



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

REPRESENTACIONES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS POR ESTUDIANTES DE LA OLIMPIADA MEXICANA DE MATEMÁTICAS EN PUEBLA

TESIS
PARA OBTENER EL TÍTULO DE
MAESTRA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

PRESENTA
LIC. NAYELI BERENICE QUIÑONES BALDAZO

DIRECTOR DE TESIS
DRA. MARÍA ARACELI JUÁREZ RAMÍREZ

CO-DIRECTOR DE TESIS
DR. JOSIP SLISKO IGNJATOV

PUEBLA, PUE. FEBRERO 2020



BUAP.

DRA. LIDIA AURORA HERNÁNDEZ REBOLLAR
SECRETARIA DE INVESTIGACIÓN Y
ESTUDIOS DE POSTGRADO, FCFM-BUAP
P R E S E N T E:

Por este medio le informo que la C:

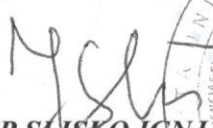
NAYELI BERENICE QUIÑONES BALDAZO

Estudiante de la Maestría en Educación Matemática, ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 02 de diciembre de 2019, con la tesis titulada:

***"REPRESENTACIONES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
POR ESTUDIANTES DE LA OLIMPIADA MEXICANA DE
MATEMÁTICAS EN PUEBLA"***

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

A T E N T A M E N T E.
H. Puebla de Z. a 17 de febrero de 2020


DR. JOSIP SLISKO IGNJATOV
COORDINADOR DE LA MAESTRIA
EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA.



Ccp. Archivo.
DR JSI / L agm*

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y
Tecnología (CONACyT), por el apoyo financiero
que se dio para concluir exitosamente este trabajo,
de enero de 2018 a diciembre de 2019.

Número de CVU: 888479

Agradecimientos

Agradezco a Dios por haber iluminado mi camino y darme la fortaleza día con día para salir adelante aún estando lejos de mi familia, con altas y bajas, por las pruebas que puso en cada paso pero que al final, siempre estuve bendecida.

Agradezco a la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla y la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas por permitirme estudiar en esta universidad, lo que conllevó conocer a profesores de los cuales aprendí, conocí mucho y conseguí crecer como persona y no solo académicamente.

A los profesores que conocí durante los dos años de clases, por su dedicación y esfuerzo para lidiar con un grupo amplio de estudiantes y que aún así lograron su cometido. Sin ellos, no pude haber concluido esta etapa de manera satisfactoria para mí.

A mis compañeros de generación de los cuales aprendí tanto y que mejores compañeros no pude tener, agradezco haber compartido clases con ellos, porque siempre fuimos muy unidos, compartimos congresos nacionales y congreso internacional en Cuba, que hizo que nos uniéramos más que solo como compañeros. Agradezco sus críticas constructivas y sobre todo su amistad.

Agradezco a la Dra. María Araceli Juárez Ramírez por su apoyo desde antes de iniciar la maestría, por las pláticas amenas, por las reuniones que tuvimos y el tiempo brindado hacia mí y este trabajo. Por mostrarme el lado bonito de la vida y sobre todo el lado bonito de Puebla.

A los miembros del jurado, la Dra. Lidia Hernández que a pesar de haber sido mi profesora, es quien me dio retroalimentación para hacer que este trabajo sea sólido y con el rigor suficiente. Al Dr. Josip Slisko por sus charlas que nutrieron este trabajo y lograron convertirlo en algo consistente. Al Dr. Juan Carlos, por sus sugerencias de primer semestre que aunque quizá no lo recuerde, influyó significativamente en el camino que tomó esta tesis.

Índice

Resumen	1
Introducción	3
Capítulo 1. Planteamiento del problema	5
1.1 Pregunta de investigación	7
1.2 Objetivos	7
Capítulo 2. Marco teórico	9
2.1 Representaciones externas	10
2.2 Representaciones internas	10
2.3 Pensamiento en voz alta	11
2.4 Olimpiada Mexicana de Matemáticas	12
2.4.1 Otras competencias nacionales	13
2.5 Preguntas socráticas	13
Capítulo 3. Metodología de investigación	15
3.1 Población	15
3.2 Diseño de la investigación	16
3.2.1 Estudio de caso	16
3.2.2 Sesiones	17
3.3 Instrumentos de investigación	19
3.3.1 Hoja de trabajo	19
3.3.1.1 Problemas	19
3.3.2 Intervención del investigador	21
Capítulo 4. Análisis de datos	23
4.1 Categorización y descripción de las representaciones	23
4.2 Análisis por estudiante por problema	26
Conclusiones	67
Referencias	71

Índice de tablas

Tabla 1. Preguntas socráticas utilizadas	14
Tabla 2. Procedimiento de selección para la Competencia Nacional	16
Tabla 3. Representaciones externas	23
Tabla 4. Representaciones internas	24
Tabla 5. Problemas resueltos por cada uno de los estudiantes	25
Tabla 6. Representaciones del problema 1 por E1	26
Tabla 7. Representaciones del problema 2 por E1	28
Tabla 8. Representaciones del problema 3 por E1	30
Tabla 9. Representaciones del problema 4 por E1	31
Tabla 10. Representaciones del problema 5 por E1	33
Tabla 11. Representaciones del problema 6 por E1	34
Tabla 12. Representaciones del problema 1 por E2	35
Tabla 13. Representaciones del problema 2 por E2	37
Tabla 14. Representaciones del problema 3 por E2	39
Tabla 15. Representaciones del problema 4 por E2	41
Tabla 16. Representaciones del problema 6 por E2	42
Tabla 17. Representaciones del problema 2 por E3	43
Tabla 18. Representaciones del problema 3 por E3	45
Tabla 19. Representaciones del problema 4 por E3	46
Tabla 20. Representaciones del problema 5 por E3	47
Tabla 21. Representaciones del problema 6 por E3	48
Tabla 22. Representaciones del problema 1 por E4	50
Tabla 23. Representaciones del problema 2 por E4	52
Tabla 24. Representaciones del problema 3 por E4	54
Tabla 25. Representaciones del problema 5 por E4	56
Tabla 26. Representaciones del problema 6 por E4	57
Tabla 27. Representaciones del problema 1 por E5	58

Tabla 28. Representaciones del problema 2 por E5	60
Tabla 29. Representaciones del problema 3 por E5	62
Tabla 30. Representaciones del problema 5 por E5	63
Tabla 31. Representaciones del problema 6 por E5	64

Índice de figuras

Figura 1. Hoja de problema 1 de E1	27
Figura 2. Hoja de problema 2 de E1	29
Figura 3. Hoja de problema 3 de E1	30
Figura 4. Hoja de problema 4 de E1	32
Figura 5. Hoja de problema 5 de E1	33
Figura 6. Hoja de problema 6 de E1	34
Figura 7. Hoja de problema 1 de E2	36
Figura 8. Hoja de problema 2 de E2	38
Figura 9. Hoja de problema 3 de E2	40
Figura 10. Hoja de problema 4 de E2	41
Figura 11. Hoja de problema 6 de E2	42
Figura 12. Hoja de problema 2 de E3	44
Figura 13. Hoja de problema 3 de E3	45
Figura 14. Hoja de problema 4 de E3	46
Figura 15. Hoja de problema 5 de E3	47
Figura 16. Hoja de problema 6 de E3	49
Figura 17. Hoja de problema 1 de E4	51
Figura 18. Hoja de problema 2 de E4	53
Figura 19. Hoja de problema 3 de E4	55
Figura 20. Hoja de problema 5 de E4	56
Figura 21. Hoja de problema 6 de E4	57
Figura 22. Hoja de problema 1 de E5	59
Figura 23. Hoja de problema 2 de E5	61
Figura 24. Hoja de problema 3 de E5	62
Figura 25. Hoja de problema 5 de E5	63
Figura 26. Hoja de problema 6 de E5	65

Resumen

La presente tesis muestra resultados con un paradigma interpretativo de una investigación de tipo cualitativa. Dicha investigación tiene como objetivo general analizar y describir las diferentes representaciones utilizadas en la resolución de problemas matemáticos por estudiantes de Olimpiadas de Matemáticas de Puebla. Duval (1999), las clasifica como: mentales o internas las cuales se generan mentalmente y se infieren de las representaciones externas o semióticas que son las que se transmiten explícitamente en dibujos, palabras, entre otros, y aunque cada representación tiene sus desventajas, su uso combinado puede anularlas y ser una herramienta efectiva (Kaput, 1992).

En este estudio, mediante un marco de análisis de protocolos (Schoenfeld, 1985), se analizarán las representaciones externas (semióticas) e internas (mentales). Para la recolección de datos se tienen dos tipos de sesiones, durante la primera se proponen hojas de trabajo que consisten de dos problemas validados, y en el segundo tipo de sesión, los estudiantes se enfrentan a la resolución de problemas a través de la técnica de pensamiento en voz alta, por lo que la intervención del investigador es casi nula.

Finalmente, se describen las representaciones utilizadas por los estudiantes olímpicos, los tipos de representaciones que emplearon para encontrar la solución al problema planteado, así como la identificación de habilidades y estrategias efectivas que llevaron a cabo.

INTRODUCCIÓN

La presente tesis de maestría identifica las diferentes representaciones que hace el estudiante olímpico a través de la resolución de problemas matemáticos, cabe mencionar, que a pesar de ser un grupo reducido de cinco estudiantes olímpicos se consiguió el objetivo y diferentes representaciones internas y externas que proporcionaron información para realizar una categorización de las mismas.

La investigación se encuentra estructurada de la siguiente manera:

En el Capítulo 1 se encuentra, principalmente, la motivación para realizar la investigación a estudiantes olímpicos y sus representaciones tanto internas como externas. Se identifica el planteamiento del problema y posteriormente las preguntas de investigación con los objetivos.

En el Capítulo 2 se tiene el marco teórico utilizado en la investigación, que es la base que se tuvo para analizar los datos recolectados. Se encuentran las principales investigaciones que se tomaron en cuenta para llevar a cabo la investigación, donde además de hablar de estudiantes olímpicos y representaciones internas y externas, se habla de la técnica de pensamiento en voz alta, así como de los estudios que han utilizado esta técnica y de qué manera puede ser de utilidad en la presente tesis.

En el Capítulo 3 se encuentra lo relacionado a la metodología utilizada. Se identifica el diseño que se tuvo durante toda la investigación, así como el tipo de estudio, se define además, la población e instrumentos utilizados para la recolección de datos y descripción de cada uno de los procedimientos llevados a cabo.

El Capítulo 4 muestra el análisis de datos llevado a cabo, con base en el marco teórico. Se encuentran los resultados sobre las representaciones internas y externas de los estudiantes olímpicos, estos resultados son interpretativos en el sentido del paradigma interpretativo.

Finalmente, la investigación cierra con las conclusiones que se infieren del análisis previo, así como describir cómo es que se consiguió alcanzar los objetivos y la pregunta de investigación. Además, las dificultades que se presentaron durante la investigación y recomendaciones para futuros estudios junto con preguntas abiertas.

Capítulo 1

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La educación matemática ha puesto de manifiesto que, el realizar representaciones externas es una actividad académica que se lleva a cabo día con día dentro del aula, ya que de este modo, es como el profesor promueve la construcción de los conocimientos en los estudiantes, sin embargo los estudiantes se crean representaciones internas o mentales del concepto que están por aprender, por lo que dichas representaciones son difíciles de describir por parte de quien las crea y solo se pueden acceder a ellas a través de una inferencia mediante un dibujo, palabras, esquemas entre otros, los cuales pertenecen a las representaciones externas.

De manera general, la investigación en la educación matemática ha mostrado que el uso adecuado de las representaciones, tanto internas como externas, ayuda al estudiante a conseguir una mejor comprensión de los temas, y, consecuentemente, a resolver problemas que requieren un razonamiento más complejo (DeBellis y Goldin, 2006).

Las representaciones son de gran importancia en la resolución de problemas, puesto que a través de ellas es como se transmite la solución. La primera representación que se tiene en la mayoría de los problemas es el lenguaje natural, debido a que con esta se da el primer acercamiento a la comprensión del problema.

Font (2000) nos habla sobre las representaciones y menciona que

Muchas investigaciones han tenido (y tienen) por objetivo el estudio de estas representaciones internas porque consideran que la comprensión de los alumnos está relacionada con el incremento en el número de conexiones entre diferentes tipos de representaciones internas, lo cual se puede conseguir estableciendo conexiones y traducciones entre diferentes tipos de representaciones externas (p. 11).

En la investigación se ha encontrado que los estudiantes que son buenos resolutores de problemas o tienen la habilidad de enfrentarse a la resolución de problemas de manera efectiva, tienden a ser muy flexibles en el uso de varios sistemas de representación internas y externas, así como las transformaciones entre representaciones (Lesh, Post y Behr, 1987).

Existen diferentes tipos de representaciones para un concepto u objeto matemático D'Amore (2006), por ejemplo, para el concepto de número fraccionario, en lenguaje común podríamos encontrar: un cuarto, la mitad de la mitad; en lenguaje aritmético: se tiene la escritura fraccionaria, decimal o exponencial; en lenguaje algebraico: escritura funcional o conjuntista; esquemas gráficos, como diagramas. Lo mismo se puede encontrar para otros conceptos como la función lineal. Además de estos sistemas de representaciones, existen las transformaciones (Duval, 1998) entre los diferentes tipos de representaciones de los conceptos matemáticos.

En los estudios existentes de la educación matemática, los estudiantes olímpicos no han sido de interés para los investigadores, por el motivo claro de que, dichos estudiantes se encuentran con habilidades desarrolladas, un alto nivel cognitivo y no hay razón por la cual realizar alguna intervención. Sin embargo, se piensa que esa es una fortaleza de esta investigación, debido a que conocer y acercarse a la mente del estudiante olímpico, a su forma de pensar y a la manera en que resuelve los problemas proporcionará a la educación matemática un aporte que ayudará a profesores e investigadores información a considerar para con sus estudiantes y realizar estudios posteriores, respectivamente. Por lo que este estudio, se vuelve un punto de partida en la educación matemática para con este tipo de población, debido a que nos da un primer acercamiento a estos estudiantes, a su forma de pensar y sus estrategias al enfrentarse a la resolución de problemas.

