BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

LA TRANSICIÓN DEL LENGUAJE ARITMÉTICO AL ALGEBRAICO EN SECUNDARIA. UNA PROPUESTA DIDÁCTICA

TESIS
PARA OBTENER EL TÍTULO DE
MAESTRA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

PRESENTA
LIC. MÓNICA PÉREZ GARCÍA

DIRECTOR DE TESIS
DR. JOSÉ DIONICIO ZACARÍAS FLORES

CO-DIRECTOR DE TESIS
DRA. HONORINA RUÍZ ESTRADA

PUEBLA, PUE. JUNIO 2020

BUAP

DRA. LIDIA AURORA HERNÁNDEZ REBOLLAR
SECRETARIA DE INVESTIGACIÓN Y
ESTUDIOS DE POSTGRADO, FCFM-BUAP
P R E S E N T E:

Por este medio le informo que la C:

MÓNICA PÉREZ GARCÍA

Estudiante de la Maestría en Educación Matemática, ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 06 de diciembre de 2019, con la tesis titulada:

"LA TRANSICIÓN DEL LENGUAJE ARITMÉTICO AL ALGEBRAICO EN SECUNDARIA, UNA PROPUESTA DIDÁCTICA"

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

A T E N T A M E N T E.
H. Puebla de Z. a 05 de junio de 2020

DR. JOSIP SLISKO IGNJATOV
COORDINADOR DE LA MAESTRÍA
EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA.

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA · FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS - SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y ESTUDIOS DE POSGRADO · 1578

Ccp.Archivo.
DR JAJL / I'agm*

Facultad
de Ciencias
Físico Matemáticas

Av. San Claudio y 18 sur, edif. FM1
Ciudad Universitaria, Col. San
Manuel, Puebla, Pue. C.P. 72570
01 (222) 229 55 00 Ext. 7550 y 7552

AGRADECIMIENTOS

Agradezco al Consejo de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por su apoyo y patrocinio para la realización de este proyecto de tesis, que permitirá a la comunidad educativa tener una fuente de información más con respcecto a la transición del lenguaje aritmético al algebriaco en alumnos de secunduria.

A la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP), por aceptarme como parte de la quinta generación de alumnos de la Maestría en Educación Matemática de la Facultad de Ciencias Fisico Matemáticas, de igual manera a la plantilla docente que me formó durante estos dos años, destacando el apoyo incondicional administrativo de Abigail, Gracias.

Expreso mi profundo agradecimiento a los profesores que me guiaron en la realización de este trabajo de tesis, al Dr. José Dionicio Zacarías Flores por ser más que un tutor, por su amistad y consejos brindados de manera personal para llevar a conclusión este trabajo. Así como sus aportes y puntos de vista, su apoyo incondicional para salir a presentar los avances del mismo, y brindarme una perspectiva diferente de vida, siempre ayudándome a mejorar como estudiante, investigadora y persona. A la Dra. Honorina Ruíz Estrada por sus múltiples sugerencias y consideraciones durante el desarrollo de mi estancia estudiantil, y la minuciosa revisión de mi presentación para examen de grado.

Al resto de los miembros del jurado de corrección de tesis y examen de grado Dra. Estela de Lourdes Juárez Ruíz, Dra. Ma. Araceli Juárez Ramírez, Mtra. Mónica Monroy Kuhn y Mtra. Guillermina Sánchez López les agradezco profundamente su tiempo y dedicación para corregir el manuscrito final y fungir como miembros del jurado evaluador.

CONTENIDO

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE FIGURAS

RESUMEN

El objetivo principal del trabajo fue diseñar una propuesta didáctica que favorezca la transición del lenguaje aritmético al algebraico en alumnos de secundaria, haciendo uso de vocablos equivalentes a las operaciones básicas de la aritmética: suma, resta, multiplicación y división.

Partimos del conocimiento de las dificultades que se presentan en el ámbito internacional con respecto a esta temática, basado en una revisión al estado del arte, y corroborando a través del diseño y aplicación de instrumentos de evaluación que nuestra población estudiantil también las presenta.

Se detalla en este trabajo la elaboración, aplicación y análisis de los resultados de una propuesta didáctica, bajo el sustento teórico de la Teoría de Situaciones Didácticas Matemáticas (TSDM) de Brousseau (2007), estructurada en tres sesiones de trabajo con planteamientos de tal modo que los alumnos pasen por situaciones de acción, formulación y validación al resolver enunciados matemáticos con datos reales que sugieren el planteamiento y resolución de ecuaciones de primer grado.

Dicha propuesta didáctica se aplicó a un grupo de tercer grado de secundaria de una zona urbana de la Ciudad de Xalapa, con dieciocho alumnos cuyas edades oscilaban entre los 14 y 15 años, y cuyo currículo escolar denotaba que ya contaban con conocimientos de ecuaciones de primer grado.

Como proceso metodológico se utilizó la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995) la cual nos orientó a través de cuatro fases para cumplir con nuestro objetivo principal, además la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval (1998) nos permitió analizar las producciones generadas por los alumnos en cada una de las sesiones, permitiéndonos de esta manera generar un contraste entre las respuestas esperadas y las alcanzadas por ellos.

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo surge a raíz de la labor cotidiana que se lleva a cabo en las aulas de una escuela de nivel secundaria y de bachillerato, al notar que los alumnos en la experiencia personal sufrían un conflicto de ideas y concepciones con respecto a su pensamiento aritmético, el cual había estado influenciado durante seis años previos a su ingreso a nivel secundaria.

Este encuentro se debía a que empezaban a trabajar de lleno con ecuaciones de primer grado, pero ya generadas, ya estructuradas sin saber que significaba esa x, y o z, ni saber a que se refería la expresión "$piensa\ un\ número$". De acuerdo con el trabajo de Gavilán (2011) se sabe que los conceptos vinculados con el álgebra y su operación muestran con frecuencia, dificultades y conflictos en los estudiantes. Debido a que el paso de la aritmética al álgebra es un cambio cualitativo en su forma de pensar.

Es muy importante recalcar la labor del docente, específicamente en la didáctica, que de acuerdo con Brousseau (2007) un conocimiento, como un obstáculo, es siempre el fruto de una interacción del alumno con su medio y, más precisamente, con una situación problemática que vuelve a un conocimiento interesante.

Por lo que en lo concerniente al profesor este tendrá que planear una estrategia que permita al alumno hacer dicha transición y que además de ello provoque en el alumno la participación y motivación en su proceso de aprendizaje de este nuevo tema el *Álgebra*, ya que lo acompañará por el resto de su estadía por este grado académico y muy posiblemente hasta que termine su formación profesional.

Es por ello que se considera como sustento teórico la Teoría de Situaciones Didácticas Matemáticas de Brousseau (2007), para presentar una propuesta didáctica que permita establecer un ambiente propicio para que el alumno lleve a cabo la transición del lenguaje coloquial al aritmético, donde el alumno pueda hacer una conexión entre las matemáticas y los intereses que a este le pudieran llamar la atención, por el uso cotidiano o problemáticas que tengan un contexto con intereses propios del alumno.

Existen numerosas investigaciones con respecto a las dificultades que presentan los alumnos con respecto a la transición del pensamiento aritmético al algebraico, y en todas estas salen a relucir aquellas que se refieren específicamente al lenguaje algebraico. Según Alfonso (2009) exceptuando la química, la física o la música, en ninguna otra ciencia como en el álgebra ha influido tanto en su desarrollo la adopción de una simbología adecuada, la cual a lo largo de los siglos se ha ido configurando en un conjunto específico de símbolos y números que permiten expresar y homogeneizar toda la teoría existente, a este conjunto lo concibe como “lenguaje algebraico”.

Kieran (2004) menciona que las actividades generacionales del álgebra escolar implican la formación de expresiones y ecuaciones que son precisamente los objetos del álgebra, esto incluye ecuaciones de una incógnita y que represente situaciones problemáticas, por lo que si nos referimos a esta perspectiva el alumno no comprende ciertos vocablos o expresiones, por lo que le hace aún más difícil comprender que es lo que realmente le están pidiendo en el problema.

Por su parte, Castro (2012) nos menciona que la traducción entre lenguajes puede representar una dificultad para el alumno debido a las características propias del lenguaje, dado que deben dar significado a las letras, vocablos y, al uso desigual que se da entre la aritmética y el álgebra, como por ejemplo que diferentes letras, representan ahora valores y, que además de ello, sean diferentes.

Lo anterior, lo pudimos verificar con la aplicación de una prueba (Véase Anexo A) en nuestra población estudiantil, en la cual podían realizar algorítmicamente la resolución de ecuaciones de primer grado, incluso identificar grado, coeficientes y signos de operación, sin embargo, cuando se les pedía que hicieran la traducción entre un lenguaje y otro, la mayoría no pudo hacerlo, alegando que no entendían vocablos como *aumentar, diferencia, producto, cociente,* etc. sin concebir que hacían referencias a las operaciones aritméticas que por años habían estado trabajando, como lo son la *suma, resta, multiplicación* y *división*.

Una de las intenciones de este trabajo es aprender a diseñar actividades con fundamentos teóricos que permitan adquirir un nuevo concepto matemático en los alumnos, que realmente justifique el uso de ciertas preguntas, o el uso de fundamentos reales en los problemas, procurando no caer en los clásicos planteamientos donde existen datos extrapolados que ayudan simplemente a crear una expresión *"normal, bonita y exacta"* pero que alejan por completo al alumno a darle un verdadero sentido al uso del álgebra, en este caso particular, de ecuaciones de primer grado.

Para ello se diseñaron tres sesiones de trabajo (Véase Anexo C), en las cuales el alumno debe transitar entre las diferentes situaciones planteadas de acuerdo con nuestro sustento teórico y, de esta manera disminuir las dificultades que presentan los alumnos con respecto a la traducción de enunciados coloquiales a expresiones algebraicas, y viceversa, haciendo uso de vocablos equivalentes a las operaciones básicas de la aritmética antes mencionadas.

Sabemos que la aportación que hace nuestra propuesta es diferente de cómo se aborda en los libros de texto de secundaría, ya que en ellos se somete al alumno a resolver ecuaciones sin saber de dónde o cómo se estructuraron, por lo que el planteamiento de nuestras actividades lleva al alumno a la comprensión, la actividad constante y sobre todo a la construcción de su propio conocimiento con respecto al lenguaje algebraico.

La Ingeniera Didáctica de Artigué (1995) nos ha permitido llevar un proceso de enseñanza del objeto matemático que pretendemos fijar en los alumnos, brindándonos a través de cuatro fases una pauta para desarrollar el presente trabajo, desde el análisis *a priori* hasta un análisis *a posteriori,* cuyo contraste nos ha permitido validar los resultados de las sesiones diseñadas.

En el primer y segundo capítulo se desarrollan los aspectos teóricos del presente trabajo donde se presentan: estado del arte, el planteamiento del problema, los objetivos y justificación del trabajo, así como el marco teórico en el cual hemos basado el diseño de la propuesta didáctica, resaltando aquellos aspectos que consideramos más pertinentes de la TSDM que dieran vida a los problemas planteados, también se expone la metodología de la Ingeniería Didáctica la cual nos dio pauta al realizar este trabajo, así mismo lo referente a la TRSS de Duval (1998), que nos permitió hacer el análisis de las producciones hechas por los alumnos en el análisis *a posteriori*.

En el tercer capítulo se expone la propuesta didáctica con la cual pretendemos disminuir las dificultades que presentan los alumnos con respecto a la transición del lenguaje coloquial al algebraico, específicamente con respecto al lenguaje y uso de vocablos referentes a las operaciones básicas de sumatoria y multiplicación, y sus respectivas operaciones inversas. Así mismo se define en este capítulo el análisis *a priori* de las sesiones de trabajo.

En el cuarto capítulo se concentra la mayor parte de este trabajo, ya que es en este capítulo donde se lleva a cabo el desarrollo de las actividades de la propuesta didáctica, así como la fase de experimentación y sus respectivos resultados. Igualmente se incluye dentro de este capítulo el análisis a posteriori de la propuesta didáctica, haciendo de esta manera la validación de ella sin tener que recurrir a la validación por medio de triangulación.

Finalmente, el último apartado, comprende el cierre de la investigación de este trabajo con las conclusiones obtenidas con relación a los objetivos que se plantearon con respecto a los resultados obtenidos en cada una de las sesiones de trabajo, dando paso a algunas recomendaciones para futuras líneas de investigación.

CAPÍTULO 1

ANTECEDENTES

En este capítulo se presenta el planteamiento del problema y los objetivos que se persiguen, además de las razones principales que motivaron el tema de nuestro trabajo. Se aborda desde los orígenes del álgebra hasta la fecha, así como los estudios de investigación de talla internacional que nos muestran las diferentes dificultades que presentan los alumnos en esta área de estudio.

1.1 IMPORTANCIA DEL ÁLGEBRA

El inicio del álgebra se remonta a la época de Al-Khowarizmi, el cual se sabe vivió durante el reinado del califa Al-Mamun (813-833), aun cuando se sabe poco de su vida, sus contribuciones científicas están contenidas en cinco tratados dedicados a la aritmética, álgebra, astronomía, geografía y calendario. Es a este personaje a quien se le atribuye el término de álgebra, el cual proviene del vocablo *al-jabr* que aparece en el título de su obra más importante *Hisab al-jabr wa al-muqabala*, dedicada a la resolución algebraica de problemas de la vida cotidiana.

Hasta la mitad del siglo XIX, con el desarrollo del álgebra abstracta -momento en que esta disciplina llega a ser un objeto matemático en sí mismo- el álgebra se ocupó fundamentalmente de la resolución de ecuaciones, de ahí que Kieran (2004) indique que desde la época de Al-Khowarizmi, el álgebra se ha considerado como la ciencia de la resolución de ecuaciones.

Sin embargo, esta perspectiva no ha sido la única a lo largo de la historia del álgebra, ya que esta ha sido enriquecida por diferentes culturas, tal y como lo menciona Gavilán (2011) quien señala a Nesselman (1811-1881) diferenciando tres etapas del desarrollo del álgebra.

La primera etapa la nombró primitiva o retórica, en la que todo se escribía en lenguaje ordinario y se extendía desde los babilonios (1700 a.C.) hasta Diofanto (250 d.C.) incluidos los griegos a quienes se les atribuye la resolución de problemas a través de demostraciones geométricas. Fue Diofanto quien utilizó por primera vez un símbolo literal para representar una incógnita en una ecuación.

La segunda etapa la llamó intermedia o sincopada, en esta se comenzó a introducir algunas abreviaturas como las que desarrolló Diofanto y se prolongó hasta comienzos del siglo XVI, y por último la tercera etapa simbólica o actual, donde aparece todo el simbolismo que se trabaja con todo su rigor y lenguaje formal, es Vieta en el siglo XVI quien marca el inicio de esta etapa junto con Descartes, quienes empiezan a usar letras no sólo para representar incógnitas, sino también números.

Como se ha visto el álgebra ha sufrido a lo largo de la historia una serie de optimizaciones que la han definido como una de las ramas de la Matemática más importante, ya que se ha convertido en un lenguaje universal, permitiendo su lectura e interpretación en diferentes textos matemáticos alrededor de mundo, lo cual contribuye al intercambio de conocimiento entre diferentes culturas.

Dentro de las Matemáticas es importante la utilización de un método simbólico o lenguaje satisfactorio que permita expresar de manera clara y concisa los razonamientos que emanan de esta disciplina, así mismo se debe poder operar con él aplicando leyes determinadas, cuyo proceso de resolución de problemas aporte simplicidad y claridad en su manejo, dando paso a una solución concreta, y es el uso del álgebra quien lo ha permitido a lo largo del tiempo y de sus refinaciones.

La posibilidad de representar con una sola letra un conjunto de valores y el hecho de poder manejarlos de forma sencilla es lo que hace que el álgebra sea de gran utilidad, los alumnos por lo general no llegan a comprender y aprovechar la ventaja que supone la utilización de símbolos porque no llegan a ver su relación con lo que representan.

Además de ello es importante recalcar el amplio campo de aplicaciones que tiene el álgebra, según Alfonso (2009) por ejemplo: a) Álgebra elemental, ésta tiene como aplicaciones el uso de fórmulas siendo uno de los métodos más empleados en problemas con cualquier tipo de variables. Estas fórmulas se emplean constantemente en todas las áreas de la ciencia y matemáticas aplicadas, como ingeniería mecánica y eléctrica, construcciones de aviones etc., y su interpretación y manipulación son esenciales. b) Álgebra lineal, cuyo desempeño contempla el estudio de espacios vectoriales, el análisis de los determinantes y matrices como herramienta importante para el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales. c) Programación lineal, la cual constituye uno de los desarrollos más modernos del álgebra, con el cual se pretende optimizar cierto tipo de funciones sujetas a condiciones determinadas, aplicándose fundamentalmente al campo de la economía. d) Aplicaciones a otras ramas, el álgebra no sólo está presente en las Matemáticas, sino en otras áreas como la mecánica, la física, la informática, la estadística, análisis funcional, ecuaciones diferenciales, etc.

1.2 PROBLEMÁTICA EXISTENTE EN EL ÁLGEBRA ESCOLAR SECUNDARIA

Godino y Font (2003) mencionan que en los Principios y Estándares para las Matemáticas Escolares del National Council of Teachers Of Mathematics (NCTM, 2000) se propone al Álgebra como uno de los cinco bloques de contenido, junto con Números y Operaciones, Geometría, Medida, Análisis de datos y Probabilidad, con la particularidad de que este bloque se debe desarrollar, no solo en los niveles de enseñanza secundaria, sino incluso desde Preescolar.

En la enseñanza escolar de la aritmética, los alumnos resuelven sin complicaciones problemas de suma, sustracción, multiplicación y división a través de un amplio conjunto de estrategias, sin embargo al iniciar el aprendizaje del álgebra suelen presentar dificultades en las operaciones algebraicas, ya que ahora los problemas que se les presentan se resuelven utilizando algoritmos que van más allá de los que ellos conocen, surgen frases como "si está sumando ahora pasa restando" o "si está dividiendo pasa multiplicando", que aun cuando son literariamente informales e implican propiedades de conmutatividad, para el alumno dichas frases no tienen sentido.

La transición de la aritmética al álgebra es un paso importante para llegar a ideas más complejas y abstractas dentro de las Matemáticas escolares. Podemos observar que es muy común que los estudiantes al aprender álgebra empleen sus conocimientos aritméticos, resolviendo así problemas sencillos.

Sin embargo, cuando se les presenta un problema que necesita un razonamiento extra, el alumno empieza a presentar dificultades y conflictos, que más adelante se convertirán en obstáculos, es entonces cuando el rechazo hacia las Matemáticas se intensifica, ya que esta transición es un cambio cualitativo en la forma de pensar del alumno, incluso muchos alumnos manifiestan sentimientos de tensión y miedo que pueden estar asociados al desfase existente (Gavilán, 2011). Siguiendo a García (2010) se requiere un especial cuidado en el nexo entre ambas materias, aritmética y álgebra, de tal forma que el alumno perciba que el simbolismo empleado en el álgebra es sólo una manera de generalizar ciertas propiedades aritméticas.

Es importante destacar que la carga curricular que conlleva el álgebra escolar, tal y como menciona Kieran (2004) si se tuviera que replantear lo que es fundamental para el núcleo del álgebra y presentar ciertos elementos antes, dentro del programa de matemáticas de la escuela primaria, tal vez el álgebra podría ser accesible a una mayoría más amplia de estudiantes en el siguiente nivel (secundaria).

En un documento publicado por el Consejo Nacional de Maestros de Matemáticas (1998) se describen cuatro temas organizativos para el álgebra escolar: Funciones y relaciones, Modelos, Estructura, Lenguaje y representación. Pero no ha sido la única clasificación, Kieran (2004) clasificó el álgebra escolar según las actividades que suelen realizar los estudiantes: Actividades generacionales, Actividades de transformación y Actividades de meta-nivel globales.

El planteamiento y resolución de ecuaciones se convierte en la parte central del álgebra escolar (al igual que ocurrió durante tantos siglos de historia), tal y como nos los enmarca la bibliografía en el mundo de la investigación de la Didáctica Matemática, la enseñanza del lenguaje algebraico en la ESO (Educación Secundaria Obligatoria).

En la resolución de ecuaciones se enfrentan en primer lugar con un nuevo significado del signo igual, que coexiste con el significado puramente aritmético; en segundo, con la relación entre una operación y su inversa a la hora de transponer términos; y en tercero, con los obstáculos provenientes del manejo del signo menos y sus diferentes significados: como indicativo del signo de una cantidad o como operación indicada, ante la cual muchas veces no ven la necesidad de emplear paréntesis por atribuirle las mismas propiedades que al signo más. Además, continúan las dificultades aritméticas relacionadas con el uso de los paréntesis y la jerarquía de las operaciones (Gavilán, 2011).

Gavilan (2011) señala:

“la experiencia de casi treinta años de docencia muestra que muchos estudiantes de ESO (Educación Secundaria Obligatoria), en algún momento, inventan nuevos significados personales que sustituyen a los auténticos, y tratan de operar las expresiones algebraicas como lo harían con las aritméticas, y en caso de no ser posible, simplifican erróneamente las operaciones haciendo, por ejemplo, (a + b) 2 = a2 + b2, o cualquier otra simplificación desafortunada. Incluso los más aventajados pueden entender que el álgebra es algo así como una máquina de cálculo; pero difícilmente dan el paso de considerar el álgebra como una herramienta capaz de expresar relaciones estructurales.” (p. 99).

Como hemos visto, cuando un alumno presenta una dificultad, esta pasará a convertirse en un obstáculo, quien para Brousseau (2007), suelen presentarse en el sistema didáctico y son de tres tipos:

- **Epistemológico:** Intrínsecas al concepto.
- **Ontogénicas:** Intrínsecas al propio sujeto.
- **Didácticas:** Intrínsecas a las técnicas de enseñanza.

Con base en la clasificación de obstáculos de Brousseau, así como de las antes expuestas con respecto al álgebra escolar que suelen presentar los alumnos de ESO, se han llevado a cabo diferentes estudios, en su mayoría de tipo cuantitativo y, a veces cualitativo, de los errores cometidos por éstos, categorizando de alguna manera las diferentes causas que los provocan.

Algunos de esos estudios se muestran resumidos en la siguiente tabla, los cuales fueron resultados de una revisión bibliográfica que se llevó a cabo desde Mayo del 2018 hasta Mayo del 2020, en las bases datos *Researchgate, SciELO, Redined* y *Google Academic*, usando los descriptores: *álgebra, dificultades en el álgebra, transición de la aritmética al álgebra, ESO.*

Tabla 1. Clasificación de dificultades algebraicas en alumnos de secundaria.

Autor	Clasificación
Radatz (1979)	-*Dificultades de lenguaje* -Dificultades para obtener información espacial -Aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos -Asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento -Aplicación de reglas o estrategias irrelevantes

Palarea y Socas (1994)	Cognitivos	-Considerar expresiones incompletas. -Proceso-producto (adición aritmética-algebraica) -Concatenación (yuxtaposición de dos símbolos)
	Errores del álgebra que están en la aritmética	-Operaciones con fracciones -Uso de paréntesis -Potencias -Linealidad
	Errores del álgebra propias del lenguaje	-Sentido del signo(ecuaciones) -Sustitución formal (variables de una expresión son sustituidas por expresiones más complejas, que son nuevamente variables)
Rico (1995)	-Datos mal utilizados -*Interpretación incorrecta del lenguaje* -Inferencias no válidas lógicamente -Teoremas o definiciones deformados -Falta de verificación en la solución -Errores técnicos de la aritmética	
Caputo y Macías (2006)	-Propuestas incoherentes -*Uso incorrecto de la notación o confusión en el uso del lenguaje simbólico* -Errores algebraicos elementales -Desconocimiento o uso inadecuado de conceptos -No lograr concluir la demostración	
Castro (2012)	Achacables a la aritmética	Uso de paréntesis Jerarquía de operaciones Propiedad distributiva
	Asociadas a la generación de patrones	Sucesiones Término general
	Asociadas a expresión de la generalización	
	Asociadas al lenguaje	*Traducción del lenguaje coloquial al algebraico* *Uso de letras* *Uso de símbolos*
	Asociadas a la estructura de las expresiones	Externa o superficial Interna

Como se puede observar en la Tabla 1, cada uno de los diferentes estudios enunciados, mencionan distintas dificultades que presentan los alumnos con respecto al álgebra, pero en todos ellos se hace referencia a las dificultades que presentan los alumnos con respecto al lenguaje algebraico, sin embargo, ¿qué es el lenguaje algebraico? Según Alfonso (2009) exceptuando la química, la física o la música, en ninguna otra ciencia o arte como en el álgebra ha influido tanto en su desarrollo la adopción de una simbología adecuada. A lo largo de los siglos se ha ido configurando un conjunto específico de símbolos y números que permiten expresar y homogeneizar toda la teoría existente. Este amplio conjunto recibe la denominación de "lenguaje algebraico".

Con base en una segunda revisión bibliográfica, cuya finalidad era actualizar la documentación reciente producida y haciendo uso de los descriptores: *uso del lenguaje algebraico, lenguaje aritmético (o natural) al algebraico en secundaria, problemas de enunciado*, se obtuvieron los siguientes aportes con respecto al interés propio de nuestro trabajo, los cuales se describen a continuación.

La bibliografía nos evoca a dos tipos de traducción entre el lenguaje natural y algebraico: *a) traducción sintáctica*, la cual indica la conversión de cada oración verbal en una ecuación, cambiando palabras claves por símbolos y en un orden de izquierda a derecha, y *b) traducción semántica*, la cual exige un trabajo metacognitivo, ya que se debe comprender la relación que existe entre las cantidades conocidas y desconocidas que vienen planteadas en el enunciado verbal, y la cual debe expresarse en un lenguaje simbólico de ecuaciones (Clement, 1982, MacGregor & Stacey, 1993, citados por Gárriga, 2011).

Con respecto a la traducción sintáctica, esta permite convertir muchos problemas verbales en ecuaciones que conducen a soluciones correctas, aunque el alumno por lo general no comprende la relación que existe entre una y otra. Sin embargo, este tipo de traducción conlleva a que ocurra con más regularidad el error de inversión para las operaciones aritméticas: suma, resta, multiplicación y división, complicando la comparación entre cantidades (Gárriga, 2011).

Por su parte, Filloy (1999, citado en Serres, 2011, p.127) estudió la adquisición del lenguaje algebraico desde dos estrategias: a) *modelaje de situaciones*, para desarrollar habilidades sintácticas y b) *producción de códigos*, para desarrollar habilidades de resolución de problemas. Obteniendo como resultados que existe una relación entre lo sintáctico y lo semántico, y que el avance de uno de ellos implica el de la otra parte.

Además, para resolver problemas verbales Filloy (1999, citado en Serres, 2011, p. 137) considera tres métodos: a) *método cartesiano (MC)* el cual consiste en representar las incógnitas de un enunciado verbal en una expresión algebraica, cuya solución matemática tendría nuevamente una traducción verbal para dar solución al problema, b) *método de inferencias analíticas sucesiva (MIAS)* cuya solución final es el producto de inferencias lógicas que actúan como descriptores, y c) *método analítico de exploraciones sucesivas (MAES)* muy parecido al anterior, sólo que se plantea un valor hipotético para la incógnita, por lo que lo vuelve un método más cargado a la aritmética.

En el trabajo que presenta Marquina (2014) enmarca una serie de ocho pasos para traducir problemas expresados en palabras comunes al lenguaje algebraico, que den pauta a la elaboración de posibles soluciones correctas a problemas matemáticos. Entre ellos se destacan, leer el problema cuidadosamente (si es necesario más de una vez), identificar los datos e incógnitas involucradas (clasificando en variables o constantes) y de esta manera reducir la dificultad al trabajar con una sola variable o máximo dos, según sea el caso, y por último, establecer, resolver y verificar la ecuación planteada.

