BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

UNA EXPLORACIÓN INICIAL DEL DESEMPEÑO DE ESTUDIANTES DE DIFERENTES NIVELES EDUCATIVOS EN LA RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA MATEMÁTICO

TESIS
PARA OBTENER EL TÍTULO DE
MAESTRA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

PRESENTA
LIC. MARTHA PATRICIA VELASCO ROMERO

DIRECTOR DE TESIS
DR. JOSIP SLISKO IGNJATOV
CO-DIRECTOR DE TESIS
DR. MARÍA ARACELI JUÁREZ RAMÍREZ

PUEBLA, PUE. JUNIO 2020

BUAP

Dra. María Araceli Juárez Ramírez **Presidente**
Dra. Honorina Ruiz Estrada **Secretario**
Dr. Gabriel Kantún Montiel **Vocal**
Dr. Josip Slisko Ignjatov **Director de Tesis**
PRESENTE

Me permito comunicar a usted que la fecha programada para realizar el **EXAMEN** para obtener el grado de *MAESTRA EN EDUCACIÓN MATEMATICA,* de la **LIC. MARTHA PATRICIA VELASCO ROMERO,** con la tesis titulada:

"UNA EXPLORACIÓN INICIAL DEL DESEMPEÑO DE ESTUDIANTES DE DIFERENTES NIVELES EDUCATIVOS EN LA RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA MATEMÁTICO"

Será el día 25 de junio del año 2020 a las 12:00 hrs, a través de la plataforma de VIEP**,** posteriormente les haremos llegar la liga de acceso a su correo electrónico.

Por la atención que se sirva dar al presente, anticipo a usted las más sinceras gracias.

A T E N T A M E N T E
"PENSAR BIEN, PARA VIVIR MEJOR"
H. Puebla de Z., a 23 de junio de 2020

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS · SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y ESTUDIOS DE POSGRADO
1578

DRA. LIDIA AURORA HERNÁNDEZ REBOLLAR
SECRETARIA DE INVESTIGACIÓN Y
ESTUDIOS DE POSGRADO

Facultad
de Ciencias
Físico Matemáticas

Av. San Claudio y 18 Sur, edif. FM1
Ciudad Universitaria, Col. San
Manuel, Puebla, Pue. C.P. 72570
01 (222) 229 55 00 Ext. 7550 y 7552

Esta investigación se realizó gracias al financiamiento del

Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT)

De enero 2018 a diciembre de 2019

No. De CVU 890064

Para ti querido maestro,

deseoso de innovar su práctica profesional.

Gracias por seguir de pie y esforzándote.

Apúrate que aún te falta mucho por aprender, enseñar y divulgar.

AGRADECIMIENTOS

“El estudio no se mide por la cantidad de páginas leídas en una noche o por la cantidad de libros leídos en un semestre. Estudiar no es un acto de consumir ideas sino de crearlas y recrearlas”

Paulo Freire

“La parte más reconfortante es el ‘momento ajá’, la emoción del descubrimiento y el deleite de entender algo nuevo; es como la sensación de estar arriba de un cerro y tener la vista limpia hacia delante”

Maryam Mirzakhani

Dedicado a los alumnos que tiene dificultades para aprender matemáticas, ya que ellos son el principal motivo de que el educador matemático cambie su práctica frente al aula buscando nuevas formas de aprendizaje y enseñanza. Estimados alumnos, gracias por sus valiosas preguntas y tiempo.

Al maestro Raúl Cuéllar del Águila, por los consejos invaluables, las anécdotas, el aprendizaje que me ha motivado a seguir adelante con más fuerza. Por escuchar las vivencias de una maestra frente al aula. Por todo el apoyo que me ha dado a lo largo de estos años. Gracias maestro.

Dr. Josip Slisko Ignjatov, Dra. María Araceli Juárez Ramírez, por su apoyo y aportaciones al dirigir la presente tesis. A los miembros del jurado: Dra. Honorina Ruíz Estrada y Dr. Gabriel Kantún Montiel, por sus observaciones pertinentes durante la revisión del documento y en el coloquio.

Para mis alumnos, por todas las vivencias que me han formado durante este largo camino, por sus ocurrencias y apoyo en las actividades. A mis compañeros, amigos y colegas de maestría por los días dulces y ocurrentes de clases.

A mi familia, por el apoyo que me han brindado. A mis amigos, aún presentes y algunas veces ausentes. A mis peludos.

Y a ti, por llegar en el momento adecuado, siendo la manifestación vehemente que hace que el tiempo se vuelva perpetuo.

RESUMEN

La importancia de la resolución de problemas a nivel mundial se ha dado por los estándares establecidos por el NCTM (1980, 1989 y 2004), con una gran relevancia, reformando los currículos de distintos países como es México.

El presente trabajo muestra los resultados de la aplicación de un problema matemático en los niveles educativos de educación básica: Primaria y Secundaria; así como de educación media superior: Bachillerato.

Dentro de la resolución del problema se sugirieron estrategias heurísticas como son los dibujos esquemáticos o matemáticos. En un tipo de prueba se sugirió el uso de esta herramienta mientras que en el otro tipo de prueba no se sugirió. Como resultado, se encontró una diversidad de respuestas y sus representaciones tanto pictóricas como híbridas.

Se encontró que las respuestas correctas están relacionadas con las representaciones híbridas mientras que las respuestas incorrectas les corresponden representaciones pictóricas.

ABSTRACT

The importance of problem solving worldwide has been given by the standards established by the NCTM (1980, 1989 and 2004), with great relevance, reforming the curricula of different countries such as Mexico.

The present work shows the results of the application of a mathematical problem in the educational levels of Basic Education: Primary and Secondary; as well as Upper Middle Education: Baccalaureate.

Heuristic strategies such as schematic or mathematical drawings were suggested within the resolution of the problem. In one kind of test the use of this tool was suggested, while in the other kind of test it was not suggested. As a result, a diversity of responses and their pictorial and hybrid representations were found.

It was found that the correct answers are related to the hybrid representations while the incorrect answers correspond to pictorial representations.

Índice de la tesis

Índice de figuras

Índice de tablas

INTRODUCCIÓN

La resolución de problemas marca a la humanidad entre lo que es capaz de hacer y lo que puede ser capaz de solventar, es decir, la sociedad progresa a medida en que se van resolviendo problemas, desde los vestigios históricos como los papiros de Rhind hasta la modernidad (Ceballos & Blanco, 2008).

La preocupación desde el punto de vista de la enseñanza en la resolución de problemas matemáticos se ve reflejada en las publicaciones del National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1980, 1989), en donde se ve como un eje transversal del currículo de matemáticas, es decir, como la columna vertebral del plan de estudios. Además, el NCTM (2004) considera la resolución de problemas matemáticos como uno de los estándares de procesos en las matemáticas escolares.

Diversos autores entre ellos: Polya (1949, 1981), Schoenfeld (1985), Brandsfor y Stain (1986); y Miguel de Guzmán (2006), establecieron una preocupación por la resolución de problemas planteando los pasos a seguir para resolverlos con el fin de alcanzar el éxito en la solución.

Para poder solucionar un problema matemático es necesario plantear la estructura del problema y así desemboque en la solución del problema. Los estudiantes que se enfrentan a un problema, necesitan comprender patrones o relaciones, estas pueden ser representadas por medio de un dibujo situacional que se puede convertir en un dibujo esquemático.

El dibujo o representación inicial para la solución de un problema debe de representar las variables involucradas en este y evolucionar a un esquema o representación matemática, esta herramienta suele ser eficaz, ya que puede mejorar la comprensión del problema y genera sugerencias o nuevos datos para alcanzar la respuesta correcta.

Hegarty y Kozhevnikov (1999) reportan que las representaciones esquemáticas están correlacionadas con el éxito en la solución de un problema mientras que las representaciones pictóricas están relacionadas con respuestas erróneas. Por su parte, Diezmann y English (2001) describe a los diagramas como representaciones estructuradas sin detalles superficiales y que contienen todas las componentes del problema de manera organizada. En contraste, los dibujos tienen muchos detalles superficiales como puede ser el color o las formas y no representan las relaciones que hay entre las variables del problema.

En la investigación que se llevó a cabo se consideró la instrucción directa para que los estudiantes hicieran representaciones, mientras que a parte de la población no se le hizo ninguna sugerencia. Cabe señalar que dentro de las soluciones recabadas predominaron las representaciones pictóricas en las respuestas incorrectas. Sin embargo, las representaciones esquemáticas no fueron predominantes en las respuestas correctas aunque se encontraron dibujos que denotamos como híbridos, ya que los compone un dibujo con detalles pictóricos y el uso de flechas para representar el recorrido del jardinero.

En el capítulo 1 se presenta el marco teórico, resaltando el uso de las representaciones. En el capítulo 2, se presentan los antecedentes y la justificación de esta tesis, así como las preguntas de investigación y los objetivos. En el capítulo 3 se presenta la metodología, la población de estudio, así como los instrumentos. En el capítulo 4 se presenta el análisis y los resultados del problema matemático, se examinan y catalogan las respuestas y representaciones de cada nivel educativo y se comparan algunas poblaciones estudiadas. Finalmente en el capítulo 5, están las conclusiones del estudio, es decir, las representaciones recabadas comparando el tipo de respuestas y estas a su vez con las investigaciones previas.

CAPÍTULO 1

MARCO TEÓRICO

1.1 Definición de un problema matemático

A lo largo de la investigación en educación matemática, algunos autores han utilizado distintas definiciones o caracterizaciones que comprenden y describen a un problema matemático.

Para Polya es:

> "*tener un problema significa buscar de forma consciente de una acción apropiada para lograr un objetivo claramente concebido pero no alcanzable de forma inmediata.*" (Polya, 1962).

Otra definición la propone Charles y Lester:

> "*es una situación en la que se le pide a un individuo realizar una tarea para la que no tiene un algoritmo fácilmente accesible que determine completamente el método de solución.*" (1982, pág. 5).

Según Schrock (2000) hay tres criterios que un problema debe cumplir:

1. El alumno debe aceptar que está implicado en el problema.
2. Debe tener cierto grado de obstrucción y no poseer un método para solucionar de inmediato el problema.
3. Debe explorar activamente el problema en busca de una solución.

Rico (2006) menciona que la resolución de problemas es *"una actividad científica ligada a la educación",* mientras que Brandsford y Stein (1986), aseguran que es *"un obstáculo entre una situación actual y la deseada"*.

Existen diferentes tipos de propuestas al abordar un problema. Algunos modelos van desde demostrar matemáticamente hasta las estrategias heurísticas (Polya, 1949; Schoenfeld, 1985), mientras que otros se acercan más a modelos psicológicos (Brandsford & Stein, 1993).
Si se desea el éxito de la solución del problema, lo fundamental es la forma de proceder cuando un sujeto se enfrenta a un problema (Foong, 2013). Se pueden establecer una tipología de problemas (Foong, 2002 y 2013):

- Estructura cerrada. Se caracterizan por tener una estructura claramente formulada y son estructurados.
    - Problemas rutinarios. Generalmente se usan para enseñar métodos de resolución de problemas.
    - Problemas no rutinarios. Usados para abordar problemas desconocidos a través de estrategias heurísticas.
- Estructura abierta. Se caracterizan por tener una estructura no estándar o mal formulada.
    - Problema real aplicado. Problemas de situaciones cotidianas.
    - Problema abierto de final corto. Problemas con múltiples respuestas y distintas formas de resolución.
    - Investigación matemática. Actividades abiertas para desarrollar el pensamiento creativo.

1.2 El Nuevo Modelo Educativo y la resolución de problemas

En los Principios y Estándares para la Educación Matemática (NCTM, 2004), la resolución de problemas es uno de los seis estándares de contenidos. Aunado a la Nueva Reforma Educativa, cuyo objetivo principal es una educación pública, básica y superior de calidad, con equidad e incluyente, México debe formar ciudadanos capaces de desarrollarse en su ámbito personal, laboral, familiar y que estén dispuestos a mejorar su entorno social y natural.

Para llegar a esas metas, se organizaron 11 ámbitos, en los que se incluyen:

- **Pensamiento crítico y resolución de problemas.** El alumno formula preguntas para resolver problemas de diversa índole; se informa, analiza y argumenta las soluciones que propone y presenta evidencias que fundamentan sus conclusiones. Finalmente, reflexiona sobre sus procesos de pensamiento (por ejemplo, mediante bitácoras), apoyado en organizadores gráficos (por ejemplo, tablas o mapas mentales) para representarlos y evalúa su efectividad.

Dentro de los propósitos generales del Nuevo Modelo Educativo está el de desarrollar habilidades que les permitan plantear y resolver problemas usando herramientas matemáticas, además de tomar decisiones y enfrentar situaciones no rutinarias.

Asimismo, la autenticidad de los contextos es crucial para que la resolución de problemas se convierta en una práctica más allá de la clase de matemáticas. También se incluye el análisis y modelación de fenómenos y situaciones problemáticas.

Además, en la Nueva Escuela Mexicana, se retoma el Plan 2011 para Educación Básica, cuyos propósitos incluyen que los niños y adolescentes desarrollen en su pensar la formulación de conjeturas y procedimientos que les permita resolver problemas.

1.3 Los estándares académicos fundamentales

Conocidos por *Common Core*, son pautas claras y consistentes de lo que un alumno debe de saber y ser capaz en matemáticas, arte y lenguaje en los niveles que comprenden desde el jardín de niños hasta el nivel bachillerato. Estos estándares fueron establecidos por expertos y maestros de Estados Unidos de América, con el fin de que los estudiantes se prepararen para los retos de la vida universitaria o la capacitación para el trabajo.

Dentro de los Estándares para la práctica matemática se describen las diversas experiencias que los profesores de matemáticas deberían de desarrollar en todos los niveles a sus estudiantes, estas prácticas se basan en competencias que tienen una gran importancia en la educación matemática. Los estándares del NCTM son: la resolución de problemas, el razonamiento y la demostración, la comunicación, la representación y las conexiones.

1.3.1 Da sentido a los problemas y persevera en resolverlos

Los estudiantes matemáticamente competentes, son capaces de explicarse a sí mismos el significado de un problema y buscan puntos de entrada para su solución. Analizan los datos explícitos del problema; identifican las restricciones y las relaciones entre los datos planteados y por último saben cuál es el objetivo del problema a resolver.

El estudiante es capaz de realizar conjeturas sobre la forma y el significado de la solución así como también planificar un camino de solución. No se va con el primer intento de solución, ya que considera planes similares e intenta casos más simples que el problema original. También puede identificar el tipo de problema recurriendo a problemas similares antes resueltos o parecidos. Por lo cual, de ser necesario, cambiará la estrategia.

Los estudiantes más grandes o en niveles superiores pueden transformar el contexto, además usan expresiones algebraicas de ser necesario. A su vez, también pueden dibujar diagramas con las características y las relaciones más importantes del problema. Es importante señalar que los alumnos más jóvenes pueden usar objetos concretos o imágenes para ayudar a la conceptualización y poder resolver un problema.

Los estudiantes matemáticamente competentes revisan sus respuestas a los problemas utilizando un método diferente y se preguntan continuamente: "¿Tiene esto sentido?"

1.3.2 Construye argumentos viables y critica el razonamiento de los demás

Los estudiantes matemáticamente competentes entienden y usan las suposiciones, definiciones y los resultados establecidos previamente en la construcción de argumentos. Hacen conjeturas y construyen una progresión lógica de declaraciones para explorar la verdad de sus hipótesis. Justifican sus conclusiones, las comunican y responden a los argumentos de los demás a través de argumentos válidos, considerando el contexto del cual surgieron los datos. También pueden comparar la efectividad de dos argumentos plausibles, distinguir la lógica correcta o el razonamiento de lo que es incorrecto y, si hubiera un error en un argumento puede explicar qué es.

Los alumnos de primaria pueden construir argumentos utilizando referentes concretos, como objetos, dibujos, diagramas y acciones. Dichos argumentos pueden tener sentido y ser correctos, aunque no estén generalizados. Los estudiantes de todos los grados pueden escuchar o leer los argumentos de otros, decidir si tienen sentido y hacer preguntas útiles para aclarar o mejorar los argumentos.

1.4 Resolución de problemas

Existen diversos enfoques sistemáticos para resolver problemas, uno de ellos descrito por Polya y Zugazagoitia (1965), en los cuales hay cuatro pasos básicos para resolver un problema, que son:

- Entender el problema.
- Diseñar un plan de solución.
- Llevar a cabo el plan.
- Mirar hacia atrás y verificar la solución.

Sin embargo, para entender una situación matemática, primero se debe entenderse la situación del contexto del mundo real; posteriormente deben de entenderse y considerarse suposiciones matemáticas para obtener un modelo matemático que represente la situación problemática. Es decir, el solucionador debe conectar la situación del problema real con una colección de entidades matemáticas relacionando los objetos de la situación con los objetos matemáticos. Esta es la transición no trivial entre los “modelos de situación” y los “modelos matemáticos” (Blum et al., 2007; Stillman et al., 2013; citado en Contreras et al, 2019).

En la comprensión del problema, el solucionador tiene que construir un modelo mental correcto de la situación, llamado: "modelo situacional", cuya representación puede quedar plasmada en un dibujo, después se reestructura el dibujo seleccionando los datos relevantes así como sus relaciones. Finalmente, se “resaltan” los conceptos matemáticos relacionándolos para obtener un "modelo matemático" de la situación, por consecuencia, se puede planificar una solución matemática (Borromeo Ferri, 2006, citado en Contreras et al., 2019).

Es necesario recalcar que la transición entre el modelo real y el modelo matemático no es fácil y se debe de tener una instrucción para que el estudiante pueda usar dibujos de manera eficiente que se verá reflejado en su rendimiento al modelar problemas. Las habilidades de dibujo de los estudiantes pueden mejorarse proporcionándoles apoyo instructivo y práctica suficiente en la generación de dibujos y entrenamiento para pasar del dibujo situacional al modelo matemático (Rellensmann, Schukajlow & Leopold, 2017).

En particular, los problemas no rutinarios se resuelven de manera distinta que los problemas rutinarios, ya que no hay un algoritmo establecido o un conjunto de pasos preestablecidos para llegar a su solución (Elia, van den Heuvel-Pahnuizen & Kolovou, 2009: Pantziara, Gagatsis, & Elia, 2009; citado en Boonen, 2015, p. 134).

La resolución de problemas verbales no comunes depende de dos fases principales: la comprensión del problema y la solución del problema. Dentro de la comprensión del problema implica cuatro fases:

- Comprender el texto del problema. Es decir, que preguntas se deben responder.
- Identificar los componentes numéricos y lingüísticos relevantes del problema.
- Identificar las relaciones espaciales entre estos componentes.
- Representar los componentes y las relaciones espaciales entre la estructura del problema, es decir, representar las relaciones entre las componentes del problema de una manera completa y coherente.

La solución del problema implica determinar las operaciones matemáticas (es decir, suma, resta, multiplicación y / o división) que se aplicarán a los componentes numéricos identificados y ejecutar estos cálculos para resolver el problema (Krawec, 2010; Lewis y Mayer, 1987; citado en Boonen, 2015, p. 134). Por lo tanto, resolver problemas verbales no rutinarios implica llevar a cabo e integrar varias actividades cognitivas que involucran una cantidad no trivial de información relacionada (Boonen, 2015).

Es importante recalcar que las dificultades experimentadas por muchos estudiantes para resolver problemas verbales no comunes no son consecuencia su incapacidad para ejecutar cálculos, sino de dificultades para comprender el texto del problema, identificar las componentes relevantes para la solución y las relaciones entre ellos, así como representar la estructura del problema (Boonen et. al., 2013; Carpenter, Corbitt, Kepner, Lindquist y Reys, 1981; Cummins, Kintsch, Reusser y Weimer, 1988; Krawec, 2010; Lewis y Mayer, 1987. Citado en Boonen, 2015). Por lo tanto, las soluciones erróneas de problemas verbales no comunes, son frecuentemente consecuencia de errores en la fase de la comprensión del problema en lugar de la fase de solución del problema.

1.5 Tipos de representaciones y su clasificación

Las representaciones visuales son importantes en la educación matemática porque mejoran una visión intuitiva y una comprensión en muchas áreas de las matemáticas. Krutetskii (1976) concluyó que los individuos que resuelven un problema pueden clasificarse en tres tipos: no visualizadores, que son aquellos que prefieren modos verbales en lugar de imágenes; visualizadores, que involucra a aquellos que prefieren usar imágenes visuales; y por último los mixtos, los cuales no tienen una tendencia con los dos anteriores.

Una representación visual debería aclarar la estructura del problema, ya que hace visibles las relaciones numéricas, lingüísticas y espaciales entre los elementos relevantes para la solución, lo que en consecuencia facilita la comprensión del problema y la identificación de los cálculos a realizar (Boonen et al., 2014; Krawec, 2010, 2012. Citado en Boonen, 2015). Por lo tanto, el uso de representaciones visuales durante la comprensión del problema podría ser una forma efectiva de apoyar la resolución de problemas de palabras (Van Garderen y Montague, 2003. Citado en Boonen, 2015).