Las representaciones, por otro lado, es un campo de interés significativo y con peso en la educación matemática. Duval (1998) concibe a las representaciones como el primer acercamiento que se tiene al enfrentarse a una actividad, específicamente, en este estudio, a la

resolución de problemas, por lo que sin representaciones, no habría conocimiento, comprensión ni entendimiento.

En este caso, se espera que los estudiantes no tengan dificultades al enfrentarse a la resolución de problemas, debido a la experiencia con la que cuentan, por lo que es de interés, cómo es que los estudiantes realizan sus representaciones externas y de qué tipo son, durante la resolución de problemas. También, es de interés, analizar las representaciones internas empleadas e inferidas de las representaciones externas.

1.1 Pregunta de investigación

Como preguntas de investigación surge la siguiente:

- *¿Qué tipo de representaciones (internas y externas) realiza un grupo de estudiantes olímpicos en la resolución problemas matemáticos?*

1.2 Objetivos

El presente trabajo tiene como objetivo general:

Analizar y describir las representaciones externas y las representaciones internas que son utilizadas durante la resolución de problemas por cinco estudiantes de olimpiadas matemáticas de Puebla.

Del cual, se desprenden los siguientes objetivos específicos:

- *Comprender de qué manera los estudiantes olímpicos hacen uso de las representaciones internas y representaciones externas para resolver problemas.*

- *Describir y categorizar las representaciones utilizadas por el grupo de estudiantes olímpicos durante la resolución de problemas.*

Capítulo 2

MARCO TEÓRICO

El tema de la importancia de las representaciones nos la pone de manifiesto Duval (1998), quien dice que para estudiar los conocimientos de los sujetos se debe recurrir a la noción de representación, puesto que el sujeto de alguna u otra manera hace uso de representaciones para transmitir el conocimiento que está en su mente y poder interactuar con el mismo. Las representaciones no solo se encargan de enlazar los conceptos y estrategias utilizadas en la resolución de problemas, van más allá de eso, conservan la estructura de una solución (Kaput, 1992).

Existen diferentes tipos de representaciones, Duval (1999) las clasifica en representaciones mentales y representaciones semióticas, y aunque cada representación tiene sus desventajas, su uso combinado puede anularlas y mostrar ser una herramienta efectiva (Kaput, 1992).

Diferentes autores (Brown, 1997; Kaput, 1992; Duval, 1995; Romero y Rico, 1999) han transmitido en sus trabajos que la naturaleza de las representaciones matemáticas influye significativamente en la comprensión que genera el alumno, e incluso algunos también han estudiado y comprobado que, dependiendo del tipo de comprensión que tenga el estudiante se determina el tipo de representación que puede generar o utilizar durante la resolución de problemas.

Se conocen distintos tipos de representaciones, así como también se encuentran clasificadas en diferentes categorías, sin embargo, en la matemática educativa se encuentran dos grandes grupos de representaciones o del uso del término representación. Por una parte, están las representaciones internas y por el otro, las representaciones externas. El primer término se usa para describir la cognición de las personas y suelen también llamarse representaciones mentales, mientras que para el segundo término se refiere a los sistemas de signos y herramientas indispensables para la actividad matemática (Font, Godino y D'Amore, 2007).

2.1 Representaciones externas

En Cuoco (2001) se definen a las representaciones externas como aquellas que son fáciles de comunicar a otros, algunas de ellas se trazan en papel, otras se muestran a través de las tecnologías, como dibujos, esbozos geométricos, diagramas, ecuaciones, entre otras expresiones simbólicas. Incluso, Duval (1999) nos habla del lenguaje natural como una representación externa, debido a que este puede ser expuesto públicamente y capaz de ser interpretado por el resto de los individuos, a partir de esto que plantea el autor, se llegaría a otra definición para representación externa: este tipo de representaciones se encuentran fuera del individuo y entran en interacción con él y los demás.

Entre los registros de las representaciones externas, existen además, las transformaciones de estas, las cuales indican que un sujeto ha llegado a comprender o ha adquirido el conocimiento de manera significativa, cuando logre “pasar” de una representación a otra, (Duval, 1998).

2.2 Representaciones internas

Las representaciones internas o mentales como las nombra Duval (1999), es el otro tipo de representación que se va a analizar en esta investigación. Las representaciones internas con las imágenes que se crean mentalmente son difíciles de describir, en ocasiones son inventadas, y por lo tanto, el poderlas transmitir a terceros se vuelve complicado (Cuoco, 2001). Estas representaciones se encargan de hacer notar la cognición y comprensión que haya tenido el estudiante, esto no es fácil de conseguir ya que para hacer notar esto, el estudiante necesita transmitir las a través de representaciones externas.

Un sistema de representaciones internas se define como las construcciones y asignación personal de símbolos, así como las propias estrategias y habilidades heurísticas para la resolución de problemas, (Goldin y Shteingold, 2001). Estos autores proponen un enfoque para responder la

siguiente pregunta: “¿Cómo podemos saber el que un alumno haya comprendido un concepto matemático?”, el cual es considerar y tratar de describir las representaciones internas o mentales.

2.3 Pensamiento en voz alta

El pensamiento en voz alta es una técnica utilizada por personas que son sometidos a un estudio, ya sea de conducta, pensamientos, entre otros, y consiste en que la persona estudiada comunica oralmente todo lo que piensa o pasa por su mente. Esta técnica en sus inicios se usó para estudios psicológicos (Ericsson y Simon, 1984), donde además, los psicólogos e investigadores que utilizaron esta técnica, controlaban muchas variables e incluso se predecían los resultados.

En educación matemática es común que se encuentren estudios implementando esta técnica en los estudiantes, quienes se someten a cierta actividad, como por ejemplo, la resolución de problemas, enfrentándose a ella mediante el lenguaje hablado.

Específicamente, cuando se habla de la resolución de problemas, es muy común encontrar a Schoenfeld (1985), quien habla sobre el tema y además proporciona un estudio completo sobre la conducta de los estudiantes al enfrentarse a la resolución de problemas. En este, el autor hace uso de la técnica de pensamiento en voz alta, aunado a entrevistas con cada uno de los sujetos. En esta investigación, precisamente, se toma como referencia la metodología que realiza Schoenfeld (1985), con algunas diferencias que son notables en el Capítulo 3 donde se describe la metodología detalladamente.

Esta técnica ha sido utilizada en múltiples áreas disciplinares, particularmente, en la matemática educativa, hay diferentes estudios (Rosenzweig, Krawec & Montague, 2011; Montague & Applegate, 1993; Koro-Ljungberg, Douglas, Therriault, Malcolm & McNeill, 2012) que involucran otras herramientas aunadas a la técnica de pensamiento en voz alta, como lo son entrevistas, con la finalidad de obtener una mayor comprensión de fenómenos como el

aprendizaje de los estudiantes o la resolución de problemas y asimismo ampliar las perspectivas, pensamientos y creencias de los sujetos en cuestión.

2.4 Olimpiada Mexicana de Matemáticas

En México, la Sociedad Matemática Mexicana organizó en el año de 1987, la Primera Olimpiada Mexicana de Matemáticas y a partir de esa fecha, los concursos nacionales se han celebrado anualmente cada noviembre siendo sede alguno de los estados de la República Mexicana.

Este concurso está dedicado a estudiantes preuniversitarios, lo cual indica que no es un concurso únicamente para estudiantes de nivel medio superior, sino también para estudiantes que estén en nivel básico, siempre y cuando, logren estar entre los mejores seis de su estado. Sin embargo, se aplica el mismo examen para todos los estudiantes, independientemente del nivel educativo en el que se encuentre. Para ser seleccionado entre los seis puntajes más altos, cada estado realiza los concursos que considere necesarios para seleccionarlos, siendo de índole obligatorio tener al menos un Concurso Estatal.

En particular, la Sociedad Matemática Mexicana junto a la Olimpiada Mexicana de Matemáticas y patrocinadores, ofrecen material diseñado por el comité de las asociaciones, para prepararse a las competencias matemáticas, tanto si eres estudiante participante o entrenador. Este material incluye material en videos, libros, problemas de competencias de otros países e incluso internacionales, revistas, entre otros.

Esta competencia de matemáticas es la de mayor nivel en México, por ello, la selección de los participantes es ardua, siendo aún más difícil el que sean únicamente seis estudiantes por estado. Lo que nos lleva a considerar que existen estudiantes preparados adecuadamente, con un nivel alto para participar en competencias de matemáticas, pero que no logran estar entre los mejores seis. Es por ello, que existen, además, otras competencias, igualmente con un nivel alto

en dificultad, donde la diferencia es que estas permiten que una mayor cantidad de estudiantes tengan la oportunidad de participar.

2.4.1 Otras competencias nacionales

Además del Concurso Nacional, existen otras competencias de matemáticas a nivel nacional, como la Olimpiada de Otoño, organizada por el Centro de Alto Rendimiento en Matemáticas; la Competencia Cotorra y el Concurso de Primavera, organizados por la Academia Mexicana de Ciencias, las cuales han trabajado en darle seguimiento y oportunidades a los estudiantes que tienen desarrolladas de manera significativa habilidades para la resolución de problemas y las matemáticas.

2.5 Preguntas socráticas

El realizar preguntas adecuadas a estudiantes ha sido toda una línea de investigación dentro de la Matemática Educativa, la importancia de este tema nos la pone de manifiesto Paul (1996). Camargo y Useche (2015) consideran a las preguntas como herramientas para el desarrollo del pensamiento crítico, Paul (1993) llama al pensamiento crítico como aquel pensamiento que manifiesta dominio de habilidades y destrezas intelectuales. Dichos autores se responden a las siguientes cuestiones: ¿Por qué enseñar a pensar bien? ¿Se puede enseñar a pensar bien? ¿Cómo se puede enseñar a pensar bien? Para ello los autores recomiendan el uso de preguntas, planteando la importancia de formular preguntas que sean de calidad. Según Elder y Paul (2006), la calidad del pensamiento está totalmente relacionada con la calidad de preguntas que se planteen.

En el mismo estudio, dichos autores se han dedicado a definir algunos formatos para realizar preguntas, según lo que busque el preguntador. En la tabla 1 se observan el tipo de preguntas que se consideran en la presente investigación.

Preguntas que exploran razones y evidencia	Preguntas sobre puntos de vista y perspectivas	Preguntas para comprobar implicaciones y consecuencias
¿Por qué está sucediendo esto?	¿De qué otra manera...?	¿Y entonces qué pasaría...?
¿Cómo sabes esto?	¿Cuál es la diferencia...?	¿Cómo puede... usarse para...?
¿Puedes mostrarme?	¿Cuál es la similitud...?	¿De qué manera afecta?
¿Me puedes dar un ejemplo de eso?	¿Qué se podría decir sobre esto?	¿Qué está insinuando?
¿Cuál es la naturaleza?	¿Qué pasa si usted compara...?	¿Por qué es el mejor?
¿Son estas razones suficientes?	¿Qué contra argumentos...?	¿Podrías hacer generalizaciones?
¿Cómo defendería sus argumentos?		¿Por qué es importante?
¿Cómo se podría refutar?		¿Cuáles son las implicaciones?
¿En qué se basa su argumento?		
¿Por qué?		

Tabla 1. Preguntas socráticas utilizadas.

Capítulo 3

METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

De acuerdo con los objetivos y preguntas de investigación de la presente investigación, esta es de tipo cualitativa y a su vez los resultados se presentan con un paradigma interpretativo. Con ello, se da una interpretación de los datos recolectados a través de los instrumentos sobre las representaciones internas y externas de cada uno de los cinco estudiantes olímpicos.

3.1 Población

Los estudiantes olímpicos del estado de Puebla son de los diferentes municipios, sin embargo, todos convergen en la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla en la capital del Estado para los entrenamientos previos a las competencias de matemáticas. Entre las competencias más importantes están la Competencia Nacional, esta en particular, tiene una selección larga, ya que se hace durante todo el año partiendo desde el mes de marzo con un examen escolar y terminando con el examen final en el mes de octubre, en la tabla 2 se pueden observar el número de estudiantes que presentaron en las diferentes etapas en el año del 2018 en la selección del estado de Puebla, así como la distribución de los diferentes exámenes que se aplican, con el objetivo de elegir a los seis puntajes más altos para representar al estado de Puebla en la Competencia Nacional celebrada en el mes de noviembre.

La población está compuesta por cinco estudiantes, los cuales fueron seleccionados por los entrenadores de la Olimpiada de matemáticas en el estado de Puebla. Estos estudiantes tienen experiencia en cuanto a participación en competencias de matemáticas, desde estatales hasta nacionales. Cuatro de los cinco estudiantes son de educación secundaria, cursando los siguientes grados: uno de primero, uno de segundo y dos de tercero. El quinto estudiante cursa último año de bachillerato.

	Examen	Sede	Fecha	Estudiantes que presentan	Estudiantes seleccionados
1	Escolar	Examen de invitación en todo el estado.	Marzo	Todos los estudiantes del estado.	800
2	Regional	Una sede por región.	Abril	800	120
3	Estatad	Sede en la capital.	Junio	120	40
4	Semifinal	FCFM, BUAP.	Agosto	40	12
5	Final	FCFM, BUAP.	Octubre	12	6

Tabla 2. Procedimiento de selección para la Competencia Nacional.

La edad y el grado que cursa el estudiante no tiene relevancia en el presente estudio, puesto que los estudiantes pueden considerarse olímpicos mientras se encuentren entre nivel básico (últimos años de primaria y secundaria) y nivel medio superior. Por lo que, la única condición de la elección de estudiantes es que tuviesen la experiencia de participar en competencias de matemáticas.