En la adquisición del conocimiento matemático, particularmente, se requiere el uso de representaciones. Estas se pueden tipificar en a) *internas*, aquellas que se usan para pensar sobre ideas matemáticas, razonar y organizar el conocimiento que a su vez proporcionan, y b) *externas*, para expresar y comunicar ideas matemáticas, mediante las cuales se materializan los conceptos matemáticos (Castro, 1994, Goldin, 2002; citados por Rodríguez-Domingo, 2015, p. 274).

Sin embargo, para un mismo concepto existe una diversidad de representaciones, por lo que el término de sistemas de representación, entendiendo a este como un conjunto estructurado de notaciones, símbolos y gráficos, con reglas y convenios, permite que se produzca una traducción entre una y otra, siendo necesario el dominio de todos ellos para una mayor comprensión del concepto (Castro, 1994; Goldin, 1998; Kaput, 1992, citados por Rodríguez-Domingo, 2015, p. 274).

Con el uso de un dominó algebraico Rodríguez-Domingo (2015) y apoyándose de la clasificación hecha por Socas (1997, citado por Rodríguez-Domingo, 2015, p. 280) encontró que los errores que comenten los alumnos entre una lenguaje y otro, radica en la aritmética y en aquellos derivados de las características propias del simbolismo algebraico. Aportando además que los errores más frecuentes derivados de la aritmética, fueron aquellos relacionados con el uso del paréntesis y el de las operaciones aritméticas básicas: suma, resta, multiplicación y división, incluyendo además el de la potenciación.

Martínez (2019) encontró que los alumnos traducen literalmente el enunciado, es decir no identifican las operaciones a desarrollar, generalizan procedimientos ya conocidos y además de ello, los mecanizan. Por lo que no llegan a comprender el planteamiento del problema y por ende, el resultado obtenido es meramente numérico sin darle una interpretación acorde.

Como hemos visto, parte de las dificultades se deben a problemas propios del uso y comprensión de nuestro lenguaje; dificultad que se agrava al emplear palabras que en el contexto matemático tienen diferente significado que, en el lenguaje habitual como raíz, potencia, primo, diferencia, matriz, etc.

La potencia del lenguaje algebraico frente al ordinario es su capacidad para expresar lo general empleando símbolos, y esa es precisamente su dificultad. La tarea de codificar un mensaje dado en lenguaje coloquial implica procesos más complejos que los involucrados en una simple traducción.

El lenguaje matemático trata de expresar estructuras por medios exclusivamente formales. Ello implica, como procesos intermedios, identificar las variables que intervienen, los parámetros, las incógnitas, y comprender las relaciones que existen entre todas ellas; asimismo, supone el manejo de conceptos tales como la proporcionalidad o la igualdad, para poder expresar, respetando las reglas sintácticas del álgebra, el mensaje codificado.

1.3 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Se ha mostrado que existe una dificultad en la resolución de los llamados “problemas de enunciado”; en ellos se enuncia una situación en la que aparecen varios datos y se pide el hallazgo de algún valor desconocido, pero ¿existirán esas mismas dificultades en nuestra población estudiantil?, ¿existirán otras? Con el fin de responder a estas preguntas, se tomó un examen de 1° ESO (Educación Secundaria Obligatoria), resultado de la búsqueda en *Google Academic* con las palabras: *examen de algebra, examen de matemáticas para ESO, evaluación de contenido algebraico*.

Después de una revisión en los ejercicios propuestos, contenido y grado de dificultad se seleccionó uno de la página *wordpress.com*. Cabe mencionar que al ser tan extenso se le hicieron las modificaciones pertinentes para describir las dificultades de aprendizaje citadas en el apartado anterior, así como los conocimientos previos que presentan los alumnos con respecto a la traducción de enunciados verbales a algebraico y viceversa, con una distribución tal como se muestran en la Tabla 2.

Tabla 2. Descripción del contenido de los ítems.

Número de ítem	Contenido algebraico
1 , 10	Uso del lenguaje algebraico
2 , 3, 4	Identificación de términos algebraicos
5, 6, 9	Aplicación de operaciones algebraicas
7, 8	Resolución de ecuaciones lineales
10	Planteamiento y resolución de ecuaciones

Los contenidos algebraicos que se estructuraron en el instrumento denominado *"Dificultades de Aprendizaje"* (Anexo A) cubren precisamente aquellos abordados dentro de los dos primeros años de secundaria, ya que el fin de la presente investigación es diseñar una propuesta didáctica que ayude al alumno a realizar la transición del lenguaje aritmético al algebraico.

Dicho instrumento se aplicó a un grupo de 25 de alumnos de tercer grado de secundaria, de una población urbana de la ciudad de Puebla, con edades que oscilaban entre los 14 y 16 años de edad, donde el 28% fueron mujeres y el 72% fueron hombres, la cual se llevó a cabo el día 20 de Marzo del 2019 con una duración de 50 minutos.

Dicha aplicación nos permitió corroborar que nuestros estudiantes presentan las mismas dificultades que presentaron los autores antes revisados, pero no sólo eso, sino que nos permitió observar que, presentan una fuerte dificultad con el lenguaje algebraico, pues casi el 100% (Véase Tabla 2, Anexo A) de los alumnos han dejado en blanco los ítems correspondientes al uso del lenguaje algebraico.

Como se describe en la *Tabla 2*, estos ítems fueron el 1 y 10, cuyos planteamientos se muestran a continuación.

Ejercicio 1. Expresa en forma algebraica los siguientes enunciados matemáticos.

a) Los kilómetros recorridos por un coche que va a 100 km/h durante x horas.

____

b) La edad de Juan si tiene 25 años menos que su padre que ahora tiene x años.

____

c) El área de un triángulo de base 50 cm y altura x centímetros.

____

Ejercicio 10. Resuelve los siguientes planteamientos.

a) El triple de un número menos cinco es igual a su doble menos tres. ¿Cuál es ese número?
b) La suma de las edades de tres amigos es de 37 años. Si el mayor tiene siete años más que el mediano y el mediano tres años más que el pequeño, ¿cuántos años tiene cada uno.?
c) Se quieren repartir 1250 pesos entre tres personas de forma que la primera reciba la mitad que la segunda y la tercera 50 pesos más que la primera, ¿cuánto deberá recibir cada una?

Figura 1.1. Ítems correspondientes al lenguaje algebraico.

Como se puede observar una Figura 1.1 los planteamientos nos permitieron observar que además de las deficiencias que suponíamos con respecto al uso del lenguaje algebraico, los alumnos también tenían deficiencias con respecto a aspectos aritméticos y geométricos. Esto porque en el ítem 1.3, los alumnos no fueron capaces de plantear la expresión del cálculo del área de un triángulo. Además tal y como lo menciona Gárriga (2011) aquellos alumnos que “intentaron” plantear la expresión del ítem 1.2, cometieron el error de inversión.

Cuando finalizó la aplicación, se les cuestionó a los estudiantes, si habían tenido una dificultad en la resolución de la prueba, y cuál había sido, la mayoría hizo notoria el uso de los vocablos triple y doble, mencionando que no entendían a qué se referían, si a la potencia, o a la fracción, en cuyo caso, ambas operaciones eran erráticas.

Una vez observada la problemática desde esta perspectiva, el interés de este trabajo radica en aquellas dificultades asociadas al lenguaje, específicamente a la traducción del lenguaje coloquial al algebraico, cuya simbolización empleada y utilizada en la resolución de problemas implica una dificultad cuando no hay una buena interpretación del enunciado verbal al planteamiento de ecuaciones, haciendo uso de vocablos equivalente a las operaciones básicas de la aritmética: suma, resta, multiplicación y división.

Preocupados por atacar la problemática antes mencionada y el interés personal que emana de ésta rama de las Matemáticas, nace la necesidad de plantear una propuesta de aprendizaje, mediante la implementación de una propuesta didáctica que favorezca la transición del lenguaje aritmético al algebraico en alumnos de secundaria, buscando resolver parte de las dificultades encontradas y disminuyendo algunos sesgos que presentan en el planteamiento y resolución de ecuaciones de primer grado, a raíz del uso del lenguaje algebraico. De esta manera surge la siguiente pregunta de investigación:

> *¿Cómo el diseño e implementación de una propuesta didáctica como estrategia de aprendizaje, favorece la transición del lenguaje aritmético al algebraico evocando las operaciones básicas aritméticas en alumnos de secundaria?*

Para dar respuesta a nuestra pregunta de investigación, nuestro propósito es diseñar una propuesta didáctica que ayude a consolidar los aprendizajes relacionados con la resolución de problemas que impliquen el uso de ecuaciones de primer grado con una incógnita y que el alumno haga uso de vocablos equivalentes a las operaciones básicas aritméticas: suma, resta, multiplicación y división.

1.4 OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN

Nuestro principal objetivo es favorecer la transición del lenguaje aritmético al algebraico en alumnos de secundaria, se pretende que una vez implementada la propuesta didáctica el alumno sea capaz de plantear y dar solución a ecuaciones de primer grado. Siguiendo durante el transcurso del trabajo el desarrollo de unos objetivos específicos, que nos ayudarán a cumplir con nuestro objetivo general.

Objetivo General

Diseñar e implementar una propuesta didáctica que favorezca la transición del lenguaje aritmético al algebraico, mediante la resolución de problemas que impliquen el planteamiento de ecuaciones de primer grado con una incógnita haciendo uso de vocablos equivalentes a las operaciones básicas aritméticas.

Objetivos Específicos

Para alcanzar nuestro objetivo general proponemos los siguientes objetivos particulares:

- Indagar las dificultades reales existentes en nuestra población de estudio en cuanto al uso del lenguaje algebraico, por medio del diseño y aplicación de un diagnóstico.

- Diseñar y validar situaciones didácticas que faciliten la transición del lenguaje aritmético al algebraico evolutivamente, con la resolución de problemas que impliquen el planteamiento de ecuaciones de primer grado y el uso de vocablos equivalentes a las operaciones básicas aritméticas.

- Aplicar la propuesta didáctica diseñada con diferentes momentos de evaluación que estimule en el alumno el uso del lenguaje algebraico con información y/o datos numéricos de una situación en la vida real.

- Analizar la eficiencia de la propuesta didáctica, a través de los datos recogidos durante la aplicación y una evaluación global.

1.5 JUSTIFICACIÓN

Es muy importante recalcar que el interés educativo es ayudar a los estudiantes a resolver las dificultades que presentan con respecto al uso del lenguaje algebraico, desde un enfoque distinto al que abordan los libros de texto de secundaria en México, el cual parte de una generalización del álgebra, planteando ecuaciones de primer grado ya estructuradas o bien, a partir de secuencias geométricas.

Sabemos que existen trabajos para la traducción del lenguaje natural al algebraico, sin embargo lo hacen desde el ABP (Aprendizaje Basado el Problemas) como lo hace Leiva (2016), o bien bajo el diseño de instrumentos con contenidos algebraicos, como en Marquina (2014) pero sin algún sustento teórico, cabe mencionar que en todos ha habido aportes a esta rama de la investigación educativa.

El modelo educativo para la educación básica en México, menciona que uno de los principios pedagógicos de la labor docente es diseñar situaciones didácticas que propicien el aprendizaje situado (SEP, 2017). Sin embargo no dan ninguna guía de cómo diseñar esas situaciones en general, ni que decir para el caso particular de la asignatura de Matemáticas.

Por lo anterior, pretendemos que con esta propuesta la comunidad educativa, profesores y alumnos, se vea beneficiada en un tema que hemos comprobado existe dificultad, utilizando expresiones algebraicas con contexto de situaciones reales, es decir sin extrapolar datos y con actividades de la vida real, todo esto desde una perspectiva basada en el trabajo de Brousseau (1986).

CAPÍTULO 2

MARCO TEÓRICO

Dado que tenemos en cuenta la relevancia que tiene la parte didáctica, consideramos pertinente que ésta se desarrolle desde la perspectiva de la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) propuesta por Brousseau (1986), dicha teoría sostiene que el conocimiento matemático se va construyendo a partir de la interacción del estudiante con situaciones problemáticas, que ponen a prueba sus propios conocimientos, por lo que ésta teoría se vuelve un medio privilegiado, no solamente para comprender lo que hace el profesor, sino también el alumno.

Además de ello es el profesor quien se encarga de diseñar precisamente dichas situaciones que ayuden a generar la construcción del conocimiento matemático en los estudiantes, por ende, nos basaremos también en la metodología de la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995), la cual nos da una serie de pasos que nos permitirá cubrir cada uno de los objetivos particulares que se han planteado con anterioridad.

En algún momento de la propuesta nos apoyaremos en la Teoría de Registros de Representaciones Semióticas de Duval (1998) para justificar de esta manera el análisis de las producciones de los alumnos que le ayude al alumno a dar sentido a las ecuaciones de primer grado con una incógnita; en conjunto permitirán diseñar y validar una propuesta que facilite al alumno de secundaria el proceso de traducción del lenguaje coloquial al algebraico, encaminado al planteamiento de ecuaciones de primer grado.

2.1 TEORÍA DE SITUACIONES DIDÁCTICAS MATEMÁTICAS (TSDM)

La teoría de situaciones didácticas es un medio privilegiado, no solamente para comprender la interacción entre profesores y alumnos, sino también para diseñar propuestas didácticas que ayude a generar la construcción del conocimiento matemático. La referencia que hacemos a continuación de la Teoría de Situaciones Didácticas en Matemáticas se puede abordar en profundidad en Brousseau (1986), por lo que en el presente trabajo se consideran algunos conceptos primordiales dentro de esta teoría que suponemos deberían ser la médula espinal de cualquier propuesta didáctica.

Esta teoría está sustentada en una concepción constructivista, en el sentido Piagetiano del aprendizaje, concepción que es caracterizada por el mismo Brousseau (2007):

"El alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, dificultades y desequilibrios, un poco como lo hace la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por medio de nuevas respuestas, que son la marca del aprendizaje." (p. 30)

Bajo esta concepción, el aprendizaje por adaptación se da a través de la interacción del sujeto con el medio o bien, con las situaciones problemáticas que se le planteen, es decir, esta teoría sostiene que el conocimiento matemático se va construyendo a partir de la interacción del estudiante con situaciones problemáticas, donde el estudiante va poniendo a prueba sus propios conocimientos, va profundizándolos, rechazando formas erradas de aplicarlo, o promoviendo otros nuevos a partir de la interpretación de los resultados de sus acciones.

2.1.1 CONCEPTOS BÁSICOS

Evidentemente, la TDSM es muy extensa, por lo que a continuación se abordan aquellos conceptos que creemos pertinentes para el desarrollo de las sesiones de la propuesta didáctica, sin perder de vista que es precisamente el profesor quien tiene la labor de enseñar el saber matemático al alumno, pero no comunicándoselo directamente, sino mediante una situación didáctica, planeada para generar un aprendizaje significativo en el alumno. El profesor debe tener cuidado en diseñar o crear las actividades; éstas deben estar enfocadas en provocar que el alumno asuma la responsabilidad de construir su propio conocimiento, interactuando con los problemas.

Por lo tanto, los conceptos que consideramos pertinentes son:

a) **Medio o *milieu***
Son todos los recursos con los cuales cuenta el profesor para preparar cuidadosamente un medio con el cual el alumno pueda interactuar, así como una situación que provoque al alumno a desencadenar acciones sobre la situación planteada. Aún pese a esto, Brousseau menciona, que no existen medios conocidos y suficientes para construir de manera automática saberes nuevos, ni mucho menos medios que funcionen siempre y contra todo tipo de dificultades, refiriéndonos también a los diferentes estilos de aprendizaje.

b) **Situación a-didáctica**
Es aquella en la cual se produce un aprendizaje por adaptación, sin la intermediación del profesor, es decir, el alumno debe de ser capaz de resolver la situación planteada con el bagaje que trae consigo y siendo capaz de desarrollar por sí mismo la adquisición de un nuevo concepto.

c) **Situación didáctica**
Es aquella en la que se produce un aprendizaje mediante la interacción entre el alumno, el profesor y el medio, éste último mediante el diseño de un entorno que permita al alumno adquirir un saber determinado.

d) Devolución

Es la acción mediante la cual el profesor transfiere al alumno un problema o bien le plantea una tarea con relación a un determinado concepto o conocimiento matemático, y éste acepta la responsabilidad de esta transferencia.

Brousseau (2007) señala que:

> "*La devolución es el acto por el cual el docente hace que el alumno acepte la responsabilidad de una situación de aprendizaje (a didáctico) o de un problema y acepte el mismo las propuestas de esta transferencia*"(p. 87)

e) Contrato didáctico

Éste se refiere a un contrato implícito entre el alumno y el profesor, en el cual el profesor deberá proveer al alumno de todo el saber, así como de explicitar todo lo que espera de él, y viceversa. Sin embargo, es bien sabido que el único medio de "hacer" matemáticas es buscar y resolver problemas, por lo que el profesor debe por tanto efectuar no la comunicación del conocimiento directamente, sino la devolución de un buen problema.

2.1.2 TIPOS DE INTERACCIÓN CON EL *MILIEU*

En la construcción del aprendizaje de un concepto matemático se conciben diferentes momentos o interacciones con el medio, donde el alumno se enfrenta solo a la resolución del problema, sin la intervención del profesor, quien solo se limita a dar orientaciones para que el estudiante se encamine a encontrar la solución del problema; tales interacciones son la continuación de situaciones de acción, formulación y validación, ordenados en forma razonable para la construcción de un conocimiento.

a) Situación de acción

Consiste en que el alumno sin la intervención del profesor actúe sobre el problema proporcionado por éste, haciendo uso de sus conocimientos previos y analizando los resultados, ya sea aceptando o rechazando modelos o estrategias de solución.

b) Situación de formulación

Consiste en una situación encaminada a la comunicación, en donde el alumno intercambia información con una o varias personas con respecto a las estrategias que ha elegido en la situación de acción, con el fin de intercambiar información ya sea escrita u oral que le permita llegar a un modelo explícito con simbología matemática que dará solución al problema planteado.

c) **Situación de validación**
Consiste en la demostración por parte del alumno de que la estrategia que ha escogido en las situaciones anteriores es válida, es en esta etapa que el alumno puede fungir dos papeles, emisor o receptor, proponiendo un modelo o bien, oponiéndose a éste, respectivamente, de todas formas, ya sea uno u otro papel su fin único será discutir la pertinencia del modelo elegido y proponer si es posible, una validación. Cabe destacar que esta situación es independiente del resto, ya que se puede suscitarse sin tener que pasar por las demás, ya que el alumno puede pedir explicaciones o rechazar aquellas en las cuales no está de acuerdo.

d) **Situación de institucionalización**
Consiste en la formalización de un conocimiento matemático producido por el alumno, es de alguna manera complementaria a la devolución. En ella se deben recapitular y sacar conclusiones de las producciones del alumno en las actividades de la propuesta didáctica.

La relación que existe entre las situaciones didácticas y a-didácticas, así como el momento justo donde se da la institucionalización se visualizan mejor en el siguiente esquema.

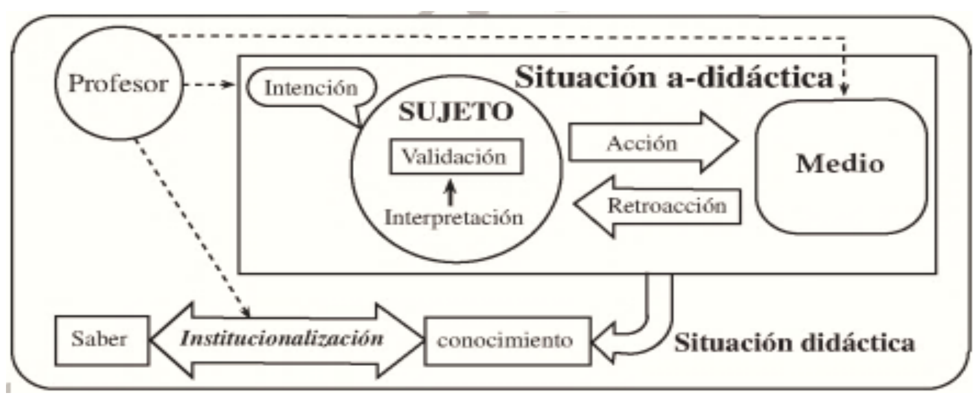


Figura 2.1.Relación entre situación didáctica y situación a-didáctica (Parraguez).

2.2 INGENIERÍA DIDÁCTICA

De acuerdo a Artigue (1995) la Ingeniería didáctica es una forma de trabajo didáctico equiparable el trabajo del ingeniero quien, para realizar un proyecto determinado se basa en los conocimientos científicos de su dominio y acepta someterse a un control de tipo científico.
Según Douady (1995):

> *"El termino ingeniería didáctica designa un conjunto de propuestas de clase concebidas, organizadas y articuladas en el tiempo de manera coherente por un profesor ingeniero, con el fin de realizar un proyecto de aprendizaje para una población determinada de alumnos." (p. 61).*

Con base a lo anterior, la ingeniería didáctica es un producto resultante de un análisis a priori con el fin de realizar un proceso de aprendizaje en el transcurso de interacción entre el profesor y los alumnos donde se ejecuta el producto final, adecuado a la dinámica de la clase.

2.2.1 FASES DE LA INGENIERÍA DIDÁCTICA

Siguiendo las fases de la metodología de la ingeniería didáctica, el alumno construye conocimientos nuevos que le permiten transitar fácilmente entre el aprendizaje aritmético y algebraico mediante el trabajo con la propuesta didáctica diseñada para tal fin.

Las fases a las cuales alude la ingeniería según Artigue et al. (1995) son cuatro:

1. Análisis preliminar
2. Concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas
3. Experimentación
4. Análisis a posteriori y validación

Fase 1. Análisis preliminar

Esta fase tiene como objetivo identificar y describir los obstáculos epistemológicos, didácticos y/o cognitivos que se presentan en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Este análisis está constituido por un conjunto de análisis en relación al objeto matemático, como la enseñanza tradicional, las concepciones del alumno y las dificultades u obstáculos que determinan su evolución. Así mismo, en esta fase se describe el grupo de alumnos con los cuales se experimentará la propuesta didáctica, tal como la edad, género y conocimientos previos sobre el tema.

Fase 2. Concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas

Esta fase tiene dos objetivos: el primero, concerniente al diseño de las actividades o sesiones de la propuesta didáctica, y el segundo, pertinente al análisis a priori, en el cual se deben considerar los resultados que se esperan de los alumnos, las intervenciones del profesor y, prever y analizar las dificultades que podrían enfrentar durante la resolución de las actividades.

Fase 3. Experimentación

Esta fase, como su nombre lo dice, se refiere a la puesta en marcha de las actividades diseñadas, a la experimentación misma, en la cual se da la interacción propuesta por el profesor del alumno con el medio, así mismo en esta fase se establece el contrato didáctico y se llevan a cabo los registros de las observaciones realizadas.

Fase 4. Análisis a posteriori y validación
Esta fase está constituida por el conjunto de datos recogidos durante la experimentación, tal como lo son las producciones de los alumnos hechas dentro o fuera de las sesiones, así como los resultados obtenidos por instrumentos externos a la propuesta didáctica. En tanto a la validación, Artigue et al. (1995) menciona: *"que la confrontación de los análisis a priori y a posteriori, fundamentan en esencia la validación de las hipótesis formuladas." (p. 48)* ésto se da en la comparación entre los comportamientos esperados y los que realmente sucedieron durante la experimentación.

2.3 TEORÍA DE REGISTROS DE REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS (TRRS)

La referencia que hacemos a continuación de la Teoría de Registro de Representaciones Semióticas (TRRS) se puede abordar en profundidad en Duval (1998), por lo que en el presente trabajo se consideran algunos conceptos primordiales dentro de esta teoría que suponemos nos servirán como guía para describir las producciones realizadas por alumnos durante la fase de experimentación, analizando de esta manera las expresiones algebraicas que den solución a las ecuaciones de primer grado, a partir del planteamiento que ellos realicen de la traducción de enunciados coloquiales a ecuaciones.

Para Duval existen por lo menos dos características en el proceso cognitivo de las habilidades matemáticas: (1) Diversos registros de representación semiótica y (2) los objetos matemáticos no son accesibles mediante la visualización.

En base a estas dos premisas, Duval define:

Semiosis: Es a la actividad ligada a la producción de representaciones.

Noesis: Es la aprehensión conceptual de los objetos representados incluyendo el proceso cognitivo desarrollado por el sujeto.

Ahora bien, para que un conjunto de signos sea considerado un Registro de Representación Semiótica (RRS) Duval requiere que se puedan realizar tres actividades cognitivas dentro del sistema semiótico: (1) Construir una marca o conjunto de marcas que sean perceptibles como una representación de alguna cosa en un sistema determinado. (2) Transformar las representaciones de modo que se obtengan otras que permitan construir un conocimiento con respecto a las iniciales. (3) Convertir las representaciones de un sistema a otro, de tal forma que las últimas permitan explicitar otras significancias a lo ya representado.

Desde la educación primaria los alumnos manipulan expresiones con letras, como en el cálculo de perímetros y áreas, sin embargo cuando pasan a secundaria, dicha manipulación se vuelve más compleja. Godino y Font (2003) nos menciona que en el cambio de manipulación entre un grado y otro, hay dos etapas que distinguir.

La primera en la cual los símbolos sustituyen a números, segmentos u otros objetos y su función es representarlos, y la segunda en la que los valores que pueden tener los símbolos son los que se quiera considerar y no están condicionados por la situación que inicialmente representaban.

Retomando lo expuesto en el capítulo anterior, para un mismo concepto existe una diversidad de representaciones y el dominio de todas ellas facilita la adquisición de un concepto, por lo que la confusión entre los objetos representados con las representaciones de los mismos, y la aplicación arbitrara de las normas sintácticas a "representaciones equivalentes" en sistemas de representaciones diferentes, constituyen buena parte de las dificultades del álgebra escolar (Duval, 1995, citado por Gárriga, 2011)

Como ejemplos de tales RRS (Godino et al., 2016) se tienen:

a) lengua natural (oral, escrita)
b) representaciones numéricas (entera, fraccionaria, decimal)
c) representaciones figurales o gráficas (lineales, planas o espaciales)
d) representaciones alfanuméricas (algebraicas)

En el diseño de nuestra propuesta, consideramos el trabajo que realicen los alumnos con representaciones en su lenguaje natural y alfanuméricas, ya que recordando el objetivo de este trabajo es ayudar a los estudiantes a la transición del lenguaje natural al algebraico, haciendo uso de vocablos que enuncian las operaciones aritméticas.

Por lo tanto, para tener acceso al conocimiento matemático, en nuestro caso particular en el lenguaje algebraico, es necesario que los objetos sean representados de diferentes formas, ya que, para Duval, un sujeto ha adquirido un concepto determinado, cuando se cumple dos condiciones: (1) debe disponer de al menos dos registros diferentes para representar un objeto; y (2) debe ser capaz de transitar entre por lo menos dos diferentes representaciones semióticas del concepto mismo.

CAPÍTULO 3

DISEÑO Y DESARROLLO DE LA PROPUESTA DIDÁCTICA

Este capítulo es la médula espinal del presente trabajo, ya que en él se describe el diseño y desarrollo de la propuesta didáctica, considerando cada una de las fases de la ingeniería didáctica y de la teoría abordada en el capítulo anterior.

