



**BENEMÉRITA UNIVERSIDAD
AUTÓNOMA DE PUEBLA**

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

**DIFERENTES SOLUCIONES A PROBLEMAS CON
DIFERENTE GRADO DE ABSTRACCIÓN
POR ALUMNOS RURALES Y URBANOS**

**TESIS
PARA OBTENER EL TÍTULO DE
MAESTRO(A) EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA**

PRESENTA
ING. MARIO CORTEZ ESTRADA

DIRECTOR DE TESIS
M.C. ADRIÁN CORONA CRUZ

CO-DIRECTOR DE TESIS
DR. JOSIP SLISKO IGNJATOV

Puebla, Pue.

Junio 2020



BUAP.

DRA. LIDIA AURORA HERNÁNDEZ REBOLLAR
SECRETARIA DE INVESTIGACIÓN Y
ESTUDIOS DE POSGRADO, FCFM-BUAP
P R E S E N T E:

Por este medio le informo que el C:

CORTEZ ESTRADA MARIO

Estudiante de la Maestría en Educación Matemática, ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 06 de diciembre de 2019, con la tesis titulada:

“DIFERENTES SOLUCIONES A PROBLEMAS CON DIFERENTE GRADO DE ABSTRACCIÓN POR ALUMNOS RURALES Y URBANOS”

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

A T E N T A M E N T E.
H. Puebla de Z. a 12 de mayo de 2020

DR. JOSIP SLISKO IGNJATOV
COORDINADOR DE LA MAESTRÍA
EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA.



Cop.Archivo.
DIC ISI / Tigrm*

Facultad
de Ciencias
Físico Matemáticas

Av. San Claudio y 18 sur, edil. FM1
Ciudad Universitaria, Col. San
Manuel, Puebla, Pue. C.P. 72570
01 (222) 229 55 00 Ext. 7550 y 7552

Agradecimientos

Agradezco, en primer lugar, a la facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, la oportunidad que me otorgó para realizar los estudios de grado.

Al colegio de profesores de la Maestría en Educación Matemática, los cuales son profesionales en sus líneas de investigación, y que amablemente dedicaron sus conocimientos y tiempo para mí, con el objetivo de llegar a lograr la obtención del grado académico. En especial quiero agradecer a mi director de tesis, el M.C. Adrián Corona Cruz que, con sus comentarios y aportaciones, fue una guía que me permitió terminar este logro de mi vida.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), el cual, a través de sus becas nacionales que otorga a estudiantes de posgrado inscritos en el PNPC, permite la formación de profesionistas. El apoyo económico otorgado hacia mi persona, fue de gran ayuda para la dedicación exclusiva para terminar el posgrado.

Al Bachillerato CBTis 254 y a la Preparatoria Emiliano Zapata, por permitir realizar mi estudio en sus aulas.

A mis compañeros de la quinta generación que me apoyaron y me permitieron entrar en su vida durante estos dos años de convivir dentro y fuera del salón de clase. Mil palabras no bastarían para agradecerles su apoyo, su comprensión y sus consejos en todos los momentos.

A mis padres, por creer en mí y por su apoyo incondicional, dándome ejemplos dignos de superación y entrega, porque en gran parte gracias a ustedes, hoy puedo ver alcanzada mi meta, ya que siempre estuvieron impulsándome en los momentos más difíciles, y porque el orgullo que sienten por mí, fue lo que me hizo ir hasta el final. Esto es por ustedes, porque admiro su fortaleza y por lo que han hecho de mí. Gracias por haber fomentado en mí el deseo de superación y el anhelo de triunfo en la vida.

A mi hermano José Antonio, por ser parte importante de mi vida y motivarme para realizar este proyecto.

Dedicatoria

Te dedico esta tesis a ti Rosalba, que siempre has sido, y serás mi principal motor de seguir adelante, tu amor, comprensión, cariño, ayuda y acompañamiento, fueron el gran motor de este logro que, sin ti, no hubiera sido posible, soy el hombre más feliz a tu lado. Te amo esposa mía.

Contenido

Agradecimientos	3
Dedicatoria.....	4
Índice de tablas	8
Índice de gráficas	9
Índice de ilustraciones.....	10
Resumen.....	11
Abstract.....	12
Introducción	13
Capítulo 1. Justificación.....	15
1.1. Antecedentes.....	16
1.1.1 Estudios sobre la comprensión y representación de problemas.....	17
1.2. Problema de investigación	17
1.3. Objetivos de la investigación	18
1.3.1. Objetivo general	18
1.3.2. Objetivos particulares	18
1.4. Preguntas de investigación.....	18
Capítulo 2. Marco teórico	19
2.1. ¿Qué entendemos por un problema matemático?	19
2.2. Tipos de problemas matemáticos	20
2.2.1. Clasificación de Blanco (1993b)	21
2.2.2. Clasificación de Rodríguez (2006)	22
2.2.3. Clasificación de Diaz y Poblete (2001)	23
2.3. El papel de la RP en los programas de matemáticas de nivel media superior.....	24
2.4. La influencia del contexto sociocultural en la RP.....	26
2.5. ¿Qué hace diferentes a las escuelas rurales y urbanas?.....	28
2.6. Nivel de abstracción de los problemas aritméticos en alumnos urbanos y rurales.....	30
2.7. Los procesos cognitivos, la metacognición y su relación con la RP	31
2.8. Procesos cognitivos.....	31

2.8.1.	Pensamiento formal	32
2.8.2.	Definición y componentes de la metacognición	33
2.9.	El concepto de representación en la educación matemática.....	34
2.10.	El uso de las representaciones múltiples en RP	35
2.11.	La importancia de las representaciones en RP.....	35
2.12.	La relación entre el rendimiento sobre la resolución de un problema y el formato de presentación	36
Capítulo 3. Metodología		40
3.1.	Población del estudio exploratorio.....	40
3.2.	Instrumentos de recolección de información	40
3.2.1.	Determinación del nivel de razonamiento	40
3.2.2.	Diferentes formulaciones del problema.....	41
Problema tipo 1		41
Problema tipo 2.....		43
Problema tipo 3.....		45
3.3.	Procedimiento de obtención de datos.....	47
3.4.	Proceso de análisis de los datos	47
Capítulo 4. Análisis de resultados		49
4.1.	Cantidad de alumnos por grupo	49
4.2.	Análisis de resultados de acuerdo al tipo de problema	49
4.2.1.	Problema tipo I	50
4.2.1.1.	Análisis del rendimiento en general	50
4.2.1.2.	Análisis de la cantidad de representaciones utilizadas	51
4.2.1.3.	Tipo de representación en alumnos rurales y urbanos.....	52
4.2.1.4.	Rendimiento de los diferentes tipos de representación.....	53
4.2.1.5.	Dificultad de las respuestas	55
4.2.2.	Problema tipo II.....	56
4.2.2.1.	Análisis del rendimiento en general	56
4.2.2.2.	Análisis de la cantidad de representaciones utilizadas	58
4.2.2.3.	Tipo de representación en alumnos rurales y urbanos.....	59

4.2.2.4.	Rendimiento de los diferentes tipos de representación.....	60
4.2.2.5.	Dificultad de las respuestas	61
4.2.3.	Problema tipo III.....	63
4.2.3.1.	Análisis del rendimiento en general	63
4.2.3.2.	Análisis de la cantidad de representaciones utilizadas	64
4.2.3.3.	Tipo de representación en alumnos rurales y urbanos.....	65
4.2.3.4.	Rendimiento de los diferentes tipos de representación.....	66
4.2.3.5.	Dificultad de las respuestas	68
4.3.	Análisis de datos por nivel de razonamiento.....	70
4.3.1.	Nivel de razonamiento de los alumnos participantes.....	70
4.3.2.	Análisis de rendimiento de acuerdo al nivel de razonamiento.....	71
4.4.	Categorización de representaciones	72
4.5.	Análisis de las frecuencias de representaciones de alumnos urbanos.	75
4.5.1.	Análisis de representaciones más frecuentes por alumnos urbanos en el problema tipo I.....	76
4.5.2.	Análisis de representaciones más frecuentes por alumnos urbanos en el problema tipo II	80
4.5.3.	Análisis de representaciones más frecuentes por alumnos urbanos en el problema tipo III	82
4.6.	Análisis de las frecuencias de representaciones de alumnos rurales.....	84
4.6.1.	Análisis de representaciones más frecuentes por alumnos rurales en el problema tipo I	85
4.6.2.	Análisis de representaciones más frecuentes por alumnos rurales en el problema tipo II	87
4.6.3.	Análisis de representaciones más frecuentes por alumnos rurales en el problema tipo III.....	89
	CONCLUSIONES	91
	Referencias.....	94

Índice de tablas

Tabla 1 Puntaje promedio y error estándar de escuelas de México según su tipo de sostenimiento y la localidad en la que se ubican. Fuente OCDE, (2019).....	29
Tabla 2: Cantidad de alumnos que participaron en la investigación	49
Tabla 3: Codificación de las representaciones que realizó cada alumno de acuerdo al tipo de problema, en el grupo de alumnos urbanos	73
Tabla 4: Codificación de las representaciones que realizó cada alumno de acuerdo al tipo de problema, en el grupo de alumnos rurales	74
Tabla 5: Frecuencias de representaciones que realizaron los alumnos urbanos según el tipo de problema.....	75
Tabla 6: Cantidad de repeticiones por representación, que utilizaron los alumnos rurales para resolver los diferentes tipos de problemas.	84

Índice de gráficas

Gráfica 1: Rendimiento de los alumnos "urbanos" en el problema tipo I	50
Gráfica 2: Rendimiento de alumnos "rurales", problema tipo I	50
Gráfica 3: Porcentaje de alumnos, que realizaron 1, 2 o 3 representaciones en el problema tipo I.....	51
Gráfica 4: Porcentaje de representaciones que hicieron los alumnos en el problema tipo I con respecto al total de alumnos.....	52
Gráfica 5: Efectividad de representaciones de alumnos urbanos que resolvieron el problema tipo I	53
Gráfica 6: Porcentaje de efectividad de alumnos rurales por tipo de representación utilizada para el problema tipo I	54
Gráfica 7: clasificación de la dificultad a las respuestas del problema tipo I, según los estudiantes	55
Gráfica 8: Rendimiento de alumnos urbanos que realizaron el problema tipo II	57
Gráfica 9: Rendimiento de alumnos rurales que realizaron el problema tipo II.....	57
Gráfica 10: Porcentaje de alumnos, que realizaron 1, 2 o 3 representaciones en el problema tipo II.	58
Gráfica 11: Porcentaje de representaciones que hicieron los alumnos en el problema tipo II con respecto al total de alumnos.....	59
Gráfica 12: Efectividad de representaciones de alumnos urbanos que resolvieron el problema tipo II.	60
Gráfica 13: Porcentaje de efectividad de alumnos rurales por tipo de representación utilizada para el problema tipo I	60
Gráfica 14: clasificación de la dificultad a las respuestas del problema tipo II, según los estudiantes	61
Gráfica 15: Rendimiento de los alumnos "urbanos" en el problema tipo III.....	63
Gráfica 16: Rendimiento de alumnos "rurales", problema tipo I	64
Gráfica 17: Porcentaje de alumnos, que realizaron 1, 2 o 3 representaciones en el problema tipo III.....	64
Gráfica 18: Porcentaje de representaciones que hicieron los alumnos en el problema tipo III con respecto al total de alumnos.....	65
Gráfica 19: Efectividad de representaciones de alumnos urbanos que resolvieron el problema tipo III.....	66
Gráfica 20: Porcentaje de efectividad de alumnos rurales por tipo de representación utilizada para el problema tipo I	67
Gráfica 21: clasificación de la dificultad a las respuestas del problema tipo I, según los estudiantes	68
Gráfica 22: Nivel de razonamiento de alumnos rurales y urbanos.....	70
Gráfica 23: Rendimiento de alumnos rurales y urbanos durante la resolución de la tarea.....	71

Índice de ilustraciones

Ilustración 1: Ejemplo de preguntas en diferente representación. (Meltzer,2005).....	38
Ilustración 2: Representación IILT alumno urbano para el problema tipo I	76
Ilustración 3: Representación ICLT de alumno urbano para problema tipo I	77
Ilustración 4: Representación IILD de alumno urbano para realizar el problema tipo I	78
Ilustración 5: Representación ICGT de alumno urbano para problema tipo I.....	79
Ilustración 6: Representación ICGT realizada por alumno urbano en el problema tipo I	79
Ilustración 7: Representación IILD de alumno urbano para el problema tipo II.....	80
Ilustración 8: Representación SILD realizada por un alumno urbano para el problema tipo II	81
Ilustración 9: Representación SILT realizada por un alumno urbano para el problema tipo III	82
Ilustración 10: Representación SCLT realizada por un alumno urbano para el problema tipo III	83
Ilustración 11: Representación IIGD realizada por alumnos rurales para el problema tipo I.....	85
Ilustración 12: Representación IILD de un alumno rural para realizar el problema tipo I.....	86
Ilustración 13: Representación IIGD realizada por un alumno rural para el problema tipo II	87
Ilustración 14: Representación SIGD realizada por un alumno rural para el problema tipo II	88
Ilustración 15: Representación IILD, realizada por un alumno rural para el problema tipo III	89
Ilustración 16: Representación SIOD realizada por alumno rural para el problema tipo III	90

Resumen

El presente estudio analiza las diferencias de desempeño, cantidad y tipo de representación seleccionada en la resolución de un problema matemático específico, que utilizan los estudiantes de acuerdo al nivel de razonamiento, forma de presentación de un problema matemático y el contexto sociocultural del alumno, así como influencias de estos factores sobre el desempeño del alumno. Los participantes del estudio fueron 82 alumnos urbanos y 84 alumnos rurales, todos estudiantes del tercer año de bachillerato; los cuales se dividieron en tres grupos cada uno; dando seis grupos en total.

La investigación fue de tipo cualitativa y exploraría; para obtener los datos a todos los grupos se les determinó el nivel de razonamiento a través de la prueba TOLT (Test Of Logical Thinking) (Tobie y Capie, 1981) y se les pidió que resolvieran un problema relacionado con el fenómeno de rapidez constante utilizando tres procedimientos diferentes. Se les aplicó el mismo problema, pero en tres formatos de presentación diferentes (real, realista y abstracto), aplicando una versión a un grupo de alumnos rurales y a un grupo de alumnos urbanos. Después, se les presentaron tres soluciones diferentes para que pudieran clasificarlas de acuerdo a la dificultad que ellos apreciaban.

Los resultados muestran que el problema que presenta un mejor rendimiento es aquel de tipo real, debido a que presenta magnitudes numéricas y el resultado proviene de una situación que ellos pueden construir y también resolver. El problema de tipo abstracto, fue el que manifestó un menor rendimiento, donde, los alumnos manifestaron que el problema estaba incompleto o bien que no tenía solución por “falta de datos”. En términos generales, independientemente del tipo de problema, los alumnos urbanos obtuvieron un mayor número de respuestas correctas sobre los alumnos rurales.

En referencia a los tipos de representación que los alumnos seleccionaron, los alumnos rurales prefirieron representaciones analíticas y gráficas, orientándose a representaciones en las que presentan menos obstáculos, siendo que la influencia del contexto es básicamente en la rapidez en que se termina el problema; mientras que los alumnos urbanos prefirieron las representaciones algebraicas y analíticas; esto muestra que su contexto influye en otorgar una jerarquización de las representaciones. Más del 85% de los alumnos tanto rurales como urbanos, no muestran la capacidad de hacer representaciones múltiples.

Abstract

This study analyzes the differences in performance, quantity and type of representation selected for students, according to the level of reasoning, form of presentation of a mathematical problem and the sociocultural context of the student, thus as influences of these factors on student performance. The study participants were 82 urban students and 84 rural students, all students of the third year of high school; which were divided into three groups each; giving six groups in total.

The research was qualitative; to obtain the data, it was determined the level of reasoning through the TOLT (Test Of Logical Thinking) (Tobie and Capie, 1981) and they were asked to solve a task using three different procedures related to the phenomenon of constant speed. The same task was applied to them, but in three different presentation formats (real, realistic and abstract), applying one version to a group of rural students and a group of urban students. After that, three different solutions were presented to the students for classify them according to the difficulty they appreciated.

The results show that the problem with real situation, was the best performance, due that shows numeric magnitudes and its answer comes from a situation that they can construct an solve it. The abstract task, was the worst performance; in this case, the students stated that the problem was incomplete or that it had no solution due “lack of data”. In general, urban students have more correct answers that rural students.

For the types of representation to answer the task, the “rural” students choice analytics and graphics representations, due that representations are more easy to do respect other types; being that the influence of the context is basically in the speed in which the problem ends; while urban students preferred algebraic and analytic representations; showing a very high influence of its context in the mode of giving more value to this type of representation. More than 85% of students, both rural and urban, do not show the ability to make multiple representations

Introducción

La Resolución de Problemas (RP) se ha convertido en una de las líneas de investigación más importantes en la Educación matemática; también se ha consolidado como un proceso que se toma en cuenta durante el diseño de programas curriculares de matemáticas de nivel medio superior en casi todo el mundo, por lo tanto, el profesor que se encuentra en el aula, hace uso de actividades que él considera como un “problema matemático”, dentro de su trabajo diario (Castro, 2008). La RP, es pues, la parte medular de las acciones didácticas, y por consecuencia se debe considerar como una habilidad que el estudiante debe desarrollar en su formación (SEP, 2019).

En el caso de México, la capacidad de los alumnos para resolver problemas se mide por medio de pruebas estandarizadas, siendo PISA (Programme International of Student Assessment) y PLANEA (Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes) las más importantes por su aplicación nacional. Los últimos resultados de PISA, aunque indican un avance sobre nuestro propio rendimiento en versiones anteriores, el puntaje promedio obtenido por los estudiantes mexicanos se encuentra por debajo del promedio mundial, en los últimos lugares de desempeño (OCDE, 2016).

El caso de la prueba PLANEA, los resultados indican que la mayoría de los alumnos no saben resolver problemas que involucren el establecimiento de correspondencias entre variables y que supongan la traducción entre distintos sistemas de representación (verbal, algebraico, geométrico, gráfico) (INEE, 2018).

Una forma de lograr una mejor habilidad para resolver problemas es a través de la formación con base en la metodología de RP en el aula, la cual tiene como objetivo que los alumnos adquieran un auténtico aprendizaje a través de procesos de alto valor cognitivo como: transformar y procesar datos, procesar simultáneamente una gran cantidad de pasos en la ejecución de una tarea intelectual y separar la información relevante de la irrelevante. Así, evaluar la RP significa conocer el grado en que los alumnos utilizan los procesos intelectuales involucrados en el aprendizaje, para favorecer el desarrollo cognitivo (González, 2005).

En la Educación Matemática; se han realizado diversas investigaciones que intentan describir aquellos factores que afectan la actividad de RP, de entre los que destacan, el tipo de problema que es presentado, la estructura y el formato en cómo se presenta el problema, las estrategias que son empleadas, las representaciones que los alumnos seleccionan para poder resolver un problema, así

como aquellas prácticas o modelos basados en las creencias que tienen los profesores sobre qué es enseñar y aprender matemáticas.

En esta investigación, se realizó un análisis cualitativo de carácter exploratorio y descriptivo, de tres factores que son de interés: el contexto sociocultural al realizar una diferenciación entre alumnos rurales y urbanos, el tipo de problema y su estructura; así como la descripción de los tipos y cantidades de las representaciones que los alumnos seleccionan para resolver un problema matemático basado en una situación de cinemática.

En el Capítulo 1 se presenta la justificación donde detallamos el problema de investigación, se proyectan los objetivos de la investigación y se expresan las preguntas de investigación que ayudaron a cumplir los objetivos, así como los argumentos que otorgan pertinencia a la investigación

En el Capítulo 2 (Marco teórico) se presenta una revisión de los siguientes temas: problema matemático, tipos de problemas matemáticos, la noción de contexto escolar y la diferencia entre escuelas rurales y urbanas, el nivel de razonamiento para resolver problemas de ciencias, el uso de representaciones múltiples para la resolución de un problema y su relación con la forma de presentación de un problema; por último, el papel de la RP en los programas de matemáticas del nivel medio superior.

En el Capítulo 3 (Metodología) se describe el método seleccionado para lograr los objetivos planteados en el Capítulo 1. El estudio es de tipo exploratorio, descriptivo y se adoptó un análisis de tipo cualitativo para poder dar respuesta a las preguntas de investigación, además se describen también los instrumentos de recolección de datos y la forma en cómo se aplicaron dichos instrumentos.

En el capítulo 4 se muestra el análisis de los desempeños de los alumnos en la resolución del problema que se estudió, lo que incluye la identificación de las distintas representaciones utilizadas de acuerdo a los factores seleccionados en la investigación. Por último, se presentan las conclusiones del estudio.

Capítulo 1. Justificación

La Resolución de Problemas (RP) en el aula busca, de acuerdo a González (2005) la adopción de un modelo de un proceso utilizado para resolver problemas. La RP; es, por consecuencia, un proceso que casi la totalidad de los cursos de matemáticas toman como actividad medular. De manera cotidiana hay un momento en que los alumnos realizan una serie de ejercicios, que el profesor concibe como “problemas” y que se reducen principalmente a la utilización de los algoritmos y formas en las que docentes, libros de texto o algún recurso visual (videos, diapositivas, etc.) intentan resolver algunas tareas propuestas al alumno (Corona, Sánchez, González y Slisko, 2012).

Sin embargo, la RP sucede cuando se les pide a los alumnos que resuelvan tareas matemáticas en la clase, las cuales exigen la utilización de habilidades y conceptos que han tratado anteriormente para ejecutar el procedimiento que ellos establecen como el adecuado para dar una respuesta al problema (González, 2005).

El sistema educativo mexicano tiene como uno de sus ámbitos del perfil de egreso del nivel medio superior: “Construye e interpreta situaciones reales, hipotéticas o formales que requieren de la utilización del pensamiento matemático. Formula y resuelve problemas, aplicando diferentes enfoques. Argumenta la solución obtenida de un problema con métodos numéricos, gráficos o analíticos” (SEP,2019), lo que coloca a la RP como una habilidad fundamental que debe ser desarrollada en los alumnos. Para identificar si lo anterior se cumple, existen una gran cantidad de instrumentos para medir los conocimientos y habilidades para resolver problemas matemáticos, pero los que otorgan información en forma global son las pruebas estandarizadas que se aplican a todos los alumnos en el país: PISA y PLANEA.

Sin embargo, los últimos resultados en las pruebas no son positivos. En la última prueba PISA del 2015, México obtuvo desempeño promedio en matemáticas de 408 puntos, ubicándolo en el último cuartil sobre todos los países participantes; sumado a esto, menos del 1% de los estudiantes alcanzan un nivel de excelencia, por el contrario, el 23% de los estudiantes no alcanza el nivel básico de la competencia matemática, indicando que, aunque son capaces de realizar procesos algorítmicos, no pueden establecer relaciones matemáticas de problemas del mundo real. Esto es atribuible a diferencias económicas, sociales y de políticas y prácticas educativas (OCDE, 2016). Situación que es visible, ya que los resultados indican una diferencia de 40 puntos entre el

rendimiento en escuelas urbanas y rurales, lo que se traduce en una brecha de 2 años de estudio entre los tipos de comunidad.

En la prueba PLANEA, que evalúa aprendizajes esperados enmarcados en los programas curriculares de educación media superior, los últimos resultados del año 2017 muestran que el 66.2% se encuentra en un nivel con dificultades de algoritmos y de establecimiento de relaciones; un 23.3% solamente pueden establecer relaciones de proporcionalidad y realizar las operaciones, un 8% pueden emplear el lenguaje matemático para resolver problemas y sólo un 2.5% dominan reglas de operación del lenguaje matemático. Los resultados son un reflejo de múltiples factores de los estudiantes, condiciones de las instituciones educativas y el contexto en el que aprenden, esto se puede visualizar de manera cuantitativa, debido a que el puntaje de telebachilleratos comunitarios que se encuentran en comunidades rurales es inferior al de bachilleratos particulares y autónomos que se encuentran en centros urbanos, los puntajes son de 463 para telebachilleratos y 535 para autónomos (INEE, 2018). Esto demuestra que en realidad los alumnos no obtienen un buen rendimiento cuando se les presentan tareas matemáticas donde el procedimiento no se encuentra de manera inmediata.

Los párrafos anteriores originan la necesidad de analizar cómo los estudiantes de comunidades diferentes responden de diferente forma a las mismas pruebas, si el nivel escolar en el que se encuentran inscritos es el mismo, siendo más precisos, ¿estudiantes de diferente contexto escolar resuelven de la misma forma un problema? Un análisis a las respuestas de los alumnos a un problema matemático podría determinar en un sentido cuáles son las diferencias y similitudes en los procedimientos y en otro, determinar si en realidad un plantel lograr desarrollar en sus alumnos el perfil de egreso requerido por las autoridades gubernamentales.

1.1. Antecedentes

El estudio de la RP tiene distintas aproximaciones en la Educación Matemática, las cuales dieron origen a diversos temas de investigación. Castro (2008) menciona que es debido a que la RP ha sido estudiada por filósofos, psicólogos, matemáticos profesionales y especialistas en Educación y didáctica de la matemática. Él coloca al libro de Polya (1965) sobre ¿cómo resolver problemas? Como uno de los primeros acercamientos formales al estudio de la RP, así mismo destaca como investigaciones tempranas a los trabajos de Brownell, los cuales sucedieron antes de la segunda guerra mundial. A partir de los años 80's se da una gran diversificación, originando un gran número

de investigaciones, por lo que Castro (2008) agrupa los temas en dos grandes líneas: a) enseñar y resolver problemas y b) estudios sobre cómo pensamos cuando resolvemos problemas.

El estudio de los procedimientos utilizados en la RP como una consecuencia de las habilidades del alumno, se aborda en la línea “estudios centrados en el pensamiento”, donde podemos destacar el enfoque centrado en el procesamiento de la información, el cual afirma que hay dos procesos mentales básicos implicados en la RP: *la construcción de una representación del problema*, y el *empleo de una estrategia para guiar la búsqueda de solución*.

1.1.1 Estudios sobre la comprensión y representación de problemas.

Los primeros estudios que analizan la representación se publicaron en 1980, estos identifican que el grado de dificultad para resolver un problema verbal depende de cómo representar el problema y la cantidad desconocida del mismo (Castro, 2008). Por su parte Heller y Greeno (1978) realizaron un estudio en el cual concluyeron que la parte más importante es el proceso de comprensión, porque esto permite construir una representación de la situación.