Polya (1965) define un diagrama como una representación visual que presenta información distribuida en espacio. Asimismo, Hegarty y Kozhevnikov (1999), describen dos tipos de representaciones visuales-espaciales: las representaciones esquemáticas, las cuales representan las relaciones entre las variables del problema y las representaciones pictóricas, que son más similares a dibujos sin establecer relaciones entre las componentes del problema. En esa investigación se demostró que las representaciones esquemáticas están relacionadas con la solución correcta del problema.

Por otro lado, llamamos a un dibujo situacional "*una representación exteriorizada del modelo de situación que representa gráficamente los objetos descritos en la situación problemática de acuerdo con su apariencia visual"* (Rellensmann, Schujajlow & Leopold, 2017, p. 57). Por lo que, podemos denotarlo como un dibujo de bajo nivel de abstracción, definido como dibujo pictórico.

Un dibujo matemático es: *"un dibujo abstracto porque proporciona una representación externa del modelo matemático*" (Rellensmann, Schujajlow & Leopold, 2017, p. 57). Un dibujo matemático muestra solo los objetos relevantes para la solución de la situación del problema.

Cabe señalar que los dibujos no son totalmente pictóricos o totalmente matemáticos, sino que pueden ser una combinación de ambos, a lo que llamaremos una representación híbrida.

El término diagrama y dibujo a veces son tratados como sinónimos, sin embargo, es necesario diferenciar entre ellos. Diezmann y English (2001) definen a los diagramas como representaciones estructuradas en donde los detalles superficiales no importan y suelen basarse en convenciones que representen las componentes de la situación de manera organizada. En contraste, los dibujos son generados con muchos detalles y no representan las relaciones de las variables del problema.

Además Polya (1965) y Schoenfeld (1992) argumentaron que las representaciones visuales tales como imágenes y diagramas son esenciales en la resolución de un problema. Al usar un diagrama, se facilita la solución del problema matemático, porque en ellos se representa la información y la estructura del problema (Novixk, 2001; Diezmann, 2005). Las representaciones visuales se pueden ver en la enseñanza de las matemáticas, en el momento en que el profesor representa la estructura de un problema durante la clase.

Diezmann (2005), sostiene que los diagramas tienen tres ventajas cognitivas en la resolución de un problema:

- Contribuyen a la conceptualización del problema. La estructura del problema tiene elementos que se identifican como la situación del problema, las relaciones entre sus elementos y el significado de ellos, por lo cual el diagrama debe representar la solución del solucionador.
- Son un sistema de representaciones de conocimiento basados en la deducción y a su vez pueden generar más conocimiento. Los diagramas pueden compartir estructura pero pueden representar problemas distintos.
- Apoyan el razonamiento visual, que complementa al razonamiento lingüístico. El razonamiento espacial y visual comprende las habilidades: comprensión, manipulación y reorganización o visualización de las relaciones entre los componentes.

La recta numérica destaca como representación (Elia, 2007), junto con el texto escrito y el texto con imágenes para la resolución de un problema. La recta numérica es una representación donde se usan cantidades crecientes y se representan números.

Siegler y Booth (2005) sugieren que la recta numérica se puede usar como una herramienta de enseñanza para promover la dependencia en las representaciones lineales y para ayudar a los niños a comprender los significados de cualquier rango de números. Gagatsis, Shiakalli y Panaoura (2003) consideran la recta numérica como un modelo geométrico, que implica un continuo intercambio entre una representación geométrica y una aritmética.

Zhang y Norma (1994), sostienen que las representaciones guían y limitan las acciones cognitivas del estudiante. Por otra parte, Uesaka (2007) demostró que los diagramas son estrategias heurísticas en la solución de problemas. Cuando los estudiantes construyen sus propios diagramas, el conocimiento no encontrado puede ser generado y a su vez permitirá que se asocie con los demás datos del problema que en un principio pudieron ser incapaces de relacionar. Existen problemas que requieren de una interpretación porque tienen un diagrama ya establecido, también hay problemas en los cuales hay que construir un diagrama.

Novick y Hurley (2001), proponen tres tipos de diagramas que tienen características distinguibles entre cada uno y sus propiedades se describen en la Tabla 1.

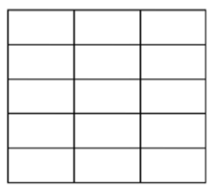

Figura 1.Tipo de diagrama: tabla

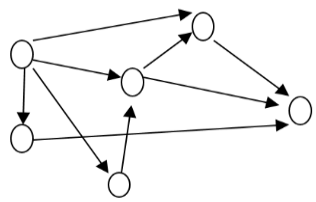

Figura 1. Diagrama de red.

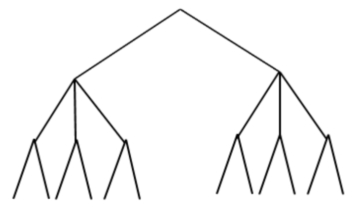

Figura 3.Diagrama jerárquico.

Tabla 1. Propiedades discretas de diagramas

Propiedad	**Diagrama de red**	**Diagrama jerárquico**	**Tabla**
Estructura global	No tiene estructura formal predefinida.	Organización dentro de niveles, comienza con un nodo principal que ramifica los niveles siguientes.	Todos los valores de una variable tienen los valores de otra variable en común.
Conjuntos de números	Un conjunto de información.	No tiene límite en un conjunto de información.	Dos conjuntos de información.
Entrelazar información	Cualquier nodo se puede enlazar con cualquier otro.	No puede haber enlaces entre nodos que se encuentran en el mismo nivel.	Los valores en una misma dimensión no pueden ser enlazados.
Tipo de enlace	Cada dos nodos hay un enlace, estos nodos son flexibles.	Un solo nodo da lugar al menos a dos más, sus enlaces son direccionales.	No hay enlace directo en la representación.
Relaciones de enlace: uno a muchos, muchos a uno o ambos	Ambas relaciones de enlace.	Una de las relaciones de enlace, pero no ambas al mismo tiempo.	Los enlaces asociados con cada valor de fila o columna representan a muchas o varias representan a una sola, estas relaciones se deben inferir.

Caminos transversales posibles	Múltiples rutas de nodo a nodo son posibles.	Para cualquier par de nodos A y B, solo hay un camino posible para pasar de uno a otro.	No tiene caminos la representación.

Fuente: (Pantziara, 2009)

1.5.1 Las representaciones en la resolución de problemas no comunes

En particular en Estados Unidos, la resolución de problemas por parte de los estudiantes y maestros se enfocan en la fase de solución, y en programas de bajo rendimiento se incorporan ambas fases de la resolución de problemas en forma de estrategias cognitivas paso a paso, en las cuales se incluyen estrategias para: comprender el texto del problema, para identificar y representar la estructura del problema mediante una representación visual (Jitendra y Star, 2012; Jitendra et al., 2009; Krawec, 2012; Montague et al., 2000. Citado en Boonen, 2015).

Asimismo, los problemas no rutinarios no tienen una manera prescrita de representarse, y los estudiantes no saben cómo transformar el enunciado del problema no rutinario en una representación visual que les sea útil. Es decir, los estudiantes no saben que dibujar, bajo qué circunstancias y para qué tipo de problemas (Jitendra et al., 2007; Jitendra et al., 2009. Citado en Boonen, 2015).

Se debería de enseñar a los estudiantes a producir representaciones visuales que representen con precisión la estructura específica de la situación de los problemas de palabras no rutinarios. Dichas representaciones deben presentar un modelo completo y coherente de las relaciones entre todos los componentes del problema relevantes para la solución. Es decir, representaciones visuales esquemáticas precisas (Boonen, 2015).

CAPÍTULO 2

ANTECEDENTES Y JUSTIFICACIÓN

2.1 Antecedentes

Existen diversos estudios en la literatura que usan la resolución de problemas en distintos ámbitos en la Educación Matemática, en este apartado se hablará de algunos artículos que usan las representaciones esquemáticas y los dibujos pictóricos como una herramienta.

Las representaciones visuales como son los esquemas y los dibujos matemáticos, pueden ser de ayuda en la resolución de un problema, sin embargo, el uso de estos, e incluso el uso de dibujos pictóricos no es popular entre los estudiantes para representar la estructura de un problema, es decir, aunque se le sugiera al estudiante el uso de un diagrama, muy probablemente lo considere inadecuado, a pesar de que los maestros los utilizan al explicar un problema frente a clase.

Un estudio experimental de intervención fue realizado en Australia a 12 estudiantes cuya edad promedio era de 10.25 años, estos estudiantes eran de quinto año (Diezmann, 1997). Dentro del estudio se planteó la hipótesis de qué después de un programa de 12 sesiones de media hora cada una, se mejoraría la generación de diagramas. Los estudiantes no fueron instruidos específicamente para usar diagramas, sin embargo, cuando su uso era espontáneo por parte del estudiante se le dieron sugerencias para un mejor uso del diagrama, es decir, se fomento el uso del diagrama para que el estudiante percibiera su utilidad en la resolución de un problema.

El uso de un diagrama en la solución de un problema puede asumir dos roles importantes: por un lado el de representar la estructura del problema, así como ser la base para el desarrollo de un plan de trabajo para llegar a la solución. Hay que aclarar que la generación de un dibujo no garantiza la solución correcta de un problema, pero sí aumenta la posibilidad de que el problema sea conceptualizado correctamente (Diezmann, 1997).

La ventaja de generar un diagrama se basa en el hecho de que mejora la conceptualización del problema, ya que el estudiante considera las variables que tiene el problema y las plasma en su representación. Cabe señalar que los diagramas no son particulares para explicar un tipo de problema específico, ya que el mismo diagrama puede representar dos problemas distintos. También la representación de un problema mediante un diagrama no tiene por qué ser única, ya que dos diagramas con características distintas pueden representar al mismo problema.

Asimismo, en la literatura podemos encontrar diversos estudios que nos indican que el uso de imágenes visuales no siempre es efectivo y puede conducir a soluciones erróneas de problemas matemáticos, por ejemplo, las representaciones pictóricas. Generar un dibujo no garantiza la solución correcta del problema, pero si aumenta la posibilidad de que el problema sea conceptualizado correctamente (van Essen, 1990).

Los dibujos generados por los alumnos con diferentes niveles de abstracción, están relacionados de manera diferente con el rendimiento de la resolución de problemas. Hegarty y Kozhevnikov (1999), encontraron que el uso de representaciones pictóricas (dibujo situacional) se correlacionaba negativamente con el rendimiento de resolución de problemas de los estudiantes de sexto grado, mientras que las representaciones abstractas (dibujo matemático) se asociaron con la resolución exitosa de problemas.

Cabe señalar que Diezmann y English (2001) concluyen que la representación es uno de los diez estándares recientes para las matemáticas escolares mencionado en el NCTM (2000, p. 67), en donde se *"sugieren que se apliquen las representaciones matemáticas para resolver problemas".* A su vez, se recomienda que se enfatice en el uso de diagramas en distintos problemas con diferente estructura, del mismo modo monitorear y responder a las dificultades del estudiante durante el desarrollo del diagrama y finalmente asegurarse de que los problemas sean un reto muy significativo para garantizar el uso de un diagrama.

De Bock y otros (1998, 2003), reportaron que los estudiantes donde se involucraron problemas de longitudes y áreas de figuras geométricas, los cuales no recibieron instrucciones para crear un dibujo no obtuvieron mejores resultados que los que si tenían instrucción en la creación de dibujos esquemáticos. Esto sugiere que el dibujo generado debe estar ligado al tipo de problema y a su representación.

Pantziara (2009), menciona que sacar conclusiones sobre el uso de dibujos matemáticos o diagramas en la resolución de problemas es confuso, ya que en la literatura existen discusiones sobre el uso de las representaciones, Diezmann y English (2001) informan una relación positiva, y se maneja como una "*componente esencial en el desarrollo del estudiante"* (2001, p. 88) y mientras que por otro lado Eisenberg y Dreyfus (1991) reportan que los estudiantes avanzados son renuentes a las representaciones visuales.

En una intervención con dos grupos húngaros cuyas edades de los participantes oscilaban entre los 9 y 10 años (Csíkos, 2012), se dividen en dos grupos: en el grupo experimental se generaron dibujos para cada problema planteado y se discutía el papel de la representación visual, mientras que en el grupo de control no se discutían las representaciones visuales. Ambos grupos mejoraron en la resolución de problemas, sin embargo, se obtuvo un mejor rendimiento para el grupo experimental.

En Alemania, se hizo un estudio con niños de cuarto año de primaria, cuya edad promedio era de 9.21 años. El total de alumnos fue de 199, de los cuales 103 eran mujeres y 96 hombres. Durante la resolución del problema fue más significativo el uso de dibujos que el de tablas (Reuter, T., Schnotz, W., & Rasch, R., 2015). Dentro de este estudio se incluyeron 12 problemas distintos, clasificados de la siguiente manera: 4 problemas de combinatoria, 4 problemas de comparación y 4 problemas de movimiento. Los escenarios y números variaban entre cada actividad. Durante el experimento se dividió al grupo en dos: un grupo experimental con 159 estudiantes y un grupo control que contó con 40 estudiantes. El grupo control no contó con ninguna representación externa para resolver los problemas. Reuter, Schnotz y Rash (2015) concluyen que se debe de fomentar un programa de enseñanza temprana donde intervenga el uso adecuado de diagramas como son dibujos y tablas para representar los esquemas de los problemas y tener una mejor administración cognitiva.

Hay varios beneficios atribuidos en la generación de un dibujo. Primero, los dibujos soportan la organización que se le da a la información, es decir, que cuando el estudiante genera un dibujo para un problema, entiende los objetos involucrados en la tarea y la relación entre ellos. Segundo, se reduce la cantidad de información enfocándose en lo relevante que se presenta en el dibujo. A su vez, pueden hacer inferencias sobre lo importante para resolver el problema. Por lo cual, un dibujo puede ayudar a los estudiantes a ver conceptos e ideas matemáticas.

Para modelar problemas matemáticos, el dibujo generado por el alumno describe el proceso y el producto de generar una ilustración que corresponde a los objetos y las relaciones descritas en la tarea.

Las estrategias de dibujo se utilizan como una herramienta poderosa para promover el aprendizaje y la resolución de problemas, se hizo un estudio a 61 estudiantes donde se creó un dibujo situacional y uno matemático, estos se relacionaron con el rendimiento del modelado del estudiante (Rellensmann, Schukajlow & Leopold, 2017).

Comprender el problema y construir un modelo situacional adecuado es de gran importancia para la resolución exitosa del problema (Leiss et al., 2010; en Rellensmannn, Schukajlow & Leopold, 2017). Además, el dibujo situacional puede ayudar al estudiante a detectar la estructura matemática implícita reduciendo los objetos situacionales a sus características matemáticas relevantes e insertando objetos nocionales como líneas y ángulos (Arcavi, 2003; en Rellensmannn, Schukajlow & Leopold, 2017). De esta manera, un dibujo situacional promueve la construcción de un dibujo matemático y ayuda al alumno a gestionar la transición de la realidad a las matemáticas en el ciclo de modelado (Blum y Leiss, 2007; en Rellensmannn, Schukajlow & Leopold, 2017). Además, es posible que un dibujo situacional apoye el modelado promoviendo la interpretación y validación del resultado matemático con respecto a la realidad.

Un dibujo matemático está fuertemente relacionado con el rendimiento de modelado, ya que proporciona una representación pura de la estructura del problema matemático, y los métodos matemáticos cuando se aplican correctamente conducen directamente a un resultado matemático.

2.2 Una prueba piloto de las resoluciones de 15 problemas

En la investigación de Hegarty y Kozhevnikov (1999) se plantearon 15 problemas. Estos se tradujeron al español y se aplicaron a una población de 21 estudiantes de Educación Secundaria Básica. Se realizó un análisis resaltando las representaciones de las respuestas correctas.

El problema 1 dice lo siguiente:

> “En cada uno de los dos extremos de un camino recto, un hombre plantó un árbol; luego cada 5 metros a lo largo del camino plantó otro árbol. La longitud del camino es de 15 metros. ¿Cuántos árboles se plantaron?”

La respuesta correcta para este problema es 4 árboles (Figura 4). De las réplicas dadas por los estudiantes, solo se obtuvieron 5 respuestas correctas (Tabla 2). Además, se encontró una posible respuesta correcta la cual es 8 árboles. Se considera correcta por la situación del contexto, ya que el estudiante menciona que el camino puede tener árboles en ambos lados. Es necesario resaltar que el camino puede ser una carretera, y se pueden tener árboles en ambos lados.

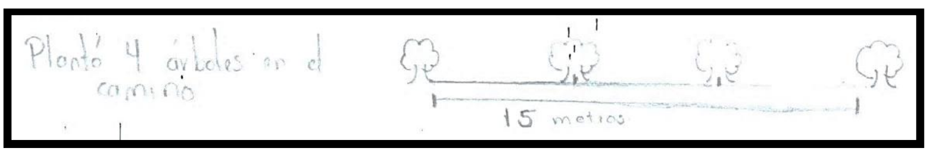

Figura 2. Representación de la solución del problema 1.

Fuente. Elaboración propia.

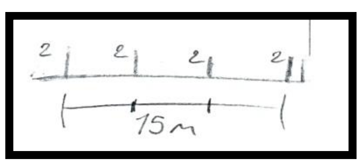

Figura 3. Representación de la solución del problema 1.

Fuente. Elaboración propia.

Tabla 2. Respuestas correctas del problema 1.

Respuesta	Procedimiento	Tipo de dibujo
4 árboles	Sin operaciones. Marca en cada árbol el 0,5,10 y 15	Pictórico-recta numérica
4 arbolitos	Dibujo 4 árboles y las distancias entre ellos	Pictórico
4 árboles	Línea recta con separaciones , en cada separación pone un árbol	Recta numérica – pictórico
4 árboles	Camino con 4 árboles y numeración debajo de los árboles	Recta numérica – pictórico
4 árboles	Línea recta con 4 árboles y 15 metros debajo de la línea	Recta numérica – pictórico
8 árboles	Línea recta con separaciones	Recta numérica

Fuente. Elaboración propia.

Dentro de las respuestas incorrectas, la más común es la de 3 y 6 árboles. La primera respuesta se atribuye al uso de operaciones usando los números del problema, ya que dividen los 15 metros entre 5, lo que da como resultado 3 árboles (Figura 6). Para la segunda respuesta, se considera el procedimiento anterior y se multiplica por 2. Estas operaciones aritméticas se pueden interpretar como una faceta del "contrato didáctico" (D'Amore & Martini, 1997), al que están sometidos los alumnos y el cual señala el uso mecánico de operaciones para justificar su resultado.

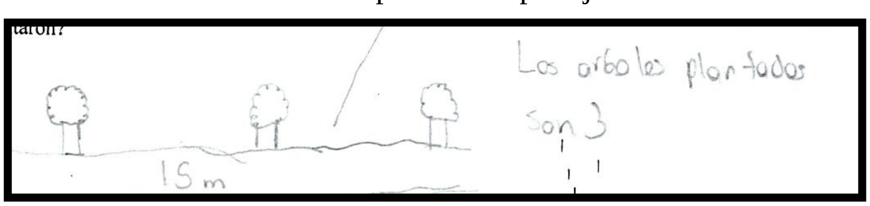

Figura 4. Representación de la solución del problema 1.

Fuente. Elaboración propia.

El problema 2 menciona:

> "En un lado de una balanza de platillos hay una pesa de un kilogramo y la mitad de un ladrillo; en el otro hay un ladrillo completo. La balanza está equilibrada. ¿Cuál es el peso del ladrillo?"

La respuesta correcta a este problema es 2 kilogramos, cuya respuesta la dieron 8 estudiantes (Tabla 3). Se asocian el peso de medio ladrillo con 1 kilogramo, como consecuencia, el ladrillo completo debe pesar 2 kilogramos (Figura 7).

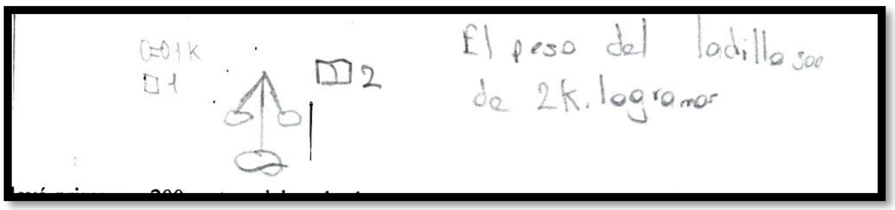

Figura 5. Representación pictórica de la solución del problema 2.

Fuente. Elaboración propia.

Tabla 3. Respuestas correctas del problema 2.