3.1 DISEÑO DESCRIPTIVO DE LA PROPUESTA DIDÁCTICA

Al empezar cualquier tema educativo, se debe comenzar con un diagnóstico de los conocimientos previos que posee el alumno, así como la indagación de ideas intuitivas que éste posea, y tal como nos lo marca la ingeniería de Artigue, se aplicó un instrumento denominado "*Pretest del uso del lenguaje algebraico"* (Anexo B) que nos dio pauta para iniciar nuestra propuesta a través de tres sesiones de trabajo.

Considerando lo anterior se propone el siguiente esquema descriptivo del proceso, con el cual se puede favorecer la traducción del lenguaje coloquial al algebraico:

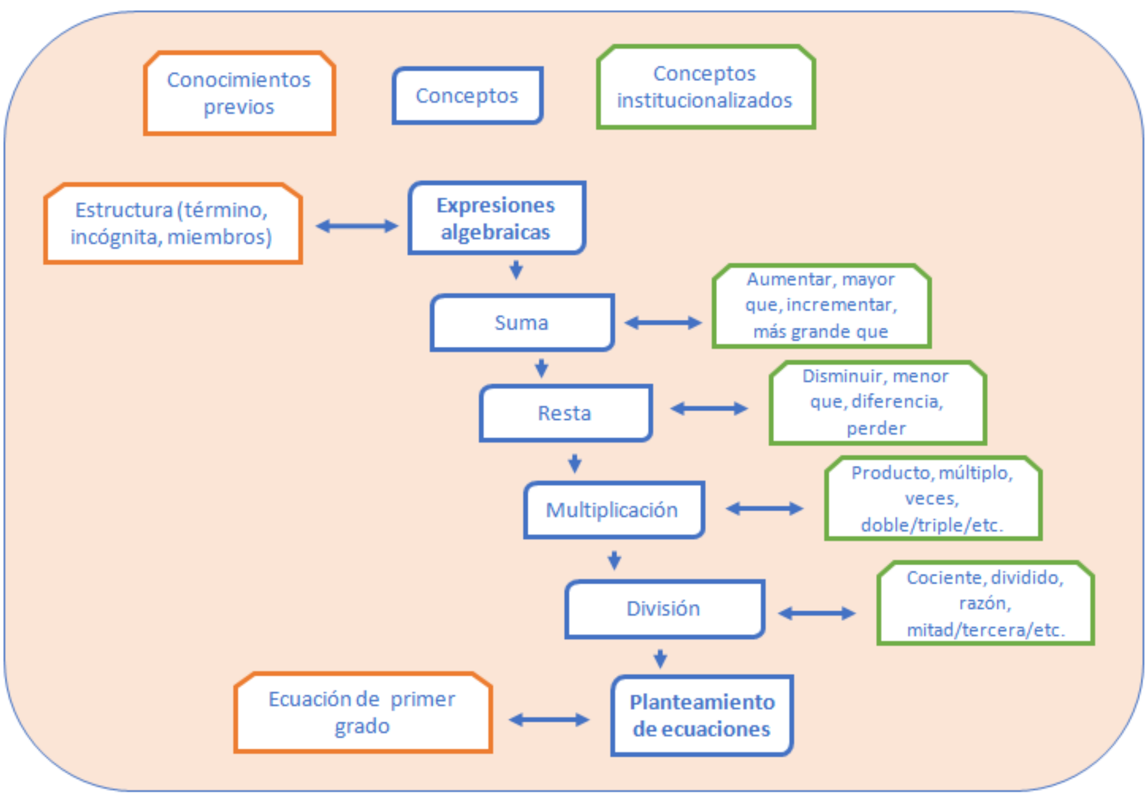


Figura 3.1Esquema descriptivo del proceso conceptual de la propuesta didáctica.

En la Figura 3.1, se puede observar el esquema sugerido para ir progresando durante las sesiones o actividades diseñadas, comenzando con los conocimientos previos del alumno y culminando con el planteamiento de ecuaciones de primer grado.

Pretendemos que este esquema sirva a la comunidad educativa para abordar dicho tema con su colectivo estudiantil y con ello resaltar la importancia que debe tener la dimensión didáctica en la concepción de una propuesta didáctica.

Con el objetivo de mostrar un plan de acción a seguir dentro de cada sesión de trabajo, se presenta la siguiente propuesta indicativa (Tabla 3) para la construcción de una propuesta didáctica, la estructura general de cada sesión está basada en Díaz-Barriga (2013), la cual nos propone actividades de inicio, desarrollo y cierre, dichas actividades se ven reflejadas en el diseño de cada una de las sesiones, así como el sustento teórico abordado con anterioridad:

Tabla 3. Propuesta indicativa de las sesiones de trabajo.

<table>
<tr><td colspan="3">Profesor: Mónica Pérez García</td><td colspan="5">Asignatura: Matemáticas</td></tr>
<tr><td>Grado y Grupo: 3°A</td><td colspan="2">Bloque: II</td><td colspan="5">Periodo de la propuesta:
24 al 27 de Junio 2019</td></tr>
<tr><td>Campo de Formación:</td><td colspan="7">Pensamiento Matemático. Se vincula con todas las asignaturas.</td></tr>
<tr><td>Aprendizaje esperado:</td><td colspan="7">Resuelve problemas mediante la formulación y solución de ecuaciones lineales.</td></tr>
<tr><td>Objetivo:</td><td colspan="7">Traducción del lenguaje coloquial al algebraico, para llegar al planteamiento de ecuaciones lineales.</td></tr>
<tr><td>Planeación del Tema:</td><td colspan="3">Expresiones algebraicas</td><td colspan="2">Sesión:
1</td><td colspan="2">Subtema:
Suma y Resta</td></tr>
<tr><td colspan="2">Actividades Estratégicas</td><td colspan="3">Recursos Didácticos</td><td colspan="2">Rasgos a Evaluar</td><td>Tiempo</td></tr>
<tr><td colspan="2">Actividades de inicio:
- Se plantea al alumno una actividad introductoria en donde se refuerza conocimientos previos de ecuaciones, abordados en el ciclo pasado.</td><td colspan="3">- Copias de las ecuaciones representadas en lenguaje simbólico.
- Lápiz y goma</td><td colspan="2">Uso de las palabras clave:
* Qué
* Cuántos
* Encontrar</td><td>5 min.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Actividades de desarrollo:
- Se le proporciona al alumnado información relevante con respecto</td><td colspan="3">- Pizarrón y plumones</td><td colspan="2"></td><td>15 min.</td></tr>
</table>

a las diferentes palabras con las cuales se puede referir a la misma operación: Suma: aumentar, incrementar, mayor que, más grande que Resta: disminuir, diferencia, menor que, perder Mediante el uso de expresiones algebraicas, con el fin de que ellos identifiquen el tipo de operación a la cual hace referencia cada una de las expresiones verbales. - Usando tarjetas con expresiones algebraicas, deberán expresar en enunciados verbales y viceversa.	- Tarjetas con expresiones algebraicas	Uso de palabras referenciadas a la operación correspondiente.	15 min.
Actividades de cierre: - El alumnado debe armar un par de expresiones usando las diferentes formas de llamarlo, con el fin de que el compañero de junto pueda hacer su representación algebraica y viceversa (coevaluación).	- Hoja blanca - Lápiz y goma	Enunciados bien formulados o expresiones bien hechas	15 min.

Planeación del Tema:	Expresiones algebraicas	**Sesión:** 2	**Subtema:** Multiplicación y División
Actividades Estratégicas	**Recursos Didácticos**	**Rasgos a Evaluar**	**Tiempo**
Actividades de inicio: - Se recapitula lo que hicieron en la sesión 1, con respecto al trabajo realizado.	- Actividades de la sesión 1. - Lápiz y goma	Uso de las palabras clave: * aumentar * ecuación * disminuir	10 min.
Actividades de desarrollo: - Se le proporciona al alumnado información relevante con respecto a las diferentes palabras con las cuales se puede referir a la misma operación:	- Pizarrón y plumones		5 min.

Multiplicación: producto, múltiplo, veces, doble/triple/etc. División: razón, cociente, dividido, mitad/tercera/etc. Mediante el uso de expresiones algebraicas, con el fin de que ellos identifiquen el tipo de operación a la cual hace referencia cada una de las expresiones verbales. - Usando tarjetas con expresiones algebraicas, deberán expresar en enunciados verbales y viceversa.	- Tarjetas con expresiones algebraicas	Uso de palabras referenciadas a la operación correspondiente	20 min.
Actividades de cierre: - El alumnado debe armar un par de expresiones usando las diferentes formas de llamarlo, con el fin de que el compañero de junto pueda hacer su representación algebraica y viceversa (coevaluación).	- Hoja blanca - Lápiz y goma	Enunciados bien formulados o expresiones bien hechas	15 min.

Planeación del Tema:	Expresiones algebraicas	**Sesión:** 3	**Subtema:** Planteamiento de ecuaciones lineales
Actividades Estratégicas	**Recursos Didácticos**	**Rasgos a Evaluar**	**Tiempo**
Actividades de inicio: - Se plantea al alumno una actividad lúdica "Puntajes perdidos" conformada en equipos de 3 personas, utilizando expresiones que incorporen las operaciones abordadas en las sesiones anteriores (suma, resta, multiplicación y división).	- Tarjetones del juego lúdico	Identificar las diferentes expresiones que se vayan diciendo en voz alta (sin representación simbólica)	25 min.
Actividades de desarrollo: - Se le plantea al alumno una serie de problemas redactados en enunciados coloquiales, los cuales	- Copias con los enunciados propuestos para su	Estructura de las ecuaciones lineales	15 min.

requieren de una solución a partir de la traducción a expresiones algebraicas. - Después de que el alumno ha hecho el planteamiento de las expresiones algebraicas se procederá a realizar la resolución de dichos problemas utilizando las técnicas formales disponibles dentro de su bagaje.	planteamiento en ecuaciones lineales	propuestas para cada enunciado	
Actividades de cierre: - El alumno deberá realizar el planteamiento de un problema (lenguaje coloquial). En el cual debe realizar la traducción del enunciado a una ecuación lineal, resolver y traducir el valor numérico al lenguaje original del problema, esto con el fin de que comprenda si el valor encontrado tiene sentido o no, en el contexto planteado.	- Pizarrón y plumones	Planteamiento de la ecuación, uso de los términos utilizados en las sesiones anteriores (suma, resta, multiplicación y división), solución de la ecuación y sentido.	10 min.

3.2 CONCEPCIÓN Y ANÁLISIS A PRIORI

En esta propuesta, toda sesión de trabajo sea ha creado bajo la concepción de la teoría expuesta en el capítulo anterior, es decir bajo los conceptos abordados por Brousseau, comenzaremos las dos primeras sesiones (Anexo C) con el planteamiento de situaciones didácticas de problemas con contexto de situaciones reales, en los cuales se verán inmersos en la construcción paulatina de ecuaciones de primer grado, identificando en cada uno de los ítems planteados sus elementos, para poder llegar al final con el planteamiento de éstas.

Cabe destacar que este tema se encuentra descrito en el segundo bloque de segundo grado de secundaria, dentro de los estándar curriculares problemas multiplicativos del campo de formación: Pensamiento Matemático y que de ser trabajadas las sesiones dentro de los tiempos que marca el plan curricular, habrá actividades de grupo que el profesor puede utilizar, de lo contrario al ser abordadas como sesiones extracurriculares (fuera de clase) el alumno pueda desarrollar individualmente y fortalecidas posteriormente en el salón de clases.

Como ya se ha visto con anterioridad hay cuatro tipos de interacciones con el *mileiu*, sin embargo, las interacciones que tiene el alumno con el medio que propone el profesor se pueden clasificar en tres grandes categorías (Brousseau, 2007):

* Intercambios de información no codificados o sin lenguaje (acciones y decisiones).
* Intercambios de informaciones codificadas en un lenguaje (formulación).
* Intercambios de juicios (validación).

Por lo que a continuación se describen dichas interacciones dentro de las sesiones.

Sesión 1. Desafíos Matemáticos

Considera los siguientes desafíos

Ítem	Interacción	Comportamiento esperado
1a	Acción	Se espera que identifiquen los datos relevantes para hacer el cálculo del dinero recaudado, el dinero que se tenía antes de la proyección ($12,000) y el dinero después de la proyección ($15,500), que con dichos datos realicen el cálculo de $15,500 - $12,000 y obtengan la cantidad de dinero recaudado $3,500.
1b	Acción	Se espera que empiecen hacer uso del lenguaje algebraico, ya que no conocen el número de boletos vendidos se les sugiere que designen a éste con la literal x, y saben el costo del boleto ($70), por lo que se espera realicen la expresión: $70x$.
1c	Formulación	Se espera que en base a las respuestas de los ítems 1a y 1b, el alumno escriba: $70x = 3500$
1d	Acción	Se espera que a partir de la ecuación planteada en el ítem 1c, puedan determinar el número de boletos vendidos (50).
2a	Acción	Se espera que a partir de la imagen y los datos que se les presentan (a, a,5m) identifiquen las características que definen al triángulo isósceles (dos lados iguales y uno diferente).
2b	Formulación	Se espera que, a partir de su conocimiento previo, donde el perímetro es la suma de los lados de una figura, ellos expresen: $P = a + a + 5$
2c	Acción	Se espera que con el dato del perímetro (23m) y la respuesta del ítem 2b, lleguen a la expresión: $a + a + 5 = 23$.
2d	Acción	Se espera que a partir de la ecuación planteada en el ítem 2c, puedan determinar la medida de los lados del triángulo (9m)

Trabajemos juntos

Ítem	Interacción	Comportamiento esperado
1a	Acción	Se espera que identifiquen los datos que les permitan elegir la ecuación correcta, es decir el precio del boleto ($130), el billete con el pago ($500) y el vuelto que le han dado ($110). Esto con el fin de que elijan la ecuación $130x + 110 = 500$.

1b	Validación	Se espera que concluyan que esta ecuación justifica que al no saber cuántos boletos ha comprado Juan lo asocien con la literal x, cuyo precio del boleto es de \$130, y como le han devuelto \$110 al sumar estas dos cantidades tendrán que completar los \$500 del billete original. Adicionalmente puede solicitar que verifiquen si se cumplen o no las condiciones planteadas en el problema en el resto de las ecuaciones que no eligieron.
1c	Acción	Se espera que a partir de la ecuación elegida en el ítem 1a, puedan determinar el número de boletos que ha comprado Juan (3 boletos).
2a	Formulación	Se espera que a partir de sus conocimientos previos (propiedades de los triángulos), puedan expresar algebraicamente el perímetro de un triángulo equilátero (Por ejemplo: $P = a + a + a$) y el de un triángulo escaleno (Por ejemplo: $P = a + b + c$) Nota: De ser necesario puede retomar en forma de lluvia de ideas algunas de las propiedades de los triángulos, de esta manera disminuirá las dificultades que podrían presentar los alumnos.
2b	Acción	Se espera que a partir de su respuesta en el ítem 2a, puedan anotar los datos correspondientes que justifiquen su respuesta anterior, siguiendo como guía la imagen del ítem 2a.

¿Con qué finalizamos?

Ítem	Interacción	Comportamiento esperado
1a	Formulación	Se espera que planteen la expresión algebraica $x + 5 = 7$, con variaciones en la literal elegida.
1b	Formulación	Se espera que planteen la expresión algebraica $x - 33 = 144$, con variaciones en la literal elegida.
1c	Formulación	Se espera que planteen la expresión algebraica $x + 4 = 12$, con variaciones en la literal elegida.
1d	Formulación	Se espera que con respecto a los enunciados de los ítems 1a, 1b y 1c, puedan ser capaces de redactar un enunciado similar, por ejemplo: $Un\ número\ menos\ 3\ da\ como\ resultado\ dos.$
1e	Formulación	Se espera que planteen la expresión algebraica $x - 3 = 7$, con variaciones en la literal elegida.
1f	Formulación	Se espera que con respecto al enunciado del ítem 1a, puedan ser capaces de redactar un enunciado similar, por ejemplo: $Pienso\ un\ número\ que\ al\ aumentarlo\ en\ 12, obtengo\ 18.$
1g	Formulación	Se espera que planteen la expresión algebraica $x + 11 = 45$, con variaciones en la literal elegida.
2a	Validación	Se espera que den como respuesta: $aumentarlo, menos, sumarle, disminuirlo.$

2b	Validación	Se espera que concluyan con enunciados similares a los planteados en los ítems 1a-1g, utilizando las palabras sugeridas del recuadro y que co-evalúen al compañero.

Sesión 2. Negocios y más negocios

Considera los siguientes casos

Ítem	Interacción	Comportamiento esperado
1a	Acción	Se espera que identifiquen los datos relevantes para hacer el cálculo de la ganancia, el dinero que se cobró por la serigrafía ($2,550) y el dinero que se invirtió en la materia prima ($1,000), que con dichos datos realicen el cálculo de $2,550 - $1,000 y obtengan la ganancia de $1,550.
1b	Acción	Se espera que empiecen hacer uso del lenguaje algebraico, ya que conocen el número de juegos y se les sugiere que designen a éste con la literal x, se espera realicen la expresión: $x + 2x$ o bien, $3x$.
1c	Formulación	Se espera que en base a la respuesta del ítem 1b, el alumno escriba: $3x = 2550$ y pueda calcular el precio de venta de cada juego ($850).
1d	Formulación	Se espera que a partir de la respuesta en el ítem 1c, puedan plantear el capital que ha invertido José, por ejemplo: $4x = 120000$, con variaciones en la literal elegida.
2a	Acción	Se espera que hagan uso del lenguaje algebraico, ya que no conocen los kilómetros recorridos se les sugiere que designen a éste con la literal x, y saben el costo por kilómetro recorrido ($2.75), por lo que se espera realicen la expresión: $2.75x$.
2b	Formulación	Se espera que a partir de su respuesta en ítem 2a, puedan plantear la tarifa con la cuota fija: $2.75x + 35$. Nota: Como se puede observar se introduce al alumno a trabajar con números decimales, de tal forma que asimilen que no sólo se pueden hacer ecuaciones con números enteros.
2c	Acción	Se espera que con el dato del total del recibo ($65.25) y la respuesta del ítem 2b, lleguen a la expresión: $2.75x + 35 = 65.25$

Trabajemos juntos

Ítem	Interacción	Comportamiento esperado
1a	Acción	Se espera que identifiquen los datos relevantes para hacer el cálculo de la ganancia, el cobro total ($3,975) y el dinero descontando la materia prima ($1,325), que con dichos datos realicen el cálculo de $3,975 - $1,325 y obtengan la ganancia del pedido $2,650.

1b	Acción	Se espera que hagan uso del lenguaje algebraico, ya que en la sección anterior en el ítem 1b han designado con la literal x al número de juegos, realicen la expresión: $4x$.
1c	Acción	Se espera que en base a la respuesta del ítem 1b, el alumno escriba la ecuación: $4x = 3975$ y que pueda determinar la venta de playeras ($993.75).
1d	Validación	Se espera que comparen entre sí el uso de diferentes literales, y que a pesar de ello llegan al mismo resultado, por lo que independiente de la literal que elijan representa el mismo valor, en este caso, la venta de playeras.
2a	Formulación	Se espera que planteen la expresión algebraica $2.75x + 35 = 67.50$, con variaciones en la literal elegida.
2b	Formulación	Se espera que planteen la expresión algebraica $2.75x + 35 = 51.50$, con variaciones en la literal elegida.
2c	Formulación	Se espera que planteen la expresión algebraica $2.75x + 35 = 84.50$, con variaciones en la literal elegida.
2d	Formulación	Se espera que planteen la expresión algebraica $2.75x + 35 = 103.75$, con variaciones en la literal elegida.
2e	Formulación	Se espera que planteen la expresión algebraica $2.75x + 35 = 92.75$, con variaciones en la literal elegida.
2f	Validación	Se espera que puedan notar el patrón, en el cual se modifica únicamente el total del recibo de viaje, además de que se mantiene en todas las expresiones el valor de 35.

Algo más…

Ítem	Interacción	Comportamiento esperado
1a	Acción	Se espera que usen sus conocimientos previos correspondientes a fracciones, y que representen de esta manera ${}^{3}/_{4}$ partes.
1b	Acción	Se espera que hagan uso del lenguaje algebraico, ya que desconocen el total de butacas con las que cuenta el estadio se les ha sugerido designar el valor de éstas con la literal x, realicen la expresión: ${}^{3}/_{4}\,x$.
1c	Formulación	Se espera que planteen la expresión algebraica ${}^{3}/_{4}\,x = 9084$, con variaciones en la literal elegida.
1d	Acción	Se espera que con respecto a la respuesta del ítem 1c, puedan calcular el total de butacas con las cuales cuenta el estadio (12,112 butacas).

¿Con qué finalizamos?

Ítem	Interacción	Comportamiento esperado
1a	Formulación	Se espera que planteen la expresión algebraica $3x$, con variaciones en la literal elegida.
1b	Formulación	Se espera que planteen la expresión algebraica $3m - 5$ en este caso no se aceptan variaciones de la literal.

1c	Formulación	Se espera que planteen la expresión algebraica $5 - 2a = 18$, en este caso no se aceptan variaciones de la literal.
1d	Formulación	Se espera que con respecto a los enunciados de los ítems 1a, 1b y 1c, puedan ser capaces de redactar un enunciado similar, por ejemplo: $Cuatro\ veces\ c\ menos\ 5\ me\ da\ 12$.
1e	Formulación	Se espera que planteen la expresión algebraica $x/_3 = 27$, con variaciones en la literal elegida.
1f	Formulación	Se espera que con respecto al enunciado del ítem 1d, puedan ser capaces de redactar un enunciado similar, por ejemplo: $12\ mas\ tres\ veces\ m\ me\ da\ 18$.
1g	Formulación	Se espera que planteen la expresión algebraica $x(6) = 72$, con variaciones en la literal elegida.
1h	Formulación	Se espera que planteen la expresión algebraica $\frac{x+y}{xy}$ con variaciones en las literales elegidas.
1i	Formulación	Se espera que con respecto al enunciado del ítem 1e, puedan ser capaces de redactar un enunciado similar, por ejemplo: $Pienso\ un\ número\ que\ dividio\ por\ 3, obtengo\ 25$
2a	Validación	Se espera que den como respuesta: $triple, tres\ veces, doble, producto, cociente, dividido$.
2b	Validación	Se espera que concluyan con enunciados similares a los planteados en los ítems 1a-1i, utilizando las palabras sugeridas del recuadro y que co-evalúen al compañero.

Sesión 3. Puntajes perdidos

Para ganar el juego

Ítem	**Interacción**	**Comportamiento esperado**
Ejemplo	Acción	Se espera que lean y comprendan el primer planteamiento de la actividad, para que así puedan desarrollar el resto de los enunciados.
1a	Formulación	Se espera que con base a la primera premisa el alumno pueda escribir la expresión: $W = 2x - 100$
1b	Formulación	Se espera que con base a la segunda premisa el alumno pueda escribir la expresión: $M = \ 2x - 100 + 500$ o su equivalente, $M = 2x + 400$
1c	Formulación	Se espera que con base a la primera premisa el alumno pueda escribir la expresión: $G = \ 3x + 300$
1d	Formulación	Se espera que, con base a la primera y segunda premisa, el alumno pueda escribir la expresión: $P = 3x\ + 2x - 100$, o su equivalente, $P = 5x - 100$
1e	Formulación	Se espera que, con base a la premisa anterior, el alumno pueda escribir la expresión: $A = 5x - 100/5$, o su equivalente, $A = x - 20$

1f	Formulación	Se espera que, con base a la premisa del inciso (c) el alumno pueda escribir la siguiente expresión: $D = 3x + 300 - 1000$, o su equivalente, $D = 3x - 700$
1g	Formulación	Se espera que, como no se ha determinado el puntaje de Elena, a este le designa una incógnita y escriba la expresión: $z - 500 = x$, con variaciones en la literal para el puntaje de Elena.
1h	Formulación	Se espera que, con base en la premisa del inciso (g) el alumno pueda escribir la siguiente expresión: $X = 2(z - 500) + 100$
1i	Formulación	Se espera que, con base a la premisa de los incisos anteriores, el alumno pueda escribir una expresión como: $R = 3x + 2(z - 500) + 100$, o su equivalente, $R = 3x + 2z - 900$
1j	Formulación	Se espera que, con base a la premisa del inciso (c) el alumno pueda escribir una expresión como: $C = 3x + 300/3 + 2000$, o su equivalente, $C = x + 2100$

¿Con qué finalizamos?

Ítem	Interacción	Comportamiento esperado
1a	Validación	Se espera que concluyan con enunciados similares a los planteados en los ítems 1a-1j, utilizando las expresiones formuladas en equipo.

Como se pudo observar, en cada una de las sesiones se plantea que el alumno esté en constante interacción con las situaciones que nos proporciona Brousseau, y aun cuando algunas actividades parecieran repetitivas esto se hace con la intención de que se reafirmen los conceptos que se van desarrollando dentro de ellas. Además, también la numeración de las sesiones tiene un porqué, ya que debido a que la multiplicación siempre presenta un grado mayor de dificultad en su aprendizaje, se aborda después de la sesión referida a la sumatoria y su operación inversa, la resta.

También se puede observar que dentro de las actividades se considera la interacción correspondiente a la validación, cuya finalidad como se mencionó con anterioridad es que el alumno demuestre lo que ha desarrollado a lo largo de las actividades planteadas, de esta forma se podrá observar si el alumno ha adquirido el concepto matemático que referimos, el cual es el uso del lenguaje algebraico.

3.3 ACTIVIDADES FILTRO DE EVALUACIÓN

Debido a que nuestro propósito fue el de diseñar una propuesta didáctica que favorezca la transición del lenguaje aritmético al algebraico, se crearon actividades evaluativas que sirvieran como filtro en el aprendizaje del uso del lenguaje, y que nos permitieran observar si al finalizar cada sesión se había adquirido el conocimiento pretendido dentro de cada una de ellas, y así poder pasar a la siguiente sesión sin sesgos de aprendizaje o bien, disminuir estos.

Una de las características de estas actividades es que van más encaminadas a evaluar en diferentes momentos el trabajo realizado por alumnos dentro de las sesiones, y presentan características diferentes a las planteadas dentro de las actividades, cuya estructura se asimila a las lecciones mostradas en un libro de texto, esto con el fin de que se promueva en el alumno un grado mayor de razonamiento, a través del desarrollo de problemas cuya solución se genere a través de lo que el alumno ha aprendido.

Estos problemas incluyen: el objetivo y los conceptos involucrados. Por ejemplo:

Problema 1. La feria en su último día ha puesto los siguientes precios: \$50 la entrada y \$15 la vuelta en cada juego. Resuelve lo siguiente.

a) Francisco se gastó \$110 pesos en la feria. Escribe una ecuación que permita calcular el número de vueltas que dio y resuélvela.

b) Ana invitó a su amiga a la feria y le dijo que le pagaría la entrada pero que, los juegos corrían por su cuenta, en total Ana se gastó \$175. Escribe una ecuación que permita calcular el número de vueltas que dio y resuélvela.

c) Plantea una pregunta similar, como la de los incisos a) y b) y resuélvela.

Objetivo: Reforzar el uso del lenguaje algebraico ya aprendido mediante las actividades de la propuesta.

Conceptos involucrados: Términos referidos con respecto a la suma y multiplicación.

Como se podrá observar en estas actividades complementarias, ya no se le va pidiendo al alumno que vaya construyendo paulatinamente la ecuación, se pretende que en estas actividades el alumno haga uso de la misma didáctica que se le proporcionó en las sesiones.