Vergnaud (1981) realiza estudios relacionados con la RP aritméticos escolares, en donde considera esencial el análisis de las representaciones, porque afirma que la forma o el procedimiento como un estudiante resuelve un problema, este ligado con la representación que construye de la situación.

Por otro lado, Hieber y Carpenter (1992) centran sus estudios sobre la relación entre la comprensión y la representación interna, estableciendo que la comprensión depende del número y fortaleza de conexiones internas, por lo que las matemáticas sólo se pueden entender si estas forman parte de una red de representaciones.

Por último, podemos citar a Goldin y Shteingold (2001) quienes afirman que la comprensión conceptual depende de la potencia y la flexibilidad de las representaciones internas, incluyendo la riqueza de las relaciones entre tipos diferentes de representación.

1.2. Problema de investigación

En el proceso de enseñanza-aprendizaje una de las actividades de mayor importancia es la RP ocasionando que en la investigación sobre la enseñanza de las ciencias, en especial la matemática, se dé una gran importancia a la RP. Lo anterior, ha llevado a investigadores en Educación Matemática, a configurar a la RP como un tema de estudio e investigación que ha sufrido un

impulso creciente durante los últimos cincuenta años. Dentro de los temas de investigación más importantes están la identificación de estrategias, así como la representación y su relación con el desempeño en la RP (Castro,2008).

El problema a investigar es determinar el impacto que tienen la estructura y la presentación de un problema matemático, el nivel de razonamiento, sobre la elección y el uso de representaciones para la solución de un problema relacionado con la rapidez constante, en dos contextos socioculturales: el rural y urbano.

1.3.Objetivos de la investigación

1.3.1. Objetivo general

Identificar las diferencias que se presentan ocasionadas por el formato de presentación, el nivel de razonamiento del resolutor y el contexto sociocultural, sobre el desempeño, la cantidad y el tipo de representación seleccionada en la resolución de un problema matemático en alumnos de dos contextos socioculturales diferentes.

1.3.2. Objetivos particulares

- a) Identificar las diferencias de desempeño, cantidad y tipo de representaciones seleccionadas para la resolución de un problema de alumnos de dos contextos socioculturales diferentes de acuerdo a la estructura y forma de presentación de un problema matemático.
- b) Identificar las diferencias de desempeño, cantidad y tipo de representaciones seleccionadas para la resolución de un problema de alumnos de dos contextos socioculturales diferentes de acuerdo al nivel de razonamiento del resolutor.
- c) Categorizar las representaciones utilizadas por los estudiantes de dos contextos socioculturales distintos.

1.4.Preguntas de investigación

- ¿Qué diferencias existen en el rendimiento, la cantidad y tipos de representación seleccionados por alumnos rurales y urbanos, para resolver un problema matemático con diferentes formas de presentación?
- ¿Cómo influye el nivel de razonamiento en el rendimiento, la cantidad y tipos de representación seleccionados por alumnos rurales y urbanos?
- ¿Qué representaciones realizan alumnos rurales y urbanos al resolver un problema matemático?

Capítulo 2. Marco teórico

En Educación Matemática, se han generado líneas de investigación que realizan estudios sobre la RP desde diferentes perspectivas; para lograr los objetivos planteados en la investigación, se hace una revisión sobre la definición y estado del arte de: problema matemático, tipos de problemas matemáticos, la noción de contexto escolar y el impacto sobre el aprendizaje de las matemáticas. También se hace una revisión sobre la diferencia entre escuelas rurales y urbanas, el uso de representaciones múltiples para la resolución de un problema y su relación que existe con la forma de presentación de un problema. Por último, se revisan estudios sobre el nivel de razonamiento que posee un alumno y su relación en el procedimiento para la resolución de un problema y el papel de la RP en los programas de matemáticas del nivel medio superior.

2.1. ¿Qué entendemos por un problema matemático?

En las clases de matemáticas independientemente de la forma como es secuenciada la clase, siempre existe el momento de “*resolver problemas*”, esto origina la siguiente cuestión ¿qué entendemos por un problema matemático? Para intentar resolver esta cuestión diversos investigadores han aportado su propia definición de problema matemático, dando origen a una definición polisémica, donde cada investigador o grupo de investigadores otorgan su definición en función del resultado de sus investigaciones (Pino, 2013), entre estas definiciones se toman las recabadas por Blanco y Pino (2015).

Para House, Wallace y Jhonson (1983) un problema matemático es:

“Una situación que supone una meta para ser alcanzada donde existen obstáculos para alcanzar ese objetivo que requiere deliberación, y se parte del desconocimiento del algoritmo útil para resolver el problema. La situación es usualmente cuantitativa o requiere técnicas Matemáticas para su solución, y debe ser aceptado como problema por alguien antes de que pueda ser llamado problema (p. 10)”.

Blanco (1993a), propone la siguiente definición:

“Un problema matemático es una situación en la que se formula una tarea que debe ser desarrollada, y en la que, en un ambiente de discusión, de incertidumbre y de comunicación se pretende alcanzar unos objetivos. En este propósito cuantitativo o no, pero que debe requerir técnicas Matemáticas, el proceso a seguir no debe ser conocido inmediata y

fácilmente. Se requiere en todo caso una voluntad de atacar el problema provocado, por la necesidad de la solución o bien por algún tipo de motivación”.

Para Carrillo (1998), un problema matemático puede definirse como:

“El concepto de problema debe asociarse a la aplicación significativa (no mecánica) del conocimiento matemático a situaciones no familiares, la consciencia de tal situación, la existencia de dificultad a la hora de enfrentarse a ella y la posibilidad de ser resuelta aplicando dicho conocimiento (p. 87)”.

Por último, citamos la definición de Diaz y Poblete (2001):

“Una tarea es un problema matemático para el alumno si ella requiere de una solución bajo ciertas condiciones específicas, si éste comprende el problema, pero no encuentra una estrategia inmediata para su solución, y, finalmente, si es motivado para buscar la solución (p. 34)”.

De las definiciones anteriores podemos establecer que, aunque existe un carácter polisémico sobre la definición de problema matemático, existen tres características que tienen en común las definiciones y, por lo tanto, deben caracterizar a un problema matemático: a) Es una tarea que no muestra una estrategia o algoritmo inmediato para su solución, b) Origina en el alumno una motivación para su resolución, c) para su solución es necesario la aplicación de algún conocimiento matemático.

2.2. Tipos de problemas matemáticos

De forma similar a la definición de problema, existen muchos intentos de formular una tipología de problemas matemáticos; uno de los primeros intentos que tomó importancia fue realizado por Borasi (1986) ella realiza su clasificación tomando elementos estructurales como:

- a) el contexto del problema (la situación en que se enmarca el problema, pudiendo ser real o imaginario).
- b) la formulación del problema (si está definida, parcialmente o no definida).
- c) conjunto de soluciones que pueden considerarse como aceptables (única o múltiples).

d) método de aproximación que puede utilizarse (con algoritmos conocidos o la formulación de uno nuevo).

Para lograr los objetivos de esta investigación se revisan tipologías que toman en cuenta tres aspectos principales: el contexto del problema, la forma de presentación y el nivel de dificultad para encontrar el procedimiento para solucionar el problema.

Blanco (1993b) realiza una clasificación, tomando como aspecto principal de categorización la complejidad en la RP matemáticos y como auxiliares a elementos de estructura y presentación del problema al alumno.

Otra clasificación es formulada por Rodríguez (2006), la cual parte de la característica de que el problema no pueda ser resuelto de manera inmediata, de forma consistente con la definición de problema matemático, la cual categoriza como una variable; “el bloqueo”.

Por último, se considera la clasificación de Diaz y Poblete (2001), los cuales realizan una categorización entre la naturaleza del problema y la forma en que estos se presentan al alumno. A continuación, se presenta una síntesis de cada una de las clasificaciones.

2.2.1. Clasificación de Blanco (1993b)

Para Blanco (1993b), las tareas matemáticas que comúnmente se les pide a los alumnos que realicen se dividen en:

- a) **Ejercicios de reconocimiento.** Este tipo de ejercicios, tienen el objetivo de resolver, reconocer o recordar un factor específico, una definición o una proposición de un teorema.

Ejemplos de ellos son:

- a. $3x - 2 < 2x + 1$, ¿Falso o verdadero?
- b. Si a es positivo y b es negativo, $a*b$ es ¿positivo o negativo?

- b) **Ejercicios algorítmicos o de repetición.** Son aquellos que pueden ser resueltos con un proceso algorítmico, a menudo numérico. Ejemplo de este tipo de ejercicios son:

- a. ¿Cuánto vale x en la ecuación $3x + 5 = -10$?
- b. ¿Cuánto vale la hipotenusa de un triángulo rectángulo que tiene por catetos 3 y 5 cm respectivamente?

- c) **Problemas de traducción simple o compleja.** Son problemas formulados en un contexto concreto y cuya resolución supone una traducción del enunciado a una expresión

matemática; en dicho enunciado aparece toda la información necesaria para la resolución del problema, con el fin de seleccionar el algoritmo adecuado, por lo que existen dos trabajos a elaborar, la comprensión y traducción del enunciado por una serie de traducciones simbólicas o ecuaciones y la posterior resolución de la traducción por medio de algoritmos matemáticos. Estos problemas son comunes en los libros de texto. Por ejemplo:

- a. En una reunión hay 49 personas, hay el doble de mujeres que de hombres y el número de niños es el cuádruplo del número hombres. Hallar cuantos hombres, mujeres y niños hay en la reunión.

d) **Problemas de procesos.** En este tipo de problemas, la forma de cálculo no aparece claramente delimitada, dándose la posibilidad de realizar varios procedimientos diferentes para encontrar la solución, donde se intentan ejemplificar los procesos inherentes a su solución, ayudando a desarrollar estrategias generales de RP. Por ejemplo:

- a. En un club de ajedrez hay 15 miembros. Si cada uno juega una partida contra cada uno de los demás miembros, ¿Cuántas partidas podrían jugarse?

e) **Problemas sobre situaciones reales.** Son actividades lo más cercanas a situaciones reales que requieran el uso de habilidades, conceptos y procesos matemáticos o bien, estos pueden jugar un papel importante para dar solución, donde lo más importante es la construcción de procesos y análisis para la toma de decisiones con el fin de comprender la relación entre las matemáticas y la realidad. Ejemplo de esto es el siguiente enunciado:

- a. ¿Cuál sería el costo de cambiar los azulejos actuales de los salones y los pasillos de la escuela por unos más grandes?

f) **Problemas de investigación matemática.** Son problemas relacionados con contenidos matemáticos, cuyas proposiciones pueden no contener ninguna estrategia para su representación, suelen utilizar las expresiones: “probar que...”, “encontrar todos los...”, etc. Ejemplo:

- a. Probar que, si los tres últimos términos de una progresión aritmética es 36, el término medio vale 12.

2.2.2. Clasificación de Rodríguez (2006)

Como se menciona anteriormente, Rodríguez (2006) realiza una clasificación tomando como variable al “**bloqueo**”, el cual se define como la característica de un problema que no permite que pueda ser resuelto de manera inmediata. Así, clasifica las tareas matemáticas en función de su

naturaleza y el “bloqueo”, es decir, si las tareas implican una modelización o no; lo anterior origina la siguiente clasificación:

2.2.2.1. Tareas problemáticas. Son aquellas donde se realiza una transferencia del conocimiento de tipo exploratorio, donde las características son diferentes a las que se ha aprendido, y por lo tanto el conocimiento se puede aplicar en una variedad de contextos diferentes. No son de tipo algorítmico ni rutinarias. Estas a su vez se clasifican en:

2.2.2.1.1. De modelización. Tanto la modelización como la ejecución son necesarias.

2.2.2.1.2. De ejecución. Sólo implican ejecución y esta es de carácter rutinario.

2.2.2.1.2.1. Contextualizadas. Se hace referencia en la tarea a la situación que modeliza.

2.2.2.1.2.2. Descontextualizadas. No se hace referencia a alguna situación que modelizan.

2.2.2.2. Tareas de práctica. Son de tipo algorítmico, donde el sujeto que va a resolver la tarea conoce, con carácter rutinario y estático, los pasos a seguir para llegar a la solución, los cuales son practicados para llegar a la solución. Esto implica que el alumno sólo aplica un conocimiento conceptual y rígido con una transferencia de conocimientos de forma analítica. Estas a su vez se pueden clasificar en:

2.2.2.2.1. De modelización. Tanto la modelización como la ejecución son necesarias.

2.2.2.2.2. De ejecución. Sólo implican ejecución y esta es de carácter rutinario.

2.2.2.2.2.1. Contextualizadas. Se hace referencia en la tarea a la situación que modeliza.

2.2.2.2.2.2. Descontextualizadas. No se hace referencia a alguna situación que modelizan.

2.2.2.3. Tareas mixtas.

2.2.3. Clasificación de Diaz y Poblete (2001)

La clasificación, toma en cuenta como elementos de diferenciación la naturaleza y el contexto del problema, los cuales se clasifican en:

a) **Problemas rutinarios.** Son problemas similares a los que se han desarrollado durante el desarrollo de la instrucción, donde el alumno efectúa secuencias y aplica algoritmos para llegar a soluciones válidas. De acuerdo a su contexto en que son presentados estos se dividen en:

a.1. **Problemas de contexto real:** si es una situación que se produce en la realidad y compromete al alumno actuar. Por ejemplo: “Mide con un hilo el diámetro y la

longitud de la circunferencia de tres monedas de distinto tamaño. Establece la razón entre el diámetro y la longitud de cada moneda. ¿Qué puedes concluir de estas razones?

a.2.**Problemas de contexto realista.** Son problemas que provienen de una simulación de la realidad o de una parte de la realidad. Por ejemplo: “Una lavadora industrial, trabajando 8 horas diarias durante 6 días, ha lavado 1200 kilos de ropa. ¿Cuántos kilos de ropa lavará en 20 días trabajando 10 horas diarias?

a.3.**Problemas de contexto fantasista.** Son aquellos cuyo origen son fruto de la imaginación y no se pueden reproducir en la realidad.

a.4.**Problemas de contexto puramente matemático.** Estos son aquellos que hacen referencia exclusivamente a objetos matemáticos. Por ejemplo: “Si los catetos de un triángulo rectángulo son 3 y 5 cm respectivamente. ¿Cuál es el valor de la hipotenusa?

b) **Problemas no rutinarios.** Son aquellos en los cuales, el alumno no conoce una respuesta ni un procedimiento previamente establecido o rutina para poder encontrar la solución, estos también de acuerdo a su contexto pueden ser clasificados en reales, realistas, fantasistas y puramente matemáticos.

2.3. El papel de la RP en los programas de matemáticas de nivel media superior

El sistema educativo mexicano está basado en competencias (SEP, 2009); en el perfil de egreso se espera que un individuo al término de su educación media superior tenga desarrolladas ciertas competencias denominadas “genéricas”, que a definición de la Secretaría de Educación Pública (SEP, 2009) son:

“Son competencias clave, por su importancia y aplicaciones diversas a lo largo de la vida; transversales, por ser relevantes a todas las disciplinas y espacios curriculares de la EMS, y transferibles, por reforzar la capacidad de los estudiantes de adquirir otras competencias”.

Del total de competencias genéricas, hay dos que tienen una relación muy fuerte con la formación matemática que reciben en las escuelas: “Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados” y “Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos

establecidos” (SEP, 2009). Lo anterior establece que el aprendizaje de los alumnos debe tener como uno de sus actividades principales la RP. Por otro lado, la Secretaría de Educación Pública (SEP), también estableció competencias específicas para cada disciplina del conocimiento que se enseña en el nivel medio superior; en el caso de matemáticas dos competencias disciplinares son:

“Formula y resuelve problemas matemáticos aplicando diferentes enfoques” y “Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación”. (SEP, 2009)

En 2017 surgió un nuevo modelo educativo que propone que los alumnos deben tener ciertas habilidades para responder a los desafíos que enfrentaran a lo largo de su vida, entre los cuales se encuentra la RP, objetivo que se establece en los planes de estudio de referencia de la educación Media Superior. Para ello solicita que los docentes en su trabajo diario incorporen prácticas pedagógicas, especialmente la RP entre pares con ayuda del profesor. En el currículo de matemáticas (SEP, 2017), se expresa lo siguiente:

“Las competencias reconocen que a la solución de cada tipo de problema matemático corresponden diferentes conocimientos y habilidades, y el despliegue de diferentes valores y actitudes. Por ello, los estudiantes deben poder razonar matemáticamente, y no simplemente responder ciertos tipos de problemas mediante la repetición de procedimientos establecidos. Esto implica el que puedan hacer las aplicaciones de esta disciplina más allá del salón de clases (p.49)”.

Por otro lado, se menciona que:

“La garantía del aprendizaje no refiere únicamente a la correcta aplicación del conocimiento aprendido, sino refiere a la habilidad de significar al objeto matemático mediante sus usos.... Por lo tanto, se considera que las personas saben matemáticas, si pueden ponerla en uso dentro y fuera de la clase de Matemáticas, dentro y fuera de la escuela (no basta entonces, con resolver problemas típicamente escolares mediante técnicas más o menos sofisticadas) (P.68) (SEP, 2017)”.

En el nivel medio superior, la RP es visto como una habilidad, de tipo transversal, que tiene una dualidad de aplicación de conocimiento adquirido y también de generación de conocimiento nuevo, la cual tiene como finalidad que los individuos puedan dar resolver situaciones que se presenten en su vida diaria de manera que mejoren su calidad de vida. Lo anterior implica que la RP, debe ser una actividad que verdaderamente promueva la creación de estrategias de resolución más allá de la algoritmia o la mecanización, y enfrente a los individuos a situaciones descritas como “no rutinarias”.

2.4. La influencia del contexto sociocultural en la RP

El uso de la palabra contexto en la educación matemática tiene dos formas principales: las características de como un problema es presentado (Díaz y Poblete, 2001) o las influencias sociales de las estructuras de valores y poder. En esta sección revisaremos la segunda definición.

Oliveras (1996) menciona que cada cultura construye una realidad “contextualizada”, por lo que cada sociedad tiene su propio contexto, así pues, el ser humano, por su naturaleza social, no puede ser separado de su contexto; ocasionando que el conocimiento que se genera y que se aprende no puede ser abstraído o separado de dicho contexto, debido a que cada cultura le atribuye una significación propia.

Barton (2012) sostiene que la matemática existe en el momento en que un cierto grupo de personas da sentido a “un sistema que trata los aspectos cuantitativos y cualitativos espaciales y relaciones de la experiencia”. Esto supone que cada grupo que tenga un contexto propio, diferente al de otros grupos, tendrá formas diferentes de aplicar, enseñar y aprender el conocimiento matemático.

Resnick (1989) hace un estudio sobre las diferencias entre el aprendizaje que sucede dentro y fuera de la escuela, donde concluye que la escuela debe revisar sus funciones cívicas culturales, las cuales deben ayudar a crear habilidades que puedan ser utilizadas en cualquier contexto académico o no académico, originando que cada país debe elaborar su currículo educativo basado en sus necesidades sociales, culturales y económicas porque existen diferencias de estos ámbitos entre países. Lo anterior permite expresar que, si existen diferencias socioculturales entre países, también lo puede haber entre dos comunidades distintas de un mismo país, por lo que el rendimiento académico puede ser influenciado por las condiciones socioculturales de la comunidad.

Estudios muestran que niños de contextos diferentes desarrollan de manera distinta las mismas tareas de pensamiento, de modos que los contextos socioculturales constituyen un componente en el desarrollo cognitivo (Carraher, Carraher y Schliemann, 1985).

Desde el punto de vista del análisis teórico proveniente principalmente de la psicología social, se propone que existe una relación muy estrecha entre el conocimiento matemático aprendido por parte de los individuos y el contexto sociocultural en el que se encuentra dicho individuo.

En el mismo sentido, Saxe (1992) realizó un estudio sobre cómo influyen las prácticas diarias de un contexto sociocultural determinado en la forma en como los estudiantes utilizan conocimientos y asimilan nuevos, realizando comparaciones entre dos grupos de alumnos; el primer grupo es una tribu de Nueva Guinea y el segundo grupo proviene de una escuela de la ciudad de los Ángeles en Estados Unidos. Para poder realizar la comparación toma tres parámetros; los cuales son:

1. *Análisis de los conocimientos adquiridos por los niños que ocurren en las prácticas culturales.* Los niños, pueden cambiar sus conocimientos o assimilar nuevos a través de las interacciones que tienen durante la realización de las prácticas sociales. Por ejemplo, los niños de Nueva Guinea aprenden técnicas de conteo a través de un sistema de conteo con base en las partes de su cuerpo, por consiguiente, una suma la realizan con prácticas de conteo en lugar de lugar de técnicas de adición; sin embargo, a través de la introducción de la interacción basada en la economía local, los niños comienzan a buscar equivalencias de sus sumas en las partes de su cuerpo. En cambio, los alumnos de Los ángeles logran ese mismo cambio, pero a una edad más pequeña debido a que tienen prácticas sociales como vender sus juguetes, comercializar cartas de beisbolistas o ayudar a sus madres en la compra de los víveres.
2. *Análisis de la relación que existe entre las actividades que realizan los niños para lograr objetivos y el desarrollo de nuevos conocimientos.* A menudo, con el objetivo de resolver una situación en una práctica social, los niños especializan formas culturales ya apropiadas como vehículos simbólicos para ayudar a funciones cognitivas particulares. Por ejemplo, en los niños de Nueva Guinea tras enfrentar la economía basada en el dinero, adaptan el sistema que tienen de numeración de las partes del cuerpo como la equivalencia de sumas para poder realizarlas de manera más rápida, a nuevas estrategias que les permiten solucionar situaciones.

3. *Análisis de la interacción entre los conocimientos desarrollados a través de prácticas culturales.* Este componente implica la manera en cómo los conocimientos se vinculan con la participación de los niños en una práctica determinada.

El autor termina concluyendo que los niños de Nueva Guinea debido a sus prácticas sociales en su contexto, tienen un conocimiento de conteo, mientras que niños de similar edad de Los ángeles, ya obtienen conocimientos sobre la adición debido a sus actividades basadas en prácticas de economía que realizan a temprana edad. En otro estudio Saxe y Gearhart (1990) indican bajo el mismo análisis, que algunos niños del noreste de Brasil tienen una mayor habilidad en la solución de problemas que implican el uso de habilidades espaciales o geométricas, debido a que son entrenados en el oficio del tejido de palma, sin embargo, no desarrollan habilidades diferentes a la representación geométrica, como la argumentación oral, mientras que alumnos rurales si pueden realizar una argumentación oral, pero les es difícil comparar medidas o figuras, debido a que no tienen un habilidad espacial tan desarrollada como los alumnos rurales. Sin embargo, en todos los casos, el autor afirma que existe siempre un mayor rendimiento de los alumnos urbanos, al realizar la comparación con alumnos rurales.

2.5. ¿Qué hace diferentes a las escuelas rurales y urbanas?

La Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE), distingue a las comunidades rurales y urbanas en función de su población, las comunidades con más de 100,000 habitantes son considerados como centros urbanos, por lo que los menores a 100,000 son considerados como comunidades rurales; la misma organización hace una evaluación estandarizada para los alumnos de cierto número de países con el objetivo de medir el rendimiento en competencia matemática; esta evaluación tiene el nombre de PISA (OCDE, 2016a). En la tabla 1, se muestra el rendimiento obtenido en México en la prueba 2015, de acuerdo al tipo de localidad (Rural y urbana).

Localidad de ubicación de la escuela	Escuelas privadas		Escuelas Públicas		Promedio por localidad
	Promedio	Error estándar	Promedio	Error estándar	
Villas (menos de 3000 hab.)	-	-	371	5.0	385
Pueblo pequeño (3 000 a 15 000 hab.)	-	-	398	7.4	
Pueblo (15 000 a 100 000 hab)	412	13.5	414	6.7	
Ciudad (100 000 a 1 000 000 hab)	436	9.8	412	4.5	425
Ciudades grandes (más de 1 000 000 hab)	447	16	427	6.0	

Tabla 1 Puntaje promedio y error estándar de escuelas de México según su tipo de sostenimiento y la localidad en la que se ubican. Fuente OCDE, (2019)

En la Tabla 1 se puede observar cómo claramente, los estudiantes que asisten a escuelas en áreas urbanas obtienen mejores resultados respecto de otros estudiantes. Esto también se observa en la diferencia en puntaje obtenido entre los alumnos urbanos y rurales de México, siendo de 40 puntos; que según estimaciones de la propia OCDE equivale a un año entero de escolaridad de brecha (OCDE, 2016b).

Las causas de esta brecha según OCDE (2016b) son:

- El estatus socioeconómico debido a condiciones de vivienda y empleo drásticamente diferentes.
- Las escuelas en zonas urbanas son más grandes, tienden a beneficiarse de mejores recursos educativos, y generalmente pueden ejercer mayor autonomía en la asignación de dichos recursos.
- Particularmente en México, las escuelas urbanas obtienen mejores recursos en calidad y cantidad, tienen un clima disciplinario más ameno que promueve mejor el aprendizaje, son escuelas de mayor tamaño lo que implica una infraestructura mayor, hay una mayor responsabilidad para cubrir el currículo y estrategias de evaluación, pueden acceder a una mayor cantidad de material educativo, tienen una menor escasez de profesores y una mayor oferta de actividades extraescolares.

Por último, los resultados de la prueba PISA, muestran que los estudiantes en escuelas urbanas generalmente obtienen mejores resultados que aquellos que asisten a escuelas en zonas no urbanas. Mientras que la diferencia de rendimiento está relacionada con el estatus socioeconómico de los estudiantes, también está asociada con algunas características que distinguen a las escuelas urbanas, como la disponibilidad de mejores y más recursos, mayor autonomía en la asignación de los recursos y una oferta adecuada de profesores.

