hacer variar las medidas de su respectiva área por medio de las TIC´s (Geogebra).

Conocimientos previos:

- Figura geométrica
- Cuadrado y rectángulo
- Medida
- Perímetro
- Área

Material

- Geogebra (software o aplicación)
- Lápiz

1.- Construye en Geogebra un cuadrado que tenga 10 unidades de lado.

2.- Construye un cuadrado que mida el doble del área que el cuadrado anterior.

a) ¿Cómo obtuviste el cuadrado con el doble de área? ________________________________
____
____

3.- Completen la siguiente tabla.

	Cuadrado 1	Cuadrado 2
¿Cuánto mide su área?		
¿Cuánto mide el lado?	10 cm	
¿Cuánto mide su perímetro?		

4.- Construye un rectángulo que mida 24 cm^2.

5.- Construye un rectángulo que mida la mitad del área que el anterior.

a) ¿Cómo obtuviste el rectángulo con la mitad de área? ______________________________
____
____

6.- Completen la siguiente tabla.

	Rectángulo 1	Rectángulo 2
¿Cuánto mide su área?	24 cm^2	
¿Cuánto miden sus lados?		
¿Cuánto mide su perímetro?		

7.- Si ahora se quisiera un cuadrado con la mitad de área que el primero.

a) ¿Cuánto medirían sus lados? ____
b) ¿La medida de los lados del cuadrado disminuye a la mitad? ________________________
¿Por qué? ____
____
____

8.- Si se requiriera de un rectángulo con doble de área que el primero.

a) ¿Cuáles podrían ser las medidas de sus lados? ___________________________________
b) ¿La medida de los lados del rectángulo disminuye a la mitad? ______________________
¿Por qué? ____
____
____

9.- Con base en los datos obtenidos respondan lo siguiente:

Si se tiene el área de alguna figura geométrica y se desea otra con la mitad o al doble (de área), ¿la medida de sus lados disminuye a la mitad o aumenta al doble respectivamente? ______________
¿Por qué? ____
____
____

10.- Lluvia de ideas de los puntos 7-9.

11.- Genera una conclusión individual de lo realizado en la sesión.

____
____
____
____

VOLUMEN

Sesión 1: Comparación de volumen a partir de una situación problemática.

Objetivo:

Que el alumno analice qué sucede con el volumen de un cuerpo geométrico (cubo) al hacer variar las medidas de sus aristas a través de la comparación de las medidas de dichas figuras.

Conocimientos previos:

- Figura geométrica
- Cuerpo geométrico
- Cubo
- Medida
- Arista
- Volumen

Material

- Regla
- Lápiz
- Calculadora

1.- Una familia desea construir una cisterna en forma de cubo. La familia sabe que la cisterna en forma de cubo con lados de 1 metro tendría aproximadamente 1000 litros de agua (1 m^3=1000 litros de agua). Si la familia quisiera una cisterna en forma de cubo pero con lados de 2 metros de lado.

a) ¿Cuántos litros le cabrían a esta nueva cisterna? _________________________________

2.- Dibuja los cuerpos geométricos que se mencionan en el problema de tal manera que un cm represente un metro.

3.- Responde lo que se te indica

a) Completa el siguiente cuadro

	Cisterna 1	Cisterna 2
¿Cuánto mide de lado?		
¿Cuánto mide su volumen?		
¿Cuánto capacidad tiene?		

b) ¿Qué sucede con el volumen del cubo al hacer crecer sus lados?
____
____

c) ¿El volumen aumenta de manera proporcional con respecto al aumento de sus lados, es decir, si los lados del cubo aumentan al doble entonces el volumen aumenta al doble? ¿Por qué?
____
____
____
____

4.- La familia preguntó al encargado de construir la cisterna lo siguiente: si quisiéramos una cisterna en forma de cubo de 3 metros de lado, ¿cuántos litros aproximadamente tendría de capacidad? Él respondió que tendría aproximadamente 3,000 litros porque si para una cisterna en forma de cubo con lados de un metro tiene la capacidad aproximada de 1,000 litros, entonces para una cisterna cubica con 3 metros (el triple de un metro) de lado tendrá el triple de capacidad, es decir, $3\ x\ 1{,}000\ litros\ =\ 3{,}000\ litros$.

a) ¿Qué opinas sobre el razonamiento de la persona encargada de la construcción de la cisterna? ¿Por qué? ____
____
____

____
____

b) Si tu fueras la persona a la que le preguntaran. ¿Qué responderías? ¿Por qué?
____
____
____
____

c) Con base en tus respuestas del punto 3 inciso a, para la cisterna de 2 metros de lado (cisterna 2) se tiene una capacidad de ________ litros. ¿Consideras que es correcto lo que propone el albañil, es decir, para una cisterna con 3 metros de lado se tendría una capacidad de 3,000 litros? ____________
¿Por qué? ____
____
¿Qué le dirías al albañil a cerca de su razonamiento y sepa la cantidad de agua que contiene una cisterna con 3 metros de lado? Comparar sus soluciones.
____
____
____
____

5.- Tiempo después, la persona que construyó la cisterna fue contratado nuevamente pero por otra familia para la construcción de otra cisterna. La persona encargada de la construcción le dijo a la nueva familia que una cisterna en forma de cubo con 2 metros en cada lado tiene aproximadamente la capacidad de __________ litros de agua. La familia determinó que quería una cisterna con 8 veces la capacidad de la de 2 metros.

a) ¿Qué capacidad desea la nueva familia que tenga su cisterna? _______________ litros
b) ¿Cuántos metros crees que debe de medir el lado de dicha cisterna en forma de cubo? ____________ metros.