CAPÍTULO 4

APLICACIÓN Y ANÁLISIS DE LA PROPUESTA DIDÁCTICA

En este capítulo se muestra el desarrollo de la aplicación, es decir, la fase de experimentación, en donde se aplicó la propuesta didáctica diseñada cuyo objetivo es disminuir las dificultades que presentan los alumnos con respecto a la transición del lenguaje coloquial al algebraico, en específico con el uso de términos sinónimos de las operaciones que ya conocen como sumatoria, diferencia, multiplicación y división. La aplicación de la propuesta nos permitió recoger la información respecto al desempeño, dificultades y logros de los alumnos en cada una de las sesiones que se llevaron a cabo.

4.1 APLICACIÓN DEL PRETEST

La propuesta didáctica está contemplada para estudiantes de educación básica, secundaria, por lo que recurrimos a una escuela de ese nivel educativo. Una vez preparadas las sesiones y el pretest, se solicitó al Centro de Estudios Las Américas A.C. nos permitieran probar la propuesta didáctica con su grupo de tercer grado de secundaria. Se acordó que por tiempos pertinentes al programa de estudio se aplicara en la semana del 24 al 28 de Junio del 2019.

El pretest fue aplicado el día 24 de junio del presente año y fue aplicado con la intención de conocer el grado de conocimientos previos que tenían consigo los alumnos con respecto a la traducción de enunciados coloquiales a expresiones algebraicas (Véase Anexo B). Se aplicó a un total de 18 alumnos de tercer grado de secundaria, los cuales ya han abordado dicho tema en cursos pasados, en primer grado de secundaria con ecuaciones de la forma $a + x = b, ax = b$ y $ax + b = c$, y en segundo grado con expresiones algebraicas (planteamiento y resolución de éstas), la edad de los alumnos oscilaban entre 14 y 15 años, el 56% de alumnos eran hombres y el 44% fueron mujeres.

La aplicación del pretest, así como de las sesiones se acopló de acuerdo al horario que tenían los alumnos con respecto a la materia, el pretest se aplicó el día lunes a las 8:00 hrs con una duración de 40 minutos. A continuación, en la Tabla 4 se muestran los resultados obtenidos, donde:

A. Respuesta correcta.

B. Respuesta en proceso.

C. Respuesta incorrecta.

D. Respuesta en blanco.

Tabla 4. Tabla general de resultados obtenidos en Pretest.

Ítem	1										2		
Respuesta	***a***	***b***	***C***	***d***	***e***	***f***	***g***	***h***	***i***	***j***	***a***	***b***	***c***
A	33%	17%	17%	**67%**	17%	0%	33%	39%	17%	50%	50%	17%	6%
B	**61%**	44%	72%	33%	78%	56%	44%	**50%**	22%	44%	33%	**67%**	**67%**
C	0%	22%	0%	0%	6%	11%	6%	**11%**	50%	6%	6%	0%	11%
D	6%	17%	11%	0%	0%	**33%**	17%	0%	11%	0%	11%	17%	**17%**

Como se puede observar en la tabla anterior, un porcentaje muy alto de estudiantes tiene una respuesta en proceso, es decir que tiene una idea de cómo debería de ir la expresión algebraica pero no logran concretar dicha acción, ya sea porque confunden la operación o los términos, como por ejemplo en el primer inciso, colocaron el 5 como un exponente (Figura 4.1), y sólo el 33% de los estudiantes logró traducir correctamente el inciso (a). El inciso (d) lograron tener un 67% ya que habían observado la redacción de los anteriores, por lo que sus respuestas fueron muy similares.

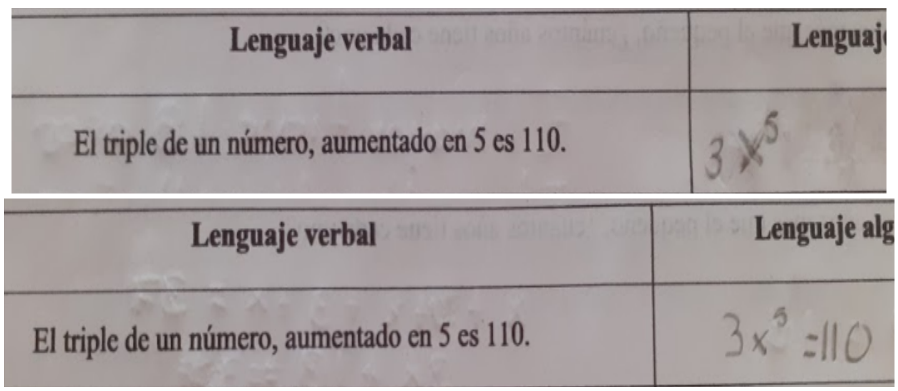


Figura 4.1. Respuesta proporcionada por alumnos a inciso (a) del ítem 1.

En el inciso (f) ningún alumno dio la respuesta correcta, y en este caso en específico, los alumnos obtuvieron el mayor porcentaje de respuesta en blanco, con un 33% (Figura 4.2).

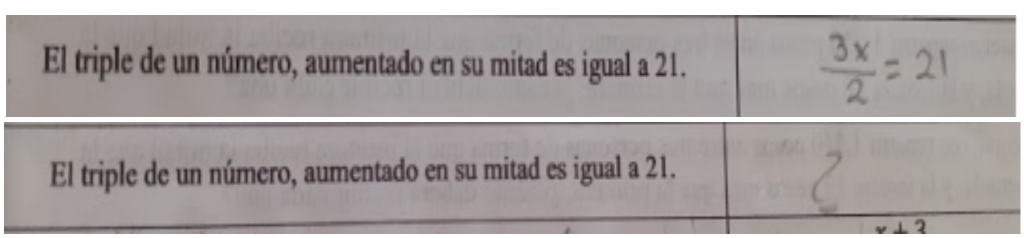


Figura 4.2. Respuesta proporcionada por alumnos a inciso (f) del ítem 1.

En el segundo ítem requería no sólo de la traducción de enunciados coloquiales a expresiones algebraicas, sino que también resolvieran dichas expresiones dando una solución al problema planteado. En el inciso (a) el 50% de los estudiantes lo respondió correctamente, pero en los incisos

(b) y (c) el 67% de ellos se quedaron en el proceso, con el fin de visualizar las respuestas de los estudiantes en el pretest se presenta la siguiente Figura 4.3

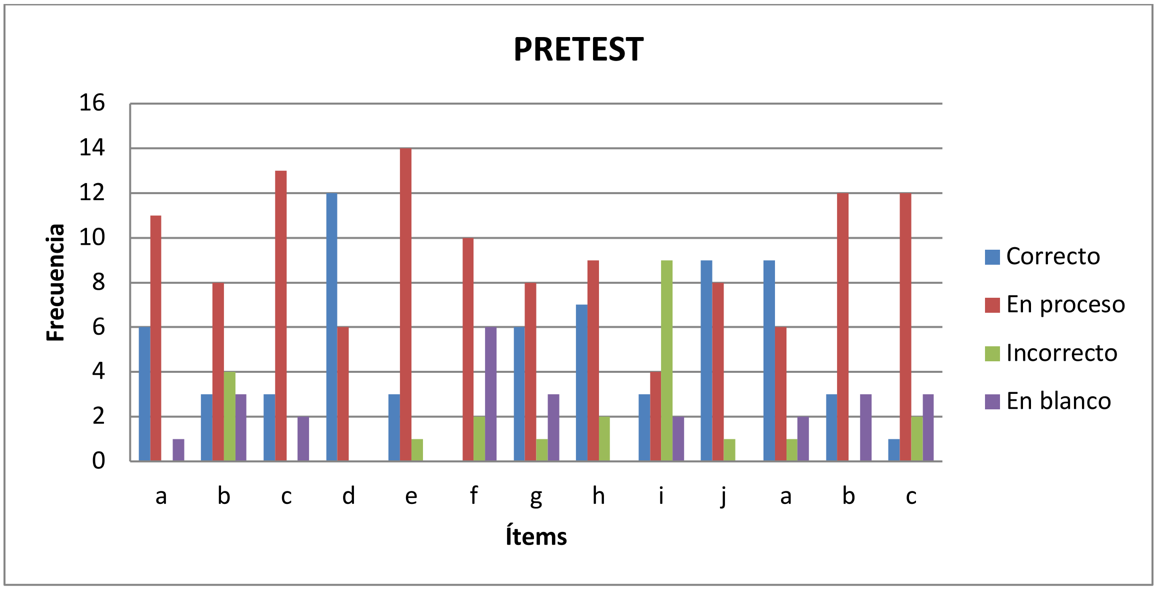


Figura 4.3 Resultados del pretest en alumnos de 3er. Grado de secundaria.

Después de haber obtenido los resultados anteriores en el pretest se procedió a la aplicación de las sesiones, teniendo como objetivo disminuir las dificultades que presentaron los alumnos, obteniendo los resultados que se describen en el siguiente apartado.

4.2 DESARROLLO Y ANÁLISIS DE LAS SESIONES

En esta sección se describe el desarrollo de las actividades que se diseñaron, tres sesiones de 50 minutos y los respectivos horarios establecidos por el Colegio Educativo para la asignatura de Matemáticas, tal y como se muestra en la siguiente Tabla.

Tabla 5. Fechas y horarios de aplicación.

Actividad	Fecha	Hora
Sesión 1	Martes, 25 de Junio 2019	9:40hrs
Sesión 2	Miércoles, 26 de Junio 2019	10:30hrs
Sesión 3	Jueves. 27 de Junio 2019	8:00hrs
Post-test	Viernes, 28 de Junio 2019	11:40hrs

Se describe el horario de cada una de las actividades porque se debe tener en cuenta que el rendimiento que tiene el alumno a las 8:00hrs podría ser diferente al de las 11:40hrs suponiendo que sea debido a la carga curricular que éste tiene durante la jornada estudiantil. A partir de esto, se realizó la recogida de información, para ello se llevó un diario de campo para ir describiendo la interacción que se suscitaba durante el desarrollo de las sesiones, así mismo cada una de las respuestas proporcionadas en las sesiones se calificaron en la misma escala antes mencionada, cabe mencionar que se contó con el apoyo del profesor de Matemáticas de dicho Colegio Educativo.

4.2.1 ANÁLISIS DE LAS SESIONES

Teniendo como información el análisis de cada una de las sesiones, con respecto al desempeño esperado por los alumnos, es decir, *a priori*, a continuación, se presentan los resultados obtenidos en cada una de las actividades, tanto individuales como grupales. Así como una breve reseña de los logros y/o dificultades que presentaron los alumnos en el desarrollo de estas, dando pauta a enriquecer este trabajo.

4.2.1.1 SESIÓN 1. DESAFÍOS MATEMÁTICOS

Empezaremos describiendo la sesión, la cual está estructurada en tres partes, la primera parte *"considera los siguientes desafíos"* se le plantea al alumno el desarrollo de dos desafíos matemáticos que implican el uso del lenguaje algebraico y uso de propiedades geométricas que, en el planteamiento del problema de este trabajo, se pudo observar que nuestra población estudiantil presentaba dificultades en este aspecto. La segunda parte *"Trabajemos juntos"* es una actividad para trabajar colectivamente en el desarrollo de ejercicios que dan continuidad a los planteados en la primera parte, pero con diferentes planteamientos, y por último la tercera parte *"¿Con qué finalizamos?"*, en esta parte se hace el cierre de la sesión con producciones propias del alumno, tanto de manera individual como en pareja (coevaluación). Cabe mencionar que dentro de cada una de las partes se monitoreó el trabajo que iban realizando los alumnos, esto con el fin de indagar si entendían el planteamiento de las actividades o bien, si tenían dudas con respecto a la redacción de éstas.

Considera los siguientes desafíos

La actividad se inició dándoles la indicación de cómo se iba a trabajar la sesión completa, indicándoles que la primera parte sería de manera individual y posteriormente se trabajaría en equipos, y que para ello tendrían 20 y 30 minutos, respectivamente. También se les indicó que cualquier consulta que hicieran sobre la marcha de las actividades serian contestadas con otra pregunta, esto con el fin de no caer en el contrato didáctico.

Los alumnos comenzaron con la primera actividad de esta sección de la sesión, leyendo la siguiente situación problemática:

1 El comité estudiantil organizó la proyección de una película para recaudar dinero para la fiesta de graduación. Antes de dicha proyección había en la caja \$12,000 y después de la proyección aumentó a \$15.500. Ahora el comité desea saber cuántos boletos vendió, si cada boleto tuvo un costo de \$70.

a) ¿Cuánto dinero se recaudó con la proyección de la película? ____________________

b) Si designas con la literal x al número de boletos, ¿cómo expresarías el número de boletos vendidos y su costo? ____________________

c) ¿Cómo expresarías el total de boletos vendidos, a partir de tus respuestas anteriores? ____________________________________

d) ¿Cuántos boletos vendió el comité estudiantil? Utiliza la expresión de tu respuesta anterior. ___________________________________

En esta actividad los alumnos tardaron aproximadamente 10 minutos en leer y contestar las preguntas.

Para el inciso (a) se pudo observar en la revisión de las respuestas proporcionadas que realizaron pequeñas operaciones aritméticas anotadas en un costado de las hojas proporcionadas, el 67% de los alumnos respondieron correctamente, mientras que el resto dejo su respuesta en proceso, esto se consideró en base a que lograron identificar los datos y la operación, pero tuvieron errores aritméticos (Figura 4.4).

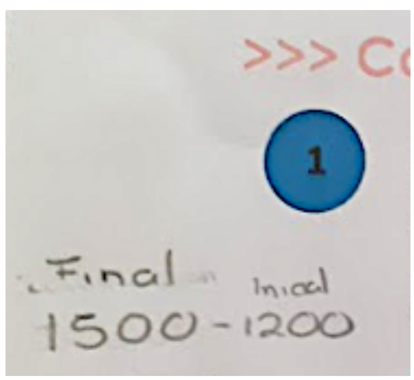


Figura 4.4. Respuestas proporcionadas por alumnos al inciso (a) del ítem 1.

Para el inciso (b) se pudo observar que nueve alumnos respondieron correctamente, dando la respuesta esperada de $70x$, 6 alumnos dejaron su respuesta en proceso y tres alumnos más respondieron incorrectamente o bien dejaron en blanco su respuesta, respectivamente.

Para el caso del inciso (c) el cual se esperaba que los alumnos comenzaran ya con la formulación de la expresión, es decir, $70x = 3500$. Se obtuvieron los resultados que se muestran en la Figura 4.5, de los cuales destacamos que el 44% de los alumnos dejaron su respuesta en proceso, es decir que aún cuando ya tenían las respuestas de los ítems anteriores no lograron asociar ambos respuestas en una expresión completa, ya que dejaron expresadas respuestas como: $70 \times 50 = 3500$ o bien, $x = 50 \times 70$. También se puede observar que un 39% de los alumnos, proporcionó una respuesta incorrecta, esto por que dieron respuestas tales como: 3500, $70x$ o bien, 70.

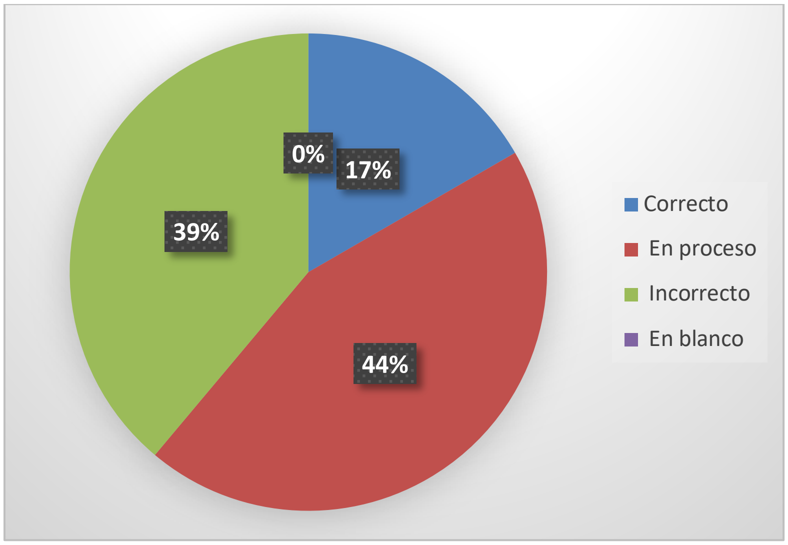
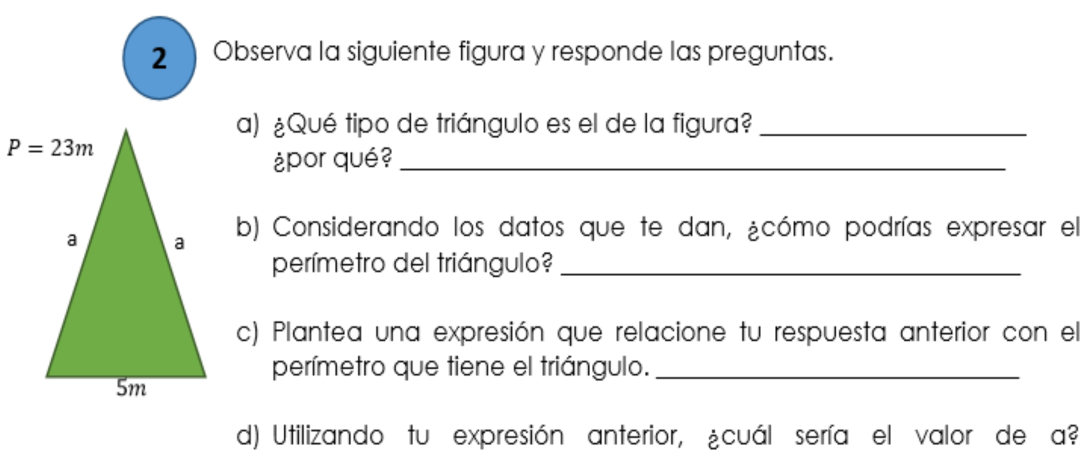


Figura 4.5. Respuesta al inciso (c) del ítem 1.

Por último, para el inciso (d) entraba en acción el alumno al dar como respuesta 50 boletos vendidos, doce alumnos dieron la respuesta correcta, cuatro dejaron su respuesta en proceso y dos más dieron una respuesta incorrecta, ningún alumno dejo en blanco su respuesta.

En la segunda actividad demoraron aproximadamente 12 minutos, contemplando de esta forma los 20 minutos planeados para dicha sección, en donde se les planteó la siguiente situación problemática:



2 Observa la siguiente figura y responde las preguntas.

$P = 23m$

a) ¿Qué tipo de triángulo es el de la figura? ____________________
¿por qué? ____

b) Considerando los datos que te dan, ¿cómo podrías expresar el perímetro del triángulo? ______________________________

c) Plantea una expresión que relacione tu respuesta anterior con el perímetro que tiene el triángulo. ________________________

d) Utilizando tu expresión anterior, ¿cuál sería el valor de a?

Esta actividad se planteó de acuerdo con los resultados obtenidos en la prueba *"Dificultades de Aprendizaje"* donde se mostraba un déficit en el tema relacionado con la geometría, caso particular del cálculo de perímetros y áreas, obteniendo los resultados que se describen a continuación.

Para el inciso (a) dieciséis alumnos contestaron correctamente, es decir, lograron identificar que correspondía a un triángulo isósceles, y dos más contestaron que era equilátero y rectángulo, respectivamente, sin embargo en la justificación de su respuesta, todos proporcionaron la misma característica, de que poseía dos lados de la misma longitud, por lo que suponemos que tuvieron una confusión con respecto al nombre, pero no a la característica que posee.

Cabe mencionar que al finalizar la sesión y después de haber recogido las hojas de trabajo, se le preguntó al grupo ¿cómo se habían dado cuenta de que era un triángulo isósceles? Dando como respuesta que *"tenían dos lados iguales",* por lo que se les preguntó nuevamente, ¿cómo sabían que eran iguales? Dando como respuesta que *"se veían iguales"*, *"eran del mismo tamaño"*, o bien, *"porque los dos tenían a",* por lo que suponemos que los alumnos si logran asociar que la literal representa una magnitud y al ser la misma, deben ser iguales en magnitud.

Para el inciso (b) se esperaba que los alumnos haciendo uso de sus conocimientos previos con respecto al cálculo del perímetro, formularan la expresión: $P = a + a + 5$ o bien, una equivalente, $P = 2a + 5$. El 44% de los alumnos dieron una respuesta correcta (Figura 4.6), es decir expresaron alguna de las antes mencionadas y el 39% de ellos dejaron en proceso su respuesta, considerando que dieron respuestas como: *a+a+5 y "sumando sus lados",* sin igualar al perímetro. También se destaca que el 11% de los alumnos dejaron su respuesta en blanco, por lo que supondríamos no recordaban como se calculaba el perímetro.

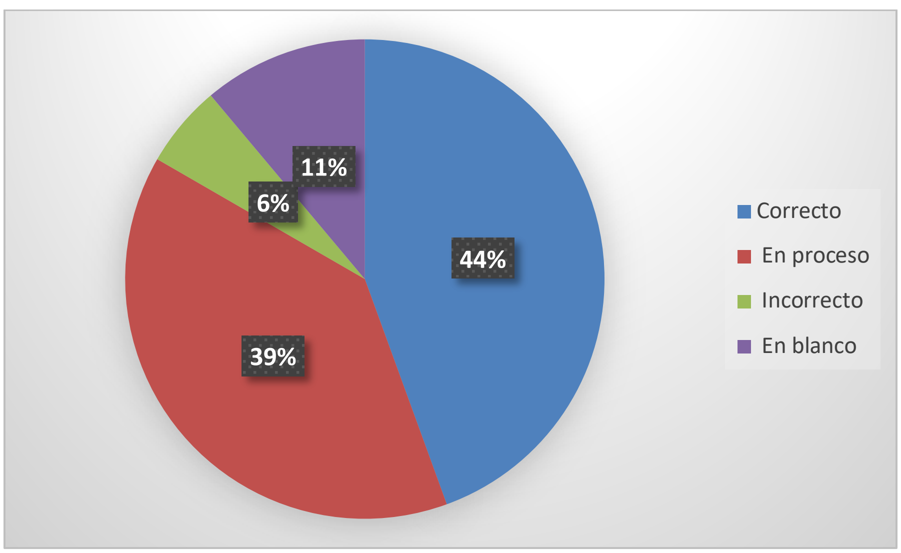


Figura 4.6. Respuesta al inciso (b) del ítem 2.

Para el inciso (c) se esperaba que los alumnos entraran en una situación de acción, desarrollando la expresión completa de *23=a+a+5* o bien, una equivalente, *23=2a+5*. Nueve alumnos contestaron alguna de las opciones antes mencionadas, seis dejaron su respuesta en proceso dando respuestas como la que se muestra en la Figura 4.7, donde incluso ponía las magnitudes correspondientes. Sólo tres alumnos dieron una respuesta incorrecta, ya que no denotaban la expresión algebraica a pesar de haber contestado los ítems anteriores.

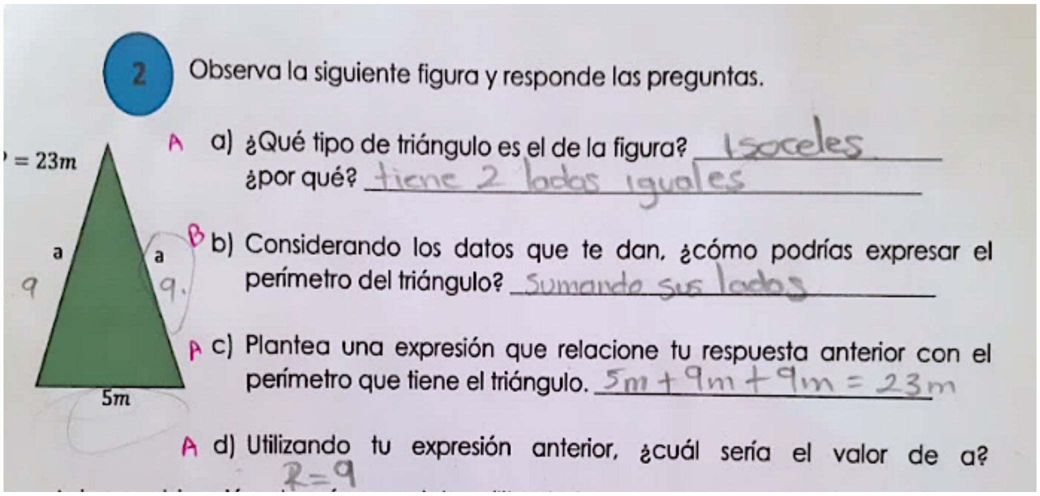


Figura 4.7. Respuesta proporcionada por un alumno al ítem 2.

Para el inciso (d) se esperaba que los alumnos realizaran la acción de trabajar con la expresión algebraica que ya habían formulado, dando como respuesta *9m.* En tal situación el 56% de los alumnos (Figura 4.8) obtuvieron una respuesta en proceso, ya que por cuestiones de aritmética no lograron llegar al resultado correcto.

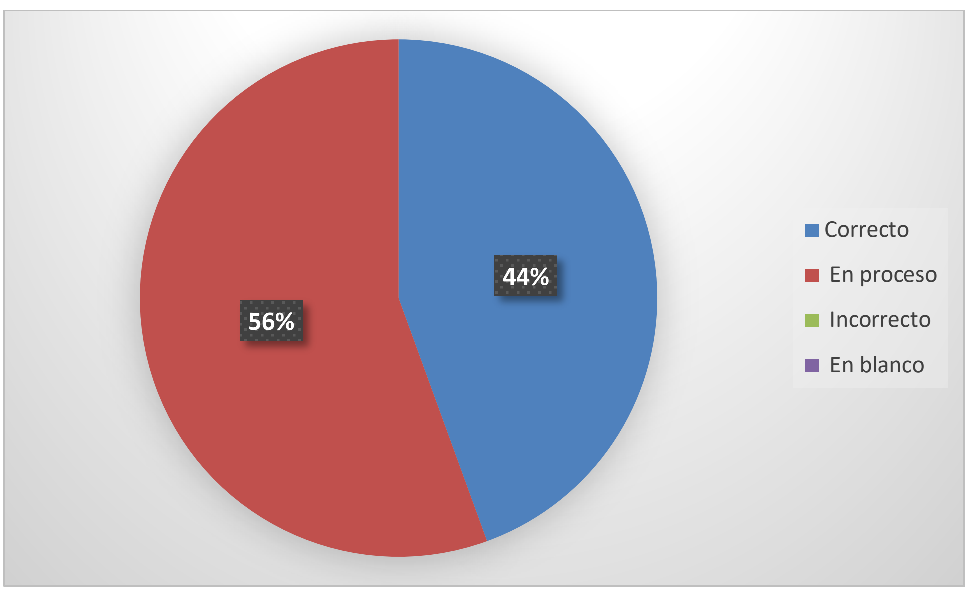


Figura 4.8. Respuestas al inciso (d) del ítem 2.

Después de haber realizado las actividades de esta sección, conforme iban terminando los alumnos se iban conformando los equipos de trabajo, conformados por tres alumnos, para continuar con la siguiente sección: *"Trabajemos juntos"*.

Trabajemos juntos

Se conformaron en total seis equipos de trabajo conformados por tres alumnos, dando un lapso de 15 minutos para completar las actividades de esta sección, obteniendo los resultados que a continuación se describen.

Los equipos de trabajo se enfrentaron a la siguiente situación problemática, cabe mencionar que fueron planteamientos dando continuidad a los de la primera sección, pero con un mayor grado de dificultad.

>>> Trabajemos juntos

Ahora el comité ha propuesto rifar una Tablet para recaudar más fondos. Para ello cada boleto ha de costar $130.

Juan ha pagado con un billete de $500 y le han devuelto $110 de cambio, ¿cuántos boletos ha comprado? Para averiguarlo, resuelve las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál de las siguientes ecuaciones expresa correctamente la situación de Juan? Suponiendo que se designa con la literal x al número de boletos.