RESPUESTA	PROCEDIMIENTO	TIPO DE DIBUJO
2 kilogramos	Dibujo de una balanza con la pesa y los pedazos de ladrillo	Pictórico
2 kilogramos	Dibujo de una balanza con la pesa y los pedazos de ladrillo	Pictórico
2 kilogramos	1 kg+ medio ladrillo = 2 kilogramos	Ecuación-pictórico
2 kilogramos	Una mitad pesa 1 kilogramo, dos mitades 2 kilogramos	Ecuación-pictórico

2 kilogramos	Dibujo de una balanza con la pesa y los pedazos de ladrillo	Pictórico
2 kilogramos	En cada platillo compara lo que tiene	Pictórico
2 kilogramos	Dibujo de una balanza con la pesa y los pedazos de ladrillo.	Pictórico
2 kilogramos	1/2 ladrillo= 1 kilogramo 2 ladrillos=2 kilogramos	Ecuación-pictórico

Fuente. Elaboración propia.

Dentro de las respuestas incorrectas encontramos la suma directa de los datos de la pesa de un kilogramo y la mitad de un ladrillo, por lo cual suman estás cantidades, y da $1 + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$. Notemos que el peso de la pesa lo están sumando directamente con la mitad.

Los participantes que no llegaron a una respuesta correcta o no realizaron la suma anterior, hicieron el planteamiento de la situación por medio de un dibujo pictórico. Para este problema existe una solución algebraica, pero no se encontró en esta muestra.

Para el problema 3, se planteó como sigue:

> "Un globo se elevó primero a 200 metros del suelo, luego se movió 100 metros hacia el este, después descendió 100 metros. Inmediatamente viajó 50 metros hacia el este, y finalmente cayó directo al suelo. ¿Qué tan lejos estaba el globo de su punto de partida con respecto al suelo?"

La respuesta correcta es 150 metros, que obtuvieron 9 estudiantes. Se calculo midiendo las distancias del punto inicial al punto final en dirección este. Se consideró como respuesta correcta a un participante que sumó las distancias distinguiéndolas en dos tipos: hacia el este y hacia arriba, por lo cual su respuesta fue de 150 metros al este y 100 metros hacia arriba (Figura 8).

Dentro de las respuestas comunes incorrectas, encontramos la de sumar todos los recorridos del globo sin considerar la dirección, es decir, sumar todos los datos numéricos que aparecen en el problema, que es la mitad de las respuestas incorrectas:

$$200\ m + 100\ m + 100\ m + 50\ m = 450\ m$$

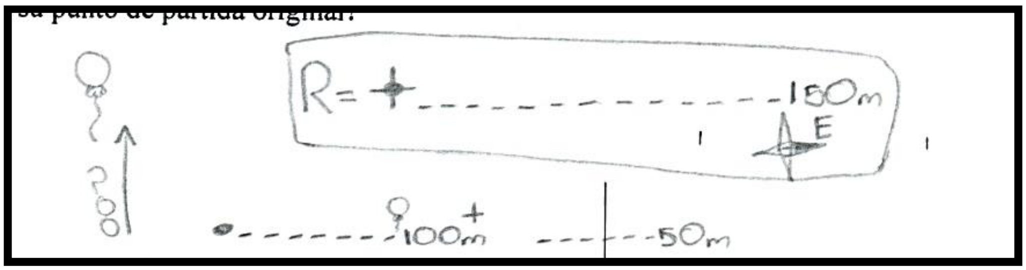

Figura 6. Representación pictórica de la solución correcta del problema 3.

Fuente. Elaboración propia.

En el problema 4:

> "En una carrera de atletismo, Jim está cuatro metros por delante de Tom y Peter está tres metros por detrás de Jim. ¿Qué tan lejos está Peter por delante de Tom?"

La respuesta correcta es 1 metro, la cual fue dada por 11 estudiantes. En este problema, el principal procedimiento encontrado fue ubicar a los personajes del problema en una recta numérica y localizando las distancias entre ellos, por lo cual, las representaciones visuales del problema fueron dibujos híbridos dados por rectas numéricas y dibujos pictóricos (Figura 9). Dentro de las respuestas incorrectas, destaca la de sumar los datos numéricos entre los personajes del problema, los cuales dan como resultado 7 metros. Cabe señalar que de los quince problemas propuestos a los participantes, este problema tiene la mayor cantidad de respuestas correctas.

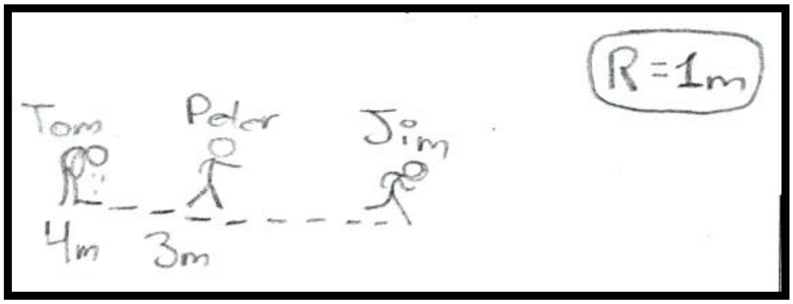

Figura 7. Representación pictórica de la solución correcta del problema 4.

Fuente. Elaboración propia.

Para el problema 5:

> "Un cuadrado (A) tiene un área de 1 metro cuadrado. Otro cuadrado (B) tiene lados dos veces más largos. ¿Cuál es el área de B?"

La solución a este problema es 4 metros cuadrados que obtuvieron 4 participantes. En este caso, la representación geométrica de un cuadrado hace posible la solución del problema, ya que sirve como referencia para generar la segunda representación que es la respuesta correcta a la cuestión. Por otro lado, hay dificultades con la pregunta del problema en cuanto a su dimensión, ya que se considera al área como una medida lineal y no como una medida de dos dimensiones, por lo cual hay un obstáculo al comparar dos dimensiones diferentes, al combinarlas al hacer operaciones o al interpretarlas.

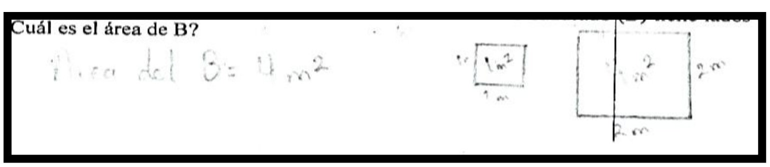

Figura 8. Representación matemática de la solución correcta del problema 5 con unidades.

Fuente. Elaboración propia.

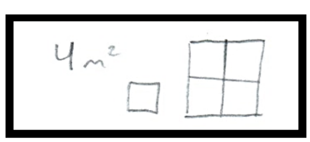

Figura 9. Representación matemática de la solución correcta del problema 5.

Fuente. Elaboración propia.

Para el problema 6:

> "De una vara larga de madera, un hombre cortó 6 varas más pequeñas, cada una de 2 pies de largo. Luego descubrió que le quedaba un pedazo de 1 pie de largo. Encuentra la longitud de la vara original."

Para encontrar el resultado correcto se hace uso de la representación visual de las varas segmentadas y la unión de la última vara pequeña que da un total de 13 pies (Figura 13), además, algunos estudiantes operaron de manera directa $(2x6) + 1 = 13$ (Figura 12), donde la primera operación aritmética representa las seis varas por la longitud de cada una de ellas y finalmente suman la longitud del pedazo sobrante. El total de participantes son respuesta correcta fueron 5.

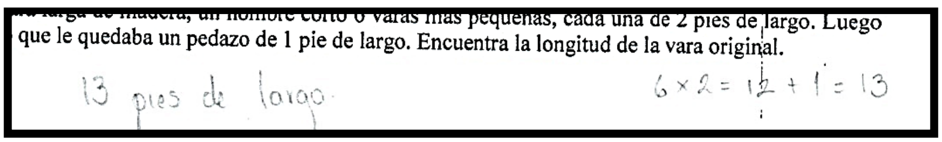

Figura 10. Representación matemática de la solución correcta del problema 6.

Fuente. Elaboración propia.

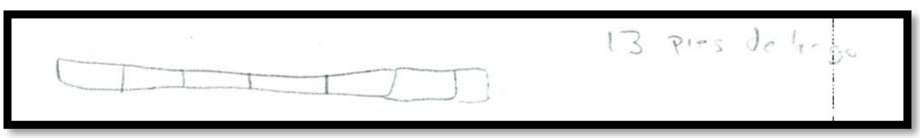

Figura 11.Representación pictórica la solución correcta del problema 6.

Fuente. Elaboración propia.

Para el problema 7:

> "El área de un campo rectangular es de 60 metros cuadrados. Si su longitud es de 10 metros, ¿qué tan lejos viajarías si recorrieras todo el camino alrededor del campo?"

La respuesta correcta es 32 metros, que solo 2 estudiantes obtuvieron. Para llegar a esta es necesario considerar en el modelado de la situación un rectángulo, enseguida considerar el área de la figura y relacionarla con uno de sus lados para poder calcular el lado faltante.

Conociendo las longitudes de los cuatro lados se calcula el perímetro del rectángulo que es el camino alrededor del campo (Figura 14).

El uso de metros cuadrados y metros lineales al hacer las operaciones correspondientes muestran metros lineales en las respuestas correctas, mientras que en las respuestas incorrectas se desprecian mostrando una dificultad al relacionar estas unidades con la fórmula del área y del perímetro.

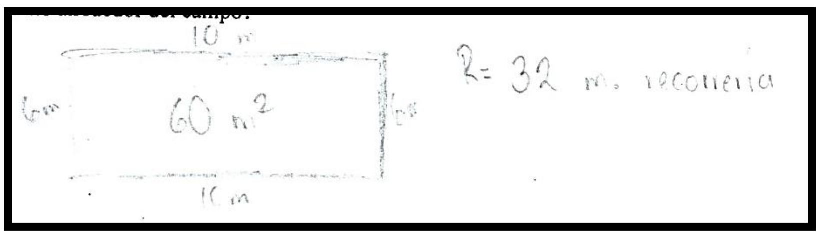

Figura 12. Representación matemática de la solución correcta del problema 7.

Fuente. Elaboración propia.

Para el problema 8:

> "Jack, Paul y Brian tienen cumpleaños el 1 de enero, pero Jack es un año mayor que Paul y Jack es tres años menor que Brian. Si Brian tiene 10 años, ¿qué edad tiene Paul?"

Para la solución de este problema los participantes consideraron el uso de una representación esquemática, como lo es una tabla, en la cual se organizan los datos considerando las relaciones entre los datos del problema con el fin de obtener la respuesta correcta que es 6 años (figura 15). También se organizan los datos por medio de una lista con las iníciales de los nombres de los personajes de la problemática, así como su respectiva edad, considerando las condiciones del problema. Solo hubo cuatro respuestas correctas, ya que el uso de una representación esquemática requiere de instrucción y haber desarrollado esta capacidad de organización. Con este hecho, solo hubo 4 respuestas correctas.

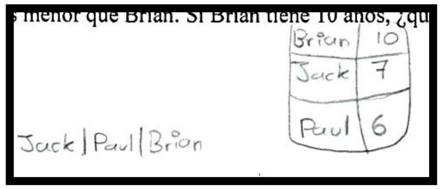

Figura 13. Representación esquemática de la solución correcta del problema 8.

Fuente. Elaboración propia.

Para el problema 9:

> "El diámetro de una lata de duraznos es de 10 cm. ¿Cuántas latas caben en una caja de 30 cm por 40 cm (una sola capa)?"

En la solución de este problema se identifica el uso de un rectángulo que representa la base de una caja en donde se guardan las latas de duraznos, posteriormente se considera un circulo de 10 centímetros de diámetro que representa la base de la lata. En la Figura 16, se muestran cuadrados de 10 centímetros de lado, por lo cual, en la caja hay 12 latas.

El total de estudiantes con respuesta correcta fue de 8. Por otro lado, una respuesta incorrecta interesante es la de 120 latas, porque el participante multiplica directamente $30cm \times 40\ cm$, sin considerar que está multiplicación dará centímetros cuadrados.

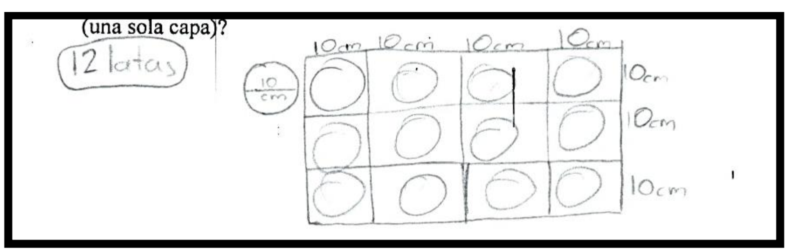

Figura 14.Representación matemática de la solución correcta del problema 9.

Fuente. Elaboración propia.

Problema 10:

> "Cuatro árboles jóvenes fueron colocados en fila a 10 metros de distancia. Un pozo estaba situado al lado del último árbol. Se necesita una cubeta de agua para regar dos árboles. ¿Qué tanto tendría que caminar un jardinero en total, si tuviera que regar los cuatro árboles usando una sola cubeta?"

Para este problema no se obtuvieron respuestas correctas de los estudiantes a los cuales se les aplicaron los quince problemas, por lo cual fue elegido para un estudio más profundo realizado en esta tesis. Las respuestas incorrectas más comunes fueron: 30 metros y 40 metros (Figura 17).

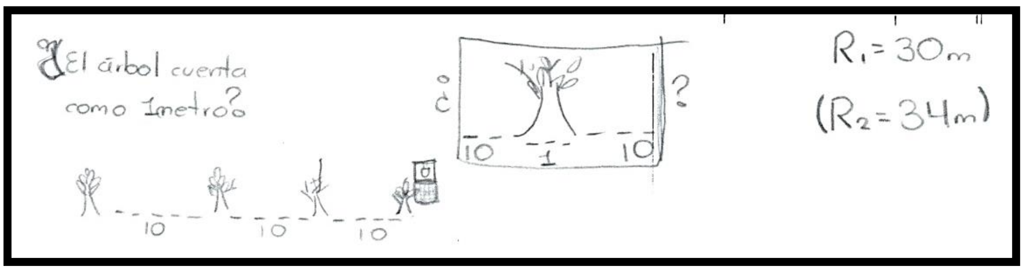

Figura 15. Representación matemática de la solución correcta del problema 10.

Fuente. Elaboración propia.

Problema 11:

> "Una persona que viaja pidiendo aventones emprendió un viaje de 60 millas. Caminó las primeras 5 millas y luego un camionero le dio un aventón. Cuando el conductor lo dejó, aún le restaba la mitad de su recorrido. ¿Qué tanto había recorrido en el camión?"

La respuesta correcta es de 25 millas, que en nuestra población de estudio solo obtuvieron 7 estudiantes. Dentro de la resolución del problema el tipo de representaciones que se utilizaron fueron líneas para representar el camino en diferentes momentos del problema, es decir, usando la cronología del viaje hecho por la persona. También se compara la distancia total con las distancias recorridas para obtener la respuesta correcta (Figura 18). Dentro de las representaciones correctas se usó una recta segmentada no numerada para representar los distintos recorridos de la persona.

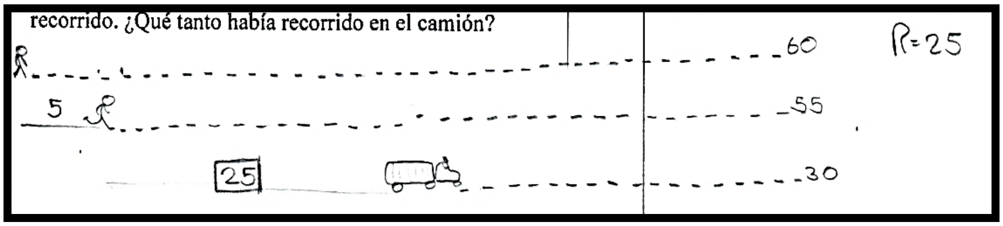

Figura 16.Representación de la solución correcta del problema 11.

Fuente. Elaboración propia.

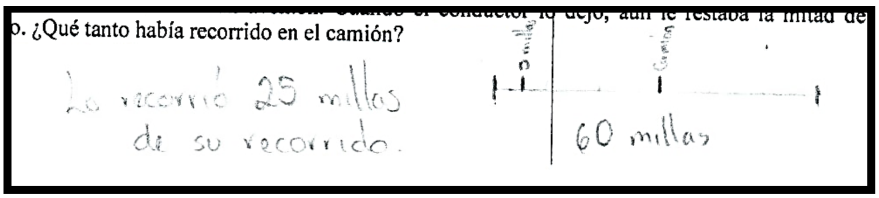

Figura 17. Representación de la solución correcta del problema 11.

Fuente. Elaboración propia.

Problema 12:

"¿Cuántos marcos de 6 cm de largo y 4 cm de ancho se pueden hacer de una pieza de material de 200 cm de largo?"

La respuesta correcta es 10 marcos, primero se debe de considerar que el material necesario para construir un solo marco se calcula por medio del perímetro de un rectángulo, que se obtiene de:

$$6cm + 4cm + 6cm + 4cm = 20cm$$

Enseguida se divide el total del material que es 200 cm de largo entre 20 cm que se usa para un solo marco, que da como resultado 10 marcos (Figura 20).

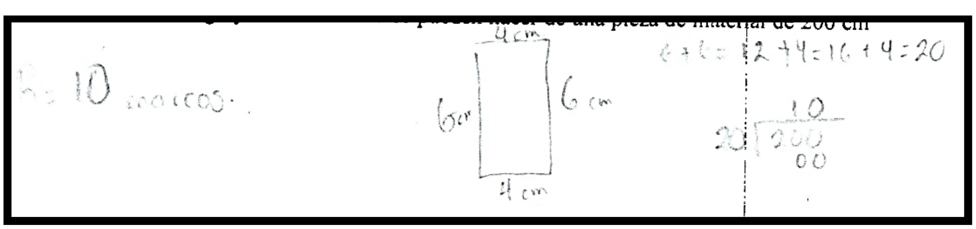

Figura 18.Representación de la solución correcta del problema 12.

Fuente. Elaboración propia.

De manera similar al problema de los ladrillos, presentamos el problema 13:

> "En un lado de una balanza de platillos hay tres envases de mermelada y una pesa de 100 g. En el otro lado hay dos pesas: una de 200 g y otra de 500 g. La balanza está equilibrada. ¿Cuál es el peso de un envase de mermelada?"

Para la solución de este problema se consideró por un lado el peso de cada lata de mermelada con el de la pesa de 100 gramos, considerando que del otro lado de la balanza hay dos pesas que suman 700 gramos. Además las latas de mermelada son iguales, lo que significa que pesan lo mismo, y en total son 3 latas, por lo tanto, tenemos que las latas deben pesar 600 gramos, y si el peso es repartido en las tres latas de mermelada, entonces cada lata pesa 200 gramos (Figura 21 y 22). En este problema se obtuvieron 5 respuestas correctas.

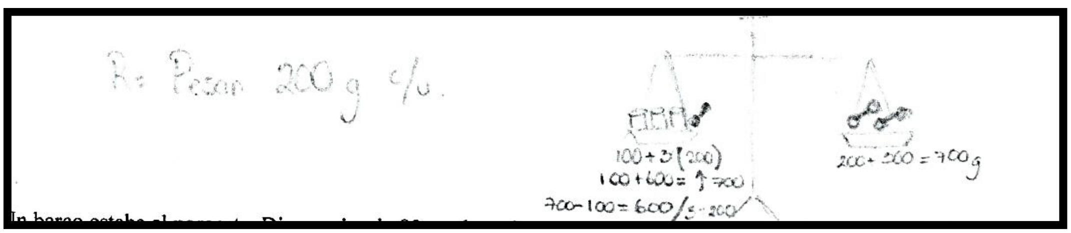

Figura 19. Representación de la solución correcta del problema 13.

Fuente. Elaboración propia.

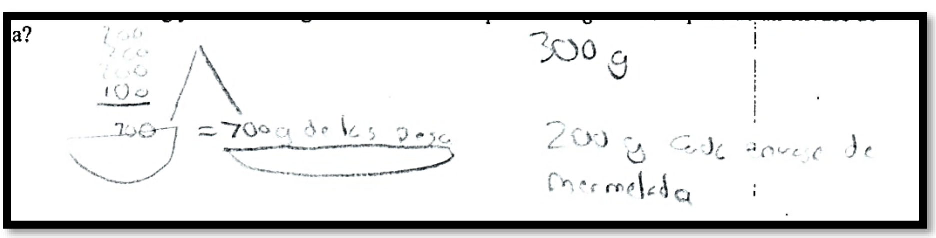

Figura 20.Representación de la solución correcta del problema 13.

Fuente. Elaboración propia.

Problema 14:

"Un barco estaba al noroeste. Dio un giro de 90 grados a la derecha. Una hora más tarde dio un giro de 45 grados hacia la izquierda. ¿En qué dirección estaba viajando entonces?"