6.- Responde lo que se te indica.

f) Completa el siguiente cuadro

	Cisterna 2	Cisterna 4
¿Cuánto mide de lado?	2 metros	
¿Cuánto mide su volumen?	8 $metros^3$	
¿Cuánta capacidad de agua tiene?		

g) ¿Qué realizaste para completar la tabla?

____
____
____

h) ¿Qué sucedió con el volumen de la cisterna 4 con respecto del volumen de la cisterna 2?

____

i) ¿El volumen aumentó de manera proporcional con respecto de la medida de los lados de la cisterna en forma de cubo, es decir, si el volumen de la cisterna aumenta ocho veces entonces el lado aumentó ocho veces? _____________ ¿Cuántas veces aumentó el lado respectivamente? ¿Por qué crees que sucede esto?

____
____
____
____

Sesión 2: Medida y llenado de cubos con ampliación y/o reducción.

Objetivo:

Que el alumno analice y verifique con material concreto qué sucede con el volumen de cuerpos geométricos (cubos) al hacer variar las medidas de sus aristas y/o comparando las medidas de dichos cuerpos.

Conocimientos previos:

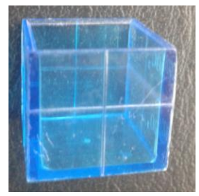
- Figura geométrica
- Cuerpo geométrico
- Cubo
- Medida
- Arista
- Volumen

Material

- 3 cubos sin tapa
- Agua o algún líquido para verterlo en los cubos
- Regla
- Lápiz
- Pipeta y/o vaso de precipitados
- Bombillas

1.- Toma el cubo proporcionado (cubo mediano), llénalo con agua y toma registro de lo que se te indica a continuación.

2.- Completa el siguiente cuadro

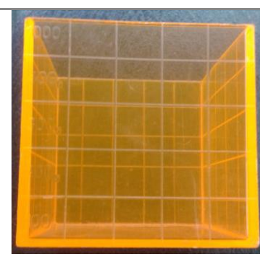
	Cubo 1	
¿Cuánto mide el lado del cubo?		
¿Cuánto mide su volumen?		
¿Qué cantidad de líquido le cabe a este cubo?		

3.- Si tuvieras un cubo ampliado dos veces y medio (2.5 veces) de la arista.

a) ¿Cuánto mide su arista? ___________________________
b) ¿Cuánta agua consideras que contendrá? ___________________________
c) ¿Cuánto crees que es su volumen? ___________________________

4.- Llena con agua el nuevo cubo proporcionado (cubo 2) y toma registro de lo que se te indica en el siguiente punto.

5.- Completa el siguiente cuadro

	Cubo 2	
¿Cuánto mide el lado del cubo?		
¿Cuánto mide su volumen?		
¿Qué cantidad de líquido le cabe a este cubo?		

7.- Responde los siguientes cuestionamientos

a) ¿Cuántas veces aumentó el lado del cubo 2 (con respecto del cubo 1)? _______________

b) ¿Cuántas veces aumentó el volumen del cubo 2 (con respecto del cubo 1)? __________________

c) ¿Cuántas veces aumentó la cantidad de agua contenida en el cubo 2? __________________

d) ¿La cantidad de agua que creíste que contendría fue proporcional al aumento de la medida de las aristas, es decir, contuvo dos veces y media más de agua cuando las aristas aumentaron dos veces y media? ____

e) ¿El agua que pensaste que contendría el cubo 2 fue lo que en realidad contuvo? ________
¿A qué crees que se deba? ____
____
____
____

f) ¿Qué podrías concluir con respecto del aumento de los lados y el volumen de los cuerpos geométricos? ____
____
____
____
____

8.- Si ahora en lugar de aumentar el lado del cubo se quisiera disminuir 8 veces el volumen del primer cuerpo geométrico (cubo 1) que se te entregó. Responde lo siguiente

a) ¿Qué cantidad de agua debe contener el cubo 3? _________________________________

b) ¿Cuánto debe de medir la arista (lado) del cubo 3? ________________________________

9.- Con base en el cuerpo geométrico, completa el siguiente cuadro

	Cubo 3	
¿Cuánto mide el lado del cubo?		
¿Cuánto mide su volumen?		
¿Qué cantidad de líquido le cabe a este cubo?		

10.- Responde los siguientes cuestionamientos

a) ¿Cuántas veces disminuyó la cantidad de agua contenida en el cubo 3 (con respecto del cubo 1)? ___________________________

b) ¿Cuántas veces disminuyó el lado del cubo (con respecto del cubo 1)? ________________

c) ¿La disminución en la cantidad de agua fue proporcional a la medida de la arista (lado) del cubo 3, es decir, si la cantidad de agua contenida que registraste era la octava parte entonces la arista disminuyó ocho veces? ________________________________

d) ¿La arista que pensaste que tendría el cubo (número 8) fue lo que en realidad registraste? ___________ ¿Por qué? ____
____

e) ¿Qué podrías concluir con respecto del aumento del volumen y la medida de los lados de las figuras? ____
____
____
____

Sesión 3: Variación de las aristas con ayuda de las TIC´s.