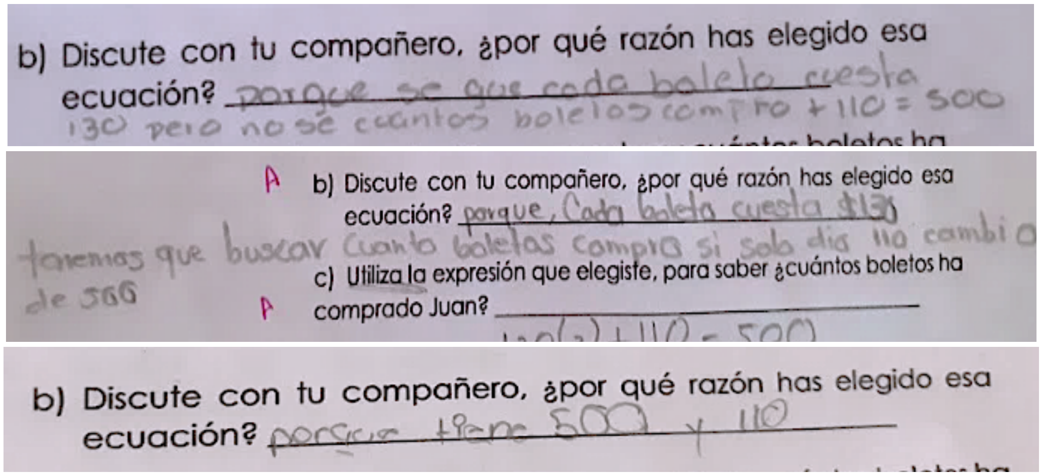
$x + 130 = 500$ $\quad$ $110x + 130 = 500$ $\quad$ $130x + 110 = 500$

$500x - 130 = 110$

b) Discute con tu compañero, ¿por qué razón has elegido esa ecuación? ________________________________

c) Utiliza la expresión que elegiste, para saber ¿cuántos boletos ha comprado Juan? ________________________________

Para el inciso (a) se esperaba que los equipos eligieran en base a la información proporcionada la expresión $130x + 110 = 500$. Cuatro de los equipos eligieron correctamente la expresión, mientras que el resto dejo su respuestas en proceso, para justificar porque fueron respuestas en proceso al ser de elección múltiple y estar ya formuladas, fue porque eligieron la expresión $110x + 130 = 500$, en cuya justificación expresada en el inciso (b), se pudo observar que confundieron el precio del boleto con el cambio proporcionado, pero estaban conscientes de que ambos valores tendrían que dar el total del billete de $500.


b) Discute con tu compañero, ¿por qué razón has elegido esa ecuación? porque se que cada boleto cuesta 130 pero no se cuantos boletos compro + 110 = 500

A b) Discute con tu compañero, ¿por qué razón has elegido esa ecuación? porque, Cada boleto cuesta $130 tenemos que buscar Cuanto boletos compro si solo dio 110 cambio de 500

c) Utiliza la expresión que elegiste, para saber ¿cuántos boletos ha comprado Juan?

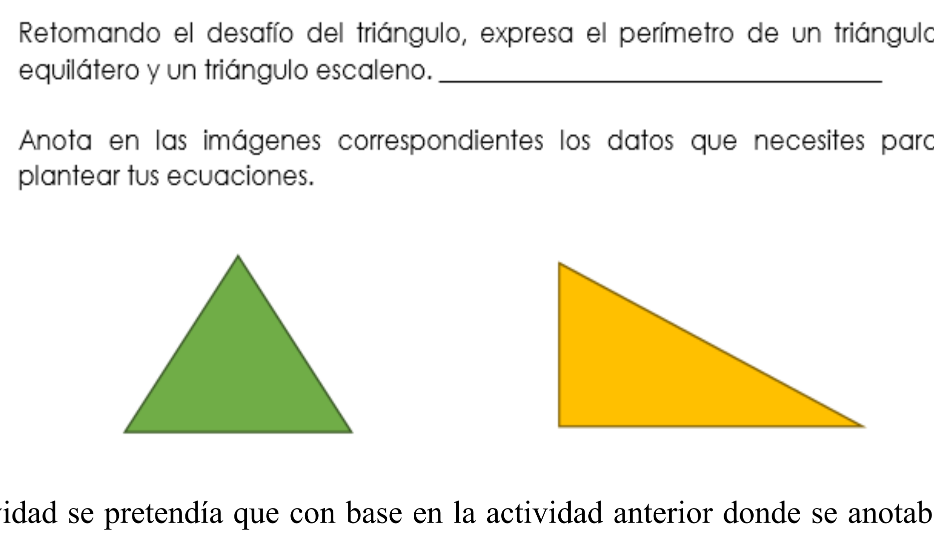
b) Discute con tu compañero, ¿por qué razón has elegido esa ecuación? porque tiene 500 y 110

Figura 4.9. Respuestas proporcionadas por alumnos al inciso (b) del ítem 1.

Para el inciso (c) doce alumnos contestaron correctamente desarrollando la expresión que eligieron dando como respuesta 3 boletos, tal y como se esperaba. El resto del grupo dejó una respuesta en proceso, ya que al elegir erróneamente la expresión el resultado fue incorrecto, o bien, porque el desarrollo de la expresión para dar la solución quedó inconcluso por cálculos aritméticos.

De esta última respuesta, pudimos observar que el grupo necesitaba reforzar la resolución de ecuaciones de primer grado de la forma $ax + b = c$ por lo que esta actividad permitió que el profesor de la asignatura pudiera ver los déficits con los cuales debe trabajar, por lo que hasta el momento pudimos ver que la justificación del trabajo se estaba cumpliendo.

La siguiente situación problemática mencionaba:


Retomando el desafío del triángulo, expresa el perímetro de un triángulo equilátero y un triángulo escaleno. ________________________________

Anota en las imágenes correspondientes los datos que necesites para plantear tus ecuaciones.

En esta actividad se pretendía que con base en la actividad anterior donde se anotaban los datos necesarios para calcular el perímetro del triángulo isósceles, ellos pudieran hacer algo semejante. Por lo que antes de que comenzaran con la actividad se les preguntó ¿qué tipo de triángulo eran los que estaban representados en las imágenes? Dando como respuestas: triángulo equilátero y triángulo rectángulo. Posteriormente se les preguntó ¿qué características podrían decir de cada uno de ellos? Mencionando que el triángulo equilátero tenía todos sus lados iguales, mientras que el triángulo rectángulo no tenía ningún lado igual. A partir de ellos se obtuvieron los resultados que se describen a continuación.

Para el inciso (a) seis equipos lograron expresar de manera correcta el perímetro de los triángulos que se les presentó, dando expresiones como: $P = x + x + x$, $P_e = l + l + l$, o bien, $P = a + a + a$ para el caso del triángulo equilátero, mientras que para el triángulo escaleno, formularon expresiones como: $P = x + y + z$ y $P = a + b + c$, cabe mencionar que en todas las expresiones que formularon asociaron la P a $Perímetro$.

Los otros dos equipos no lograron expresar correctamente el perímetro, dando como respuestas: $a + a + a, x + x + x$, o bien, proporcionando magnitudes, como 5m+5m+5m para el caso del triángulo equilátero, mientras que para el triángulo escaleno dejaron expresado únicamente magnitudes, esto mismo lo reflejaron en sus respuestas al inciso (b) (Figura 4.10).

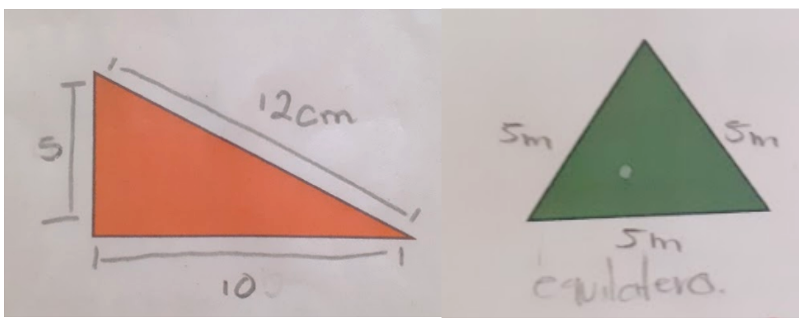


Figura 4.10. Respuestas proporcionadas al inciso (b) del ítem 2.

Después de haber terminado esta sección y conforme iban terminando se reagruparon nuevamente los equipos, esto con la finalidad de que se rotaran los alumnos, recordemos que Brousseau nos menciona que es precisamente en las situaciones de formulación, donde el alumno debe de hacer un intercambio de información con una o varias personas, en este caso para trabajar la última sección: *¿Con qué finalizamos?* trabajaron en parejas.

¿Con qué finalizamos?

Se conformaron en total nueve parejas de trabajo, dando un lapso de 10 minutos para completar las actividades de esta sección, obteniendo los resultados que a continuación se describen.

Las parejas de alumnos se enfrentaron a la siguiente situación, dando los resultados que se describen a continuación.

› ¿Con qué finalizamos?

En parejas, plantea una ecuación para cada una de las siguientes situaciones, o en caso contrario un enunciado para la ecuación.

a) Pienso un número que, al aumentarlo en 5, obtengo 7. ________________
b) Un número menos 33 da como resultado 114. ________________
c) Al sumarle 4 a un número me da 12. ________________
d) $x - 3 = 2$ ________________
e) Pienso un número que, al disminuirlo en 3, obtengo 7. ________________
f) $x + 12 = 18$ ________________
g) Un número mas 11 da como resultado 45. ________________

Para los incisos (a) y (b) se esperaba que dieran las respuestas: $x + 5 = 7$ y $x - 33 = 144$, respectivamente, con sus diferentes variaciones con respecto a la literal. Los nueve equipos conformados dieron una respuesta correcta para los incisos.

Para el inciso (c) se esperaba que los alumnos dieran como respuesta $x + 4 = 12$, con sus diferentes variaciones con respecto a la literal. Siete parejas dieron una respuesta correcta, sin embargo, dos equipos dejaron una respuesta en proceso, debido a que completaron aritméticamente la expresión, es decir denotaron: $4 + 8 = 12$, o bien, $8 + 4 = 12$, aún cuando la respuesta es correcta, recordemos que la instrucción exige el planteamiento de una ecuación.

Para los incisos (d), (e) y (f) se esperaba que los alumnos dieran las respuestas: $Un\ número\ menos\ 3\ da\ como\ resultado\ dos$, $x - 3 = 7$ y $Pienso\ un\ número\ que\ al\ aumentarlo\ en\ 12,\ obtengo\ 18$, respectivamente. Ocho parejas dieron las respuestas correctas, con sus diferentes variaciones con respecto a la literal y el planteamiento del enunciado, sólo una pareja dejo su respuesta en proceso en ambos incisos, porque dieron como respuesta: $a\ x\ le\ quito\ 3\ y\ obtengo\ 2$, $a\ x\ le\ aumento\ 12\ y\ obtengo\ 18$, o bien, aritméticamente: $10 - 3 = 7$.

Hacemos hincapié que las respuestas que se exigían en la instrucción era el planteamiento de una ecuación, y en el caso de la redacción del enunciado, aun cuando utilizan las palabras *quito* y *aumento*, simplemente están trasladando lo que ven visualmente pero no hacen como tal la formulación de un enunciado.

Para el caso del último inciso, todas las parejas lograron la respuesta esperada de $x + 11 = 45$, con sus diferentes variaciones con respecto a la literal empleada.

En la última actividad de la sesión, se pretendía que el alumno identificara las palabras clave que se habían trabajado durante las actividades y con mayor refuerzo en los incisos anteriores. Posteriormente en los minutos restantes se llevó a cabo la escritura de los enunciados para que se llevara a cabo la coevaluación, sin embargo, por falta de tiempo, sólo se logró que escribieran los enunciados, o bien, una expresión algebraica (Figura 4.11).

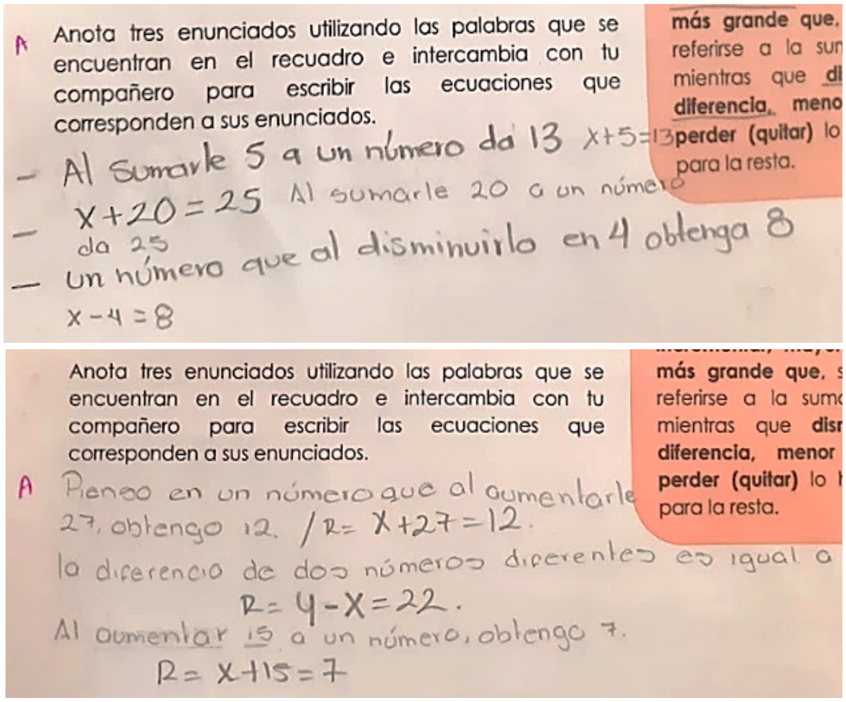


Figura 4.11. Respuestas de alumnos al inciso (b) del ítem 2.

4.2.1.2 CONCLUSIONES DE LA SESIÓN 1. DESAFÍOS MATEMÁTICOS

Podemos decir que de manera general la aplicación de la primera sesión reflejo un buen desempeño de los alumnos, así como de una buena disposición para trabajar. En la parte individual se había planeado un tiempo de 10 minutos y estuvimos dentro del tiempo estipulado, aun cuando al principio se pudo observar que tardaron un poco en comprender los planteamientos de los problemas y de alguna manera esperaban que el profesor de la asignatura o yo les ayudáramos a resolver alguna situación, poco a poco fueron entendiendo y familiarizándose con la dinámica de trabajo, arrojando los resultados antes mostrados. En tanto a las actividades que se diseñaron para trabajar en equipo, en un principio los alumnos querían trabajar con los compañeros de siempre, sin embargo, con el fin de que no hicieran equipos *"los buenos"* con *"los buenos"*, o bien, *"los malos"* con *"los malos", "los amigos",* etc. y hubiera aleatoriedad, se iban conformando los equipos de trabajo conforme iban terminando y acatando también la recomendación del profesor del grupo, quien conocía mejor cada uno de ellos. Esto generó que un principio los alumnos no se sintieran en confianza para trabajar, sin embargo, en tanto empezaron a discutir sus respuestas se empezaron a integrar y a trabajar de manera ordenada, también se pudo observar que hicieron menos preguntas que en la parte individual, ya que había retroalimentación con sus mismos compañeros, también se denota el hecho de haber conformado tríos para trabajar ya que quizá de haber incluido más integrantes hubieran tardado más en aterrizar sus ideas. Por último, en la segunda parte de trabajo conjunto, el hecho de trabajar en parejas y deshacer los tríos fomentó que las discusiones que se habían hecho con anterioridad permitieran redactar o expresar de manera correcta cada uno de los incisos, y eso se reflejó en el hecho de que sólo un par de parejas dejara en proceso sus respuestas, tal y como se mostró con anterioridad, aunque nos faltó tiempo para llevar a cabo la coevaluación de la última actividad, todos los alumnos lograron expresar algebraicamente enunciados coloquiales y viceversa, haciendo uso de los nuevos términos que deseábamos, haciendo referencia a la operación de sumatoria, y aunque algunas respuestas pudieron haber sido mejores se hicieron notar las respuestas esperadas que se señalaban en el análisis *a priori*.

4.2.2.1 SESIÓN 2. NEGOCIOS Y MÁS NEGOCIOS

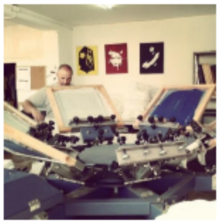
Empezaremos describiendo la sesión, la cual está estructurada en cuatro partes, en la primera parte *"considera los siguientes casos"* se le plantea al alumno el trabajo individual de la problemática que presentan dos negocios, dichas actividades implican el uso del lenguaje algebraico con respecto a la multiplicación. La segunda parte *"Trabajemos juntos"* es una actividad para trabajar colectivamente en el desarrollo de ejercicios que dan continuidad a los planteados en la primera parte, pero con diferentes planteamientos y un grado mayor de dificultad. La tercera parte *"Algo más"*, involucra actividades referentes al uso de expresiones con fracciones, esto debido a que en el pretest se pudo observar que los alumnos presentaban dificultades con este aspecto, y por último *¿Con qué finalizamos?"*, en esta parte se hace el cierre de la sesión con producciones propias del alumno, tanto de manera individual como en pareja (coevaluación). Nuevamente se hace mención que dentro de cada una de las partes de la sesión se monitoreó el trabajo que iban realizando los alumnos, esto con el fin de indagar si entendían el planteamiento de las actividades o bien, si tenían dudas con respecto a la redacción de éstas.

Considera los siguientes casos

La actividad se inició dándoles nuevamente la indicación de cómo se iba a trabajar la sesión completa, indicándoles que sería la misma dinámica que en la primera sesión, es decir, la primera parte sería de manera individual y posteriormente se trabajaría en equipos, y que para ello tendrían 20 y 30 minutos, respectivamente. También se les recordó que cualquier consulta que hicieran sobre la marcha de las actividades serian contestadas con otra pregunta, esto con el fin de no caer en el contrato didáctico.

Los alumnos comenzaron con la primera actividad de esta sección de la sesión, leyendo la siguiente situación problemática:

>>> Considera los siguientes casos



José quiere montar una serigrafía, para ello necesita comprar una imprenta y materia prima como pintura y playeras. Después de estas compras se ha dado cuenta de que cuatro veces el capital que ha invertido representa $120,000.
Como primer pedido, un equipo de futbol le ha encargado la impresión de sus playeras, les han gustado tanto que ha pedido el doble de juegos, en total ha cobrado $2,550 por el trabajo, del cual $1,000 corresponden a la materia prima.

a) Del primer pedido que ha sacado Juan con las playeras de futbol, ¿cuánto ha sido su ganancia? ______________________________

b) Si designas con la literal x al número de juegos de playeras, ¿cómo expresarías el total que han pedido? __________________________

c) ¿Cuál fue el precio de venta de cada juego de playeras? Utiliza tus respuestas anteriores. ______________________________________

d) ¿Cómo expresarías el capital que ha invertido José en su negocio? ________________________________

Para el inciso (a) se esperaba que con la información que se les proporciona en el planteamiento del problema, puedan hacer el cálculo aritmético de: $\$2{,}550 - \$1{,}000 = \$1550$. El 94% de los alumnos (Figura 4.12) identifico correctamente los datos y la operación aritmética que tenían que realizar, mientras que el resto, contestó incorrectamente el inciso, dando como respuesta $3,550.

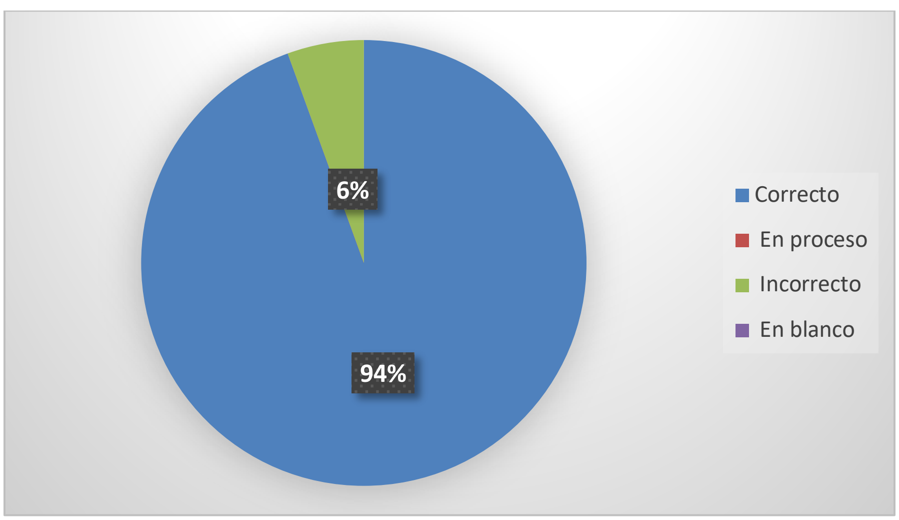


Figura 4.12. Respuestas al inciso (a) del ítem 1.

Para el inciso (b) se esperaba que el alumno identificara que en total se han pedido tres juegos, y expresaran: $x + 2x$, o bien, $3x$. El 72% de los alumnos expresaron de manera correcta el número de juegos de playeras, mientras que el resto sólo logro identificar el doble de juegos, dejando una respuesta en proceso, es decir, $x + x$, o bien, $2x$.

Para el inciso (c) se esperaba que el alumno expresara $3x = 2550$ y a partir de ello pudieran decir el precio de cada juego, equivalente a \$850. Once alumnos lograron expresar de manera correcta la ecuación que representa el precio de venta de cada juego de playeras, y por lo tanto dieron el costo de cada juego (Figura 4.13). Mientras que el resto del grupo expresó $3x = 1550$, por lo que el precio de venta de cada juego que dieron fue de \$516.66, esto puede deberse a que la redacción del ítem menciona que utilice sus respuestas anteriores, y en el primer inciso dieron como respuesta la cantidad de \$1550, sin embargo, tenían que comprender que el precio del juego involucra también la ganancia del negocio.

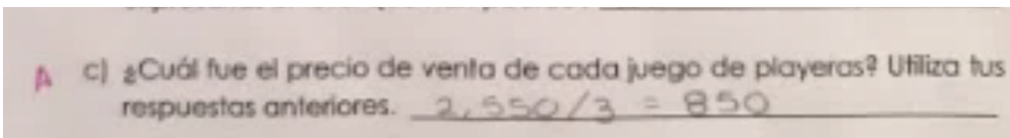


Figura 4.13. Respuesta de un alumno al inciso (c) del ítem 1.

Para el inciso (d) se esperaba que el alumno expresara $4x = 120{,}000$. El 94% de los alumnos expresaron correctamente el capital invertido en la serigrafía, dando como respuesta $4x = 120{,}000$ o equivalentes como: $4v = 120{,}000, c + c + c + c = 120{,}000$, mientras que el resto del grupo dio una respuesta en proceso ya que lo expresó aritméticamente: $120{,}000/4 = 30{,}000$, cabe mencionar que aún cuando es una respuesta correcta, no se pedía el monto de la inversión, sino una expresión que denotara dicha inversión.

Para el segundo ítem, se les planteó la siguiente problemática:

En la CDMX los autos Uber cuentan con taxímetro, Martín ha decidido entrar a trabajar en Uber, pero aún no cuenta con él. La empresa le ha comentado que debe cobrar \$35 de cuota fija más \$2.75 por cada kilómetro recorrido. Después de realizar su primer viaje, a Karla le ha llegado su recibo por \$65.25, ¿cuántos kilómetros ha recorrido en su primer viaje Martín?

a) Si designas con la literal x a los kilómetros recorridos, ¿cómo expresarías la tarifa sólo por kilómetro recorrido? ____________________

b) Considerando los datos que te dan, ¿cómo podrías expresar la tarifa con la cuota fija? Utiliza tu respuesta anterior. ____________________

c) Plantea una expresión que relacione tus respuestas anteriores para poder calcular los kilómetros que ha recorrido Martín en su primer viaje.

____

Para el inciso (a) se esperaba que los alumnos contestaran $2.75x$, con base a la información proporcionada en el planteamiento del problema, para lo cual el 100% de los alumnos expresó correctamente la respuesta esperada.

Para el inciso (b) se esperaba con base a su respuesta en el ítem anterior, pudieran expresar $2.75x + 35$. El 78% de los alumnos proporcionó la respuesta esperada (Figura 4.14), sin embargo, el 22% de los alumnos se consideró su respuesta como en proceso, ya que, haciendo omisión de su respuesta en el inciso anterior, expresaron: $35x + 2.75$, es decir invirtieron la información, pero lograron identificar los datos que tenían que estar presentes en la expresión. Esto se ve reflejado en la respuesta del siguiente inciso, ya que al expresar $35x + 2.75 = 65.25$, dieron como respuesta $1.78km$, siendo que la respuesta correcta es $11km$.

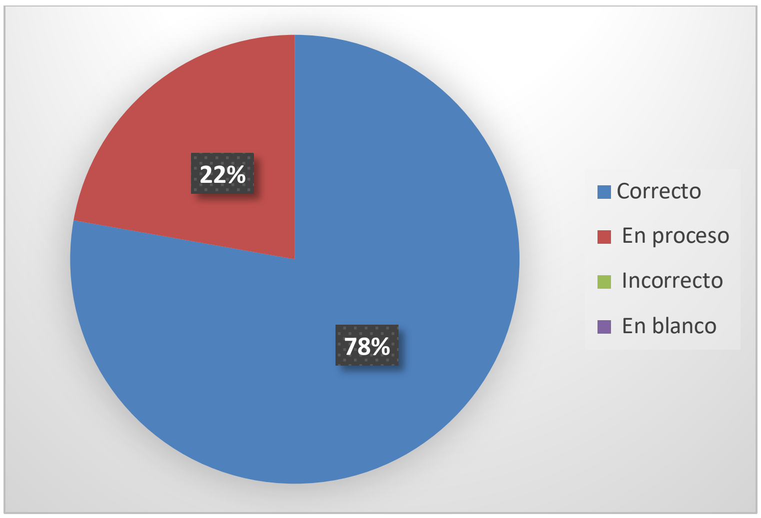


Figura 4.14. Respuesta de los alumnos al inciso (b) del ítem 2.

Después de haber realizado las actividades de esta sección, conforme iban terminando los alumnos se iban conformando los equipos de trabajo, formados por tres alumnos, para continuar con la siguiente sección: *"Trabajemos juntos"*.

Trabajemos juntos

Se conformaron en total seis equipos de trabajo formados por tres alumnos, dando un lapso de 15 minutos para completar las actividades de esta sección, obteniendo los resultados que a continuación se describen.

Los equipos de trabajo se enfrentaron a la siguiente situación problemática, cabe mencionar que fueron planteamientos dando continuidad a los de la primera sección, pero con un mayor grado de dificultad.

>>> Trabajemos juntos

José ha tenido más pedidos de serigrafía, y como es fin de ciclo escolar varios grupos le han pedido su playera de generación. Y se ha dado cuenta de que cuatro veces la venta de las playeras le da un total de \$3,975 y ha invertido \$1,325 en materia prima.

a) ¿Cuál ha sido la ganancia por la venta realizada de playeras de generación? ________________________________

b) ¿Cómo expresarías algebraicamente, cuatro veces la venta de playeras? ________________________________

c) Utilizando tus respuestas anteriores, ¿cuál ha sido la venta de playeras de generación? ___________________________

Discute con tus compañeros tus respuestas, y observa si han utilizado la misma literal.