Considerando un plano cartesiano y colocando en cada eje coordenado: norte, sur, este y oeste según corresponda, se tiene que el barco está en el cuadrante II a 45° de la dirección norte y oeste, al mismo tiempo. Posteriormente da un giro de 90° a la derecha, lo cual lo deja en el cuadrante I. Finalmente gira hacia la izquierda 45°, es decir, lo deja sobre el eje cartesiano del norte. La Figura 20, muestra una solución incorrecta del problema 14.

Figura 21. Representación de la solución incorrecta del problema 14.

Fuente. Elaboración propia.

Problema 15

"Hay 8 animales en una granja. Algunos de ellos son: gallinas y otros son conejos. Entre ellos tienen 22 patas. ¿Cuántas gallinas y cuántos conejos hay en la granja?"

La respuesta correcta para este problema es 3 conejos y 5 gallinas, cabe señalar que este problema se resolvió por medio de ensayo y error, considerando las patas y las cabezas de los animales al mismo tiempo (Figura 24). Se obtuvieron 4 respuestas correctas.

Dentro de las respuestas correctas, un estudiante hace uso de una tabla para acomodar sistemáticamente pares de animales. Primero consideremos 6 personajes entre conejos y gallinas de manera equitativa, es decir, si tomamos 3 gallinas y 3 conejos tendremos 6 patas de gallina y 12 patas de conejo que dan un total de 18 patas esta cantidad es cercana a las 22 patas que menciona el problema. Por lo cual, se consideran dos posibilidades para tener las cuatro patas faltantes: 1 conejo o 2 gallinas. En el caso de sumar un conejo, se suman las patas dando como resultado 22 patas y se obtienen 7 animales. Por otro lado, si se suman las dos gallinas, también se obtienen las 22 patas y los 8 animales (Figura 25).

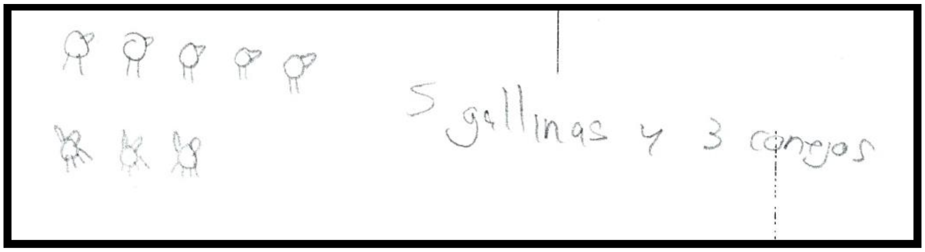

Figura 22. Representación pictórica de la solución correcta del problema 15.

Fuente. Elaboración propia.

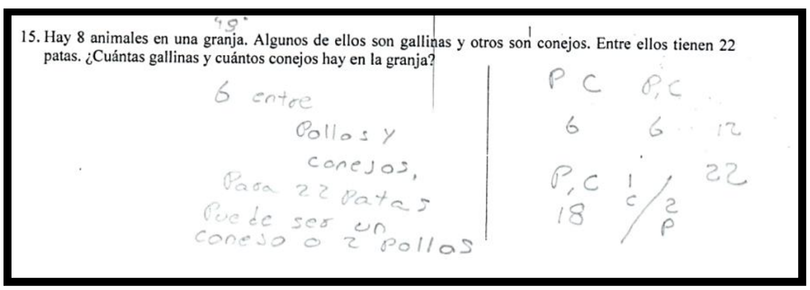

Figura 23. Representación esquemática de la solución correcta del problema 15.

Fuente. Elaboración propia.

2.3 Planteamiento del problema y justificación

Revisando la literatura, podemos destacar a Polya (1949, 1981) y Schoenfeld (1985), cuyas investigaciones se han centrado en la resolución de problemas, dando como resultado una serie de pasos a seguir para asegurar un mayor éxito en la resolución de los mismos. Además, tomo un carácter internacional después de las publicaciones del NCTM aparecidas entre los años 1980 y 1989, ya que, se coloca a la resolución de problemas como un contenido central en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (NCTM, 1980), cuyo reflejo se ha visto plasmado en los currículos y programas educativos de los diversos países. Posteriormente, se le da una mayor importancia a la resolución de problemas ya que es vista como un eje transversal del currículo de matemáticas y como un estándar en las matemáticas escolares (NCTM, 2004).

La resolución de problemas ha pasado por varios momentos de interés para el mundo académico, porque es considerada una actividad fundamental a desarrollar por los estudiantes de manera individual y colectiva, ya que se utiliza tanto en la vida cotidiana como en el aula para conseguir un aprendizaje significativo debido a que se involucran conexiones entre los datos del problema y el empleo de estrategias, los distintos tipos de representaciones, la necesidad de justificar el camino o los caminos a seguir durante la solución y la comunicación e interpretación de los resultados. A partir de la importancia y las ventajas que representa el empleo de las representaciones visuales, se hace necesario el saber si esta poderosa herramienta es utilizada por los estudiantes dentro de la resolución de problemas.

La SEP, durante el ciclo escolar 2018-2019, implementó la aplicación del Nuevo Modelo Educativo para la educación básica del país, en el cual incluye a la resolución de problemas como una prioridad, tal como lo marcan los currículos internacionales.

2.2.1 Preguntas de investigación

¿Cómo es el desempeño del alumno durante la resolución de un problema matemático al usar dibujos situacionales y dibujos matemáticos?

¿Cómo influye la instrucción explícita de incluir una representación visual en la resolución del problema?

2.2.2 Objetivo general

Investigar los tipos de solución y sus representaciones de dibujos situacionales y matemáticos usados en la resolución de un problema matemático.

2.2.3 Objetivos específicos

1. Analizar y clasificar las soluciones del problema matemático.
2. Analizar y clasificar los dibujos del problema matemático.
3. Analizar la argumentación de los alumnos que justifica su respuesta.

CAPÍTULO 3
METODOLOGÍA

3.1 Participantes

El problema matemático fue aplicado en tres niveles educativos distintos:

6° grado de Educación Básica Primaria

2° grado de Educación Básica Secundaria

2° Semestre de Educación Media Superior

Se recolectaron las soluciones y las representaciones entre los distintos niveles educativos. Se analizaron y se clasificaron las soluciones y representaciones visuales.

3.2 Instrumentos

El problema matemático que denominaremos a partir de ahora: "El problema del jardinero" fue tomado del Test de Hegarty y Kozhenikov (1999), el cual menciona lo siguiente:

> *Cuatro árboles jóvenes fueron colocados en fila a 10 metros de distancia. Un pozo estaba situado al lado del último árbol. Se necesita una cubeta de agua para regar dos árboles. ¿Qué tanto tendría que caminar un jardinero en total, si tuviera que regar los cuatro árboles usando una sola cubeta?*

Se incluyen dos tipos de hojas de trabajo: con instrucción y sin instrucción. En una se hacía una sugerencia directa de realizar dibujo mientras que en el otro caso no se sugería esto.

Se clasificaron las soluciones en dibujos pictóricos y esquemáticos, se usó la clasificación de Novick y Hurley (2001) para los dibujos que son esquemáticos, y también se incluyen: las rectas numéricas, el texto con imágenes al igual que los dibujos híbridos como una nueva categoría para la clasificación.

Para la clasificación de las representaciones visuales se dividieron en dibujos pictóricos y dibujos matemáticos, estos últimos incluyen a las representaciones esquemáticas por medio de la clasificación que realizan Novick y Hurley (2001), también se incorporan las rectas numéricas.

Finalmente se consideran a las representaciones híbridas como un dibujo pictórico son una mezcla de representación matemática. Se dejan fuera de estas tres clasificaciones los dibujos que usan la argumentación para llegar a la respuesta correcta.

CAPÍTULO 4
ANÁLISIS Y RESULTADOS

4.1 Primaria

Dentro de las respuestas correctas encontradas en Educación Básica Primaria se describen múltiples caminos que recorre el jardinero tomando en consideración distintos puntos de partida, así como diversos lugares de llegada. También se hallaron argumentaciones acompañadas de un dibujo pictórico, de un dibujo híbrido o la argumentación por medio de palabras, justificando su respuesta.

A continuación se dan respuestas correctas, incorrectas y otras respuestas con descripciones dadas por los estudiantes detallando los recorridos.

4.1.1 Respuestas correctas

70 metros

Una respuesta fue la siguiente: consideremos que el primer recorrido se da partiendo desde el pozo hasta llegar al último árbol, que en este caso es el que se encuentra más alejado del pozo, por lo cual la distancia es de 30 metros, posteriormente se riega el tercer árbol cuya distancia es de 10 metros y regresa al pozo a llenar la cubeta, por lo cual son 20 metros. Entonces desde el primer recorrido son 60 metros.

Dado que la distancia del pozo al primer árbol no tiene medida, entonces riega ese árbol y después va al segundo árbol, con lo que camina 10 metros más. El recorrido finaliza en el segundo árbol con una distancia total de 70 metros (Figura 26).

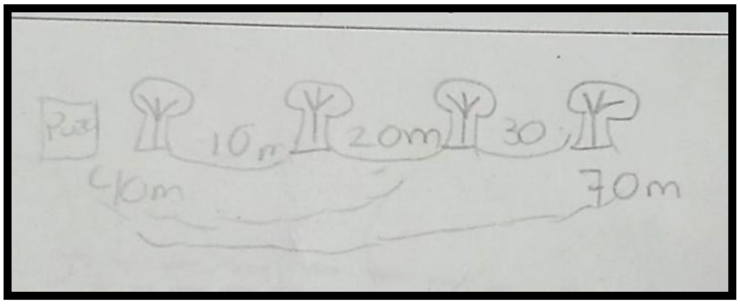

Figura 24. Representación pictórica de la respuesta 70 metros.

Fuente. Elaboración propia.

80 metros (otra versión)

El recorrido comienza partiendo del árbol más lejano al pozo y para llegar al pozo son 30 metros. Toma la cubeta, la llena y riega los árboles más cercanos al pozo, la distancia del pozo al primer árbol es nula, y del pozo al segundo árbol es de 10 metros, regresa al pozo para llenar la cubeta, por lo que camina 10 metros más. Por lo tanto la suma hasta este momento es de 50 metros.

Después de llenar la cubeta riega los dos árboles más alejados al pozo, en primer lugar riega el penúltimo árbol caminando 20 metros y después el último árbol, por lo cual camina 10 metros más y deja la cubeta en el último árbol. Se puede considerar que la cubeta está en el último árbol desde el principio del recorrido o que se encuentra junto al pozo (Figura 27).

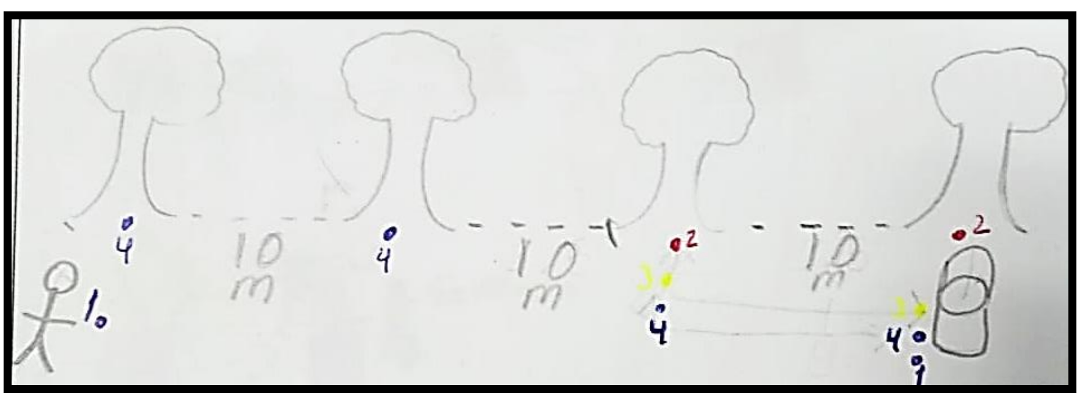

Figura 25. Representación pictórica de la respuesta 80 metros (otra versión).

Fuente. Elaboración propia.

En esta representación se usaron colores y números para describir, ordenar y diferenciar los distintos recorridos que hizo el jardinero.

80 metros

Para este nivel educativo, los alumnos plantearon la situación del problema por medio de un dibujo pictórico para colocar los datos del problema y las distancias entre los árboles y el pozo. Posterior a esto, por medio del uso de flechas marcaron el recorrido del jardinero.

Para la descripción del recorrido, consideraron que el jardinero debe de caminar 80 metros ya que se parte del pozo hacia los árboles más cercanos, posteriormente se vuelve a llenar la cubeta y se riegan los árboles más lejanos. Finalmente la cubeta es dejada junto al pozo.

En la Figura 28, tenemos una representación muy pictórica, ya que se encuentran muchos colores y detalles como son: el bigote del jardinero y su sombrero, sin embargo, el uso de flechas para describir la trayectoria del recorrido hacen que esta representación sea de ayuda para el éxito de la solución.

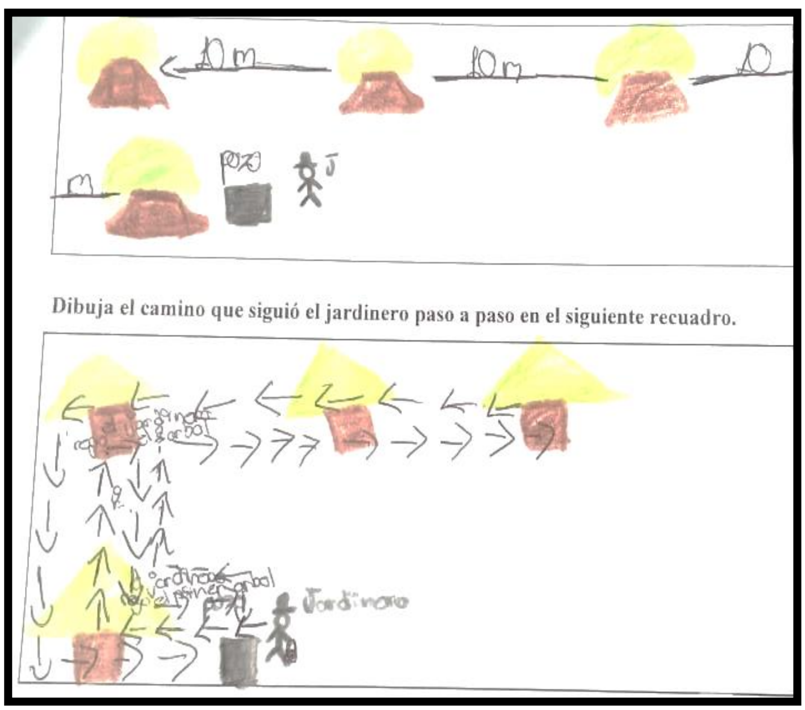

Figura 26. Representación pictórica de la respuesta 80 metros (otra versión).

Fuente. Elaboración propia.

Para la Figura 29, tenemos que las representaciones no son tan pictóricas y no colocan por menores como son los colores y dibujos con muchos detalles. En este caso, se realizan los ladrillos que componen el pozo, mientras que los árboles son austeros y representados por líneas.

Para la primera representación la distancia entre los árboles es de 10 metros, y es tachada la última distancia del árbol más cercano al pozo. Destaca el pozo con su arco y la cubeta colgando. Para la segunda representación las distancias están bien definidas y hace un recorrido considerando los intervalos del recorrido. Finalmente en el última representación el pozo es representado por medio de una especie de ovalo, se realiza el recorrido por medio de líneas y colocando debajo las distancias caminadas por el jardinero para dar un total de 80 metros.

Cabe señalar que la evaluación de la primera representación pictórica a la tercera es muchísimo más simple, despreciándolos elementos de las situación irrelevantes para resolver satisfactoriamente el problema.

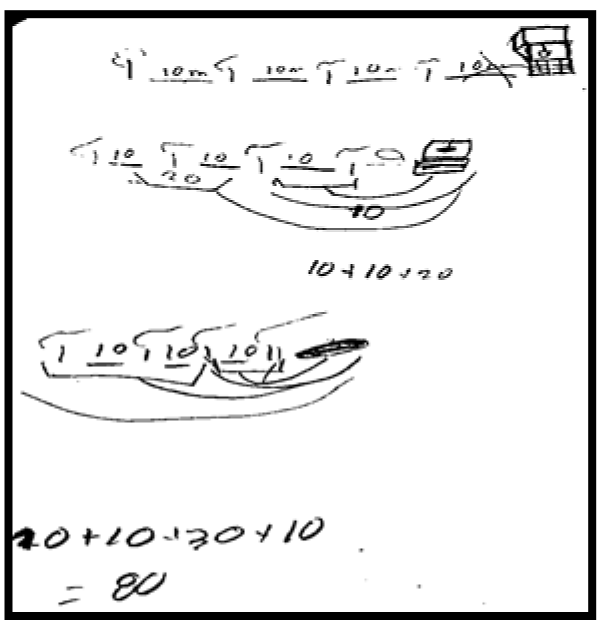

Figura 27. Representación híbrida de la respuesta 80 metros.

Fuente. Elaboración propia.

También se mencionan en las justificaciones de las respuestas argumentos como: “el jardinero riega el primer árbol”, “el jardinero riega el segundo árbol”, “el primer recorrido hacia los árboles”, “el jardinero riega el segundo árbol.

En la Figura 30, tenemos una representación híbrida porque está compuesta de flechas enumeradas y dibujos pictóricos. Las líneas rectas denotan la distancia entre los árboles y la dirección de las flechas el camino de regreso, mientras que las líneas encima de los árboles, denotan las distancias recorridas. Además podemos apreciar la representación pictórica en los detalles del pozo.

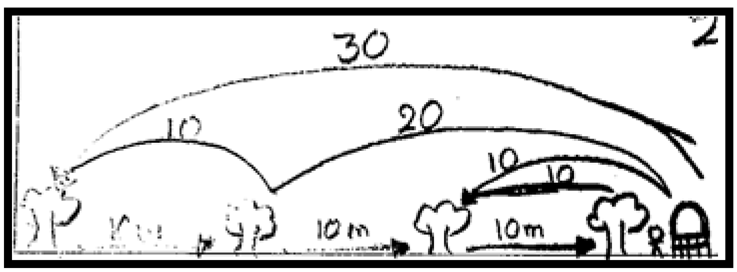

Figura 28. Representación híbrida de la respuesta 80 metros.

Fuente. Elaboración propia.

Dentro de las respuestas correctas se usó la argumentación por parte del estudiante para justificar los recorridos que sigue el jardinero, mientras que el dibujo pictórico solo es para tener una guía de la situación donde se desarrolla el problema matemático (Figura 31).

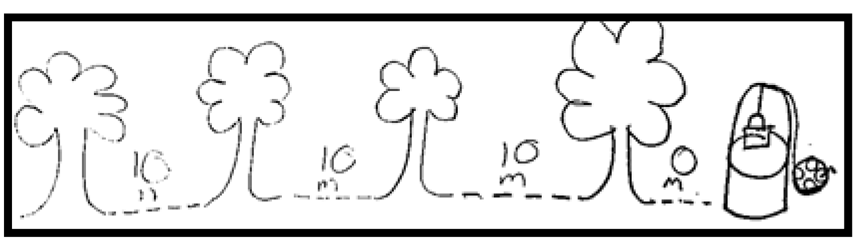

Figura 29. Representación pictórica de la respuesta 80 metros.

Fuente. Elaboración propia.

50 metros

Las representaciones para la respuesta correcta: 50 metros, donde el recorrido del jardinero comienza en el pozo, riega los árboles más cercanos al pozo, posteriormente, regresa al pozo para llenar nuevamente la cubeta con agua y avanza a los dos últimos árboles, dejando la cubeta en este último. Las representaciones que se encontraron fueron de dos tipos: las híbridas conformadas por dibujos pictóricos y flechas.

En la figura 32 podemos ver que no muestran detalles como el pozo, ni tampoco la cubeta o el jardinero, es decir, su dibujo no es tan pictórico y las flechas sirven para marcar el recorrido del jardinero. En esta representación no se dan detalles como el jardinero, la cubeta, le pozo con ladrillo y solo se centran en el recorrido.

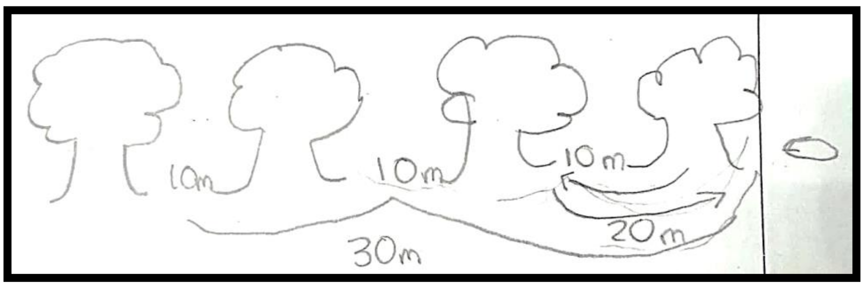

Figura 30. Representación pictórica de la respuesta 50 metros con argumentación.

Fuente. Elaboración propia.