Objetivo:

Que el alumno analice y generalice qué sucede con el volumen de los cuerpos geométricas al hacer variar las medidas de sus aristas por medio de las TIC´s (Geogebra).

Conocimientos previos:

- Figura geométrica
- Cuerpo geométrico
- Cubo
- Medida
- Arista
- Volumen

Material

- Geogebra (software o aplicación)
- Lápiz

1.- Decide la medida para una arista y con ayuda de Geogebra construye un cubo con dicha medida. Ver Anexo 1

2.- Haz crecer el cubo de manera que la arista mida el doble de la primera.

3.- Completen la siguiente tabla.

	Cubo 1	Cubo 2
¿Cuánto mide de lado?		
¿Cuánto mide su volumen?		

4.- A partir del primer cubo, ahora construye un cubo que mida la mitad de longitud de la arista que elegiste.

5.- Complete la siguiente tabla

	Cubo 1	Cubo 3
¿Cuánto mide de lado?		
¿Cuánto mide su perímetro?		
¿Cuánto mide su área?		

6.- Responde los siguientes cuestionamientos

a) ¿Qué sucede con el volumen del cubo al hacer crecer sus aristas o lados? _____________
____

b) ¿Cuál es la relación que existe entre la medida de los lados del cubo con respecto a su volumen?
____
____

c) ¿El volumen crece de manera proporcional con respecto al aumento de sus lados? ___________ ¿Por qué? ____
____
____

7.- Reúnete con otro compañero para comparar los datos y respuestas obtenidas

8.- Si ahora construyeran un cubo más grande de tal manera que la arista fuese 4 veces más grande.

a) ¿Cuánto mide su arista? ___________________________
b) ¿Cuánto mediría su volumen? ________________________________

9.- Construye las figuras geométricas y verifica si tus respuestas son correctas.

10.- Lluvia de ideas de los puntos 6,8-9.

11.- Genera una conclusión individual de lo realizado en la sesión.

____
____

____
____

Sesión 4: Variación del volumen con ayuda de las TIC´s.
Objetivo:

Que el alumno analice y generalice qué sucede con la medida de las aristas del cuerpo geométricas al hacer variar las medidas de su volumen por medio de las TIC´s (Geogebra).

Conocimientos previos:

- Figura geométrica
- Cuerpo geométrico
- Cubo
- Medida
- Arista
- Volumen

Material

- Geogebra (software o aplicación)
- Lápiz

1.- Construye en Geogebra un cubo que tenga 3 unidades de lado.

2.- Construye un cubo que mida el triple del volumen del cubo anterior.

a) ¿Cómo obtuviste el cubo con el triple de volumen? ______________________________
____
____

3.- Completen la siguiente tabla.

	Cubo 1	Cubo 2
¿Cuánto mide su volumen?		
¿Cuánto mide el lado?	3 unidades	

4.- Construye un cubo que mida 64 cm^3.

5.- Construye un cubo que mida la mitad del volumen que el anterior.

a) ¿Cómo obtuviste el cubo con la mitad de volumen? ______________________________
____
____

6.- Completen la siguiente tabla.

	Cubo 3	Cubo 4
¿Cuánto mide su Volumen?	64 cm^3	
¿Cuánto miden sus lados?		

7.- Si ahora se quisiera un cubo con la mitad de volumen que el primero.

a) ¿Cuánto medirían sus lados? ______________________________
b) ¿La medida de los lados disminuye a la mitad? ________________________ ¿Por qué? ___
____
____

8.- Si se requiriera de un cubo con el doble de volumen que el primero.

a) ¿Cuáles podrían ser las medidas de sus lados? ______________________________
c) ¿La medida de los lados aumentó al doble? ________________________ ¿Por qué? _____
____
____

9.- Con base en los datos obtenidos respondan lo siguiente:

a) Si se tiene el volumen de algún cuerpo geométrico y se desea otro con la mitad o al doble (de volumen), ¿la medida de sus lados disminuye a la mitad o aumenta al doble respectivamente? ___________ ¿Por qué? ______________________________________
____

10.- Lluvia de ideas de los puntos 7-9.

11.- Genera una conclusión individual de lo realizado en la sesión.

____
____
____
____

CONSTANTE

Sesión 1-2: Situaciones problemáticas del mundo real.

Objetivo:

Que el alumno observe y analice que al variar la cantidad de objetos o las condiciones que intervienen en algunas situaciones cotidianas tales variaciones no afectan o alteran dicha situación.

Conocimientos previos:

- Cantidad
- Tiempo
- Realismo

Material

- Toallitas húmedas
- Lazo (tendedero)
- Pinzas para ropa
- Cronómetro
- Lápiz

Responde individualmente.

1.- Si 5 toallas se secan en 2 horas. ¿En qué tiempo se secarán 10 toallas?

a) ¿Cómo le hiciste para solucionar el problema? ___________________________________
____
____

b) ¿Alguna vez has colocado alguna prenda para que se seque en el tendedero? __________________

2.- Formados en equipos de 3 personas, realicen lo que se indica.

- Coloca dos lazos que servirán como tendedero dentro del aula.
- Comienza a tomar el tiempo de secado a partir de que sacas las toallitas húmedas del empaque.
- Coloca en un tendedero 3 toallitas húmedas y en el otro coloca el doble (6).
- Repite el procedimiento pero en alguna zona que esté a la intemperie fuera del aula.