2.6. Nivel de abstracción de los problemas aritméticos en alumnos urbanos y rurales

Díaz y Bermejo (2007) realizaron un estudio sobre las diferencias en el rendimiento y las estrategias que eligen alumnos rurales y urbanos en la RP, con el objetivo de estudiar la incidencia que tiene el grado de abstracción. La muestra se conformó con 192 alumnos de 1° a 4° grado de primaria, donde el 50% de los alumnos pertenecen a un contexto rural y 50% pertenecen a un contexto urbano. El estudio consistió en la aplicación de 16 problemas aritméticos durante dos sesiones, bajo cuatro niveles de abstracción: objetos, dibujos, algoritmos y problemas verbales. Los resultados muestran una tendencia evolutiva que marca el rendimiento de los alumnos, pues esta mejora sensiblemente a medida que se avanza de grado escolar, así mismo se muestra una mejora en la abstracción. Aunque significativamente no existen diferencias entre el rendimiento de alumnos rurales y urbanos, se puede notar si una diferencia en la elección de las estrategias seleccionadas para resolver el problema, los alumnos rurales suelen utilizar la estrategia de modelado directo de modo parecido a lo largo de los cuatro años, mientras que los urbanos recurren a ella sobre todo durante los dos primeros cursos. En cuanto a las estrategias de conteo, los alumnos rurales las emplean con mayor frecuencia que los urbanos en los cursos más avanzados, mientras que las de hechos numéricos se desarrollan progresivamente a medida que avanzan los cursos escolares, siendo especialmente frecuente su empleo en los niños urbanos, sobre todo en los niveles verbal y numérico. Lo anterior pudiera afirmar la idea sobre que, si bien podría no existir diferencias en rendimiento entre alumnos rurales y urbanos, si existe en dos aspectos: los alumnos rurales se especializan en un tipo de estrategia, mientras que los urbanos tienden a hacer uso de más de una estrategia; es decir, el contexto podría influir en como los alumnos intentan resolver un problema.

2.7. Los procesos cognitivos, la metacognición y su relación con la RP

La RP, es una actividad que muchos profesores otorgan una gran importancia durante el proceso de enseñanza-aprendizaje; así mismo en la RP, se hace una combinación entre el conocimiento de la materia, el conocimiento de las estrategias y un componente actitudinal (Solaz y Sanjose, 2008). Ferguson-Hessler y de Jong (1990), presentan un esquema sobre los distintos tipos de conocimientos requeridos para poder resolver problemas en las clases de ciencias y matemáticas:

- **Conocimiento situacional:** Los alumnos lo utilizan para extraer la información relevante del enunciado de un problema; a través del reconocimiento de situaciones propias de una disciplina específica.
- **Conocimiento declarativo o conceptual:** son aquellos hechos o principios estáticos que conocen sobre ciertas disciplinas.
- **Conocimiento procedimental:** Son las acciones o manipulaciones que son válidas dentro de una disciplina.
- **Conocimiento estratégico:** es la organización de los procesos que se efectúan durante la resolución de un problema y los pasos a seguir para alcanzar una solución.

Estos conocimientos en combinación son la clave del éxito en la RP y hacen la diferencia entre expertos y novatos resolutores de problemas, sin embargo, existen procesos cognitivos que también influyen en la actividad de RP.

2.8. Procesos cognitivos

Como es indispensable la aplicación de ciertos conocimientos, en el momento de resolver problemas, varios estudios han mostrado que existen “variables cognitivas”, que intervienen en la RP y que, por consecuencia, influyen en el desempeño (Solaz y Sanjose, 2008).

Con base en el párrafo anterior, conviene entonces analizar los procesos cognitivos relacionados con la RP; Solaz y Sanjosé (2008), afirman que son los siguientes: a) razonamiento formal, b) construcción de modelos mentales, c) la transferencia de aprendizajes y d) la metacognición. En esta investigación nos centraremos en dos: el razonamiento formal y la metacognición.

2.8.1. Pensamiento formal

El pensamiento formal, según Piaget, es el desarrollo de la capacidad del pensamiento abstracto, y se relaciona con la capacidad por parte del estudiante de abstraer, conjeturar, relacionar y analizar, consideradas básicas en la enseñanza de las matemáticas y otras ciencias (Corona *et al*, 2012). Así mismo, Xochitiotzi, Corona y Slisko (2012), afirman que:

“Las operaciones formales se basan en representaciones proposicionales de los objetos más que en los objetos mismos. Las operaciones formales permiten no sólo buscar explicaciones de los hechos que vayan de la realidad aparente sino, además, someterlas a comprobaciones sistemáticas, la formulación y la comprobación de hipótesis. Están estrechamente vinculadas y diferencian al pensamiento formal de los pensamientos elementales, en los que las explicaciones de los hechos no pasan de conjeturas o suposiciones ya que no son sometidas a comprobación (experimentación, evaluación de casos o situaciones percibidas).”

El desarrollo cognitivo según Rafael (2007), es:

“...El conjunto de transformaciones que se producen en las características y capacidades del pensamiento en el transcurso de la vida y de su desarrollo, y por el cual aumentan los conocimientos y habilidades para percibir, pensar, comprender y manejarse en la realidad”.

Este desarrollo, como ocurre de manera longitudinal a través del transcurso de vida de los individuos, puede ser cuantificado y clasificado a través de niveles. Dichos niveles pueden ayudar a comprender como los individuos interpretan el mundo dependiendo su edad (Rafael, 2007). Existen muchas categorizaciones, sin embargo, la que desarrolló Lawson nos ayuda a comprender como se interpretan los conocimientos científicos y matemáticos en los individuos y como se aplican en la RP. Ates y Cataloglu (2007, citado en Díaz, 2012) expresa que en la clasificación de niveles cognitivos de Lawson existen tres niveles jerárquicos, de manera longitudinal, los describen de la siguiente manera:

- “*Empírico–Inductivo (Concreto)*: Estudiantes que no son capaces de testear hipótesis involucrando agentes causales observables. Pueden llevar a cabo experimentos mentales. Las operaciones que usa son concretas, se relacionan directamente con objetos y no con hipótesis verbalizadas”.
- “*Transición o Intermedio (Transición)*: Para desarrollar este estado debe haber desarrollado previamente el pensamiento concreto. Estudiantes inconsistentemente capaces de testear hipótesis involucrando agentes observables causales. En este estado el individuo es capaz de razonar con proposiciones sin la necesidad de objetos, formular hipótesis y probarlas”.
- “*Hipotético–Deductivo (Reflexivo)*: Estudiantes consistentemente capaces de testear hipótesis involucrando agentes causales observables o estudiantes capaces de testear hipótesis involucrando entidades que no están observando. Un pensador formal puede formular hipótesis y probarlas”.

2.8.2. Definición y componentes de la metacognición

Según Mateos (2001) la metacognición se define como:

“El conocimiento que uno tiene y el control que uno ejerce sobre su propio aprendizaje y, en general, sobre la propia actividad cognitiva. Se trata de ‘aprender a aprender’ facilitando la toma de conciencia de cuáles son los propios procesos de aprendizaje, de cómo funcionan y de cómo optimizar su funcionamiento y el control de esos procesos.”

Según Flavell, citado por Heit (2012) el conocimiento metacognitivo implica la relación entre:

- Persona: las tareas que demandan alguna tarea cognitiva implican conocimientos y creencias sobre las características de los sujetos involucrados (a nivel individual e interpersonal)
- Tarea: se debe conocer la amplitud, el grado de dificultad, así como la naturaleza y demandas de la tarea, para poder establecer los procedimientos necesarios para su ejecución y resolución.
- Estrategias: es saber sobre las posibilidades de abordar el control de la ejecución de la tarea para conseguir las que esta implica.

Existen diversos estudios que prueban que existe una relación muy fuerte entre la metacognición y la RP. Los alumnos con un mayor nivel de habilidades metacognitivas pueden resolver problemas con mejor rendimiento y menor tiempo. Se establece que habilidades como la planeación, el monitoreo y la evaluación son aquellas que tienen una mayor importancia en el desempeño y rendimiento de los estudiantes durante la RP (Gök y Silay, 2010).

2.9. El concepto de representación en la educación matemática

Rico (2009) indica que en la década de los 80 se comienza con un uso sistemático de la noción de representación en la educación matemática. En dichos estudios se toma a la representación como una equivalencia a una señal que muestra y hace presente un concepto matemático o bien como los esquemas o imágenes mentales con los que se trabajan ideas matemáticas. Las representaciones se han entendido como todas aquellas herramientas (signos o gráficos) que hacen presente los conceptos y procedimientos matemáticos y con los cuales los sujetos particulares abordan e interactúan con el conocimiento matemático, es decir, registran y comunican su conocimiento sobre las matemáticas. Mediante el trabajo con las representaciones, las personas asignan significados y comprenden las estructuras matemáticas (Radford, 1998). La representación supone una dualidad, entre el objeto representante (símbolo o representación) y el objeto representado (concepto matemático) por lo que existe una correspondencia entre los objetos representantes y el mundo de los objetos representados (Rico, 2009). Kaput (1987 citado en Rico, 2009), señala lo siguiente:

“Cualquier representación debiera describir, al menos, cinco entidades:

1. los objetos representados,
2. los objetos representantes,
3. qué aspectos del mundo representado se representan,
4. qué aspectos del mundo representante realizan la representación,
5. la correspondencia entre ambos mundos o conjuntos.

En buena parte de los casos importantes uno o ambos de los mundos pueden ser entidades hipotéticas e, incluso, abstracciones. (p. 23)”

Utilizar representaciones es una práctica, la cual consiste en cambiar de aspecto un mismo dato para poder visualizarlo de otro modo, una manera de tratar lo percibido y lo pensado. Así cada concepto matemático está establecido por sus diferentes significados y usos, y por lo tanto por diversas representaciones. Esto desde un punto de vista cognitivo, implica que para que un concepto o estructura matemática pueda ser comprendido en su totalidad, necesita el empleo de más de un sistema de representación, debido a que ciertas características del concepto son resaltadas por una representación en particular. Es por ello que se deben estudiar varias representaciones en cada concepto (Rico, 2009). Aceptar que para comprender un objeto matemático es necesario emplear diversas representaciones, lleva a la necesidad de considerar las relaciones entre los diversos sistemas de representación para un mismo objeto, una traducción o una conversión entre diversos sistemas de representación.

2.10. El uso de las representaciones múltiples en RP

2.11. La importancia de las representaciones en RP

La RP es una vía a través de la cual se puede justificar que las matemáticas pueden ser útiles y aplicables en la vida real. Al igual que la definición de problema, el término RP tiene un carácter polisémico, pero puede establecerse que es un proceso del pensamiento, donde se aplican conocimientos previos a situaciones nuevas o poco conocidas y se intentan organizar datos y conocimientos previos en una nueva estructura mediante un proceso secuencial, con el fin de obtener un resultado final que satisface la situación. Cuando se emplea como un método de enseñanza, la RP se enseña como una destreza básica que permite el alcance de contenidos específicos, a través de la selección de diversos tipos de problemas y sus métodos de solución (Alonso y Martínez, 2003). De acuerdo a Santos (1994 citado por Alonso y Martínez, 2003), las actuales tendencias sobre el uso de la RP en las clases de matemáticas son:

- La existencia de un momento en el inicio o en el final de un tema, identificado como “RP”, donde se discuten o presentan estrategias.
- El uso de problemas seleccionados para aplicar los contenidos tratados, después de que han sido presentados de forma abstracta. Este proceso involucra la mecanización de los algoritmos y se puede caer en la simulación del algoritmo en ejercicios más que promover La RP.

- RP como un método de enseñanza, donde se discuten las ideas, se realizan conjeturas, se realiza el uso de ejemplos y contraejemplos y la propuesta de diversos métodos para resolver los problemas.

Diversos estudios han concluido que el éxito en la RP depende en gran medida de la cantidad y el tipo de representaciones que tiene un resolutor en el momento de la RP (Castro, 2008; DeBellis y Goldin, 2006). Además, para ser un “experto resolutor de problemas”, no solo se necesita de la representación del concepto por sí misma, si no también que estas representaciones sean correctas y estén fuertemente vinculadas entre sí, para que en el momento en que sea necesario, poder cambiar de un tipo de representación a otra (Villegas, Castro y Gutiérrez, 2009). En conclusión, las representaciones y las conexiones que se realizan entre distintos tipos de representación son factores determinantes para diferencias entre un resolutor “Experto” como aquel que puede elegir el tipo de representación más adecuada para resolver problemas y un resolutor “Novato” que sostiene que sólo un tipo de representación puede bastar para resolver distintos tipos de problemas.

2.12. La relación entre el rendimiento sobre la resolución de un problema y el formato de presentación

En párrafos anteriores se menciona que, para resolver un problema matemático es necesario el uso de diversas representaciones de los conceptos matemáticos y las relaciones que existen entre estas. Esto origina que sea justificable buscar qué estudios determinan el papel que juegan diversas representaciones en el aprendizaje de los alumnos.

El rendimiento en RP es una línea de investigación reciente en la educación matemática y en la enseñanza de la física. Las investigaciones han mostrado que el uso de múltiples formas de representación en la enseñanza de las matemáticas y la física, tienen un gran potencial en la RP (Meltzer, 2005). El autor utiliza el término de “representación”, como una de las variadas formas en las cuales un concepto puede ser comprendido y comunicado. Las propiedades de una representación influyen en qué información se atiende y cómo las personas tienden a organizar, interpretar y recordar la información presentada. El valor de las representaciones depende de la *eficiencia informal* refiriéndose a cómo las representaciones organizan la información dentro de estructuras de datos y de la *eficiencia computacional* refiriéndose a la rapidez y la facilidad con que se pueden realizar inferencias sobre una representación (Kolloffel, Eysink, De Jong y Wilhelm, 2009).

Las representaciones más utilizadas y de mayor interés en la educación matemática son las verbales, pictóricas, numéricas, simbólicas y analíticas. Las representaciones verbales se sirven del lenguaje natural para referirse a los conceptos y procedimientos matemáticos a representar. Las representaciones pictóricas utilizan únicamente recursos visuales, sin ninguna notación que pueda considerarse de carácter simbólico (Cañadas y Figueiras, 2011). Las representaciones numéricas se sirven de números y operaciones expresados mediante lenguaje matemático. Las representaciones simbólicas se caracterizan por el uso del simbolismo algebraico, siendo las representaciones que suponen un mayor grado de abstracción para los estudiantes. Las representaciones analíticas parten de análisis cualitativos sobre el fenómeno, donde por lo regular parten de un conocimiento previo como una fórmula donde ellos identifican las variables y las constantes involucradas, se diferencian de las simbólicas, porque parten de convenciones que fueron establecidas por agentes externos (profesores, libros) (Corona et al, 2012). Así mismo, tenemos en cuenta las representaciones múltiples o sintéticas, que resultan de la combinación de dos o más representaciones diferentes (Kolloffel *et al*, 2009).

El formato de representación en el cual se muestra un problema podría influir en la manera cómo los estudiantes pueden seleccionar, organizar e integrar la información presentada, por ejemplo, una representación gráfica podría resumir o resaltar información esencial, hacer relaciones entre elementos y organizar información en estructuras coherentes; en una representación aritmética existe un énfasis en aspectos operatorios sobre aquellos conceptuales o situacionales; una representación verbal se podría utilizar para permitir analizar y comprender declaraciones de un problema (Kolloffel *et al*, 2009).

Dufresne, Gerace y Leonard (1997) indican que cuando estamos resolviendo y analizando un problema, cada uno de nosotros construimos una representación del problema mediante la interpretación y la asociación entre diferentes tipos de conocimientos, los cuales pueden ser ecuaciones, procedimientos, imágenes asociadas y problemas relacionados. La forma en como el problema es representado puede determinar qué tan fácil puede ser resuelto y qué aprendizaje se obtuvo del proceso. Para mejorar este proceso se sugiere que los estudiantes sean “entrenados” para poder realizar múltiples representaciones de un problema en la etapa de su resolución. Una manera de lograr lo anterior es solicitando que los estudiantes resuelvan los problemas usando representaciones diferentes, y que los docentes tomen en cuenta las siguientes sugerencias:

- a) Asegurarse que los estudiantes comprenden las representaciones que se utilizan en clase a través de la clara explicitación de la construcción de la representación, para evitar que, por un poco nivel de comprensión, ellos creen que se trate de una forma muy difícil para resolver el problema.
- b) Propiciar que los alumnos realicen representaciones múltiples durante todo el curso, además de cuestionarlos acerca de cómo utilizar estas representaciones en la RP.
- c) Propiciar el uso de las múltiples representaciones para RP, sobre la enseñanza de algoritmos mecanicistas para dar respuesta a un problema.
- d) Permitir que los estudiantes reflexionen sobre su experiencia con el uso de múltiples representaciones y que también puedan dialogar con sus compañeros para identificar y etiquetar lo que ellos han aprendido de las representaciones.

Meltzer (2005) realiza un estudio, donde uno de sus objetivos fue determinar si existía una correlación entre el rendimiento sobre un mismo problema presentado en diferentes representaciones. Para ello, suministró un cuestionario con preguntas similares sobre la tercera ley Newton, pero que se encuentran en diferente presentación, en la figura 1 se puede observar que la pregunta 1 se encuentra en una representación Verbal, mientras que la pregunta 8 se encuentra en una representación diagramática (hace uso de vectores).

- #1. The mass of the sun is about 3×10^5 times the mass of the earth. How does the magnitude of the gravitational force exerted by the sun on the earth compare with the magnitude of the gravitational force exerted by the earth on the sun? The force exerted by the sun on the earth is:
- A. about 9×10^{10} times larger
 - B. about 3×10^5 times larger
 - C. exactly the same
 - D. about 3×10^5 times smaller
 - E. about 9×10^{10} times smaller

#8. Which of these diagrams most closely represents the gravitational forces that the earth and moon exert *on each other*? (Note: The mass of the earth is about 80 times larger than that of the moon.)

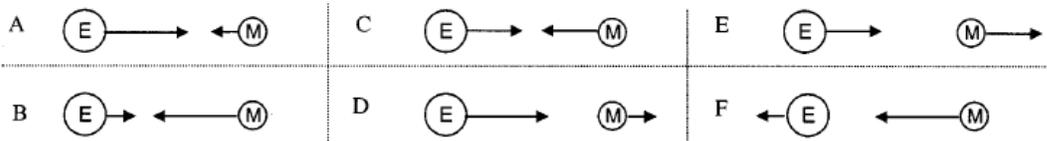


Ilustración 1: ejemplo de preguntas en diferente representación. (Meltzer,2005)

Los resultados mostraron que los alumnos respondieron de mejor manera preguntas que contenían una representación diagramática; por otro lado, alumnos que respondieron de manera correcta

preguntas que involucraban una representación verbal, respondían de manera incorrecta una pregunta de representación diagramática. Además, concluye lo siguiente:

“Algunos estudiantes respondieron de manera inconsistente a las mismas preguntas, cuando estaban presentadas en diferentes tipos de representación, pero no había patrón claro de qué tipos de representaciones eran las que obtenían un mejor rendimiento”.

“Se nota una dificultad específica para responder preguntas que fueron presentadas de forma diagramática con ayuda del uso de vectores”.

Otra línea de estudio se centra en las representaciones que realizan los alumnos para resolver un problema determinado. Corona *et al* (2012) realizaron un estudio con alumnos de nivel secundaria (15 años), preparatoria (18 años) y universidad (20 años). Se les pidió a los participantes a resolver un problema determinado realizando tres “representaciones diferentes”; para su análisis los autores las clasificaron en: “Algebraica”, “gráfica” o “analítica”. Los resultados mostraron que sólo los alumnos con un nivel cognitivo alto fueron capaces de realizar más de dos representaciones para resolver el problema. En cambio, los alumnos de secundaria sólo pudieron realizar a lo más dos representaciones. Los autores atribuyen a que el desarrollo cognitivo se correlaciona con la cantidad de representaciones utilizadas. Mientras que alumnos más abstractos pueden hacer más representaciones y se podrían convertir en resolutores expertos, los alumnos con nivel más concreto, realizan 1 o ninguna representación siendo novatos en RP. Adicionalmente los autores concluyen que no existen estrategias de resolución en los participantes.

Otro estudio de importancia fue el realizado por Cañadas y Figueiras (2011) el cual consistió en pedir a 50 niños entre 11 y 12 años que resolvieran tres problemas de combinatoria, con el objetivo de registrar sus representaciones y analizar la efectividad de las mismas. En sus resultados pusieron de manifiesto cuatro tipos de representación; a) aritmética, b) algebraica, c) textual y d) sintética (se refiere a la utilización de más de un tipo de representación con la finalidad de hacer más corto su procedimiento de solución). Los autores concluyen que los participantes en el estudio son muy influenciados por el discurso escolar acerca de la combinatoria.

Capítulo 3. Metodología

En este capítulo se expone el método con el que se realizó la investigación para lograr los objetivos planteados; se decidió que la investigación fuera de tipo exploratoria y descriptiva (Hernández, Fernández y Baptista, 2014). Así mismo, se describe la forma como se llevó a cabo el estudio, los instrumentos aplicados y cómo se realizó el análisis de los datos obtenidos.

3.1. Población del estudio exploratorio

La población objetivo de esta investigación provino de dos grupos distintos. El primer grupo estuvo compuesto de 82 alumnos (28 hombres y 54 mujeres) que se encontraban cursando el tercer año de una Preparatoria de la BUAP en la ciudad de Puebla, los cuales se denominaron como alumnos “urbanos”. Su edad oscila entre los 17 y 19 años de edad.

El segundo grupo son alumnos de un Bachillerato Tecnológico del municipio de Palmar de Bravo perteneciente al estado de Puebla. Por ser una comunidad de menos de 10 000 habitantes, se denominaron como alumnos “rurales”. El grupo estuvo conformado por 84 estudiantes (31 hombres y 53 mujeres), los cuales se encontraban cursando el tercer año de bachillerato al momento del estudio y su edad oscila entre los 17 y 19 años. Cabe resaltar que ambos grupos habían tenido un curso de física general antes de realizar la prueba.

3.2. Instrumentos de recolección de información

3.2.1. Determinación del nivel de razonamiento

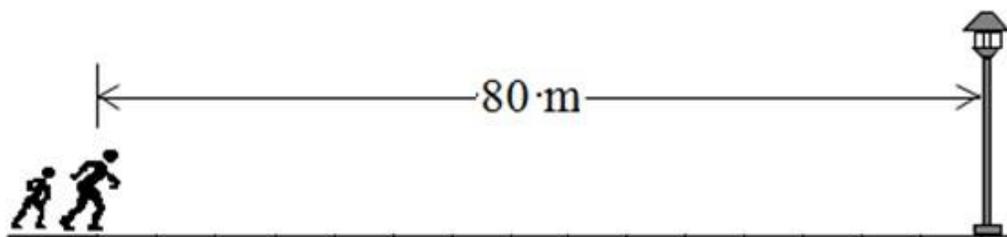
Para determinar el nivel de razonamiento, se aplicó la prueba TOLT (Test Of Logical Thinking), originalmente propuesta por Tobin y Capie (1981), la cual consta de 10 preguntas, las preguntas 1 y 2 determinan la habilidad de razonamiento proporcional; las 3 y 4, el control de variables, las 5 y 6 la probabilística, las 7 y 8 la habilidad correlacional y las 9 y 10 el razonamiento combinatorio. La prueba consiste en que los alumnos otorguen una respuesta a la tarea y además expliquen la razón por la que otorgan la respuesta. Se considera como “positiva”, si la respuesta a la tarea es correcta y la razón corresponde a la respuesta otorgada (Xochitiotzi et al, 2012). El nivel de razonamiento se determinó con base en la cantidad de respuestas correctas: **concreto (0-3), en transición (4-6) y reflexivo (7-10)**

3.2.2. Diferentes formulaciones del problema

Para obtener los datos necesarios, se usó un problema simplificado de cinemática, el cual fácilmente puede resolverse a través de distintas representaciones, donde el único concepto necesario implicado es la rapidez constante. Los problemas fueron los propuestos por Corona et al (2012). El instrumento se dividió en dos partes, la primera tiene como objetivo recoger datos sobre las representaciones que utilizan los estudiantes para resolver un problema matemático, y la segunda parte tiene como objetivo determinar las preferencias entre tres métodos de solución (algebraica, gráfica y analítica). A continuación, se presenta el instrumento:

Problema tipo 1

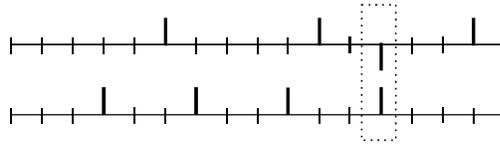
Pepe y su hermana Toña han decidido efectuar una carrera de ida y vuelta hasta un poste que se encuentra a 80 m. Pepe es más rápido y corre con una rapidez de 2.5 m/s, mientras que Toña corre a 1.5 m/s. Es claro que Pepe ganará la carrera. Durante la carrera, ¿dónde y cuándo los hermanos se encontrarán?



Realiza tres procedimientos diferentes para encontrar la solución.

Comenta las siguientes soluciones:

Graficando intervalos proporcionales a las distancias que recorren en un segundo por cada niño: ellos se encuentran cuando han recorrido cuatro intervalos, y esto es a los 60 m de la salida.



- Muy fácil, fácil, difícil, muy difícil.

Como la distancia total que recorren los niños es de 160 m y ellos recorren cuatro metros, se requieren 40 segundos para encontrarse, por lo que el punto de encuentro estará a la distancia de 60 m del punto de partida.

- Muy fácil, fácil, difícil, muy difícil.

Se reúnen después de que Toña ha viajado x metros.

$$Toña := \frac{x}{1.5} s \quad y \quad Pepe := \frac{80 + (80 - x)}{2.5} s$$

Pero éste tiempo es el mismo para ambos, así que

$$\frac{x}{1.5} = \frac{80 + (80 - x)}{2.5} s, \text{ de donde } x=60 \text{ m y } t=40 \text{ s}$$

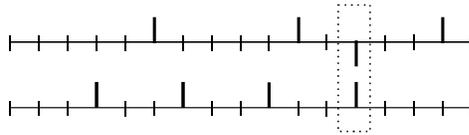
- Muy fácil, fácil, difícil, muy difícil.

Problema tipo 2

Pepe y su hermana Toña han decidido efectuar una carrera de ida y vuelta hasta un poste que se encuentra a una distancia X . Pepe es más rápido y lo hace con una rapidez de V_1 , mientras que Toña corre con rapidez V_2 . Es claro que Pepe ganará la carrera. ¿En dónde y cuándo los hermanos se encontrarán?

Comenta las siguientes soluciones del problema:

Graficando intervalos proporcionales a las distancias que recorren en un segundo por cada niño: ellos se encuentran cuando han recorrido n intervalos, y la solución se obtendrá cuando coincidan.



-
-
- Muy fácil,
 fácil,
 difícil,
 muy difícil.

Como la distancia total que recorren los niños es $2X$ m, otra forma de interpretar el problema es: el equivalente a preguntar cuando los niños se encuentran. Entonces se tiene la siguiente ecuación:

$$t(v_1 + v_2) = 2x$$

donde t es el tiempo que tardan en encontrarse. Luego se calcula la distancia que recorre en ese tiempo el niño más lento y esa es la distancia.

-
-
- Muy fácil,
 fácil,
 difícil,
 muy difícil.

Se reúnen después de que Toña ha viajado x metros.

$$\text{Toña} := \frac{x}{v_1} s \quad \text{Pepe} := \frac{X + (X - x)}{v_2} s$$

Pero éste tiempo es el mismo para ambos, así que,

$$\frac{x}{v_1} = \frac{X + (X - x)}{v_2}, \text{ de donde } x = \frac{2X}{1 + \frac{v_2}{v_1}} \quad \text{y} \quad t = \frac{x}{v_1} s$$

-
-
- Muy fácil,
 fácil,
 difícil,
 muy difícil.

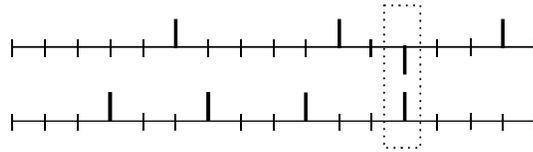
Problema tipo 3

Dos partículas con rapidez $V_1 = 2.5 \text{ m/s}$ y $V_2 = 1.5 \text{ m/s}$ son lanzadas desde el mismo punto, hacia un objeto que se encuentra a una distancia 80 m, en el que rebotan con la misma rapidez. Si las partículas se mueven en la misma trayectoria, es claro que en algún punto y momento chocarán. ¿En dónde y cuándo ocurrirá el choque?

Realiza tres procedimientos diferentes para encontrar la solución.

Comenta las siguientes soluciones del problema:

Graficando intervalos proporcionales a las distancias que recorren en un segundo por cada partícula: ellas se encuentran cuando han recorrido cuatro intervalos, y esto es a los 60 m de la salida.



- Muy fácil,
 fácil,
 difícil,
 muy difícil.

Como la distancia total que recorren las partículas es de 160 m y ellas recorren cuatro metros, se requieren 40 segundos para encontrarse, por lo que el punto de encuentro estará a la distancia de 60 m del punto de partida.

- Muy fácil,
 fácil,
 difícil,
 muy difícil.

Se reúnen después de que la primera partícula (P_1) ha viajado x metros, en ese momento abran transcurrido:

$$t_1 := \frac{x}{1.5} s \quad \text{y la segunda} \quad t_2 := \frac{80 + (80 - x)}{2.5} s$$

pero éste tiempo es el mismo para ambas, así que,

$$\frac{x}{1.5} = \frac{80 + (80 - x)}{2.5} s, \quad \text{de donde } x=60 \text{ y } t=40 \text{ s}$$

- Muy fácil,
 fácil,
 difícil,
 muy difícil.

3.3. Procedimiento de obtención de datos

Se realizaron tres subgrupos, tanto para alumnos urbanos como rurales, dando un total de 6 grupos, con la finalidad de que cada subgrupo resolviera un tipo de problema, el procedimiento de aplicación fue el siguiente:

- 1) Se les entregó el problema para que lo resolvieran en casa, indicándoles que intentaran resolverlo de tres maneras diferentes, se entregó un tipo de problema a cada grupo.
- 2) Durante la siguiente sesión se les recogió la tarea para entregarles las tres soluciones planteadas del problema, con la finalidad de que las pudieran comentar.
- 3) Después de que el alumno entregó sus comentarios acerca de las soluciones planteadas, se les proporcionó la prueba TOLT para indagar el nivel de razonamiento.

3.4. Proceso de análisis de los datos

Para realizar el análisis de los datos se siguió el siguiente procedimiento:

1. Para determinar el rendimiento se hizo una clasificación de procedimientos correctos e incorrectos por tipo de problema y tipo de representación utilizada con la finalidad de obtener los porcentajes de soluciones correctas e incorrectas por cada grupo al que se aplicaron los instrumentos.
2. Para determinar la cantidad de representaciones, se realizó una categorización preliminar en los tipos de interés para el estudio:
 - a) **algebraica:** se clasificó en este tipo cuando los alumnos establecieron ecuaciones o funciones y realizaron un tratamiento simbólico de éstas, pero no hicieron análisis cualitativos sobre el fenómeno; pudieran partir de fenómeno de rapidez constante, sin embargo, utilizan sus propias variables.
 - b) **Analítica:** se consideró como representación analítica, aquella que partió de la fórmula de rapidez constante convencionalmente utilizada en libros de texto, o bien la fórmula para el punto de encuentro; los alumnos utilizan las variables (V) para velocidad, (t) para tiempo y (D) para distancia, realizaron análisis cualitativos sobre el fenómeno.
 - c) **Gráfica:** estas representaciones son aquellas donde predominan los pictogramas o bien gráficas en una o dos dimensiones, no establecen fórmulas y no realizan tratamiento o sustitución sobre estas.

- a) **“otras”**: pudieran ser tabulares o una verbalización de la respuesta, es decir, dan la respuesta solamente utilizando un párrafo, sin incluir algún dato adicional.

Se hizo conteo para determinar la frecuencia y el porcentaje de alumnos que realizaron 1, 2 o 3 representaciones del mismo problema. Así mismo, para identificar las preferencias de elección de una representación se realizó un conteo de cómo ellos calificaban la dificultad de cada tipo de solución mostrada al siguiente día.

- 3. Para determinar el tipo de representación se determinó realizar una codificación libre de dichas representaciones utilizadas, para realizar dicha codificación se tomaron en cuenta los siguientes criterios:

- b) Cantidad de representaciones utilizadas en una forma de solución. Esta categoría se refiere a cuántas representaciones diferentes utilizó en un procedimiento, pudiendo ser “individual” (una) o “sintética” (utiliza varias durante un mismo procedimiento de solución).
- c) Tipo de representación utilizada: pudiendo ser Gráfica (G), Analítica (A) y Algebraica (V) y Otras (O).
- d) Rendimiento: aquí las respuestas pueden ser correctas (C) o incorrectas (I).
- e) Respuesta directa: son casos en los que no hay una explicación y solo la respuesta no aporta evidencias sobre el tipo de estrategia utilizada.

- 4. Se realizó un acomodo de datos, de acuerdo a los factores: tipo de problema, género y nivel de razonamiento para observar las diferencias del rendimiento, la cantidad y tipos de representaciones seleccionadas por los alumnos.

Capítulo 4. Análisis de resultados

En este capítulo se presentan los datos obtenidos tras la aplicación de los instrumentos definidos para lograr los objetivos de la investigación, para ello se muestran los resultados de desempeño, cantidad y tipos de representaciones utilizadas por los alumnos “rurales” y “urbanos” que participaron en el estudio separados y analizados de acuerdo a: a) la estructura y forma de presentación del problema matemático y b) el nivel de razonamiento del resolutor.

4.1. Cantidad de alumnos por grupo

Para el estudio se dividieron los alumnos rurales y urbanos en tres grupos diferentes, a los cuales se les aplicó un problema de tipo diferente. En la tabla 2 se muestra la cantidad de hombres y mujeres por grupo que participaron en la investigación.

Alumnos	Problema tipo I		Problema tipo II		Problema tipo III	
	Rurales	Urbanos	Rurales	Urbanos	Rurales	Urbanos
Mujeres	15	18	20	14	18	22
Hombres	12	10	7	9	12	9
Total	27	28	27	23	30	31

Tabla 2: Cantidad de alumnos que participaron en la investigación

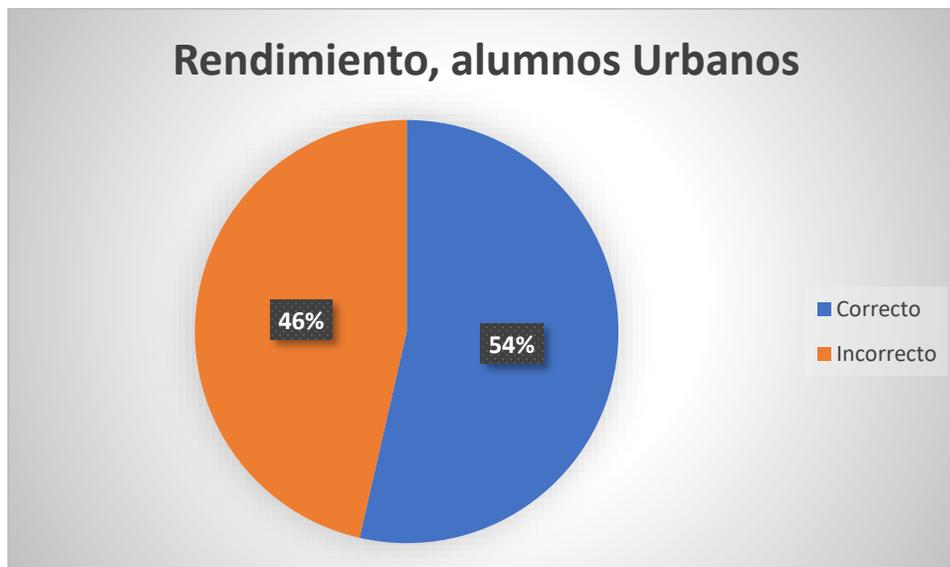
4.2. Análisis de resultados de acuerdo al tipo de problema

Los problemas seleccionados presentan el análisis de la misma situación, el caso del punto de encuentro de dos objetos, con una rapidez constante, lo cual debe ocurrir en un tiempo “t” igual para los dos. Cada problema parte de una formulación diferente, en el problema tipo I, se presenta una situación totalmente contextualizada, que puede ser reproducible en la realidad y la presentación del texto incluye una representación pictórica del problema. En el problema tipo III, la situación es de tipo “realista” es decir solamente se presenta un caso de dos “partículas” que pudieran ser objetos de cualquier tamaño y forma que tienen una rapidez constante, en este caso sólo se presenta la información textual y no va acompañada de ningún dibujo o gráfica. El problema tipo II, presenta una situación “puramente matemática”, porque no se otorgan datos físicos, aunque se sigue manteniendo la presentación de las “partículas”, y sólo se les indica que la rapidez es constante, pero pudiendo ser un valor cualquiera, es un problema cuya resolución pudiera llevar a una generalización del fenómeno.

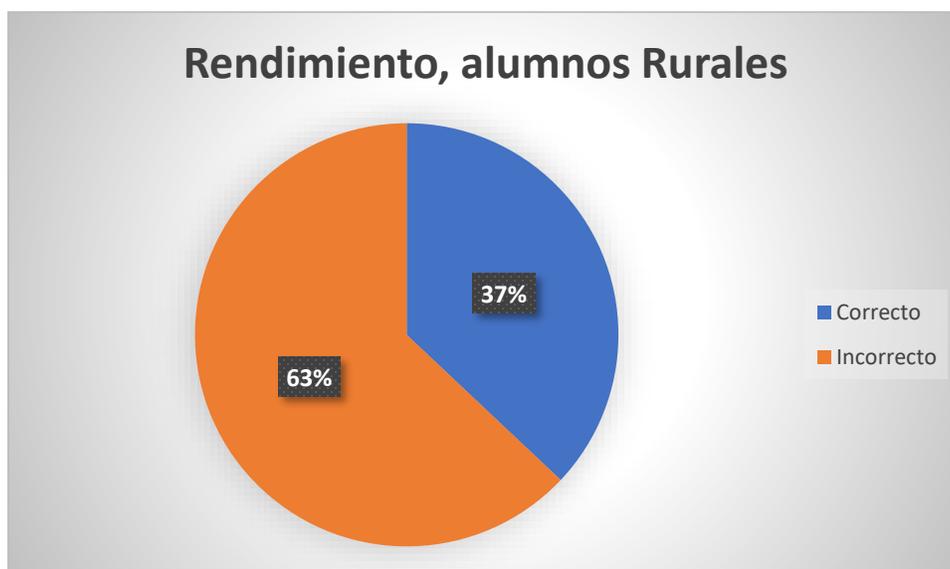
4.2.1. Problema tipo I

4.2.1.1. Análisis del rendimiento en general

En las gráficas 1 y 2, se pueden ver el rendimiento de los alumnos urbanos y rurales en general, es decir, si en al menos una de las representaciones obtienen una respuesta correcta independientemente de qué tipo de representación fuera.



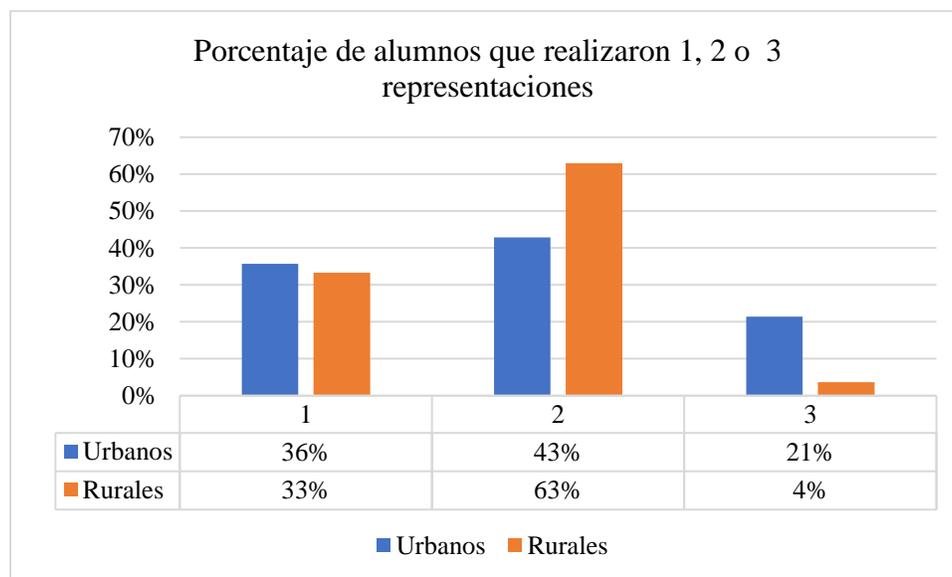
Gráfica 1: Rendimiento de los alumnos "urbanos" en el problema tipo I



Gráfica 2: Rendimiento de alumnos "rurales", problema tipo I

Como se puede observar en las gráficas 1 y 2, los alumnos pueden resolver un problema “contextualizado”; sin embargo, los alumnos urbanos presentaron un mayor porcentaje (54%) con respecto a los rurales (37%) de respuestas correctas, por lo que el rendimiento de los alumnos “urbanos” en el problema de tipo I podría considerarse mejor en términos porcentuales. Este resultado es congruente con lo reportado en la prueba PISA, donde los alumnos urbanos superan en rendimiento a los rurales, sin embargo, se esperaría que la diferencia entre rurales y urbano fuera de más del 50%.

4.2.1.2. Análisis de la cantidad de representaciones utilizadas

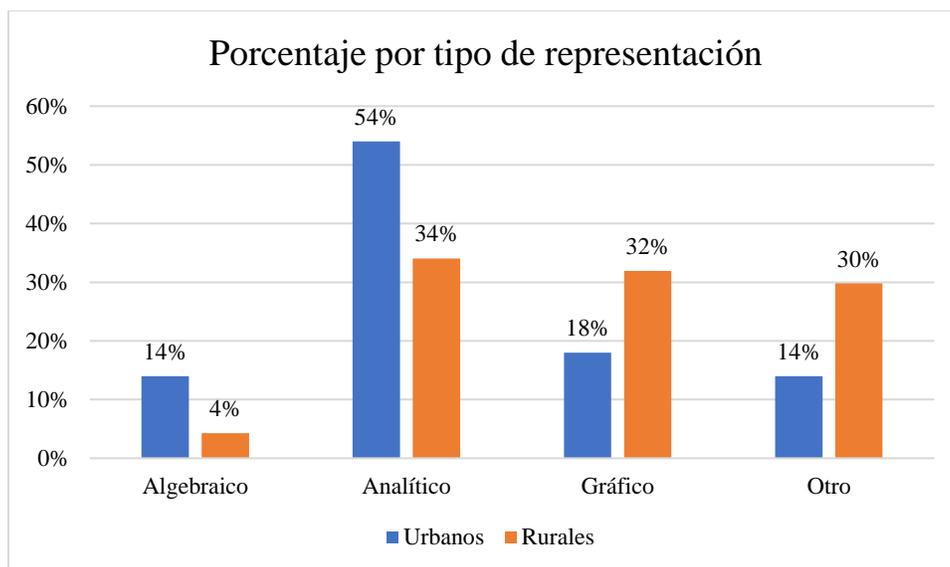


Gráfica 3: Porcentaje de alumnos, que realizaron 1, 2 o 3 representaciones en el problema tipo I

En la gráfica 3 se presentan la cantidad de alumnos con respecto al total de alumnos que intentaron resolver el problema tipo I. Se observa que los alumnos que sólo pudieron realizar una representación en el problema son muy similares entre urbanos (36%) y rurales (33%), por lo que podemos afirmar que aproximadamente un tercio de los estudiantes sólo fueron capaces de realizar una sola representación. Donde podemos observar diferencias es en el porcentaje de alumnos que realizaron 2 representaciones diferentes, ya que los alumnos rurales (63%) aumentan casi en 50% con respecto a los alumnos urbanos (43%). Para 3 representaciones, el porcentaje de alumnos rurales (4%) es un poco menos de la quinta parte de los alumnos urbanos (21%). Aunque los porcentajes tanto de alumnos rurales como urbanos que no hicieron 3 representaciones es mayor del 60% en cada grupo; en este tipo de problema, los alumnos urbanos presentaron una mayor

consistencia con la solicitud de la tarea: “realiza tres procedimientos diferentes para encontrar la solución”, por lo que muestran una mayor capacidad de realizar representaciones múltiples con respecto a los alumnos rurales.

4.2.1.3. Tipo de representación en alumnos rurales y urbanos

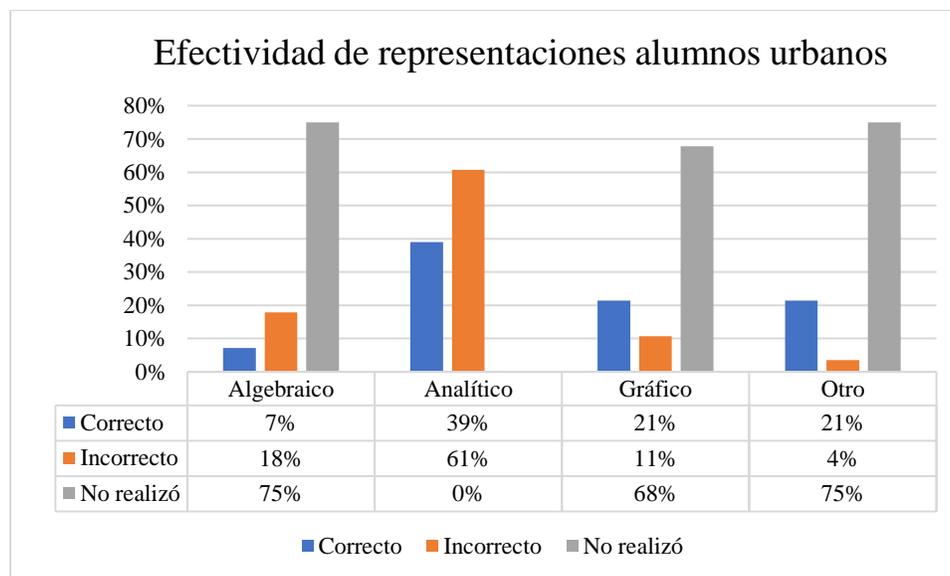


Gráfica 4: Porcentaje de representaciones que hicieron los alumnos en el problema tipo I con respecto al total de alumnos

En la gráfica 4 se presenta el porcentaje por tipo de representación con respecto al total que realizaron los alumnos. Para el tipo de representación algebraica, los alumnos urbanos superan por 10% a los rurales, lo que significa que, respecto a los rurales, los urbanos aumentan casi en un 200%. En la representación de tipo analítica, los alumnos urbanos vuelven a tener más porcentaje, en casi el 100% más con respecto a los rurales. Para la representación gráfica, los alumnos rurales hicieron más uso de ella, ya que superan en 14% a los urbanos, cosa que sucede con otros tipos de representación ya que los rurales aumentan más del 100% con respecto a los urbanos. Con lo anterior podemos afirmar que los alumnos urbanos para el problema tipo I, prefirieron utilizar en mayor cantidad procedimientos analíticos en casi una relación 3 a 1 con respecto a otros tipos de representación. Para el caso de los alumnos rurales es más homogéneo, ya que el 96% de los alumnos al menos utilizó una representación analítica, grafica u otro tipo, aunque tuvieron una orientación hacia las representaciones analíticas. Esto muestra que los alumnos rurales tienden a utilizar representaciones que no impliquen la abstracción o la utilización de variables, es decir, para resolver problemas ellos seleccionan gráficos, una fórmula ya existente o simplemente verbalizaron lo siguiente: “se encontraran en el poste”, o “se encontraran en el punto”.

4.2.1.4. Rendimiento de los diferentes tipos de representación

Un análisis muy importante es el rendimiento de los alumnos por tipo de representación, es decir que tan “efectivas” son las representaciones que eligen para resolver un problema.



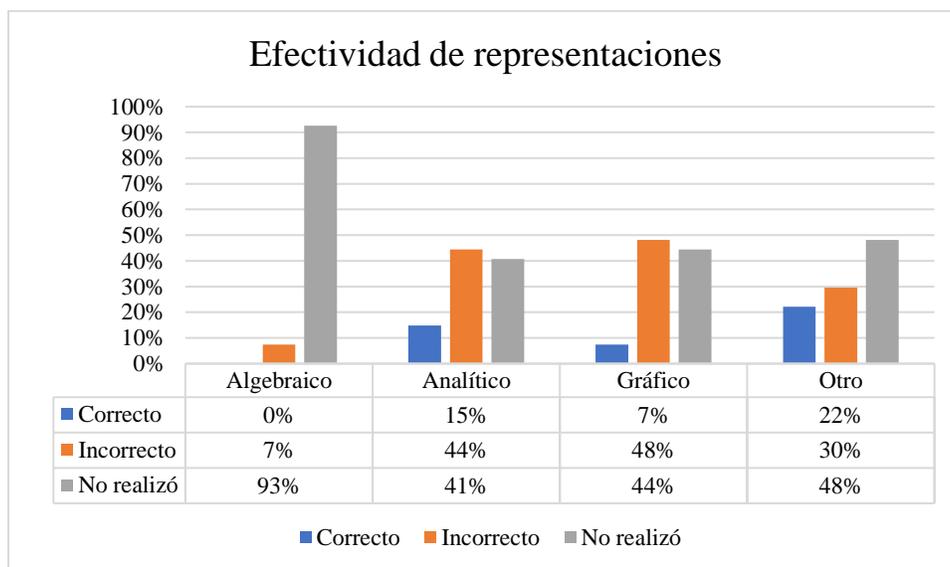
Gráfica 5: Efectividad de representaciones de alumnos urbanos que resolvieron el problema tipo I

Los alumnos urbanos, tuvieron mayor porcentaje de respuestas incorrectas que correctas en las representaciones algebraicas y analíticas (7% correctas contra 18% incorrectas y 39% correctas contra 61% incorrectas respectivamente).

Esto indica que, aunque el 42% de los alumnos tuvieron por lo menos una representación correcta, ocurrió lo que registró Meltzer (2005) en su estudio: “Algunos estudiantes, respondieron de manera inconsistente a las mismas preguntas, cuando utilizan diferentes tipos de representación para dar solución a un problema”, esto se aprecia porque 100% de los alumnos urbanos realizaron una representación analítica, pero sólo el 39% de estas, son correctas, es decir, no obtuvieron las mismas respuestas cuando utilizan un tipo de representación diferente.

El tipo de representación gráfica fue la que obtuvo una efectividad positiva, ya que son más las representaciones correctas con respecto a las incorrectas, casi 5 veces las respuestas correctas sobre las incorrectas, en otros tipos de representación. Esto muestra algo muy importante, los alumnos urbanos, aunque son muy efectivos en la utilización de representaciones gráficas, decidieron realizar representaciones analíticas o algebraicas, esto podría relacionarse con la preferencia o el

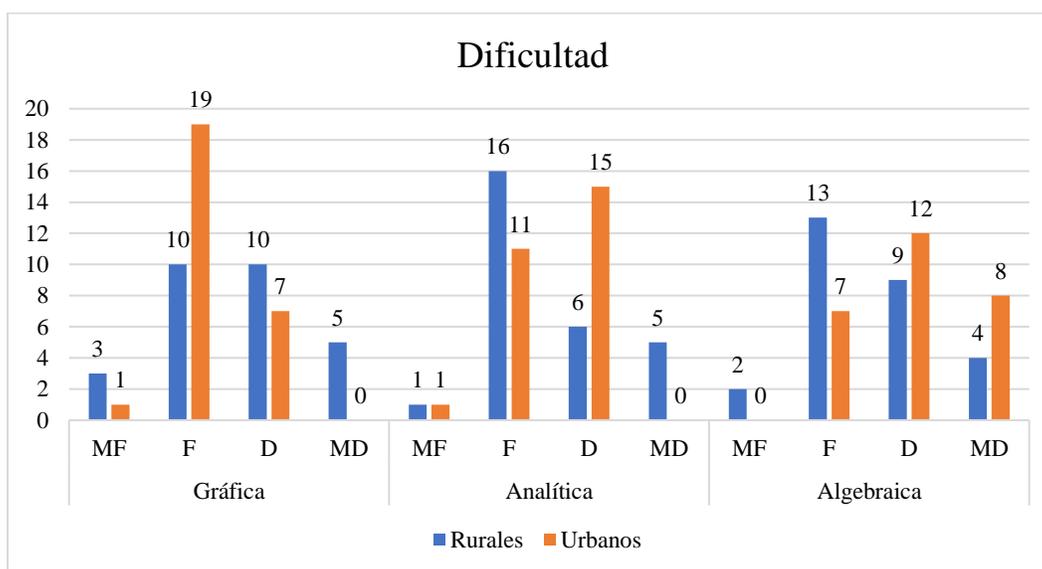
valor que le asignan sobre otra, es decir para ellos podría tener más valor dar una respuesta a través de una representación analítica o algebraica sobre otro tipo de representación.



Gráfica 6: Porcentaje de efectividad de alumnos rurales por tipo de representación utilizada para el problema tipo I

Los alumnos rurales no tuvieron una representación donde se tuvieran más representaciones correctas que incorrectas. Eso tiene correspondencia con el menor porcentaje de rendimiento que muestran con respecto a los alumnos urbanos. Los alumnos rurales presentan un mejor rendimiento en las representaciones denominadas “otros” (22%), donde sobresalen representaciones de tipo tabular, seguido de las representaciones analíticas (15%).

4.2.1.5. Dificultad de las respuestas



Gráfica 7: clasificación de la dificultad a las respuestas del problema tipo I, según los estudiantes

Los resultados sobre la clasificación de la dificultad del tipo de representación se muestran en la gráfica 7. Los alumnos urbanos clasificaron a la representación gráfica como la más fácil, en cambio los alumnos rurales consideran a la representación analítica. Por el contrario, los alumnos urbanos consideran a la representación algebraica como la más difícil de aprender, y los alumnos rurales consideran a la representación gráfica como la más difícil de aprender. Esto muestra una correspondencia con los resultados de rendimiento, ya que los alumnos rurales tuvieron mayor éxito al utilizar representaciones analíticas que gráficas, y los alumnos urbanos tuvieron también mayor éxito al realizar representaciones gráficas sobre las algebraicas.

En el caso del problema del tipo I, se puede identificar lo siguiente:

- Los alumnos urbanos presentaron un mejor rendimiento global sobre los alumnos rurales. Sin embargo, no existe una polarización tan marcada como lo indican los resultados de la prueba PISA, donde se muestran dos años de brecha en el rendimiento de alumnos rurales y urbanos; 5 de cada 10 alumnos urbanos contestaron correctamente y 4 de cada 10 alumnos rurales lo hicieron de la misma manera.
- Los alumnos urbanos tuvieron un mejor desempeño al tratar de realizar la indicación de elaborar tres representaciones diferentes, sobre los alumnos rurales; sin embargo, la

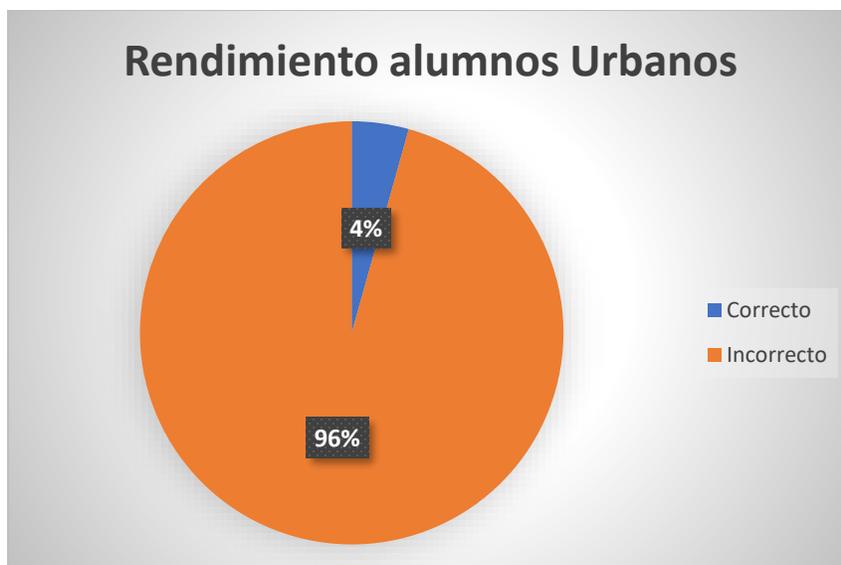
mayoría de los alumnos (79% para los urbanos y 96% para los rurales) no pudieron hacer tres procedimientos diferentes. Tanto alumnos rurales como urbanos no son consistentes al evaluar si su procedimiento obtenido es el correcto por medio de la comparación de resultados entre representaciones, es decir, parece que un procedimiento diferente lleva a una respuesta diferente.

- Los alumnos urbanos obtuvieron un mejor desempeño al realizar representaciones gráficas y “otros”, puesto que la cantidad de respuestas correctas superan a las incorrectas, en cambio los alumnos rurales no mostraron una representación donde existan más respuestas correctas de incorrectas. Tomando en cuenta el mayor porcentaje de respuestas correctas, los alumnos urbanos tuvieron un mayor porcentaje en la representación analítica y los alumnos rurales en “otros”, dando particularmente respuestas basadas en la tabulación de datos.
- Aunque los alumnos urbanos fueron más efectivos al realizar representaciones gráficas, ellos prefirieron realizar representaciones analíticas; en las valoraciones ellos consideran que la representación gráfica es la más fácil de aprender y la representación analítica es la más difícil de aprender, esto muestra que existe una predisposición a resolver un problema utilizando en primer lugar ecuaciones o formulas sobre otros procedimientos, es decir, en su contexto, las respuestas a los problemas tienen un mayor valor si provienen de una representación analítica o algebraica sobre otro tipo. En cambio, los alumnos rurales se enfocan en realizar representaciones analíticas, gráficas y otros, para los alumnos rurales aprender ecuaciones o fórmulas es un proceso menos efectivo que los gráficos. Esto se aprecia en la categorización de parte de los alumnos como más difíciles los procedimientos analíticos y algebraicos, que son aquellas que ellos evitan utilizar. Se observa que los alumnos rurales tienden a realizar representaciones que no impliquen la utilización de ecuaciones o fórmulas, ya que ellos las consideran como “difíciles de aplicar”.

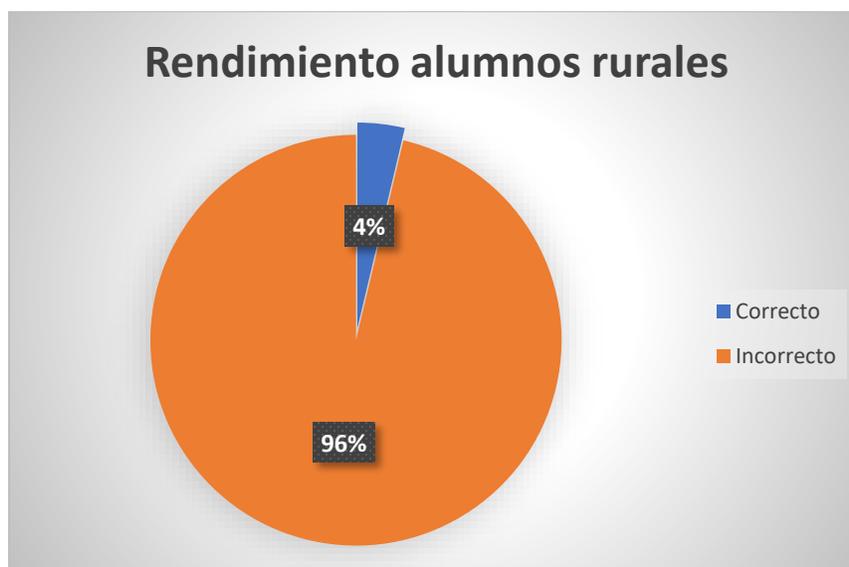
4.2.2. Problema tipo II

4.2.2.1. Análisis del rendimiento en general

En las gráficas 8 y 9 se puede observar el rendimiento de los alumnos urbanos y rurales en general, es decir, si en alguna de sus representaciones obtienen una respuesta correcta independientemente de que tipo de representación fuera.



Gráfica 8: Rendimiento de alumnos urbanos que realizaron el problema tipo II

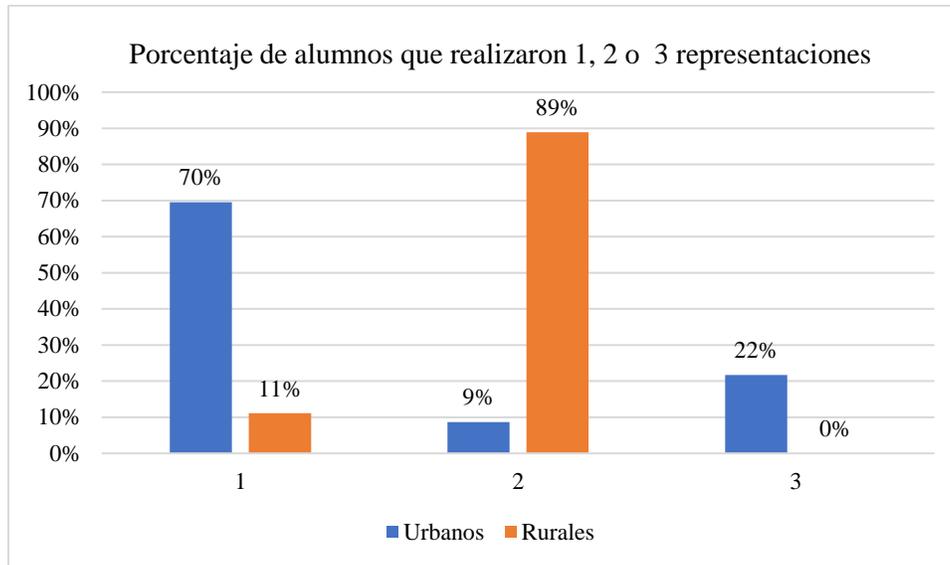


Gráfica 9: Rendimiento de alumnos rurales que realizaron el problema tipo II

Como se puede observar en las gráficas 8 y 9, sólo el 4% pudieron resolver un problema donde la respuesta correcta es que expresen una fórmula, una ecuación o indiquen el punto de encuentro (sólo un estudiante de cada grupo pudo resolver exitosamente el problema); en este tipo de problema el rendimiento fue similar en ambos grupos, obteniendo resultados similares a lo que indica Díaz y Bermejo (2007): “Estudiantes rurales y urbanos obtuvieron un resultado similar en problemas más abstractos”. Esto explica que alumnos de bachillerato presentan dificultades con la abstracción y generalización de fenómenos, parece que necesitan de situaciones “reproducibles”, para poder

crear modelos mentales que los ayuden a realizar representaciones adecuadas para dar solución a los problemas de manera correcta.

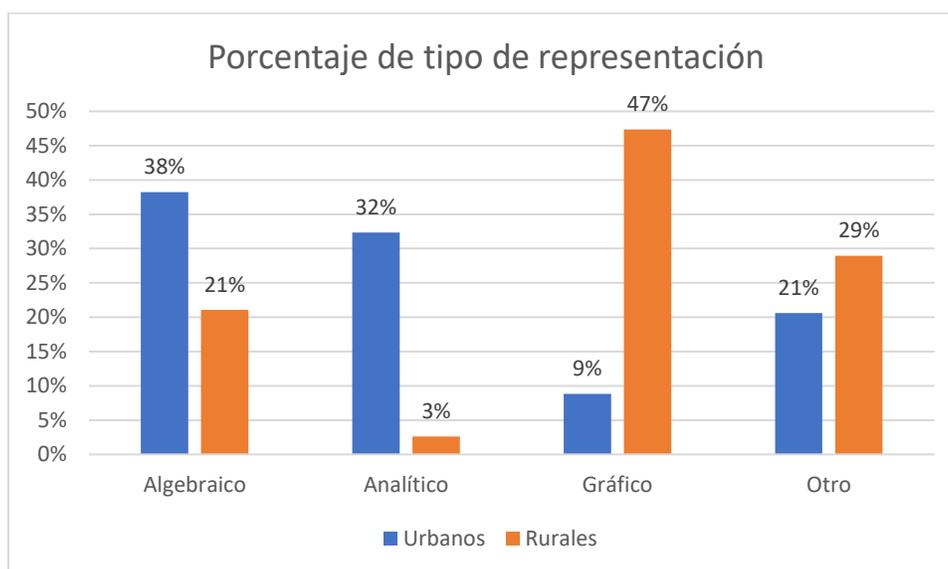
4.2.2.2. Análisis de la cantidad de representaciones utilizadas



Gráfica 10: Porcentaje de alumnos, que realizaron 1, 2 o 3 representaciones en el problema tipo II.

En la gráfica 10 se presentan el porcentaje de alumnos por cantidad de representaciones con respecto del total del grupo. Para el caso de una representación, se observa que son seis veces el número de alumnos urbanos con respecto a los alumnos rurales. Para el caso de dos representaciones es donde los alumnos rurales superan en 80% a los alumnos urbanos. Para 3 representaciones, no hubo alumnos rurales que lo pudieran realizar, y sólo el 22% de los alumnos urbanos pudieron mostrar una mayor consistencia con la solicitud de la tarea: “realiza tres procedimientos diferentes para encontrar la solución”, por lo que muestran una mayor capacidad de realizar representaciones múltiples con respecto a los alumnos rurales.

4.2.2.3. Tipo de representación en alumnos rurales y urbanos

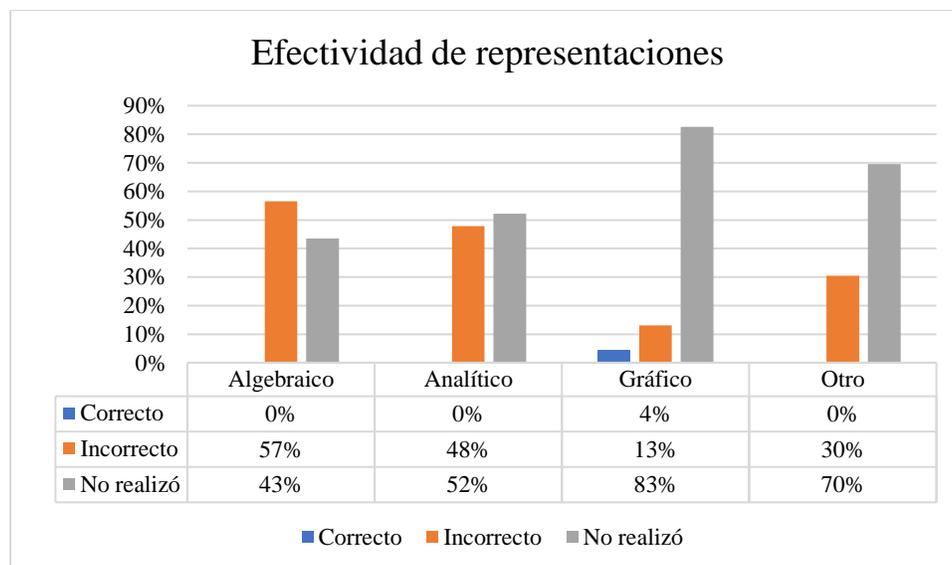


Gráfica 11: Porcentaje de representaciones que hicieron los alumnos en el problema tipo II con respecto al total de alumnos

En la gráfica 11 se presenta el porcentaje de cada tipo de representación con respecto al total que realizaron los alumnos. Para el tipo de representación algebraica, los alumnos urbanos superan por 17% a los rurales, lo que significa una diferencia de casi un 50%. En la representación de tipo analítica, los alumnos urbanos superan en 29% de alumnos rurales, es decir, por cada 10 alumnos urbanos que utilizan una representación analítica, sólo uno del grupo rural realiza este tipo de representación. Para la representación gráfica, los alumnos rurales hicieron más uso de ella, ya que superan en 38% a los urbanos, situación que se repite con otros tipos de representación ya que los rurales tiene un 8% más respecto a los urbanos. Con lo anterior podemos afirmar que los alumnos urbanos para el problema tipo I, prefirieron utilizar en mayor cantidad procedimientos algebraicos y analíticos, predominando que más de la mitad utilizando la representación algebraica. Para el caso de los alumnos rurales, se inclinaron por utilizar una representación gráfica, ya que supera por casi el doble con otros tipos de representación y algebraicos, y en más de 11 veces a la representación analítica.

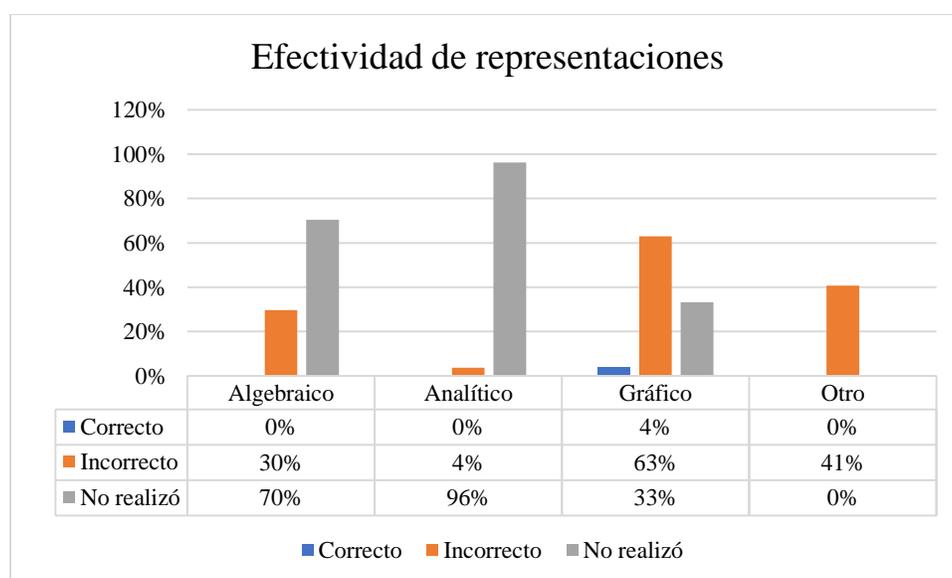
4.2.2.4. Rendimiento de los diferentes tipos de representación.

En la gráfica 12 se muestra el rendimiento de los alumnos por tipo de representación, es decir que tan “efectivas” son las representaciones que eligen para resolver un problema de tipo II.



Gráfica 12: Efectividad de representaciones de alumnos urbanos que resolvieron el problema tipo II.

Los alumnos urbanos tuvieron mayor porcentaje de respuestas incorrectas sobre las correctas en todos los tipos de representación, sólo el tipo de representación gráfica pudo obtener una respuesta correcta.

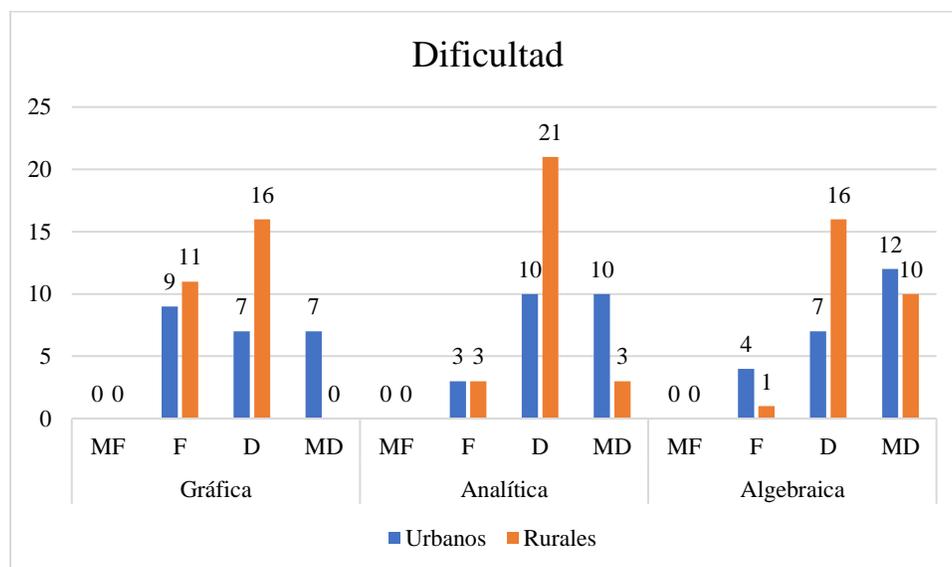


Gráfica 13: Porcentaje de efectividad de alumnos rurales por tipo de representación utilizada para el problema tipo I

Los alumnos rurales no tuvieron una representación que superara la cantidad de respuestas correctas de las incorrectas, comportamiento similar con el rendimiento de los alumnos urbanos. También se observa que un alumno de cada grupo pudo dar una respuesta correcta utilizando una representación gráfica, esto muestra que para dos presentaciones diferentes (problema tipo I y II), los alumnos son más efectivos utilizando gráficas para resolver los problemas. Sin embargo, se empieza a notar un comportamiento muy característico, los alumnos urbanos siguen prefiriendo elegir representaciones algebraicas o analíticas aun cuando no pudieron dar solución al problema, mostrando que pudiera existir en su contexto sociocultural una influencia en su elección de representación.

En el caso de alumnos rurales, se nota también una afinidad hacia elegir representaciones que no incluyan procedimientos analíticos o algebraicos, mostrando una influencia de su contexto hacia procedimientos gráficos u otros. Es importante señalar que en este problema obtuvimos la mayor cantidad de respuestas verbalizadas tales como: “no existe la solución”, “hacen falta datos para la solución”, “no lo pude resolver” o “se encontraron en el punto o en el poste” en ambos grupos.

4.2.2.5. Dificultad de las respuestas



Gráfica 14: clasificación de la dificultad a las respuestas del problema tipo II, según los estudiantes

Sobre los resultados de valoración de la dificultad del tipo de representación, algo que fue impactante es que tanto urbanos como rurales no clasificaron a las representaciones “muy fácil”, fenómeno influido por el uso de variables y la no presencia de datos numéricos. Los alumnos

urbanos y rurales clasificaron a la representación gráfica como la más fácil. Por el contrario, los alumnos urbanos consideran a la representación analítica como la más difícil de aprender mientras que los alumnos rurales consideran a la representación algebraica. En este caso, la clasificación de las representaciones algebraica y analíticas como las más difíciles de resolver, corresponde con que los alumnos rurales no decidieran hacer este tipo de representaciones para resolver el problema. Los alumnos urbanos, aunque expresaron que la representación gráfica era la más fácil de entender, no la utilizaron para resolver el problema, hecho que muestra que los alumnos urbanos tienen predilección de procedimientos algebraicos o analíticos antes de los procedimientos gráficos o de otro tipo.

En el caso del problema del tipo II, se puede identificar lo siguiente:

- No hubo una diferencia significativa en el rendimiento entre alumnos rurales y urbanos. Cabe la pena resaltar que en este tipo de problema encontramos diversas anotaciones donde indicaban que no se podía resolver por la falta de datos o que estaba incompleto debido a la no presencia de datos numéricos para resolver el problema; esto indica que para los alumnos, un problema matemático siempre conduce a una solución de tipo numérica, es decir, tareas cuya respuesta sea una ecuación o un modelo del fenómeno, no son tomadas como completas; esto se explica en medida, a la gran influencia que tiene el contexto, en que los resultados en un problema basado en un fenómeno físico, siempre deben ser numéricos.
- Ningún alumno rural pudo realizar tres representaciones para la solución del problema, en cambio el 22% de los alumnos urbanos si mostró correspondencia con la instrucción de la tarea, esto muestra que al igual que en el problema tipo I, los alumnos urbanos que realizaron el problema tipo II, tienen mejor predisposición para las múltiples representaciones.
- Gran cantidad de alumnos rurales no hicieron representaciones analíticas o algebraicas, se centraron en realizar representaciones gráficas, hecho que corresponde con su forma de clasificar las representaciones, donde las gráficas en su opinión son las más fáciles de aprender; en cambio los alumnos urbanos aunque clasifican más fáciles a las representaciones gráficas, ellos prefieren realizar representaciones analíticas o algebraicas mostrando una evidente predisposición hacia la realización de este tipo de representaciones,

independientemente del tipo de problema que se les presente, es notorio la influencia de su contexto en su elección, tal parece que en su contexto una respuesta a un problema debe ser obtenida a partir de fórmulas o ecuaciones.

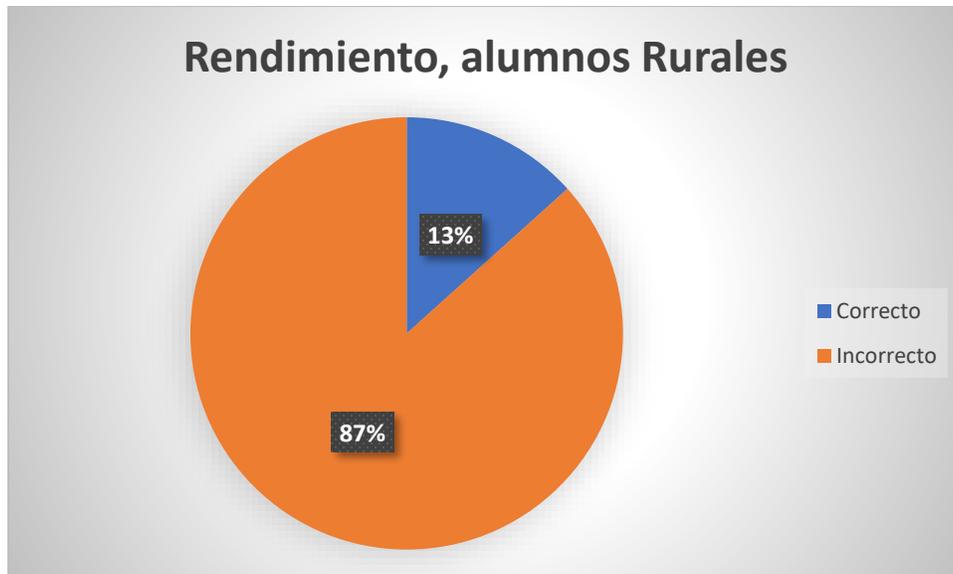
4.2.3. Problema tipo III.

4.2.3.1. Análisis del rendimiento en general

En las gráficas 15 y 16 se puede observar el rendimiento de los alumnos urbanos y rurales en general, es decir, si en alguna de sus representaciones obtienen una respuesta correcta independientemente de que tipo de representación fuera.



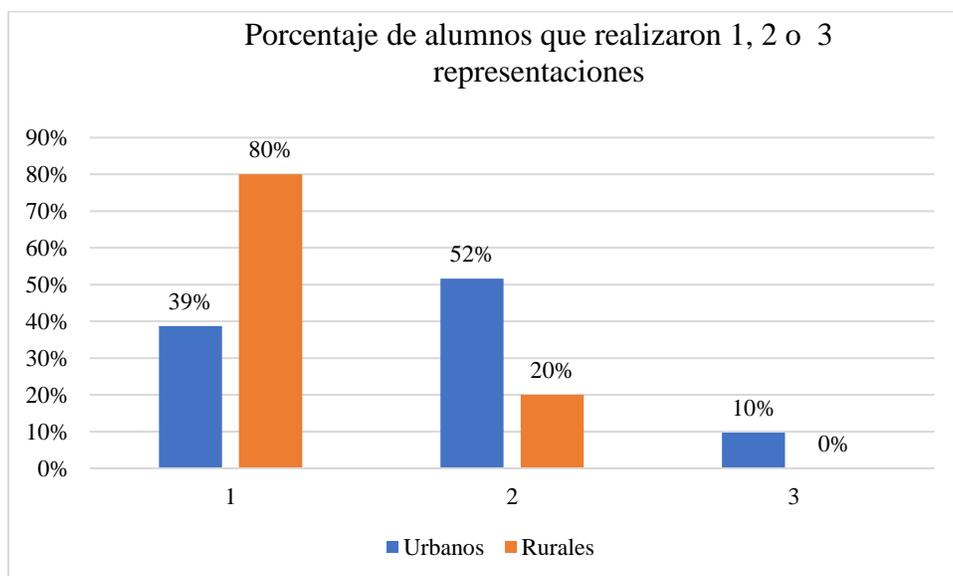
Gráfica 15: Rendimiento de los alumnos "urbanos" en el problema tipo III



Gráfica 16: Rendimiento de alumnos "rurales", problema tipo I

Como se puede observar en las gráficas 15 y 16, menos del 32% de alumnos pudieron resolver el problema correctamente; sin embargo, los alumnos urbanos presentaron un mayor porcentaje (32%) con respecto a los rurales (13%) de alumnos que realizaron al menos una representación correcta, por lo que el rendimiento de los alumnos “urbanos” en el problema de tipo III, podría considerarse mejor en términos porcentuales.

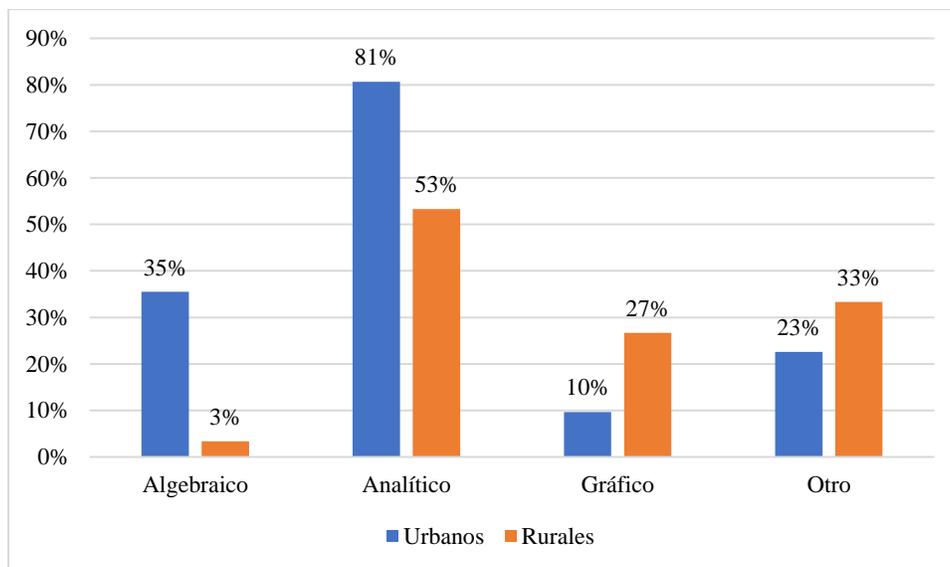
4.2.3.2. Análisis de la cantidad de representaciones utilizadas



Gráfica 17: Porcentaje de alumnos, que realizaron 1, 2 o 3 representaciones en el problema tipo III

En la gráfica 17 se presentan el porcentaje de alumnos que intentaron resolver el problema tipo I realizando una, dos o tres representaciones. Se observa que los alumnos rurales que realizaron sólo una representación, son más del doble que los alumnos urbanos, mostrando que fueron menos consistentes con la instrucción de la tarea. El porcentaje de alumnos que realizaron 2 representaciones tienen también mucha diferencia porcentual, los alumnos urbanos que realizaron dos representaciones están en una proporción casi 3 a 1 con respecto a los alumnos rurales. Para 3 representaciones, ningún alumno rural pudo realizar tres formas diferentes, mientras que sólo el 10% de los alumnos urbanos realizaron 3 representaciones diferentes. Los porcentajes tanto de alumnos rurales como urbanos que no hicieron 3 representaciones es mayor del 90% en cada grupo; en este tipo de problema, los alumnos urbanos presentaron una mayor consistencia con la solicitud de la tarea: “realiza tres procedimientos diferentes para encontrar la solución”, por lo que muestran una mayor capacidad de realizar representaciones múltiples con respecto a los alumnos rurales. Sin embargo, es este problema, la cantidad de alumnos en términos porcentuales que hicieron tres representaciones es la menor con respecto a los otros dos problemas.

4.2.3.3. Tipo de representación en alumnos rurales y urbanos



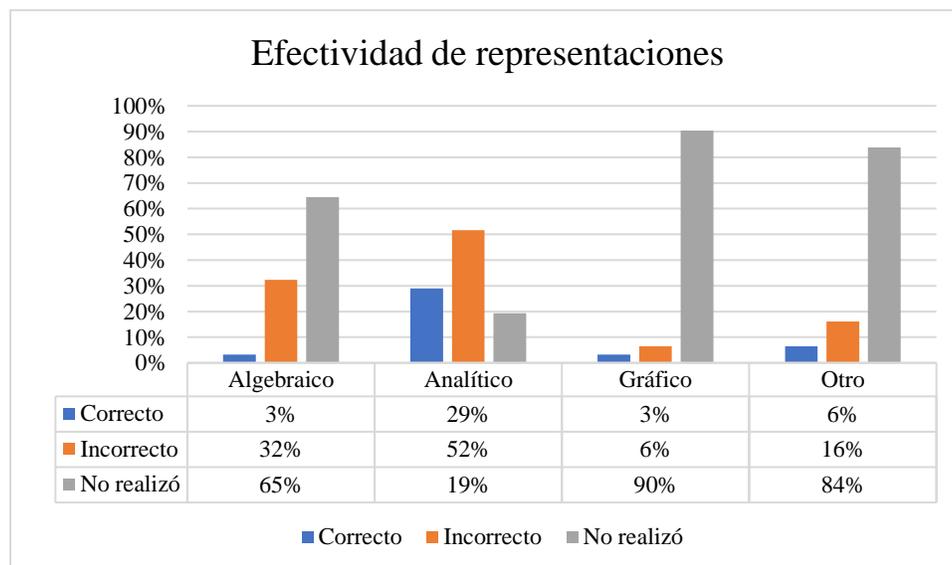
Gráfica 18: Porcentaje de representaciones que hicieron los alumnos en el problema tipo III con respecto al total de alumnos

En la gráfica 18 se presentan los porcentajes por tipo de representación realizada por los alumnos. Para el tipo de representación algebraica, los alumnos urbanos están en una relación de 1 a 11 con respecto a los alumnos rurales. En la representación de tipo analítica, los alumnos urbanos vuelven a tener más porcentaje, en casi el 50% más con respecto a los rurales. Para la representación gráfica,

los alumnos rurales hicieron más uso de ella, ya que superan en 17% a los urbanos, situación que se repite con otros tipos de representación ya que tienen un 10% más de representaciones que los alumnos urbanos. Con lo anterior podemos afirmar que los alumnos urbanos para el problema tipo III, prefirieron utilizar en mayor cantidad procedimientos analíticos en casi una relación 3 a 1 con respecto a otros tipos de representación. Para el caso de los alumnos rurales, es más homogéneo, ya que el 53% de los alumnos utilizó una representación analítica. Se vuelve a notar la misma tendencia que en los tipos de problemas anteriores: que independientemente la presentación del problema, los alumnos urbanos por una influencia del contexto prefieren utilizar representaciones algébricas o analíticas sobre otros tipos de representaciones otorgando una jerarquización a las representaciones, para ellos un resultado proveniente de una representación analítica o algebraica es mejor sobre otro tipo de representación. En el caso de alumnos rurales sus preferencias de elección son tipos de representación que no incluyan procedimientos algebraicos o la manipulación de fórmulas.

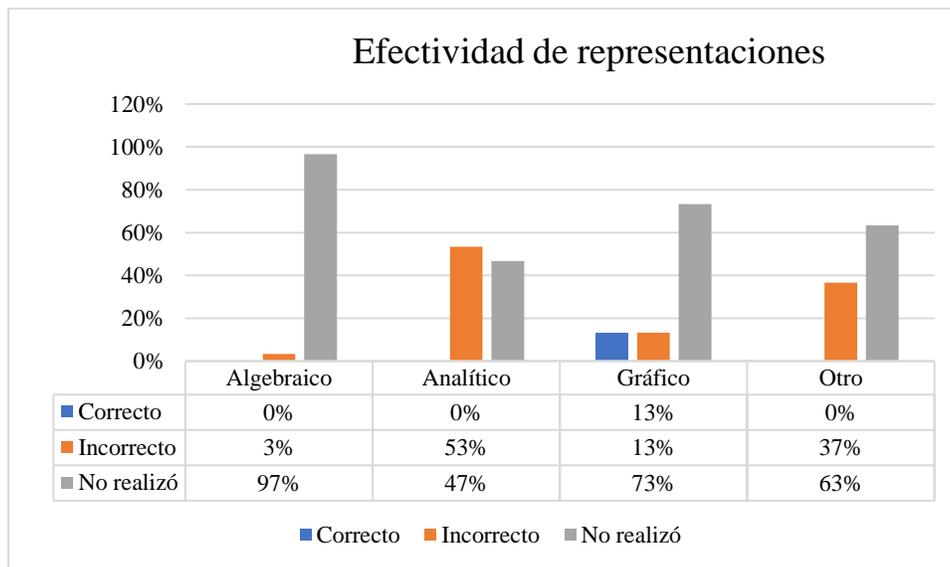
4.2.3.4. Rendimiento de los diferentes tipos de representación.

Aunque los alumnos hayan seleccionado un tipo de representación, un análisis muy importante es el rendimiento de los alumnos por tipo de representación, es decir que tan “efectivas” son las representaciones que eligen para resolver un problema.



Gráfica 19: Efectividad de representaciones de alumnos urbanos que resolvieron el problema tipo III.

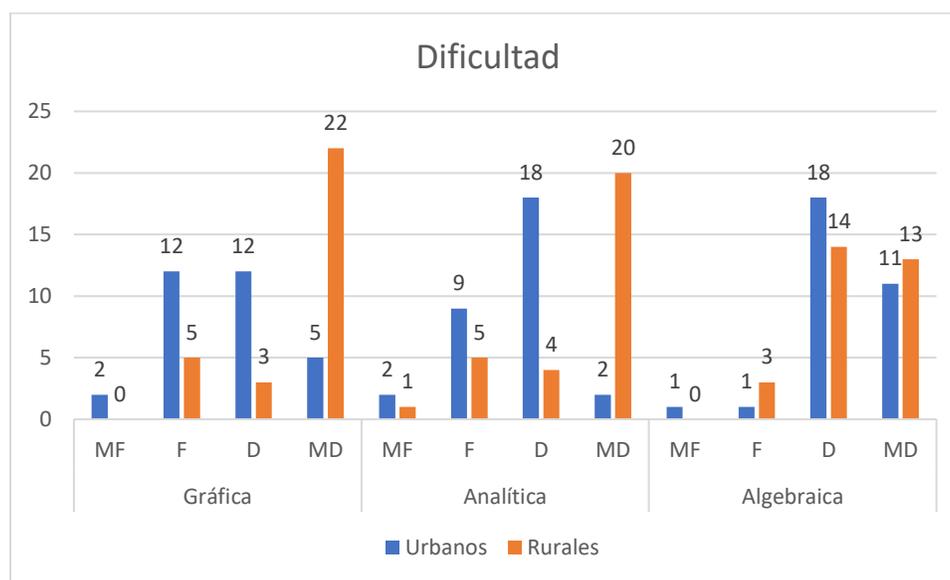
Como se muestra en la Gráfica 19, los alumnos urbanos, tuvieron mayor porcentaje de respuestas incorrectas que correctas en todos los tipos de representaciones, esto indica que, aunque el 32% de los alumnos tuvieron por lo menos una representación correcta, ocurrió lo que registró Meltzer (2005) en su estudio: “Algunos estudiantes, respondieron de manera inconsistente a las mismas preguntas, cuando utilizan diferentes tipos de representación para dar solución a un problema”. La representación que registró mayor efectividad fue la analítica, seguida de “otros” y la que menor efectividad fueron la algebraica y la gráfica.



Gráfica 20: Porcentaje de efectividad de alumnos rurales por tipo de representación utilizada para el problema tipo I

Los alumnos rurales, no tuvieron una representación que sobrepasara la cantidad de respuestas correctas de las incorrectas, eso tienen correspondencia con el menor porcentaje de rendimiento que muestran con respecto a los alumnos urbanos. Los alumnos rurales solamente obtuvieron soluciones correctas cuando utilizaron la representación gráfica.

4.2.3.5. Dificultad de las respuestas



Gráfica 21: clasificación de la dificultad a las respuestas del problema tipo I, según los estudiantes

Los resultados sobre la clasificación de la dificultad del tipo de representación se muestran en la gráfica 20; los alumnos urbanos clasificaron a la representación gráfica como la más fácil, en cambio los alumnos rurales consideran que es la representación analítica. Por el contrario, los alumnos urbanos consideran a la representación algebraica como la más difícil de aprender, clasificación que coincide con los alumnos rurales. No existe una relación con el uso y la clasificación de las representaciones, ya que los alumnos urbanos utilizaron más la representación analítica situación que sucede de forma similar en los alumnos rurales.

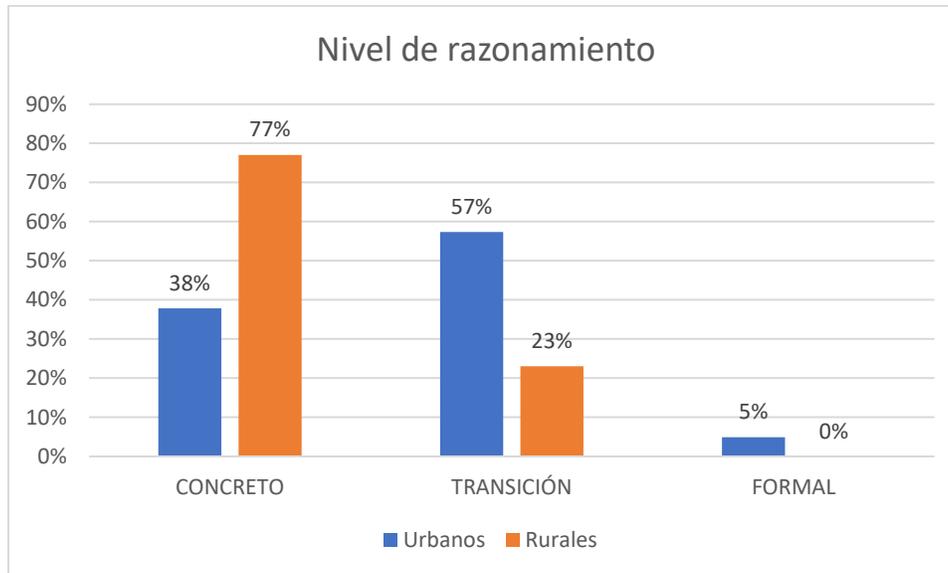
En el caso del problema del tipo III, se puede identificar lo siguiente:

- Los alumnos urbanos presentaron un mejor rendimiento global sobre los alumnos rurales.
- Los alumnos urbanos tuvieron un mejor desempeño al tratar de realizar la indicación de elaborar tres representaciones diferentes, sobre los alumnos rurales; sin embargo, este problema tuvo menor porcentaje de alumnos que realizaron tres representaciones con respecto a los otros dos.
- Tomando en cuenta el mayor porcentaje de respuestas correctas, los alumnos urbanos tuvieron mejor desempeño cuando utilizaron la representación analítica y los alumnos rurales en el tipo gráfica.

- Se observa que los alumnos urbanos se enfocan en realizar mayormente representaciones analíticas, pero las valoran como las formas más difíciles de aprender, esto supone que en su contexto existe una mejor apreciación por las respuestas a problemas que provienen de este tipo de representaciones sobre otros. En cambio, los alumnos rurales se enfocan en realizar representaciones, gráficas y otros, debido a que les son más efectivas para realizar y las clasifican como más fáciles de aprender. Existe un fenómeno muy generalizado, mientras que los alumnos urbanos consideran jerarquizar sus representaciones en función de la abstracción y con ello seleccionar procedimientos algebraicos y analíticos con la finalidad de otorgar a su resultado más robustez; los alumnos rurales prefieren representaciones que a ellos les presenten menor dificultad, es decir lo único que buscan es resolver el problema de una “manera fácil”. Esto podría explicarse por una influencia del contexto; los alumnos urbanos se encuentran en un contexto donde los procedimientos algebraicos y analíticos son más apreciados y utilizados sobre otro tipo, ocasionando en los alumnos una valorización mayor sobre otros independientemente de si tienen dificultades en el tratamiento de este tipo de representaciones. En cambio, los alumnos rurales prefieren un procedimiento que los ayude a llegar a la solución por la forma que tenga menos complicaciones para ellos; también se observa que los alumnos rurales no muestran interés en representaciones que presentan dificultades en su tratamiento como la algebraica o la analítica.

4.3. Análisis de datos por nivel de razonamiento

4.3.1. Nivel de razonamiento de los alumnos participantes



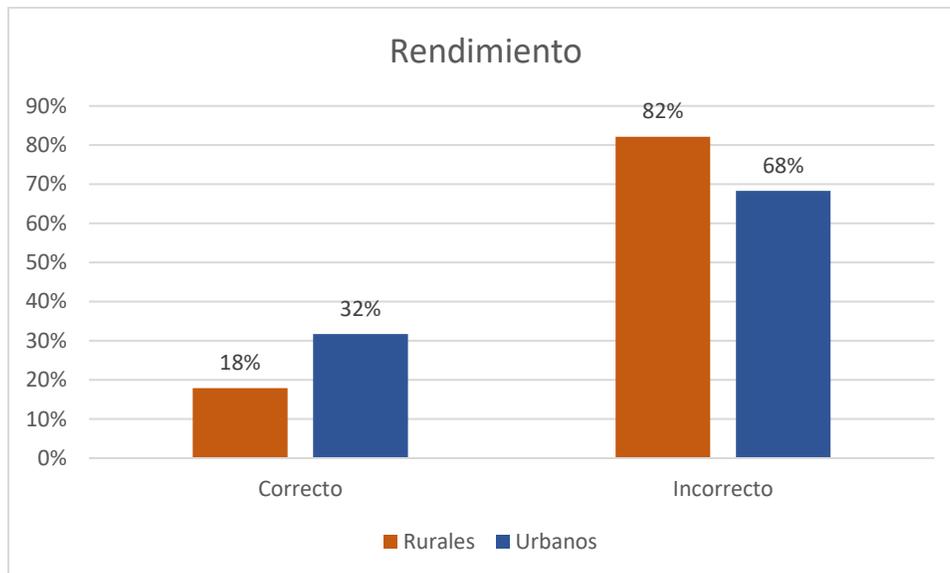
Gráfica 22: Nivel de razonamiento de alumnos rurales y urbanos

El nivel de Razonamiento de los participantes del estudio se encuentra en la gráfica 22, los resultados muestran que los alumnos rurales se encuentran en un nivel concreto de razonamiento (77%) en menor medida en transición (23%) y que no hay alumnos en nivel formal. Para los alumnos urbanos, la mayoría de los alumnos se encuentran en el nivel de transición (58%), hay un porcentaje importante que se encuentra en el nivel concreto (38%), pero hay un pequeño porcentaje (5%) de alumnos que se encuentran en el nivel formal. Aquí podemos identificar que los alumnos que participaron en el estudio no se encuentran en el nivel que se deben encontrar acorde a su edad, puesto que deberían estar en un nivel de transición o formal (Díaz 2012). Según la descripción dada por Ates y Cataloglu (como se citó en Díaz, 2012), presentan los siguientes razonamientos:

- *“Empírico–Inductivo (Concreto):* Estudiantes que no son capaces de testear hipótesis involucrando agentes causales observables. Pueden llevar a cabo experimentos mentales. Las operaciones que usa son concretas, se relacionan directamente con objetos y no con hipótesis verbalizadas”.
- *“Transición o Intermedio (Transición):* Para desarrollar este estado debe haber desarrollado previamente el pensamiento concreto. Estudiantes inconsistentemente capaces de testear hipótesis involucrando agentes observables causales. En este estado el individuo

es capaz de razonar con proposiciones sin la necesidad de objetos, formular hipótesis y probarlas”.

4.3.2. Análisis de rendimiento de acuerdo al nivel de razonamiento



Gráfica 23: Rendimiento de alumnos rurales y urbanos durante la resolución de la tarea

Como se observa en la gráfica 23, los alumnos rurales tienen un rendimiento menor al de los urbanos, casi en relación 2 a 1. Sin embargo, el nivel de razonamiento no presenta tal diferencia y que la diferencia entre alumnos concretos y en transición no están en la misma proporción.

Aunque existen mayor cantidad de alumnos urbanos en niveles de razonamiento superiores con respecto a los urbanos, se observa que, en el rendimiento, las diferencias no son de la misma proporción.

4.4. Categorización de representaciones

En las tablas 3 a la 8 se presentan las codificaciones de las representaciones realizadas por los estudiantes, recordando que la codificación fue la siguiente:

- a) Cantidad de representaciones utilizadas en una forma de solución. “individual” (I) o “sintética” (S).
- b) Rendimiento: aquí las respuestas pueden ser correctas (C) o incorrectas (I).
- c) Tipo de representación utilizada: pudiendo ser Gráfica (G), Analítica (L) y Algebraica (A) y Otras (O).
- d) La magnitud sobre la que realiza la comparación, es decir si compara tiempos iguales (T), Velocidades iguales (v) o distancias iguales (D).

Representaciones problema tipo I				Representaciones problema tipo II				Representaciones problema tipo III			
Alumno	R-1	R-2	R-3	Alumno	R-1	R-2	R-3	Alumno	R-1	R-2	R-3
A1	ICLT	ICGT		A1	SIAD	IILT	IAD	A1	SIAD		
A2	ICLT	SCOD	ICGT	A2	IIAT			A2	SCLT	ICGT	ICOT
A3	SCAT	IILT	SILT	A3	IIAT	IILD		A3	IIAT	IILT	
A4	ICLT	ICLT		A4	IIAD			A4	SILT		
A5	ICLT	ICLT		A5	SIAD			A5	SIOD		
A6	ICLT	SCOD		A6	IIAT			A6	SILV	SIOT	SILT
A7	SCLT	ICAT		A7	IIOT			A7	SILT	IIAD	IIAD
A8	IILT			A8	IILD			A8	SILT	IILT	
A9	IILT	SIOD		A9	SILD	IIOT		A9	SIAT	IILT	
A10	IILT			A10	SILD			A10	SCLT		
A11	IILT			A11	IILD	ICGT	IIOD	A11	SILT		
A12	IILT			A12	IIAD	SIGT	SIOT	A12	SCLT		
A13	SILT	IILD		A13	SIAT			A13	SIAT		
A14	ICLT			A14	IIGT	IIOT	IILD	A14	SCLT	SCOT	
A15	ICAT	IILD		A15	IILD			A15	SILT		
A16	ICLT			A16	IIAV			A16	IIAT	IILV	
A17	IIAT	IILD		A17	SILD			A17	IILT	IIGT	
A18	ICLT			A18	SILT			A18	SILD	IIOD	
A19	SIGD	IIAD	IILT	A19	SILD			A19	IILT	IIGT	
A20	IILT	IIGD	SIOD	A20	SILD			A20	IILV		
A21	IILD	IILT		A21	SILD			A21	SCLT		
A22	SCOT	IILT	ICGT	A22	SIGT			A22	SCLT	ICLT	
A23	SCOT	IILT	ICGT	A23	SIAD	IILD	IILT	A23	SCID	IILT	
A24	IILD							A24	SCLT	SIAT	
A25	IILD							A25	SCOT	SCLT	
A26	ICOT	SILT						A26	SILT		
A27	IILT							A27	SILT	SILD	
A28	IILT	ICGT						A28	SILT		
								A29	SILT	SIAT	
								A30	SCLT	SILD	
								A31	ICLT	IILD	

Tabla 3: Codificación de las representaciones que realizó cada alumno de acuerdo al tipo de problema, en el grupo de alumnos urbanos

Representaciones problema tipo I				Representaciones problema tipo II				Representaciones problema tipo III			
Alumno	R-1	R-2	R-3	Alumno	R-1	R-2	R-3	Alumno	R-1	R-2	R-3
A1	IILD	IIGD		A1	IIGD	IIGD		A1	SILT	ICGT	
A2	SCOT			A2	SIGD	SIOD		A2	IIAT	ICGT	
A3	IILD			A3	IIOD	IIGD		A3	SIGT	IIGT	
A4	IIOD	IIGD	SIOD	A4	SIGD	SIOD		A4	ICGT	ICOT	
A5	IIILD	IIGD		A5	SIGD	SIOD		A5	SCGT	ICGT	
A6	ICOT	SCGT		A6	SIGD	SIOD		A6	SIGT	IIGT	
A7	SCOT	SCLT		A7	IIGD	IIGD		A7	SIGD		
A8	IILD	IIGD		A8	SIAD	SILD		A8	IIAT		
A9	ICLT			A9	IIAV	SIGV		A9	IIAT		
A10	IILD	IIGD		A10	SIGD	SIGV		A10	IILT		
A11	SCOT			A11	IIAV	SIGV		A11	SILD		
A12	ICOT	ICLT		A12	IIAV	SIGV		A12	SIOD		
A13	IILD			A13	SILD			A13	IILT		
A14	SCOT			A14	IIGD	IIGD		A14	IILD		
A15	SCOT			A15	IIGD	IIGD		A15	IILD		
A16	IIAV	IILT		A16	IIGD	IIGD		A16	IILD		
A17	IIOD	IIGD		A17	IIGD	IIGD		A17	IILD		
A18	IIGD	IIOD		A18	ICGD			A18	IIOD		
A19	IIOD	IIOD		A19	IILT	SIGD		A19	IILD		
A20	IILD	IIGD		A20	IIAV	IIGD		A20	IILD		
A21	IIOD	IIOD		A21	IIGD	IIGD		A21	IILD		
A22	IIOD			A22	SIGD			A22	IIOD		
A23	IILD			A23	IIGD	IIGD		A23	IILD		
A24	IILD	IIGD		A24	IIGD	IIGD		A24	IIOD		
A25	IILD	IIGD		A25	IIGD	IIGD		A25	IILD		
A26	IIOD	ICLT		A26	IIGD	IIGD		A26	SIOD		
A27	ICOT	ICGT		A27	IILT	SIGD		A27	IILD		
								A28	SIOD		
								A29	SIOD		
								A30	SIOD		

Tabla 4: Codificación de las representaciones que realizó cada alumno de acuerdo al tipo de problema, en el grupo de alumnos rurales

4.5. Análisis de las frecuencias de representaciones de alumnos urbanos.

PROBLEMA TIPO I		PROBLEMA TIPO II		PROBLEMA TIPO III	
TIPO	FRECUENCIA	TIPO	FRECUENCIA	TIPO	FRECUENCIA
IILT	13	IILD	6	SILT	10
ICLT	10	SILD	6	SCLT	8
IILD	6	IIAD	3	IILT	6
ICGT	5	IIAT	3	SIAT	4
SILT	3	IIOT	3	SILD	3
ICAT	2	IILT	2	ICLT	2
SCOD	2	SIAD	2	ICOT	2
SCOT	2	SIGT	2	IIAD	2
SIOD	2	SIAD	1	IIAT	2
IIAD	1	ICGT	1	IIGT	2
IIAT	1	IIAV	1	IILV	2
IIGD	1	IIGT	1	SCOT	2
SCAT	1	IIOD	1	SIAV	1
SCLT	1	SIAT	1	ICGT	1
SIGD	1	SILT	1	IILD	1
		SIOT	1	IIOD	1
				SCID	1
				SCLT	1
				SILV	1
				SIOD	1
				SIOT	1

Tabla 5: Frecuencias de representaciones que realizaron los alumnos urbanos según el tipo de problema

En la tabla 9, se observan las representaciones que realizaron los estudiantes urbanos y la frecuencia que tuvieron. Para el problema tipo I los estudiantes realizaron representaciones Individuales Incorrectas de tipo analíticas basadas en la comparación de Tiempo (IILT); así como representaciones Individuales Correctas de tipo Analítica basadas en la comparación de Tiempo (ICLT). Para el problema tipo II, los alumnos urbanos realizaron representaciones Individuales Incorrectas de tipo Analíticas basadas en la comparación de Distancias (IILD) seguida de representaciones Sintéticas Incorrectas de tipo Analítica basadas en la comparación de Distancias (SILD); mientras que para el problema tipo III, prefieren hacer representaciones Sintéticas Incorrectas de tipo analítica basadas en la comparación de tiempo (SILT), y representaciones Sintéticas Correctas de tipo Analíticas basadas en la comparación de Tiempo (SCLT).

A continuación, se hace un análisis de las representaciones más frecuentes realizadas por los alumnos urbanos en cada tipo de problema.

4.5.1. Análisis de representaciones más frecuentes por alumnos urbanos en el problema tipo I

- **IIIT:** Representaciones Individuales incorrectas de tipo analíticas basadas en la comparación de tiempos. En la ilustración 2 se muestra un ejemplo de dicha representación.

Al tanto

$$\text{Pepe} = \frac{100 \text{ m}}{2.5 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 40 \text{ seg}$$

$$\text{Toño} = \frac{60}{1.5 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 40 \text{ seg}$$

A los 40 segundos

$$v = \frac{d}{t} \quad t = \frac{d}{v} \quad t = \frac{d}{v} \quad t = \frac{160 \text{ m}}{4 \frac{\text{m}}{\text{s}}}$$

$$\frac{160 \text{ m}}{4 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 40 \text{ s}$$

$$\text{Pepe} (2.5)(40 \text{ s}) = 100 \text{ m}$$

$$\text{Toño} (1.5)(40 \text{ s}) = 60 \text{ m}$$

Ilustración 2: Representación IIIT alumno urbano para el problema tipo I

En este tipo de representaciones se considera un uso analítico de la fórmula de velocidad constante para obtener el tiempo de encuentro, que sucede cuando Pepe ha recorrido 100m y Toño 60m, se considera que la respuesta es incorrecta porque no se identifica un proceso lógico, primero encuentra el tiempo de encuentro y después el punto de encuentro, sin embargo, no existen cálculos o análisis de la fórmula para determinar cómo obtuvo la distancia recorrida por cada niño para llegar al punto de encuentro. Al finalizar hace un cálculo de cómo obtener la distancia recorrida basado en una fórmula que la obtuvo por una fuente externa, sin embargo, no existe una estrategia bien definida.

- **ICLT:** Representaciones Individuales correctas de tipo analíticas basadas en la comparación de tiempos. En la ilustración 3 se muestra un ejemplo de dicha representación.

1.

Despeje de t

$$v = \frac{d}{t} \quad t = \frac{d}{v}$$

$$t = \frac{d}{v_1 + v_2}$$

Sustitución

$$t = \frac{160 \text{ m}}{1.5 \text{ m/s} + 2.5 \text{ m/s}} = \frac{160 \text{ m}}{4 \text{ m/s}} = \underline{40 \text{ s}}$$

2.

Pepe = $(2.5 \text{ m/s})(40 \text{ s}) = \underline{100 \text{ m}}$

Toña = $(1.5 \text{ m/s})(40 \text{ s}) = \underline{60 \text{ m}}$

Ilustración 3: Representación ICLT de alumno urbano para problema tipo I

En la ilustración 3 se observa que el alumno tiene un conocimiento de la fórmula de tiempo de encuentro, la cual pudo haber encontrado en la literatura, se muestra un desarrollo de la representación típica de una clase en: datos, fórmula, sustitución y respuesta. Posteriormente obtiene el tiempo de encuentro y lo utiliza para obtener el punto de encuentro. Aquí se muestran evidencia de estrategias basadas en conceptos previos, puesto que se observa una fórmula que pudo haber investigado en la literatura.

- **IILD:** Representaciones Individuales incorrectas de tipo analíticas basadas en la comparación de distancias iguales. En la ilustración 4 podemos ver un ejemplo de dicha representación.

$x_1 = x_{01} + v_1 t_1$ $x_{01} = x_{02} + t_1 = 32 \text{ s } 00 \text{ m}$ $T = 53.3 \text{ s} - 32 \text{ s}$
 $x_2 = x_{02} + v_2 t_2$ $0 = 0$ $t_2 = 53.3 \text{ s}$ $T = 21.3 \text{ s}$
 $v_1 t_1 = v_2 (t_1 - 21.3 \text{ s})$ $x_1 = x_2$ 32 m
 $v_1 t_1 - v_2 t_1 = -21.3 \text{ s } v_2$ $t_1 = 31.95 \text{ s}$
 $t_1 = \frac{-21.3 \text{ s } v_2}{v_1 - v_2}$ $D = v_2 t_1$ $80 = 1$
 $t_1 = \frac{-21.3 \text{ s } (1.5 \frac{\text{m}}{\text{s}})}{1.5 \text{ m/s} - 2.5 \text{ m/s}}$ $D = (2.5 \frac{\text{m}}{\text{s}})(31.95 \text{ s})$ $\frac{80 \text{ m}}{1.5 \frac{\text{m}}{\text{s}}}$
 $D = 79.87 \text{ m}$ $(1.5 \frac{\text{m}}{\text{s}})$
 $t_1 = \frac{-31.95 \text{ m}}{-1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}$ $\frac{80}{\frac{48}{32}} \rightarrow \frac{80}{1.5}$

Ilustración 4: Representación IILD de alumno urbano para realizar el problema tipo I

En la ilustración 4 podemos observar que también tiene un conocimiento sobre la rapidez constante, y también hace uso de la fórmula para el punto de encuentro, sin embargo, en su respuesta dice que el punto de encuentro ocurre a los 79.87m, por lo que podemos deducir que el alumno piensa que se encuentran los sujetos cuando han recorrido la misma distancia. Aquí se vuelve a presentar un comportamiento de operaciones aleatorio sin orden. Inclusive se puede notar que no analizó su respuesta, puesto que obtuvo un tiempo negativo.

- **ICGT:** Representaciones Individuales correctas de tipo gráfica basadas en la comparación de tiempo.

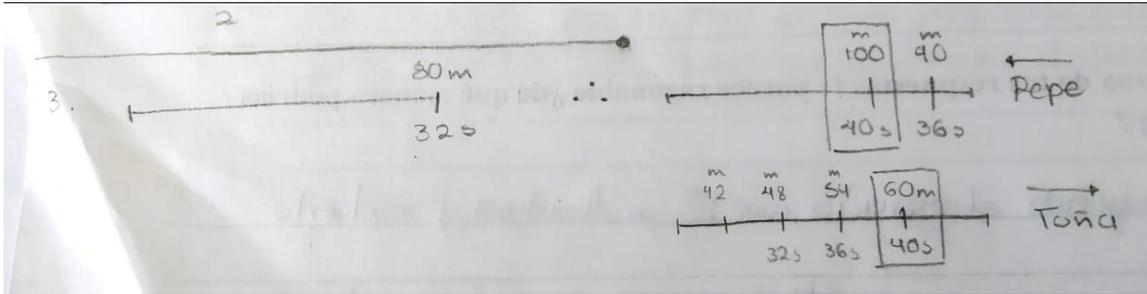


Ilustración 5: Representación ICGT de alumno urbano para problema tipo I

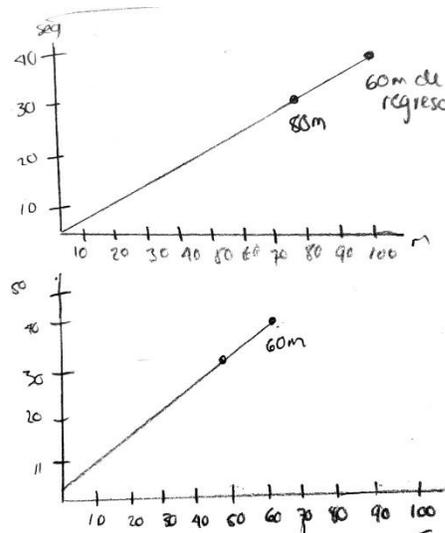


Ilustración 6: Representación ICGT realizada por alumno urbano en el problema tipo I

Las representaciones que se muestran en las ilustraciones 5 y 6, comienzan con una división en intervalos de tiempo iguales y analiza la distancia. El alumno de la ilustración 5, lo hace en manera unidimensional y obtiene el punto de encuentro a los 40s y observa la distancia en el punto de encuentro, mientras que el alumno de la ilustración 6 hace una gráfica de un plano cartesiano de la distancia por cada sujeto y también analiza los intervalos de tiempo y encuentra el punto de encuentro. Este tipo de representaciones fueron muy efectivas, ya que sólo a través de análisis cualitativos como el observar que Pepe va de regreso cuando Toña aún se encuentra rumbo al poste y determinar a través de intervalos de similar tiempo cuál es el tiempo y distancia de encuentro.

4.5.2. Análisis de representaciones más frecuentes por alumnos urbanos en el problema tipo II

- **IILD:** Representaciones individuales incorrectas de tipo analítica basadas en la comparación de distancias.

$v_1 = \frac{2x}{t_1}$ $v_2 = \frac{2x}{t_2}$ $v_1 > v_2$
 si $t_1 > t_2$ entonces $v < t_1$ $\Rightarrow \frac{2x}{t_1} > \frac{2x}{t_2}$ (*)
 $\frac{x}{t_1} > \frac{x}{t_2}$
 $\left(\frac{x}{t_1}\right) > \left(\frac{x}{t_2}\right)$
 $2x = \frac{v_1 t_1}{2}$ $x = \frac{v_2 t_2}{2}$
 $\frac{v_1 t_1}{2} = \frac{v_2 t_2}{2}$
 $v_1 t_1 = v_2 t_2$
 para $t_1 < t_2$
 punto del reposo
 $x_1 = x_0 + v_1 t_1$ $x_2 = x_0 + v_2 t_2$
 $x_1 = v_1 t_1$ $x_1 = x_2$
 $v_1 t_1 = v_2 t_2$

Ilustración 7: Representación IILD de alumno urbano para el problema tipo II

La representación de la ilustración 7 comienza con la fórmula de velocidad; por lo que puede considerarse al procedimiento como un análisis de la fórmula, es decir una representación analítica; no hay una nomenclatura clara sobre que significan cada literal, pero se deduce de la fórmula que V es velocidad; X es distancia y “t” es tiempo; después realiza un despeje de la distancia e iguala ambas ecuaciones; con este despeje se indica que el encuentro ocurrirá cuando pepe y toña hayan recorrido la misma distancia. Termina haciendo una comparación entre las velocidades, pero no hay una estrategia clara; es evidente que hizo intentos anteriores que borró, pero siempre alrededor de utilizar una ecuación o una fórmula, esto muestra una gran afinidad a tratar de resolver siempre los problemas matemáticos tratando de plantear una ecuación o fórmula sobre otro tipo de representación.

- **SILD:** Representaciones sintéticas incorrectas de tipo analíticas basadas en la comparación de distancias.

$x = \frac{(v_1)(t_1)}{2}$ $x = \frac{(v_2)(t_2)}{2}$ $v_1 t_1 = v_2 t_2$

~~$x_1 = x_0 + v_1 t_1$~~ ~~$x_2 = x_0 + v_2 t_2$~~

$x_1 = v_1 t_1$ $x_2 = v_2 t_2$

El punto va a estar determinado por la velocidad y el tiempo que recorren cada uno

Ilustración 8: Representación SILD realizada por un alumno urbano para el problema tipo II

Este tipo de representación se muestra en la ilustración 8; el alumno comienza con la fórmula de velocidad que él ya conoce por lo que puede considerarse un análisis de la fórmula, es decir una representación analítica; no hay una nomenclatura clara sobre que significan cada literal, pero se deduce de la fórmula que V es velocidad; X es distancia y “t” es tiempo; después realiza un despeje de la distancia e iguala ambas ecuaciones; con este despeje él indica que el encuentro ocurrirá cuando pepe y toña hayan recorrido la misma distancia. Termina con una verbalización “*el punto va a estar determinado por la velocidad y el tiempo en que recorren cada uno*”, aquí se muestra un típico uso de una representación sintética desde el punto de vista de Cañadas y Figueiras (2011), donde utiliza otro tipo de representación diferente al que comenzó con la finalidad de hacer más reducido el procedimiento para resolver el problema.

4.5.3. Análisis de representaciones más frecuentes por alumnos urbanos en el problema tipo III

- **SILT:** Representaciones sintéticas incorrectas de tipo analíticas basados en la comparación de tiempo.

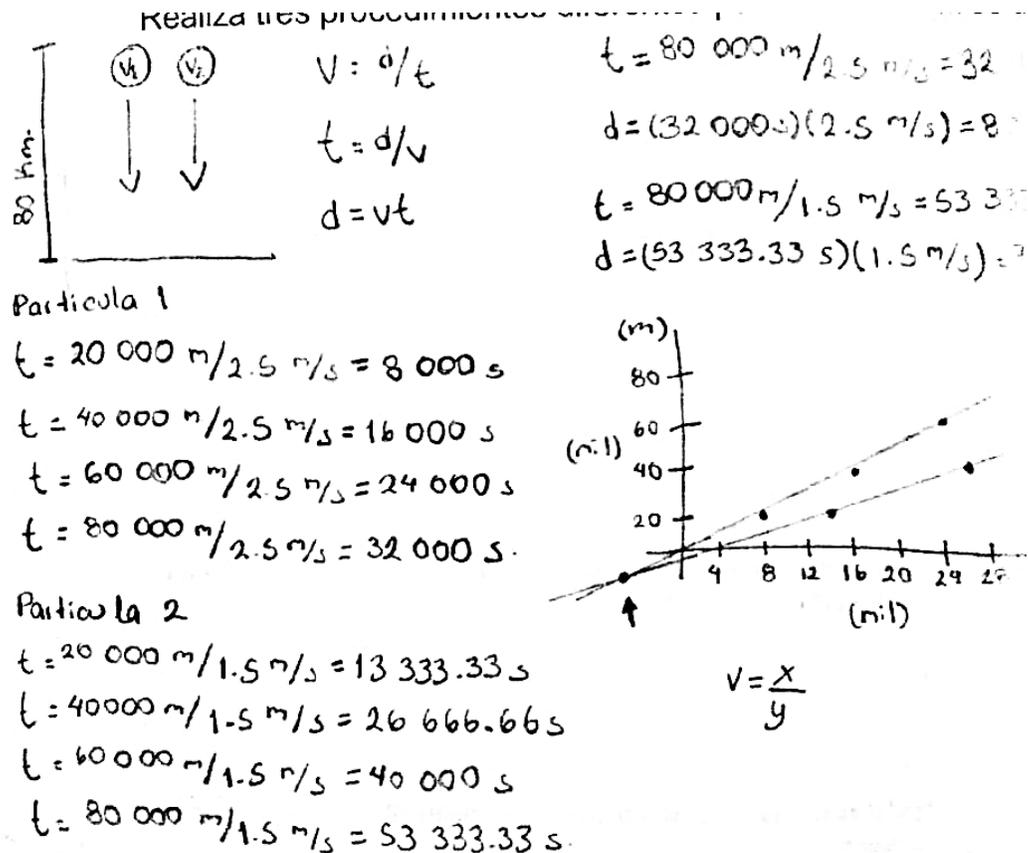


Ilustración 9: Representación SILT realizada por un alumno urbano para el problema tipo III

Esta representación de tipo sintética se muestra en la ilustración 9; sin embargo a diferencia de la mostrada en la ilustración 8 existen dos representaciones gráficas que sirven de apoyo en el procedimiento del problema; es de tipo analítica sin embargo hace operaciones de manera aleatoria sin estrategia, pero se clasificó en la comparación de tiempos, porque buscó el punto de encuentro cuando las rectas que representan el fenómeno cruzaran, señalando con una flecha lo que él consideraba como el punto de intersección pero no dio una respuesta al problema.

- **SCLT:** Representaciones sintéticas correctas de tipo analítica basadas en la comparación de tiempos.

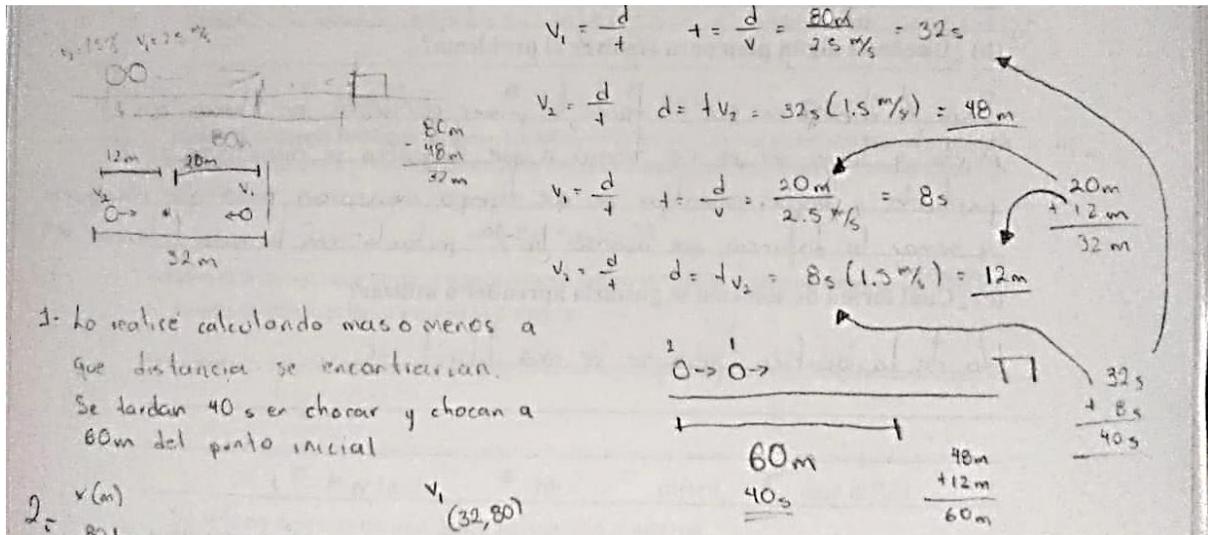


Ilustración 10: Representación SCLT realizada por un alumno urbano para el problema tipo III

En la ilustración 10 se muestra una representación que inicia con un dibujo que sirve de auxiliar para la comprensión de la situación planteada, acto seguido comienza con un análisis de la fórmula de velocidad, es por eso que se clasifica de tipo analítica, hace una comparación de tiempos iguales, porque establece complementos de distancia, es decir primero obtiene el tiempo en llegar al poste por la partícula 1 y después calcula cual es la distancia que recorrerá la partícula 2 en el mismo tiempo; realiza una resta de la distancia que separa a las partículas en el $t=32s$; para terminar calculando el tiempo con base en las velocidades de cada partícula. Es importante notar que no se muestra como obtuvo la distancia faltante de 20m para la partícula 1. Se puede observar que no hay un orden en los cálculos ni en la presentación del resultado. Así mismo termina con una verbalización, esta vez para apoyar su respuesta. Esta utilización de más de un tipo de representación fue utilizada en dos sentidos: para poder auxiliar al resolutor a comprender la situación y también para apoyar su respuesta y sus cálculos para dar un mayor sustento a su respuesta.

4.6. Análisis de las frecuencias de representaciones de alumnos rurales

Problema Tipo I		Problema Tipo II		Problema Tipo III	
Tipo	Frecuencia	Tipo	Frecuencia	Tipo	Frecuencia
IIGD	10	IIGD	23	IILD	10
IILD	10	SIGD	7	SIOD	5
IIOD	9	IHAV	4	ICGT	4
SCOT	5	SIGV	4	IAT	3
ICOT	3	SIOD	4	IIOD	3
ICLT	2	IILT	2	IIGT	2
ICGT	1	SILD	2	IILT	2
ICLT	1	IIGD	1	SIGT	2
IHAV	1	ICGD	1	SILT	1
IILT	1	IIOD	1	ICOT	1
SCGT	1	SIAD	1	SCGT	1
SCLT	1	SIGD	1	SIGD	1
SIOD	1			SILD	1

Tabla 6: Cantidad de repeticiones por representación, que utilizaron los alumnos rurales para resolver los diferentes tipos de problemas.

Como se observa en la tabla 6, los alumnos rurales en el problema I realizaron con mayor frecuencia Representaciones individuales incorrectas basadas en la comparación de distancias (IIGD), seguidas de Representaciones incorrectas de tipo analíticas basadas en la comparación de distancias (IILD), mientras que para el problema tipo II, realizaron con mayor frecuencia representaciones individuales incorrectas de tipo gráfica basados en la comparación de distancias (IIGD) seguidas de representaciones sintéticas incorrectas de tipo gráfica basadas en la comparación de distancias (SIGD), por último, para el problema tipo III, realizaron representaciones individuales incorrectas de tipo analítica basadas en la comparación de distancias (IILD), seguidas de representaciones sintéticas incorrectas de tipo tabular basadas en la comparación de distancias (SIOD). La gran mayoría de las representaciones presentan un orden aleatorio de operaciones y no se observa la presencia de estrategias que los lleve a resolver problemas de forma ordenada y lógica. Los alumnos rurales hacen uso representaciones sintéticas en mayor parte para hacer su procedimiento en menor cantidad de pasos, ocasionando en su mayoría, que el análisis fuera superficial, y por consecuencia cometieron más errores que los alumnos urbanos. En alumnos rurales todavía podemos encontrar respuestas como: “se encuentran cuando chocan con el objeto”, “está demasiado difícil, no lo pude resolver de más de una forma”, cosa que demuestra que los alumnos realizan rutinariamente problemas algorítmicos.

4.6.1. Análisis de representaciones más frecuentes por alumnos rurales en el problema tipo I

Para el problema tipo I, los alumnos rurales prefirieron las siguientes representaciones.

- **IIGD:** Representaciones Individuales incorrectas gráficas basadas en la comparación de distancias iguales.

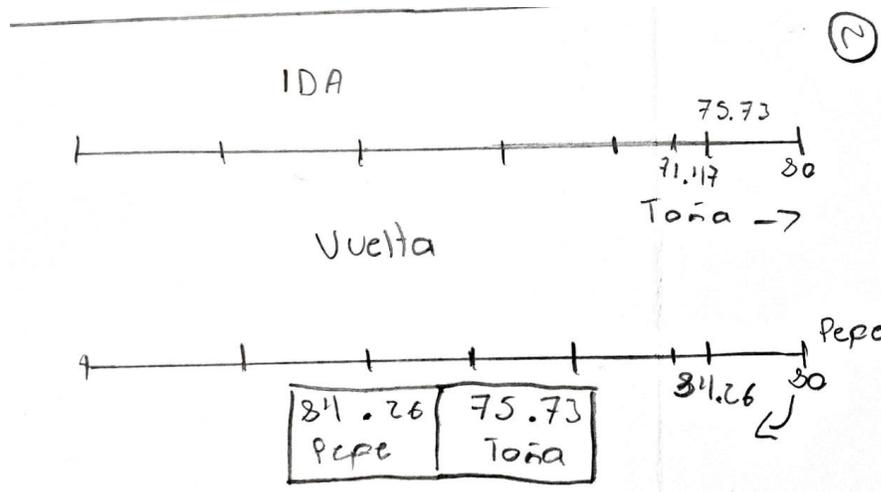


Ilustración 11: Representación IIGD realizada por alumnos rurales para el problema tipo I

Como se observa en la ilustración 11, se determina que el punto de encuentro sucede a distancias iguales, es decir a la vuelta de la carrera, es de tipo gráfica porque realiza una recta y realiza una división de igual magnitud, aunque no coloca el valor de cada marca. Hay unas cifras de 75.73 y 84.26 adimensionales que no especifican como las obtuvo, por lo que no podemos aseverar que represente. Se muestra una operación aleatoria y la forma de obtener la respuesta no permite apreciar técnica alguna de RP. No existe una estrategia basada en conceptos.

- **IILD:** Representaciones Individuales incorrectas basadas en la comparación de distancias iguales.

$$\begin{aligned}
 & \textcircled{1} \text{ Pepe } \frac{2.5 \text{ m/s}}{80} = 31.25 \\
 & \frac{2.5}{160} = 15.625 \\
 & \text{Toña } \frac{1.5}{60} = 25 \\
 & \frac{1.50}{30} = 50 \\
 & -35.33 \\
 & \underline{32} \\
 & 12.32 = 2.5 \\
 & = \underline{8.54 \text{ m}} \\
 & \text{Ventaja de pepe} \\
 & \text{vs} \\
 & \text{Toña} \\
 & 84.26 \quad 75.73 \\
 & \text{Pepe} \quad \text{Toña}
 \end{aligned}$$

Ilustración 12: Representación IILD de un alumno rural para realizar el problema tipo I

Como se observa en la ilustración 12 la representación no tiene una forma lógica de análisis, realizan operaciones al azar para determinar sus respuestas, aquí el alumno muestra un desconocimiento del fenómeno de rapidez instantánea puesto que hace una división de la velocidad sobre la distancia, así mismo, no muestra un análisis sobre las respuestas, puesto que los resultados no corresponden a los que el debería de obtener si realizara las operaciones que el plantea, después indica una distancia que muestra una “ventaja de pepe sobre toña”, cosa que no sucede, puesto que parten al mismo tiempo del mismo punto.

4.6.2. Análisis de representaciones más frecuentes por alumnos rurales en el problema tipo II

- **IIGD:** Representaciones individuales incorrectas de tipo gráfica basadas en la comparación de distancias.

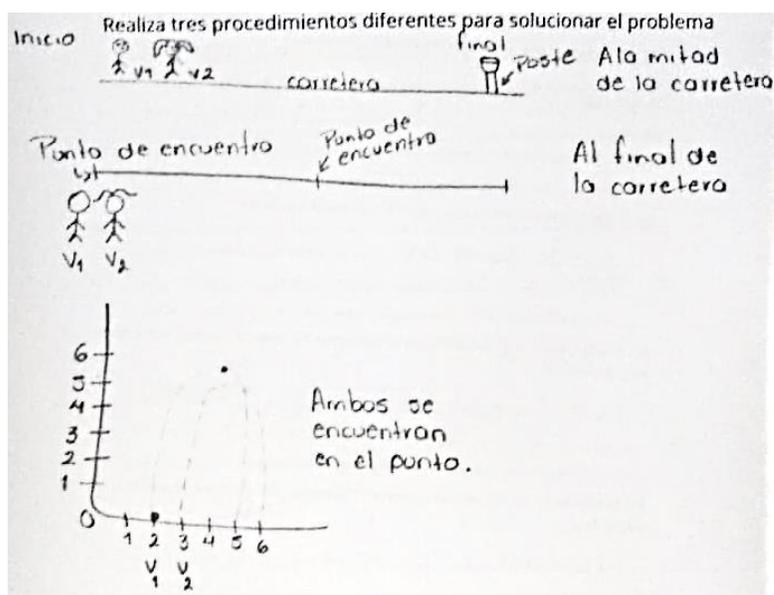


Ilustración 13: Representación IIGD realizada por un alumno rural para el problema tipo II

En la ilustración 13, se muestra que el alumno sólo realiza una gráfica y un dibujo para ayudar a comprender la situación, se clasifica de tipo gráfica por que lo único que muestra son dos gráficas una del recorrido lineal y un plano cartesiano donde uno de sus ejes es la velocidad y el otro no escribe dimensión alguna. Se nota que no existe estrategia para dar solución, una representación que apunta más a la necesidad no entregar la tarea “en blanco”; hay una anotación que identifica el punto de encuentro a la mitad de la carrera y al final de la segunda vuelta, lo que muestra que el alumno piensa que los niños se encontrarán al finalizar la carrera, es decir cuando hallan recorrido la misma distancia.

- **SIGD:** Representaciones sintéticas incorrectas de tipo gráfico basadas en la comparación de distancias.

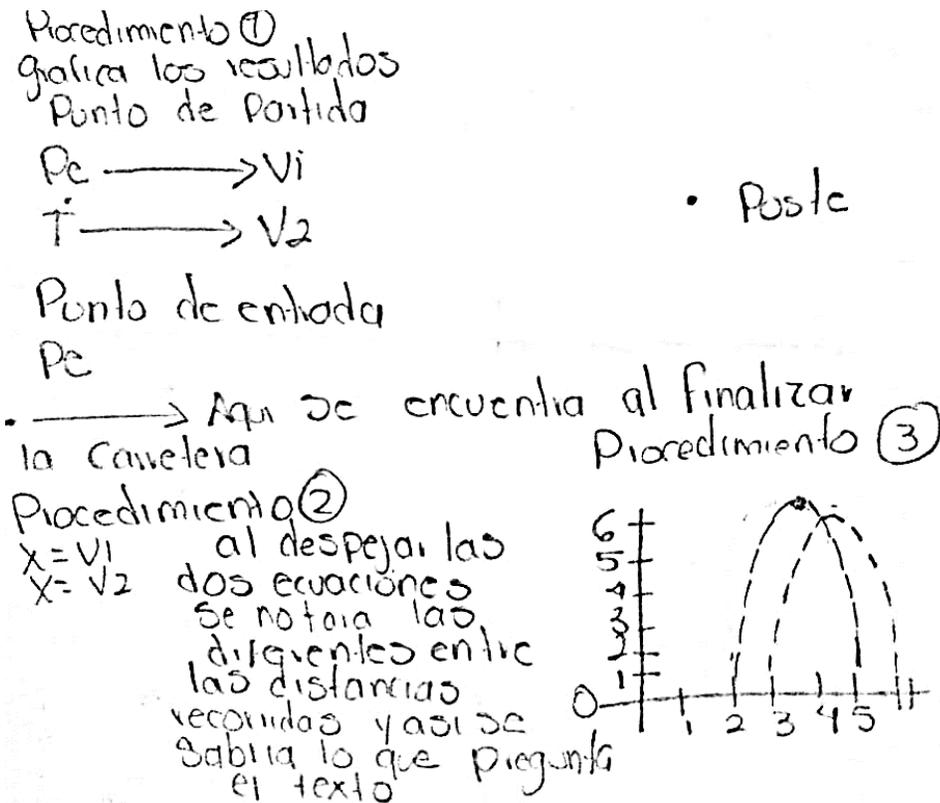


Ilustración 14: Representación SIGD realizada por un alumno rural para el problema tipo II

En la ilustración 14 se muestra que el alumno realiza un esquema para mostrar como ocurre el fenómeno planteado en el problema, indica con una anotación que se encuentra al finalizar, es decir cuando la distancia de los niños es la misma, es decir compara distancias para dar solución al problema. Se observa que no existe una estrategia, sólo ha anotaciones aleatorias, hay una anotación que dice “al despejar las dos ecuaciones se notará las diferentes entre las distancias recorridas y así se sabría lo que pregunta el texto”. Termina con una gráfica que indica procedimiento 3, donde muestra una gráfica sin dimensiones. Hay una alta probabilidad de que el alumno sólo realizó anotaciones con la finalidad de no entregar en blanco.

4.6.3. Análisis de representaciones más frecuentes por alumnos rurales en el problema tipo III

- **IILD:** Representaciones individuales incorrectas de tipo analítica basadas en la comparación de distancias.

The image shows a student's handwritten work on a piece of paper. On the left side, under the heading "Solución =", there is a section titled "Datos" with the following values: $d = 80\text{ m}$, $V_1 = 2.5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $V_2 = 1.5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, and $t = ?$. On the right side, under the heading "= Fórmula =", the student has written the formula $t = \frac{d}{v}$. Below this, two calculations are shown: $t_1 = \frac{80\text{ m}}{2.5 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 32\text{ s}$ and $t_2 = \frac{80\text{ m}}{1.5 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 53.33\text{ s}$.

Ilustración 15: Representación IILD, realizada por un alumno rural para el problema tipo III

En la ilustración 15, se observa que intenta imitar la estrategia que comúnmente muestran los libros de física para resolver problemas, iniciando con los datos, anota la fórmula de velocidad y lo único que hace es calcular es el tiempo que tardaría cada partícula para recorrer 80m, por ello se clasifica que compara las distancias. No otorga una respuesta.

- **SIOD:** Representaciones sintéticas incorrectas de tipo verbal basadas en la comparación de distancias.

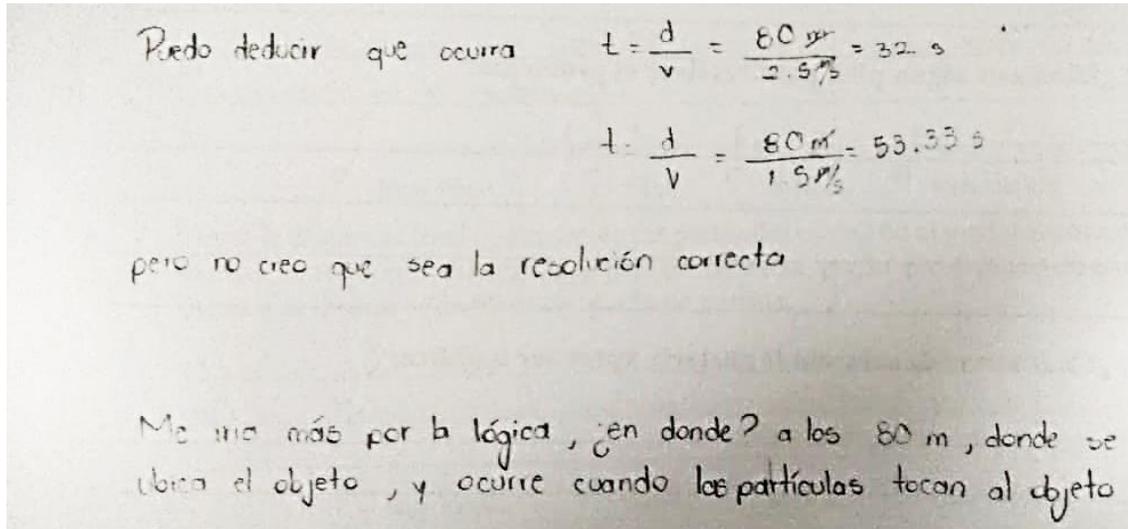


Ilustración 16: Representación SIOD realizada por alumno rural para el problema tipo III

En la ilustración 16, se observa que intenta imitar la estrategia que comúnmente muestran los libros de física para resolver problemas, iniciando con los datos, anota la fórmula de velocidad y lo único que hace es calcular es el tiempo que tardaría cada partícula para recorrer 80m. Termina con una verbalización donde claramente compara distancias iguales, porque anota que las partículas chocaran en el poste. Este tipo de representación sintética se utiliza en dos sentidos: es descriptiva del procedimiento porque indica los pasos que ha seguido per a la vez es para sintetizar su razonamiento, ya que termina por ignorar sus cálculos y sólo responde lo que ha comprendido en la situación planteada.

CONCLUSIONES

En el rendimiento se observó que una mayor cantidad de alumnos urbanos respondieron de manera correcta independientemente del tipo de problema con respecto a los alumnos rurales; sin embargo, el formato de presentación del problema tiene un efecto mayor que podría tener otro factor como el contexto sociocultural. Se observa que tanto alumnos rurales como urbanos pueden resolver de mejor manera problemas de tipo real, donde pueden asociar las cantidades numéricas que se plantean en el problema con un esquema o dibujo que ellos observan y pueden interpretar en su mente, mientras que problemas que no tengan datos numéricos o sólo verbalizaciones, tienen un efecto negativo en el porcentaje de respuestas correctas. De forma más precisa, problemas que requieran una mayor abstracción o presenten situaciones menos reproducibles aumentan el porcentaje de respuestas incorrectas, sobre problemas más “reales”.

En problemas de tipo “real”, los alumnos presentan una ligera inclinación hacia representaciones de tipo analítica, mostrando que conocen el concepto de “rapidez” y la fórmula asociada a este. Sin embargo, cuando los problemas exigen un desarrollo más abstracto o se les presenta una tarea que carece de datos numéricos, los alumnos pueden interpretar la tarea como incompleta o sin solución, puesto que no conciben como respuesta a una interpretación del concepto de rapidez instantánea, tal como puede ser una gráfica, una fórmula o una ecuación. Es importante también resaltar que cuando se presentan problemas de tipo “realista”, los alumnos bajan en rendimiento, aunque se traten de la misma situación que un problema “real” o contextual. La presentación del problema influye en la comprensión de la situación y, en consecuencia, en lo que ellos podrían determinar qué debería ser la respuesta, pero no influyen de manera significativa en el tipo de representación que escogen. Independientemente del tipo de problema, los alumnos urbanos que participaron en el estudio casi siempre eligen representaciones algebraicas o analíticas, mientras que alumnos rurales eligen representaciones gráficas.

Las representaciones sí muestran grandes diferencias que se pueden atribuir al contexto sociocultural y posiblemente, al discurso escolar que sucede en dicho contexto; se observaron dos grandes comportamientos generalizados: en el caso de alumnos urbanos, existe una jerarquización de representaciones y ellos independientemente del tipo de problema al que se enfrentan, tienen una inclinación a realizar aquellas representaciones que a su juicio son más difíciles de aprender;

tal parece que el contexto en que se encuentran se les ha transmitido que una ecuación o una fórmula otorga una respuesta más válida que la proveniente de otro tipo.

En cambio, los alumnos rurales, su contexto los influye para que resuelvan el problema en el menor tiempo y con base en esto jerarquizan la elección de sus representaciones; evitan representaciones que les presenten obstáculos o dificultades, muestran un comportamiento de “análisis superficial” y sólo desean entregar la tarea para evitar alguna sanción. Se inclinan por procedimientos gráficos, tabulares y verbalizaciones sobre representaciones analíticas o algebraicas. Las representaciones de los alumnos rurales presentan datos inventados o no muestran el procedimiento de obtención, lo que indica que su entrenamiento en RP se basa principalmente en la aplicación de algoritmos sin estrategias previas, y sólo muestran operaciones que realizan sin orden ni secuencia lógica que permita observar sus procedimientos de solución.

Tal parece que el contexto sociocultural influye sobre un alumno cuando intenta resolver un problema en dos vías muy claras: por un lado, le determina qué propiedades de los objetos matemáticos son más importantes para aprender y por consecuencia, el tipo de representación que más se ajusta a esto; provocando una jerarquización de representaciones, donde existen representaciones de mayor jerarquía y que deben privilegiarse sobre otras, conclusión que es equivalente a lo que muestran los estudios anteriores. Sin embargo, también la sociedad, influye en cuestiones de estrategia y toma de decisiones, en donde se les indica que los conocimientos son válidos y correctos cuando pueden resolver los problemas de manera más “fácil” y en el menor tiempo posible; aseveración que se observa en los alumnos rurales, cuando escogen representaciones con menos procesos y que les presenten menos obstáculos.

Aunque más del 95% de los alumnos intentó resolver la tarea, se observó que puede existir una influencia sobre la cuestión de entregar una tarea sin resolver debido a que se encontraron representaciones donde realizan operaciones sin sentido, sin un análisis de la situación y sólo entregan procedimientos ilógicos; esto deja como una nueva investigación, si esta influencia puede conducir a los alumnos a obstáculos o dificultades o inclusive efectos en el área socioemocional.

Si bien existen diferencias en el nivel de razonamiento, los resultados de la cantidad de respuestas correctas e incorrectas no muestra que este factor sea determinante para obtener éxito en RP, de acuerdo al análisis de los datos obtenidos, debido a que las diferencias no son en la misma proporción; los alumnos rurales tienen un rendimiento menor al de los urbanos, casi en relación 2

a 1, sin embargo, el nivel de razonamiento no presenta tal diferencia, más del 50% de ambos grupos no obtuvo una respuesta correcta en al menos una representación. Esto es congruente con los resultados de las pruebas estandarizadas donde colocan al rendimiento global como insuficiente; sin embargo, en este estudio, no se observó una brecha demasiado grande como la reportada, ya que los porcentajes de respuestas correctas entre los grupos no muestran diferencias significativas.

Si bien ambos grupos tuvieron una mayor cantidad de representaciones individuales sobre las sintéticas, se han encontrado otros usos que originalmente no se mostraron en los estudios anteriores. El primer uso es el ya reportado por estudios anteriores; donde los alumnos utilizaron representaciones sintéticas, como una forma de realizar de forma más rápida el problema, lo que en la mayoría de los casos los condujo a errores de interpretación, puesto que el mayor uso de representaciones sintéticas obtuvo respuestas incorrectas. El segundo uso que se encontró es como auxiliar o como ayuda para los alumnos para llegar a comprender la situación planteada y con ello comenzar usualmente a plantear ecuaciones o anotar fórmulas conocidas. Un tercer uso es aquel como soporte; con esto los alumnos intentan reafirmar su respuesta explicando sus razones por las que la dan, casi siempre de forma verbal. Se necesitan investigaciones que conduzcan a una tipología sobre el uso de representaciones sintéticas en la RP.

Casi el 85% de los alumnos que participaron en el estudio no fue capaz de realizar más de 2 representaciones, siendo que los alumnos urbanos de este estudio mostraron una mejor capacidad de realizar múltiples representaciones, esto lleva a concluir que independientemente del contexto, los alumnos que participaron en el estudio no están entrenados en el uso de múltiples representaciones como estrategia para RP. El que los alumnos no puedan realizar representaciones múltiples conduce a una inconsistencia: pensar que dos procedimientos diferentes utilizados para resolver el mismo problema, conducen a soluciones diferentes, lo que impacta sobre las estrategias que involucran el análisis de situaciones desde distintas perspectivas.

Referencias

- Alonso, I. B., y Martínez, S. N. (2003). La resolución de problemas matemáticos. Una caracterización histórica de su aplicación como vía eficaz para la enseñanza de la matemática. *Pedagogía Universitaria*, 8(3).
- Barton, B. (2012). Preface to "Ethnomathematics and Philosophy". En H. Forgasz, R. F. D., (Eds), *Towards Equity in Mathematics Education: Gender, Culture, and Diversity* (págs. 227-229). Berlín: Springer.
- Blanco, L. J. (1993a). *Consideraciones elementales sobre la resolución de problemas*. Badajoz: Universitas Editorial.
- Blanco, N. L. (1993b). Una clasificación de problemas matemáticos. *Epsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"*, 25, 49-60.
- Blanco, N. L., y Pino, C. J. (2015). ¿Qué entendemos por problema de matemática? En B. N. (ed), *La resolución de problemas de matemáticas en la formación inicial de profesores de Primaria* (págs. 81-91). Extremadura.: Universidad de Extremadura.
- Borasi, R. (1986). On the nature of problems. *Educational studies in mathematics V. 17*, 125-141.
- Cañadas, M. C., y Figueiras, L. (2011). Uso de representaciones y generalización de la regla del producto. *Infancia y Aprendizaje*, 34(4), 409-425.
- Carraher, T. N., Carraher, D. W., y Schliemann, A. D. (1985). Mathematics in the streets and in schools. *British Journal of Development Psychology* 3, 21-29.
- Carrillo, Y. J. (1998). La resolución de problemas en la enseñanza secundaria: ejemplificación del para qué. *Epsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"*, 40, 15-26.
- Castro, M. E. (2008). *Resolución de problemas, ideas, tendencias e influencias en España*. Madrid: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.
- Corona, A., Sánchez, M., González, E., y Slisko, J. (2012). Habilidades Cognitivas y la resolución de un problema de cinemática: Un estudio comparativo entre los estudiantes de secundaria, bachillerato y universidad. *Lat. Am. J. Physc. Educ. Vol. 6*, 292-299.

- DeBellis, V. A., y Goldin, G. A. (2006). Affect and meta-affect in mathematical problem solving: a representational perspective. *Educational Studies in Mathematics*, 63, 131-147.
- Diaz, J. H. (2012). *Estudio comparativo entre el aprendizaje Colaborativo y el tradicional en la enseñanza de los conceptos de calor y temperatura a nivel medio superior*. México: Tesis de maestría. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada.
- Díaz, J. J., y Bermejo, V. (2007). Nivel de abstracción de los problemas aritmeticos en alumnos urbanos y rurales. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 10(3), 335-364.
- Díaz, M. V., y Poblete, Á. (2001). Contextualizando tipos de problemas matemáticos en el aula. *Números No. 45*, 33-41.
- Dufresne, R. J., Gerace, W. J., y Leonard, W. J. (1997). Solving physics problems with multiple representations. *The Physics Teacher*, 35(5), 270-275.
- Fergusson-Hessler, M. G., y de Jong, T. (1990). Studying physics texts: Differences in study processes between good and poor performers. *Cognition and Instruction* 7, 41-54.
- Gök, T., y Silay, I. (2010). The Effects of Problem Solving Strategies on Students' Achievement, Attitude and Motivation. *Latin-American Journal of Physics Education*, 4(1), 2.
- Golding, G., y Shteingold, N. (2001). System of representatios and the development of mathematical concepts. En C. A. A., y C. F. R., *The roles of representation in School Mathematics 2001 Yearbook*. The National Council of Teachers of Mathematics.
- Gonzalez, F. (2005). Cómo desarrollar clases de matemática centrada en resolución de problemas. *Cuadernos Educare. Cuaderno nº 5. Serie Roja, (2ª ed)*. Escuela de Educación. Universidad de Los Andes. Mérida, Venezuela: Editorial Programa de Perfeccionamiento y actualización Docente (PPAD). , 235-262.
- Hernández, S. R., Fernández, C. C. y Baptista, L. M. (2014) *Metodología de la Investigación*. (6ª ed). México, DF: Mcgraw-Hill
- Heit, I. (2012). Estrategias metacognitivas de comprensión lectora y eficacia en la Asignatura Lengua y Literatura. *Revista de Psicología* 8 (15), 79-96.

- Heller, J. I., y Greeno, J. G. (1978). Semantic processing in arithmetic word problem solving. *Midwestern Psychological Association Convention*.
- Hiebert, J., y Carpenter, T. (1992). Learning and teaching with understanding. En D. Grows, *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. (págs. 65-97). New York: Macmillan.
- House, P. A., Wallace, M. L., y Johnson, M. A. (1983). Problem solving as a focus: How? When? Whose responsibility. *The agenda in action*,, 9-19.
- Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación INEE. (2018). *Resultados PLANEA*. Obtenido de <https://www.inee.edu.mx/evaluaciones/planea/resultados-planea/>
- Kaput, J. (1987). Representation systems and mathematics. En C. (. Janvier, *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (págs. 19-26). Hillsade, N.J.: Lawrence Erlbaum Associated.
- Kolloffel, B., Eysink, T. H., De Jong, T., y Wilhelm, P. (2009). The effects of representational format on learning combinatory from an interactive computer simulation. *Instructional Science* 37(6), 503-517.
- Mateos, M. (2001). *Metacognición y educación*. Buenos Aires: Aique.
- Meltzer, D. (2005). Relation between student's problem-solving performance and representational format. *American Journal of Physics* 73 (5), 463-748.
- OCDE. (2016a). *Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos (PISA) 2015-Resultados*. México: OCDE.
- OCDE. (2016b). *¿Qué hace diferentes a las escuelas urbanas?* México: OCDE.
- Oliveras, M. L. (1996). *Etnomatemáticas. Formación de profesores e innovación*. Granada: Comares.
- Organización para la Cooperación de Desarrollo Económico. (2016). *Resultados Pisa 2015*. Obtenido de <https://www.oecd.org/pisa/PISA-2015-Mexico-ESP.pdf>

- Pino, J. (2013). La resolución de problemas y el dominio afectivo: un estudio con futuros profesores de matemática de secundaria. *Las emociones en la enseñanza y el aprendizaje de las Ciencias Experimentales y las Matemáticas. Badajoz, España: DEPROFE*, 117-148.
- Polya, G. (1965). *¿Cómo plantear y resolver problemas?* México: Trillas.
- Radford, L. (1998). On signs and representations a cultural account. *Scientia Paedagogica Experimentalis*, 35, 277-302.
- Rafael, A. L. (2007). *Desarrollo Cognitivo: Las teorías de Piaget y de Vygotsky*. Barcelona: Universidad Autónoma de Barcelona.
- Resnick, L. (1987). Learning in school and out. *Educational Researcher*, 16, 13-20.
- Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *PNA 4(1)*, 1-14.
- Rodríguez, Q. E. (2006). *Metacognición, resolución de problemas y enseñanza de matemáticas una propuesta integradora desde el enfoque antropológico*. Madrid: Universidad Complutense de Madrid, Servicio de Publicaciones.
- Santos, L. (1994). La resolución de Problemas en el aprendizaje de las matemáticas. En C. México, *Cuaderno de Investigación No. 28/6* (págs. 1-135). México: CINVESTAV .
- Saxe, G. B. (1992). Studying Children's Learning in Context: Problems and Prospects. *The Journal of the Learning Sciences*, 2(2), 215-234.
- Saxe, G. B., & Gearhart, M. (1990). The development of topological concepts in unschooled straw weavers. *British Journal of Development Psychology*, 8, 251-258.
- Secretaría de Educación Pública. (2009). *Acuerdo 444 por el que se establecen las competencias que constituyen el Marco Curricular Común del Sistema Nacional de Bachillerato*. México: SEP.
- Secretaría de Educación Pública. (2017). *Planes de estudio de referencia del componente básico del Marco Curricular Común de la Educación Media Superior*. México: SEP.
- Secretaría de Educación Pública. (16 de 01 de 2019). *Nuevo Currículo de la educación media superior*. Obtenido de <http://www.sems.gob.mx/curriculoems/conformacion>

- Solaz, P. J., y Sanjosé, L. V. (2008). Conocimientos y procesos cognitivos en la resolución de problemas de ciencias: consecuencias para la enseñanza. *Magis: revista internacional de investigación en educación*, 1(1), 147-162.
- Tobin, K. G., & Capie, W. (1981). The development and validation of a group test of logical thinking. *Educational and Psychological measurement*, 41(2), 413-423.
- Vergnaud, G. (1981). Quelques orientatis theoriques et des recherches francaises en Didactique des Mathematiques. *Recherches en Didactique des Mathematiques* 2.2, 215-232.
- Villegas, J. L., Castro, E., y Gutierrez, J. (2009). Representaciones en Resolución de Problemas: Un estudio de caso con problemas de optimización. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, 7(1), 279-308.
- Xochitiotzi, H. R., Corona, C. A., y Slisko, I. J. (2012). Nivel cognitivo y las habilidades de análisis de demostraciones de electrostática de estudiantes universitarios. *Latin-American Journal of Physics Education*, 6(2).