Por otro lado, las representaciones pictóricas con una argumentación se hallaron descripciones con el recorrido del jardinero justificando las respuestas con los detalles de los recorridos llenado la cubeta con agua, también denotaron los elementos para acreditar la respuesta correcta.

Las representaciones pictóricas en esta respuesta tienen muchísimos detalles, ya que se muestran pozos muy estructurados como son ladrillos y arcos, también los árboles tienen mucho follaje, jardineros con bigote y sombrero, así como el uso de colores.

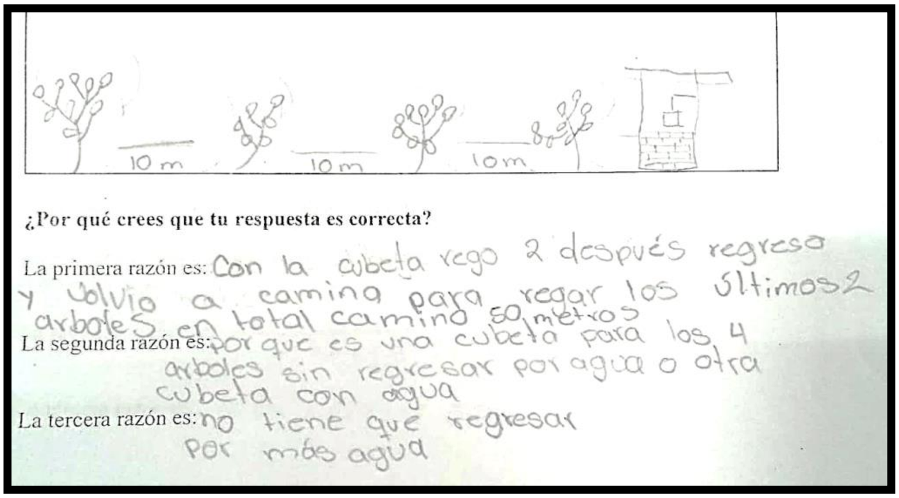

Figura 31.Representación pictórica de la respuesta 50 metros con argumentación.

Fuente. Elaboración propia.

4.1.2 Respuestas incorrectas

40 metros

Los participantes de esta respuesta consideran los cuatro árboles y la distancia de 10 metros, entre ellos se muestra una representación pictórica, además, se está considerando la distancia de 10 metros comprendida entre el árbol más cercano al pozo y este último. Acostumbrados los estudiantes a realizar operaciones con los datos numéricos, ellos realizan el cálculo de sumar cuatro veces el número diez o en su defecto multiplican diez veces cuatro (Figura 34).

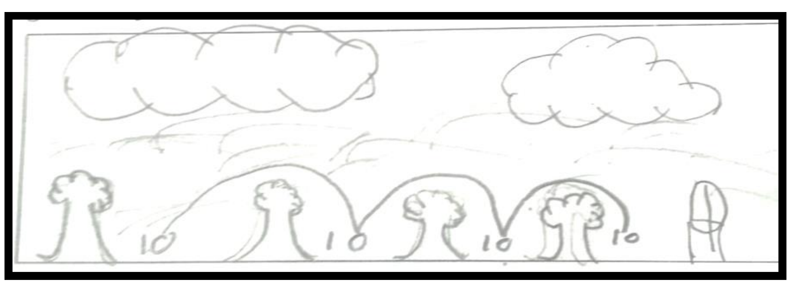

Figura 32. Representación pictórica de la respuesta incorrecta 40 metros.

Fuente. Elaboración propia.

En cuanto a representaciones irrelevantes dentro de las respuestas incorrectas de 40 metros se muestran nubes, viento, sol, jardineros más detallados y árboles con follajes amplios.

80 metros

En el caso de los 80 metros, se considera la respuesta incorrecta de 40 metros que surge de multiplicar los 4 árboles por los diez metros de distancia separados entre cada uno de ellos; esto es considerado como el camino para ir al pozo hasta el último árbol y la cubeta se considera que se deja en el último árbol. Posteriormente, el estudiante considera el regreso como parte del recorrido y deja la cubeta en el pozo, dando a la multiplicación por dos del argumento anterior (figura 35).

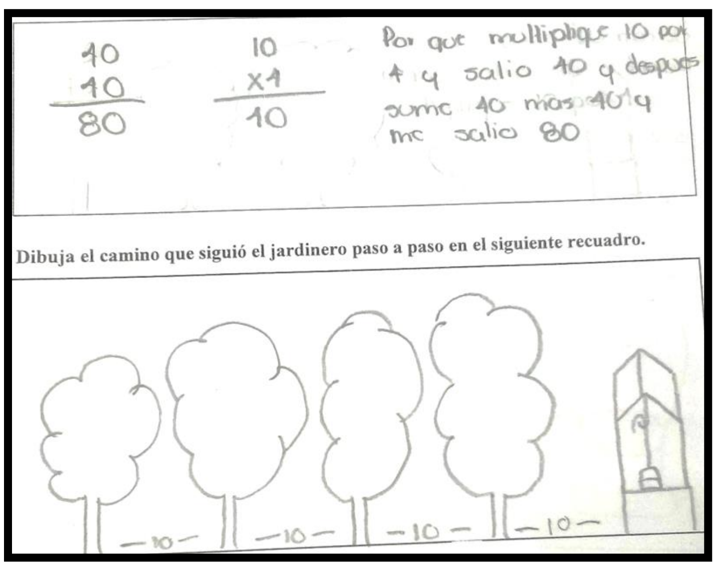

Figura 33. Representación pictórica de la respuesta incorrecta 80 metros que incluye operaciones. Fuente. Elaboración propia.

Se hace notar que en estos recorridos no hay flechas que indiquen los recorridos que hace el jardinero, por lo cual no se está considerando la restricción que surge con la cubeta, ya que solo puede regar dos árboles y se está ocupando el agua de una cubeta para regar todos los árboles.

30 metros

Para la respuesta de 30 metros, primero se toma la situación del situación del problema considerando que la distancia entre los árboles es de 10 metros en cada uno, la distancia entre el árbol más cercano al pozo y el pozo es cero, por lo cual, la suma de las distancias entre los árboles o el producto de tres por diez nos da como resultado treinta metros.

Se tiene también que el jardinero riega los árboles con una sola cubeta partiendo del pozo y el recorrido termina cuando llega al árbol más lejano al pozo (Figura 36).

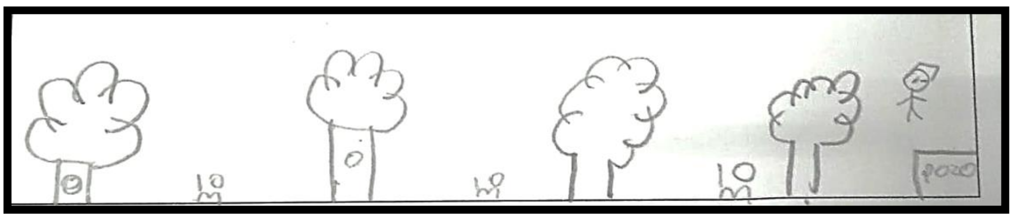

Figura 34.Representación pictórica de la respuesta incorrecta 30 metros.

Fuente. Elaboración propia.

60 metros

Los participantes que tienen esta respuesta incorrecta, consideran la respuesta de 30 metros descrita en el caso anterior, ya que lo consideran el recorrido del riego y se agrega el recorrido de regreso, es decir, que multiplican por 2 el recorrido de 30 metros. Dentro de estas repuestas incorrectas no se encuentran flechas que indican el camino del jardinero, además son representaciones que incluyen colores como lo muestra la Figura 37.

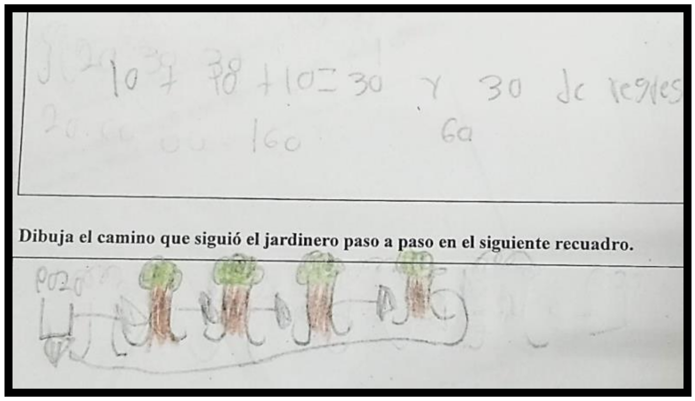

Figura 35. Representación pictórica de la respuesta incorrecta 60 metros.

Fuente. Elaboración propia.

50 metros

En esta respuesta se consideró el cálculo de multiplicar cuatro por diez metros que dio 40 metros, después los estudiantes agregaron el valor de 10 metros por lo cual el resultado es 50 metros (Figura 38). Si bien la figura no representa por completa la situación del problema ya que faltan las distancias entre árboles y pozo. Por lo cual tenemos un resultado numéricamente correcto pero sin la fundamentación suficiente.

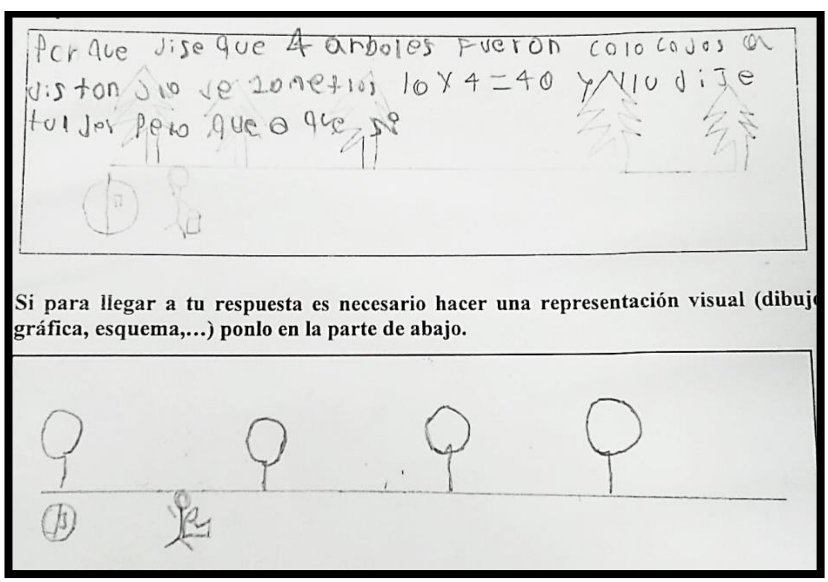

Figura 36. Representación pictórica de la respuesta incorrecta 50 metros con operaciones.

Fuente. Elaboración propia.

20 metros

Haciendo el procedimiento con los números que aparecen en el problema matemático las operaciones aritméticas usadas al azar en este caso: división y multiplicación que dio como resultado final 20 (Figura 39). Sin embargo, las operaciones fueron hechas para resolver el problema sin considerar la descripción y características limitantes del riego de los árboles, descartando por completo la situación (Figura 40).

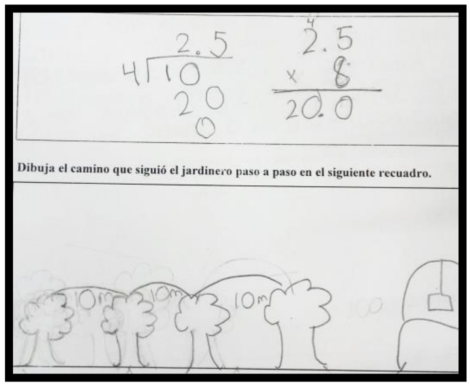

Figura 37. Representación pictórica de la respuesta incorrecta 20 metros.

Fuente. Elaboración propia.

5 metros

En la figura 40, se puede resaltar las operaciones hechas sin darle un sentido a los números o a la situación del problema.

Entre los detalles del dibujo se destaca solo el dibujo pictórico de los árboles y el pozo, que en este caso está muy detallado por los ladrillos. No se incluyen las distancias entre los árboles y el pozo, que son fundamentales para la resolución del problema matemático así como también el hecho de la capacidad de la cubeta para regar dos árboles.

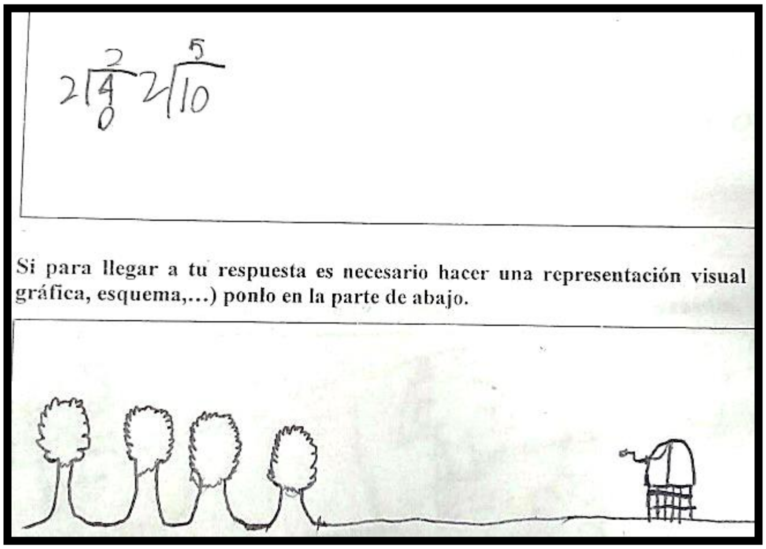

Figura 38.Representación pictórica de la respuesta incorrecta 5 metros.

Fuente. Elaboración propia.

10 metros

De manera similar, la figura 41 representa operaciones aritméticas, primero divide el número de árboles entre el número de la distancia cuyo resultado es 2.5. Posteriormente el resultado anterior multiplica por 4 ya que son 4 árboles. Entonces la respuesta es 10 metros.

Se denota una situación diferente del problema, ya que la distancia entre los árboles es de 2.5 metros, incluida la del árbol más cercano al pozo, por lo cual, denota una nueva suma de distancias, pero se remite al mismo procedimiento incorrecta de las respuestas de 40 metros y 80 metros. Esto se da, ya que se suman las cuatros distancias de 2.5 metros o en su defecto se multiplican por cuatro, por lo cual con una cubeta se riegan los cuatro árboles.

Además si se considera que el jardinero regresa al pozo tendríamos una respuesta de 20 metros como recorrido total.

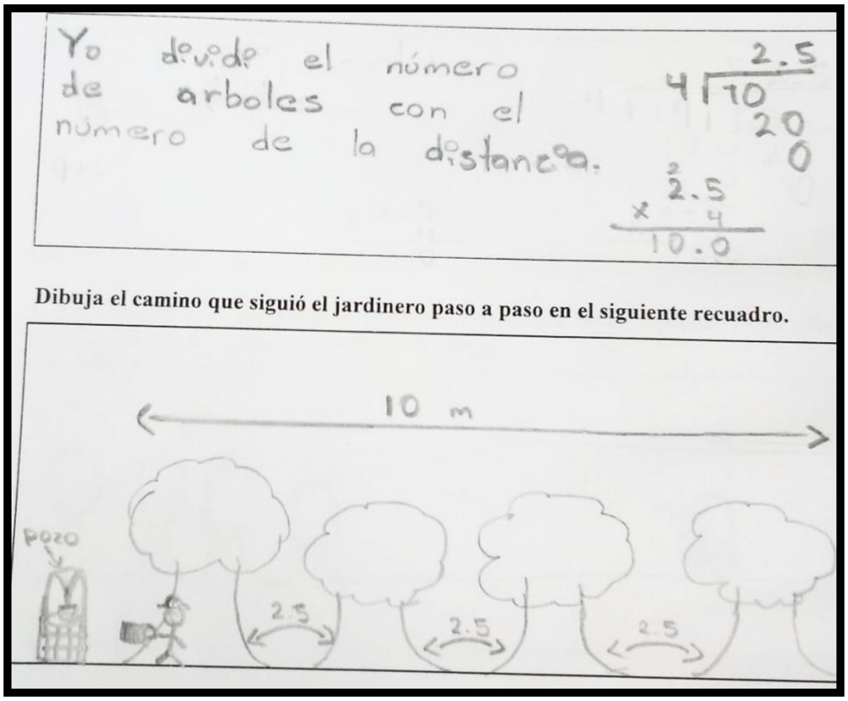

Figura 39 Representación pictórica de la respuesta incorrecta 10 metros.

Fuente. Elaboración propia.

4.1.3 Otras respuestas

Treinta metros cambiando las condiciones del problema

En este caso, el participante no da una solución al problema, por el cual opta por cambiar una condición del problema inicial. Esta es suponer que cada árbol debe de ser regado con un cuarto de cubeta, por lo cual, si sale del pozo, el recorrido total debe de ser de 30 metros (Figura 42). Por lo cual la respuesta de 30 metros ya sería válida. Además, menciona que esta respuesta describe solo el recorrido sin regresar la cubeta al pozo, por lo cual, aclara que si esto pasa entonces la distancia que recorre el jardinero sería de 60 metros.

Dentro de la representación pictórica, resaltan elementos importantes como son las cubetas encima de cada árbol con la fracción un cuarto, se incluyen flechas que parten del pozo, es importante recalcar que no se incluye al jardinero.

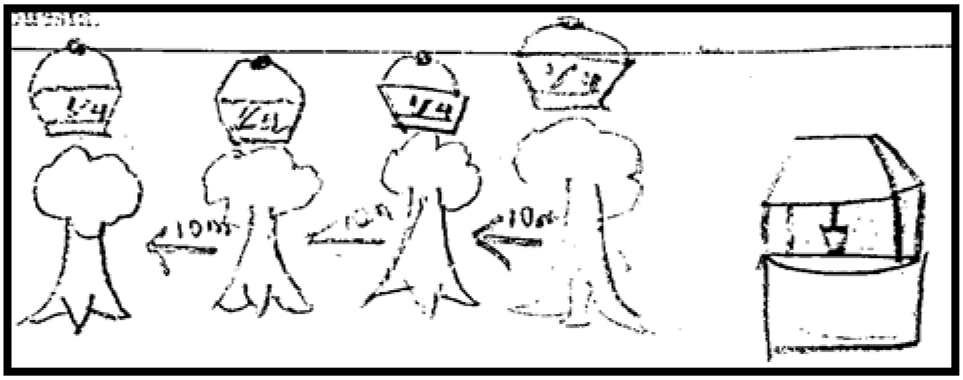

Figura 40. Representación híbrida de la respuesta 30 metros.

Fuente. Elaboración propia.

Sesenta metros, cambiando las condiciones del problema

Similar al procedimiento anterior, dos participantes cambian las condiciones del problema. Suponen que cada árbol debe de ser regado con un cuarto de cubeta, por lo cual, si sale del pozo y regresa a dejar la cubeta al pozo, el recorrido total debe de ser de 60 metros (Figura 43).

Figura 41. Representación híbrida de la respuesta 60 metros.

Fuente. Elaboración propia.

120 metros

Dos participantes consideran la distancia entre los árboles como 10 metros y además consideran la distancia de 10 metros entre el último árbol y el pozo, por lo cual el recorrido es del pozo a los dos primeros árboles y regresa por más agua. Posteriormente, riega los dos árboles más lejanos y regresa a dejar la cubeta en el pozo.

110 metros

Para esta respuesta, el participante supone que hay una distancia de la casa del jardinero al pozo de 30 metros, por lo cual la agrega a la distancia total del recorrido del jardinero.

El recorrido que parte del pozo, supone que la distancia de la casa al pozo es de 30 metros, por lo cual la considera dentro del camino que recorre el jardinero, posteriormente hace el recorrido de la respuesta correcta de 80 metros, es decir, cuando el jardinero regresa la cubeta junto al pozo (Figura 44).

Figura 42. Representación pictórica de la respuesta 110 metros.

Fuente. Elaboración propia.

4.2 Secundaria

En las respuestas correctas se encontraron representaciones híbridas, en las cuales se encontraron detalles superficiales o colores para las representaciones pictóricas y flechas que indicaban el recorrido del jardinero, también, se encontraron representaciones esquemáticas que incluían flechas y se pueden catalogar como diagramas de nodos.

Para las respuestas incorrectas en los participantes de secundaria, se encontraron representaciones completamente pictóricas o en su defecto el uso de operaciones matemáticas sin una representación.

4.2.1 Respuestas correctas

70 metros

De manera similar que la respuesta encontrada en primaria, el recorrido comienza en los árboles más alejados del pozo, por lo cual estas distancias suman 60 metros, posteriormente añaden 10 metros que es la distancia del pozo al segundo árbol, ya que no consideran la distancia del pozo al primer árbol (Figura 45).