3.- Completa el siguiente cuadro para las toallas que se encuentran dentro del aula.

	3 toallas	6 toallas

¿Cuál fue el tiempo en que se secaron?		
Describe las condiciones en que se encuentran.		

4.- Completa el siguiente cuadro para las toallas que se encuentran fuera del aula.

	3 toallas	6 toallas
¿Cuál fue el tiempo en que se secaron?		
Describe las condiciones en que se encuentran.		

5.- Con base en lo realizado en los puntos 3 y 4 responde las siguientes preguntas:

a) Con base en lo que también realizaste en el punto 1. ¿Qué opinas de tus respuestas con respecto al tiempo de secado de las toallas? ____________________________________
____
____
____

b) ¿Todas las toallas que se colocaron dentro del aula se encontraban en las mismas condiciones o había diferencias? ____

c) ¿El tiempo de secado de las toallas que se colocaron dentro del aula aumenta de forma proporcional con respecto de la cantidad de toallas, es decir, si la cantidad de toallitas húmedas aumenta al doble, el tiempo de secado aumentó al doble? ________________
¿Qué sucede realmente? ____
____
____
____

d) ¿Qué podrían concluir del experimento realizado con las toallas que se colocaron dentro del aula? ____
____
____

e) ¿Todas las toallas que se colocaron fuera del aula se encontraban en las mismas condiciones o había diferencias? ____

f) ¿El tiempo de secado de las toallas que se colocaron fuera del aula aumenta de forma proporcional con respecto de la cantidad de toallas, es decir, si la cantidad de toallitas húmedas aumenta al doble, el tiempo de secado aumentó al doble? _________________
¿Qué sucede realmente? ____
____
____

g) ¿Qué podrían concluir del experimento realizado con las toallas que se colocaron fuera del aula? ____
____
____

h) En estos casos. ¿Cómo te ayudan las matemáticas o los cálculos que realizaste para resolver los problemas? ____ ¿Por qué? ____
____
____

i) En estos casos. ¿Las matemáticas o los cálculos que realizaste te sirvieron para proporcionar la respuesta correcta a lo que en realidad sucede? ____________________ ¿Por qué? ____
____
____

j) ¿Cuáles son los factores o condiciones que les faltaron tomar en cuenta para tener un razonamiento más apropiado y poder resolver el problema de forma correcta? ________
____
____

k) Los factores que mencionaste en el inciso j. ¿Los habías observado en la realidad? ______

l) Si tenías ese conocimiento de lo que sucede en la realidad con respecto al tiempo de secado de alguna prenda y en caso de no haberlo utilizado para resolver el problema. ¿Por qué crees que no utilizaste dicho conocimiento para resolver el problema? ________
____
____
____

6.- Lluvia de ideas grupal de las respuestas del punto 5.

7.- Genera una conclusión individual de lo realizado en la sesión.

____
____
____
____
____
____
____

Sesión 1-2: Situaciones problemáticas del mundo real.
Objetivo:

Que el alumno observe y analice que al variar la cantidad de sustancia en determinada situación, tal variación no afecta o altera dicha situación.

Conocimientos previos:

- Cantidad
- Temperatura
- Realismo

Material

- Sustancias líquidas (preferentemente agua)
- Recipientes graduados (3)
- Pipetas
- Termómetro
- Lápiz

Responde individualmente

1.- Si 100 mililitros de agua se encuentran a una temperatura ambiente de 10 °C.

a) ¿Qué temperatura tendrán 300 mililitros de agua en las mismas condiciones? ___________

b) ¿Qué temperatura tendrán 50 mililitros de agua en las mismas condiciones? ____________

c) ¿Qué realizaste para responder el problema? ___________________________________
____
____

2.- Formados en equipos de 3 personas, realicen lo que se indica.

- Consigue agua (que toda el agua que consigas provenga del mismo lugar).
- Etiqueta cada uno de los tres recipientes (recipiente 1, recipiente 2 y recipiente 3).
- Mide cierta cantidad de agua y colócala en el recipiente 2.
- En el recipiente 1 coloca la mitad de agua que colocaste en el recipiente 2.
- En el recipiente 3 coloca el triple de agua que colocaste en el recipiente 2.
- Registra y responde la tabla del punto 3.

3.- Completa el siguiente cuadro para la temperatura del agua en los recipientes.

	1er recipiente	2do recipiente	3er recipiente
Cantidad de agua			
¿Cuál fue la temperatura?			

Describe las condiciones (físicas y químicas) en que se encuentra el líquido.			

4.- Con base en lo realizado en los puntos 3 responde las siguientes preguntas:

a) Con base en lo que también realizaste en el punto 1. ¿Qué opinan de su respuesta con respecto a la temperatura del agua? ____

b) ¿Los tres recipientes con agua se encontraban en las mismas condiciones o había diferencias? ____

c) ¿La temperatura del agua aumenta de forma proporcional con respecto de la cantidad de agua, es decir, si la cantidad de agua aumentara al quíntuple (cinco veces más), la temperatura también aumentaría al quíntuple? ____________ ¿Qué sucede realmente?
____
____
____

d) ¿Qué podrían concluir del experimento realizado con los recipientes? _______________
____
____
____

e) En estos casos. ¿Cómo les ayudaron las matemáticas o los cálculos que realizaron para resolver el problema? ____