Para los incisos (a) y (b) se esperaba que los alumnos dieran por respuestas: $\$2{,}650$ y $4x$, respectivamente. En donde el 100% de los alumnos dieron dichas respuestas, nuevamente se observó que los estudiantes anotaron operaciones aritméticas (Figura 4.15) a un costado del inciso, también se pudo observar que entre los equipos discutieron el hecho de que cuatro veces la venta se asemejaba al primer problema donde decía cuatro veces el capital, por lo que pudieron expresar con mayor claridad $4x$.

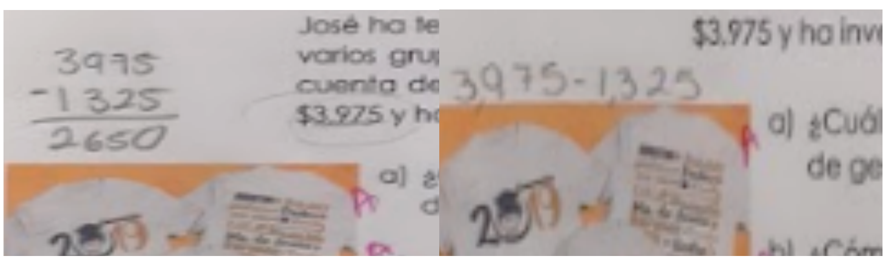


Figura 4.15. Respuesta de los alumnos al inciso (a) del ítem 1.

Para el inciso (c) se esperaba que los alumnos expresaran $4x = 3975$ y que a partir de ello dieran la respuesta de $\$993.75$ correspondiente a la venta. Cinco equipos dieron la respuesta correcta, se pudo observar que dentro de los equipos hubo discusión con respecto a la igualdad de la ecuación, ya que esta vez consideraron el total de dinero que se recaudó con la impresión de las playeras, a raíz de sus respuestas en la parte individual. Sólo un equipo dejo su respuesta en proceso, debido a que volvieron asociar la respuesta del inciso (a) en su expresión, por lo que su respuesta con respecto a la venta fue de $\$662.5$.

Los alumnos tardaron 10 minutos en contestar esta actividad por lo que para el segundo ítem tuvieron más tiempo para contestar, enfrentando la siguiente problemática:

Retomando el caso de Martín, Uber le ha mandado una tabla mostrando la siguiente información.

Cliente	Alejandro	Tomás	María	Roberto	Claudia
Cobro total	$67.50	$51.50	$84.50	$103.75	$92.75

Escribe una ecuación para cada caso, resuélvelas y escribe el número de kilómetros recorridos por los clientes.

Alejandro ________________ Kilómetros recorridos ____________
Tomás ________________ Kilómetros recorridos ____________
María ________________ Kilómetros recorridos ____________
Roberto ________________ Kilómetros recorridos ____________
Claudia ________________ Kilómetros recorridos ____________

De las ecuaciones anteriores, ¿puedes notar algún patrón? ________
¿cuál? ______________________________

Para los incisos (a), (b), (c), (d) y (e) se esperaba que los alumnos dieran como respuesta la expresión $2.75x + 35$, asociando la igualdad a cada caso que se les presenta. En este caso cinco equipos dieron la respuesta correcta (Figura 4.16), asociando correctamente la expresión con cada igualdad, además de ello resolviendo correctamente la expresión y dando los kilómetros que se recorrieron en cada caso, sin embargo, un equipo dejó en proceso su respuesta, ya que, si dieron la expresión esperada con las igualdades, pero en la resolución no llegaron al kilometraje de cada caso, debido a un cálculo aritmético.

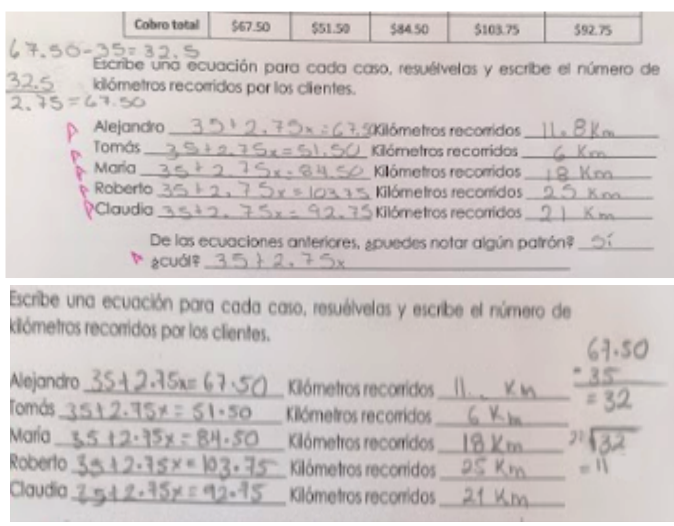


Figura 4.16. Respuesta de los alumnos al ítem 2.

Para el inciso (f) todos los equipos proporcionaron la respuesta esperada, notando el patrón correspondiente a la expresión $2.75x + 35$.

Después de haber realizado las actividades de esta sección, siguieron trabajando en los mismos equipos, para continuar con la siguiente sección: *“Algo más…”*.

Algo más…

Los equipos de trabajo se enfrentaron a la siguiente situación problemática, en la cual se trabajaba con fracciones ya que en el pretest se notó que si tenían dificultades con expresar cocientes. En dicha actividad los alumnos se tomaron 15 minutos

>>> Algo más...

Los Pericos de Puebla es un equipo de la Liga Mexicana de Béisbol cuya sede es la Capital del Estado de Puebla, y desde el 16 de Junio de 1973, su casa es el Estadio Hermanos Serdán y ha ganado cuatro campeonatos a lo largo de su historia.

Actualmente su casa, el Estadio Hermanos Serdán, se encuentra bajo ciertas modificaciones para beneficios de la afición a la novena verde como las butacas, los baños y las secciones bien identificadas.
Para empezar con las modificaciones han acordado cambiar tres cuartas partes de las butacas, que equivalen a 9,084 butacas y pintar el resto.

a) ¿Cómo expresarías matemáticamente, tres cuartas partes? ________

b) Si designas con la literal x al total de butacas, ¿cómo expresarías algebraicamente tres cuartas partes de la capacidad del Estadio? ____________________

c) Escribe la ecuación correcta para determinar la capacidad total del Estadio Hermanos Serdán. Utiliza tus respuestas anteriores. ____________________

d) Haciendo uso de la ecuación que escribiste, ¿cuál es la capacidad total de la casa de los Pericos de Puebla?

Para los incisos (a) y (b) se esperaba que los alumnos dieran como respuestas ¾ y $3/4x$, respectivamente. El 100% de los equipos no tuvieron dificultad en expresar correctamente las respuestas de cada inciso.

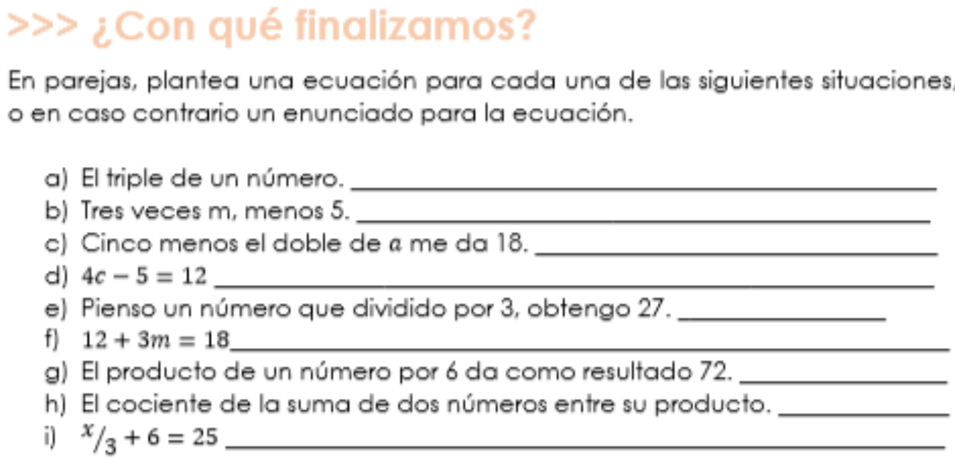
Para los incisos (c) y (d) se esperaba que los alumnos dieron como respuestas $3/4x = 9{,}084$ y su resolución de 12, 112 butacas, respectivamente. En este caso, cinco equipos dieron las respuestas correctas y se pudo observar que hubo discusiones dentro de los equipos con respecto a la resolución de la ecuación. Sólo un equipo presentó una respuesta en proceso, nuevamente por causa de los cálculos aritméticos, ya que al ser una fracción se les dificultó dar resolución a la ecuación.

Esta actividad en específico no les llevo mucho tiempo dar resolución, y al ir terminando esta sección se desintegraron los equipos para ir conformando las parejas para trabajar en la siguiente sección *"¿Con qué finalizamos?"*.

¿Con qué finalizamos?

Se conformaron en total nueve parejas de trabajo, dando un lapso de 10 minutos para completar las actividades de esta sección, obteniendo los resultados que a continuación se describen.

Las parejas de alumnos se enfrentaron a la siguiente situación, dando los resultados que se describen a continuación.

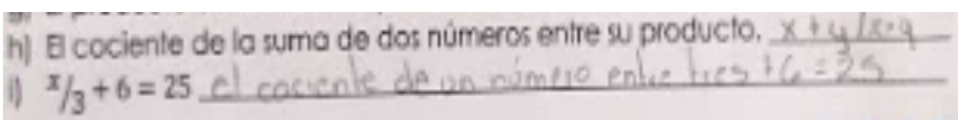


>>> ¿Con qué finalizamos?

En parejas, plantea una ecuación para cada una de las siguientes situaciones, o en caso contrario un enunciado para la ecuación.

a) El triple de un número. ____________
b) Tres veces m, menos 5. ____________
c) Cinco menos el doble de a me da 18. ____________
d) $4c - 5 = 12$ ____________
e) Pienso un número que dividido por 3, obtengo 27. ____________
f) $12 + 3m = 18$ ____________
g) El producto de un número por 6 da como resultado 72. ____________
h) El cociente de la suma de dos números entre su producto. ____________
i) $x/_3 + 6 = 25$ ____________

Para los incisos (a), (b), (e), (g) e (i) las nueve parejas contestaron correctamente, con sus diferentes variaciones con respecto a la literal. Se pudo observar que las parejas discutían con respecto al inciso (i), debido a la forma de redacción, entre las cuales se destacan: "*el cociente de un número entre tres + 6=25"* (Figura 4.17) y "*la tercera parte de un número más seis da veinticinco*". Cabe destacar que esta vez se considera correcta la respuesta proporcionada y no en proceso, porque utilizaron el lenguaje con el cual se pretendía que el alumno se familiarizara, haciendo uso de la palabra *cociente*.



h) El cociente de la suma de dos números entre su producto. x+y/x·y
i) $x/_3 + 6 = 25$ el cociente de un número entre tres +6=25

Figura 4.17. Respuesta de un alumno al inciso (i) del ítem 1.

Para los incisos (c), (d) y (f) ocho de las nueve parejas contestaron correctamente, sólo un equipo se consideró su respuesta en proceso, ya que en el inciso (c) se especificaba la literal a usar, por lo que no se aceptaba variaciones con respecto a ésta. Además, en los incisos (d) y (f), tan sólo trasladaron lo que se veía visualmente, sin hacer uso de alguna de las palabras con las cuales ya se había trabajado durante la sesión.

Para el inciso (h) se esperaba que los alumnos dieran por respuesta $\frac{x+y}{xy}$ con sus diferentes variaciones con respecto a la literal. Sin embargo, este inciso nos mostró que se les dificultó un poco más que el resto, ya que dos parejas no pudieron dejaron en proceso su respuesta, esto se consideró así porque dejaron expresado: $a + a\ /,$ o bien, $xx/x + x$, es decir no comprendieron que se trataba de dos números diferentes, denotando la misma literal, además en el segundo caso, el orden si afecta el resultado de la ecuación.

4.2.2.2 CONCLUSIONES DE LA SESIÓN 2. NEGOCIOS Y MÁS NEGOCIOS

Podemos decir que de manera general la aplicación de la segunda sesión reflejó un buen desempeño de los alumnos, así como de una mejor disposición para trabajar. Para trabajar la parte individual se había planeado un tiempo de 10 minutos y estuvimos dentro del tiempo estipulado, a diferencia de la primera sesión de trabajo, tardaron menos tiempo en comprender los planteamientos de los problemas, tampoco se les notó la misma ansiedad que en la primera sesión de esperar a que el profesor de la asignatura o yo les ayudáramos a resolver alguna situación, fueron más hábiles en entender y familiarizarse con la dinámica de trabajo, arrojando los resultados antes mostrados. En tanto a las actividades que se diseñaron para trabajar en equipo, en la segunda y tercera parte de la sesión hubo mejor disposición por parte de los alumnos en conformar los tríos, aunque claro se siguió acatando la recomendación del profesor del grupo, quien conocía mejor cada uno de ellos. Los tríos empezaron a discutir sus respuestas de manera más rápido sin perder el orden de clase, se pudo observar que hicieron menos preguntas que en la parte individual, se notó una mayor retroalimentación con sus mismos compañeros, aterrizando con mayor fluidez sus ideas. Esto es muy importante destacarlo porque como se hizo mención anteriormente, debían tener presente la ganancia que se percibía en los negocios, de manera que el alumno se involucrara en la devolución del problema. Por último, en la segunda parte de trabajo conjunto, el hecho de trabajar en parejas y deshacer los tríos fomentó que las discusiones que se habían hecho con anterioridad permitieran redactar o expresar de manera correcta cada uno de los incisos, y eso se reflejó en el hecho de que sólo un par de parejas dejara en proceso sus respuestas, tal y como se mostró con anterioridad. Pese a que las actividades fluyeron con mayor rapidez que en la primera sesión, no se pudo concretar la actividad de coevaluación, sin embargo, todos los alumnos lograron expresar algebraicamente enunciados coloquiales y viceversa, haciendo uso de los nuevos términos que deseábamos, haciendo referencia a la operación de multiplicación, y aunque algunas respuestas pudieron haber sido mejores se hicieron notar las respuestas esperadas que se señalaban en el análisis *a priori*.

4.2.3.1 SESIÓN 3. PUNTAJES PERDIDOS

Empezaremos describiendo la sesión que fue diseñada, la cual tenía como finalidad que los alumnos trabajaran de manera lúdica utilizando precisamente los términos que se habían trabajado en las sesiones anteriores, está estructurada en dos partes, en la primera parte *"considera lo siguiente"* se le plantea al alumno el contexto del problema, el cual hace referencia a un juego que está en tendencia llamado *Preguntados*. La segunda parte *"Para ganar"* le brinda al alumno las instrucciones para ganar el juego. Sin embargo, una propuesta del profesor de la asignatura fue que dado no se había trabajado con los enunciados que habían producido los alumnos en las sesiones anteriores, podríamos considerar precisamente estos enunciados, por lo que al finalizar el trabajo de la segunda sesión se tuvo que capturar las expresiones que habían producido los alumnos en un documento en Word para que así se pudieran imprimir y tuvieran claridad en la redacción o bien, en las expresiones algebraicas, y disminuir de esta manera mayor dificultad en el uso de las expresiones recolectadas. Recordemos que en las sesiones se les había solicitado que escribieran tres enunciados coloquiales o bien ecuaciones de tal forma que su compañero tuviera que traducir entre un lenguaje y otro, por lo que en total se obtuvieron 54 expresiones (Véase Anexo D).

Dado que los alumnos no escribieron de manera equitativa enunciados con respecto a los conceptos que se habían trabajado, es decir no eran tres enunciados de suma y tres de resta, sino que habían escrito quizá dos de suma y uno de resta, o bien, uno de suma y dos de resta, lo mismo para el caso de la multiplicación y división, se repartieron el total de las expresiones de manera aleatoria en sobres blancos enumerados del 1 al 6, revisando al final de la aleatoriedad que al menos tuvieran un ejercicio de cada una de las operaciones abordadas en la propuesta didáctica, por lo que en cada sobre quedaron nueve expresiones. También se anotaron en trozos de papel el número de equipo para que así los alumnos pudieran elegir uno e ir conformando los tríos de trabajo, buscando nuevamente la aleatoriedad en su conformación.

Desarrollo de la sesión

Al inicio de la sesión se colocaron sobre el escritorio los sobres enumerados, lo que causó curiosidad en los alumnos, también se colocó un frasco con los papeles para conformar los equipos, se les indicó que primero iría pasando uno por uno para elegir un papel del frasco, para ir conformando los equipos de trabajo. Una vez conformados los equipos se les repartió un papel bond blanco y plumones para trabajar, también se les indicó que cada uno tendría que elegir de entre los seis sobres y para ello tendrían 5 minutos, preguntaron si había un grado de dificultad mayor entre cada sobre, a lo que se les respondió que podría existir dicho grado y que por eso era necesario que como equipo discutieran y tomaran la mejor elección. Al darles esta indicación se escuchaba entre las discusiones que el sobre numerado con el uno tendría menor dificultad que el resto, mientras que otros decían que los más difíciles podrían estar en el primer sobre, al finalizar el lapso hicieron la elección de su sobre.

La instrucción fue que tenían que resolver cada una de las expresiones que venían en el sobre, y que cuando terminaran de hacerlo levantaran la mano, anotando su trabajo en el papel bond, pero se les aclaró que una vez que levantaran la mano todos los integrantes debían tener el desarrollo completo también en sus libretas, y además de ello, tenían que haber comprendido cómo se habían traducido, ya que se elegiría al azar el representante de cada uno para hacer la siguiente actividad.

La primera impresión que se percibió fue que, en tanto empezaron a ver las expresiones reconocieron algunas de ellas como de su autoría, por lo que expresaron: *ya sé cómo resolver esta*, posteriormente empezaron a resolver aquellas que no reconocieron. Algunos de los equipos ordenaron las expresiones conforme a su grado de dificultad, y otros simplemente fueron resolviendo de manera indistinta. Se pudo notar también que existían ciertas dificultades en la resolución de aquellas que implicaban el uso de cocientes.

Al finalizar la actividad los equipos fueron levantando uno a uno la mano. Una vez que terminaron cinco equipos, se le indicó al último que tendrían 5 minutos más para terminar la actividad, para así poder continuar con la sesión.

Una de las alumnas que se estuvo monitoreando y que desde el pretest mostró buen desempeño, fungió como evaluadora del trabajo que presentaban sus compañeros (Figura 4.18).

Figura 4.18. Presentación de los equipos con la coevaluación de su compañera.

La segunda parte de la sesión, para hacer más dinámica la exposición del trabajo realizado, les pedimos que eligieran únicamente aquellas expresiones que habían traducido de lenguaje coloquial al algebraico, después se les mostró una tabla en la cual se iban a ir anotando los puntajes por equipo conforme fueran participando, de cada equipo se fue eligiendo un representante para pasar a escribir y resolver la ecuación explicándoles que se les iba a considerar la formulación correcta de la expresión algebraica y además su resolución, cabe mencionar que en la primera parte sólo se hicieron las traducciones entre un lenguaje y otro, pero no la resolución de las ecuaciones. En caso de que no pudieran resolver la ecuación otro equipo podía pasar a resolver y con ello robar el puntaje para que así pudieran ganar, como estímulo el equipo ganador tendría un puntaje extra (no mayor a 0.5) en su calificación, con previo acuerdo con el profesor de la asignatura.

Los alumnos tuvieron una buena disposición para realizar esta segunda etapa en orden y mostrando siempre una buena discusión en equipo antes de dar resolución a la ecuación mostrada, también hubo retroalimentación por parte de los alumnos hacia sus compañeros en el caso de que no hubieran hecho correctamente la traducción de los enunciados que habían propuesto. Fue precisamente en esta etapa cuando entró al salón de clase el supervisor de la zona escolar, quien le tocaba hacer observación de clase de la asignatura de Matemáticas, al finalizar la sesión se le explicó al supervisor la propuesta didáctica y su diseño, por lo que le pareció interesante poder observar los resultados finales.

4.2.3.2 CONCLUSIONES DE LA SESIÓN 3. PUNTAJES PERDIDOS

Podemos decir que de manera general la aplicación de la tercera sesión reflejó un buen desempeño de los alumnos, así como de una mejor disposición para trabajar. A pesar de que se modificó el material de trabajo y hubo que improvisar sobre la marcha, con respecto a la forma de ir evaluando el desempeño de los alumnos. Para trabajar la primera parte se les dio a los alumnos un lapso de 20 manteniéndonos siempre dentro del tiempo estipulado, a diferencia de las primeras sesiones de trabajo, tardaron menos tiempo en familiarizarse con la dinámica de trabajo, arrojando los resultados antes mostrados. Cabe mencionar que en los resultados no se muestran estadísticas, debido a que se ha dado un trabajo meramente en equipo por lo que fue considera la retroalimentación que se fue dando durante el desarrollo de la sesión conjuntamente con la de su compañera de grupo. Los tríos empezaron a discutir sus respuestas de manera más rápido sin perder el orden de clase, se pudo observar que hicieron menos preguntas que en las primeras sesiones, se notó una mayor retroalimentación con sus mismos compañeros, aterrizando con mayor fluidez sus ideas. Esto es muy importante destacarlo porque como se hizo mención anteriormente, debían tener presente el planteamiento del problema que sus propios compañeros quisieron plasmar en sus propuestas para poder hacer una buena devolución de los modelos que estaban generando. El hecho de que entrara el supervisor a observar el desarrollo de la parte final de la sesión, creí que pondría nerviosos a los alumnos provocando quizá un efecto negativo en su desempeño, sin embargo, los chicos siguieron trabajando y mostrando sus desarrollos con el objetivo de dar una resolución correcta a las ecuaciones que ya habían traducido para así obtener el puntaje.

4.3 APLICACIÓN DEL POS-TEST Y ANÁLISIS A POSTERIORI

En esta última fase de la Ingeniería Didáctica, nos apoyaremos en los datos recogidos durante la aplicación de la propuesta didáctica, así como en las producciones que han realizado los alumnos, sus impresiones y los comportamientos esperados.

Describimos a continuación los resultados obtenidos en el pos-test, así como una comparación entre los análisis a priori y posteriori, los cuales enriquecerán la refinación de la propuesta didáctica, y nos permitirán replantear algunos ítems para futuras líneas de investigación.

4.3.1 APLICACIÓN DEL POS-TEST

El pos-test (Véase Anexo B) fue aplicado con la intención de evaluar el efecto que habría tenido la puesta en escena de la propuesta didáctica que se había diseñado con el objetivo de disminuir las dificultades que presentan los alumnos con respecto al uso del lenguaje coloquial en el lenguaje algebraico, enfocándonos en el uso específico de los términos sinónimos de las operaciones aritméticas que ya conocían como suma, resta, multiplicación y división. Se aplicó a un total de 15 alumnos de tercer grado de secundaria, aunque el pretest y el trabajo de las sesiones se llevaron a cabo con 18 alumnos, el día de la aplicación del pos-test faltaron 3 alumnos, por lo que sólo se evalúa los resultados de estos.

La aplicación del pos-test, así como el de las sesiones se acopló de acuerdo con el horario que tenían los alumnos con respecto a la materia (Tabla 5), por lo que el pos-test se aplicó el viernes 28 de junio a las 11:40 hrs con una duración de 40 minutos. A continuación, en la Tabla 6 se muestran los resultados obtenidos, donde:

A. Respuesta correcta.

B. Respuesta en proceso.

C. Respuesta incorrecta.

D. Respuesta en blanco.

Tabla 6. Tabla general de resultados obtenidos en Pos-test.

Ítem	1										2		
Respuesta	***a***	***b***	***c***	***d***	***e***	***f***	***g***	***h***	***i***	***j***	***a***	***b***	***C***
A	**67%**	56%	56%	**50%**	56%	**39%**	33%	50%	67%	67%	**72%**	22%	17%
B	17%	28%	28%	**33%**	28%	**44%**	44%	33%	17%	17%	11%	**44%**	**61%**
C	0%	0%	0%	0%	0%	0%	6%	0%	0%	0%	0%	17%	6%
D	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%

Como se puede observar en la tabla anterior, un porcentaje muy alto de estudiantes ha tenido una respuesta correcta en casi todos los incisos, a excepción de los incisos (b) y (c) del ítem, 2, la cual aún mantiene un porcentaje alto en dar una respuesta en proceso. Además de ello, hacemos notar que ya no hay respuestas en blanco o incorrectas, como lo había en el pretest.

Hacemos una breve reseña con respecto a los resultados obtenidos en el pretest donde, en el inciso (a) sólo el 33% había dado una respuesta correcta, y ahora se tiene un 67%, recordando que asimilaban que la palabra aumentado se refería a un exponente. Para el inciso (d) hubo un 50% de respuestas correctas y un 33% en proceso, aun cuando se cree que ha disminuido el rendimiento de los alumnos, ya que en el pretest tuvo un 67% de respuestas correctas, se debe de tener en cuenta que en el pretest los alumnos redactaron enunciados similares a los que se les brindaba, y ahora hicieron redacciones diferentes, por lo que consideramos que estos han sido de mejor calidad.

En el inciso (f) recordemos que ningún alumno había dado la respuesta correcta, y en este caso en específico, los alumnos habían obtenido el mayor porcentaje de respuesta en blanco, con un 33% (Tabla 4), sin embargo, ahora se obtuvo un 39% de respuestas correctas y un 44% de respuestas en proceso, este inciso recordemos que habla sobre el trabajo de cocientes, por lo que destacamos con el profesor que aun cuando se obtuvieron mejores resultados que en el pretest se debía seguir trabajando sobre este concepto para seguir sesgando las dificultades que aún presentan los alumnos.

En el caso del segundo ítem cabe mencionar que los incisos (b) y (c) implican el hecho de trabajar con tres ecuaciones lineales, por lo que implica un proceso más allá del que se plantea en el objetivo del presente trabajo, sin embargo, parte precisamente del modelado de las situaciones, haciendo la traducción del lenguaje coloquial al algebraico.

En el inciso (a) con respecto al pretest aumento un 22% de respuestas correctas, desapareciendo por completo el porcentaje de respuestas en blanco. Para el caso de los incisos (b) y (c), cuyo porcentaje de respuestas en proceso eran del 67% para ambos incisos, en el pos-test disminuyó a 44% y 61%, respectivamente, acumulándose en respuestas correctas, con un 22% y 17%, cabe destacar que desaparece también el porcentaje de respuestas en blanco.

Con el fin de visualizar las respuestas de los estudiantes en el pos-test se presenta la siguiente Figura 4.19, en la cual se puede visualizar de manera general que han desaparecido las respuestas en blanco.