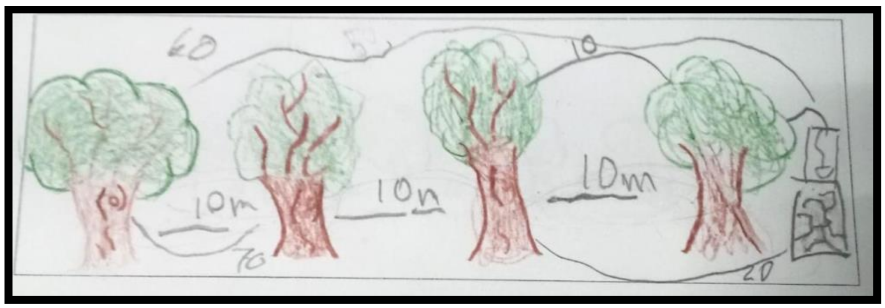

Figura 43. Representación pictórica de la respuesta correcta de 70 metros.

Fuente. Elaboración propia.

50 y 80 metros

Dentro de las respuestas de secundaria se encontraron a 4 participantes que hacen el recorrido de 50 metros, sin embargo, hacen la aclaración de que es posible que el jardinero pueda regresar la cubeta a su lugar de origen es decir, al pozo, por lo cual mencionan que se le deben agregar 30 metros a la respuesta obtenida hasta ese momento. Los participantes dan dos respuestas correctas con una argumentación sólida con respecto del recorrido.

La representación mostrada en la Figura 46 es una representación esquemática ya que se están usando los círculos para representar los árboles, mientras que el pozo es un círculo con ondas, además, se descarta como una representación pictórica al jardinero y la cubeta. Se realza el uso de flechas para considerar la trayectoria que recorre el jardinero.

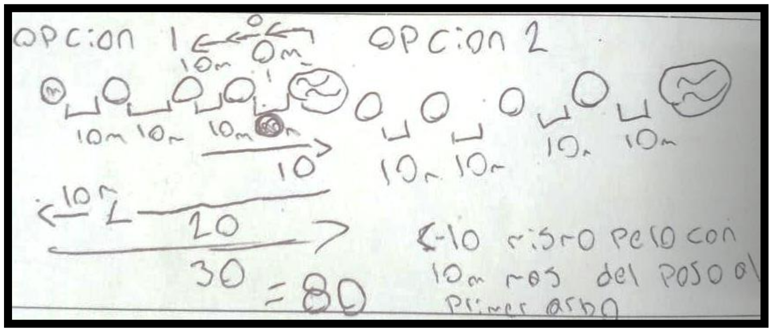

Figura 44. Representación esquemática de las respuestas correctas de 50 y 80 metros.

Fuente. Elaboración propia.

80 metros

Dentro de las representaciones esquemáticas encontradas en Educación Secundaria está la Figura 47, en donde se usan letras para representar los árboles, es decir, las particiones de la recta son los árboles, y considera las distancias que hay entre ellos. El pozo se representa por medio de una representación pictórica muy superficial, ya que no incluye elementos como ladrillos, sin embargo, también es usada la palabra pozo. Las distancias entre los recorridos son flechas con las distancias en cada recorrido. Cabe señalar que las distancias marcadas por estas fechas, no son similares a las flechas que se usan en otro tipo de representaciones donde se muestran encima de los árboles, sino que se trata de poner paralela a la recta que se está usando como un punto de referencia.

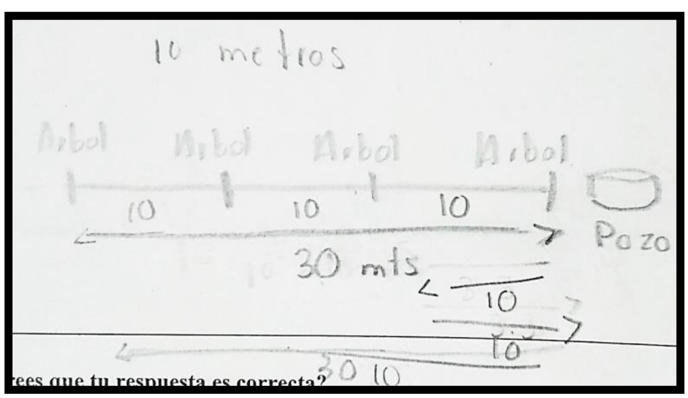

Figura 45. Representación esquemática de la respuesta correcta de 80 metros.

Fuente. Elaboración propia.

Cabe señalar que dentro de estas representaciones, 2 de los 19 híbridos fueron coloreados, principalmente es para representar a los árboles y pozo. Sin embargo, se usaron lapiceros de colores para que representar los distintos recorridos (Figura 48), diferenciando entre el primer recorrido para los dos primeros árboles y a su vez para el segundo recorrido. También se hace la aclaración del número de vueltas necesario para completar el riego.

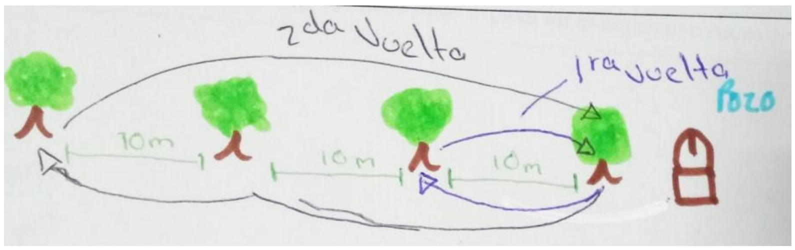

Figura 46. Representación esquemática de la respuesta correcta de 80 metros con colores.

Fuente. Elaboración propia.

80 metros (otra forma)

Una de las respuestas de 80 metros es considerar regar primero los árboles más cercanos al pozo, y dejar al final los árboles que están más lejos del pozo.

En la siguiente representación (Figura 49), a pesar de tener la misma distancia de 80 metros, el recorrido es diferente, primero se riegan los dos árboles más alejados al pozo, lo cual suma 60 metros, posteriormente, se llena de nuevo la cubeta y se riegan los árboles más cercanos al pozo y se regresa la cubeta.

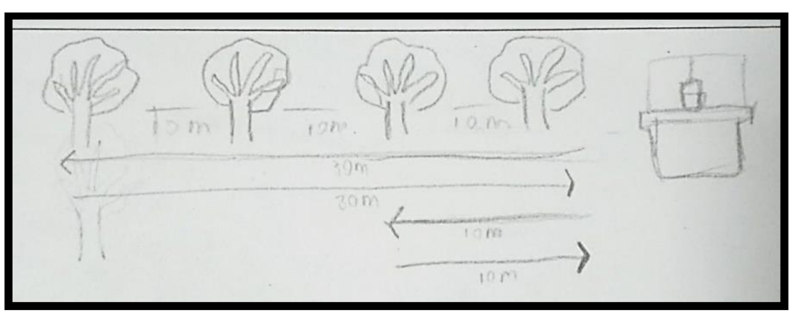

Figura 47. Representación esquemática de la respuesta correcta de 80 sin comenzar por los árboles más cercanos al pozo.

Fuente. Elaboración propia.

50 metros

Una representación destacada en es la Figura 50, ya que el estudiante representa por medio de una línea el pozo, mientras que los árboles los representa por medio de círculos rellenos, lo que hace el jardinero por medio de flechas, por lo cual, es un diagrama de red. Esta representación es completamente esquemática.

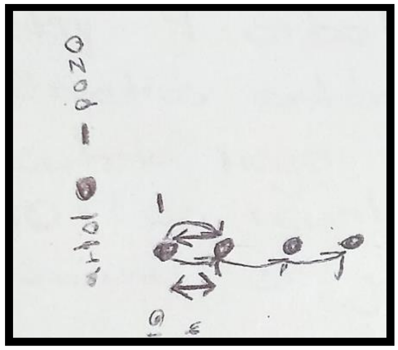

Figura 48. Representación esquemática de la respuesta correcta de 50 metros.

Fuente. Elaboración propia.

Es importante señalar que este participante no considera la numeración correspondiente en su representación, aunque en la argumentación de su respuesta la expresa directamente, la representación del pozo y del árbol está al mismo nivel, mientras que en la separación de los árboles sé están considerando una distancia similar.

En la siguiente representación esquemática (Figura 51), al igual que en la anterior, se usan líneas para denotar a por igual al pozo y a los árboles, es decir, los círculos representan los nodos del diagrama de red y para aclarar las diferencias usa palabras, mientras que las líneas a pesar de que no son flechas, representan el recorrido del caracol. El recorrido comienza con la línea que parte del pozo y riega el segundo árbol más cercano, se detiene a regar el primer árbol más cercano, regresa al pozo y finalmente del pozo a los dos últimos árboles. Nótese que las líneas se van dividiendo conforme se hacen paradas.

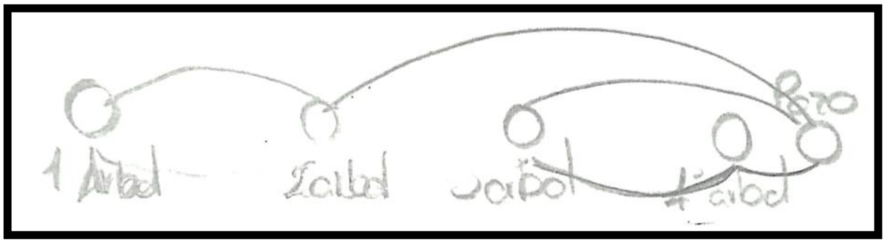

Figura 49.Representación esquemática de la respuesta correcta de 50 metros.

Fuente. Elaboración propia.

En la Figura 52, en la parte del planteamiento de la situación y descripción del recorrido, se encuentra una descripción detallada de lo que sucede paso a paso durante el recorrido del jardinero por medio de un esquema. Se consideran también las condiciones iníciales de problema de que la cubeta solo riega dos árboles.

Se hacen las siguientes aclaraciones textualmente: Si el jardinero necesita una cubeta para regar dos árboles entonces el agua se le acabo, esto significa que no puede regar con una cubeta los cuatro árboles en un solo recorrido. Es clara la diferencia entre el primer dibujo y el segundo, ya que el primer dibujo muestra detalles más pictóricos, así como, el uso de más flechas y las distancias entre los árboles. También, menciona textualmente la frase: “totalmente detallado” para referirse a su primer dibujo.

Se parte del pozo, riega el primer árbol y recorre 10 metros para llegar al segundo árbol. Posteriormente, regresa al pozo, y llega hasta el antepenúltimo árbol más alejado del pozo, ya que se está sumando, 10+10+20, que le dan 40 metros. Finalmente llega al árbol más alejado del pozo y suma 10 metros más al recorrido que lleva, por lo cual, la respuesta es de 10 metros. Nótese que usa las flechas para marcar los recorridos y va sumando las distancias. También usa siempre las unidades de medida de metros en cada suma.

Cuando se le pide que se dibuje el camino del jardinero, los elementos de la distancia entre los árboles y el pozo pictórico se pierden, solo se muestra por medio de líneas el recorrido. Se hace hincapié en que en la primera representación no se muestra al jardinero, mientras que en la segunda sí. También, no se muestra en ninguna representación a la cubeta.

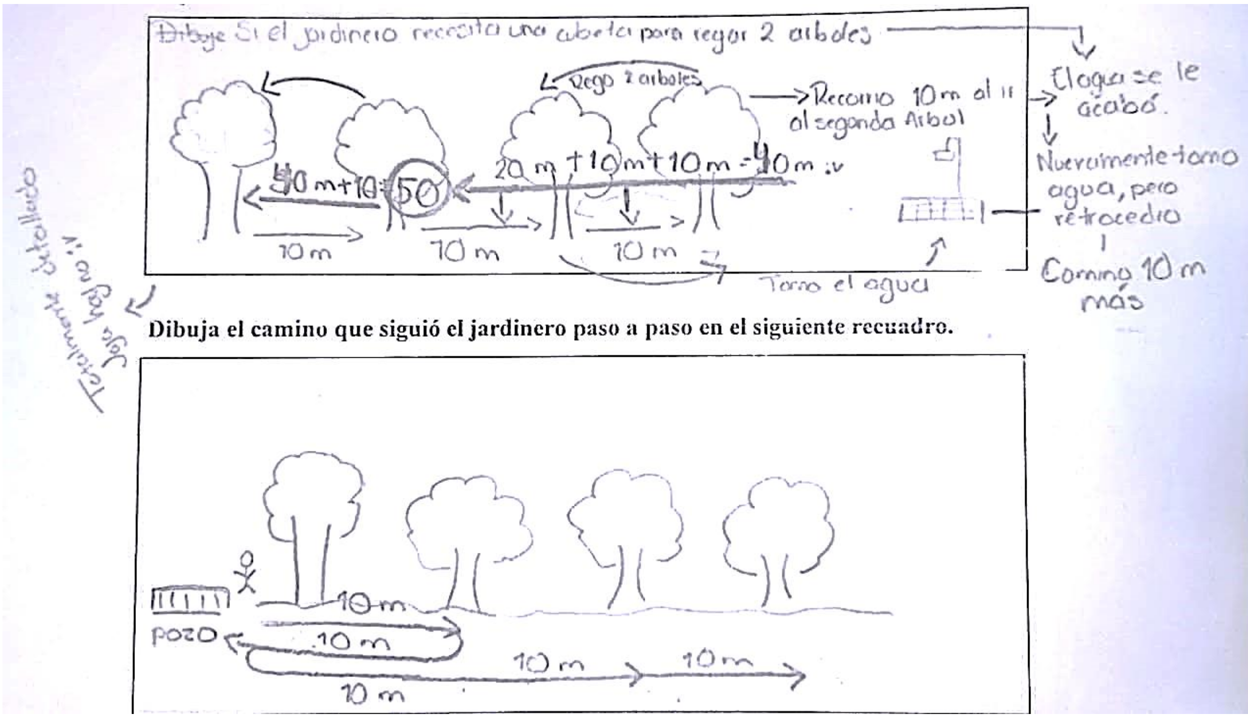

Figura 50. Representación híbrida de la respuesta correcta de 50 metros.

Fuente. Elaboración propia.

Para la respuesta híbrida (Figura 53) tenemos que los colores no representan el recorrido y solo forman parte de la representación pictórica. Se distinguen tres recorridos por medio de números, el primero, del pozo al primer y segundo árbol, el segundo recorrido del segundo árbol al pozo y finalmente el último recorrido del pozo a los dos árboles más alejados.

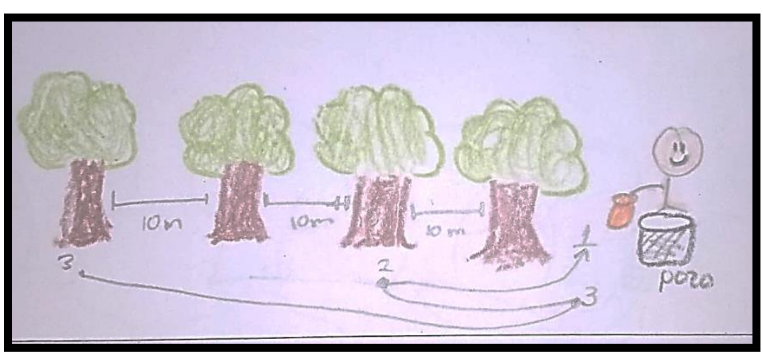

Figura 51. Representación híbrida de la respuesta correcta de 50 metros.

Fuente. Elaboración propia.

4.2.2 Respuestas incorrectas

30 metros

Los participantes que dieron esta respuesta, no consideraron la situación del problema, se limitaron a los metros entre los árboles y los sumaron, además, se puede decir que no se reflexionó sobre la condición de la cubeta podía regar solamente dos árboles.

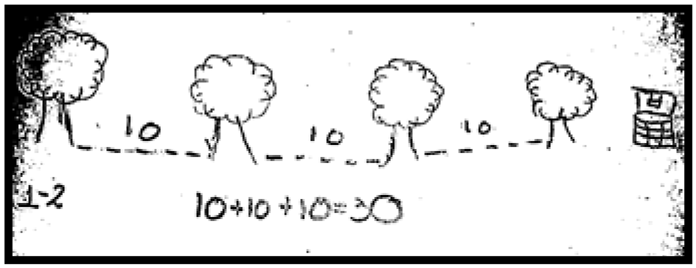

Figura 52. Representación pictórica de la respuesta 30 metros.

Fuente. Elaboración propia.

Dado que se dibuja la situación del problema, la distancia es del primer árbol al segundo, del segundo al tercero y del tercero al cuarto es de diez metros en cada caso, por lo cual, los participantes de esta respuesta incorrecta solo se limitan a sumar estas tres distancias. Al mismo tiempo, en esta respuesta a pesar de que la condición inicial de la cubeta está representada en la situación del problema, no se considera ya que no tiene unidades de metros y se limitan los participantes a los datos que son numéricos y expresados en metros.

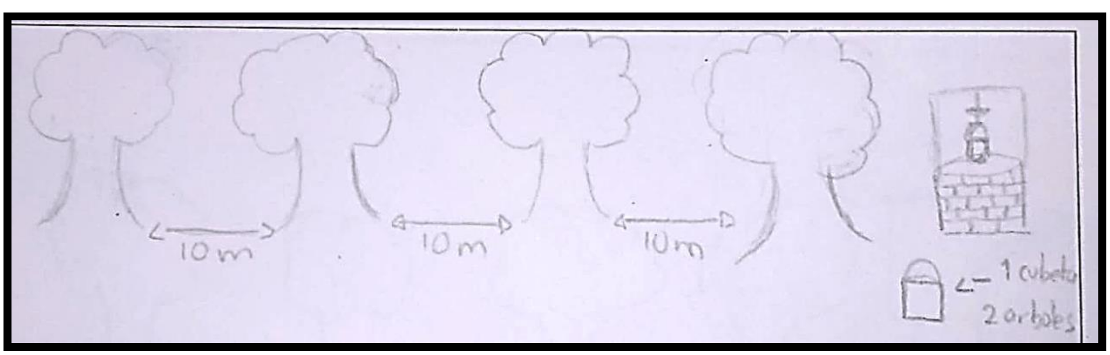

Figura 53. Representación pictórica de la respuesta 30 metros.

Fuente. Elaboración propia.

60 metros

La representación menciona que las distancias para los tres recorridos, por lo cual, tenemos que en total son 30 metros por todos ellos, además mencionan que este recorrido se realiza dos veces considerando el regreso (Figura 56).

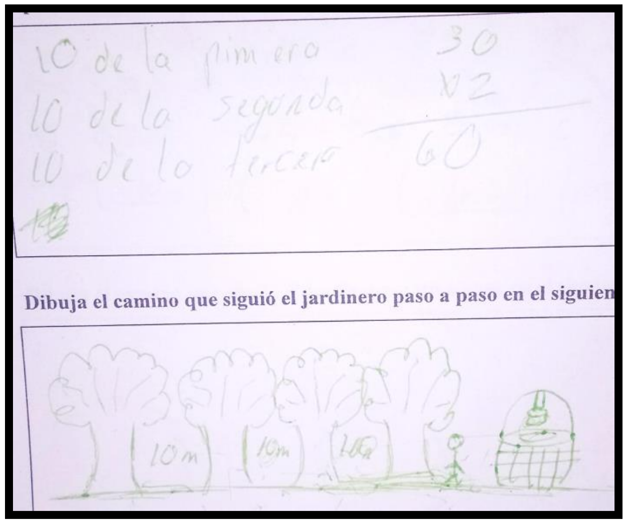

Figura 54. Representación pictórica de la respuesta 60 metros.

Fuente. Elaboración propia.

Una de las representaciones tiene flechas y los otros elementos son dibujos pictóricos: el jardinero y el pozo; se marca la distancia de 10 metros entre cada árbol respetando la distancia de 0 metros entre el árbol que está junto al pozo, además, se menciona en la justificación de las respuesta que como se debe regresar la cubeta entonces se debe sumar las distancias dos veces, esto es, que suman tres veces las distancias entre los árboles y multiplican por dos (Figura 57).

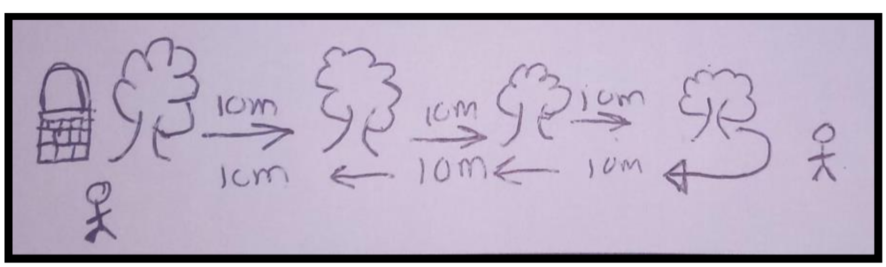

Figura 55. Representación pictórica de la respuesta 60 metros.

Fuente. Elaboración propia.

90 metros

Consideran el recorrido del camino como la distancia de tres veces treinta, ya que mencionan que son 30 metros para llegar al pozo, posteriormente llena la cubeta y avanzan 30 metros más para poder regar los cuatro árboles y finalmente se regresa a dejar la cubeta al pozo (Figura 58). Se resalta que la representación no tiene elementos como el jardinero o la cubeta.