3.2 Diseño de la investigación

3.2.1 Estudio de caso

El diseño de investigación que es pertinente de acuerdo a la población y para alcanzar los objetivos propuestos en la investigación es el estudio de caso.

En la investigación se recolectan datos de cinco estudiantes olímpicos, que aunque no hay un reglamento para el número de casos que se deben considerar, algunos autores como Eishenhardt (1989), dan una pauta para los interesados en este tipo de diseño metodológico. Lo

que indica que el tamaño de nuestra población es un número adecuado para trabajar ya que puede generar suficiente información, definiendo de forma adecuada el resto del diseño de la investigación.

Martínez (2006), hace una recopilación de literatura sobre la metodología del estudio de caso, en este sentido, proporciona una caracterización de este método, entre ellas menciona que

“(…) es una metodología adecuada para investigar fenómenos en los que se busca dar respuesta a cómo y por qué ocurren, permite explorar en forma más profunda y obtener un conocimiento más amplio sobre cada fenómeno, lo cual permite la aparición de nuevas señales sobre los temas que emergen, y juega un papel importante en la investigación, por lo que no debería ser utilizado meramente como la exploración inicial de un fenómeno determinado” (p. 175).

3.2.2 Sesiones

Las sesiones son llevadas a cabo los días sábado, por el motivo de que los estudiantes tienen el hábito de asistir a sus entrenamientos de matemáticas durante estos días. Las sesiones tienen una duración de sesenta minutos, en un horario de 10:00 am a 11:00 am, en un aula dentro de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas en la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.

Se llevaron a cabo dos tipos de sesiones: sin intervención y con intervención, estas con diferentes propósitos. Las sesiones se describen a continuación:

A. Sesiones sin intervención.

En estas sesiones no existe intervención por parte del investigador, este simplemente actúa como observador, realizando los apuntes necesarios, sobre actitudes evidentes que tomen

los estudiantes al enfrentarse a la resolución de problemas, como por ejemplo, conductas y actitudes de angustia, seguridad e incluso el tiempo requerido para resolver los problemas.

Durante estas sesiones, se realiza únicamente la aplicación de los problemas, en donde se aplicaron dos problemas por cada sesión, más adelante, se pueden encontrar las especificaciones de las hojas de trabajo. Enfocándose en los objetivos del estudio, este tipo de sesión no exigía el audio y videograbación de la misma a diferencia de las que se describen a continuación.

B. Sesiones con intervención:

En estas sesiones existe una mínima intervención por parte del investigador. Esta intervención tiene como finalidad profundizar en las representaciones internas y externas que están presentes en la resolución de problemas de los estudiantes. Se espera que el investigador tenga casi una nula participación, y que dicha mediación exista cuando el estudiante se quede en silencio o cuando la explicación que proporcionó el estudiante no sea suficiente para indagar sobre sus representaciones internas y externas, para esto con ayuda de las preguntas socráticas, descritas en 2.4, se lograrán los objetivos.

En estas sesiones con intervención, el investigador también actúa como observador y consigue notas sobre lo sucedido, sin embargo, como también interviene, es posible que se escapen algunos detalles durante este proceso, por lo que las sesiones, además, son grabadas en audio y video, puesto que esto proporciona un acceso mayor a la información lo que conlleva a cumplir con los objetivos planificados en el estudio.

3.3 Instrumentos de investigación

3.3.1 Hoja de trabajo

Durante las sesiones se aplicaron hojas de trabajo con problemas, los cuales, fueron propuestos por los entrenadores de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas del estado de Puebla y revisados y aceptados, posteriormente, por dos investigadores.

Cada hoja de trabajo consta de dos problemas, cantidad recomendada por los expertos para un tiempo de sesenta minutos. Los problemas coinciden en tener distintas formas de resolverlo, y distintas representaciones posibles para su resolución, lo cual favorece a la investigación para cumplir con los objetivos propuestos.

En cada hoja de trabajo se les indicó a los estudiantes participantes que la resolución de los problemas era exclusivamente para el uso de un estudio de investigación, con lo cual sus respuestas, así como sus datos son confidenciales y el único fin es la presente investigación.

3.3.1.1 Problemas

Los problemas son elegidos de material que proporciona la Olimpiada Nacional de Matemáticas (Calendario Matemático, 2018), para entrenamiento y preparación de los estudiantes interesados.

A continuación se enuncian y se describen cada uno de los problemas.

Problema 1. Tienes un libro de notas con 96 hojas. Cada hoja está numerada al frente y atrás con números consecutivos, se inicia con el número 1 y se termina con el número 192. ¿Puedes arrancar 25 hojas de tal manera que la suma de los números en todas las páginas arrancadas sume 2018?

Problema 2. Pablo construye tableros de ajedrez diferentes pues tienen 31 cuadraditos en cada lado, en vez de 8. Tienen una casilla negra en cada esquina. Además, en cada columna y en cada renglón, las casillas se alternan entre negro y rojo. ¿Cuántas casillas negras existen en esos tableros?

Problema 3. Pedro entra a un salón. Él sabe que entre las personas que están en el mismo salón, incluyéndose, hay tres personas que cumplen años en el mismo mes. ¿Cuál es la menor cantidad de personas que puede haber en el salón?

Problema 4. Un tablero de dardos está formado por tres círculos concéntricos de radios 8cm, 12cm y 16cm. Si lanzamos el dardo, ¿cuál es la probabilidad que caiga dentro del círculo de radio 12cm pero fuera del círculo de radio 8cm?

Problema 5. Martín enciende una vela cada 3 segundos. Si cada vela se consume en un minuto, ¿cuál es el número máximo de velas que siempre estarán encendidas?

Problema 6. En un bosque hay zorros, sapos y loros parlantes. Los zorros solo mienten en días lluviosos, los sapos siempre mienten y los loros siempre dicen la verdad. Beto platica con 4 animales y en orden contestan:

- A. Hoy es un día lluvioso.
- B. Quien habló antes que yo, miente.
- C. Hoy es un día soleado.
- D. Quien habló antes que yo miente o yo soy un zorro.

¿Cuántos loros, a lo más, hay entre los 4 animales?

Los seis problemas se encuentran en el Calendario Matemático del año 2018. Los problemas son del tipo verbal, aun cuando los problemas 2 y 4 pudieron haber presentado dibujos o imágenes que ayudaran a la comprensión del mismo, esto con el fin de que el

estudiante partiera únicamente de la representación verbal y poder desarrollar (si así lo requiere) dichas representaciones visuales y posteriormente ser identificadas como parte del estudio. En general, todos los problemas tienen diferentes maneras de resolverse, según la estrategia que los estudiantes elijan y esto acarrea el uso de pasar por diferentes representaciones.

Los conocimientos involucrados en los problemas son los adquiridos hasta educación secundaria, es decir, conocimientos posteriores no son involucrados en los problemas. Los estudiantes que se enfrenten a este tipo de problemas deben contar con un razonamiento lógico matemático en desarrollo o avanzado, el cual se desarrolla a través de los entrenamientos que estos estudiantes adquieren previo a las competencias de matemáticas, ya que este es primordial para comprender el problema y lograr su resolución.

Los problemas no son los más difíciles de resolver, puesto que, el objetivo de este estudio es analizar cómo es que los estudiantes que tienen habilidades en la resolución de problemas tipo olimpiada, realizan y transmiten sus representaciones internas y externas, lo cual se obtendrá a partir de que los estudiantes, en primer instancia, logren resolver cada uno de los problemas.

3.3.2 Intervención del investigador

La intervención del investigador es la menor posible. En un inicio el estudiante olímpico en el segundo tipo de sesión, se debe enfrentar a resolver el problema, con la técnica pensamiento en voz alta “thinking aloud” (Schoenfeld, 1985; Ericsson & Simon, 1984), para esto, el estudiante no necesita ningún entrenamiento, debido a que se está estudiando el comportamiento natural al enfrentarse a la resolución de problemas.

No obstante, la intervención por parte del investigador, tuvo lugar cuando el estudiante se quedó sin palabras por tiempo prolongado o por otro lado, si lo que dijo y escribió con ayuda del pizarrón blanco, coincide en su totalidad con los datos registrados en las hojas de trabajo, con el

fin de profundizar en el conocimiento del estudiante y el uso que le dio a las representaciones externas e internas. Para esto, se utilizaron preguntas socráticas (Paul & Elder, 2006), las cuales, específicamente, son de gran ayuda para tener un acercamiento a las representaciones internas del estudiante, por la razón de que este tipo de preguntas indaga con mayor profundidad en los pensamientos y creencias del estudiante.

Capítulo 4

ANÁLISIS DE DATOS

4.1 Categorización y descripción de las representaciones

El análisis de los datos se lleva a cabo con base en las representaciones mencionadas en el Capítulo 2. Se tienen como representaciones externas: representación verbal, simbólica y visual. Por otro lado, las representaciones internas consideradas son tal y como las definen Cuoco (2001) y Goldin & Shteingold (2001), se identifican en los estudiantes como las que crean mentalmente, son difíciles de describir, son construcciones y estrategias propias así como también las heurísticas desarrolladas por los estudiantes.

En este sentido, se ha considerado el siguiente marco (Tabla 3) de las representaciones externas para analizar las soluciones de los estudiantes olímpicos.

Representación externa	Descripción
Visual	- Representaciones a través de dibujos, diagramas, tablas o gráficos. - Se pueden o no relacionar con la solución.
Simbólica	- Se constituye de números, signos de operación. - Signos algebraicos o expresiones algebraicas.
Verbal	- Lenguaje natural. - Comprensión del problema. - Comunicación de forma oral.

Tabla 3. Representaciones externas.

De la misma manera, se consideran las representaciones internas posibles durante la resolución de los problemas implementadas por parte de los estudiantes olímpicos, las cuales se describen en la tabla 4.

Representación interna	Descripción
Estrategias o técnicas	- Estrategias y técnicas inventadas. - Estrategias y técnicas comunes.
Herramientas matemáticas	- Métodos de solución. - Técnicas de conteo.
Interpretación	- Interpretación específica del problema. - Propia interpretación. - Simbología personal.

Tabla 4. Representaciones internas.

Se han identificado a los estudiantes por E1, E2, E3, E4 y E5. Cabe mencionar que no todos los estudiantes presentaron los seis problemas, debido a diferentes circunstancias que quedaron fuera de las manos de los investigadores, lo que conllevó también que no todos presentaran su solución a través de la técnica de pensamiento en voz alta. Sin embargo, no se descartó su participación en el estudio, puesto que aún con resultados parciales de los estudiantes se consiguen los objetivos planteados en la investigación. En la tabla 5, se observa el número de problema del cual se analizó su solución por cada uno de los estudiantes.

No. de problema	Estudiantes				
	E1	E2	E3	E4	E5
1	+	+		+	+
2	+	+	+	+	+
3	+	+	+	+	+
4	+	+	+		
5	+		+	+	+
6	+	+	+	+	+

Tabla 5. Problemas resueltos por cada uno de los estudiantes.

El análisis se realizará por solución de cada estudiante, comenzando con el estudiante olímpico identificado como E1.

4.2 Análisis por estudiante por problema

Análisis de E1.

Problema 1	
Representaciones externas	Representaciones internas
En la figura 1 se observa la solución que dio E1 en la hoja de problemas. El estudiante olímpico coloca algunas flechas que representan el camino o secuencia que llevó a cabo para poder llegar a la respuesta de la pregunta planteada en la redacción del problema. Emplea una técnica inventada por él, la cual se describirá en el apartado de representaciones internas. El estudiante realiza representaciones del tipo verbal para explicar cada uno de los pasos e ideas que está teniendo mientras resuelve el problema y simbólicas cuando lleva a cabo operaciones aritméticas.	Como se mencionó anteriormente, E1 llega a una solución correcta del problema con el empleo de una estrategia propia en la que para elegir las 25 hojas, realiza una división de 2018 entre 50 y toma el resultado como un punto de partida y menciona que va a “rodear” al 40 y sumar los números de esas páginas y obtiene un número mayor que 2018. Hace lo mismo con otras combinaciones y con ello asegura que ninguna va a dar como suma 2018. El estudiante hace uso de una técnica para sumar todos esos números que es la suma de Gauss, una técnica matemática comúnmente empleada en competencias de matemáticas.

Tabla 6. Representaciones del problema 1 por E1.

1. Tienes un libro de notas con 96 hojas. Cada hoja está numerada al frente y atrás con números consecutivos, se inicia con el número 1 y se termina con el número 192. ¿Puedes arrancar 25 hojas de tal manera que la suma de los números en todas las páginas arrancadas sume 2018?

$30 \overline{) 2018}$
 $\begin{array}{r} 40 \\ 30 \overline{) 2018} \\ \underline{120} \\ 818 \end{array}$ ← R=No

Y nos da un número < 2018
 Por lo que aunque usemos hojas
 a medias no nos dará como resultado 2018

Con números del 1 al 64
 $\frac{64(63)}{2} - \frac{14(13)}{2} = 2016 - 105 = 1911$

Nos da un número > 2018 pero si usamos números menores.

① Si tomamos los 50 números que rodean al 40 incluyendo, 16-65 y los sumamos con Gauss
 $\frac{65(66)}{2} - \frac{15(16)}{2} = 65(33) - 15(8) = 2145 - 120 = 2025$

1

Figura 1. Hoja de problema 1 de E1.

Problema 2	
Representaciones externas	Representaciones internas
El estudiante llega a una solución correcta en la hoja de problemas, tal como se muestra en la figura 2. El estudiante realiza, en primer lugar, una representación visual de algunos tableros con 3 y 5 cuadrados por lado (no de 31 como menciona el problema). Luego realiza una comunicación escrita con lenguaje natural y escribe algunas operaciones aritméticas que están acompañadas de alguna explicación que se da con una representación verbal.	El estudiante emplea una técnica interesante, ya que él piensa en tableros más pequeños del que plantea el problema, sin embargo, los relaciona debido a que todos estos tienen un número impar de cuadrados por lado. Al identificar esa relación, el estudiante establece una fórmula de forma verbal donde asegura que hay que dividir el número total de casillas entre 2 y sumarle 0.5. Una aportación importante al estudio se da cuando el estudiante se encuentra empleando la técnica de pensamiento en voz alta y afirma: <i>“Sé que la fórmula funciona pero no tengo la herramienta matemática para demostrar que así es”</i> .

Tabla 7. Representaciones del problema 2 por E1.

2. Pablo construye tableros de ajedrez diferentes pues tienen 31 cuadraditos en cada lado, en vez de 8. Tienen una casilla negra en cada esquina. Además, en cada columna y en cada renglón, las casillas se alternan entre negro y rojo. ¿Cuántas casillas negras existen en esos tableros?

$5/9$ $13/25$ $R=481$

$31 \times 31 = 961$

En todos los tableros impares para saber cuantas casillas negras hay lo que hay que hacer es dividir el número total de casillas entre 2 y sumarle .5

9 casillas

entre 2 = 4.5

+ .5 = 5

$s=5$ 5

Por lo tanto en el tablero de 31×31 hay 961 casillas:

961

$\div 2 = 480.5$

+ .5 = 481

Figura 2. Hoja de problema 2 de E1.

Problema 3

Representaciones externas	Representaciones internas
El estudiante transmite su solución en la hoja de problemas a través de una representación verbal, apareciendo una operación aritmética en donde multiplica 12 por 2, tal como se muestra en la figura 3. Explica su razonamiento, partiendo de supuestos, dando una respuesta precipitada, diciendo que son 3 personas. Sin embargo, nuevamente, a través de una representación verbal explica que para asegurar, tendrían que haber 25, explicando su técnica a través de la operación aritmética que se menciona.	El estudiante comprende el problema y da una primera solución que es pensar en 3 personas, aunque luego afirma que son 25 personas las que debe haber. Empleando una técnica de conteo en la que asigna a cada persona en un mes y así va acomodando hasta llegar a 24 personas y asegurando que la persona número 25 se encuentra en cualquiera de los 12 meses, cumpliendo con el requisito del problema.

Tabla 8. Representaciones del problema 3 por E1.

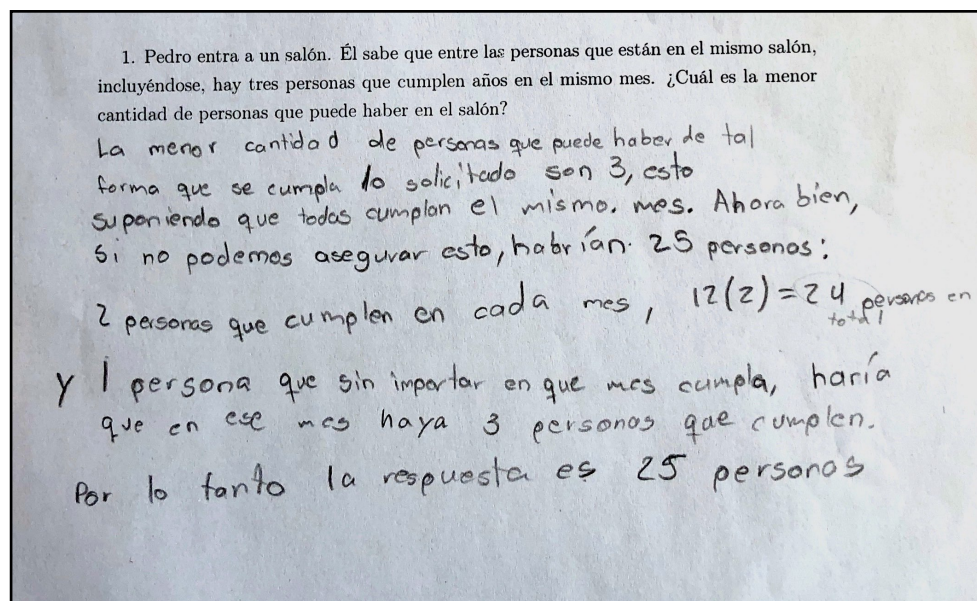
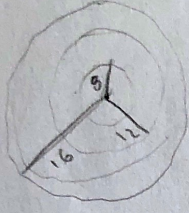


Figura 3. Hoja de problema 3 de E1.

Problema 4	
Representaciones externas	Representaciones internas
El estudiante realiza primero una representación visual de lo que es tablero de dardos mencionado en el problema, tal como se muestra en la figura 4. El estudiante va comentando su solución poco a poco, con lo que realiza representaciones verbales y en algunas ocasiones apoyándose de representaciones simbólicas para realizar operaciones aritméticas. El estudiante identifica a π con su número aproximado (3.14) y de esta manera lo utiliza para obtener medidas de áreas haciendo las operaciones correspondientes.	El estudiante usa una estrategia relacionar los porcentajes con las áreas de los círculos que conforman el tablero de dardos. Considera la probabilidad como una fracción, realiza la división y posteriormente pasa a la representación de porcentaje. A través de la técnica de pensamiento en voz alta, E1 hace notar que es consciente de las unidades de cada uno de los valores encontrados durante la resolución.

Tabla 9. Representaciones de problema 4 por E1.

2. Un tablero de dardos está formado por tres círculos concéntricos de radios 8cm, 12cm y 16cm. Si lanzamos el dardo, ¿cual es la probabilidad que caiga dentro del círculo de radio 12cm pero fuera del círculo de radio 8cm?



Primero sacamos el área del círculo mayor

$$\pi r^2 = 3.14(16)^2 = 3.14(256) = 803.84 \text{ cm}^2$$

Ahora sacamos el área del círculo de radio 12 y le restamos el de radio 8 esto para indicar que está dentro del círculo de radio 12 pero fuera del de 8

$$a = \textcircled{A} \quad 3.14(12)^2 = 3.14(144) = 452.16 \text{ cm}^2 \quad a = \textcircled{B}$$

$$3.14(8)^2 = 3.14(64) = 200.96 \text{ cm}^2$$

Por último tenemos que de un área total de 803.84 cm² queremos saber la probabilidad de que el dardo caiga en un área de 251.2 cm². Así que la probabilidad de que caiga ahí es de 251.2/803.84 en porcentaje sería 31.25%

Finalmente concluimos que la probabilidad de que caiga en esa área es del 31.25 %

Figura 4. Hoja de problema 4 de E1.

Problema 5

Representaciones externas	Representaciones internas
El estudiante en este problema no construye un seguimiento de su resolución a través de representaciones externas en la hoja de problemas, pero sí lo hace cuando usa la técnica de pensamiento en voz alta. En la hoja de problemas que se puede observar en la figura 5, se observa que el estudiante hace uso de representaciones simbólicas. Por otro lado, en la técnica de pensamiento en voz alta, complementa su solución con lenguaje a través de una comunicación oral.	La técnica empleada por E1 para la resolución de este problema es simplemente tomar tiempos arbitrarios y considerar las velas encendidas y apagadas, con ello, se da cuenta que en cierto punto, el número de velas es constante. Al cuestionarlo sobre su técnica, asegura que hay otras formas de resolverlo, pero como el número era pequeño y se prestaba a hacerlo manualmente, así fue como procedió y que no se le venía rápidamente a la mente alguna otra solución viable.

Tabla 10. Representaciones de problema 5 por E1.

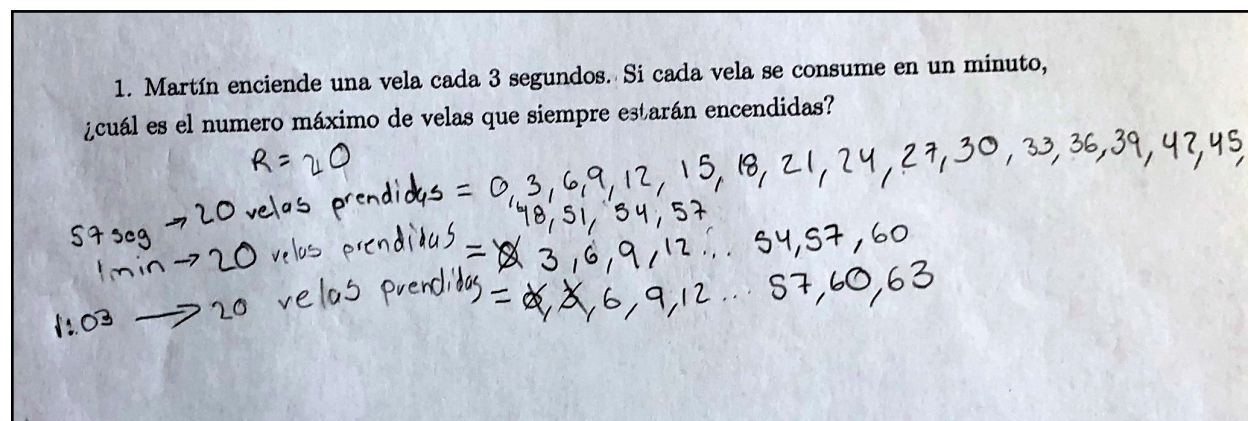


Figura 5. Hoja de problema 5 de E1.

Problema 6

Representaciones externas	Representaciones internas
El estudiante responde correctamente la pregunta planteada en el problema 6, sin embargo, no hay entendimiento en su solución. Como se observa en la figura 6, el estudiante hace una representación visual, quizá del camino que siguió para llegar a su respuesta. A través de la técnica de pensamiento en voz alta, llevó a cabo la misma representación visual, sin embargo, acompañada de una comunicación verbal, en donde explicó la técnica utilizada para la resolución.	Es común encontrar en este tipo de problemas la estrategia empleada por el estudiante. Utilizó una representación visual, particularmente una matriz (Cuoco, 2001). La estrategia del estudiante fue pensada y elegida adecuadamente para conseguir la justificación necesaria de la respuesta que dio al problema. Además, E1 lo hace notar cuando se le cuestiona sobre la técnica empleada y defiende sus argumentos, diciendo “con esta tabla, aseguro todos los casos posibles(...)”.

Tabla 11. Representaciones de problema 6 por E1.

2. En un bosque hay zorros, sapos y loros parlantes. Los zorros solo mienten en días lluviosos, los sapos siempre mienten y los loros siempre dicen la verdad. Beto platica con 4 animales y en orden contestan:

☒ A. Hoy es un día lluvioso.
☒ B. Quien habló antes que yo, miente.
☒ C. Hoy es un día soleado.
☒ D. Quien habló antes que yo miente o yo soy un zorro.

¿Cuántos loros, a lo más, hay entre los 4 animales?

2 Loros

A = Sapo
 B = Loro
 C = Loro
 D = Zorro

A	X	A	X	A
B	X	B	✓	B
C	X	C	✓	C
D	✓	D	✓	D

Figura 6. Hoja de problema 6 de E1.

Análisis de E2.

Problema 1	
Representaciones externas	Representaciones internas
E2 explica a través de representaciones verbales el por qué no es posible arrancar las 25 hojas que cumplan con las condiciones del problema planteado y además hace uso de unas operaciones aritméticas que validan lo que está diciendo, tal como se observa en la figura 7.	E2 no tiene un buen análisis de la información que tiene el problema, es decir, no logra la comprensión del mismo. Usa la técnica de la suma de Gauss, tal como E1, sin embargo, como no logra la comprensión del problema, hace que obtenga un razonamiento no correcto. Al enfrentarse a la técnica de pensamiento en voz alta, se da cuenta de que su razonamiento fue incorrecto y dice <i>“En la hoja no consideré correctamente el número que tienen cada una de las páginas(...)”</i> .

Tabla 12. Representaciones de problema 1 por E2.

1. Tienes un libro de notas con 96 hojas. Cada hoja está numerada al frente y atrás con números consecutivos, se inicia con el número 1 y se termina con el número 192. ¿Puedes arrancar 25 hojas de tal manera que la suma de los números en todas las páginas arrancadas sume 2018?

$$\begin{array}{r} 193 \\ - 96 \\ \hline 1158 \\ 1737 \\ \hline 18528 \\ - 1275 \\ \hline 17253 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 96 \\ - 25 \\ \hline 71 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 192 \\ - 90 \\ \hline 142 \\ 143 \\ 71 \\ \hline 143 \\ 1001 \\ \hline 10153 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 51 \\ 25 \\ \hline 255 \\ 102 \\ \hline 1275 \end{array}$$

R= No, porque si quitamos 25 hojas a los números mas grandes (porque su suma es de 18528) para reducirlo al máximo nos da como resultado 10153, es decir, el resultado del número más pequeño al cual podemos aplicar el método que nos indica el problema.
(método utilizado: Suma de Gauss)

Figura 7. Hoja de problema 1 de E2.

Problema 2	
Representaciones externas	Representaciones internas
El estudiante realiza una representación visual que representa un dibujo del tablero de 31 cuadrados por lado. E2 pasa a una representación verbal de lo que él entiende de la redacción del problema, haciendo representaciones de tableros de 31x31 con algunas condiciones como se muestra en la figura 8 así como también apoyándose de las operaciones aritméticas identificadas como representaciones simbólicas.	El estudiante opta por una estrategia de conteo en la que se centra primero en los tableros que tienen una cantidad par de cuadrados por lado, lo que hace que facilite el conteo, en particular opta por el tablero de 30x30 y posteriormente considera una fila y un renglón más (contándolos de forma independiente a los del tablero de 30x30), de esta manera se quita de problemas con el punto decimal, y encuentra el número total con una estrategia interesante. Además, a través de la técnica de pensamiento en voz alta se le cuestiona sobre otra forma de resolverlo y encuentra una fórmula como la del E1, asegurando este que es una manera más fácil, sin embargo, tampoco cuenta con los argumentos necesarios para asegurar que funciona.

Tabla 13. Representaciones de problema 2 por E2.

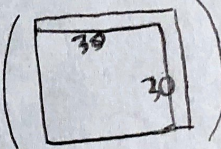
2. Pablo construye tableros de ajedrez diferentes pues tienen 31 cuadraditos en cada lado, en vez de 8. Tienen una casilla negra en cada esquina. Además, en cada columna y en cada renglón, las casillas se alternan entre negro y rojo. ¿Cuántas casillas negras existen en esos tableros?



$$\begin{array}{r} 31 \\ 31 \\ \hline 93 \\ 93 \\ \hline 186 \end{array}$$

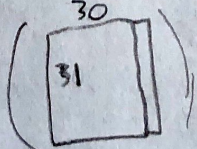
$$\begin{array}{r} 31 \\ 31 \\ \hline 93 \\ 93 \\ \hline 186 \end{array}$$

Rz Al darnos cuenta que el tablero es de $31 \cdot 31$ Podemos darnos la idea que toda casilla va a tener la misma cantidad (siendo 30), es decir, 15 negras y 15 rojas hasta el 31, donde al menos 1 color aumenta en 1,

$\Rightarrow \begin{array}{r} 30 \\ 30 \\ \hline 900 \end{array} / 2 = 450$


 (colores) = (1 color)

Pero también podemos hacer $30 \cdot 31$; porque el producto sería par (al ser impar un producto cambia la cantidad del color)

$\Rightarrow \begin{array}{r} 31 \\ 30 \\ \hline 930 \end{array} / 2 = 465$


 2 colores = 1 color

Y como el tablero le da preferencia al color negro lo sustrahite (31) lo dividimos entre 2 (15.5) pero el .5 del otro se lo damos al negro, $\Rightarrow 16$ y 15

Figura 8. Hoja de problema 2 de E2.

Problema 3	
Representaciones externas	Representaciones internas
La respuesta del E2 en la hoja de problemas como se muestra en la figura 9, es totalmente verbal, sin ninguna explicación de su respuesta, mientras que a través de la técnica de pensamiento en voz alta, explica las dos soluciones que dio en la hoja, planteándose las dos como soluciones posibles y haciendo únicamente comunicación verbal.	El estudiante asegura que la pregunta está planteada incorrectamente, por lo que, propone otra formulación, como se observa en la figura 9. A través de la técnica de pensamiento en voz alta no consiguió comunicar de forma adecuada su estrategia utilizada, ya que aseguraba que no estaba pensando en ninguna, aunque sus representaciones externas escritas podrían dar indicios de que E2 pensaba en el principio de las casillas.

Tabla 14. Representaciones de problema 3 por E2.

1. Pedro entra a un salón. Él sabe que entre las personas que están en el mismo salón, incluyéndose, hay tres personas que cumplen años en el mismo mes. ¿Cuál es la menor cantidad de personas que puede haber en el salón?

40
25

Respuesta correcta

R= Puede haber un mínimo de 3 personas (que si la redacción de la pregunta esta mal esta es la respuesta correcta), pero si la pregunta hubiera sido: mínima ¿Cuál es la ~~mínima~~ cantidad de personas que puede haber en el salón para que al menos 3 de ellos cumplan el mismo mes? La respuesta sería 25.

Figura 9. Hoja de problema 3 de E2.

Problema 4

Representaciones externas	Representaciones internas
El estudiante en la hoja de problemas (figura 10) muestra que hizo uso de representaciones visuales y simbólicas, sin ninguna explicación y además dejando en el lado izquierdo la respuesta en porcentaje, el cual es correcto. Al enfrentarse a la técnica de pensamiento en voz alta, el estudiante realiza las mismas representaciones de la hoja de problemas y explica paso a paso cada una de ellas.	E2 consigue transmitir sus representaciones internas a través de la técnica de pensamiento en voz alta, se apoya de una única representación del tablero de dardos y considera el valor de las áreas de cada uno de los círculos, además, es consciente del valor de π y desde un principio lo descarta para así no tener que multiplicar su valor “exacto”.

Tabla 15. Representaciones de problema 4 por E2.

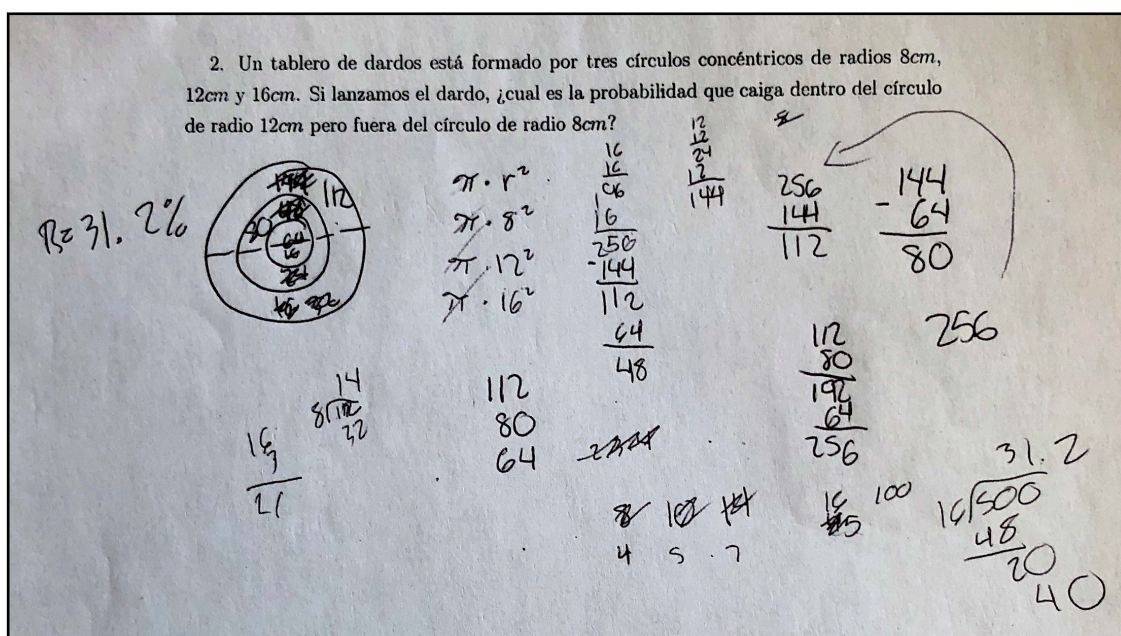


Figura 10. Hoja de problema 4 de E2.

Problema 6

Representaciones externas	Representaciones internas
E2 realiza dos diagramas, las cuales entran en la clasificación de representaciones visuales, en las que figuran dos casos. A través de la técnica de pensamiento en voz alta, no es posible entrar en la mente del estudiante, aun cuando se plantearon las preguntas socráticas, el sujeto seguía firme en lo que escribió, sin llegar a una solución.	Por lo mencionado anteriormente, el sujeto no explicó más que esos dos diagramas que realizó, explicando a través de una comunicación oral lo que representan cada uno de ellos, donde cada uno aseguraba que había dos loros, con lo que esa fue esa su respuesta final. En este sentido, no logró defender su respuesta y no tuvo razones suficientes para asegurar que eran los únicos dos casos.

Tabla 16. Representaciones de problema 6 por E2.

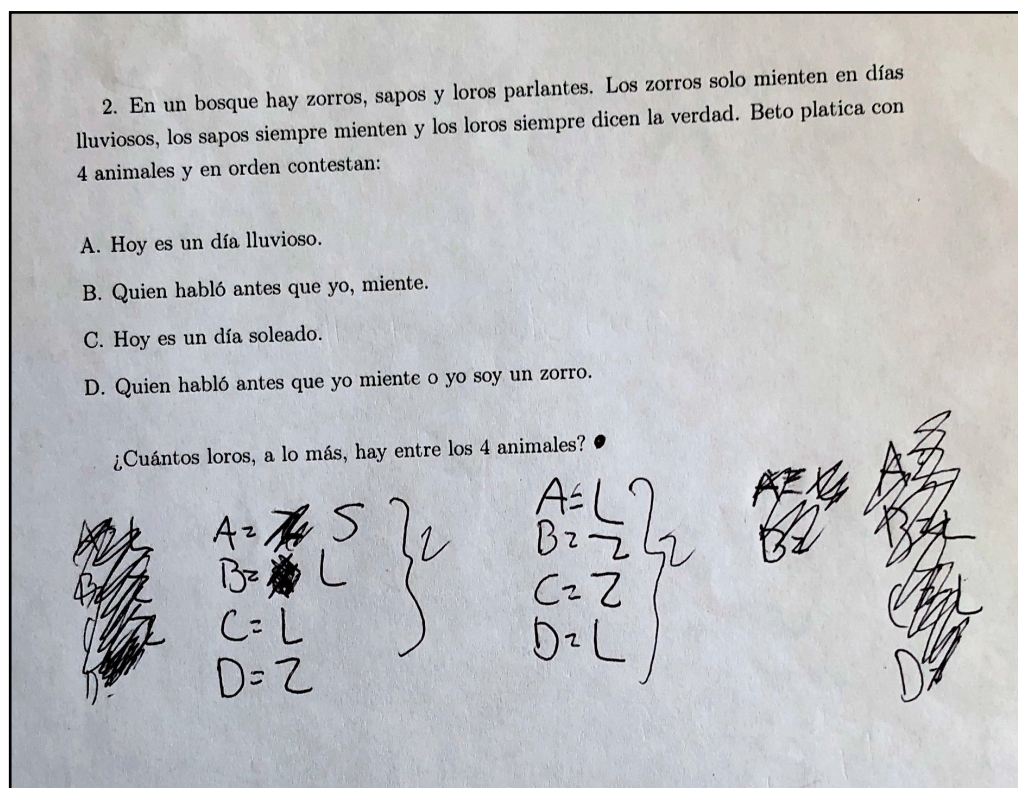


Figura 11. Hoja de problema 6 de E2.

Análisis de E3.

Problema 2	
Representaciones externas	Representaciones internas
E3 hace una representación visual de lo que representa el tablero de dardos, junto a un dardo que está fuera del tablero. Asigna símbolos a cada uno de los tres círculos que identifica, como se muestra en la figura 12. Hace uso de la fórmula de área de un círculo y posteriormente da su respuesta en porcentaje y fracción junto a una representación verbal muy breve de lo que representan estos dos últimos.	E3 comienza a encontrar el valor de cada una de las áreas de los círculos, lo cual está apoyado en unos símbolos que asigna a cada uno para denotar sus áreas respectivas. Además, para su comodidad representa el tablero total (área total) como el 100% y posteriormente encuentra el resto de los porcentajes. E3 utilizó únicamente la comunicación oral en la técnica de pensamiento en voz alta, explicando cada uno de los pasos que siguió en la hoja de trabajo. A diferencia de E1, E3 considera que es más eficiente dejar a π como una constante sin utilizar su número aproximado.

Tabla 17. Representaciones del problema 2 por E3.

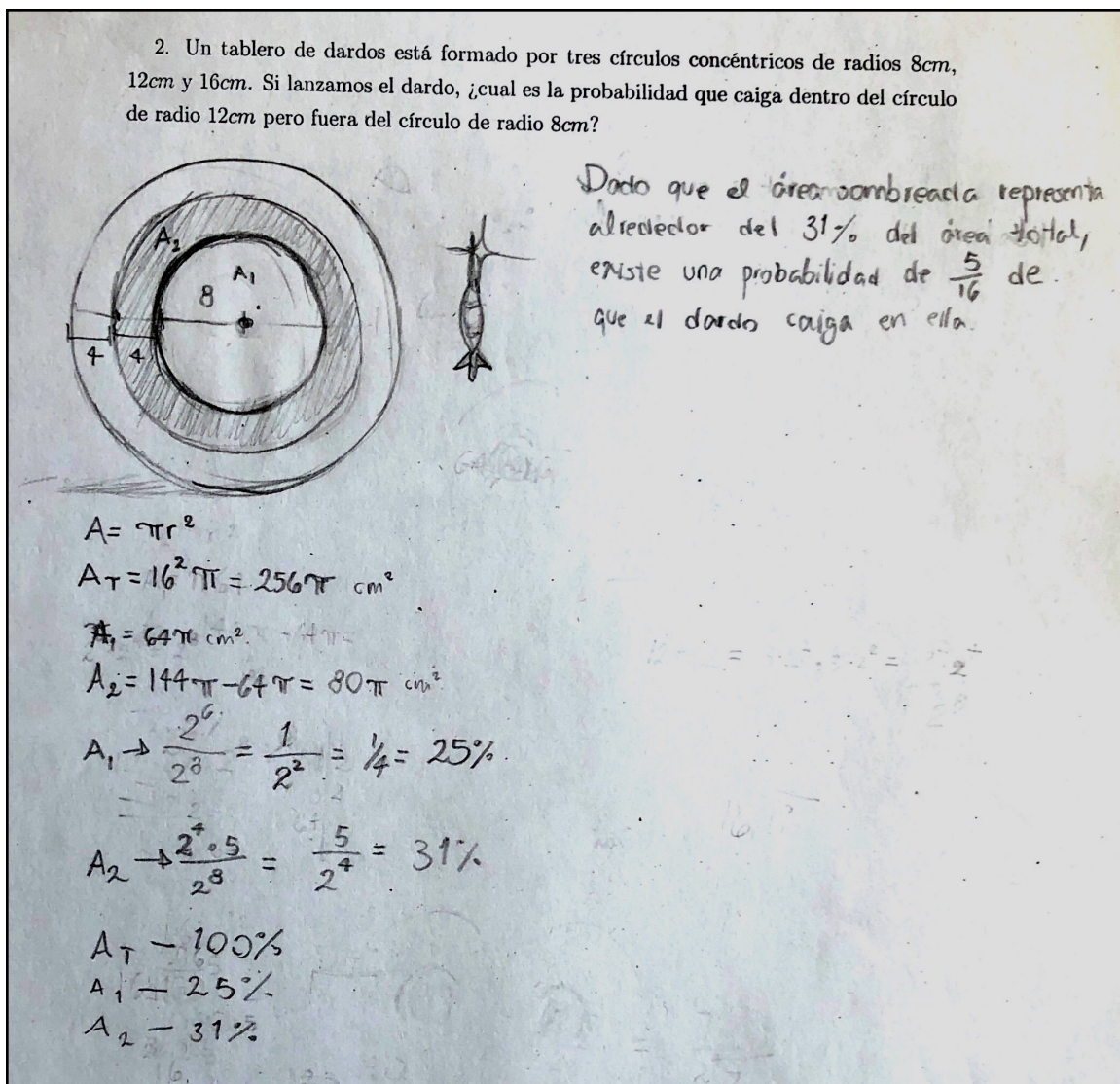


Figura 12. Hoja de problema 2 de E3.

Problema 3

Representaciones externas	Representaciones internas
E3 resuelve el problema a través de una representación verbal en la que va escribiendo paso a paso sus ideas hasta llegar a la solución, además hace uso de representaciones simbólicas para denotar el número total de personas que debe haber en el salón, describiendo que hace uso de una técnica matemática para defender su respuesta a través de una fórmula.	E3 muestra un dominio rápido de la solución a este problema, ya que en lo primero que piensa es en el principio de las casillas, una herramienta utilizada entre los estudiantes olímpicos comúnmente. Con lo que rápidamente encuentra el número total de personas que es 25 y a partir del número es como describe el por qué debe ser 25 la respuesta, y precisamente en su hoja de trabajo como se muestra en la figura 13, pareciera que comienza con el número y después justifica.

Tabla 18. Representaciones del problema 3 por E3.

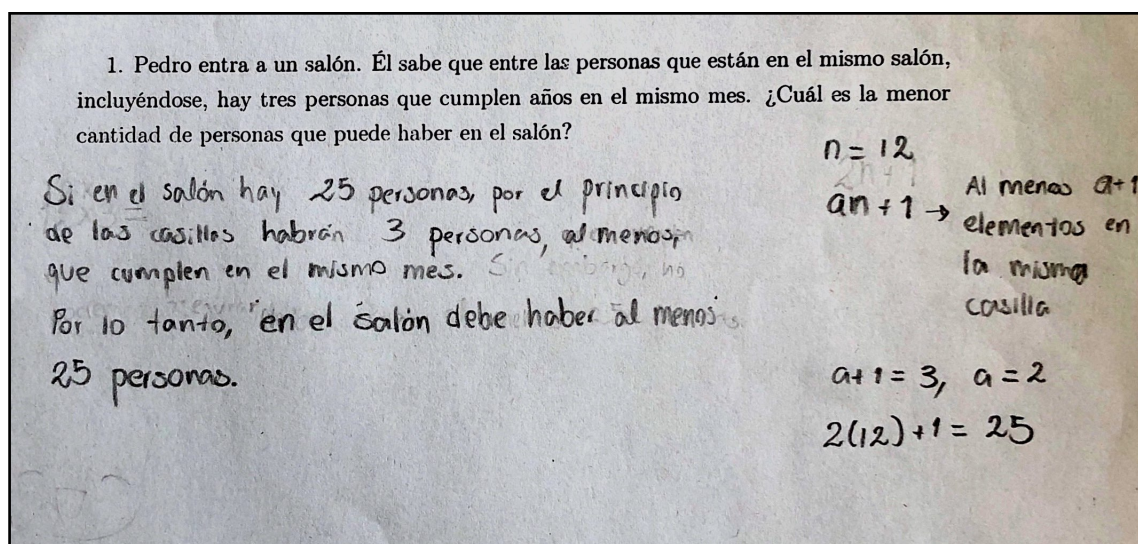


Figura 13. Hoja de problema 3 de E3.

Problema 4

Representaciones externas	Representaciones internas
Las representaciones externas que transmite es la representación de la división del tablero de 31×31 para después hacer el conteo de un tablero de 30×30 y después la columna y renglón faltante, esto lo transmite a través de representaciones visuales y simbólicas como se muestra en la figura 14. Explica su técnica a través de la representación verbal.	La técnica que usa E3 es separar el tablero y empezar el conteo por partes, en la técnica de pensamiento en voz alta asegura “<i>hay muchas formas distintas de resolver el problema, por ejemplo, alguien puede pensar en dividir el tablero en otra forma diferente a la que yo doy</i>”. La división del tablero primero la representa mentalmente y después la describe con palabras.

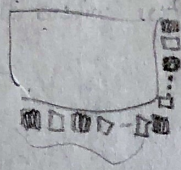
Tabla 19. Representaciones del problema 4 por E3.

2. Pablo construye tableros de ajedrez diferentes pues tienen 31 cuadraditos en cada lado, en vez de 8. Tienen una casilla negra en cada esquina. Además, en cada columna y en cada renglón, las casillas se alternan entre negro y rojo. ¿Cuántas casillas negras existen en esos tableros?

Tablero 31×31

$30 \times 30 \rightarrow 450$ rojos, 450 negros.

31^{va} columna, 15 rojos y 16 negros



en la fila que queda, habrá 15 rojos y 15 negros.

$$\begin{array}{r}
 450 \\
 16 \\
 15 \\
 \hline
 481
 \end{array}$$

En total existen 481 casillas negras en los tableros.

Podemos "separar" el tablero por partes: Un tablero de 30×30 , que tendrá la mitad de casillas pintadas de negro, y la columna de 31 casillas con la fila de 30 casillas.

Figura 14. Hoja de problema 4 de E3.

Problema 5

Representaciones externas	Representaciones internas
E3 hace una representación visual con un diagrama de lo que está pasando con las velas, asignando, por un lado, segundos y por otro lado, las velas encendidas, tal como se muestra en la figura 15 y posteriormente apoyándose de representaciones verbales que explican su diagrama o representación, consiguiendo llegar a la respuesta.	E3 piensa en un minuto dado que es lo que dura una vela, por otro lado considera las que se irán prendiendo, con lo cual no encuentra mayor dificultad de hacer el conteo de vela por vela hasta llegar a la respuesta. A través de la técnica de pensamiento en voz alta manifiesta <i>“cuando haces el conteo manualmente, en este caso, vela por vela, no hay que dar más argumentos o explicaciones, con el conteo es suficiente”</i> .

Tabla 20. Representaciones del problema 5 por E3.

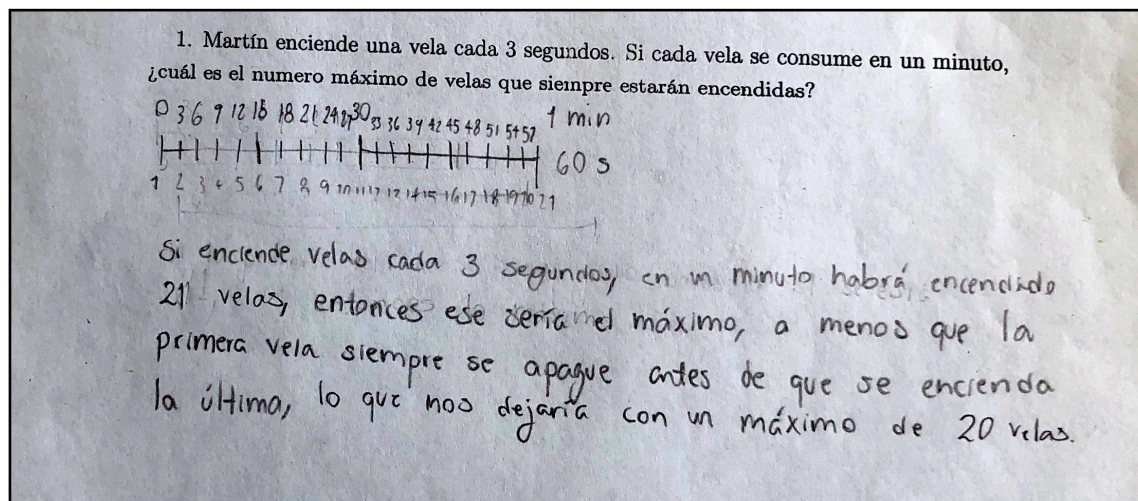


Figura 15. Hoja de problema 5 de E3.

Problema 6

Representaciones externas	Representaciones internas
E3 lee el problema y realiza una representación externa de lo que comprende de la redacción escribiendo una Z, S y L con algunos símbolos acompañando a dichas letras. E3 realiza representaciones efectivas para este tipo de problema, que es la representación de tabla (figura 16) considerando por un lado los animales que hay y completando la tabla con verdadero y falso. Acompaña la solución con representación verbal de los pasos que sigue, donde posteriormente llega a la respuesta.	La técnica utilizada por E3 es la esperada para este tipo de problemas, la diferencia notable en la utilización de esta técnica que es la que se muestra en la tabla de la figura 16 del lado izquierdo, es que E3 consideró los dos casos posibles justificando estos y especifica que para cualquiera de los dos casos puede haber 2 loros como máximo. Haciendo notar sus habilidades lógicas para tener una respuesta correcta.

Tabla 21. Representaciones del problema 6 por E3.

2. En un bosque hay zorros, sapos y loros parlantes. Los zorros solo mienten en días lluviosos, los sapos siempre mienten y los loros siempre dicen la verdad. Beto platica con 4 animales y en orden contestan:

Z S L
F ☁ ☉ ☉

A. Hoy es un día lluvioso.
B. Quien habló antes que yo, miente.
C. Hoy es un día soleado.
D. Quien habló antes que yo miente o yo soy un zorro.

D_1 D_2

¿Cuántos loros, a lo más, hay entre los 4 animales?

	caso 1	caso 2
A	V	F
B	F	V
C	F	V
D	V	F

Si suponemos que lo que dice A es verdadero tendremos que B y C mienten, y la primera parte de lo que D dice es verdadero. Tanto A como D son loros porque son los únicos que pueden decir la verdad cuando llueve.

Si suponemos que lo que dice A es falso B y C dicen la verdad.

Si en el caso 2 D_2 fuese cierto, quien dice D es un zorro, por lo que como máximo puede haber 2 loros.

R: Hoy 2 loros como máximo en

Figura 16. Hoja de problema 6 de E3.

Análisis de E4.

Problema 1	
Representaciones externas	Representaciones internas
E4 explica tanto en la hoja de trabajo como se muestra en la figura 17 como en el enfrentamiento de pensamiento en voz alta, una representación verbal de lo que está pasando por su mente para lograr resolver el problema. A pesar de que no muestra representaciones simbólicas ni visuales, las describe verbalmente.	El estudiante transmite la solución a través de una representación verbal. La técnica que emplea el estudiante es interesante, ya que considera el tema de paridad. Es una técnica que es fácil de pensar en ella, sin embargo, no es fácil de implementar en la solución de este problema y, además, interpretar la solución. E4 lo hace de forma adecuada y da una interpretación de lo que tiene en su representación interna.

Tabla 22. Representaciones del problema 1 por E4.

1. Tienes un libro de notas con 96 hojas. Cada hoja está numerada al frente y atrás con números consecutivos, se inicia con el número 1 y se termina con el número 192. ¿Puedes arrancar 25 hojas de tal manera que la suma de los números en todas las páginas arrancadas sume 2018?

Como sabemos, cada hoja tiene dos números, un par y un impar, al sumar estas nos dará como resultado un número impar, y como sabemos al sumar una cantidad par de números impares nos dará un número par, en cambio, si sumamos una cantidad impar de impares, esto nos dará como resultado un número impar, y en este caso nos pide tomar 25 impares, lo cual nos dará como resultado un número impar, pero nos pide el número 2018 y 2018 no es impar, por lo tanto no se puede llegar a dicho número

Figura 17. Hoja de problema 1 de E4.

Problema 2	
Representaciones externas	Representaciones internas
E4 muestra una representación verbal de la interpretación y solución del problema 2, como se muestra en la figura 18. Escribe “ <i>podemos decir que hay 16 columnas que tienen un cuadro negro arriba y abajo(...)</i> ”, con esto muestra que está transmitiendo sus representaciones internas en una representación verbal las cuales son explicadas en la columna de enseguida. Explica cada uno de los pasos a seguir hasta llegar a la solución a través de una representación verbal.	El estudiante tiene todas sus representaciones internas bien definidas y se nota al lograrlas transmitir verbalmente. E4 utiliza una técnica de conteo, como es común incluso para el problema 5, sin embargo, la técnica de conteo en este problema no es igual de sencilla. El estudiante no transmite una representación externa del tablero de 31x31, aunque conseguimos “ver” a través de la representación verbal, que internamente lo estaba visualizando.

Tabla 23. Representaciones del problema 2 por E4.

$$\begin{array}{r} 316 \\ \times 16 \\ \hline 196 \\ 16 \\ \hline 256 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 31 \\ \times 31 \\ \hline 31 \\ 93 \\ \hline \end{array}$$

(2.º) Pablo construye tableros de ajedrez diferentes pues tienen 31 cuadraditos en cada lado, en vez de 8. Tienen una casilla negra en cada esquina. Además, en cada columna y en cada renglón, las casillas se alternan entre negro y rojo. ¿Cuántas casillas negras existen en esos tableros?

Como sabemos que cada esquina tiene un cuadro de color negro $\Rightarrow$ podemos decir que hay 16 columnas que tienen un cuadro negro arriba y abajo, estas tienen 16 ~~pa~~ cuadros negros (incluyendo las orillas) $\Rightarrow$ ahí tenemos 16^2 cuadros negros y ahora habrá que sumarle las columnas que empiezan con un cuadro rojo y también terminan así, esas columnas son 15 y cada una tiene 15 cuadros negros $\Rightarrow$ el número de cuadros negros en el tablero es $15^2 + 16^2 = 225 + 256 = 481$

Figura 18. Hoja de problema 2 de E4.

Problema 3	
Representaciones externas	Representaciones internas
La solución del problema 3, se ve reflejada a través de representación verbal, de igual manera en la técnica de pensamiento en voz alta, el estudiante refleja habilidad para expresarse verbalmente, sin necesidad de pasar por otras representaciones visuales o simbólicas.	El estudiante, resuelve el problema a través de una representación verbal, tal como en la hoja de trabajo (figura 19), sin embargo, parece que no se termina de comprender el por qué se asegura que son 25 personas, con lo que se le pregunta “¿Cómo sabes que son 25 personas? ¿Qué argumentos tienes para defender tu postura?” Con ello el estudiante hace notar que internamente estaba pensando en la herramienta del principio de las casillas “El año tiene 12 meses, entonces si hay 12 personas cada una podría cumplir en un mes, habiendo 24, habría dos personas por mes, por lo tanto, debe haber 25 personas como mínimo”.

Tabla 24. Representaciones del problema 3 por E4.

1. Pedro entra a un salón. Él sabe que entre las personas que están en el mismo salón, incluyéndose, hay tres personas que cumplen años en el mismo mes. ¿Cuál es la menor cantidad de personas que puede haber en el salón?

Como sabemos, el año tiene 12 meses, así que para asegurar que
mínimo 2 personas cumplan el mismo mes solo es necesario
que haya tres personas $\Rightarrow$ para asegurar que haya tres que
cumplan el mismo mes debe haber 25 personas (mínimo)
↑
mismo mes

Figura 19. Hoja de problema 3 de E4.

Problema 5

Representaciones externas	Representaciones internas
E4 extrañamente no utiliza representaciones verbales para transmitir la solución, únicamente realiza representaciones del tipo pictórico para representar los segundos y el número de velas. Además realiza una división, donde considera que el número de velas encendidas al segundo 57 es 19. Al final asegura que hay 20 velas encendidas.	En cuanto a las representaciones internas, E4 representa las suyas a través de la técnica de pensamiento en voz alta en donde ya no realiza el diagrama pictórico y únicamente “platica” su solución, explicando “ <i>Primero consideraré las velas que habría encendidas en el segundo 57, porque sabría que al minuto (60 segundos) se habría apagado la primera vela. Eso me llevó a pensar a que habría 20 velas encendidas</i> ”.

Tabla 25. Representaciones del problema 5 por E4.

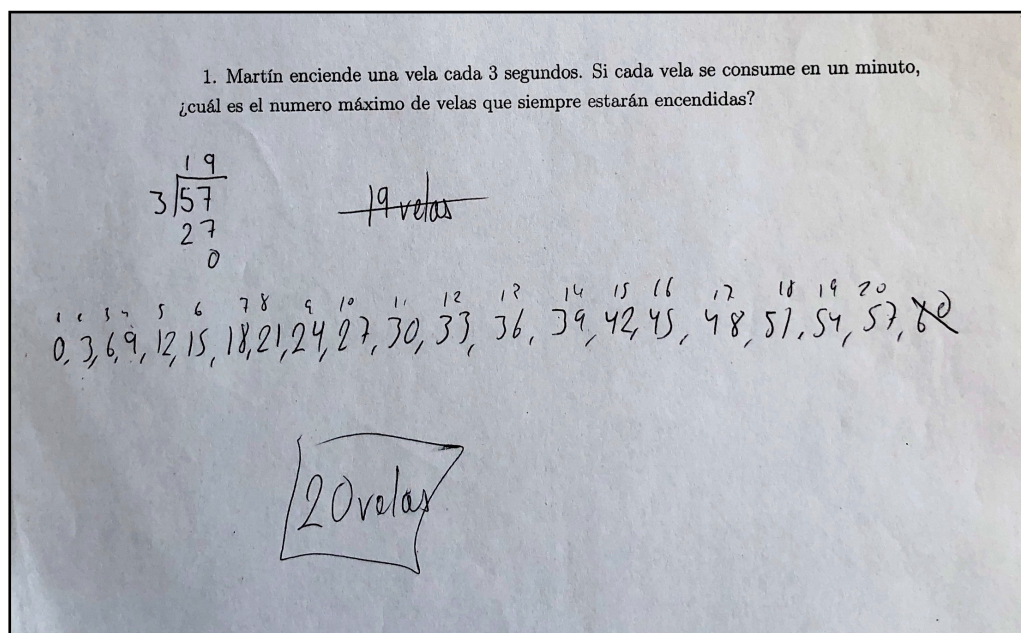


Figura 20. Hoja de problema 5 de E4.

Problema 6

Representaciones externas	Representaciones internas
El estudiante realiza una representación visual, como se muestra en la figura 21, en donde considera los casos necesarios para asegurar que son dos loros como máximo. Además explica el por qué no puede haber 3 loros.	E4 explica todo lo que presentó en la hoja de trabajo con la técnica de pensamiento en voz alta. El estudiante explica que no puede haber más de 2 loros, porque entonces una de las afirmaciones estaría fallando, todo su razonamiento se llevó a cabo a través de un lenguaje hablado.

Tabla 26. Representaciones del problema 6 por E4.

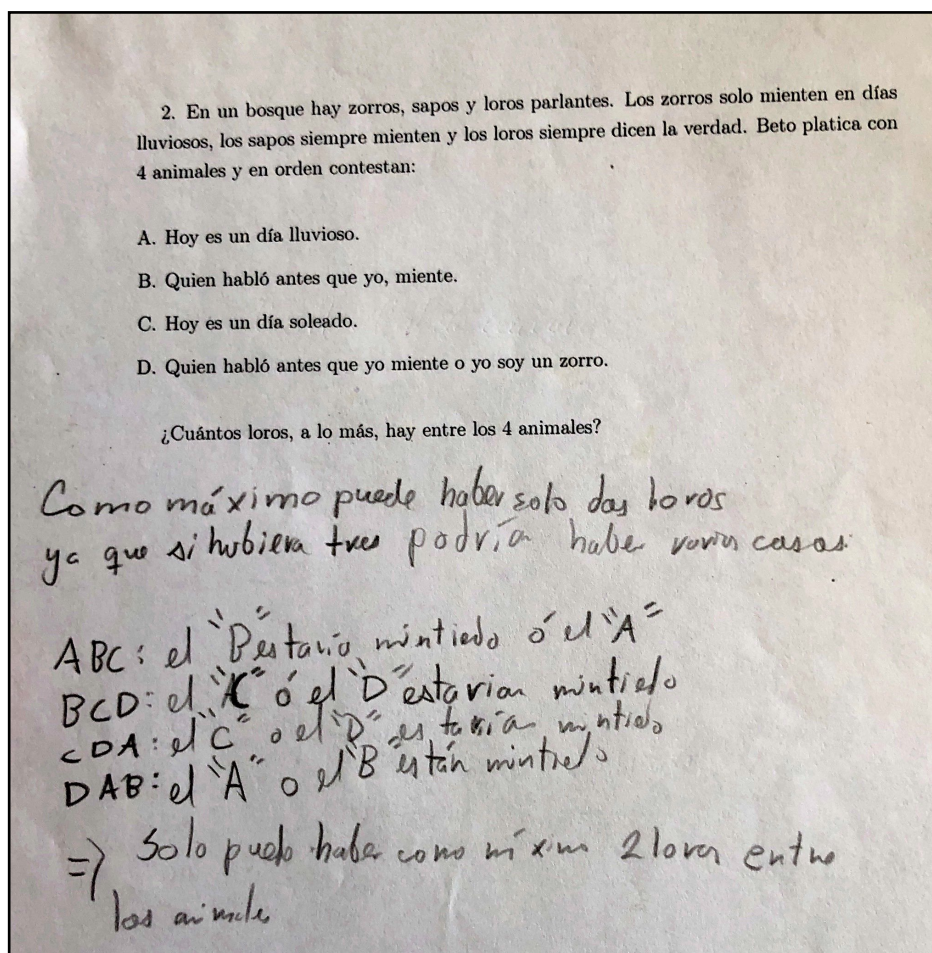


Figura 21. Hoja de problema 6 de E4.

Análisis de E5.

Problema 1	
Representaciones externas	Representaciones internas
El estudiante realiza una representación visual de lo que significa tener un libro con las páginas enumeradas y explica que en una hoja del “libro” hay un número impar y otro impar. Además, empieza a jugar con las expresiones que da de un número par y con la que da para un número impar.	E5 considera primero el número total de hojas, se imagina las enumeraciones que estas tendrán, posteriormente, analiza que hay pares e impares en una misma hoja, con ello, trata de representar a los números impares y pares con la expresión $2n+1$ y $2n$, respectivamente. Como se ve en la figura 22, E5 no consiguió llegar a la solución, sin embargo, al enfrentarse a la técnica de pensamiento en voz alta logró concluir su solución, ya que como se explicó en la solución de E4, pensar en paridad no significa que la solución será automática. E5 explicó “(...) si yo sumo 25 impares y 25 pares me dará un número impar y 2018 es par, así que no es posible”.

Tabla 27. Representaciones del problema 1 por E5.

1. Tienes un libro de notas con 96 hojas. Cada hoja está numerada al frente y atrás con números consecutivos, se inicia con el número 1 y se termina con el número 192. ¿Puedes arrancar 25 hojas de tal manera que la suma de los números en todas las páginas arrancadas sume 2018? No Porque 25 impares no dan número par.

96 total hojas; 192 páginas

1, 2, 3, ..., 192. 1 hoja = $n + [n+1] = 2n+1$

Par ~~Impar~~
Atrás Frente

$2018 = 25(2n+1) = 25(2 \cdot 1 + 1) = 25 \cdot 3 = 75$
vamos a poner $n=1$

25	25	
Pares	Impares	$25 \times (2n)$
		$25 \times (2n+1)$

Figura 22. Hoja de problema 1 de E5.

Problema 2	
Representaciones externas	Representaciones internas
El estudiante realiza representaciones del tipo pictórico para hacer una representación del tablero de 30x30 y 31x31, con únicamente las dos primeras columnas, aunque también considerando el primer renglón del segundo. Del mismo tipo de representación hace operaciones aritméticas, que de hecho, comete un error al sumar $256+225$.	E5 explica su solución mostrada en la figura 23, a través de la técnica de pensamiento en voz alta empleando únicamente el uso de la comunicación verbal, sin añadir nada a sus representaciones visuales, aunque modificando el resultado de la suma que calculó mal en la hoja de trabajo. Su estrategia fue pensar en el partes del tablero y no en el tablero completo, ya que asegura “es más sencillo calcular por columna o por renglón(...)”, para ello, el estudiante para asegurarse de que no cometerá errores, piensa primero en una de las columnas que tendrá un tablero de 30x30, para posteriormente pasar al de 31x31, llegando a una solución correcta.

Tabla 28. Representaciones del problema 2 por E5.

2. Pablo construye tableros de ajedrez diferentes pues tienen 31 cuadraditos en cada lado, en vez de 8. Tienen una casilla negra en cada esquina. Además, en cada columna y en cada renglón, las casillas se alternan entre negro y rojo. ¿Cuántas casillas negras existen en esos tableros? 475 casillas

$30 \cdot 0$ $31 \cdot 0$ 16 $31 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \dots$
 $\cdot 0$ $\cdot 0$ $\cdot 0$
 $0 \cdot$ $0 \cdot$ $\cdot 0$
 $\cdot 0$ $\cdot 0$ $\cdot 0$
 $0 \cdot$ $0 \cdot$ $\cdot 0$
 $\vdots$ $\vdots$ $\vdots$
 $0 \cdot$ $\cdot 0$ $\cdot 0$

$15 \div 2 = 7 \text{ R } 1$
 $15 + 1 = 16$

$16 \times 16 =$
 $15 \times 15 = 3^2 \times 5^2 = 9 \times 25$

256
 $+ 225$
 $\hline 475$

3
 16
 $\times 16$
 $\hline 96$
 $+ 16$
 $\hline 256 + 225$

Figura 23. Hoja de problema 2 de E5.

Problema 3

Representaciones externas	Representaciones internas
El estudiante presenta en la hoja de trabajo la resolución del problema de manera muy concreta, a través de representaciones de lenguaje natural y una expresión simbólica. Esta última representación que realiza el estudiante tiene un uso inadecuado del signo “igual”, sin embargo, se espera que durante el enfrentamiento con pensamiento en voz alta se ahonde en el uso de las representaciones. El estudiante a través de la técnica de pensamiento en voz alta se apoya con otro tipo de representaciones al ser cuestionado por su razonamiento rápido, realiza representaciones visuales a través de recuadros que representan los meses del año y colocando dentro de ellos las personas (representados como puntos) que cumplen años en cierto mes.	Las representaciones internas del estudiante se lograron identificar durante el enfrentamiento de la resolución del problema a través de la técnica de pensamiento en voz alta. El estudiante presenta la misma solución (corta y concreta), por lo que se le tiene que cuestionar con preguntas socráticas sobre la estrategia utilizada. Con ello, realiza una construcción en la que explica por qué la respuesta debe ser 25, justificando que lo realiza de esa manera porque es el peor de los casos, asegura que de no ser así, la cantidad de personas podría ser menor a 25. Es cuestionado directamente, sobre por qué no puede ser 3, proporcionando ejemplos y defendiendo su postura.

Tabla 29. Representaciones del problema 3 por E5.

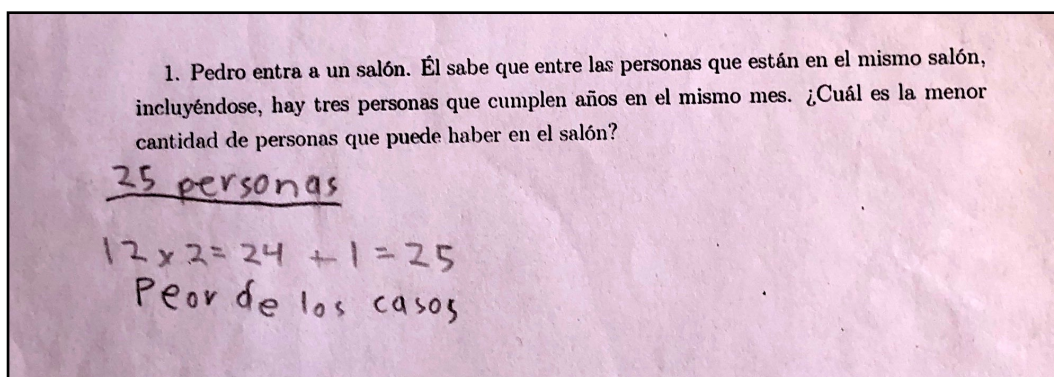


Figura 24. Hoja de problema 3 de E5.

Problema 5

Representaciones externas	Representaciones internas
Al igual que otras soluciones E5, muestra únicamente una representación visual de lo que sucede con los segundos y las velas encendidas, escribiendo como respuesta 20 velas. E5 comenta “Debido al número pequeño (refiriéndose al 60) pude hacer una lista con todos los números de 3 en 3”. El estudiante al enfrentarse a la técnica de pensamiento en voz alta, transmite la solución de forma verbal.	La técnica empleada en el estudiante no se apega a ninguna de las que describimos al principio, ya que es un conteo aritmético, sin tener la necesidad de pensar en una estrategia o construcción que conlleve a otro tipo de razonamiento.

Tabla 30. Representaciones del problema 5 por E5.

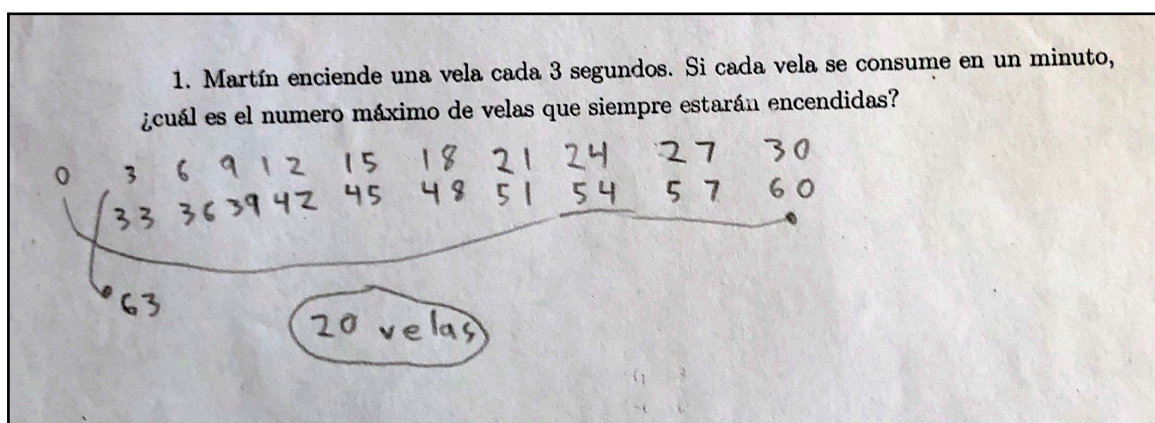


Figura 25. Hoja de problema 5 de E5.

Problema 6	
Representaciones externas	Representaciones internas
E5 contesta 2 loros, para explicarlo transmite en la hoja de trabajo (figura 26), una representación visual acompañada de palabras, en las que explica un caso, eso quiere decir que en la hoja de trabajo no muestra rastros de que haya pensado en algún otro, sin embargo, asegura que hay como máximo 2 loros. Por otro lado, cuando se enfrenta a la técnica de pensamiento en voz alta, el estudiante presenta lo mismo de su hoja de trabajo acompañado de comunicaciones verbales, por lo que se le pregunta “¿Qué pasa si A dice la verdad?”, lo que ocurre después se describirá en representaciones internas.	El estudiante E5 emplea una técnica usual que es realizar una representación visual que sirva para analizar los datos y diferentes casos, sin embargo, como se mencionó, el estudiante realiza únicamente uno de los casos y eso conllevó a cuestionarlo cuando se encontraba resolviendo el problema a través de la técnica de pensamiento en voz alta, con lo que el estudiante respondió “lo mismo” y explica por encima de su representación visual, lo que ocurriría, si A dice la verdad, llevándolo efectivamente a que hay dos loros. Eso indica que el estudiante estaba pensando en los dos casos, sin transmitirlo en la hoja de trabajo.

Tabla 31. Representaciones del problema 6 por E5.

2. En un bosque hay zorros, sapos y loros parlantes. Los zorros solo mienten en días lluviosos, los sapos siempre mienten y los loros siempre dicen la verdad. Beto platica con 4 animales y en orden contestan:

R A. Hoy es un día lluvioso.
 L B. Quien habló antes que yo, miente.
 L C. Hoy es un día soleado.
 Z D. Quien habló antes que yo miente o yo soy un zorro.

¿Cuántos loros, a lo más, hay entre los 4 animales? 2 loros

A. ~~X~~ Z

(A) X Z porque si llueve diría que no llueve y si no llueve dice que no llueve
 Es + (R) porque miente

(B) → (L) dice verdad

(C) → (L) No miente

(D) (Z) no puede mentir el anterior

Figura 26. Hoja de problema 6 de E5.

CONCLUSIONES

Uno de los propósitos que se tenía era crear un primer acercamiento a las representaciones de los estudiantes olímpicos, la cual es una comunidad poco estudiada por la educación matemática. En este sentido, se ha conseguido entrar a la mente de cada uno de los cinco estudiantes olímpicos a través de la implementación de la técnica del pensamiento en voz alta. Esta técnica es quizá poco explotada, debido a que es muy complicada llevar a cabo por estudiantes que no están familiarizados con comunicarse vía oral y mucho menos una explicación de algún problema matemático.

Debido a la comunidad que se considera en este estudio, no se tuvo dicha complicación, puesto que, estos estudiantes están familiarizados en sus entrenamientos a resolver problemas matemáticos explicando cada uno de los pasos que llevan a cabo para llegar a la solución, a través del lenguaje hablado o escrito. Cabe mencionar, que un par de estudiantes (E2 y E4) no mostraron habilidad para transmitir sus solución a través de la técnica de pensamiento en voz alta (aunque solo en algunos en problemas), por lo que, en esos problemas se utilizaron las preguntas socráticas para apoyar al estudiante y conseguir el objetivo. Es por ello, que en las investigaciones que han utilizado esta técnica, recientemente, recomiendan que los estudiantes se sometan a un entrenamiento de pensamiento en voz alta. Por otro lado, E1 y E3 mostraron fluidez en la técnica de pensamiento en voz alta, mientras que el E5 comenzó con dificultades, no obstante, terminó por dominar la técnica.

Los problemas planteados no tienen el nivel de una Competencia Nacional de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas, sin embargo, de acuerdo al objetivo planteado, no era necesario que se tuviera dicho nivel y mucho menos se buscaba que el estudiante se encontrara alarmado con conseguir resolver el problema, ocasionando dificultades en la solución escrita y a través de la técnica de pensamiento en voz alta, y consecuentemente no se alcanzaran los objetivos. Sin embargo, es posible considerar otros problemas para una réplica de este análisis que quizá ayude a profundizar en las representaciones internas del estudiante olímpico.

Este acercamiento permitió conocer algunas formas de pensar y de comprensión del este grupo de estudiantes olímpicos, así como las técnicas y estrategias para la resolución de estos problemas en particular. La elección correcta de problemas es esencial, ya que estos influyen significativamente en lo que se quiere analizar, como lo son las representaciones externas e internas. Por ejemplo, en este estudio, el problema 5, fue de los que menos proporcionaron información, ya que los estudiantes participantes resolvieron el problema a través de un conteo convencional, haciendo la configuración de lo que realmente pasaba con las velas (a través de dibujos o números) y no se atrevieron a encontrar o descubrir una estrategia o técnica, por lo que este problema podría ser modificado para futuras investigaciones. Mientras que en el problema 6, pareciera que solo hay una técnica de solución, sin embargo, los estudiantes consideraron diferentes casos aunque no soluciones diferentes.

Los estudiantes se notaron con experiencia al ver que dentro de sus soluciones utilizaron técnicas y herramientas matemáticas que no se encuentran dentro del currículo escolar, como por ejemplo, la suma de Gauss, principio de las casillas y en general, diseñar por sí mismos herramientas que permitan la interpretación del problema para posteriormente, resolverlo de una manera efectiva y eficaz. Estas técnicas y estrategias utilizadas por los estudiantes es de donde se obtuvieron importantes resultados, puesto que permitían acercarnos a las representaciones internas o mentales del estudiante olímpico.

Por otro lado, en cuanto a las representaciones externas, los estudiantes utilizaron representaciones del tipo verbal, simbólico y pictórico, las cuales todas significaban algo y tenían influencia en la resolución del problema. En particular, las representaciones del tipo verbal fueron abundantes en los estudiantes E1, E3 y E4. Mientras que las representaciones simbólicas y visuales dominaron en E2 y E5. Aún así, la comunicación oral se dio en todos los estudiantes al emplear la técnica de pensamiento en voz alta, aunque con sus dificultades, ya mencionadas.

La implementación de las preguntas socráticas fue de gran ayuda para los estudiantes que tuvieron dificultades al emplear la técnica de pensamiento en voz alta y además que proporcionaron información necesaria para la investigación. Dichas preguntas permitieron un acercamiento profundo en la interpretación que el estudiante olímpico tenía del problema en cuestión, así como de las representaciones internas y externas que tenía del mismo, por lo que la intervención del investigador, juega un papel importante para ahondar en este estudio de caso.

La participación de los entrenadores de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas en Puebla, así como la participación de otros dos investigadores permitieron darle validez y fiabilidad al estudio planteado y a los resultados obtenidos, desde el planteamiento de los problemas, revisión de las hojas de problemas y análisis de los videos de la técnica de pensamiento en voz alta.

En este sentido, la investigación hecha en esta tesis deja cuestiones abiertas para futuras investigaciones:

¿En qué medida los estudiantes olímpicos complementan las representaciones internas con las representaciones externas?

¿Cuál es la influencia de las representaciones internas y externas al resolver problemas en los estudiantes olímpicos? ¿Cómo puede medirse la influencia de dichas representaciones elaboradas?

¿Cuáles son las diferencias entre las representaciones internas y externas empleadas en la resolución de problemas (no necesariamente problemas de competencias matemáticas) por estudiantes olímpicos y por estudiantes que no lo son?

REFERENCIAS

- Brown, T. (1997). *Mathematics Education and Language. Interpreting Hermeneutics and Post-Structuralism*. Dordrecht: Kluwer.
- Camargo, L. y Useche, J. (2015). Las preguntas como herramientas intelectuales para el desarrollo de un pensamiento crítico. *Revista electrónica de humanidades, educación y comunicación social*, 20(10), 145-156.
- Cuoco, A. A. (Ed.). (2001). *The roles of representation in school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- D'Amore, B. (2006). *Didáctica de la matemática*. Bogotá, Colombia: Editorial Magisterio.
- DeBellis, V. A., y Goldin, G. A. (2006). Affect and meta-affect in mathematical problem solving: a representational perspective. *Educational Studies in Mathematics*, 63, 131-147.
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine*. Berna: Peter Lang S.A.
- Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitiva del pensamiento. En Hitt, F. (Ed.), *Investigaciones en matemática educativa II*, (pp. 173-201). México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali, Colombia: Universidad del Valle.
- Eisenhardt, K. M. (1989). Building theories from case study research. *Academy of Management Review*, 14(4), 532-550.
- Ericsson A. y Simon H. (1984). *Protocol Analysis: Verbal Reports as Data*. Cambridge, MA: MIT Press.
- Font, V. (2000). Algunos puntos de vista sobre las representaciones en didáctica de las matemáticas. *Philosophy of Mathematics Education Journal*, 14, 1-35.

- Font, V., Godino, J. D. y D'Amore, B. (2007). An onto-semiotic approach to representations in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, 27(2), 2 -7.
- Goldin, G. y Shteingold, N. (2001). Systems of representations and the development of mathematical concepts. En Cuoco, A. (Ed.), *The roles of representation in school mathematics*, (pp. 1-23). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Kaput, J. (1992). Technology and Mathematics Education. En Grouws, D. (Ed.), *Handbook on research in mathematics teaching and learning*, (pp. 515–556). New York, NY: Macmillan.
- Koro-Ljungberg, M., Douglas, E., Therriault, D., Malcolm, Z. y McNeill, N.(2012). Reconceptualizing and decentering think-aloud methodology in qualitative research. *Qualitative research*, 13(6), 735-753.
- Lesh, R., Post, T., y Behr, M., (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. En Janvier, C. (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*, (pp. 33-40). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Martínez, P. C. (2006). El método de estudio de caso. Estrategia metodológica de la investigación científica. *Pensamiento y gestión*, 20, 165-193.
- Montague M. y Applegate, B. (1993). Middle school students' mathematical problema solving: An analysis of think-aloud protocols. *Learning disability quarterly*, 16(1), 19-32.
- Núñez, M. (Ed.). (2018). *Calendario Matemático*. México: Sociedad Matemática Mexicana.
- Paul, R. (1993). *Critical thinking*. USA: The Foundation for Critical Thinking.
- Paul, R. (1996). *How to teach Socratic questioning*. USA: The Foundation for Critical Thinking.

- Paul, R. y Elder, L. (2006). *The thinker's guide to the art of socratic questioning*. Dillon Beach, CA: The Foundation for Critical Thinking.
- Romero, I. y Rico, L. (1999). Representación y comprensión del concepto de número real. Una experiencia didáctica en secundaria. *EMA*, 4(2), 117-151.
- Rosenzweig C., Krawec J. y Montague M. (2011). Metacognitive strategy use of eighth-Grade students with and without learning disabilities during mathematical problem solving: A think-aloud analysis. *Journal of learning disabilities*, 44(6), 508-520.
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. New York, NY: Academic Press.
- Solaz-Portolés, J. J. y López, V. (2007). Representations in problem solving in science: directions for practice. *Asia-Pacific forum on science learning and teaching*, 8(2), artículo 4.