____
¿Por qué? ____
____
____

f) En estos casos. ¿Las matemáticas o los cálculos que realizaron les sirvieron para proporcionar la respuesta correcta a lo que en realidad sucede? _______________ ¿Por qué? ____
____
____

g) ¿Cuáles son los factores o condiciones que les faltaron tomar en cuenta para tener un razonamiento más apropiado y poder resolver el problema de forma correcta? ________
____
____

h) Los factores que mencionaste en el inciso g. ¿Los habías observado en la realidad? ______

i) Si tenían ese conocimiento de lo que sucede en la realidad con respecto a la temperatura determinado líquido y en caso de no haberlo tomado en cuenta para resolver el problema. ¿Por qué crees que no utilizaste dicho conocimiento para resolver el problema? ________
____
____

5.- Inventen algún problema donde a pesar de variar la cantidad de objetos o de sustancia ello no altere o afecte determinada situación.

____
____
____

6.- Lluvia de ideas grupal de las respuestas del punto 4 y 5.

7.- Genera una conclusión individual de lo realizado en la sesión.

____
____
____
____
____

FALTA DE AUTENTICIDAD

Sesión 1: Situaciones problemáticas del mundo real.

Objetivo:

Que el alumno observe algunas situaciones cotidianas o del mundo real y analice la influencia de las matemáticas en dichas situaciones.

Conocimientos previos:

- Peso
- Estatura
- Tiempo (edad)
- Realismo

Material

- Folletos
- Lápiz
- Cinta métrica o metro
- Gises (azul y rosa)
- Calculadora

1.- Lee la siguiente información de forma individual y responde lo que se te indica.

Según información de la Organización mundial de la salud (2006), a la edad de un año (12 meses):

- Un niño "normal" debe de pesar aproximadamente 9.6 kilogramos y debe de medir (aproximadamente) 75.7 centímetros.
- Una niña "normal" debe de pesar aproximadamente 8.9 kilogramos y debe de medir (aproximadamente) 74 centímetros.

Nota: se dice que un niño o niña es "normal" cuando no está por debajo o por encima de los parámetros establecidos, por ejemplo, en cuestión del peso, que no tenga un peso bajo (desnutrición) o un peso alto (sobrepeso).

2.- Responde lo que se te indica del cuadro siguiente.

	Niño ("normal")	Niña ("normal")
¿Cuál debe ser el **peso** a la edad de **6 meses**?		

¿Cuál debe ser la **altura** a la edad de **6 meses**?		
¿Cuál debe ser el **peso** a la edad de **4 años**?		
¿Cuál debe ser la altura a la edad de **4 años**?		

a) ¿Cómo le hiciste para dar solución al problema? _________________________________
____
____
____

3.- En parejas y con base en las respuestas del punto 2 de alguno de los integrantes, realicen lo siguiente:

- tracen 3 líneas (con el gis azul) en el suelo de tal manera que cada una represente la altura de un niño “normal” a la edad de 6 meses, un año y 4 años.
- tracen 3 lineal (con el gis rosa) en el suelo de tal manera que cada una represente la altura de una niña “normal” a la edad de 6 meses, un año y 4 años.

4.- Con base en los folletos otorgados (Anexo 4), identifica la información requerida en el cuadro siguiente y responde lo que se te indica.

	Niño (“normal”)	Niña (“normal”)
¿Cuál el **peso** aproximado a la edad de **6 meses**?		
¿Cuál es la **altura** aproximada a la edad de **6 meses**?		
¿Cuál debe ser el **peso** aproximado a la edad de **4 años**?		
¿Cuál debe ser la **altura** aproximada a la edad de **4 años**?		

5.- Con base en lo realizado en los puntos 2, 3 y 4, responde las siguientes preguntas:

a) Con base en lo que realizaste en el punto 3 (trazar líneas que representan la altura de los niños y niñas “normales”). ¿Qué opinas de tus respuestas con respecto a las

representaciones de las alturas de los niños y niñas a los 6 meses, 1 año y 4 años? _______
¿Crees que un niño o niña "normal" pueda tener esa altura?[1] ______________________
____
____

b) ¿Qué opinas de tus respuestas con respecto al peso de los niños y niñas a los 6 meses, 1 año y 4 años? ____
____
¿Crees que un niño o niña "normal" pueda tener ese peso? ________________________
____
____

c) ¿Los datos registrados por la organización mundial de la salud aumentan de manera proporcional, es decir, si a la edad de un año un niño tiene determinado peso o altura, a la edad de tres años (el triple de un año) el niño tiene el triple de altura? ______________
¿Qué sucede realmente? ____
____
____
____

d) ¿La respuesta que proporcionaste en el cuadro del punto 2 correspondieron a lo que propone la organización mundial de la salud? ___________________________________

e) ¿Qué factores o circunstancias consideras que pudieron haber intervenido para que tus respuestas no correspondieran a lo que propone organización mundial de la salud?[2] ____
____
____
____

f) En estos casos. ¿Cómo te ayudan las matemáticas o los cálculos que realizaste para resolver los problemas? ____
____
¿Por qué? ____
____
____

g) En estos casos. ¿Las matemáticas o los cálculos que realizaste te sirvieron para proporcionar una respuesta exacta o una respuesta aproximada a lo que en realidad sucede? ____ ¿Por qué? ____
____

h) Los factores que mencionaste en el inciso e. ¿Los conocías? ___________ ¿Sabías que suceden en la realidad? ______________

i) Si tenías ese conocimiento de lo que sucede en la realidad con respecto al desarrollo de la altura y peso de los niños y niñas y, en caso de no haberlo utilizado para resolver el problema. ¿Por qué no utilizaste dicho conocimiento para resolver el problema? _______
____
____
____
____

[1] Los hombres más altos se encuentran en Europa, en específico en Holanda (182,5 cm). Las mujeres más altas también están en Europa, aunque esta vez en Letonia (169,8 cm).
Tomado de: http://elpais.com/elpais/2016/07/21/media/1469127433_712478.html

Con datos de **17 mil 364 personas mayores de 18 años**, la Cámara Nacional de la Industria del Vestido encontró que **el hombre mexicano promedio pesa 74.8 kilos y mide 1.64 metros**, mientras que **las mujeres 1.58 metros de altura y 68.7 kilos de peso**.
Tomado de: http://www.muyinteresante.com.mx/preguntas-y-respuestas/12/02/09/medidas-poblacion-mexicana/

[2] El crecimiento es el proceso biológico más característico de la infancia. A menudo solemos compararlos como si el crecimiento debiese ser parejo para todos los niños de la misma edad, pero lo cierto es que cada niño tiene su propio ritmo de crecimiento individual. En los primeros años de vida ocurre un rápido aumento en la estatura y peso del niño, pero no es un proceso constante.
https://www.bebesymas.com/desarrollo/como-y-cuanto-crecen-los-ninos-las-cuatro-etapas-de-crecimiento

6.- Lluvia de ideas grupal de las respuestas del punto 5.

7.- Genera una conclusión individual de lo realizado en la sesión.

____
____
____
____
____
____
____

____

____

Sesión 2: Situaciones problemáticas del mundo real.

Objetivo:

Que el alumno observe algunos situaciones cotidianas o del mundo real y analice la influencia de las matemáticas en dichas situaciones.

Conocimientos previos:

- Velocidad
- Distancia
- Tiempo
- Realismo

Material

- Internet
- Lápiz

1.- En parejas, lean la siguiente información y respondan lo que se indica.

Elaine Thompson y Usain Bolt son atletas que participan en competencias de atletismo en juegos olímpicos y en mundiales de dicha especialidad. En particular, son atletas que participan en pruebas de velocidad (carreras), participan en las competencias de 100 y 200 metros planos e incluso han establecidos records. Ellos compitieron y ganaron en ambas pruebas (100 y 200 metros planos) en los juegos olímpicos de Río de Janeiro en el 2016, por lo cual se hicieron merecedores a las medallas de oro en cada una de las competencias en las que participaron ambos atletas.

Tomados de: http://www.mundodeportivo.com/atletismo/20161231/413015117739/elaine-thompson-la-reina-desconocida.html y http://www.biografiasyvidas.com/biografia/b/bolt.htm

2.- Los siguientes enlaces muestran la participación de Elaine Thompson y Usain Bolt en la prueba de 100 metros planos.

https://www.youtube.com/watch?v=up6veKKkzSU

http://elcomercio.pe/deporte-total/rio-2016/usain-bolt-vivo-online-va-su-primer-oro-rio-2016-100m-planos-noticia-1924008

3.- Con base en los videos que observaste, responde las siguientes preguntas:

a) ¿Cuánto tiempo tardó en recorrer Elaine Thompson los 100 metros planos? ____________

b) ¿Cuánto tiempo tardó Usain Bolt en recorrer los 100 metros planos? __________________

c) Con base en lo que observaste de ambos atletas, si ahora tuvieran que recorrer el doble de distancia, es decir, ______ metros planos. ¿Cuánto tiempo consideras que necesitarían para recorrerlos?
Elaine Thompson: _______________________
Usain Bolt: ________________________

d) ¿Cómo le hiciste para determinar el tiempo que tardarán en esta nueva prueba? _______
____
____

4.- Los siguientes enlaces muestran la participación de Elaine Thompson y Usain Bolt en los mismos juegos olímpicos (Río de Janeiro en el 2016) pero en la prueba de 200 metros planos, es decir, en esta prueba recorrieren el doble de la distancia con respecto de los primeros videos. Abre o copia los enlaces y observa los videos.

https://www.youtube.com/watch?v=GHXqVb6QzIU

https://www.youtube.com/watch?v=J5rIB0_MmS0&t=9s

5.- Con base en los últimos dos videos observados, responde las siguientes preguntas:

a) ¿Cuánto tiempo tardó Elaine Thompson en recorrer los 200 metros planos? ___________

b) ¿Cuánto tiempo tardó en recorrer Usain Bolt los 200 metros planos? _________________

c) Con respecto al tiempo que pensaste en que ambos atletas tardarían en realizar dicha prueba. ¿Qué sucedió? ____

d) La distancia recorrida aumentó al doble (200 metros). ¿Sucede lo mismo para el tiempo en que los atletas recorren dicha distancia? _____________________________________

6.- Lee la siguiente información.

Michael Phelps es un atleta muy reconocido a nivel mundial. Él participa en diferentes competencias de natación tanto en mundiales de la especialidad (mundiales de natación) como en juegos olímpicos. Actualmente (en el año 2017) tiene más de 20 medallas de oro en juegos olímpicos y cuenta con diferentes records en distintas pruebas de natación.

Tomado de: http://www.biografiasyvidas.com/biografia/p/phelps.htm

7.- El enlace que se observa a continuación, muestra la participación del atleta Michael Phelps en el preolímpico de Omaha en Estados Unidos (2016) en la competencia denominada 200 metros mariposa (así se le denomina al estilo en que nadan los competidores). Antes de comenzar a observar el video del enlace, atiende el punto 8 por favor.

https://www.youtube.com/watch?v=ikg5HEDg0zc

8.- Detén el video cuando el primer competidor (Michael Phelps) haya recorrido los primeros 50 metros (*esto ocurre cuando el atleta recorre de extremo a extremo la piscina*) y responde los siguientes cuestionamientos

a) ¿Cuál fue el tiempo que registró Michael Phelps para recorrer los primeros 50 metros? ____

b) ¿Cuánto tiempo crees que le tomará recorrer 100 metros? _________________________ ¿Por qué? ____ ____

c) ¿Cuánto tiempo crees que le tomará recorrer 200 metros? _________________________ ¿Por qué? ____ ____

9. Termina de observar el video y responde lo siguiente.

a) ¿Cuánto tiempo tardó en recorrer 100 metros? _________________________

b) ¿Cuánto tiempo tardó en recorrer los 200 metros de la competición? _________________

c) Con respecto al tiempo que pensaste en que Michael Phelps tardaría en recorrer determinadas distancias. ¿Qué sucedió? ____ ____

d) El primer registro que tomaste fue cuando Michael Phelps había recorrido 50 metros, para los registros posteriores la distancia recorrida aumentó al doble (100 metros) y cuádruple (200 metros). ¿Sucedió lo mismo para el tiempo, es decir, aumento al doble cuando recorrió los 100 metros y aumento al cuádruple cuando recorrió los 200 metros? _______________

10.- Reúnete con otra pareja de compañero para responder y discutir lo que se te indica en el punto siguiente (punto 11).

11.- Con base en las respuestas proporcionadas en el punto 3 inciso c y en el punto 8 incisos b y c, en las cuales se pregunta cuánto tiempo crees que tardarán los atletas en realizar su respectiva prueba. Responde lo siguiente:

a) ¿La respuesta que proporcionaste correspondió al tiempo que en realidad tardaron los atletas en su respectiva prueba? _________________________

b) ¿Qué factores o circunstancias consideras que pudieron haber intervenido para que los atletas hayan necesitado un poco más de tiempo para realizar su respectiva prueba? ____ ____ ____

____
____

c) ¿La respuesta que proporcionaste se acercó a los tiempos en que los atletas completaron la prueba? ____

d) En estos casos. ¿Cómo te ayudan las matemáticas o los cálculos que realizaste para resolver los problemas? ____ ¿Por qué? ____
____
____

e) En estos casos. ¿Las matemáticas o los cálculos que realizaste te sirven para proporcionar una respuesta exacta o una respuesta aproximada a lo que en realidad sucede? ________ ¿Por qué? ____
____
____

f) Los factores que mencionaste por los que consideras que los atletas tardaron un poco más de tiempo en terminar las pruebas más extensas. ¿Los conocías? ________ ¿Sabías que suceden en la realidad? ______________

g) Si tenías ese conocimiento de lo que sucede en la realidad y en caso de no haberlo utilizado para resolver el problema. ¿Por qué no utilizaste dicho conocimiento para resolver el problema? ____
____
____
____

12.- Lluvia de ideas grupal de las respuestas del punto 11.

13.- Genera una conclusión individual de lo realizado en la sesión.

____
____
____
____
____
____

Anexo 1

Nombre: ____

Edad: años _____ meses_____ Grupo: _______________

Lee cada uno de los problemas e intenta resolverlos.

1.- El mejor tiempo de Alicia para correr 100 metros es de 16 segundos. ¿Cuánto tiempo le llevará correr 1000 metros?

____

b) Si para resolver el problema consideras útil un dibujo, diagrama o esquema, utiliza el recuadro de abajo.

c) Explica las razones por las cuales has obtenido tu respuesta.

d) Con base en la escala de valores, califica por favor marcando con "X" ¿Cómo consideras al problema?

60% COMPLEJO	70% DIFICIL	80% SIMPLE	90% FÁCIL	100% SUMAMENTE SENCILLO

2.- Si 500 ml de agua se encuentran a 20℃ en el ambiente. ¿Qué temperatura tendrán 1000 ml de agua?

____

b) Si para resolver el problema consideras útil un dibujo, diagrama o esquema, utiliza el recuadro de abajo.

c) Explica las razones por las cuales has obtenido tu respuesta.

d) Con base en la escala de valores, califica por favor marcando con "X" ¿Cómo consideras al problema?

☹ 60% COMPLEJO	😐 70% DIFICIL	😐 80% SIMPLE	☺ 90% FÁCIL	☺ 100% SUMAMENTE SENCILLO

3.- Ricardo necesita 10 minutos para cavar una zanja alrededor de un castillo de arena cuadrado cuyo lado mide 50 cm. ¿Cuánto tiempo se necesita aproximadamente para cavar una zanja alrededor de un castillo de arena cuadrado de 150 cm de lado?

____

b) Si para resolver el problema consideras útil un dibujo, diagrama o esquema, utiliza el recuadro de abajo.

c) Explica las razones por las cuales has obtenido tu respuesta.

d) Con base en la escala de valores, califica por favor marcando con "X" ¿Cómo consideras al problema?

☹	😐	😐	☺	☺
60% COMPLEJO	70% DIFICIL	80% SIMPLE	90% FÁCIL	100% SUMAMENTE SENCILLO

4.- Luis es un pintor publicitario. En los últimos días, tuvo que pintar las decoraciones de varias ventanas de una tienda. Ayer hizo un dibujo de 56 cm de altura de Bart Simpson en la puerta de una tienda de regalos. Necesitó 6 ml de pintura. Ahora se le pide hacer una versión ampliada del mismo dibujo en una ventana de una tienda de videojuegos. Esta copia debe ser de 168 cm de alto. ¿Qué cantidad de pintura necesitará aproximadamente Luis para hacerlo?

____

b) Si para resolver el problema consideras útil un dibujo, diagrama o esquema, utiliza el recuadro de abajo.

c) Explica las razones por las cuales has obtenido tu respuesta.

d) Con base en la escala de valores, califica por favor marcando con "X" ¿Cómo consideras al problema?

60% COMPLEJO	70% DIFICIL	80% SIMPLE	90% FÁCIL	100% SUMAMENTE SENCILLO

5.- Mamá puso 3 toallas en el tendedero. Después de 12 horas estaban secas. La abuela puso 6 toallas en el tendedero. ¿Cuánto tiempo les toma secarse?

____

b) Si para resolver el problema consideras útil un dibujo, diagrama o esquema, utiliza el recuadro de abajo.

c) Explica las razones por las cuales has obtenido tu respuesta.

d) Con base en la escala de valores, califica por favor marcando con “X” ¿Cómo consideras al problema?

60% COMPLEJO	70% DIFICIL	80% SIMPLE	90% FÁCIL	100% SUMAMENTE SENCILLO

6.- Los mexicanos miden a los 10 años aproximadamente 1.30 m. ¿Cuánto medirán a los 30 años?

b) Si para resolver el problema consideras útil un dibujo, diagrama o esquema, utiliza el recuadro de abajo.

c) Explica las razones por las cuales has obtenido tu respuesta.

d) Con base en la escala de valores, califica por favor marcando con "X" ¿Cómo consideras al problema?

60% COMPLEJO	70% DIFICIL	80% SIMPLE	90% FÁCIL	100% SUMAMENTE SENCILLO

7.- Un agricultor se tarda 8 horas en arar un terreno cuadrado de 100 m de lado. ¿Cuánto tardará en arar un terreno de la misma forma pero con el triple de longitud?

____

b) Si para resolver el problema consideras útil un dibujo, diagrama o esquema, utiliza el recuadro de abajo.

c) Explica las razones por las cuales has obtenido tu respuesta.

d) Con base en la escala de valores, califica por favor marcando con "X" ¿Cómo consideras al problema?

☹	😐	😐	☺	☺
60% COMPLEJO	70% DIFICIL	80% SIMPLE	90% FÁCIL	100% SUMAMENTE SENCILLO

8.- En su caja de juguetes, María tiene dados en varios tamaños. El más pequeño mide 10 mm de lado y tiene un peso de 800 mg. ¿Cuál sería el peso de un dado más grande cuyo lado mide 30 mm?

b) Si para resolver el problema consideras útil un dibujo, diagrama o esquema, utiliza el recuadro de abajo.

c) Explica las razones por las cuales has obtenido tu respuesta.

d) Con base en la escala de valores, califica por favor marcando con "X" ¿Cómo consideras al problema?

60% COMPLEJO	70% DIFICIL	80% SIMPLE	90% FÁCIL	100% SUMAMENTE SENCILLO

Referencias bibliográficas

Block, D., Mendoza, T. y Ramírez, M. (2010). ¿Al doble le toca el doble? La enseñanza de la proporcionalidad en la educación básica. México: SM.

De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D. & Verschaffel, L. (2002). Improper Use of Linear Reasoning: An In-Depth Study of the Nature and the Irresistibility of Secondary School Students' Errors. *Educational Studies in Mathematics*, 50(3), 311-334.

De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D. & Verschaffel, L. (2007). *The illusion of linearity: From analysis to improvement*. New York: Springer.

Juárez, J. A., Mejía, A., González A. & Slisko, J. (2014). La construcción del modelo situacional de un problema matemático: El análisis basado en el Marco del Experimentador Inmerso. *Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 87, 81-99.

Van Dooren, W., De Bock, D., Depaepe, F., Janssens, D. & Verschaffel, L. (2003). The Illusion of Linearity: Expanding the Evidence towards Probabilistic Reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 53(2), 113-138.

Van Dooren, W., De Bock, D., Evers, M. & Verschaffel, L. (2009). Students' Overuse of Proportionality on Missing-Value Problems: How Numbers May Change Solutions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 40(2), 187-211.

Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D. & Verschaffel, L. (2005). Not Everything Is Proportional: Effects of Age and Problem Type on Propensities for Overgeneralization. *Cognition and Instruction*, 23(1), 57-86.

Van Dooren, W., De Bock, D., Janssens, D. & Verschaffel, L. (2008). The Linear Imperative: An Inventory and Conceptual Analysis of Students' Overuse of Linearity. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(3), 311-342.

Verschaffel, L., Greer, B., Van Dooren, W., & Mukhopadhyay, S. (2009). *Words and Worls: Modelling Verbal Descriptions of Situations*. Rotterdan, The Netherlands: Sense Publisher.