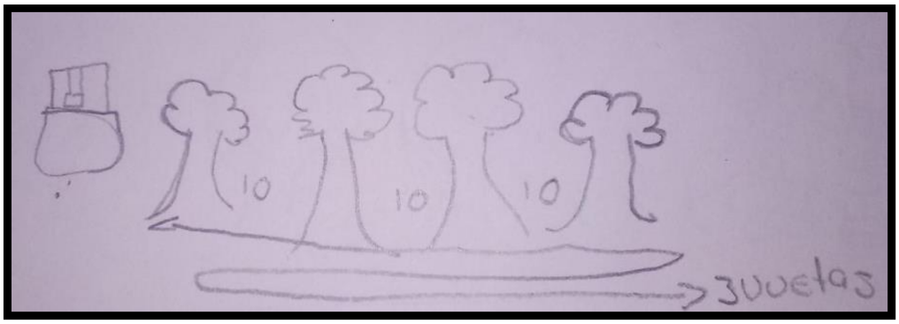

Figura 56. Representación pictórica de la respuesta 60 metros.

Fuente. Elaboración propia.

20 metros

Dentro del razonamiento de los estudiantes, supusieron que como con una cubeta riegan dos árboles que están 10 metros de distancia, por lo tanto en 20 metros de distancia se regarán los cuatro árboles, es decir, están suponiendo un pensamiento lineal o una proporcionalidad directa (Figura 59). Finalmente, lo terminan resolviendo por medio de una regla de tres.

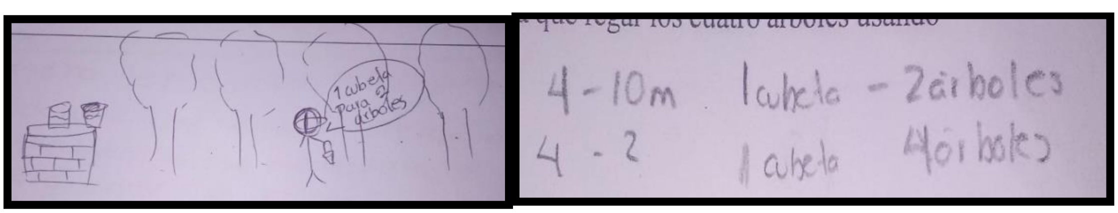

Figura 57. Representación pictórica de la respuesta 20 metros.

Fuente. Elaboración propia.

40 metros

En las representaciones de la respuesta 40 metros, encontramos (Figura 60) en la parte de la hoja de trabajo donde se hace la representación de la situación del problema, elementos irrelevantes completamente pictóricos que no ayudan directamente a la solución del problema como lo son: el sol y las nubes. Por otro lado, en la justificación del problema realizan operaciones aritméticas: suma y multiplicación cuyo resultado es 40 metros.

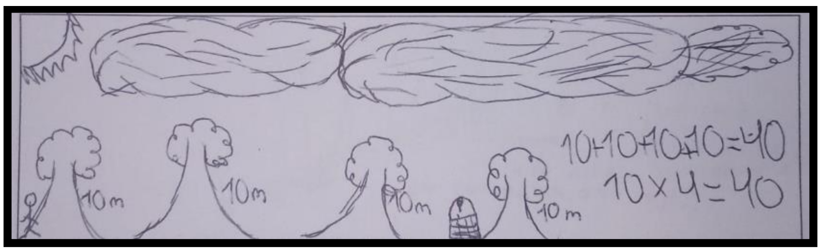

Figura 58. Representación pictórica y numérica de la respuesta 40 metros.

Fuente. Elaboración propia.

80 metros

De manera similar, en educación básica secundaria tenemos la respuesta de 80 metros. Esta se calcula con el producto de 10 metros por los 4 árboles y estos a su vez por dos, es decir, que dadas la cuatros distancias entre cada árbol incluido el pozo con el último árbol nos dan 40 metros, posteriormente este resultado es solo de la ida, por lo cual también se considera el regreso, duplicando el resultado.

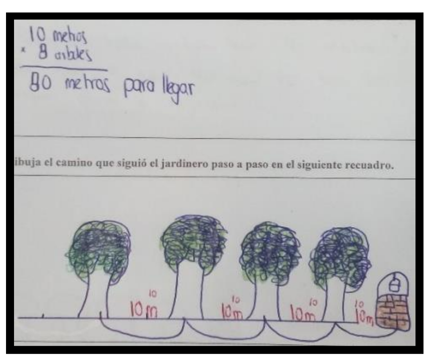

Figura 59. Representaciones pictóricas y numéricas de la respuesta 80 metros.

Fuente. Elaboración propia.

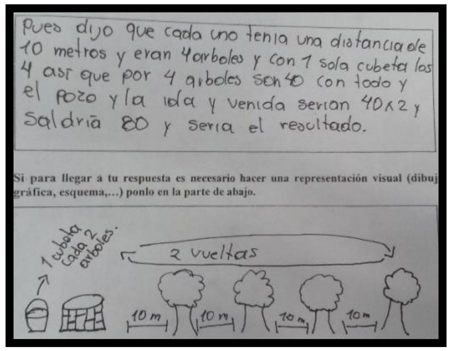

Figura 60. Representaciones pictóricas y numéricas de la respuesta 80 metros.

Fuente. Elaboración propia.

4.2.3 Otras respuestas

120 metros

Al igual que en el nivel Primaria, un estudiante considero cambiar la situación del problema inicial y colocó la distancia de 10 metros del último árbol al pozo, por lo cual, primero riega los dos primeros árboles y denota la distancia de 40 metros, posteriormente, hace el recorrido para regar los árboles más alejados del pozo y considera la distancia de 80 metros, por lo cual la suma de estás distancias es de 120 metros. Se destaca que el dibujo es muy pictórico ya que el pozo muestra muchos detalles además del uso de colores, sin embargo, el uso de flechas hace que esta representación sea similar a un diagrama de red, por lo cual es una representación híbrida (Figura 63).

Figura 61. Representación híbrida de la respuesta 120 metros.

Fuente. Elaboración propia.

100 metros

Consideremos la situación en donde el pozo está a 10 metros de distancia del último árbol, por lo que la distancia para el primer riego la cual será del pozo a los dos últimos árboles es de 40 metros, para volver a llenar la cubeta es necesario regresar al pozo, así que añadimos 40 metros más. Finalmente, cuando tiene la cubeta llena, camina 20 metros hacia el primer y segundo árbol por lo cual suma todas las distancias que da 100 metros (Figura 64).

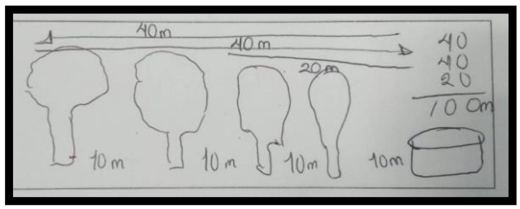

Figura 62. Representación híbrida de la respuesta 100 metros.

Fuente. Elaboración propia.

70 metros

Se toma en cuenta la representación de la situación y el recorrido que se maneja de manera distinta, considerando por el principio partir del pozo con la cubeta llena de agua y regar primero los dos árboles más alejados del pozo, por lo cual, la distancia de ese primer recorrido es de 60 metros, posteriormente se va hacia el pozo a llenar la cubeta con agua y se riega el árbol más cercano al pozo y finalmente camina 10 metros más para regar el segundo árbol más alejado al pozo (Figura 65).

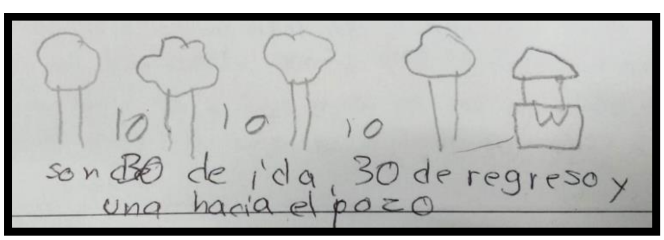

Figura 63. Representación híbrida de la respuesta 70 metros.

Fuente. Elaboración propia.

120 metros

Consideremos la situación en donde el pozo está a 10 metros de distancia del último árbol (Figura 66), por lo que la distancia para el primer riego la cual será del pozo a los dos primeros árboles es de 20 metros, para volver a llenar la cubeta es necesario regresar al pozo, así que añadimos 20 metros más y después para ir por los dos últimos árboles son 40 metros. Finalmente, regresar la cubeta al pozo nos da 40 metros más, así que sumamos todas las distancias y el resultado final es de 120 metros.

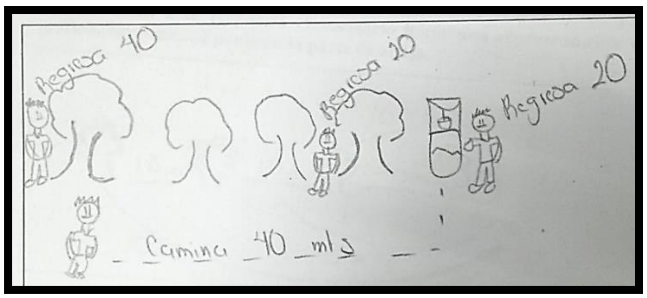

Figura 64. Representación híbrida de la respuesta 120 metros.

Fuente. Elaboración propia.

4.3 Centro de Bachillerato Tecnológico Agropecuario 305

Se aplicó el problema (Anexo 1 y 2) a los 33 estudiantes que cursaban el segundo semestre, de los cuales son: 23 mujeres y 10 hombres cuya edad promedio es de 15.5 años.

4.3.1 Respuestas correctas

Hubo tres respuestas correctas: 2 participantes con la respuesta 50 metros y otro con la respuesta 80 metros.

El primer participante hizo dos dibujos, en el primero, ubica todos los elementos del problema (Figura 67); el segundo dibujo (Figura 68), usa flechas para marcar el recorrido del jardinero. Dentro de sus argumentos, menciona que debe regresar por más agua para llenar la cubeta y terminar de regar los árboles. Hace uso de flechas para marcar la dirección del jardinero en el camino.

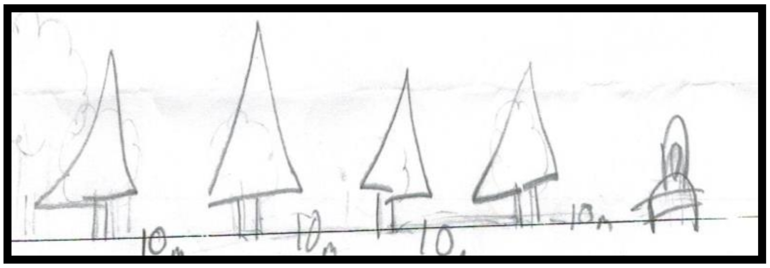

Figura 65. Representación de la situación del problema.

Fuente. Elaboración propia.

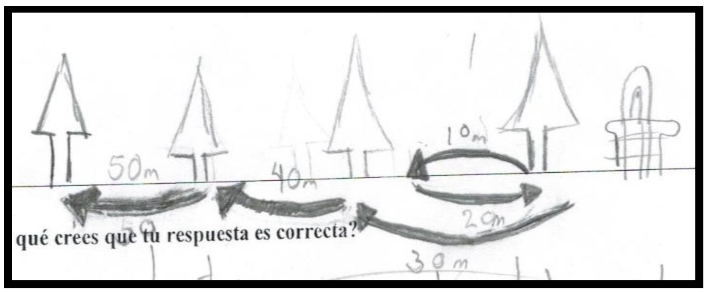

Figura 66. Representación del recorrido del jardinero 50 metros.

Fuente. Elaboración propia.

El segundo participante, coloca los elementos del problema y usa flechas para denotar los recorridos. Esta representación se considera un diagrama de nodos y flechas (Figura 69). Este participante, no justifica el problema y no coloca ningún otro texto más que el dibujo. En ambas preguntas la respuesta es 50 metros, ya que, el jardinero no regresa la cubeta al lado del pozo.

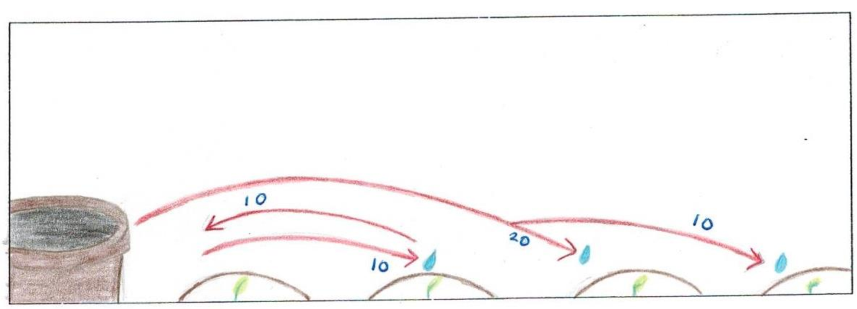

Figura 67. Representación de la respuesta 50 metros.

Fuente. Elaboración propia.

El tercer participante primero traza un plan y analiza la situación, debe saber las vueltas necesarias para regar los cuatro árboles, calcula las distancias y suma los recorridos parciales. A pesar de que su dibujo es 100 % pictórico, usa flechas y concibe que la cubeta deba ser dejada junto al pozo al finalizar el riego. Las razones que da el estudiante están transcritas en la tabla 4.

Tabla 4. Pasos para llegar a la solución del problema.

Que pueden conocer las distancias.	Que calcule lo más acertado.
1. Saber las veces de ida y vuelta. Ida= 2 veces; Vuelta= 2 veces. 2. Calcular las distancias de las vueltas. Ida: 10 m, 30 m; Vuelta: 10 m, 30m. 3. Sumar las distancias 10+10+30+30=80	

Fuente. Elaboración propia.

Cabe señalar que el participante realiza los pasos de Polya para resolver un problema. Además, el recorrido lo representa por medio de rectas no numeradas que marcan distancias de los recorridos parciales del jardinero entre árboles.

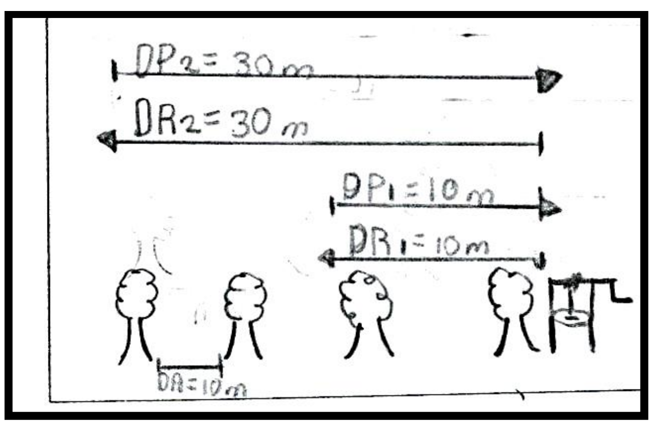

Figura 68. Representación del recorrido del jardinero 80 metros.

Fuente. Elaboración propia.

4.3.1 Respuestas incorrectas

De las respuestas incorrectas, tenemos una gama muy amplia que van de los 30 metros hasta los 160 metros. Algunas de ellas, ya encontradas en los niveles Primaria y Secundaria.

Tabla 5. Tipo de respuesta en el CBTA

Tipo de respuesta	Frecuencia
Ninguna respuesta	2
30 metros	3
40 metros	9
50 metros	1
60 metros	5
70 metros	1
80 metros	1
90 metros	4
100 metros	1
160 metros	1

Fuente. Elaboración propia.

Se identifica que los estudiantes consideran los cuatro árboles y la distancia entre ellos, operando los números que nos dan tres respuestas:

I. 40 metros. Se obtiene de multiplicar 4 árboles por 10 metros (Figura 71).

II. 80 metros. Se obtiene de multiplicar la ida y regreso del jardinero durante el riego de los árboles, combinándolo con la respuesta anterior (Figura 72) tenemos:

$$2\ x\ 4\ x\ 10\ m = 40\ m$$

III. 160 metros. Se obtiene de multiplicar el caso 2 por dos (Figura 73).

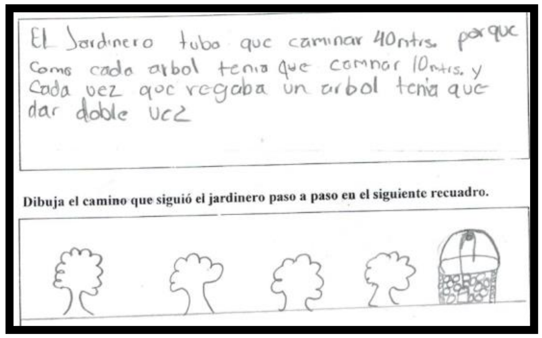

Figura 69. Representación del recorrido del jardinero 40 metros.

Fuente. Elaboración propia.

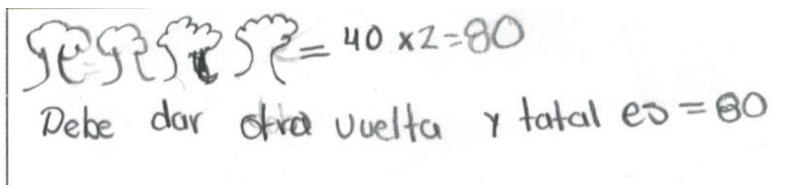

Figura 70. Representación del recorrido del jardinero 80 metros.

Fuente. Elaboración propia.

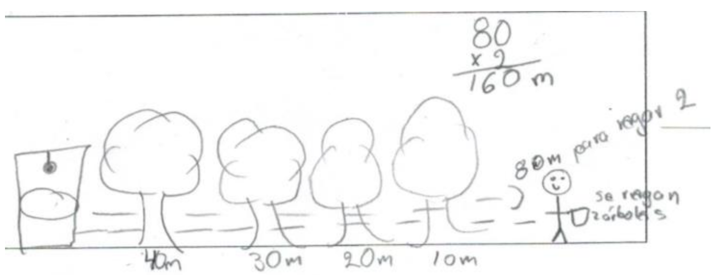

Figura 71. Representación del recorrido del jardinero 160 metros.

Fuente. Elaboración propia.

Para la respuesta de 30 metros, el estudiante plantea la situación, sin embargo solo considera la distancia de separación entre los árboles y continúa sumando números, por lo cual suma las distancias entre ellos (Figura 74), esto es: 10m + 10m + 10m = 30 m. En los casos de 30, 40, 80 y 160 metros apreciamos el contrato didáctico.

Existen dos respuestas cuyas condiciones son propuestas por los alumnos. En la respuesta 90 metros, consideran que el pozo también está separado por 10 metros del último árbol. En la respuesta de 25 metros, los árboles y el pozo están separados por una distancia de 2.5 metros. En ambos recorridos, el jardinero riega primero los dos árboles más cercanos al pozo, después los más alejados y finalmente regresa la cubeta junto al pozo.

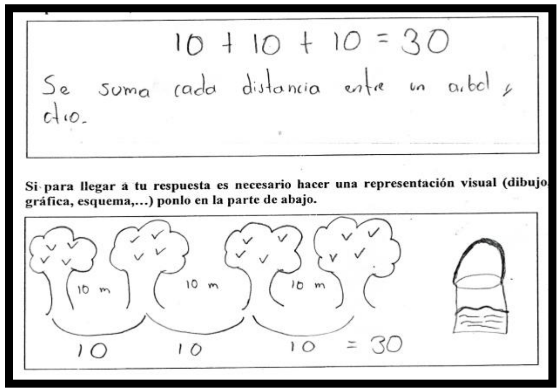

Figura 72. Representación del recorrido del jardinero 30 metros.

Fuente. Elaboración propia.

4.3.2 Otras respuestas

Dentro de las representaciones cabe señalar dos casos particulares. El primero es el uso de colores y el pensamiento lineal, reflejado en las palabras del participante, ya que si riega dos árboles y la distancia recorrida es de 20 metros, entonces si riega el doble de árboles, es decir 4 árboles, entonces recorrerá a su vez el doble de la distancia, que es de 40 metros (Figura 75). Además no representa la situación del problema adecuadamente, ya que la distancia entre árboles y pozo es de 50 metros.

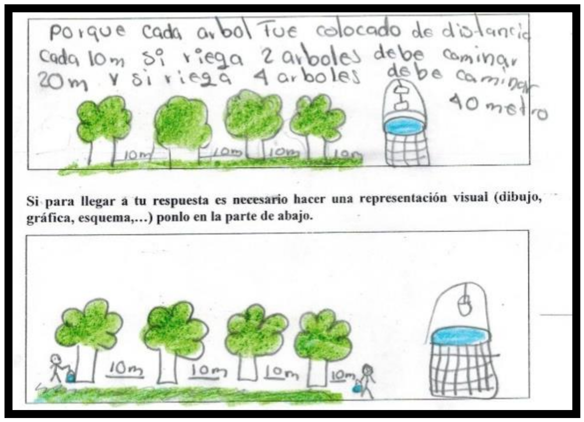

Figura 73. Representación del recorrido del jardinero 40 metros.