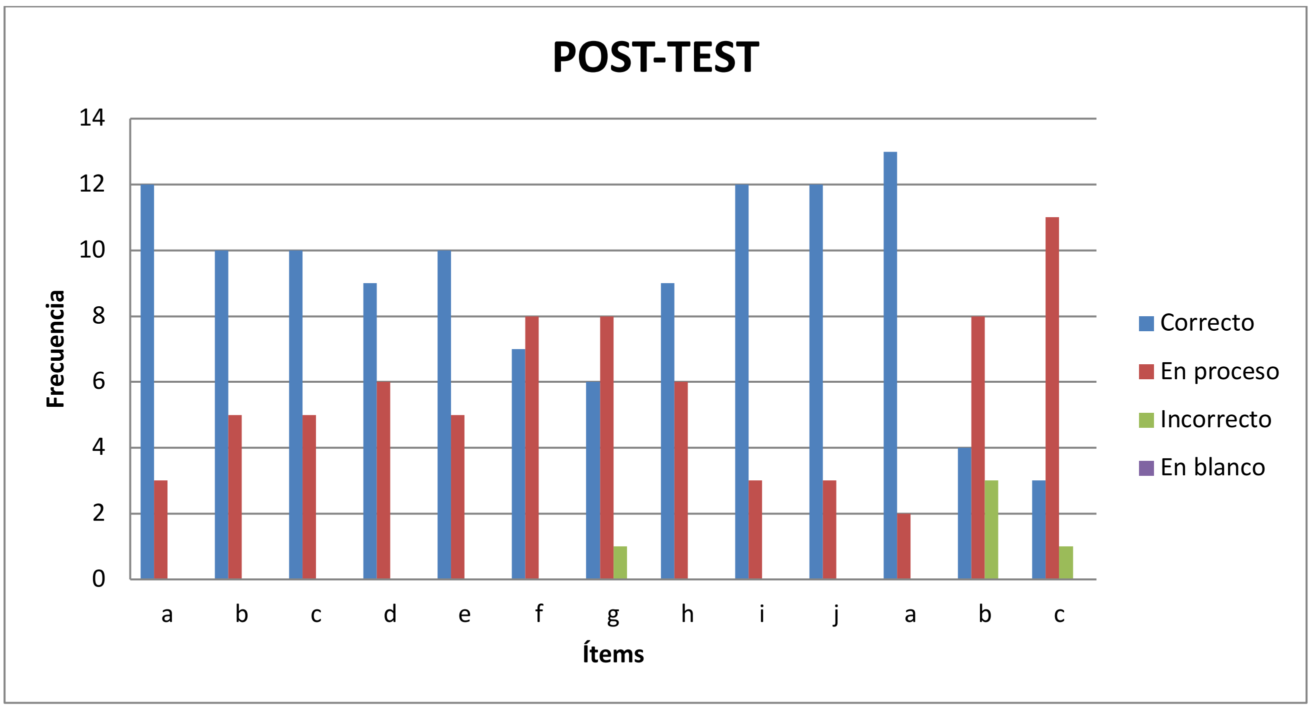


Figura 4.19 Resultados del pos-test en alumnos de 3er. Grado de secundaria.

Después de haber mostrado los resultados anteriores podemos decir que de manera general la propuesta didáctica ha cumplido con su objetivo el cual era disminuir las dificultades que presentaban los alumnos con respecto a la traducción del lenguaje coloquial al algebraico.

4.3.2 ANÁLISIS A POSTERIORI

Como parte final del capítulo, se presenta el siguiente cuadro con una comparación entre los análisis a priori y posteriori, ya que además de favorecer y enriquecer este trabajo para futuras líneas de investigación, nos brindará una validación de la propuesta didáctica.

Sesión 1. Desafíos Matemáticos

Considera los siguientes desafíos

Ítem	Comparación entre lo esperado y lo encontrado
1a	Acción • Se esperaba que identificaran los datos relevantes para hacer el cálculo del dinero recaudado, y que con dichos datos realizaran el cálculo de \$15,500 - \$12,000, obteniendo de esta manera la cantidad de dinero recaudado \$3,500. • Los alumnos en su mayoría lograron identificar los datos, así como el operar con ellos, mostrando incluso el cálculo que realizaron a un costado de la hoja de trabajo, otros tuvieron dificultades aritméticas.
1b	Acción • Se espera que empezaran hacer uso del lenguaje algebraico, ya que no conocían el número de boletos vendidos se les sugería que designaran a éste con la literal x, y al saber el costo del boleto (\$70), realizaran la expresión: $70x$. • Hubo alumnos que lograron formular la expresión, asignando el valor del boleto a la literal sugerida, pero también hubo otros que dieron una respuesta en proceso.
1c	Formulación • Se esperaba que con base a las respuestas de los ítems 1a y 1b, el alumno escribiera: $70x = 3500$. • Los alumnos en su mayoría dejaron una respuesta en proceso, es decir que no lograron concretar la expresión, ya que lo dejaban expresado de manera aritmética, lo cual no era el objetivo del ejercicio.
1d	Acción • Se esperaba que a partir de la ecuación planteada en el ítem 1c, pudieran determinar el número de boletos vendidos (50). • Los alumnos en su mayoría si pudieron determinar el número de boletos vendidos, ningún alumno dejo su respuesta en blanco.
2a	Acción • Se esperaba que a partir de la imagen y los datos que se les presentaban (a, a, 5m) identificaran las características que definían al triángulo isósceles (dos lados iguales y uno diferente). • La mayoría de los alumnos identificaron el triángulo que se les presentaba dando referencias del porqué correspondía a un isósceles. Sólo hubo dos

	alumnos que respondieron que se trataba de un equilátero y un rectángulo, a pesar de que se trataba de un escaleno (hablando de magnitudes y no de ángulos).
2b	Formulación • Se esperaba que, a partir de su conocimiento previo, donde el perímetro es la suma de los lados de una figura, ellos expresaran: $P = a + a + 5$ • Los alumnos dieron una respuesta correcta y otros la dejaron en proceso debido a que no igualaron su expresión al perímetro. • También hubo alumnos que dejaron una respuesta en blanco, suponiendo que no sabían cómo obtener el perímetro.
2c	Acción • Se esperaba que con el dato del perímetro (23m) y la respuesta del ítem 2b, llegaran a la expresión: $a + a + 5 = 23$. • Algunos alumnos si dieron la respuesta esperada o bien su equivalente, incluso algunos dejaron su respuesta en proceso porque la expresaron de manera aritmética. • También hubo tres alumnos que dieron una respuesta incorrecta, ya que no expresaban algebraicamente el cálculo del perímetro a pesar de haber respondido los ítems anteriores.
2d	Acción • Se esperaba que a partir de la ecuación planteada en el ítem 2c, pudieran determinar la medida de los lados del triángulo (9m) • Un poco más de la mitad de los alumnos si dieron una respuesta correcta, y el otro tanto de los alumnos por cuestiones aritméticas no dieron una respuesta correcta.

Trabajemos juntos

Ítem	Comparación entre lo esperado y lo encontrado
1a - 1b	Acción • Se esperaba que identificaran los datos que les permitiera elegir la ecuación correcta, es decir el precio del boleto ($130), el billete con el pago ($500) y el vuelto que le han dado ($110). Esto con el fin de que eligieran la ecuación $130x + 110 = 500$. • En este inciso cuatro equipos eligieron correctamente la expresión, mientras que el restó dio una respuesta en proceso, esto debido a que intercambiaron los datos del cambio y el precio del boleto.
1c	Acción • Se esperaba que a partir de la ecuación elegida en el ítem 1a, pudieran determinar el número de boletos que había comprado Juan (3 boletos). • Al haber elegido correctamente la expresión en los incisos anteriores, entonces cuatro equipos si lograron dar la respuesta correcta, el resto del grupo dejó una respuesta en proceso más que nada por cálculos aritméticos en la resolución de la ecuación.
2a – 2b	Formulación • Se esperaba que a partir de sus conocimientos previos (propiedades de los triángulos), pudieran expresar algebraicamente el perímetro de un triángulo

	equilátero (Por ejemplo: $P = a + a + a$) y el de un triángulo escaleno (Por ejemplo: $P = a + b + c$) • Nota: De ser necesario se podía retomar en forma de lluvia de ideas algunas de las propiedades de los triángulos, y de esta manera disminuir las dificultades que podrían presentar los alumnos. • En efecto se tuvo que comenzar con una lluvia de ideas con respecto a las propiedades de los triángulos que se les estaba presentando en la actividad. • De esta manera fue que se les hizo más fácil denotar las características que se les pedía que plasmaran en los triángulos dibujados.

¿Con qué finalizamos?

Ítem	Comparación entre lo esperado y lo encontrado
1a – 1b	Formulación • Se esperaba que plantearan la expresión algebraica $x + 5 = 7$ y $x - 33 = 144$, respectivamente con variaciones en la literal elegida. • Para este caso las nueve parejas dieron una expresión algebraica correcta, variando el uso de la literal.
1c	Formulación • Se esperaba que plantearan la expresión algebraica $x + 4 = 12$, con variaciones en la literal elegida. • Siete parejas si dieron una expresión correcta, variando el uso de la literal, pero otros la dejaron expresada aritméticamente, por lo que es algo que se debe de trabajar con los alumnos, ya que poco a poco deben ir dejando ese pensamiento aritmético para lograr llegar a la generalización.
1d, 1e y 1f	Formulación • Se esperaba que con respecto a los enunciados de los ítems 1a, 1b y 1c, pudieran ser capaces de redactar un enunciado similar, por ejemplo: $Un\ número\ menos\ 3\ da\ como\ resultado\ dos$, o bien, $Pienso\ un\ número\ que\ al\ aumentarlo\ en\ 12, obtengo\ 18$, para el caso del inciso (f). • Sin embargo, se pudo observar que una pareja hizo sólo el enunciado de lo que veía visualmente, sin hacer uso del lenguaje que se pretendía promover con la propuesta didáctica.
1g	Formulación • Se esperaba que plantearan la expresión algebraica $x + 11 = 45$, con variaciones en la literal elegida. • En dicho caso, todas las parejas dieron una respuesta correcta con variaciones del uso de la literal.
2a – 2b	Validación • Se esperaba que dieran como respuesta: $aumentarlo, menos, sumarle, disminuirlo$. Así como la formulación de expresiones coloquiales y algebraicas haciendo uso de estas. • Los alumnos si identificaron las palabras que teníamos como objetivos fijar en el alumno con el desarrollo de la sesión.

	• Además, redactaron expresiones completas y dieron expresiones algebraicas también con el fin de co-evaluar a su compañero, que por falta de tiempo no se llevó a cabo.

Sesión 2. Negocios y más negocios

Considera los siguientes casos

Ítem	Comparación entre lo esperado y lo encontrado
1a	Acción • Se esperaba que identificaran los datos relevantes para hacer el cálculo de la ganancia, el dinero que se cobró por la serigrafía (\$2,550) y el dinero que se invirtió en la materia prima (\$1,000), y que con dichos datos realizaran el cálculo de \$2,550 - \$1,000 y obtuvieran la ganancia de \$1,550. • En este sentido, sólo hubo dos alumnos que, en lugar de restar, sumaron por lo que dieron una respuesta incorrecta.
1b	Acción • Se esperaba que empezaran hacer uso del lenguaje algebraico, ya que conocían el número de juegos y además se les sugería que designaran a éste con la literal x, brindando de esta manera la expresión: $x + 2x$ o bien, $3x$. • En este caso se generó confusión el hecho de sumar el par de juego de playeras extra que se habían pedido al primer pedido, por lo que hubo alumnos que sólo denotaron 2x o su equivalente.
1c	Formulación • Se esperaba que en base a la respuesta del ítem 1b, el alumno escribiera: $3x = 2550$ y pudiera calcular el precio de venta de cada juego (\$850). • En este caso resulta demasiado útil el inciso para hacerles ver a los alumnos que el hecho de considerar la ganancia que percibe por el trabajo debe estar expresado en su ecuación final, ya que de lo contrario darán respuestas erróneas tal y como se observó.
1d	Formulación • Se esperaba que a partir de la respuesta en el ítem 1c, pudieran plantear el capital que había invertido José, por ejemplo: $4x = 120000$, con variaciones en la literal elegida. • La mayoría de los alumnos si logró dar la respuesta esperada algebraicamente mientras que otro tanto lo denotó aritméticamente.
2a	Acción • Se esperaba que, haciendo uso del lenguaje algebraico, ya que no conocían los kilómetros recorridos y habiéndoles sugerido designar a éste con la literal x, y sabiendo el costo por kilómetro recorrido (\$2.75), realizaran una expresión como: $2.75x$. • Todos los alumnos dieron una respuesta correcta.

2b – 2c	Formulación • Se esperaba que a partir de su respuesta en el ítem 2a, pudieran plantear la tarifa con la cuota fija: $2.75x + 35$. • Nota: Como se puede observar se introduce al alumno a trabajar con números decimales, de tal forma que asimilen que no sólo se pueden hacer ecuaciones con números enteros. • Más de tres cuartas partes del grupo si dio una expresión correcta, sin embargo, el resto del grupo a pesar de haber contestado los incisos anteriores correctamente, al final invirtieron la información en la construcción de su ecuación. • Por lo tanto, su respuesta al kilometraje recorrido en el viaje en Uber fue incorrecto.

Trabajemos juntos

Ítem	Comparación entre lo esperado y lo encontrado
1a – 1b	Acción • Se esperaba que identificaran los datos relevantes para hacer el cálculo de la ganancia, el cobro total (\$3,975) y el dinero descontando la materia prima (\$1,325), y que con dichos datos realizaran el cálculo de \$3,975 - \$1,325 obteniendo la ganancia del pedido \$2,650. • Los alumnos dieron las respuestas correctas, mostrando nuevamente operaciones aritméticas a un costado de la hoja de trabajo.
1c	Acción • Se esperaba que en base a la respuesta del ítem 1b, el alumno escribiera la ecuación: $4x = 3975$ y pudiera determinar la venta de playeras (\$993.75). • Cinco equipos dieron la respuesta correcta, y un solo equipo dio una expresión en proceso debido a que asoció la expresión a su respuesta del inciso (a) pero sin considerar la ganancia.
2a, 2b, 2c, 2d y 2e	Formulación • Se esperaba que plantearan la expresión algebraica $2.75x + 35$ haciendo las equivalencias con respecto a cada caso mostrado en la tabla y con variaciones en la literal elegida. • Para este caso, cinco equipos lograron dar la expresión correcta y además hicieron las asociaciones correctas con respecto a cada uno de los datos mostrados en la tabla, así mismo el kilometraje recorrido en cada caso. • Sólo un equipo tuvo dificultades, pero aritméticas para dar el kilometraje que se recorrió en cada caso, por lo que se debe de trabajar en clase.
2f	Validación • Se esperaba que pudieran notar el patrón, en el cual se modificaba únicamente el total del recibo de viaje, además de que se mantenía en todas las expresiones el valor de 35. • Todos los alumnos lograron identificar el patrón y observar el valor que se mantenía constante en todas las expresiones.

Algo más…

Ítem	Comparación entre lo esperado y lo encontrado
1a – 1b	Acción Se esperaba que usaran sus conocimientos previos correspondientes a fracciones, y que representaran de esta manera $3/4$ partes. Los alumnos dieron una respuesta correcta con respecto a lo esperado para ambos incisos.
1c – 1d	Formulación Se esperaba que plantearan la expresión algebraica $3/4\, x = 9084$, con variaciones en la literal elegida y a partir de ello dieran el total de las butacas con las que cuenta el estadio (12,112). Cinco equipos si lograron dar la respuesta correcta, sin embargo, nuevamente un equipo es que presenta dificultades para dar la respuesta correcta, a causa del desarrollo de cálculos aritméticos y el desarrollo de la ecuación que implica fracciones. Esto se convierte en otro punto más a reforzar en futuras líneas de investigación, reforzando planteamiento que tengan el uso de fracciones y su resolución.

¿Con qué finalizamos?

Ítem	Comparación entre los esperado y lo encontrado
1a, 1b, 1e, 1g y 1i	Formulación • Se esperaba que plantearan una expresión que denotara el enunciado propuesto o bien tradujeran de manera algebraica el que expresaba un enunciado coloquial, con variaciones en la literal elegida. • De lo cual se destaca que todos los alumnos dieron respuestas correctas e incluso una buena discusión con respecto a la expresión referente a los cocientes.
1c, 1d y 1f	Formulación • Se esperaba que en el inciso (c) plantearan la expresión algebraica $3m - 5$ ya que, en este caso no se aceptaban variaciones de la literal. Así mismo que pudieran redactar coloquialmente un enunciado que expresara la ecuación proporcionada. • De lo cual se destaca que ocho equipos si lograron dar una respuesta correcta pero un equipo no asoció correctamente la expresión, dado que se le indicaba la literal a usar. • Para el último inciso tradujeron lo que visualmente tenían plasmado en la hoja de trabajo por lo que se consideró una respuesta en proceso.
1h	Formulación • Se esperaba que plantearan una expresión algebraica como: $\frac{x+y}{xy}$, con variaciones de la literal. • Este inciso en general nos dejó ver que en futuros trabajos se debe de trabajar más con el uso de cocientes, ya que esta ve fueron dos parejas que no pudieron concretar la expresión esperada.

	• Se debe de fortalecer el hecho de que el alumno sepa diferenciar que cuando se refiere a una misma literal querrá decir que son equivalentes, mientras que si varía entonces tendrán valores diferentes.
2a – 2b	Validación • Se esperaba que identificaran los vocablos que se habían estado trabajando durante la sesión. Así como el hecho de poder generar expresiones con el uso de ellos. • Los alumnos lograron identificar los vocablos que teníamos como objetivo, además de que se logró que pudieran escribir enunciados coloquiales haciendo uso de ellos o bien dando expresiones algebraicas para que sus compañeros las pudieran traducir.

Para la tercera sesión dado que se tomaron en cuantas las producciones de los alumnos durante las sesiones, el análisis *a priori* que se realizó tuvo modificaciones, por lo que en el siguiente cuadro se muestra un análisis *a posteriori* con respecto a las producciones que realizaron los alumnos de manera general, ya que como se mencionó anteriormente fueron 54 producciones.

Sesión 3. Puntajes perdidos

Para ganar el juego

Ítem	Comparación entre los esperado y lo encontrado
1	Acción • Se esperaba que leyeran y comprendieran los planteamientos que habían escrito sus compañeros, así como la traducción de expresiones algebraicas a enunciados coloquiales. • Todos los equipos lograron llevar a cabo la traducción entre un lenguaje y otro con respecto al planteamiento que habían realizado sus compañeros durante el trabajo de las dos sesiones anteriores.

¿Con qué finalizamos?

Ítem	Comparación entre los esperado y lo encontrado
2	Validación Se esperaba que concluyeran con la resolución de las ecuaciones que habían traducido del lenguaje coloquial al algebraico. El hecho de escoger un representante del equipo forzó a que estos realmente hicieran el trabajo de metacognición en su traducción, pero sobre todo en su resolución, por lo que se obtuvieron resultados que se buscaban como objetivo general de la propuesta didáctica.

CONCLUSIONES

En este capítulo enunciaremos las conclusiones obtenidas con respecto a los objetivos propuestos, así mismo se brindarán algunas recomendaciones para futuras líneas de investigación a raíz de los resultados obtenidos y descritos en el capítulo anterior.

En relación con el primer objetivo específico:

Investigar las dificultades reales existentes en nuestra población de estudio en cuanto al uso del lenguaje algebraico, por medio del diseño y aplicación de un diagnóstico.

Este objetivo se cumplió al realizar la aplicación del instrumento "*Dificultades de Aprendizaje*" (Véase Anexo A) el cual nos permitió observar y destacar las dificultades que presenta la población estudiantil de nivel secundaria. Además, no sólo nos permitió confirmar las dificultades que ya suponíamos con respecto al contenido algebraico, sino que éste nos permitió corroborar que nuestra población presentaba grandes dificultades con el uso del lenguaje algebraico.

El haber investigado las dificultades que presentaba nuestra población estudiantil, nos permitió corroborar lo que en el estado del arte habíamos encontrado con respecto a los resultados obtenidos con Castro (2012) en donde engloba los problemas asociados al lenguaje en específico con la traducción del lenguaje coloquial al algebraico, el uso de letras y símbolos. Pudimos observar a través de nuestro instrumento, que casi el 100% de nuestra muestra había dejado en blanco los ítems correspondientes al uso del lenguaje algebraico, además de las deficiencias que tenían con respecto al uso y denotación de conocimientos previos, tales como los referentes al cálculo del perímetro y área de figuras geométricas, dichos resultados nos permitieron dar paso al siguiente objetivo.

En relación con el segundo objetivo específico:

Diseñar y validar situaciones didácticas que faciliten la transición del lenguaje aritmético al algebraico evolutivamente, con la resolución de problemas que impliquen el planteamiento de ecuaciones de primer grado.

Este objetivo se cumplió al considerar los resultados obtenidos en la investigación de las dificultades que presentaba nuestra población de estudio, ya que el diseñar las sesiones de la propuesta didáctica bajo el marco teórico de la TDSM de Brousseau (2207) nos permitió justificar el uso de cada una de las situaciones didácticas que nos plantea llevando al alumno a transitar entre cada una de ellas con el desarrollo de las actividades diseñadas, pero además de ello no sólo eran actividades sacadas de la imaginación nada más, sino que tenían un porqué, y este era el ir sesgando las dificultades que presentaban los alumnos con respecto al uso de vocablos referentes a las operaciones aritméticas con las cuales ya estaban familiarizados desde su formación en la educación básica (primaria).

Además, el hecho de que el alumno construyera por sí solo la expresión algebraica de los planteamientos permitió que el alumno institucionalizara los vocablos que buscamos fijar en el, haciéndole ver que eran equivalentes y sobre todo que daban sentido con respecto a los planteamientos de los problemas propuestos, haciendo una buena devolución del problema con modelado y finalmente con la resolución de ecuaciones de primer grado.

También es importante rescatar que la dificultad graduada de los planteamientos es una parte esencial en el diseño de actividades bajo este marco teórico, ya que permite que el alumno vaya solidificando los conceptos que se buscan fijar en él, y no sólo de una manera sencilla, sino que vayan reforzando su pensamiento algebraico, buscando que con el uso continuo y gradual el alumno pueda llegar a la generalización (Castro, 2012).

En relación con el tercer objetivo específico:

Aplicar la propuesta didáctica diseñada con diferentes momentos de evaluación que estimule en el alumno el uso del lenguaje algebraico con información y/o datos numéricos de una situación en la vida real.

Este objetivo se cumplió dándole vida a este trabajo, pues el hecho de haber diseñado la propuesta conformada por tres sesiones y haberla aplicado de manera piloto, nos permitió en primera instancia modificar algunos ítems con respecto a su redacción, pero aún nos hacía falta aplicarla a una población estudiantil más grande, para ver si realmente cumplía con su objetivo, disminuir las dificultades de los alumnos en la transición del lenguaje coloquial al algebraico, en específico del uso del lenguaje.

La fase de experimentación nos permitió recoger los datos que nos dieron pauta a mostrar los resultados del capítulo anterior, esto nos dejó ver que aún había ítems que teníamos que corregir para futuras líneas de investigación, así como el hecho de que aun cuando se contaba con un plan de clase, el trabajo en equipo deberíamos ser más moderado con respecto al tiempo que se les brindaba para que así se pudieran realizar todas las actividades, ya que en ambas sesiones nos faltó llevar a cabo la coevaluación en parejas que se había planeado, y aun cuando en la tercer sesión se trabajó con las producciones realizadas por los alumnos, pues si tenemos que cuidar los tiempos de trabajo.

Plantear a los alumnos problemas contextualizados que les eran familiares permitió que tuvieran una buena devolución del problema, ya que una de las partes que más degustamos fue la discusión que se daba entre ellos, ya que en tanto a los problemas que hablaban de los negocios, ellos mismos decían que era importante tomar en cuenta la ganancia, sino se iría a la quiebra, son expresiones que dan gusto escuchar porque significa que el pensamiento del alumno no sólo esta automatizado en dar una resolución algorítmica de las ecuaciones, sino de darle un sentido al resultado que estaban obteniendo.

En relación con el cuarto objetivo específico:

Analizar la eficiencia de la propuesta didáctica, a través de los datos recogidos durante la aplicación y una evaluación global.

Este objetivo nos permitió hacer un análisis de contraste entre lo que se esperaba que contestaran los alumnos y lo que realmente paso durante la fase de experimentación, y aunque hubo buenas respuestas con respecto a las esperadas, pudieron haber sido mejores, sobre todo si se fortalece un poco más el trabajo en la parte aritmética, así de esta forma podrían subir los puntajes de respuestas correctas y bajar los de las respuestas en proceso por no poder llegar a la solución correcta, por una operación aritmética.

Además, el hecho de poder validar de esta manera la propuesta didáctica y no a través de una triangulación, es un plus, ya que aun cuando se tuvo el profesor de la asignatura dentro del salón de clases y durante el trabajo de toda la semana, este fungió como apoyo y no como evaluador, brindando a los alumnos un ambiente de más confianza.

Por lo que, de manera general y bajo la perspectiva de nuestro objetivo general:

Diseñar e implementar una propuesta didáctica que favorezca la transición del lenguaje aritmético al algebraico, mediante la resolución de problemas que impliquen el uso de ecuaciones de primer grado con una incógnita.

Podemos concluir que los resultados obtenidos y mostrados anteriormente, nos dan pauta para creer que nuestra propuesta didáctica tiende a disminuir las dificultades que presentan los alumnos de secundaria con respecto a la transición del lenguaje coloquial al algebraico, llevando a cabo no sólo la formulación de expresiones algebraicas sino también dándoles solución, resaltando que se formuló para trabajar con ecuaciones de primer grado de la forma $a + x = b$, $ax = b$ y $ax + b = c$.

También que el diseño de propuestas didácticas con respecto a un marco teórico, favorecen precisamente dicha transición, ya que se analiza desde la parte teórica de qué manera justificar el uso de ciertas preguntas, así como el grado de dificultad, ya que recordemos que la TSDM finalmente tiene una perspectiva constructivista, y que por tanto el alumno es el responsable de ir construyendo su conocimiento, sin dejar de lado la labor del profesor al diseñar problemas que permitan al alumno hacer una buena devolución de él y sobre todo un trabajo metacognitivo que lo lleven a fijar nuevos conceptos en su bagaje conceptual y pensamiento algebraico.

Se recomienda a la comunidad docente, tomar en cuenta las dificultades que presenta su grupo de alumnos y tomar en cuenta la teoría que mejor se acople a los objetivos que pretende son su grupo, en nuestro caso fue el disminuir las dificultades que presentaba la población estudiantil de secundaria con respecto a la transición del lenguaje coloquial al algebraico, con uso de vocablos equivalentes a las operaciones aritméticas con las cuales ya estaban familiarizados los alumnos, pero existen muchas otras problemáticas en la didáctica de la matemáticas, no sólo en el tema del álgebra, también aritméticas, como las que aquí pudimos observar, de magnitudes, de conceptos, etc.

Esta pequeña propuesta aún se puede refinar más y extender a cubrir más temas que van hilados, como el trabajo de sistemas de ecuaciones, o la resolución de ecuaciones de segundo grado, por lo que pretendemos que futuras líneas de investigación se pueda trabajar con ellas, así como seguir observando las producciones hechas por los alumnos hacia el plano cartesiano, dándole aún más significado al trabajo de las ecuaciones de primer grado.

Así mismo recomendamos que la aplicación de las actividades en la parte grupal no se extienda a más de tres personas, ya que pudimos observar que de esta manera realmente se da una buena retroalimentación entre ellos y por ende logran aterrizar con mayor facilidad y coherencia sus ideas. Estimulando de esta manera su capacidad de desarrollar su pensamiento algebraico encaminado hacia la generalización.

Se espera también que en futuras líneas de investigación se pueda replicar la propuesta con las correcciones de los ítems, con otros grupos de estudiantes para ver la comparativa del *a priori* con él *a posteriori* después de la fase de experimentación, y verificar si existen similitudes en las dificultades y, sobre todo, en la disminución de estas.

REFERENCIAS

Alfonso, G. (2009). *Álgebra: Notación, historia y aplicaciones.* Innovación y experiencias educativas. Revista Digital. 21

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., Gómez, P. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. Bogotá: Grupo editorial Iberoamericano.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Aires: Editorial libros del zorzal.

Caputo, S. y Macías, D. *Análisis de los errores de los alumnos de la asignatura "Algebra I" al elaborar demostraciones.* Descargado el 11 de Abril de 2018 de: http:// www.unne.edu.ar/ Web / cyt/ cyt2006/ 09-Educacion/ 2006-D-012.pdf.

Castro, E. (2012). *Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar*. XVI Simposio de la Sociedad Español de Investigación en Educación Matemática. Universidad de Granada.

Díaz, B., (2013). *Guía para la elaboración de una propuesta didáctica*. Consultado el 18 de Octubre 2018 en: https://docs.google.com/file/d/0B1fIBo0nFw4IUjlybWltZ3luMW8/edit?usp=sharing

Duval, R. (1998). *Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo de pensamiento.* Investigaciones en Matemática Educativa II. Grupo Editorial Iberoamérica. DF, México.

García, J. (2010). *Análisis de errores y dificultades en la resolución de tareas algebraicas por alumnos de primer ingreso en nivel licenciatura.* Departamento de didáctica de la matemática. Universidad de Granada.

Gárriga, M. J. J. (2011). *El lenguaje algebraico: un estudio con alumnos de tercer curso de educación secundaria obligatoria*. Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales. Universidad Zaragoza.

Gavilán, B. P. (2011). *Dificultades en el paso de la aritmética al álgebra escolar: ¿Puede ayudar el aprendizaje cooperativo?* Revista de Investigación en la Escuela, 73, 95-108. Descargado el 12 de Mayo del 2018 de: https://idus.us.es/handle/11441/60190

Godino, J. D. & Font, V. (2003). *Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros.* Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada. Disponible en línea: http://www.ugr.es/local/jgodino/

Godino, J. D., Wihelmi, M. R., Blanco, T. F., Contreras, A., & Giacomone, B. (2016). *Análisis de la actividad matemática mediante dos herramientas teóricas: Registros de representación semiótica y configuración ontosemiótica.* Avances de Investigación en Educación Matemática, 10, 91-110.

González, J.F.E, Diez, B. Ma. M. (2002). *Dificultades en la adquisición del significado en el uso de las letras en álgebra. Propuesta para la interacción didáctica*. Revista Complutense de Educación, 13 (1), 281-302.

Kieran, C. (2004). *Algebraic thinking in the early grades: What is it?* The Mathematics Educator, 8, 139-151.

Leiva, S. F. (2016). *ABP como estrategia para desarrollar el pensamiento lógico matemático en alumnos de educación secundaria.* Sophia. Colección de filosofía de la Educación. 21 (2), 209-224

Marquina, Q. J. R., Moreno, G. A., Acevedo, B. A. A. (2014). *Transformación del lenguaje natural al lenguaje algebraico en educación media general.* Educere. 18 (59), 119-132

Parraguez, M., Rojas, J., & Vázquez, P. *Situaciones a-didácticas para la enseñanza-aprendizaje de estrategias de conteo utilizando la resolución de problemas como medio*.

Radatz, H. (1979*). Error analysis in mathematics education*. Journal for Research in Mathematics Education, (9), 163-172.

Rico, L. (1995*). Errores en el aprendizaje de las Matemáticas*. En Kilpatrick, J.; Rico, L. y Gómez, P. Educación Matemática. Grupo Editorial Iberoamérica. Méjico.

Rodríguez-Domingo, S., Molina, M., Cañadas, M. C. y Castro, E. (2015). *Errores en la traducción de enunciados algebraicos entre los sistemas de representación simbólico y verbal.* PNA, 9 (4), 273-293

SEP (2017). *Modelo Educativo para la Educación Obligatoria.* México, SEP. Descargado el 15 de Abril del 2018 de: https://www.gob.mx/cms/uploads/attachment/file/207252/Modelo_Educativo_OK.pdf

Serres, V. Y. (2011). *Iniciación del aprendizaje del álgebra y sus consecuencias para la enseñanza.* Sapiens. Revista Universitario de Investigación. 12, 122-142

ANEXOS

ANEXO A.

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Maestría en Educación Matemática

Estimado alumno, la siguiente prueba no tiene ningún valor curricular dentro de tu evaluación, forma parte de un trabajo de investigación educativa. Por favor resuelve lo que se te pide de manera correcta, tu participación honesta y sincera, es de suma importancia para la relevancia de este trabajo. Recuerda que no puedes hacer uso de tu celular, formulario o calculadora.

Grado: ________________ Edad: ________ Genero: F ☐ M ☐

Ejercicio 1. Expresa en forma algebraica los siguientes enunciados matemáticos.

a) Los kilómetros recorridos por un coche que va a 100 km/h durante x horas. ________________

b) La edad de Juan si tiene 25 años menos que su padre que ahora tiene x años. ________________

c) El área de un triángulo de base 50 cm y altura x centímetros. ______________________

Ejercicio 2. Rodea con un círculo aquellas expresiones algebraicas que sean monomios.

$6a^2bc$ $\qquad$ $4x^3 + 2y$ $\qquad$ $5ab^2$ $\qquad$ $3x + 2y$ $\qquad$ $5ax^4$

Ejercicio 3. Rodea con un círculo los monomios que sean semejantes.

$8x^4y^2$ $\qquad$ $-2a^3b^3$ $\qquad$ $5a^3b^3$ $\qquad$ $6xy$ $\qquad$ $-a^3b^3$ $\qquad$ $6a^3b^3$

Ejercicio 4. Opera y reduce en cada uno de los siguientes incisos.

a) $4b + 6a - 2b - 3a + 4a - 5b =$
b) $6x^3 - 5xy^2 + 3x^3 - 5x^3 + 2xy^2 + 3xy^2 + 2x^3 =$

Ejercicio 5. Opera y reduce en cada uno de los siguientes incisos.

a) $(5x^2y) \cdot (xy) =$

b) $\left(-\frac{2}{3}x^2y\right) \cdot \left(\frac{1}{2}xy\right) =$

Ejercicio 6. Opera y reduce en cada uno de los siguientes incisos.

a) $\frac{60x^2y^3}{12xy} =$

b) $(15a^3b^2) : (3a^2b) =$

Ejercicio 7. Resuelve cada una de las siguientes ecuaciones.

a) $3x + 4 = 10$

b) $5x = 10$

c) $\frac{x}{2} = 4$

Ejercicio 8. Resuelve cada una de las siguientes ecuaciones.

a) $2x + 1 = 3x - 2$

b) $3x + 2(x - 4) = 4(x - 1)$

c) $\frac{2x}{3} + 5 = \frac{5x}{3} + 2$

Ejercicio 9. Desarrolla las siguientes expresiones.

a) $4xy\,(5x + 3y - 3xy) =$

b) $6mn^2(3m^2n - 2mn - 6m^2n^3) =$

c) $3x^3y + 2x(xy - 3x^2y + 5xy^2) =$

Ejercicio 10. Resuelve los siguientes planteamientos.

a) El triple de un número menos cinco es igual a su doble menos tres. ¿Cuál es ese número?

b) La suma de las edades de tres amigos es de 37 años. Si el mayor tiene siete años más que el mediano y el mediano tres años más que el pequeño, ¿cuántos años tiene cada uno?

c) Se quieren repartir 1250 pesos entre tres personas de forma que la primera reciba la mitad que la segunda y la tercera 50 pesos más que la primera, ¿cuánto deberá recibir cada una?

Tabla 1. Respuesta por alumno en cada uno de los ítems.

Ítem	**1**			**2**	**3**	**4**		**5**		**6**		**7**			**8**			**9**			**10**		
Alumno	**a**	**b**	**c**			**a**	**b**	**a**	**b**	**a**	**b**	**a**	**b**	**c**	**a**	**b**	**c**	**a**	**b**	**c**	**a**	**b**	**c**
1	A	D	B	B	B	C	C	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D
2	A	A	A	B	D	A	C	A	D	A	A	A	A	A	A	A	B	C	B	D	A	B	B
3	D	D	D	B	B	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D
4	A	A	B	B	C	D	D	D	D	D	D	A	A	A	D	D	D	D	D	D	D	D	D
5	B	A	B	B	A	B	C	C	B	B	C	C	D	D	D	D	D	C	C	C	D	D	C
6	D	D	D	B	B	D	D	D	D	D	D	C	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D
7	D	D	D	C	C	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D
8	D	D	D	B	C	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D
9	D	D	D	A	A	A	D	A	C	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D
10	D	D	D	B	B	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D
11	C	C	C	C	C	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D
12	B	A	B	B	D	A	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D
13	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D
14	D	D	D	C	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	D	D	D
15	A	A	B	C	B	C	D	C	D	B	B	A	A	A	D	D	D	A	A	C	D	D	D
16	C	D	D	C	B	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D
17	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D
18	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D
19	D	D	D	B	C	C	C	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	D	D	D	D	D	D
20	A	A	B	C	D	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	D	D	D
21	D	D	D	C	B	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	B	B	B
22	D	D	D	B	C	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D
23	D	C	D	A	A	A	A	B	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D
24	D	D	D	A	A	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D
25	C	C	C	A	A	A	A	A	C	A	A	D	A	C	D	D	D	A	A	D	D	D	D

Tabla 2. Resultado general por ítem en porcentaje.

	1			2	3	4		5		6		7			8			9			10		
A	5	6	1	4	6	7	4	6	3	5	5	6	7	6	4	4	3	4	4	2	1	0	0
%	20%	24%	4%	16%	24%	28%	16%	24%	12%	20%	20%	24%	28%	24%	16%	16%	12%	16%	16%	8%	4%	0%	0%
B	2	0	6	11	7	1	0	1	1	2	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	2	2
%	8%	0%	24%	44%	28%	4%	0%	4%	4%	8%	4%	0%	0%	0%	0%	0%	4%	0%	4%	0%	4%	8%	8%
C	3	3	2	7	6	3	4	2	2	0	1	2	0	1	0	0	0	2	1	2	0	0	1
%	12%	12%	8%	28%	24%	12%	16%	8%	8%	0%	4%	8%	0%	4%	0%	0%	0%	8%	4%	8%	0%	0%	4%
D	15	16	16	3	6	14	17	16	19	18	18	17	18	18	21	21	21	19	19	21	23	23	22
%	60%	64%	64%	12%	24%	56%	68%	64%	76%	72%	72%	68%	72%	72%	84%	84%	84%	76%	76%	84%	92%	92%	88%

ANEXO B.

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Maestría en Educación Matemática

Estimado alumno, la siguiente prueba no tiene ningún valor curricular dentro de tu evaluación, forma parte de un trabajo de investigación educativa. Por favor resuelve lo que se te pide de manera correcta, tu participación honesta y sincera, es de suma importancia para la relevancia de este trabajo. Recuerda que no puedes hacer uso de tu celular, formulario o calculadora.

Grado: __________________ Edad: _________ Genero: F ☐ M ☐

Ejercicio 1. Expresa en forma algebraica los siguientes enunciados matemáticos o viceversa.

Lenguaje verbal	Lenguaje algebraico
El triple de un número, aumentado en 5 es 110.	
La suma de dos números enteros y consecutivos es igual a 17.	
El doble de la suma de un número y su mitad es igual a 54.	
	$x - 4 = 15$
El doble de la edad de Ana dentro de 4 años será 14.	
El triple de un número, aumentado en su mitad es igual a 21.	
	$\frac{x+3}{2} = 6$
	$\frac{x}{2} + 3 = 6$
El perímetro de un rectángulo mide 24cm y su base mide el triple de su altura.	
Juan tiene 3 monedas más que María.	

Ejercicio 2. Expresa mediante lenguaje algebraico los siguientes enunciados y resuélvelos.

a) El triple de un número menos cinco es igual a su doble menos tres, ¿cuál es ese número?

b) La suma de las edades de tres amigos es de 37 años. Si el mayor tiene siete años más que el mediano y el mediano tres años más que el pequeño, ¿cuántos años tiene cada uno?

c) Se quieren repartir 1,250 pesos entre tres personas de forma que la primera reciba la mitad que la segunda, y la tercera 50 pesos más que la primera, ¿cuánto deberá recibir cada una?

ANEXO C.

Sesión 1 Desafíos Matemáticos

>>> Para comenzar

En la primaria resolviste problemas en los que tenías que encontrar la solución haciendo operaciones aritméticas: sumas, restas, multiplicaciones y divisiones. En esta secuencia aprenderás una nueva manera de resolver problemas: usarás expresiones algebraicas para representar y encontrar valores desconocidos.

>>> Considera los siguientes desafíos

1. El comité estudiantil organizó la proyección de una película para recaudar dinero para la fiesta de graduación. Antes de dicha proyección había en la caja \$12,000 y después de la proyección aumentó a \$15.500. Ahora el comité desea saber cuántos boletos vendió, si cada boleto tuvo un costo de \$70.

a) ¿Cuánto dinero se recaudó con la proyección de la película? ____________________

b) Si designas con la literal x al número de boletos, ¿cómo expresarías el número de boletos vendidos y su costo? ____________________

c) ¿Cómo expresarías el total de boletos vendidos, a partir de tus respuestas anteriores? ____________________________________

d) ¿Cuántos boletos vendió el comité estudiantil? Utiliza la expresión de tu respuesta anterior. ____________________________________

2 Observa la siguiente figura y responde las preguntas.

a) ¿Qué tipo de triángulo es el de la figura? ____________________
¿por qué? ____

b) Considerando los datos que te dan, ¿cómo podrías expresar el perímetro del triángulo? _________________________________

c) Plantea una expresión que relacione tu respuesta anterior con el perímetro que tiene el triángulo. __________________________

d) Utilizando tu expresión anterior, ¿cuál sería el valor de a?

A la combinación de números, letras (literales) y signos de operación (suma, resta, multiplicación y división) se le denomina **expresión algebraica**. Una expresión algebraica permite traducir problemas cotidianos a expresiones matemáticas para darles solución.

En los planteamientos anteriores, ¿cuáles fueron las expresiones algebraicas a las que llegaste? ____

Como podrás notar ambas expresiones tienen un signo de igual. Una **ecuación** es una igualdad de dos expresiones algebraicas en las que pueden intervenir una o más literales.

>>> Trabajemos juntos

Ahora el comité ha propuesto rifar una Tablet para recaudar más fondos. Para ello cada boleto ha de costar $130.

Juan ha pagado con un billete de $500 y le han devuelto $110 de cambio, ¿cuántos boletos ha comprado?

a) ¿Cuál de las siguientes ecuaciones expresa correctamente la situación de Juan? Suponiendo que se designa con la literal x al número de boletos.

$x + 130 = 500$ $\quad$ $110x + 130 = 500$ $\quad$ $130x + 110 = 500$

$$500x - 130 = 110$$

b) Discute con tu compañero, ¿por qué razón has elegido esa ecuación? _____________________________________

c) Utiliza la expresión que elegiste, para saber ¿cuántos boletos ha comprado Juan? _____________________________________

Retomando el desafío del triángulo, expresa el perímetro de un triángulo equilátero y un triángulo escaleno. ______________________________

Anota en las imágenes correspondientes los datos que necesites para plantear tus ecuaciones.

>>> ¿Con qué finalizamos?

En parejas, plantea una ecuación para cada una de las siguientes situaciones, o en caso contrario un enunciado para la ecuación.

a) Pienso un número que al aumentarlo en 5, obtengo 7. _______________
b) Un número menos 33 da como resultado 114. _____________________
c) Al sumarle 4 a un número me da 12. _____________________________
d) $x - 3 = 2$ ____
e) Pienso un número que al disminuirlo en 3, obtengo 7. _______________
f) $x + 12 = 18$ ____
g) Un número mas 11 da como resultado 45. _________________________

En el ejercicio anterior, ¿qué palabras coloquiales les han ayudado a determinar el signo de la operación para sus ecuaciones?

____

____

Anota tres enunciados utilizando las palabras que se encuentran en el recuadro e intercambia con tu compañero para escribir las ecuaciones que corresponden a sus enunciados.

¿Sabías qué…?

Existen diferentes maneras de expresar la misma idea dentro del álgebra. Por ejemplo: **aumentar, incrementar, mayor que, más grande que**, suelen referirse a la sumatoria; mientras que **disminuir, diferencia, menor que, perder (quitar)** lo hacen para la resta.

Sesión 2 Negocios y más negocios

>>> Para comenzar

En muchas ocasiones las personas que inician un negocio deben invertir cierto capital, sin embargo cuando el negocio ha producido cierta cantidad de dinero, les cuesta trabajo identificar entre sus ganancias y el capital que han invertido. Esta es una de tantas situaciones que necesitan hacer uso de expresiones algebraicas.

>>> Considera los siguientes casos

José quiere montar una serigrafía, para ello necesita comprar una imprenta y materia prima como pintura y playeras. Después de estas compras se ha dado cuenta de que cuatro veces el capital que ha invertido representa $120,000.

Como primer pedido, un equipo de futbol le ha encargado la impresión de sus playeras, les han gustado tanto que ha pedido el doble de juegos, en total ha cobrado $2,550 por el trabajo, del cual $1,000 corresponden a la materia prima.

a) Del primer pedido que ha sacado Juan con las playeras de futbol, ¿cuánto ha sido su ganancia? ____________________

b) Si designas con la literal x al número de juegos de playeras, ¿cómo expresarías el total que han pedido? ____________________

c) ¿Cuál fue el precio de venta de cada juego de playeras? Utiliza tus respuestas anteriores. ____________________

d) ¿Cómo expresarías el capital que ha invertido José en su negocio?

En la CDMX los autos Uber cuentan con taxímetro, Martín ha decidido entrar a trabajar en Uber pero aún no cuenta con él. La empresa le ha comentado que debe cobrar $35 de cuota fija más $2.75 por cada kilómetro recorrido. Después de realizar su primer viaje, a Karla le ha llegado su recibo por $65.25, ¿cuántos kilómetros ha recorrido en su primer viaje Martín?

a) Si designas con la literal x a los kilómetros recorridos, ¿cómo expresarías la tarifa sólo por kilómetro recorrido?

____

b) Considerando los datos que te dan, ¿cómo podrías expresar la tarifa con la cuota fija? Utiliza tu respuesta anterior. ____________________

c) Plantea una expresión que relacione tus respuestas anteriores para poder calcular los kilómetros que ha recorrido Martín en su primer viaje.

____

Retomando el caso de Martín, Uber le ha mandado una tabla mostrando la siguiente información.

Cliente	Alejandro	Tomás	María	Roberto	Claudia
Cobro total	$67.50	$51.50	$84.50	$103.75	$92.75

Escribe una ecuación para cada caso, resuélvelas y escribe el número de kilómetros recorridos por los clientes.

Alejandro ________________________ Kilómetros recorridos ________________
Tomás ___________________________ Kilómetros recorridos ________________
María ___________________________ Kilómetros recorridos ________________
Roberto _________________________ Kilómetros recorridos ________________
Claudia _________________________ Kilómetros recorridos ________________

De las ecuaciones anteriores, ¿puedes notar algún patrón?_________
¿cuál? ____

Como podrás notar en las expresiones anteriores permanece siempre un número ($35), ha este valor se le conoce como **constante**, dentro de una ecuación podrá haber este tipo de valores, es decir que se mantienen fijos y nunca cambian.

Una forma de resolver ecuaciones es **"despejar el valor de x"**, es decir, que por medio de operaciones matemáticas podamos encontrar el valor de dicha literal, haciendo que permanezca de un lado de la igualdad, tal y como lo hiciste en los casos anteriores.

>>> Trabajemos juntos

José ha tenido más pedidos de serigrafía, y como es fin de ciclo escolar varios grupos le han pedido su playera de generación. Y se ha dado cuenta de que cuatro veces la venta de las playeras le da un total de $3,975 y ha invertido $1,325 en materia prima.

a) ¿Cuál ha sido la ganancia por la venta realizada de playeras de generación? ______________________________

b) ¿Cómo expresarías algebraicamente, cuatro veces la venta de playeras? ______________________________

c) Utilizando tus respuestas anteriores, ¿cuál ha sido la venta de playeras de generación?_________________________

Discute con tus compañeros tus respuestas, y observa si han utilizado la misma literal.

>>> Algo más…

Los Pericos de Puebla es un equipo de la Liga Mexicana de Beisbol cuya sede es la Capital del Estado de Puebla, y desde el 16 de Junio de 1973, su casa es el Estadio Hermanos Serdán y ha ganado cuatro campeonatos a lo largo de su historia.

Actualmente su casa, el Estadio Hermanos Serdán, se encuentra bajo ciertas modificaciones para beneficios de la afición a la novena verde como las butacas, los baños y las secciones bien identificadas.
Para empezar con las modificaciones han acordado cambiar tres cuartas partes de las butacas, que equivalen a 9,084 butacas y pintar el resto.

a) ¿Cómo expresarías matemáticamente, tres cuartas partes?________

b) Si designas con la literal x al total de butacas, ¿cómo expresarías algebraicamente tres cuartas partes de la capacidad del Estadio? ______________________________

c) Escribe la ecuación correcta para determinar la capacidad total del Estadio Hermanos Serdán. Utiliza tus respuestas anteriores. ____

d) Haciendo uso de la ecuación que escribiste, ¿cuál es la capacidad total de la casa de los Pericos de Puebla?

>>> ¿Con qué finalizamos?

En parejas, plantea una ecuación para cada una de las siguientes situaciones, o en caso contrario un enunciado para la ecuación.

a) El triple de un número. ____
b) Tres veces m, menos 5. ____
c) Cinco menos el doble de a me da 18. ______________________________
d) $4c - 5 = 12$ ____
e) Piensa un número que dividido por 3, obtengo 27.________________
f) $12 + 3m = 18$____
g) El producto de un número por 6 da como resultado 72. ______________
h) El cociente de la suma de dos números entre su producto. ____________
i) $x/3 + 6 = 25$ ____

En el ejercicio anterior, ¿qué palabras coloquiales les han ayudado a determinar la operación para sus ecuaciones?
____
____

Anota en tu libreta tres enunciados utilizando las palabras que se encuentran en el recuadro e intercambia con tu compañero para escribir las ecuaciones que corresponden a sus enunciados.

¿Sabías qué…?

Existen diferentes maneras de expresar la misma idea dentro del álgebra. Por ejemplo: **producto, múltiplo, veces, doble/triple/etc.,** suelen referirse a la multiplicación; mientras que **dividido, cociente, mitad/tercera/etc.,** lo hacen para la división.

Sesión 3

Puntajes perdidos

>>> Para comenzar

En las sesiones anteriores has estudiado algunas formas de expresar algebraicamente enunciados coloquiales, así como las palabras que representan a la misma operación aritmética de suma, resta, multiplicación o división.

>>> Considera lo siguiente

En el juego de "Preguntados" como en cualquier otro, se debe de llevar el registro del puntaje para elegir un ganador. En el colegio "Las Américas" hicieron un mini torneo de este juego y han designado a los profesores de Matemáticas para llevar el puntaje, pero en una distracción han perdido las puntuaciones de los participantes, sin embargo, son capaces de recordar lo siguiente:

Frase
Sarahí tenía x puntos.
Wendy, el doble de Sarahí menos 100 puntos.
A Mario le faltaban 500 puntos para alcanzar a Wendy
Gabriel consiguió el triple de Sarahí más 300 puntos
Lo de Perla menos lo de Wendy es 3 veces lo de Sarahí. Perla tuvo entonces:
Angélica tuvo la quinta parte de lo de Perla
A David le faltan 1000 puntos para tener lo de Gabriel.
Si a Elena le quitasen 500 puntos, tendría como Sarahí. Elena tiene:
Xochitl tiene dos veces los de Elena, más 100 puntos
Juntas, Rubí y Xochitl, suman tres veces lo de Sarahí. Rubí tiene:
Carlos obtuvo la tercera parte de Gabriel más 2000 puntos.

>> Para ganar el juego

Ayuda a los profesores de matemáticas a expresar algebraicamente los puntajes de los participantes para que puedan determinar el ganador del mini torneo. Para ello debes llenar la siguiente tabla, considerando el primer enunciado que se te da.

Frase	Expresión
Sarahí tenía x puntos.	**x**
Wendy, el doble de Sarahí menos 100 puntos.	
A Mario le faltaban 500 puntos para alcanzar a Wendy	
Gabriel consiguió el triple de Sarahí más 300 puntos	
Lo de Perla menos lo de Wendy es 3 veces lo de Sarahí. Perla tuvo entonces:	
Angélica tuvo la quinta parte de lo de Perla	
A David le faltan 1000 puntos para tener lo de Gabriel.	
Si a Elena le quitasen 500 puntos, tendría como Sarahí. Elena tiene:	
Xochitl tiene dos veces los de Elena, más 100 puntos	
Juntas, Rubí y Xochitl, suman tres veces lo de Sarahí. Rubí tiene:	
Carlos obtuvo la tercera parte de Gabriel más 2000 puntos.	

>>> ¿Con qué finalizamos?

Una vez que has llenado la tabla, debes resolver las expresiones que aparecen en las tarjetas que te asignaron. Anota tus respuestas en el siguiente espacio en blanco.

1. Si Elena obtuvo 3500 puntos, ¿cuántos puntos sacó Rubí?	**2.** Si Carlos y Mario juntaron 7500 puntos, ¿cuántos puntos sacó Wendy?	**3.** Si Perla consiguió 4900 puntos, ¿cuántos tenía Xochitl?
4. Si Wendy obtuvo la misma puntuación que David, ¿cuántos puntos sacó Angélica?	**5.** Si Angélica e Wendy juntaron ellas dos 5520 puntos, ¿cuántos puntos tuvo Carlos?	**6.** La puntuación de Wendy menos la de Angélica fue de 1320 puntos, ¿cuántos sacó Rubí?
7. Lo de Mario menos lo de David fueros 90 puntos, ¿cuántos puntos sacó Carlos?	**8.** Dos veces lo de Sarahí menos lo de Angélica fueron 9020 puntos, ¿cuántos sacó Elena?	**9.** Sumando lo de Gabriel, lo de Mario y lo de David se obtienen 7000 puntos, ¿cuántos tuvo Xochitl?
10. La novena parte de los de Mario son 600 puntos, ¿cuánto sacó Sarahí?	**11.** La puntuación de Perla menos la de Wendy fueron 3600 puntos, ¿cuántos sacó Gabriel?	**12.** Rubí y Xochitl tuvieron 800 puntos más que Wendy, ¿cuánto obtuvo Sarahí?
13. Ocho veces lo de Angélica fueron 6240 puntos, ¿cuántos puntos tuvo Gabriel?	**14.** Carlos sacó 12100 puntos, ¿cuántos puntos sacó Xochitl?	**15.** Tres veces lo de Xochitl es 18300 puntos, ¿cuántos obtuvo Carlos?
16. Lo de Gabriel menos lo de Rubí eran 11400 puntos, ¿cuántos sacó Xochitl?	**17.** La quinta parte de los de Perla más lo de Elena eran 7520 puntos, ¿cuántos sacó Rubí?	**18.** El doble de los puntos de David son 16300, ¿cuántos puntos sacó Angélica?
19. Si Carlos hubiese sacado 400 puntos más, tendría 12500 puntos, ¿cuántos puntos sacó Perla?	**20.** Si Rocío le regalase 1000 puntos a Angélica, entonces éste tendría 2980 puntos, ¿cuántos puntos obtuvo David?	**21.** Mario obtuvo la tercera parte de Carlos, ¿cuántos puntos consiguió Sarahí?
22. Si a Xochitl le diese alguien 1700 puntos más, llegaría a tener cinco veces lo de Perla. ¿Y Sarahí cuánto tuvo?	**23.** La cuarta parte de los puntos de Angélica son 1370 puntos, ¿cuántos tiene Wendy?	**24.** La raíz cuadrada de los puntos de Xochitl son 90 puntos, ¿cuántos sacó David?
25. La tercera parte de los puntos de Elena, aumentado en 450 son 1550, ¿cuántos puntos sacó Rubí?	**26**. Elena obtuvo cinco veces más puntos que Rubí, ¿cuántos puntos sacó Sarahí?	**27.** La quinta parte de lo que ha sacado Carlos, más 400 puntos suman 1500, ¿cuántos puntos sacó Perla?
28. Lo de David menos lo de Mario fueron 1650 puntos, ¿cuántos consiguió Elena?		