Fuente. Elaboración propia.

La segunda mención es al uso del contexto en la resolución del problema, esto se debe a que en el bachillerato donde se aplicó la prueba es técnico superior en agricultura sustentable. El estudiante propone una solución para que ya no se rieguen los árboles con cubeta, sino de manera más eficiente proponiendo zanjas en donde corra el agua.

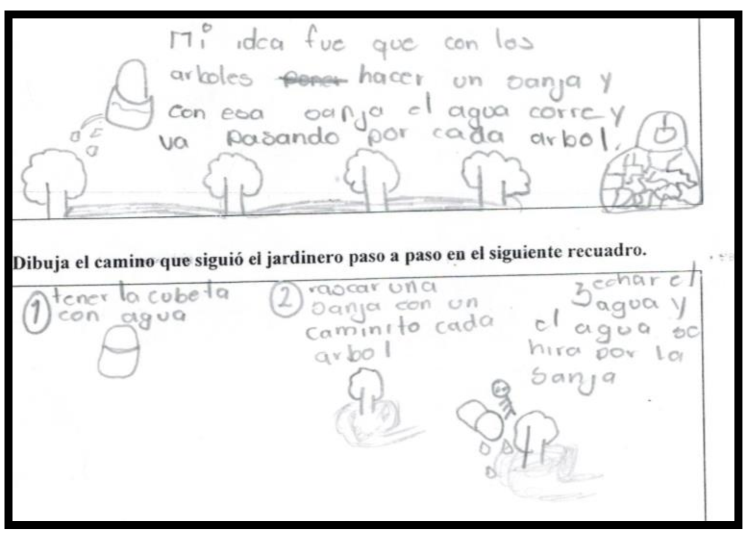

Figura 74. Representación del recorrido del jardinero. Zanjas.

Fuente. Elaboración propia.

4.3.3 Respuesta correcta: 50 metros

Se registraron 8 respuestas correctas dentro de la aplicación del problema en su primera versión, ya que en esta se obligaba a los estudiantes Hubo tres respuestas correctas: 2 participantes con la respuesta 50 metros y otro con la respuesta 80 metros.

Se describe el procedimiento: Primero camina 10 metros para regar los dos primeros árboles y 20 metros al regresar por agua, llega al tercer árbol caminando 40 metros y al cuarto llega caminando 50 metros (Figura 77).

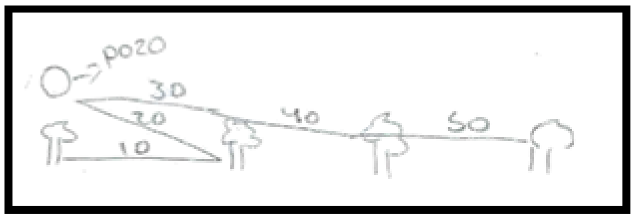

Figura 75. Representación del recorrido del jardinero 50 metros.

Fuente. Elaboración propia.

En la siguiente representación encontramos un dibujo más esquemático que puede ser clasificado como de diagrama de red (Figura 79).

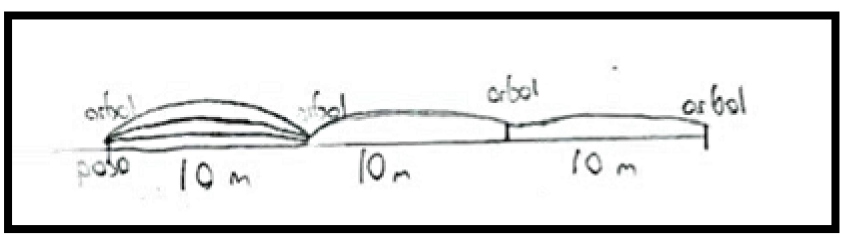

Figura 76. Representación del recorrido del jardinero 50 metros.

Fuente. Elaboración propia.

Para el estudiante entender la distancia entre los árboles propone poner muchos árboles y se sitúa al final de ellos para colocar el pozo. Cabe señalar que el inicio del problema es muy difícil para los estudiantes. Menciona lo siguiente para la solución:

“Si por cada dos árboles necesita una cubeta para regarlos, tendría que caminar 20 metros (ida y vuelta) para regar los dos primeros árboles, y tendría que caminar 30 metros para regar los dos árboles faltantes.”

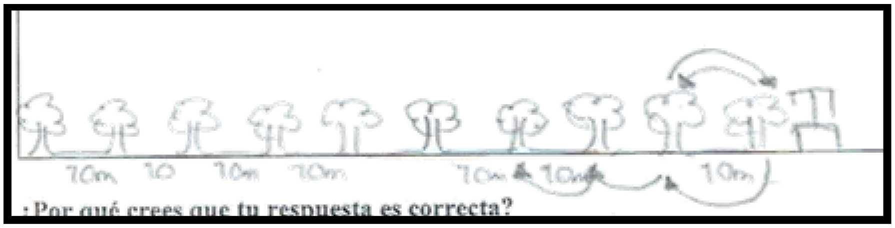

Figura 77. Representación del recorrido del jardinero 50 metros.

Fuente. Elaboración propia.

4.4 Tablas de comparación de respuestas de Primaria y Secundaria

En la tabla 6, se mencionan las respuestas correctas que se encontraron en los dos tipos de hoja de trabajo con las instrucciones Si y Dibuja (Tabla 6 y 7). La mayoría de las representaciones que fueron correctas pertenecen a la instrucción directa de dibujar.

Cabe destacar que los dibujos pictóricos predominan en ambas hojas de trabajo. La instrucción de una representación pictórica con un discurso argumentativo es relativamente mayor en la de la de dibuja.

Dentro de las representaciones híbridas, se encuentra un mayor número de estas en las respuestas correctas con la instrucción de dibuja que son 13, mientras que en la de “Si”, solo se encuentran 4, es decir, se encontraron el triple de respuestas correctas y una gama más amplia de respuestas, ya que se dan cuatro tipos de expuestas, caso contrario a la única respuesta de 50 metros.

Aunque se esperaba que la argumentación formara parte de los niveles superiores, se encontró una diferencia muy pequeña entre el nivel primaria y secundaria, ya que en el primero se obtuvieron 7 respuestas correctas con argumentación, mientas que en el segundo se obtuvieron 9, lo cual no representa una diferencia significativa.

Tabla 6. Respuestas correctas de primaria con la instrucción: Dibuja.

Respuesta	Híbrido	Esquemático	Pictórico	Recta numérica	Sin representación	Pictórico c/argumento
50 metros	6	0	10	0	0	0
70 metros	1	0	0	0	0	0
80 metros otra versión	1	0	0	0	0	0
80 metros	5	0	0	0	0	4
TOTAL	13	0	10	0	0	4

Fuente. Elaboración propia.

Tabla 7. Respuestas correctas de primaria con la instrucción: Si.

Respuesta	Híbrido	Esquemático	Pictórico	Recta numérica	Sin representación	Pictórico c/argumento
50 metros	4	0	8	0	0	3
70 metros	0	0	0	0	0	0
80 metros otra versión	0	0	0	0	0	0
80 metros	0	0	0	0	0	0
TOTAL	4	0	8	0	0	3

Fuente. Elaboración propia.

Para las respuestas correctas en Educación Secundaria, las representaciones destacadas son las que incluyen una recta numérica, pues del total de respuestas correctas son 48 con ambas instrucciones. Que supera a la de dibujo hibrido que tiene un total de 31 metros.

Dentro de las respuestas correctas si se compara la representación esquemática, se puede apreciar que no hay ninguna en el nivel Primaria, mientras que en el nivel Secundaria se encontraron 8 representaciones, que representan al 15% de la población de Secundaria. Este número es representativo al compararlo con el grupo de estudio de Bachillerato, ya que solo hay una representación de las 33 respuestas encontradas.

Tabla 8. Respuestas correctas de Secundaria con la instrucción: Dibuja.

Respuesta	Híbrido	Esquemático	Pictórico	Recta numérica	Sin representación	Pictórico c/argumentación
50 metros	6	2	10	38	0	0
50 y 80 metros	1	1	0	0	0	0
70 metros	0	0	0	0	0	0
80 metros otra versión	1	0	0	0	0	0
80 metros	18	2	0	1	0	4
TOTAL	26	5	10	38	0	4

Fuente. Elaboración propia.

Tabla 9. Respuesta de Secundaria con la instrucción: Si.

Respuesta	Híbrido	Esquemático	Pictórico	Recta numérica	Sin representación	Pictórico c/argumentación
50 metros	4	2	8	10	0	3
50 y 80 metros	0	1	0	0	0	2
70 metros	0	0	3		1	
80 metros otra versión	9	0	0	0	0	0
80 metros	0	0	0	0	0	0
TOTAL	13	3	11	10	1	5

Fuente. Elaboración propia.

Para las respuestas de educación Primaria en las cuales se establece una respuesta justificada cambiando las condiciones del problema, tenemos los resultados del tipo de representación en las Tablas 10 y 11, donde se muestran que en ambos tipos de prueba las representaciones más abundantes son las híbridas. También es necesario recalcar que las representaciones pictóricas y los dibujos esquemáticos no son abundantes.

Tabla 10. Otras respuestas de Primaria con la instrucción: dibuja.

Respuesta	Híbrido	Esquemático	Pictórico
30 metros	0	0	0
60 metros	0	0	0
110 metros	2	0	2
120 metros	1	0	0
TOTAL	3	0	2

Fuente. Elaboración propia.

Tabla 11. Otra respuesta de Primaria con la instrucción: Si.

Respuesta	Híbrido	Esquemático	Pictórico
30 metros	1	0	0
60 metros	2	0	0
110 metros	0	0	0
120 metros	1	0	0
TOTAL	4	0	0

Fuente. Elaboración propia.

CAPÍTULO 5
CONCLUSIONES

En nuestro estudio, las representaciones pictóricas fueron mucho más abundantes que las esquemáticas. Tales representaciones pictóricas no están relacionadas con la solución exitosa del "Problema del jardinero", como se esperaba, considerando la afirmación en el artículo de investigación de Hegarty y Kozhevnikov (1999).

A diferencia de tal artículo, los dibujos predominantes en la solución correcta del problema no fueron los puramente esquemáticos sino fueron:

a) las representaciones híbridas
b) las rectas numéricas
c) las representaciones pictóricas que usaron la argumentación para justificar su respuesta.

Se encontraron más representaciones esquemáticas en el nivel Secundaria que en las muestras de niveles Primaria y Bachillerato.

Las representaciones pictóricas predominaron activamente en las hojas de trabajo en donde la instrucción de dibujar se sugirió.

Por otro lado, en las hojas de trabajo donde no sé dio la instrucción, la cantidad de respuestas correctas fue menor. Esto se debe a que representar la situación está familiarizado con los dibujos y no con hacer un modelo de la situación que incluya elementos destacados para resolver el problema.

Eso es un resultado importante que tiene implicaciones para la enseñanza. Los docentes y los autores de libro de texto de matemática debe siempre sugerir la elaboración de dibujos y aclarar las diferencias entre los dibujos pictóricos y esquemáticos.

Si no se enfatiza el papel crucial de los dibujos en la comprensión de la situación problemática y el planteamiento de las solución (Polya, 1965) eso favorece el uso de operaciones de suma y multiplicación con los elementos numéricos del problema, expresado como “contrato didáctico” (D’Amore & Martini, 1997). A su vez, en nivel Secundaria se encontraron casos en donde se usaba la proporcionalidad directa, mejor conocida como regla de tres para resolver el problema.

Dentro de las respuestas varias se pudo observar que la comprensión de la situación del problema fue un paso fundamental para crear el modelo situacional en el planteamiento del mismo, como lo afirman Rellesmann y otros (2017).

Por otro lado, Bonnen (2015) nos sugiere que la etapa del planteamiento del problema, en especial de la visualización, es fundamental para llevar a cabo las operaciones pero ya determinadas por el modelo situacional. Por esa razón, las respuestas descritas como “casos especiales”, encontradas en el nivel Primaria, suponen descripciones de caminos distintos a las respuestas correctas tradicionales.

Finalmente, se encontró que el contexto del estudiante forma un papel indispensable en su concepción del problema, ya que a partir de sus vivencias hará las adecuaciones necesarias para plantear y resolver el problema (no en el mundo matemático artificial, sino en el mundo de la vida real). El caso destacado fue encontrado en el nivel Bachillerato, donde se propone una solución a largo plazo para el problema: hacer zanjas para el riego. Tal resultado implica otra vez las necesidad de considerar la autenticidad de los problemas diseñados para las matemáticas escolares (Palm, 2006).

BIBLIOGRAFÍA

Acevedo, J., & Martínez, J. M. O. (1995). Validación y aplicación de un test de razonamiento lógico. *Revista de psicología general y aplicada*, *48*(3), 339-351.

Boonen, A. J. H. (2015). Comprehend, Visualize & Calculate: Solving mathematical word problems in contemporary math education.

Bransford, J. & Stein, B (1988). *Solución IDEAL de problemas.* Barcelona. Labor S. A.

Bransford, J. D., & Stein, B. S. (1993). The IDEAL problem solver.

Ceballos, J. P., & Blanco, L. J. (2008). Análisis de los problemas de los libros de texto de Matemáticas para alumnos de 12 a 14 años de edad de España y de Chile en relación con los contenidos de proporcionalidad. *Publicaciones: Facultad de Educación y Humanidades del Campus de Melilla*, (38), 63-88.

Csíkos, C., Szitányi, J., & Kelemen, R. (2012). The effects of using drawings in developing young children's mathematical word problem solving: A design experiment with third-grade Hungarian students. *Educational Studies in Mathematics,* 81(1), 47–65.

Charles, R. & Lester, F. (1982). *Teaching problem solving. What, why, how*. Dale Seymur publications.

D'Amore, B., & Martini, B. (1997). Contrato didáctico, modelos mentales y modelos intuitivos en la resolución de problemas escolares típicos. Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 32, 26-42.

De Bock, D., Verschaffel, L., & Janssens, D. (1998). The predominance of the linear model in secondary school students' solutions of word problems involving length and area of similar plane figures. *Educational Studies in Mathematics*, 35(1), 65–83.

De Bock, D., Verschaffel, L., Janssens, D., Van Dooren, W., & Claes, K. (2003). Do realistic contexts and graphical representations always have a beneficial impact on students' performance? Negative evidence from a study on modeling non-linear geometry problems. Learning and Instruction, 13(4), 441–463.

Diezmann, C. M. (1997). The effect of instruction on students' generation of diagrams. In Biddulph. (K. (. F. & Carr, Ed.) *Proceedings 20th Annual Conference of Mathematics Education Research Group of Australasia: People in mathematics education.* , 140-146.

Diezmann. C., &. E. (2001). Promoting the use of diagrams as tolds for thinking. The roles of representation in school mathematics: YearBook (pp. 1–23). Virginia: NCTM

Diezmann, C. (2005). Assessing primary students' knowlegde of networks, hierarchies and matrices using scenario-based tasks. (A. D. In. Clarkson, Ed.) *Proceedings of the 28th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* , 289-296. Sydney.

Eisenberg, T., & Dreyfus, T. (1991). On the reluctance to visualize in mathematics. In W. Zimmermann, & S. Cunningham (Eds.), Visualization in teaching and learning of mathematics (pp. 25–37). Washington DC: Mathematical Association of America.

Elia, I. G. (2007). The effects of different models of representation on the solution of one-step additive problems. *Learning ans Instruction, 17*, 658-672.

Foong, P. Y. (2002). The role of problems to enchance pedagogical practices in the Singapure Mathematics Classroom. *The Mathematics Educator*, 6(2), 15 – 31.

Foong, P. Y. (2013). Resolución de problemas en matemática. En Yee, L. P. (Ed.), La enseñanza de la matemática en la Educación Básica (pp. 65-91). Santiago: Academia Chilena de la Ciencia.

Gagatsis, A., Shiakalli, M., & Panaoura, A. (2003). La droite arithme´tique comme mode`le ge´ome´trique de l'addition et de la oustraction des nombres entiers. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 8, 95-112.

González, M. A & Flores, C. G. (2017). Modelo Educativo para la educación obligatoria. Educar para la libertad y la creatividad. Recuperado de http://www.aprendizajesclave.sep.gob.mx/secu-intro-mate.html

Guzmán M. (1995). *Para pensar mejor.* Madrid. Piramide

Hegarty, M., & Kozhevnikov, M. (1999). Types of visual–spatial representations and mathematical problem solving. *Journal of educational psychology*, *91*(4), 684-689.

Krutetskii, V. A. (1976). The psychology of mathematical abilities in schoolchildren. Chicago University, The University of Chicago Press.

Novick, L. R., & Hurley, S. M. (2001). To matrix, network, or hierarchy: That is the question. *Cognitive psychology*, *42*(2), 158-216.

NCTM (1980). *Problem Solving in School Mathematics.* Yearbook. Nctm.

NCTM (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics* Reston, Va.: Nctm.

NCTM: National Council of Teachers of Mathematics (2000). Principles and Standards for School Mathematics. Reston, Va: NCTM.

NCTM (2004). Principios y estándares para la educación matemática. Centro de Documentación Thales.

Novick, L. & Hurley S. (2001). To matrix, network, or hierarchy that is the question. *Cognitive Psychology, 42(2),* 158-216.

Palm, T. (2006). Word problems as simulations of real-world situations: A proposed framework. *For the learning of mathematics*, *26*(1), 42-47.

Pantziara, M. G. (2009). Using diagrams as tools for the solution of non-routine mathematical problems. *Educational Studies in Mathematics*, 72-139.

Polya, G. (1949). On solving Mathematical problems in High School. *California Mathematics Council Bulletin 7(2).*

Polya, G. (1962). Mathematical discovery: On understanding, learning, and teaching problem solving. New York, John Wiley & Sons.

Polya, G., & Zugazagoitia, J. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas* (No. 04; QA11, P6.). México: Trillas.

Rellensmann, J., Schukajlow, S., & Leopold, C. (2017). Make a drawing. Effects of strategic knowledge, drawing accuracy, and type of drawing on students' mathematical modelling performance. *Educational Studies in Mathematics*, *95*(1), 53-78.

Reuter, T., Schnotz W., & Rash, R (2015) Drawings and tables as cognitive tools for solving nonroutine word problems in primary school. *American Journal of Educational Research*, 3(11), 1187-1197.

Rico, L. (2006) Marco teórico de evaluación en PISA sobre matemáticas y resolución de problemas. Revista de educación, 275-294.

Schrock C. (2000). Problem Solving--What Is It? *Journal of School Improvement Volume 1 Issue 2 Fal./Winter 2000.*

Schoenfeld A. (1985). *Mathematical Problem Solving.* Academic Press Inc. Florida USA.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem-solving, metacognition, and sense making in mathematics. *Handbook of research on mathematics teaching and learning* , 334-368, Berkeley California, MacMillan.

Siegler, R. S., & Booth, J. (2005). Development of numerical estimation in young children. *Child Development*, 75(2), 428-444.

Uesaka, Y. M. (2007). What kinds of perceptions and daily learning behaviors promote students' use the diagrams in mathematics problem solving? *Learning and Instruction, 17(3),* 322-335.

Van Essen, G., & Hamaker, C. (1990). Using self-generated drawings to solve arithmetic word problems. Journal of Educational Research, 83(6), 301–312.

Zhang, J., & Norman, D. A. (1994). Representations in distributed cognitive tasks. *Cognitive science*, *18*(1), 87-122.

ANEXO 1

Nombre: ______________________________________ Edad: Años:____ Meses: ____

Cuatro árboles jóvenes fueron colocados en fila a 10 metros de distancia. Un pozo estaba situado al lado del último árbol. Se necesita una cubeta de agua para regar dos árboles. ¿Qué tanto tendría que caminar un jardinero en total, si tuviera que regar los cuatro árboles usando una sola cubeta?

El jardinero camino ________ metros.

Describe detalladamente en el espacio de abajo tu procedimiento para llegar a la respuesta.

Dibuja el camino que siguió el jardinero paso a paso en el siguiente recuadro.

¿Por qué crees que tu respuesta es correcta?

La primera razón es:

La segunda razón es:

La tercera razón es:

ANEXO 2

Nombre: ______________________________________ Edad: Años:____ Meses: ____

Cuatro árboles jóvenes fueron colocados en fila a 10 metros de distancia. Un pozo estaba situado al lado del último árbol. Se necesita una cubeta de agua para regar dos árboles. ¿Qué tanto tendría que caminar un jardinero en total, si tuviera que regar los cuatro árboles usando una sola cubeta?

El jardinero camino ________ metros.

Describe detalladamente en el espacio de abajo tu procedimiento para llegar a la respuesta.

Si para llegar a tu respuesta es necesario hacer una representación visual (dibujo, gráfica, esquema,…) ponlo en la parte de abajo.

¿Por qué crees que tu respuesta es correcta?

La primera razón es:

La segunda razón es:

La tercera razón es: