



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

**FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA**

TÍTULO DE LA TESIS

**ANÁLISIS DE UNAS ACTIVIDADES DIDÁCTICAS PARA PROMOVER EL
LENGUAJE MATEMÁTICO EN ESTUDIANTES DE NIVEL MEDIO SUPERIOR**

TESIS

**PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MAESTRA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA**

PRESENTA

LIC. JUANA ONOFRE CORTEZ

DIRECTORA DE TESIS

DRA. LIDIA AURORA HERNÁNDEZ REBOLLAR

CO-DIRECTORA DE TESIS

DRA. ILEANA BORJA TECUATL

PUEBLA, PUE. JUNIO 2020



BUAP.

DRA. LIDIA AURORA HERNÁNDEZ REBOLLAR
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y
ESTUDIOS DE POSGRADO, FCFM-BUAP
P R E S E N T E:

Por este medio le informo que la C:

ONOFRE CORTEZ JUANA

Estudiante de la Maestría en Educación Matemática, ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 05 de diciembre de 2019, con la tesis titulada:

**“ANÁLISIS DE UNAS ACTIVIDADES DIDÁCTICAS
PARA PROMOVER EL LENGUAJE MATEMÁTICO EN
ESTUDIANTES DE NIVEL MEDIO SUPERIOR”**

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

A T E N T A M E N T E.
H. Puebla de Z. a 29 de mayo de 2020

DR. JOSIP SLISKO IGNJATOV
COORDINADOR DE LA MAESTRÍA
EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA.



Ccp/Archivo:
DR/PS / T ager*

Facultad
de Ciencias
Físico-Matemáticas

Av. San Claudio y 18 sur, edif. FM1
Ciudad Universitaria, Col. San
Manuel, Puebla, Pue. C.P. 72570
01 (222) 229 55 18 Ext. 7550 y 7552

AGRADECIMIENTOS

Al Consejo de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por permitirme llegar al grato final de mi Maestría producto de su apoyo a través de la beca recibida durante mis dos años de estudios, la cual me permitió realizar y culminar este proyecto de investigación para crecer académicamente.

A mi directora de tesis Dra. Lidia Aurora Hernández Rebollar por la paciencia y apoyo que me dedicó en el transcurso de esta maestría. También agradezco a mi co-directora por el tiempo que estuvo asesorándome.

A mi jurado de tesis por su tiempo y dedicación, a mis profesores de la de la Maestría en Educación Matemática, en especial al Dr. José Antonio Juárez López por su manera de transmitir su conocimiento y alentarme a superarme cada día.

Quiero agradecer a mi madre (Ana María C. M), a mi tía (Delia C. M) y a mi hijo por estar a mi lado y ser parte de este éxito.

Agradezco a mi compañero y amigo Alejandro por su apoyo en las clases y su compañía, así como a Lic. Abigail por estar pendiente de todos los documentos y trámites que debía de hacer en su momento.

INDICE

RESUMEN.....	0
ABSTRACT	1
INTRODUCCIÓN	2
Objetivo	3
Preguntas de investigación	3
Tipo de investigación	3
CAPÍTULO 1. LENGUAJE Y LENGUAJE MATEMÁTICO.....	4
1.1 ¿Qué es un lenguaje?	4
1.2 La relación del habla, la lengua y el pensamiento con el lenguaje	13
1.3 Los principios y reglas que rigen el lenguaje natural	19
1.4 Lenguaje matemático	20
1.4.1 El lenguaje matemático de acuerdo con las áreas de las matemáticas	27
CAPÍTULO 2. MÉTODO	33
2.1 Marco conceptual	33
2.2 Actividades didácticas	43
CAPÍTULO 3. VALIDACIÓN DE LAS ACTIVIDADES DIDÁCTICAS	63
3.1 Primera actividad: El rompecabezas	63
3.2 Segunda actividad: Dominó de símbolos matemáticos	64
3.3 Tercera actividad: Memorama	65
3.4 Cuarta actividad: A pintar un cuadro	67
3.5 Quinta actividad: Ensalada de números	68
CONCLUSIONES	70
REFERENCIAS	71

TABLAS Y FIGURAS

Tabla 1. Propiedades de la lengua y el habla	14
Tabla 2. Características de la lengua y del habla.....	15
Tabla 3. Bases de la clasificación por la distinción filosófica y por el nivel de codificación.....	16
Tabla 4. Ejemplos de transición del lenguaje natural al lenguaje aritmético.....	29
Tabla 5. Lista de verbos de la suma y resta.....	29
Tabla 6. Características de Lenguaje Matemático desde el punto de vista de la Lingüística.....	36
Tabla 7. Funciones del lenguaje.....	39
Tabla 8. Características del lenguaje matemático de acuerdo a algunas áreas de la matemática.....	41
Tabla 9. Propiedades de los polígonos regulares.....	46
Tabla 10. Rúbrica de evaluación para la actividad 1.....	48
Tabla 11. Lista de símbolos y su significado para colocar en las fichas de dominó.....	49
Tabla 12. Lista de cotejo para la actividad 2.....	51
Tabla 13. Lista de cotejo para la actividad 3.....	56
Tabla 14. Lista de cotejo para la actividad 4.....	59
Tabla 15. Lista de cotejo para la actividad 5.....	63
Figura 1. Juego de figuras para la actividad 1.....	45
Figura 2. Evidencia del desarrollo de la actividad 2.....	51
Figura 3. Evidencia de la actividad 3.....	55
Figura 4. Ejemplos de las sucesiones.....	57
Figura 5. Clasificación de los números.....	62

RESUMEN

En esta investigación se presenta un marco conceptual que permite analizar la eficacia de actividades didácticas que promueven el lenguaje matemático. Para ello es necesario establecer qué se entiende por lenguaje matemático y qué características cumple que hacen que se le pueda considerar efectivamente como un lenguaje. Estas características se recopilarán de investigaciones sobre lingüística y de textos que tratan a las matemáticas como un lenguaje. Varios investigadores ven la importancia de un lenguaje para el aprendizaje de las matemáticas, llamando a los objetos matemáticos por su nombre y significado apropiado desde una edad temprana.

El marco conceptual se construirá bajo dos puntos de vista, el primero con base en la lingüística y el segundo con base en algunas áreas de las matemáticas, con el cual se analizarán 5 actividades didácticas para nivel medio superior.

Las actividades fueron reestructuradas para lograr una presentación uniforme que incluyera, objetivo, materiales, desarrollo y una propuesta de evaluación. Estas podrán ser aplicadas en diferentes momentos del curso a criterio del profesor, se recomienda para las actividades que la población de alumnos sea menor o igual a 12 alumnos.

Palabras clave: lenguaje natural, lenguaje matemático, actividades didácticas.

ABSTRACT

This research presents a conceptual framework that allows analyzing the efficacy of didactic activities that promote mathematical language. For this, it is necessary to establish what is understood by mathematical language and what characteristics it fulfills that make it be considered an effective language. These features will be gathered from research on linguistics and from texts that treat mathematics as a language. Several researchers see the importance of a language for learning mathematics, calling mathematical objects by their name and appropriate meaning from an early age.

The conceptual framework will be built under two points of view, the first based on linguistics and the second based on some areas of mathematics, with which 5 didactic activities for upper secondary level will be analyzed.

The activities were restructured to achieve a uniform presentation that included, objective, materials, development and an evaluation proposal. These may be applied at different times of the course at the discretion of the teacher, it is recommended for activities that the student population is less than or equal to 12 students.

Key words: natural language, mathematical language, didactic activities.

INTRODUCCIÓN

El lenguaje es un medio de comunicación entre los seres humanos; lo vamos adquiriendo conforme va avanzando nuestro crecimiento, dependiendo del lugar donde radicamos y el contexto social en el que se esté. La matemática tiene su propio lenguaje, desde edad temprana aprendemos una terminología específica de algunos objetos matemáticos y conforme vamos cursando cada ciclo escolar aumenta el grado de complejidad con que se aborda.

El lenguaje es una forma de comunicación que se utiliza en todo el mundo, es importante saber interpretar símbolos, códigos, señalamientos, gestos, etc. El lenguaje tiene un sistema de normas como lo dice Goodenough (1971, pp. 159-163),

Las características que hacen a las matemáticas un lenguaje, de acuerdo con los diversos autores revisados, se han agrupado en dos perspectivas para conformar el marco conceptual.

Algunas características son:

- Comprende principios y normas para distinguir sonidos (fonemas), entonación, acentos, así como para su organización.
- Los principios sintácticos tienen que ver con *“el orden y “la validez”* de las expresiones.
- La representación de los signos, símbolos y significados de los mismos.
- Comprende las reglas y convenciones relacionadas con el significado dado por el uso de los objetos de los sistemas anteriores.

Estas características nos servirán para validar las actividades propuestas mediante un análisis de contenido basado en el marco conceptual construido.

Objetivo

Construir un marco conceptual que caracterice al lenguaje matemático y que permita realizar un análisis de contenido para validar actividades didácticas diseñadas para promover dicho lenguaje.

Preguntas de investigación

1. ¿Cuáles son los criterios que hacen a la matemática un lenguaje?
2. ¿Qué aspectos del lenguaje matemático promueven un conjunto de actividades didácticas del nivel medio superior?

Tipo de investigación

Esta investigación es de corte cualitativo y documental ya que utiliza artículos, tesis y libros para la construcción del marco referencial con el que se analizará las actividades didácticas de interés.

La técnica es el estudio de todos los documentos revisados que se enfoquen en la lingüística y el lenguaje matemático para obtener las categorías y características comunes que permitan la construcción del marco conceptual. Se construyó la categorización con base en los aspectos convergentes y divergentes que abordan estos textos.

En el primer capítulo se realizó la recolección de la información sobre qué es un lenguaje, lenguaje natural, lo que se entiende por lenguaje matemático y las características que tiene cada uno.

En el segundo capítulo presentamos el marco conceptual construido con la información del capítulo 1, así como las actividades que serán evaluadas con este marco.

En el tercer capítulo se analizaron las actividades didácticas elegidas en Onofre (2017), para mostrar cómo podrían promover el lenguaje matemático según el marco conceptual construido.

En el cuarto capítulo se presentan las conclusiones de esta investigación.

CAPÍTULO 1. LENGUAJE Y LENGUAJE MATEMÁTICO

Se mostrarán algunas definiciones de lo que es un lenguaje para tener una idea más clara y precisa de este término. Se revisará también qué es un lenguaje natural para que, con base en esto, se describa qué es un lenguaje matemático. Nos interesa describir qué es el lenguaje matemático y después dar una categorización sobre este.

1.1 ¿Qué es un lenguaje?

El lenguaje sustenta el pensamiento humano en su aspecto esencial: raciocinio, pensamiento lógico o discurso racional; lo podemos enfocar desde dos perspectivas fundamentales: la de instrumento de conocimiento o la de estudio de ese conocimiento; en el primer caso es un vehículo de toda actividad humana intelectual, cognitiva y en cierto modo, perceptiva y emocional (en cuanto para conocer lo que percibo o siento, lo convierto en pensamiento, en conocimiento, en actividad intelectual); en el segundo (llámese Gramática o Lingüística) se constituye un “Metalenguaje”, esto es, un lenguaje que habla del lenguaje.

La tendencia inmediata es pensar en el lenguaje verbal y en su función comunicativa, esto es, en el “comunicar por medio de signos verbales”, “decir algo a alguien” o “expresar pensamientos, emociones, ideas, etc.” Pero ciertos gestos, movimientos del cuerpo (asentir o disentir con la cabeza, levantar las cejas, elevar o bajar el volumen de voz, extender las manos, etc.); la proximidad o alejamiento de los interlocutores (proxemática), son reveladores, también “dice algo”; por otra parte, ver a una niña o mujer vestidas de blanco, con un velo, también “comunica” (primera comunión, una novia) e incluso elementos de la naturaleza o producidos por el hombre también nos “hablan”; si veo humo, “se” que hay fuego. En todos los casos hay ciertos “signos” o “indicios” que proporcionan la información.

Pero es condición necesaria que esos signos estén ordenados, sistematizados. Incluiríamos como diferencia el que unos son “deliberados”, “voluntarios”, “intencionales” frente a otros que no poseen esta característica de intencionalidad.

Definición genérica de lenguaje

Sistema de signos que significan. Si los signos son lingüísticos (palabras) lo denominamos “lenguaje natural o verbal”; a los demás, “no verbales”; según la clase de signo que se especificará: icónico (figuras), gestual, mímico, Morse, etc. Al hablar de “lenguaje” aludiremos al verbal o natural.

El término lenguaje es ambiguo, implica (además del verbal y los no verbales) tres niveles: potencialidad, actividad y producto, es decir, el lenguaje como capacidad humana, que se desarrollará en el seno de una sociedad como “un lenguaje” (o idioma); como “actividad”, esto es, como “un decir” (discurso, texto, mensaje, que se ofrece como “pensamiento” o como “discurso”) y como el producto de ello: “lo dicho”, “lo pensado”. Las funciones del lenguaje variarán de acuerdo con el nivel que lo situemos:

Sistema o código

El lenguaje es un sistema que funciona en relación con reglas o códigos que le son propios y utiliza signos o señales o símbolos. Entenderemos por “sistema” o “código” el conjunto ordenado de reglas de funcionamiento interno que es común a varios usuarios y permite codificar y decodificar mensajes. El código puede ser simple o complejo; estable o inestable; duradero o efímero.

Signo o señal o símbolo.

Denominamos “signo” (o “señal” o “símbolo”) aquello que denota, significa, se refiere o representa algo, en general, distinto de sí mismo (salvo caso excepcional, como en palabras del tipo “juro”, “bautizo”, donde “decir” es “hacer”) con intención de comunicar. Un mismo ente puede funcionar como “indicio” – y no ser lenguaje-o como “señal”. Definir signo (o lenguaje) diciendo que “significa” implicaría una tautología sino aludiera a la función primordial del lenguaje, a ceñir el ¿para qué sirve?, tan del gusto de nuestro coetáneo.

Wittgenstein (1953) en su segunda filosofía, postuló que el significado del lenguaje era el uso que se hacía de él, generando lo que llamó “juegos lingüísticos”. Éstos hacen referencia a la forma en que usamos el lenguaje, dejando atrás una concepción puramente descriptiva.

Watson (1924) define el lenguaje como un hábito manipulatorio. Considero que esta definición carece de sentido práctico, ya que más allá de manipular el lenguaje brinda la oportunidad al emisor o receptor de otorgar los significados de un texto de acuerdo con sus propias experiencias y características lingüísticas. Este aspecto deja a un lado el elemento manipulador otorgado por Watson.

Chomsky (1957) expone que el lenguaje es un conjunto finito o infinito de oraciones, cada una de ellas de longitud finita y construida a partir de un conjunto finito de elementos. Esta definición enfatiza las características estructurales del lenguaje sin adentrarse en sus funciones y la capacidad de generar acción que tiene para un emisor y el receptor.

Luria (1977) expone que lenguaje es un sistema de códigos con la ayuda de los cuales se designan los objetos del mundo exterior, sus acciones, cualidades y relaciones entre los mismos. Esta definición la considero interesante por la importancia que le presta a los códigos para la delineación de objetos, ya sean concretos o abstractos, los cuales en gran medida nos ayudan a visualizar el mundo que nos rodea considerando nuestros preceptos socioculturales.

Bronckart (1977) define el lenguaje como la instancia o facultad que se invoca para explicar que todos los hombres hablan entre sí. La definición de Bronckart la considero un poco tímida y profunda, ya que deja a un lado la posible injerencia que tiene la cultura en un acto comunicativo entre un receptor y el emisor.

Pavio y Begg (1981) indican que el lenguaje es un sistema de comunicación biológico especializado en la transmisión de información significativa e intraindividual, a través de signos lingüísticos. La definición de estos autores entrelaza de forma soslayada diversas disciplinas de pensamiento para describir los procesos de transmisión de información lo cual la hace multidisciplinaria.

Calabro, Taylor y Kapadia (1996) exponen que dependiendo de cuán complejo o sencillo esté estructurado el lenguaje tanto verbal como escrito, puede variar significativamente el nivel de pensamiento y entendimiento en el individuo. Esta definición resalta la importancia que tiene para los estudiosos de la comunicación la estructura del lenguaje debido a su posible influencia en la comprensión de la información por parte de un receptor. Aspecto que puede ser determinante en esfuerzos masivos de comunicación pública.

Austin (1962) fue el primero en destacar la cualidad activa del lenguaje, la naturaleza ejecutante (performative, en sus palabras) de éste. Austin clasificó el lenguaje en tres tipos de actos: a) locucionarios, que es lo que se dice; b) ilocucionarios, que es la intención del habla y; c) perlocucionarios, que es el efecto que se produce en el receptor.

Sapir citado por Hernando (1995) afirma que el lenguaje es un método exclusivamente humano, y no instintivo, de comunicar ideas, emociones y deseos por medio de un sistema de símbolos producidos de manera deliberada. De esta definición se desprende que el lenguaje, como medio de comunicación humana, frente a los medios de comunicación animal (o de cualquier otro tipo), reúne estas propiedades: a) ser un fenómeno exclusivamente humano, b) servirse de la voz como vehículo de transmisión, c) no ser instintivo, d) utilizar un sistema de signos y e) estar articulado a partir de determinadas unidades mínimas.

Un lenguaje nace con ambigüedad semántica y riqueza de significados al interior de la gramática. Cuando el lenguaje se formaliza se asigna un significado a cada fórmula y se pierden los significados anteriores. El término lenguaje es ambiguo, implica (además del verbal y los no verbales) tres niveles: potencialidad, actividad y producto, es decir, el lenguaje como capacidad humana, que se desarrolla en el seno de una sociedad como “lenguaje” (o idioma); como “actividad” esto es, como “un decir” (discurso, texto, mensaje, que se ofrece como “pensamiento” o como “discurso”) y como el producto de ello: “lo dicho”, “lo pensado”. La función del lenguaje variará de acuerdo con el nivel en que lo situemos. El lenguaje es un sistema que funciona con reglas o códigos que le son propios y utiliza signos o señales o símbolos. Entendemos por “sistema” o “código” el conjunto ordenado de reglas de funcionamiento interno que es común a varios usuarios y permite

codificar y decodificar mensajes. El código puede ser simple o complejo; estable o inestable; duradero o efímero (Spagnolo, 1995).

Duval (1996-1997b) citado en D'Amore (2006) nos dice que existen por lo menos cuatro modos de entender la palabra lenguaje:

- Como lengua, sistema semiótico con funcionamiento propio (por ejemplo, el italiano o el español)
- Como diferentes formas de discurso producido haciendo uso de una lengua (por ejemplo, una narración, una conversación, una explicación)
- Como función general de comunicación entre individuos de la misma especie (por ejemplo, entre abejas)
- Como uso de un código cualquiera, más o menos socialmente reconocidos y compartidos (por ejemplo, se usa decir: el lenguaje de las flores)

Pereira (1999) en su texto de Lingüística para comunicadores indica que el lenguaje se clasifica en lenguaje verbal (oral o escrito) o articulado y una serie de sistemas y lenguajes no verbales. Además, clarifica que los hechos culturales se dan solamente cuando los hombres interactúan socialmente mediante el trabajo, los juegos, las prácticas rituales, etc., y adquieren la capacidad de codificar y simbolizar la realidad mediante diferentes formas y sistemas de interrelación, cuya representación más alta y compleja lo constituye el lenguaje verbal.

El Diccionario de la Real Academia de la Lengua Española (2001) define el lenguaje como estilo y modo de hablar y escribir de cada persona en particular. La Real Academia presenta una definición simple tomando en consideración la comunicación verbal y escrita sin adentrarse en las particularidades lingüísticas que puedan estar inmersas en las personas sean emisores o receptores.

Oyaneder (2002) afirma que a través del lenguaje es posible establecer un puente con la realidad, conceptualizarla, establecer relaciones, explicarse situaciones y construir nuevos

conocimientos. Por ello, es importante, que al iniciar el proceso de enseñanza de las matemáticas se incorpore el lenguaje correspondiente, que implica no sólo el manejo del nombre de los números, sino además la capacidad para explicarse la realidad, comunicar las diferentes relaciones que se establecen entre diferentes situaciones, comunicar nuevos descubrimientos, etc.

El lenguaje, como un sistema articulado de signos, construido socialmente a lo largo de la historia, vehicula significados instituidos relativamente estables, aunque mutables, lo que hace la polisemia de las palabras. No obstante, esos significados adquieren su significación concreta en el contexto de la interlocución. (Moreira, 2003, pág.45)

Echeverría (2005) dice que el lenguaje fue concebido durante mucho tiempo como el instrumento con el cual describimos las cosas como son, su papel era simplemente narrar la realidad que se encontraba anteriormente constituida.

Flores (2010) dice que el lenguaje es lo que permite que se establezca la información de saberes entre los miembros de un grupo social, esos procesos se construyen por medio de la palabra y la simbolización.

Maureira (2009) dice que el lenguaje es un conjunto de acciones conductuales recursivas coherentes en la experiencia generada en la relación con los otros.

Maturana (2003) considera el lenguaje como un fluir en la recursión de las coordinaciones conductuales consensuales en la que no hay separación entre sintaxis y semántica como fenómenos constitutivos de éste. De hecho, en la proposición de Maturana, semántica y sintaxis surgen como reflexiones del observador ante las regularidades del fluir de las coordinaciones conductuales de las personas en el lenguaje.

El lenguaje natural o verbal o materno

“Es prácticamente imposible dar cuenta del aprendizaje humano sin la mediación y participación del lenguaje” (Ribes-Iñesta, 2007, p. 12, citado en Puga, Rodríguez & Toledo, 2016).

El lenguaje natural es aquel que se aprende dependiendo del lugar y contexto social en el que se esté. En México tenemos como lenguaje natural el español o castellano que consta de sus reglas gramaticales. Por medio del lenguaje expresamos ideas, pensamientos, ya sea de una manera escrita, oral o expresiva y puede ser vulgar, culto, técnico, propio, impropio, florido, correcto, incorrecto, etc.

El lenguaje natural a su vez tiene gentilicios que los individuos utilizan diariamente, a los cuales le dan un significado diferente a un objeto ya conocido, cada individuo tiene una capacidad de representación (ejemplo: una silla) de cualquier objeto, así como la manera de definirla y expresar sus ideas de forma verbal o escrita.

El lenguaje natural es el lenguaje hablado y/o escrito por humanos para propósitos generales de comunicación, para distinguirlo de otros como puedan ser una lengua construida, los lenguajes de programación o los lenguajes usados en el estudio de la lógica formal, especialmente la lógica matemática.

El lenguaje natural es el propio de la especie, en una determinada colectividad; tiene un aprendizaje en gran medida innato y un uso inconsciente en los primeros años de vida. En cuanto al uso, los lenguajes naturales son los que empleamos en la vida corriente, son nuestro modo de expresión habitual.

Es aquel que usa signos lingüísticos, el que constituye los “idiomas”. La tendencia inmediata es añadir que “sirve para comunicarse”. Estaríamos hablando de la función o, mejor, funciones del lenguaje. Anteriormente vimos que sirve para significar, designar, referirse a, conocer, cuando nos referimos a su nivel de potencialidad (energía); en los niveles de actividad y de producto posee varias funciones que dependen de la intención o propósito del hablante, así como los niveles de codificación de que se sirva (denotativo, connotativo o semiológico) y, en parte, del registro (tipo de evento comunicativo que condiciona cierto “estilo”). En torno a esta problemática (funciones, del ¿para qué sirve?)

giran: las teorías de filosofía del lenguaje: relación lenguaje- pensamiento-realidad y los problemas teóricos (y prácticos) de la traducción.

Existe una particularidad: cualquier lenguaje no verbal es decodificable en el verbal, pero no siempre se da, al contrario, es decir, el lenguaje verbal no siempre puede “decirse” en lenguaje no verbal. Un dibujo del sol es sólo eso para quien no lo “interprete”, “descifre”, “decodifique” como el dios solar “Febo”, y para ello se requiere del hablar.

Debemos señalar que con esta palabra designamos tanto su nivel de “potencialidad” o “capacidad” como el de “actividad” o el de “producto”; por otra parte, señala tanto el nivel de lengua como el habla o hablar e incluso, variedades de habla (la dicotomía lengua-habla (o hablar). Norma y Subsistemas, subcódigos, dialectos o variantes).

Características del lenguaje natural:

El lenguaje natural es ambiguo, impreciso, vago, equívoco.

- Ambiguo, porque puede entenderse de varios modos o admitir distintas interpretaciones y dar, por consiguiente, motivo o dudas, incertidumbre o confusión.
- Sinonímico, porque posee dos o más palabras para una “cosa” (significación, referente). El hablante elegirá entre las opciones. A nivel de lengua (sistema) no hay sinónimos perfectos- en el sentido de poseer exactamente el mismo valor significativo- aunque sí hay términos diferentes para aludir a una misma realidad (referente), como sucede con los signos *lengua*, *sistema*, *código*, que designan un mismo referente. En este caso, el matiz diferenciador (sema) consiste en la perspectiva desde la cual se considera (lingüística, semiótica o teoría de la comunicación).
- Polisémico porque posee dos o más referentes que se expresan mediante un solo signo. El oyente decidirá cuál es el referente aludido. Ejemplo; la palabra definición posee seis referentes:
 - Acción y efecto de definir.
 - Proposición que expone con claridad y exactitud los caracteres genéricos y diferenciales de una cosa material e inmaterial.

- Decisión o determinación de una duda, pleito o contienda, por autoridad legítima.
 - Declaración de cada uno de los vocablos, locuciones y frases que contiene un diccionario.
 - Óptica, fotografía y T.V. nitidez con que se perciben los detalles de una imagen observada mediante instrumentos ópticos, o bien la formada sobre una película fotográfica o pantalla de televisión.
 - pl. En las órdenes militares, conjunto de estatutos y ordenanzas que sirven para su gobierno.
- Homonímico: Es decir, que términos de origen diverso, por evolución, concluyen en formas iguales, pero con significados diferentes. Ejemplos: Hinojo: <feniculum, hinojo, planta; Hinojo <genuculum, hinojo (se usa en plural: estar de hinojos), rodilla.
 - Paronímico: que posee palabras muy parecidas por su etimología, su forma o sonido. Comprensión- compresión, venimos-vinimos; aséptico- escéptico.
 - Homofónico: cuyas palabras se pronuncian igual, pero cuya escritura y significación son diferentes. En la pronunciación castellana existen en menor número: h-0: hasta-asta; acerbo-acervo; en el español de México (y en todos los geolectos “seseo”- pronunciación de “c-z” como “s”- y de “yeísmo” (pronunciación de “ll” como “y” consonántica) se da numerosísimos casos: casa-caza; cegar- segar; ascenso- asenso; halla-haya. El seseo incide en la ortografía: “c-z” = “s”; “sc”=” s” y “cc” = “x” (acción-crucifixión).

1.2 La relación del habla, la lengua y el pensamiento con el lenguaje

La lengua es un sistema de signos y el habla es la codificación de mensajes específicos, descifrados luego por quienes participan en el proceso de comunicación. En este sentido se dice que la lengua existe en un estado potencial, es un sistema de signos listo para ser utilizado en el habla, mientras que el habla existe a través de impresiones sonoras, dotadas de significado común al grupo social.(Serrano, 2005, pág. 49)

Se puede pensar entonces en la lengua como un modelo lingüístico que determina el habla, y en el habla como un acto que incide también en el modelo lingüístico. Esta determinación recíproca hace variar la lengua muy lentamente, tanto que puede ser imperceptible para los hablantes (por ejemplo, en la lengua materna) o llevarse a cabo durante siglos; se suceden variaciones en el vocabulario, cambios fonéticos, gramaticales, de significado, entre otros. (Serrano, 2005, pág. 49)

Lengua y habla son inseparables en la práctica, en el acto comunicativo, y constituyen los dos aspectos del fenómeno lenguaje. El lenguaje, y por ende el habla y la lengua (como la concibe Saussure(Serrano, 2005) constituyen un importante objeto de estudio y de reflexión por parte de profesores y alumnos y en general de la educación matemática, por cuanto ésta trata no sólo con el lenguaje matemático, sino con el natural (o materno), el corporal, gestual, entre otros.

Saussure (1945) citado por Serrano (2005) manifiesta que el lenguaje “es una palabra ambigua puesto que se usa tanto para denotar la función comunicativa entre individuos, como para denotar un particular sistema de signos o símbolos o para describir el uso que se le da a este sistema en un contexto determinado”. De igual manera, Saussure considera que el lenguaje está formado por el habla y la lengua. Define al habla como el uso de la lengua por una persona, en una situación específica, la entiende como un acto individual. En cambio, la lengua constituye la totalidad de los sistemas lingüísticos que poseen los miembros de una comunidad, es decir; la lengua “es un sistema de signos y el habla es la codificación de mensajes específicos, descifrados luego por quienes participan en el proceso de comunicación” (Serrano, 2005, p. 49).

Por lo expuesto hasta aquí se concluye que, lengua y habla son inseparables en el acto comunicativo, por cuanto la lengua con sus sistemas de signos va a ser utilizado en el habla, mientras que el habla aparece con las impresiones sonoras que tiene significado en el grupo social. Lengua y habla recíprocamente inciden en el modelo lingüístico.(Serrano, 2005, p. 49).

El cuadro adjunto resume algunas de las propiedades de estas entidades tal como las concibe Saussure. Estos planos, lengua y habla, son inseparables en la práctica, en el acto comunicativo, y constituyen los dos aspectos del fenómeno lenguaje.

Tabla 1. Propiedades de la lengua y el habla

LENGUA	HABLA
*Sistema de signos	*Codificación de mensajes
*Potencial *Social	*Existe a través de impresiones sonoras
*Varía muy lentamente	*Individual

Serrano (2005).

La dicotomía lengua- habla (o hablar). Norma

El lenguaje (natural) se plantea como lengua, es decir, como las reglas abstractas que todo hablante posee en mayor o menor grado o dominio, que incluyen desde el léxico, a la construcción y al estilo, y cuya totalidad posee sólo la sociedad que la usa (en realidad coincide con el concepto de la “gramática” en sentido amplio, es el “código” o “sistema”) y como habla o hablar, definido como la actualización (poner en acto) de la lengua en un hablante. Si se pretende un estudio científico del lenguaje, éste sólo se podrá realizar a nivel de lengua, ya que el habla es individual y, por tanto, irreductible como tal a generalización, abstracción y leyes. Éste fue el problema que enfrentó la teoría de F. de Saussure y sus

seguidores, al pretender la lingüística como una “ciencia”, frente a la consideración tradicional de los estudios gramaticales, que la concebían como “arte” (en su mayoría, y hasta fechas relativamente próximas, las “gramáticas” se denominaban “arte gramatical”). Diversas teorías han surgido en torno a esta problemática; mencionaremos, como más útil a nuestros propósitos, la propuesta de E. Coseriu, la creación de la noción norma como “generalización y abstracción de de los hablantes de ciertos grupos”.

Tabla 2. Características de la lengua y del habla/r.

Social	Individual
Abstracta	Concreto
Genérica	Particular
Estática (casi)	Dinámico
No espacio-temporal	Espacio temporal y lineal.

Las diferencias entre lengua y habla son notorias; la una social, genérica, generalizable, casi estática (en el transcurso de una vida humana no se aprecia evolución o cambio, éstos ocurren a lo largo de siglos, por lo que el hablante la siente como estática), frente al individualismo, particularidad y dinamismo del hablar, que cambia a gran velocidad. El carácter lineal y espacio-temporal del habla constituyen una notable diferencia con otros lenguajes. A diferencia de la percepción visual (signos icónicos) que implica una globalidad de la imagen la palabra es lineal (tanto en su codificación oral como en la escrita: se articula/ escribe cada sonido, sílaba, palabra, frase, oración una tras otra). El registro literario, en especial el poético, trata de romper la linealidad del lenguaje mediante la creación de “imágenes” por distintos procedimientos.

Funciones del lenguaje

Interesa diferenciar las funciones del lenguaje de acuerdo con la distancia conceptualizada del término. Sosteníamos en una definición del lenguaje que la primera función, la función primordial, era significar, denotar, referirse a. esto es cierto en tanto hablemos del lenguaje

como potencia o capacidad y como lengua, pero en cuanto a actividad y producto, en el acto de hablar y en el discurso o texto, sus funciones son múltiples y variadas.

Tabla 3. Bases de la clasificación por la distinción filosófica y por el nivel de codificación.

Bases de la clasificación	
Por la distinción filosófica:	Por el nivel de codificación:
Lenguaje como potencialidad.	Lenguaje denotativo.
Lenguaje como actividad.	Lenguaje connotativo
Lenguaje como producto.	Nivel semiológico.
Por la oposición lengua-norma-habla/r: en el acto sémico o de comunicación	
Lenguaje como sistema.	Lenguaje como acto (sémico).
Lenguaje como uso.	Lenguaje como mensaje (discursivo).
Lenguaje como idiolecto.	Como producto, “lo dicho” (el texto).

Funciones del lenguaje como “lengua”, como sistema

- Referencial: la primordial al signo, que es representar, referirse a, o significar en cuanto símbolo que es de la “cosa” significada.
- Cognoscitiva: como mecanismo de aprehensión de la realidad, como vehículo del pensamiento o como el pensamiento mismo.

Funciones del lenguaje como “hablar”, como discurso.

En cuanto propósito o intención del hablante, estableceríamos dos grandes grupos con sus subdivisiones.

- Expresiva: en cuanto manifestaciones de un hablante ajena a la impresión que pudiere producir en su eventual oyente. Es infrecuente, ya que la tendencia general es incidir de un modo u otro en el oyente-lector; se presenta en ciertos eventos comunicativos, como el especialista que dicta una conferencia magistral o en su vertiente exclamativa.

Con una subdivisión;

- Exclamativa: es una variable de la expresiva, pero donde el nivel significativo existe en menor grado; en el límite, expresa más un estado anímico, una emoción que un contenido. Ejemplo: ¿Quién me lo iba a decir?
- Impresiva: cuando se manifiesta la relación del hablante hacia el oyente, en cuanto todo mensaje tiende a incidir sobre éste. En el que la intención es provocar una intención emotiva de satisfacción, placer, en el interlocutor.

Con varias subdivisiones, las primeras, relativas al nivel intelectual, racional; las otras se dirigen más en particular a los niveles emotivos:

- Lógica: prácticamente variante de la anterior en cuanto proporciona información, pero de tipo científico, filosófico, etc.; el hablante se distancia de su pensamiento (mensaje); las oraciones tienden a ser complejas, unidas por marca de relación lógica.
- Informativa: cuando se transmite un mensaje en lo que denominaríamos tono neutro.
- Metalingüística: cuando se utiliza como instrumento para hablar acerca de la lengua misma. La gramática y las ciencias del lenguaje la utilizan constantemente; también las ciencias naturales cuando se preguntan acerca de los significados de sus asertos.
- Didáctica: usada en clase, en exposiciones frente a participantes en el proceso de enseñanza aprendizaje.
- Estética o poética: donde nos interesan los niveles de contenido cuando la creación de belleza por medio de la palabra. Comprende en general toda la literatura de la creación y en particular la poesía.

- Evocativa: en ocasiones, próxima a la estética, consiste en traer al presente mediante la recuperación del acervo mnémico, algún momento, lugar o acontecimiento del pasado.
- conativa: centra también el interés en el receptor, pero como posible “cliente”; el lenguaje publicitario, el propagandístico conecta al emisor y al receptor mediante mecanismos gramaticales que cuentan a la hora de establecer las relaciones de poder, igualdad, mandato, petición o persuasión que se establecen.
- desiderativa: como expresión del deseo o la voluntad en distintos grados de intensidad.
- Lúdica o de juego: en cuanto la base de la comunicación es el juego. Es esta clasificación incluiríamos juegos de palabras, canciones infantiles, albures, etc.
- Yusiva o de orden: transmisión de una orden, cuya respuesta, en general, no es verbal, sino la actuación al acatar aquello que expresa la orden. No sólo se expresa mediante el modo imperativo; en oraciones aparentemente enunciativas o en interrogativas hay un claro valor yusivo.
- Rogativa o exhortativa: expresa un ruego o deseo mediante los mismos procedimientos que la anterior, sólo varía la entonación.
- Promisoria: con dos variantes la propiamente promisorias y la de valor minativo (de amenaza).
- Interrogativa: cuando se requiere una respuesta, verbal o no verbal, del interlocutor se clasifican en:
 - ✓ Directa e indirecta: con signo de interrogación o sin él.
 - ✓ Total o parcial: si se expresa la predicación o sólo acerca de una parte de la oración.
- Comunicativa, coloquial: caracterizada estilísticamente por un registro estándar o coloquial; significaciones de uso; tiende al registro oral, incluso en la escritura; se apoya en el contexto o “entorno”.
- Fática: mantiene el contacto con el interlocutor; ciertas fórmulas de saludo; las preguntas sobre la salud o el tiempo son de función fática.

Al enumerar las funciones del lenguaje, lo hacemos sobre distintas bases.

La función referencial o significativa se plantea a nivel de lenguaje como “sistema ordenado de signos”, es decir, como sistema o lengua: la función cognoscitiva, a nivel de lenguaje como potencia y actuación, el resto de las clasificaciones alude al nivel de hablar, ya como acto sémico o de comunicación, ya como producto, el mensaje mismo, “lo dicho”, con base en el propósito o intención del hablante; algunas coinciden con la clasificación sintáctica tradicional de las oraciones por la entonación.

1.3 Los principios y reglas que rigen el lenguaje natural

Goodenough (1971) clasifica las normas que rigen el comportamiento comunicativo o lingüístico en cinco sistemas: fonológico, morfológico, sintáctico, semántico y simbólico.

Fonológico: Comprende normas para distinguir sonidos, entonación, acentos y normas para su organización. La unidad básica en este sistema es el fonema: “unidades de sonido lingüístico a partir de las cuales se construye el vocabulario de una lengua” (p. 160).

Morfológico: Comprende los principios mediante los cuales se combinan formas para construir palabras. Concibe las formas [morfemas] como las unidades mínimas que transportan significados concretos, construidas por combinaciones de los fonemas (p. 161).

Sintáctico: Abarca los principios sintácticos, mediante los cuales se ordenan palabras y frases (p. 162).

Semántico: Se ocupa de las normas a través de las cuales se seleccionan palabras y expresiones para transmitir significados. Abarca tanto las formas lingüísticas como las no lingüísticas (percepciones, conceptos) que se reflejan en las formas lingüísticas (p. 162).

Simbólico: Comprende los principios que determinan usos expresivos y evocativos de las formas lingüísticas. Por ejemplo, la referencia a sentimientos, emociones, etc. (p. 163).

La lengua y el habla, entonces, se construyen atendiendo a los sistemas de signos, principios y reglas de una manera normativa, pero obedecen también al uso en un contexto.

En particular, los sistemas sintáctico, semántico y simbólico son de especial interés en la actividad escolar. Los principios que comprenden (en el contexto del aula) inciden en buena parte de la actividad matemática y no matemática desarrollada en el aula.

1.4 Lenguaje matemático

En esta sección se darán las características de lo que se entiende por lenguaje matemático, ya sea desde la perspectiva de la lingüística o por las áreas de las matemáticas.

Las matemáticas son complejas para los alumnos de bachillerato, ya que se necesita un amplio vocabulario de esta materia, así como dominar el uso de los símbolos y sus representaciones como lo afirman Alcalá (2009), Lee (2009), Paz (1956), entre otros investigadores. La manera de comprender los objetos matemáticos en el aula o fuera de ella dependerá de lo que se escucha y de lo que se entiende.

Las matemáticas constituyen un amplio conocimiento cada vez más abstracto en el cual los conceptos, definiciones, la manera de escribir y hablar en ella se podrían interpretar de diferentes maneras.

En este lenguaje, que podemos llamar *lenguaje matemático*, las afirmaciones son presentadas de una manera propia, siendo tajantes, con demostraciones de su veracidad, y sin permitir ambigüedades. Todos y cada uno de los símbolos de escritura definidos y utilizados tienen una tarea determinada, exacta, sin solapamientos ni posibles equívocos, mientras que también la estructura de su presentación es idónea para su perfecta comprensión. Puede describirse como un sistema regido por principios y reglas sobre los sonidos, símbolos, expresiones, diagramas, gráficos, significado, e incluso, sobre sentimientos y emociones con respecto al lenguaje y a la actividad matemática. (Ortega y Ortega, 2002, pág. 3).

Hammer (1974) dice que “la matemática es un sublenguaje (p. 67); por su parte, Delvai (1983) afirma que la “dificultad de las disciplinas formales es entender esa naturaleza formal debido a la cual muchos las consideran como lenguajes” (p. 333). (Citado en Bayer 2001)

El lenguaje matemático posee su propia sintaxis gramatical, compuesta de signos y símbolos, que son, en definitiva, también un lenguaje. Como lo plantea Paz (1956): “Los símbolos son también lenguaje, aun los más abstractos y puros, como los de la lógica y la matemática. Además, los signos deben ser explicados y no hay otro medio de explicación que a través del lenguaje” (p. 30).

La matemática es un lenguaje, como varios autores han expresado en diferentes artículos científicos. Por ejemplo, David Peat manifestó que “...podemos decir que la matemática ha aislado y refinado varios de los elementos abstractos que son esenciales a todos los lenguajes humanos” (Peat, 1990). Por otra parte, R.L.E. Schwarzenberger dijo que “Mi propia actitud, que yo comparto con muchos de mis colegas, no es más que la matemática es un idioma” (Schwarzenberger, 2000). Por último, Ford y Peat declaran que “Las matemáticas parecen ser algo más y algo menos que un idioma...” (Ford, y Peat 1998).

Cesarman (1982) afirma que “las matemáticas no constituyen una solución a los problemas que plantea el conocimiento de la naturaleza. Las matemáticas son un instrumento –un lenguaje– que sirve para relacionar mediciones y cuantificaciones” (p. 79). Agrega que la Matemática constituye la mejor forma de lenguaje para describir el orden que existe en la naturaleza (citado en Bayer W.O. 2001)

Trigueros (1991) afirma que, “para los positivistas lógicos interesados en las ciencias naturales, las matemáticas constituían el lenguaje a través del cual se formalizan y adquieren una presentación más precisa” (op. cit. pp.36-7, citado en Bayer W.O.2001).

Sanz (1995), menciona que, “en un texto matemático escrito se utilizan dos códigos, la lengua natural y la escritura simbólica, es decir, una escritura formada por signos exteriores a la lengua natural tales como paréntesis, +, x, o letras y números. Estos signos pueden combinarse siguiendo reglas específicas para engendrar expresiones simbólicas”. La Lengua Matemática, LM, es, según esta autora, el resultado del uso de esos dos códigos en interacción, la lengua natural y la escritura simbólica.

En Oyaneder (2002) el lenguaje matemático cumple tres funciones fundamentales:

La **función lúdica** se expresa principalmente a través de los juegos reglados donde se ponen en práctica conocimientos matemáticos que requieren de cálculo, estrategias espaciales, anticipación, etc. Al respecto el educador ha de crear experiencias que desafíen a los alumnos a resolver pequeñas dificultades, que impliquen efectivamente un reto atractivo y, considerando los espacios suficientes para que exprese verbalmente cómo lo hizo, qué más le costó resolver y qué aprendió con la experiencia.(pág. 9)

La **función representativa** implica la utilización de signos para representar cantidades o relaciones, figuras geométricas y otras formas conocidas, etc. Durante los primeros años los niños se irán acercando a los signos convencionales del lenguaje escrito de las matemáticas, a través de experiencias que surgen de la vida cotidiana; por ejemplo: en lugar de dibujar cinco objetos podrá escribir el signo que represente esa cantidad. Para llegar a conocer y utilizar un lenguaje matemático objetivo y universal (los signos en numeración obedecen a convenciones rigurosas que permiten una sola interpretación) es necesario previamente ofrecer experiencias significativas donde puedan una y otra vez contar, seleccionar, agrupar, etc. (pág. 9)

La **función comunicativa** nos permite informar, dar a conocer la realidad, explicar y cuantificar la realidad; por ejemplo: frente a la pregunta: ¿Dónde ven los números y para qué sirven?, podríamos tener las siguientes respuestas " en los autos para saber de quién es, en los buses para saber dónde ir, en los canales de TV para saber qué canal es, etc.". En cada uno de estos ejemplos los números no representan cantidad ni orden, se han utilizado combinaciones de números para informar. Es a través de estas situaciones simples que los niños construirán sus ideas previas sobre la numeración. (pág. 9)

La matemática posee un lenguaje específico que simplifica y clarifica la comunicación, designando de una manera exacta sus contenidos. Por medio del lenguaje matemático, los

enunciados se presentan de forma genuina, sin ambigüedades. Todos y cada uno de los símbolos utilizados tienen una tarea determinada, sin solapamientos ni posibles equívocos. (Ortega y Ortega, 2002)

Varios autores (Pimm, 1990; Alcalá, 2009; Lee, 2009; Díaz, 2009; Rotherry, 1980; entre otros) ven a la matemática como un lenguaje en el sentido de un vocabulario que tiene las siguientes características:

- Una misma palabra tiene diferentes significados en matemáticas y en la vida cotidiana
- Solo se utiliza esa palabra en matemáticas
- Palabras que significan lo mismo en la vida cotidiana como en matemáticas.

Esto se ve representado en lo expuesto por Lee (2009), donde se podrá encontrar la importancia de usar el lenguaje hablado con los alumnos; ella se enfoca en que los alumnos expresen sus ideas de forma oral ya que así tendrán una mejor comprensión de las matemáticas y entenderán las instrucciones dadas por el profesor. Ella también nos dice en su libro que es importante un registro matemático, debido a que este tiene un vocabulario específico, la forma concreta de utilizar los símbolos, precisión en los términos y estructuras gramaticales.

Del trabajo de Lee concluimos que la utilización del discurso en la clase de matemáticas alienta a los alumnos a tener una mejor comprensión de las mismas. Ella recomienda que los estudiantes manifiesten sus ideas y que comiencen a “expresarse” como matemáticos; ella fomenta el lenguaje verbal. Aunque al principio había poca participación, con el uso constante, ella nos dice que hubo mejoría en sus estudiantes; nos motiva a reflexionar sobre que, si los estudiantes se equivocan, podemos aprender de esos errores: el profesor debe aclarar qué los produce, y los estudiantes tienen oportunidad para profundizar en ese conocimiento.

El lenguaje escrito en matemáticas depende de la sintaxis de cada línea, los símbolos utilizados, la manera de estructurar un problema o enunciado a desarrollar. Cada símbolo matemático tiene a veces más de un significado o simplemente se utiliza en las

matemáticas, otros sirven también en otras áreas de aprendizaje, así como en la vida cotidiana. Esta engloba lo que es la lengua escrita y un registro matemático.

Alcalá (2009) presenta un panorama de lo que es el lenguaje matemático con la utilización simbólica, en el cual se presentan tres razones por la que es importante considerar a la matemática como un lenguaje:

1.- Ayuda a interpretar la mayoría de las dificultades que tienen los niños en su aprendizaje. Es sabido que la mayor parte de tales dificultades son:

- Dificultades semánticas, pues tienen como centro el binomio significante-significado referido a las notaciones y vocablos de jerga matemática, es decir, radican en la asociación de la notación o vocablo con el significado adecuado.
- Dificultades inherentes a la estructura que adopta el código notacional de cualquier campo (operaciones aritméticas, código fraccionario, código tripartito aritmético, etc.) y al funcionamiento del mismo; es decir, son de carácter sintáctico.
- Dificultades relativas al cuándo y/o al cómo utilizar el código notacional para resolver determinada situación: son pragmáticas o funcionales.

Así pues, concebir la matemática escolar como lenguaje es útil desde el punto de vista didáctico pues nos va a llevar a enfatizar los aspectos “lingüísticos” de la misma: nos va a llevar a detenernos en la construcción de los significados y en la comprensión y dominio de los códigos notacionales.

2.- Es una visión integradora del currículo, pues procura dar la debida importancia a cada uno de los componentes de una buena formación matemática: resolución de problemas, comunicación, recolección de datos, formación de conceptos, etc. Esto es, no se trata de situarse en ninguna de las tendencias actuales de la enseñanza, enseñanza directa, enseñanza por descubrimiento, resolución de problemas, etc., sino que pone el acento en la construcción progresiva de los significados, en los aspectos comunicativos y en el dominio sintáctico orientado hacia la operativa.

3.- Es una buena guía para organizar, planificar e interpretar la enseñanza a lo largo de la escolaridad obligatoria. En efecto, son los rasgos inherentes a los procesos de simbolización, las dificultades en la manipulación de los símbolos y el uso de los códigos para razonar y resolver problemas, los tres puntos en torno a los cuales gira la acción escolar, a los que se les dedica más tiempo en el aula; los puntos alrededor de los cuales se acumula la mayoría de las dificultades de aprendizaje.

La escuela, en fin, impone la matemática a los niños presentándola como un sistema ya codificado y acabado, presentación que va haciendo de forma planificada y escalonada, es la tradición. La matemática aparece así, como un sistema del que se va enseñando, transmitiendo, diferentes contenidos parciales, diferentes conceptos y procedimientos, soportados por un lenguaje específico cada vez más abstracto y alejado de la experiencia física.

Godino (2010) considera el lenguaje como un componente esencial de las matemáticas. Establece como indicadores el uso de diferentes modos de expresión algebraica, un nivel de lenguaje adecuado a los estudiantes a los que se dirige, además de propuestas de situaciones de expresión matemática e interpretación, por lo cual el profesor debe establecer una comunicación efectiva y una reflexión consciente de los conceptos matemáticos durante el proceso de enseñanza; el aprendizaje de las matemáticas depende mucho de un lenguaje y símbolos propios y específicos.

Godino (2000) da un esquema de características de las matemáticas, que toma como hipótesis cognitivo-epistemológicas a fin de analizar el significado de los objetos matemáticos. En el cual se da importancia al lenguaje simbólico, sus representaciones e interpretación de los mismos, que tiene un registro matemático, lo mismo que apoya Lee (2009) en su libro.

El lenguaje matemático es un desarrollo del lenguaje natural y como tal exige el desarrollo de procesos cognitivos asociados y de registros semióticos que representen y expresen los saberes construidos en la experiencia matemática. Además, que tales representaciones se dan en y a través del lenguaje. (Calderón, 2012, pág. 94)

Ramírez (2009) plantea que comunicar en matemáticas quiere decir que se es capaz de utilizar vocabulario, su forma de notación y su estructura para expresar y entender ideas y relaciones. En este sentido, la comunicación matemática es parte integrante del conocer y usar las matemáticas para representar ideas, gráficos, situaciones, entre otros.

Goñi y Planas (2011) abordan la comunicación en matemáticas, a partir de un lenguaje y códigos de representación para referirse a interpretaciones y exposiciones en el aula de clases.

El lenguaje matemático es, en sí mismo, un vehículo de comunicación de ideas que destaca por la precisión en sus términos y por su gran capacidad para transmitir conjeturas gracias a un léxico propio de carácter sintético, simbólico y abstracto. (Gutiérrez, Martínez y Nebreda, 2008)

El lenguaje matemático es un desarrollo del lenguaje natural, es importante considerar tres aspectos identificados por Calderón (2005) para sostener esta hipótesis:

- i) La metáfora del lenguaje matemático y su desarrollo en el aula;
- ii) El carácter especializado del lenguaje matemático
- iii) El papel del lenguaje matemático en la forma de construcción y legitimación de conocimiento.

(Díaz, 2009, pág. 34) Reconocida la existencia del lenguaje matemático como elemento que permite la total comprensión del conocimiento matemático este se puede caracterizar por:

- a. Ser preciso, universal y no permite ambigüedades.
- b. Ser denso (D'Amore).
- c. Ser un lenguaje simbólico y conceptual (ideográfico).
- d. Se estructura en axiomas, postulados, definiciones, teoremas, corolarios y lema.
- e. Es estrictamente jerárquico.
- f. Establece la relación símbolo, concepto y algoritmo. (D'Amore)
- g. Trabaja con términos indefinidos dados por la razón. (la recta, el punto, conjunto, entre otros).

Las matemáticas no sólo tienen su propio lenguaje, sino que son en sí mismas un lenguaje, puesto que comprenden, entre otras cosas, un conjunto de símbolos semióticos de representación conceptual, vale decir, entre el lenguaje verbal y el de las matemáticas, es de por sí un panorama intelectualmente atractivo, que incita a nuestra imaginación a intentar múltiples combinaciones y correlaciones simbólicas de muy variada significación y contenido.

Una de las características del lenguaje *matemático* es su univocidad y ausencia total de ambigüedad. Toda sintaxis *matemática* se aplica a objetos y entidades perfectamente definidos sin ningún tipo de duda sobre su esencia ontológica, porque previamente se han sometido a una férrea definición que precisa, determina, concreta, especifica, delimita e individualiza las características del objeto en cuestión. (Gonzales, 1987, pág.15)

En el Lenguaje Matemático, los enunciados se presentan en forma genuina, sin ambigüedades, aportando demostraciones de su veracidad. Una de las funciones del lenguaje es establecer puentes en lo que respecta al desarrollo de la actividad matemática.

1.4.1 El lenguaje matemático de acuerdo con las áreas de las matemáticas

Estas son algunas características que el lenguaje matemático debe de cumplir con base en lo anterior:

- Tiene abreviaturas en su escritura.
- Transversal y transdisciplinar
- Tiene representaciones de la vida cotidiana con los objetos matemáticos.
- Cumple con estos aspectos de la lingüística: fonemas, morfemas, sintaxis ...
- Es preciso, universal y no permite ambigüedades.
- Es denso (Díaz, 2009).
- Es un lenguaje simbólico y conceptual (ideográfico).
- Es estructura en axiomas, postulados, definiciones, teoremas, corolarios y lema.
- Es estrictamente jerárquico.
- Establece la relación símbolo, concepto y algoritmo (Díaz, 2009).

- Trabaja con términos indefinidos dados por la razón. (la recta, el punto, conjunto, entre otros).
- Toda sintaxis *matemática* se aplica a objetos y entidades perfectamente definidos sin ningún tipo de duda sobre su esencia ontológica.

Lenguaje aritmético (numérico)

El lenguaje numérico es por lo demás una cosa viva, que no se adapta exactamente al rígido plan que los matemáticos le prescribirían muy a gusto. (Karlson, 1960)

Como todo lenguaje coloquial, tiene sintaxis y semántica propias, que pueden entenderse desde los primeros años de la escuela elemental. La sintaxis es el conjunto de reglas de composición del “discurso numérico”, y la semántica, nos dará las pautas para entender y comprender el significado de ese discurso y las normas de autenticación y validación del mismo. Las palabras de este lenguaje son los números y están ligadas por igualdades, operaciones, relaciones de orden, conectivas lógicas, etc.

En este lenguaje tenemos algunas características como las siguientes:

- Conceptos numéricos y sentido de los números
- El significado de las operaciones aritméticas
- Control de hechos básicos de la aritmética
- Jerarquía de operaciones
- Utilización correcta de símbolos de la aritmética
- Cálculo mental y escritura de la aritmética
- Lectura y escritura de problemas verbales y habilidades aritméticas

Tabla 4. Ejemplos de transición del lenguaje natural al lenguaje aritmético

Lenguaje natural	Lenguaje aritmético
La suma de once más nueve es veinte	$11+9=20$
Cien dividido entre diez	$100/10$
La cuarta parte de veinte es cinco	$20/4=5$

Treinta y cuatro menos cinco es veintinueve	$34 - 5 = 29$
El cuadrado de 9 es 81	$9^2 = 81$

Las listas de verbos para la suma y la resta que se presentan a continuación son las que mayormente se utilizan desde el nivel preescolar, es importante que el alumno desde temprana edad vaya adquiriendo un vocabulario aritmético y el significado de símbolos.

Tabla 5. Lista de verbos de la suma y resta

Verbos de sumar			Verbos de restar	
Juntar-se	Atar	Tomar	Robar	Sustraer
Unir-se	Enlazar	Integrar	Rebajar	Separar-se
Reunir-se	Empalmar	Adicionar	Apartar-se	Descontar
Apilar	Capturar		Achicar	Retirar-se
Añadir	Cargar		Recortar	Acortar
Agregar-se	Recolectar		Quitar	
Adjuntar-se	Agrupar		Disminuir	
Recopilar	Coger		Reducir	
Ascender			Acortar	
			Perder	
			Sacar	

Desde edad temprana se nos presentan los números, así como las operaciones básicas (suma, resta, multiplicación, división), esto es importante para poder pasar al lenguaje algebraico en donde se trabajarán con variables en lugar de números.

Para el nivel medio superior los alumnos que tienen este lenguaje aritmético, saben los siguientes temas matemáticos: clasificación de los números (reales, irracionales,..), operaciones básicas con números y sus propiedades (cerradura, asociatividad, inverso,..), signos de agrupación, múltiplo de un número, números compuestos, números primos, máximo común divisor, mínimo común múltiplo, operaciones con fracciones, criterios de divisibilidad, biyección entre los números reales y la recta numérica, cardinalidad y ordinalidad, valor absoluto, notación científica, porcentajes, razón y proporción, regla de tres simple y compuesta.

Lenguaje algebraico

Clement (1982) y Cooper (1984) han señalado factores lingüísticos provenientes del lenguaje natural que afectan la traducción de un enunciado dado en este lenguaje al lenguaje algebraico. Norman (1987) muestra con otro ejemplo cómo la sintaxis del lenguaje natural podría afectar la percepción de la estructura algebraica por parte del estudiante.

En los diferentes artículos revisados (Booth y Johnson, 1984; Filloy y Rojano, 1989; Kieran, 1980; entre otros) se nota que hacen referencia al lenguaje algebraico en el cual se enfocan en la representación de los signos, símbolos y significados de los mismos.

Como se mencionó antes, la estructura de este lenguaje dependerá de su semántica, sintaxis y vocabulario matemático, es la transición del lenguaje aritmético al lenguaje algebraico, este lenguaje es más complejo ya que involucra varias variables.

Características de este lenguaje:

- Hacer una traducción literal de los significados, del lenguaje común al lenguaje algebraico. Como, por ejemplo, cuando se dice: el doble se traduce como 2.
- La traducción de los significados no es literal, sino que ésta se lleva a cabo gracias a la evocación de conceptos matemáticos y de las relaciones algebraicas asociadas a éstos. El enunciado no es suficiente para establecer el modelo matemático, pero sí es el que provoca la evocación. La evocación sirve de puente entre los significados del enunciado, o sus relaciones, y la traducción final al lenguaje algebraico, ya que en ella se presentan simultáneamente ambas formas de representación: natural y matemática.
- Uso de letras para la representación de números u objetos.
- Resolución de ecuaciones algebraicas
- Significado de símbolos y operaciones

Lenguaje geométrico (gráfico)

Fernández (1994) afirma que: “se entiende como la expresión de dibujos, diagramas, tablas, gráficas, etc., la verbalización de lo así tratado y su traducción al lenguaje simbólico”.

Este lenguaje involucra a los dos anteriores, es la geometría una rama de la matemática que se empieza a trabajar desde edad temprana, la vemos todo el tiempo en los objetos de uso diario (teléfono, libreta, caja de cereal,...), en el arte, la arquitectura de nuestras ciudades.

Las características de este lenguaje son:

- Representación de un punto, línea recta, segmento de recta, figuras geométricas, funciones (logarítmicas, exponenciales, polinomiales).
- La orientación espacial de un objeto matemático.
- Representaciones en dos o tres dimensiones.
- Prismas y pirámides
- Congruencia y semejanza de figuras geométricas.
- Poder pasar de una representación gráfica a una expresión algebraica o natural.
- Clasificación de ángulos
- Puede verse como un medio de comunicación entre el que habla y el que escucha o lee y en el que cada signo, vocablo o término depende del momento en el que se expresa, de quién lo expresa, de a quién va dirigido y cuando y donde se expresa. Intervienen en la comunicación tanto signos propios de la lengua vernácula como signos propios del lenguaje geométrico. Así, por ejemplo, para decir lo mismo, o casi, pueden usarse: formas geométricas, términos lingüísticos vernáculos, variables.
- Se usa en el lenguaje cotidiano, señalización de calles paralelas, tinacos cilíndricos, la escalera en espiral, etcétera.
- Líneas curvas

Lenguaje variacional

Cabrera (2009) expresa que el pensamiento y lenguaje variacional se caracterizan por “proponer el estudio de situaciones y fenómenos en los que se ve involucrado el cambio, a partir de las intuiciones y concepciones de los estudiantes (p. 55), centrándose en “la forma en que los fenómenos estudiados cambian de un estado a otro, identificando aquello que cambia, cuantificando ese cambio y analizando la forma en que se dan esos cambios” (Caballero y Cantoral, 2013, p. 1196).

El pensamiento y lenguaje variacional “estudia los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de saberes matemáticos propios de la variación y el cambio en el sistema educativo y el medio social que le da cabida” (Cantoral, 2000, citado en Cabrera, 2009, p. 53). El carácter variacional de las ideas matemáticas y no únicamente en su manejo simbólico y analítico, siendo las prácticas propias de la variación las que dotan de significado a los conceptos matemáticos y los procedimientos que se asocian a ellos.

El pensamiento y lenguaje variacional estudia los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de saberes matemáticos propios de la variación y el cambio en el sistema educativo y el medio social que le da cabida. Hace énfasis en los diferentes procesos cognitivos y culturales con que las personas asignan y comparten sentidos y significados utilizando estructuras y lenguajes variacionales (Cantoral, 2004).

La expresión *cambio* se entiende como una modificación de estado, en tanto que el vocablo *variación* la entendemos como cuantificación de dicho cambio. No obstante, la construcción del concepto de variación es un proceso difícil y lento, pues requiere la integración de distintos campos simbólicos, numéricos, algebraicos, analíticos, visuales, gráficos y geométricos, así como una adecuada comprensión de procesos matemáticos específicos, como: número, variable, constante, parámetro, función, límite, continuidad, derivada, integral, convergencia, representación e infinito para tener una adecuada construcción de las nociones de *cambio* y la *variación*. (Cantoral, 2013, pag.46)

CAPÍTULO 2. MÉTODO

Esta investigación es de corte cualitativo y documental ya que utiliza artículos, tesis y libros, para la construcción del marco conceptual con el que se analizaron cinco actividades didácticas de interés.

La técnica es el estudio de todos los documentos revisados que se enfoquen en la lingüística y el lenguaje matemático con las cuales se obtuvieron las categorías y características comunes que permitieron la construcción del marco conceptual. Se construyó la categorización con base en los aspectos convergentes y divergentes que abordan estos textos.

Otro aspecto importante de esta investigación es la validación de un conjunto de actividades con el marco conceptual construido. En la validación (capítulo 3) se resaltarán los sistemas de normas, las funciones y las áreas del lenguaje matemático que se promueven con dichas actividades.

Las actividades no son secuenciales, su aplicación se deja a criterio del profesor ya que pueden ser aplicadas en los tres años del bachillerato.

2.1 Marco conceptual

A continuación, se presenta el marco conceptual que nos permitirá analizar actividades didácticas que fueron propuestas por otros autores para promover el lenguaje matemático. Este marco está constituido por las características del lenguaje desde el punto de vista de la lingüística (tabla 6), por su función (tabla 7) y de acuerdo a algunas áreas de las matemáticas (tabla 8).

Este marco conceptual forma parte del método de este trabajo porque con él se validan las actividades mediante un análisis de contenido. En este mismo capítulo se presentan las actividades didácticas y en el capítulo 3 se aplica el marco en la validación de dichas actividades.

Tabla 6. Características de Lenguaje Matemático desde el punto de vista de la Lingüística

LENGUAJE MATEMÁTICO DE ACUERDO A LOS SISTEMAS DE LA LINGÜÍSTICA		
Sistemas	Características	Ejemplos
Fonológico	Comprende principios y normas para distinguir sonidos (fonemas) entonación, acentos, así como para su organización. Éstos son básicamente los mismos que comprende el sistema fonológico del lenguaje natural.	En su manifestación verbal, emplea los mismos fonemas que son propios al lenguaje natural: /e/, /cu/, /a/, /ci/, /ón/, etc.
Morfológico	Comprende los principios mediante los cuales se combinan formas para construir palabras. Concibe las formas como las unidades mínimas que transportan significados concretos, construidas por combinaciones de los fonemas.	Derivar: viene del latín "derivare ", forma compuesta de "rivare" (hacer fluir, llevar, conducir o canalizar un curso de agua) y "de", indicando separación, significando luego, "llevar desde, conducir desde". Rivare viene de rivus (río). Álgebra: préstamo (s. XV) del latín algebra y este del árabe alğabru ‘reducción’, ‘álgebra matemática’, derivado de la raíz g-b-r ‘reforzar’, ‘curar’, ‘restituir’, aplicado primero a la técnica de restituir a su lugar los huesos dislocados y después a las matemáticas, para designar la

		reducción o simplificación de los cálculos con cifras (V.) árabes	
Semántico	Comprende las reglas y convenciones relacionadas con el significado dado por el uso de los objetos de los sistemas anteriores. Se refiere a la relación entre los signos y los objetos a que se hacen referencia. Aquí los fenómenos propios del lenguaje natural se suscitan malentendidos, como sinonimia, polisemia, homonimia, entre otros, tiene sus similitudes en el lenguaje materno a través de las distintas representaciones de un mismo objeto o relación matemática o	Palabras que aparecen en la Matemática y en el lenguaje ordinario, aunque no siempre con el mismo significado en los dos contextos. A causa de interpretaciones lingüísticas diferentes se producen innumerables confusiones cuando el profesor emplea términos del dialecto matemático y los alumnos lo interpretan de acuerdo con el lenguaje ordinario.	Por ejemplo: infinito, igual, semejante, transformación, raíz, potencia.

	de una misma representación para denotar distintos objetos.	Solo se utiliza esa palabra en matemáticas Palabras técnicas que, normalmente, no forman parte del lenguaje cotidiano. Los matemáticos han desarrollado una serie de términos específicos para comunicarse entre sí, que pueden causar problemas en las clases de Matemática en caso de que los alumnos no lleguen a dominarlo.	Por ejemplo: ecuación, teorema, lema, corolario, etc.
		Palabras que tienen significados iguales o muy próximos en ambos contextos.	Por ejemplo, alineados, paralelos, perpendiculares, etc.
		Palabras que tienen significado diferente dentro del mismo lenguaje matemático.	Por ejemplo, la palabra cuadrado. No es lo mismo el significado en “nueve al cuadrado” que en “el cuadrado es un ejemplo de cuadrilátero”.

Sintáctico	Estos obedecen ya no sólo a las palabras en el lenguaje materno sino a los de los símbolos en el lenguaje matemático. Los principios sintácticos tienen que ver con “el orden y “la validez” de las expresiones construidas.	En el orden de una preposición. $P \rightarrow Q$ la estructura escrita de esta manera no tendría sentido $\rightarrow PQ$ que no expresa lo mismo.
Simbólico y Gráfico	Abarca principios y reglas para el uso de símbolos para la construcción de diagramas y gráficos.	Para la construcción de los gráficos en el plano existen algunas reglas de uso común. Por ejemplo, el eje x de forma “horizontal”, representar “unidades” en cada eje, entre otras.
Expresivo Evocativo	Abarca principios y reglas sentimientos y emociones sobre el lenguaje y la actividad matemática.	Por ejemplo: (a) sobre los juicios relacionados con la elegancia de una demostración (b) sobre las dudas asociadas a la validez de lo realizado en un problema, etc.

Tabla 7. Funciones del lenguaje

Función	Características	Ejemplo
Lúdica	Se expresa principalmente a través de los juegos reglados donde se ponen en práctica conocimientos matemáticos que requieren de cálculo, estrategias espaciales, anticipación, etc. Al respecto el educador ha de crear experiencias que desafíen a los alumnos a resolver pequeñas dificultades, que impliquen efectivamente un reto atractivo y, considerando los espacios suficientes para que exprese verbalmente cómo lo hizo, qué más le costó resolver y qué aprendió con la experiencia.	Rompecabezas, memoramas, loterías, en los cuales se puede aplicar conceptos matemáticos.
Representativa	Implica la utilización de signos para representar cantidades o relaciones, figuras geométricas y otras formas conocidas, etc. Durante los primeros años los niños se irán acercando a los signos convencionales del lenguaje escrito de las matemáticas, a través de experiencias que surgen de la vida cotidiana.	En lugar de dibujar cinco objetos podrá escribir el signo que represente esa cantidad. Es necesario ofrecer experiencias significativas donde puedan una y otra vez contar, seleccionar, agrupar, etc.
Comunicativa	Nos permite informar, dar a conocer la realidad, explicar y cuantificar la realidad;	Frente a la pregunta: ¿Dónde ven los números y para qué sirven?, podríamos

		tener las siguientes respuestas " en los autos para saber de quién es, en los buses para saber dónde ir, en los canales de TV para saber qué canal es, etc.". En cada uno de estos ejemplos los números no representan cantidad ni orden, se han utilizado combinaciones de números para informar. Es a través de estas situaciones simples que los niños construirán sus ideas previas sobre la numeración.
--	--	---

Tabla 8. Características del lenguaje matemático de acuerdo con algunas áreas de la matemática.

Área de la matemática	Características	Ejemplo
Lenguaje aritmético	Conceptos numéricos y sentido de los números El significado de las operaciones aritméticas Control de hechos básicos de la aritmética Jerarquía de operaciones Utilización correcta de símbolos de la aritmética Cálculo mental y escritura de la aritmética Lectura y escritura de problemas verbales y habilidades aritméticas	Lenguaje natural Cinco más tres es ocho Lenguaje aritmético $5+3=8$
Lenguaje algebraico	Este lenguaje hace referencia al lenguaje aritmético, utilizando ahora letras para la representación de números u objetos matemáticos, en el cual se enfocan en la representación de los signos, símbolos y significados de estos. La estructura de este lenguaje dependerá de su semántica, sintaxis y vocabulario matemático.	Lenguaje algebraico $2x+3y=5$ Lenguaje natural El doble de un número más el triple de otro número es igual a 5

Lenguaje Geométrico	• Representación de un punto, línea recta, segmento de recta, figuras geométricas, funciones (logarítmicas, exponenciales, polinomiales). • La orientación espacial de un objeto matemático. • Representaciones en dos o tres dimensiones. • Prismas y pirámides • Congruencia y semejanza de figuras geométricas. • Poder pasar de una representación gráfica a una expresión algebraica o natural. • Clasificación de ángulos • Puede verse como un medio de comunicación entre el que habla y el que escucha o lee y en el que cada signo, vocablo o término depende del momento en el que se expresa, de quién lo expresa, de a quién va dirigido y cuando y donde se expresa. Intervienen en la comunicación tanto signos propios de la lengua vernácula como signos propios del lenguaje geométrico. • Líneas curvas	¿Qué puedes deducir de la gráfica?
Lenguaje variacional	El entendimiento de los procesos de variación involucrados en las situaciones variacionales se manifiesta a través de argumentos, que consisten en explicaciones, técnicas o maniobras que de alguna manera muestran el reconocimiento cualitativo	¿A qué velocidad debe de ir un auto de carreras para recorrer

	y cuantitativo del cambio. En una situación variacional intervienen distintas actividades, acciones y ejecuciones, que son similares en cuanto a sus objetivos y los contextos en los que se desarrollan.	50km en un cuarto de hora? 
--	--	---

2.2 Actividades didácticas

En este apartado se presentará un conjunto de actividades que provienen de diferentes autores presentadas en Onofre (2017), las cuales fueron reestructuradas para lograr una presentación uniforme que incluyera, objetivo, materiales, desarrollo y una propuesta de evaluación.

Primera actividad. Rompecabezas

Esta actividad se dividió en dos partes, primero presentaremos el juego del rompecabezas para posteriormente realizar una tabla con las características de los polígonos (la suma de sus ángulos internos y externos, el número de diagonales, etc.) ya teniendo una mejor comprensión de estas figuras geométricas.

Parte 1

Esta actividad se realizará en parejas, uno de los participantes armará primero una figura (casa, tren, avión, etc.) y luego él dará instrucciones a su compañero para que con el material dado construya la misma figura. Los participantes tendrán que describir cada figura geométrica utilizada y su posición con respecto a otras. Podrán decir el nombre de la figura (si lo saben) o mencionar algunas características como, número de lados, si son o no del mismo tamaño, o relacionar las figuras con objetos cotidianos, ángulos, etc. En el caso de la posición, se espera que usen el vocabulario propio de la ubicación espacial (a la derecha, a la izquierda, arriba, abajo) con respecto a otra figura y también la manera en que deben colocarla: sobre uno de los lados largos, como si estuviera apoyada en un vértice, etc. Esta actividad se basa en la presentada en Solares (2006).

Objetivo: Fomentar el uso de un vocabulario matemático específico, comprensión de las propiedades de los polígonos (ángulo interno, número de diagonales, etc....)

Materiales: Figuras geométricas de cartulina, foami, etc., de un tamaño tal que puedan ponerse varias en la mesa en que trabajarán los participantes. Para los alumnos de segundo semestre de bachillerato se sugiere usar cuadrados, rectángulos, círculos, triángulos, rombos, cuadriláteros, como romboides y trapecios, polígonos regulares y cóncavos.

Desarrollo de la actividad:

Cada participante debe tener un juego de figuras.

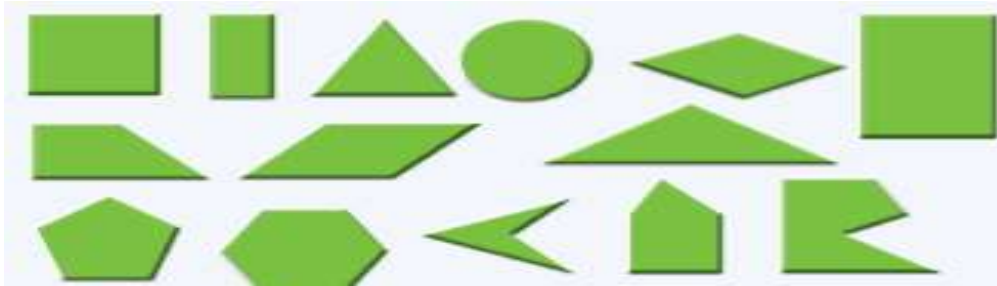


Figura 1. Juego de figuras para la actividad 1.

1. Pregunta a los participantes: “¿Les gusta armar rompecabezas? ¿Han armado rompecabezas siguiendo las instrucciones que les dé otra persona?”
2. Entrega a cada participante un juego completo de figuras.
3. Indicarles que armen una figura (un barco, un cohete, un tren, una persona, entre otros). Cuando lo hayan hecho, pídeles que comparen sus trabajos: “¿Todas las figuras son iguales? ¿Todos emplearon las mismas piezas? Guía la discusión para que los participantes se den cuenta de la importancia de dar instrucciones claras.
4. Organiza al grupo en parejas.
5. Pídeles que se sienten uno frente al otro y que entre ellos pongan un obstáculo (por ejemplo, una mochila) para que no vean lo que está haciendo su compañero.
6. Dales la siguiente consigna: “Uno de ustedes, sin que su compañero(a) lo vea, va a tomar 4 piezas, las que guste, y con ellas va a armar una figura. Después le va a dar las instrucciones a su compañero(a) para que construya la misma figura, con las mismas piezas colocadas en la misma posición. Cuando terminen, quiten el obstáculo y comparen sus figuras. Si no son iguales,

busquen en dónde estuvo el error.” (Utilizando ángulos interiores, número de diagonales desde un vértice, suma de ángulos internos, área de la figura, etc.)

7. Mientras los participantes juegan, puedes caminar entre las parejas para confirmar que comprendieron las instrucciones; en caso necesario, puedes intervenir planteando preguntas como: “¿Comprendes lo que te dice tu compañero?, ¿por qué sabes que la pieza que tomaste es la que te indicó tu compañero?, ¿estás seguro de que así va colocada?”, etcétera.

8. Cuando una pareja termine, indícales que intercambien los papeles.

9. Repite la actividad las veces que el tiempo lo permita.

Al finalizar organiza una puesta en común; guíala con preguntas como: “¿Fue fácil armar los rompecabezas? ¿Sus figuras siempre quedaron iguales? Cuando no quedaron iguales ¿qué fue lo que pasó?” Permite que los participantes lleguen a conclusiones sobre la necesidad de usar correctamente el vocabulario geométrico (cuadrado, círculo, figura de seis lados, etc.) y de ubicación espacial (derecha, izquierda, etc.)

Parte 2

Completa la siguiente tabla utilizando las fórmulas necesarias para su elaboración, con un mínimo de 25 polígonos regulares.

Tabla 9. Propiedades de los polígonos regulares.

	1°	2°	3°	4°	5°	6°
	polígono	polígono	Polígono	Polígono	Polígono	Polígono
Nombre						
Polígono (representación gráfica)						
¿Cuántas aristas tiene?						

Características por sus ángulos						
Alguna(s) otra(s) característica						
¿Cuántos vértices tiene?						
Número total de diagonales del polígono.						
Suma de ángulos interiores de un polígono						
Ángulo interior de un polígono regular						
Triángulos que se forman en el polígono						
Suma de las medidas de sus ángulos centrales						
Número de diagonales del polígono desde un vértice						

Evaluación de la actividad

Pedir un reporte escrito de la actividad, la clasificación de polígonos (por la medida de sus ángulos interiores, el número de lados, la medida de sus lados y sus ángulos interiores), así como la resolución de la tabla anterior correctamente.

Tabla 10. Lista de cotejo para la actividad 1

Criterios de evaluación	Si	No
Usa un vocabulario matemático (geométrico) al llamar a las figuras por su nombre, o alguna de sus características.		
Utiliza un vocabulario matemático cuando se dan las instrucciones entre alumnos.		
Cumple con la utilización de una fonética correcta utilizada en el discurso matemático.		
Sabe la definición de polígono		
Sabe la diferencia entre polígono cóncavo y convexo		
Dibuja o representa los polígonos al escuchar sus características dadas en lenguaje natural.		
Ubica cada polígono en la posición en la cual están en la actividad (arriba, abajo, al lado de, a la derecha, sobre de...)		
Identifica el significado de los símbolos al utilizar las fórmulas para determinar ángulos internos, número de diagonales, suma de ángulos internos, etc., en polígonos regulares.		
Puede mencionar el nombre de los polígonos, aunque estén en diferentes posiciones (es decir, inclinado, volteado, en dimensiones proporcionales)		
El reporte tiene una estructura coherente y sin faltas de ortografía.		

Segunda actividad. Dominó de símbolos matemáticos

En esta actividad los alumnos elaboraron un dominó de 28 piezas utilizando el tema de lenguaje algebraico visto en primer semestre de bachillerato. Para unir dos piezas ellos tendrán que relacionar algún símbolo matemático con su nombre o significado en lenguaje natural.

Objetivo: Promover la conversión del lenguaje natural al lenguaje algebraico y viceversa a través del juego de dominó.

Materiales: Pueden ser de cartulina, foami, materiales reciclados, etc. Las fichas de dominó se construirán utilizando la siguiente tabla.

Tabla 11. Lista de símbolos y su significado para colocar en las fichas de dominó.

Lenguaje Algebraico	Lenguaje Natural
+	Suma, más, añadir, incrementar, adicción
-	Resta, quitar, disminuir, decrementar, diferencia
*, x, ()	Veces, producto, por, factor
÷, :	División, cociente, es a, razón
=	Igual, equivale a
X	Un número cualquiera
n+1	Sucesor de un número n
n-1	Antecesor de un número n
2x	Doble de un número, duplo, dos veces, número par, múltiplo de dos
3x	Triple de un número, triplo, tres veces, múltiplo de tres
4x	Cuádruplo de un número, cuatro veces, múltiplo de cuatro
x^2	Cuadrado de un número
x^3	Cubo de un número
$\frac{1}{2}x$ o $\frac{x}{2}$	Mitad de un número, un medio de
$\frac{1}{3}x$ o $\frac{x}{3}$	Tercera parte de un número, un tercio de

$\frac{1}{x}$	Inverso multiplicativo
$2x + 1$ o $2x - 1$	Número impar (x es un entero)
$\frac{x + y}{2}$	Semisuma de dos números, la mitad de la suma de dos números cualesquiera
$\frac{x - y}{2}$	Semidiferencia de dos números
$(x - y)^2$	Binomio al cuadrado
$(x - y)(x + y)$	Producto de binomios conjugado
$x^2 + 2xy + y^2$	Trinomio cuadrado perfecto

Desarrollo de la actividad:

Este juego sigue las mismas reglas del dominó tradicional, se jugará con dos o cuatro alumnos. Los alumnos tendrán siete fichas para empezar el juego, las restantes estarán sobre la mesa. Se saca una ficha primero de las que están en la mesa, si alguno de los jugadores tiene la ficha que relaciona el símbolo con su nombre o viceversa entonces la pondrá junto a la que se sacó, de no ser así, el alumno que sacó esa ficha tomará una ficha del mazo hasta que tenga la ficha para continuar, gana el primero que termine sus fichas.

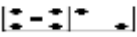
En las siguientes imágenes se muestran en las dos primeras la versión de un dominó modificado, donde para poder jugar primero deberán responder la pregunta que corresponde a la suma de los puntos de una ficha normal de domino es decir si la ficha es  la suma de sus puntos es siete, sí respondes la pregunta correctamente podrás poner la ficha correspondiente, si no, pierdes tu turno, así hasta que se tenga un ganador. Las preguntas están basadas con base en la tabla anterior donde se les dice verbalmente una expresión y lo tienen que escribir algebraicamente.



Figura 2. Evidencia del desarrollo de la actividad 2.

Evaluación de la actividad

Esta actividad es ejecutada en el salón de clase, así se observará el proceso de elaboración también deberán replicar la tabla de símbolos en una hoja que será anexada en el reporte entregarán un reporte a mano con un mínimo de 30 símbolos o expresiones algebraicas diferentes a los proporcionados y explicará su uso en las matemáticas o en otras áreas científicas.

Tabla 12. Lista de cotejo para la actividad 2

Criterios de evaluación	Si	No
Escribe correctamente los símbolos matemáticos.		
Usa el lenguaje natural al leer las tarjetas de dominó.		
Distingue los usos de los símbolos matemáticos que se mencionan en la tabla.		
Cumple con la utilización de una fonética correcta en el discurso matemático.		
Identifica el significado de los símbolos al relacionar las fichas en el juego.		
Tiene una sintaxis correcta.		
El reporte tiene una estructura coherente y sin faltas de ortografía.		
Identifica la diferencia entre expresión y lenguaje algebraicos.		

Tercera Actividad. Memorama

En este juego se revisaron los temas de leyes de senos y cosenos, funciones trigonométricas, círculo unitario, teorema de Pitágoras, que se estudian en el segundo semestre de bachillerato. Los alumnos responderán un cuestionario previo para poder hacer su memorama de una manera creativa. En la mitad de las tarjetas escribirán las preguntas y en la otra mitad las respuestas. Las preguntas serán sobre las definiciones, conceptos y aplicaciones de: leyes de senos y cosenos, círculo unitario, teorema de Pitágoras, funciones trigonométricas y razones trigonométricas.

Objetivo

Revisar el vocabulario relacionado con los temas de leyes de senos y cosenos, funciones trigonométricas, círculo unitario y teorema de Pitágoras para fomentar su uso mediante el juego del memorama.

Materiales: Cartón, foami, hojas, materiales reciclados, etc., así como la solución al cuestionario. (Las preguntas del cuestionario pueden variar respecto al tema, así como anexar más preguntas)

El cuestionario es:

- 1) ¿Cuál es la razón trigonométrica entre el cateto opuesto y el adyacente?
- 2) ¿Cuál es la razón trigonométrica entre el cateto adyacente y el opuesto?
- 3) ¿Cuál es la razón trigonométrica entre el cateto opuesto y la hipotenusa?
- 4) ¿Cuál es la razón trigonométrica entre el cateto adyacente y la hipotenusa?
- 5) ¿Cuál es la razón trigonométrica entre la hipotenusa y el cateto adyacente?
- 6) ¿Cuál es la razón trigonométrica entre la hipotenusa y el cateto opuesto?
- 7) ¿En qué tipos de figuras se emplean las razones trigonométricas?
- 8) ¿Cuál es la gráfica que representa a la función seno?
- 9) ¿Cuál es la gráfica que representa a la función coseno?
- 10) ¿Cuál es la gráfica que representa la función tangente?

- 11) Es la medida del ángulo central de un círculo, en el que el arco mide lo mismo que su radio.
- 12) Es la unidad de medida angular en el sistema sexagesimal
- 13) Es la unidad de medida angular en el sistema circular
- 14) Corresponde a la razón recíproca de seno.
- 15) Corresponde a la razón recíproca de coseno.
- 16) Corresponde a la razón recíproca de tangente.
- 17) Valor exacto que corresponde al coseno de 30 grados
- 18) Valor exacto que corresponde al seno de 30 grados
- 19) Valor exacto que corresponde a la tangente de 30 grados
- 20) Valor exacto que corresponde al coseno de 45 grados
- 21) Valor exacto que corresponde a la tangente de 45 grados
- 22) Valor exacto que corresponde a la tangente de 60 grados
- 23) Ángulo de referencia que le corresponde a 120 grados
- 24) Ángulo de referencia que le corresponde a 245 grados
- 25) Ángulo de referencia que le corresponde a 300 grados
- 26) Ángulo de referencia que le corresponde a 625 grados
- 27) Ángulo de referencia que le corresponde a 1200 grados
- 28) Razón trigonométrica utilizada para resolver un triángulo rectángulo cuando te proporcionan el cateto adyacente, y ángulo dado, y se requiere encontrar la hipotenusa.
- 29) Se requiere alcanzar un objeto que se encuentra en la parte alta de un armario. Se coloca contra la pared una escalera de x metros de longitud y el pie de la misma queda a z metros del armario, ¿Cómo obtienes el valor del ángulo que forma la escalera con el suelo?
- 30) El momento de despegue de un avión se mantiene en la dirección x grados. Si después de cierto tiempo llega a una altura de d metros, ¿Cómo obtienes la distancia que recorrió el avión en su despegue hasta llegar a esa altura?
- 31) La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide z metros y uno de sus ángulos agudos tiene b grados, ¿Cómo obtienes la medida del cateto adyacente?

- 32) Un poste de alumbrado se mantiene vertical con la ayuda de un tensor sujeto a x metros del pie del poste, si el ángulo de elevación del cable es de f grados, ¿Cómo se obtiene la altura del poste?
- 33) ¿Cuál es el valor del ángulo del lado terminal situado en la coordenada $(-3,5)$?
- 34) Determina el valor exacto de la función seno, para el ángulo cuyo extremo de la línea terminal está en el punto $(3,-7)$.
- 35) Cómo se determina el valor exacto de la función coseno, para el ángulo cuyo extremo terminal está en el punto $(-3,-5)$
- 36) Cómo se determina el valor exacto de la función tangente, para el ángulo cuyo extremo terminal está en el punto $(-5,-9)$
- 37) ¿Cuál es el valor del ángulo del lado terminal situado en la coordenada $(4,-6)$?
- 38) ¿Cuál es el valor del ángulo del lado terminal situado en la coordenada $(-7,-9)$?
- 39) Es el signo de la función seno en el tercer cuadrante
- 40) Es el signo de la función coseno en el cuarto cuadrante
- 41) Es el signo de la función tangente en el segundo cuadrante
- 42) Determina el valor de la abscisa de un punto de la línea terminal de un ángulo si se sabe que el seno del ángulo es igual a $-7/2$.
- 43) Como se determina el valor de la ordenada de un punto de la línea terminal de un ángulo, si se sabe que se abscisa es -3 y el seno del ángulo es $1/2$.
- 44) Es la relación de funciones de la identidad trigonométrica tangente A
- 45) Es la relación de funciones de la identidad trigonométrica secante A
- 46) Utilizando las identidades trigonométricas, simplifica la siguiente expresión:

$$\frac{\csc \theta}{\tan \theta + \cot \theta} =$$

- 47) La expresión equivalente a:

$$\frac{\sin \theta}{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta} =$$

- 48) La expresión equivalente a:

$$\frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\cos \theta} =$$

- 49) ¿Qué tipos de triángulos se utilizan para las leyes del seno y coseno?

- 50) ¿Qué expresión es utilizada para calcular un ángulo interno de un triángulo obtusángulo si se conocen los 3 lados de éste?
- 51) ¿Qué expresión es utilizada para calcular un ángulo interno de un triángulo obtusángulo, si se conocen 2 ángulos internos y uno de los lados relacionados a alguno de estos ángulos?
- 52) Si te piden calcular el lado a de un triángulo, y te proporcionan su ángulo de A° y los otros 2 lados que tienen valores c y b . ¿Qué ley debes aplicar?

Desarrollo de la actividad:

Con las preguntas y las respuestas del cuestionario elaborar el memorama, se jugará con un mínimo de 4 alumnos y un máximo de 6, gana el que tenga más parejas de pregunta y respuesta correctas.



Figura 3. Evidencia de la actividad 3.

Evaluación de la actividad

Realizar un mapa conceptual de los temas mencionados Se plantearon al azar 5 preguntas del cuestionario a cada alumno.

Tabla 13. Lista de cotejo para la actividad 3

Criterios de evaluación	Si	No
Usa un vocabulario matemático (geométrico) al relacionar la gráfica de la función seno, coseno y tangente con su nombre.		
Usa correctamente la simbología matemática.		
Aplica correctamente los conceptos que se necesitan en cada caso, para la resolución de los problemas		
Utiliza un vocabulario matemático cuando leen las tarjetas del memorama.		
Cumple con la utilización de una fonética correcta utilizada en el discurso matemático.		
Dibuja la solución correcta donde se piden las gráficas de seno, coseno y tangente.		
Identifica el significado de los símbolos al utilizar las fórmulas para la resolución de los problemas		
Tienen una sintaxis correcta		
El mapa conceptual tiene una estructura coherente y sin faltas de ortografía.		

Cuarta Actividad. A pintar un cuadro

En esta actividad los alumnos reproducirán en una hoja la sucesión numérica dada en las imágenes de la figura 5 u otras similares, obtener la fórmula para el siguiente término, así como la suma total de puntos que se necesiten para su elaboración, los alumnos podrán realizar el cuadro con el material que deseen.

Objetivo: Se pretende que los alumnos ilustren sucesiones de figuras geométricas, escriban la fórmula de la sucesión numérica correspondiente.

Materiales: Cartón, madera, papel cascarón, foami, etc., pegamento, estampas, lo necesario para la realización la réplica de las siguientes imágenes.

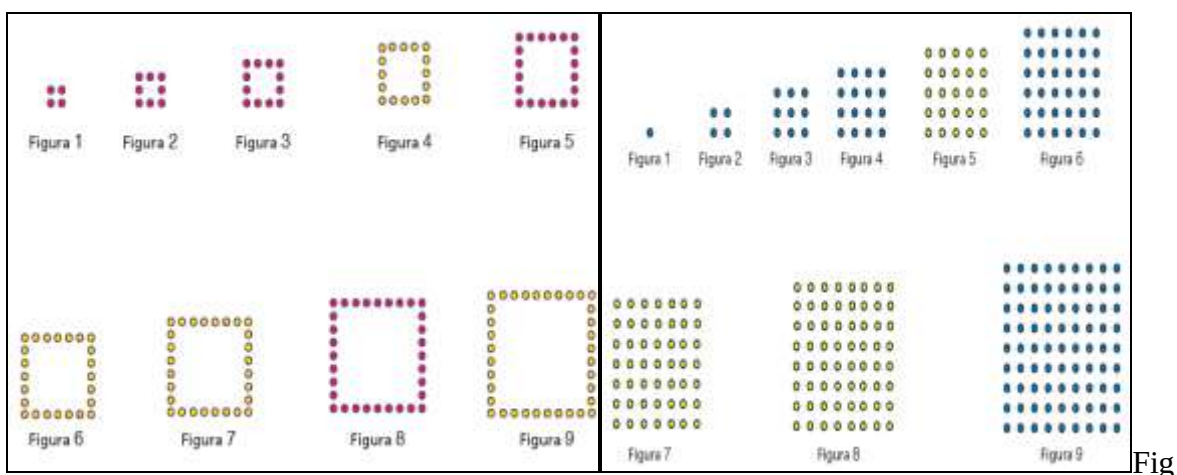


Figura 4. Ejemplos de las sucesiones

Desarrollo de la actividad:

Dadas las imágenes anteriores obtener, la fórmula de la sucesión, la suma de todas las figuras necesarias para realización de cada imagen, reproduciéndolas en un cuadro.

El alumno deberá explicar las imágenes, la elaboración del mismo y procedimiento de como obtuvo las fórmulas. Identificar si es una sucesión geométrica o aritmética.

Evaluación de la actividad

El alumno deberá mostrar evidencia de la realización de la actividad (fotos o video), realizará un reporte de lo que es una sucesión, sucesión geométrica y aritmética, la aplicación de las sucesiones en la vida cotidiana, este trabajo se realizará a mano. Investigar qué científicos dieron este término matemático.

Los alumnos resolverán las siguientes sucesiones de manera correcta, explicando porque son sucesiones geométricas o aritméticas:

1.- En una sucesión aritmética, sabemos que el sexto término es 28 y que la diferencia es 5. Calcular el término general y los 5 primeros términos.

2.- En una sucesión geométrica, sabemos que el primer término es 6 y el cuarto 48. Calcular el término general y la suma de los 5 primeros términos.

3.- Encontrar el término general de la sucesión

20, 19.3, 18.6, 17.9, ...

¿Es aritmética o geométrica? Encontrar los términos: décimo (10), vigésimo (20) y trigésimo (30).

4.- Encontrar el término general de la sucesión

0.5, 0.25, 0.125, 0.0625,...

¿Es aritmética o geométrica? Calcular los términos n -ésimos para los valores de $n = 10, 100$.

5.- Encontrar el término general de la sucesión

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, ...

¿Es aritmética o geométrica?

Tabla 14. Lista de cotejo para la actividad 4

Criterios de evaluación	Si	No
Usa un vocabulario matemático al explicar cómo obtuvieron la fórmula de su sucesión.		
Usa un vocabulario natural		
Utiliza un vocabulario matemático al explicar la construcción de la sucesión.		
Cumple con la utilización de una fonética correcta utilizada en el discurso matemático.		
Dibuja las sucesiones al escuchar sus características dadas en lenguaje natural.		
Identifica el significado de los símbolos al utilizar las fórmulas para determinar el n-ésimo término de una sucesión		
Tiene una sintaxis correcta		
El reporte tiene una estructura coherente y sin faltas de ortografía.		

Quinta Actividad. Ensalada de números

A reconocer números por alguna de sus características (si son pares o impares, si son mayores o menores que otro número, si son múltiplos o divisores de otro, si son naturales, enteros, racionales, irracionales, reales...).

Objetivo: Que los alumnos reconozcan y verbalicen las propiedades de los números y su clasificación mientras juegan.

Materiales: Para cada participante, una tarjeta (tamaño un octavo de carta) con un número escrito con plumones gruesos, para que el número de cada uno sea visible para los demás; también pueden usarse cartón o cartulina.

Desarrollo de la actividad:

1. Entrega a cada participante dos tarjeta donde escribirán en la tarjeta un número y en otra alguna característica utilizando la información de la figura 6.
2. Ahora pregúntales: “¿Qué saben del número que tienen?” Cada uno dirá algo sobre su número: si es par o impar, si es múltiplo de algún otro número, si es un número entero, etcétera.
3. Forma un círculo de sillas (el número de sillas debe ser una menos que la cantidad de participantes).
4. Invítalos a tomar asiento; uno quedará de pie.
5. Da las instrucciones a los participantes: “El compañero que quedó sin asiento dirá la frase ‘Ensalada de...’ y mencionará alguna característica de los números. Todos los participantes que tengan un número que cumpla con lo que se dijo deberán cambiarse de lugar. En esos momentos, quien está de pie aprovechará para sentarse. El compañero que quede sin asiento será quien ahora diga: ‘Ensalada de...’. Si alguien dice: ‘¡Ensalada loca!’, todos deberán cambiar de lugar.”

6. Hagan un ensayo; di: “Ensalada de... ¡números mayores que 6!”. Pide que todos los que tengan números mayores que 6 se cambien de lugar.

7. Aclárales que entre todos deben observar que se cambien de lugar los que deben hacerlo. En caso de que alguien que tenía que cambiarse no lo haga (o, por el contrario, si no tenía que cambiarse y lo hizo), se quedará de pie.

8. Inicia el juego. Cuando notes que alguien que se quedó de pie no puede mencionar la “Ensalada de...”, apóyalo con alguna idea.

9. Después de jugar, organiza una puesta en común. Invita a los participantes a que compartan con todos qué aprendieron, si sabían todas las características de sus números, si se equivocaron alguna vez, en qué se equivocaron...

Es importante reconocer las características de los números. Los números pares son los que terminan en 0, 2, 4, 6 u 8, y los impares, en 1, 3, 5, 7 o 9. El primer lugar de la derecha corresponde a las unidades; el segundo, a las decenas, y el tercero, a las centenas. Los múltiplos de 4, por ejemplo, son 4, 8, 12, 16, 20... Los divisores de 20 son 1, 2, 4, 5, 10 y 20. Que sean reales, enteros, racionales, irracionales e imaginarios.

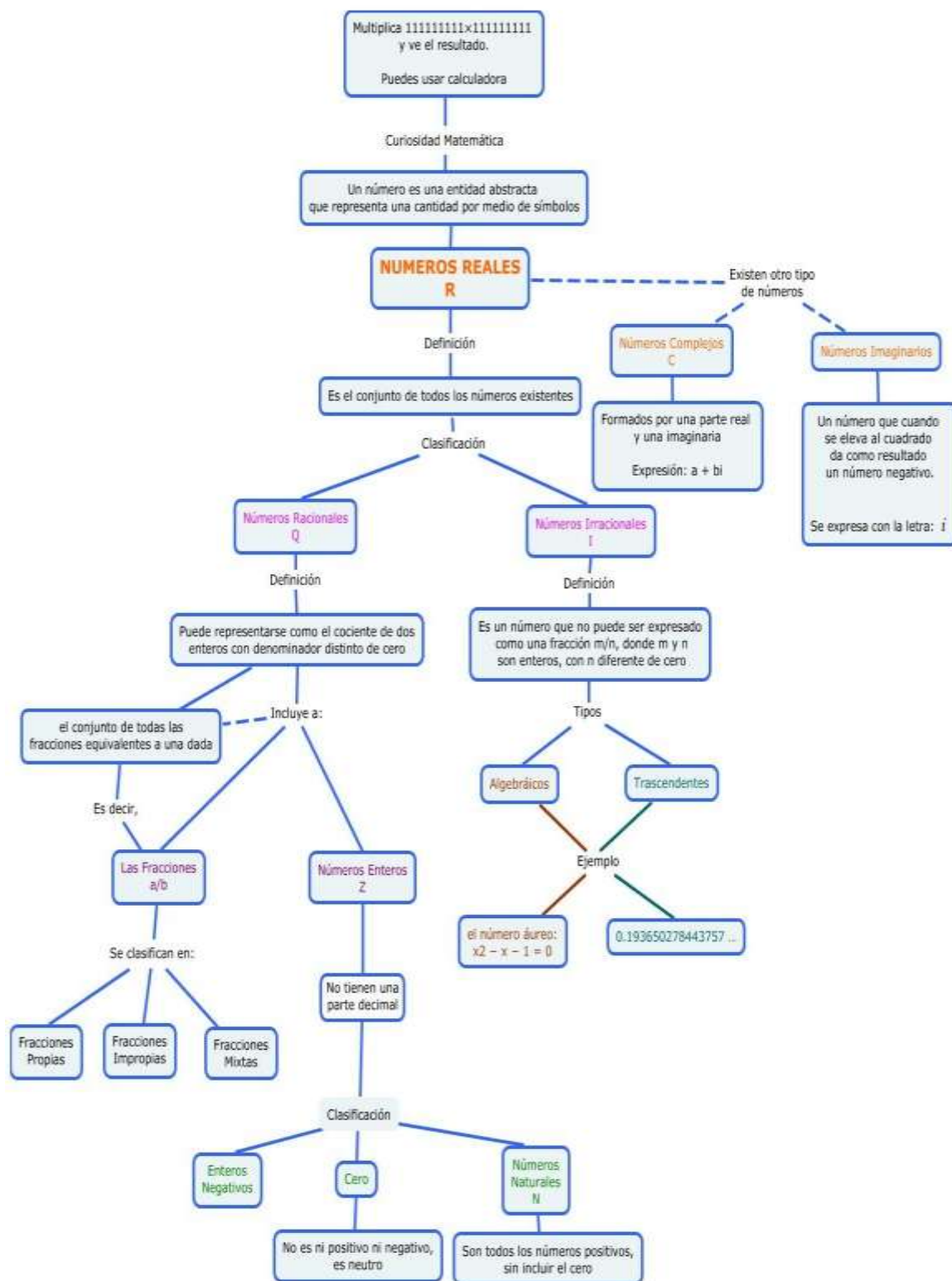


Figura 5. Clasificación de los números

¿De qué otra manera lo puedo hacer?

En lugar de jugar con números puedes usar figuras geométricas. Un tamaño adecuado es trazar la figura geométrica tan grande como se pueda en una hoja carta. Pueden ser de cartón, cartulina o foami. Te recomendamos que sean todas del mismo color, para que los participantes digan características geométricas y no se fijen en el color. Las ensaladas se pueden hacer por el nombre (cuadrado, triángulo, trapecio...) o por alguna característica (número de lados, paralelismo, perpendicularidad, simetría...)

Evaluación de la actividad

Cada alumno deberá de reproducir la figura 6 a mano para anexarlo, presentar ejemplos y anexar los criterios de divisibilidad de los números.

Tabla 15. Lista de cotejo para la actividad 5

Criterios de evaluación	Si	No
Representa cada conjunto de números con su símbolo matemático		
Distingue las características de cada conjunto de números		
Proporciona ejemplos de cada conjunto de números		
Ordena un conjunto de números de mayor a menor y viceversa		
Puede hacer operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división) con los conjuntos de números proporcionados.		
Distingue qué conjunto contienen a otro y puede representarlo con una imagen		
Distingue un número fraccionario en qué conjunto de los números está representado		
Escribe fracciones cuando alguien las dicta		
Gráfica situaciones fraccionarias		
Sabe lo que es un numero primo y puede mencionar al menos 3 no consecutivos		
Sabe distinguir de números positivos de negativos		
Distingue lo que es un número impar, par.		

CAPÍTULO 3. VALIDACIÓN DE LAS ACTIVIDADES DIDÁCTICAS

Las actividades que se analizarán aquí fueron implementadas de manera empírica en unos grupos de nivel medio superior y su efecto fue reportado en Onofre (2017).

3.1 Primera actividad: El rompecabezas

Características del lenguaje matemático que se promueven:

El sistema fonológico se promueve cuando entre los alumnos se dan las instrucciones orales para formar su rompecabezas, ya que debe usar una pronunciación y entonación adecuada para hacer llegar el mensaje correcto al receptor.

El sistema semántico se promueve al utilizar un vocabulario específico en el momento de resolver la parte dos de esta actividad, el alumno debe describir cómo formar el rompecabezas, utilizando el significado correcto de las palabras.

El sistema sintáctico se promueve cuando el alumno entrega su reporte el cual debe atender al orden correcto de todos los términos involucrados (buena sintaxis).

El sistema simbólico y gráfico se promueve cuando los alumnos describen las figuras geométricas tangibles y su posición para armar el rompecabezas, deberán de utilizar el lenguaje gráfico y los símbolos en las fórmulas de la segunda parte de la actividad.

El sistema expresivo evocativo se promueve cuando un alumno da indicaciones a su compañero para realiza correctamente el rompecabezas, ambos tienden de estar de mejor humor cuando se forma de manera óptima el rompecabezas. Lo mismo sucede cuando realizan correctamente las operaciones para encontrar el número de diagonales, ángulo interno, etc.

El lenguaje aritmético se promueve cuando obtienen los valores de la suma de sus ángulos internos, el número de diagonales u otras, mediante una fórmula, sustituyendo valores numéricos y operándolos.

El lenguaje geométrico se promueve cuando los alumnos representan los polígonos en la tabla. En el caso de la posición, se espera que usen el vocabulario propio de la ubicación espacial (a la derecha, a la izquierda, arriba, abajo) con respecto a otra figura y también la

manera en que deben colocarla: sobre uno de los lados largos, como si estuviera apoyada en un vértice, etc.

La función lúdica se utiliza al hacer un juego, poniendo en práctica conocimientos matemáticos, teniendo una experiencia satisfactoria al realizar la actividad, viendo la representación espacial de las figuras, realizando los cálculos de la segunda parte de esta actividad.

La función representativa se atiende en el significado de los símbolos en cada fórmula, el significado de las palabras en la descripción de los polígonos que se utilizan en la actividad., el poder representar las características de los polígonos.

La función comunicativa se utiliza durante toda la actividad ya que necesitan comunicarse verbalmente y de manera escrita para el armar el rompecabezas y al estar verificando los resultados de las formulas aplicadas en la actividad.

3.2 Segunda actividad: Dominó de símbolos matemáticos

Características que se cumplen del lenguaje matemático:

El sistema fonológico se promueve en el momento en que el alumno voltea una tarjeta en el juego, ya que tiene que leerla a sus compañeros en voz alta para buscar su pareja correspondiente debe usar una pronunciación y entonación adecuada para que hacer llegar el mensaje correcto al receptor.

El sistema semántico se promueve en el momento que utiliza un vocabulario específico al escribir las expresiones en las tarjetas con el significado correcto de las palabras.

El sistema sintáctico se promueve en el momento que el alumno entrega su reporte el cual deberá atender al orden correcto de todos los términos involucrados (buena sintaxis).

El sistema simbólico y gráfico se promueve en el momento en que los alumnos simbolizan las expresiones algebraicas en las tarjetas de dominó.

El sistema expresivo evocativo se promueve en el momento en que el alumno lee correctamente y sabe cuál es el complemento de esa expresión en sus fichas de dominó, los

estudiantes se divierten al realizar el juego. Aunque hay un ganador se apoyan cuando alguien no puede leerla correctamente; el compañero que no sabe la relación que existe entre expresión algebraica y su expresión coloquial tiene confianza de preguntar a sus compañeros y así se retroalimentar de ellos.

El lenguaje algebraico se promueve en el momento en que los alumnos hacen la representación de los signos, símbolos y significados en las tarjetas. Notar que el vocabulario utilizado dependerá del contexto en el que se esté aplicando, por ejemplo: límite tiene un significado matemático específico y en la vida cotidiana es parecido, pero no es igual, por lo que los alumnos suelen confundir estas definiciones.

La función lúdica se atiende cuando los alumnos están jugando, están adquiriendo los conceptos matemáticos de manera divertida en el cual si tiene alguna duda pregunta a sus compañeros para resolverla.

La función representativa se utiliza desde el momento en que hacen su dominó representando las fichas (rectángulos), saber colocarlas en la posición adecuada (horizontal o vertical), al escribir las relaciones correspondientes en el dominó.

La función comunicativa se emplea cuando el alumno va colocando las fichas de dominó, ya que está haciendo la relación correspondiente, de no ser así, sus compañeros deberán notar el error y decirle, ya que todos deberán estar atentos de las relaciones para obtener un ganador.

3.3 Tercera actividad: Memorama

Características que se cumplen del lenguaje matemático:

El sistema fonológico se promueve cuando el alumno voltea la tarjeta y tiene que leerla a sus compañeros en voz alta para buscar su pareja correspondiente; deben usar una pronunciación y entonación adecuada para hacer llegar el mensaje correcto al receptor.

El sistema semántico se promueve al utilizar un vocabulario específico, al escribir las expresiones en las tarjetas con el significado correcto de las palabras.

El sistema sintáctico se promueve cuando el alumno entrega su cuestionario resuelto debe atender al orden correcto de todos los términos involucrados (buena sintaxis), así como el mapa conceptual de los conceptos vistos en esta actividad.

El sistema simbólico y gráfico se promueve cuando los alumnos representan la función seno, coseno, tangente, deberán utilizar el lenguaje gráfico, así como la determinación de ángulos colineales y los símbolos en las fórmulas que necesitan para resolver algunas preguntas del cuestionario.

El sistema expresivo evocativo se promueve cuando los alumnos van reconociendo los emparejamientos de las tarjetas al realizarse el juego, los alumnos se motivan para poder obtener un mayor número de tarjetas emparejadas.

El lenguaje aritmético se promueve cuando obtienen los valores de los ángulos terminales, los ángulos de referencia, los valores exactos de algunos ángulos de coseno, tangente y seno.

El lenguaje algebraico se promueve cuando saben el significado de las fórmulas implementadas, en las expresiones equivalentes, el significado de cateto adyacente y opuesto para resolver los problemas con estos datos.

El lenguaje geométrico se promueve al dibujar las gráficas de las funciones trigonométricas y reconocen las gráficas cuando las tienen que emparejar con su nombre la representación de los problemas cuando se requiere una imagen (Teorema de Pitágoras).

La función lúdica se emplea cuando se realiza el juego, los conceptos que se emplean se ven de manera divertida y recreativa por su experiencia previa.

La función representativa se utiliza con la simbolización de fórmulas, la representación de las funciones trigonométricas (seno, coseno, tangente), el significado correcto de los conceptos, y el uso de un vocabulario específico.

La función comunicativa se utiliza de manera oral cuando los alumnos leen en voz alta las tarjetas para realizar su emparejamiento, en el momento que discuten si es o no la relación correcta, de manera escrita cuando entregan su reporte de la actividad.

3.4 Cuarta actividad: A pintar un cuadro

Características que se cumplen del lenguaje matemático:

El sistema fonológico se promueve cuando el alumno explica cómo elaboró su pintura, utilizando una entonación y pronunciación correcta para que se entienda el mensaje que desea comunicar.

El sistema semántico se promueve cuando el alumno entiende el significado de lo que es una sucesión, sucesión geométrica y aritmética e identifica en qué problemas pueden aplicarse.

El sistema sintáctico se promueve cuando se les pide que escriban un reporte de la realización de la pintura, así como la entrega de los problemas que se les requiere de forma correcta, limpia y ordenada.

El sistema simbólico y gráfico se promueve cuando el alumno ilustra las sucesiones de figuras geométricas, al realizar su pintura.

El sistema expresivo evocativo se promueve cuando al realizar su pintura y su video plasman su creatividad, los alumnos no solo están aprendiendo conceptos matemáticos sino que también están utilizando expresiones artísticas y la tecnología en la realización del video.

El lenguaje aritmético se promueve al realizar las operaciones y encontrar el valor del total de puntos para la representación de la pintura, cuando saben cuántos puntos tendrá la siguiente posición de la pintura.

El lenguaje algebraico se promueve cuando indica la sucesión numérica correspondiente y representen la fórmula de la sucesión e interpreten qué significa cada variable que aparece en la fórmula.

El lenguaje geométrico se emplea cuando los alumnos presentan su pintura, identificando que son cuadrados realizados por un determinado número de puntos.

La función representativa se utiliza cuando los alumnos representan de la pintura la sucesión correspondiente, al realizar la pintura están viendo la posición de las figuras

utilizadas, el tamaño (escala) en la que realizarán la pintura, al obtener los cálculos que se piden en la actividad.

La función comunicativa se utiliza de manera escrita y verbal, escrita al momento de entregar su reporte de la actividad, verbal al explicar su trabajo en el video.

3.5 Quinta actividad: Ensalada de números

Características que se cumplen del lenguaje matemático:

El sistema fonológico se promueve cuando al alumno se le preguntan las propiedades del número que escribieron, el alumno deberá de tener una entonación y pronunciación correcta, cuando el alumno que se quede de pie debe decir una característica de algún número para que sus compañeros que cumplan con esa característica cambien de lugar.

El sistema semántico se promueve cuando se entiende el significado de par, impar, número primo, fraccionario, racionales, irracionales, etc., es decir las características de los números que estarán trabajando en la actividad.

El sistema sintáctico se promueve al reproducir correctamente el mapa de la actividad y agregarle ejemplos como también los criterios de divisibilidad.

El sistema simbólico y gráfico se promueve al representar los números reales, racionales, irracionales, etc., de manera simbólica o con alguna expresión algebraica.

El sistema expresivo evocativo se promueve cuando los alumnos van reconociendo mayores características de los números con base en el juego, estos se ponen de mejor humor al realizar la actividad.

El lenguaje aritmético: al representar un número en la tarjeta proporcionada.

El lenguaje algebraico: los alumnos reconocerán las propiedades de los números y su clasificación. Es decir, un número es múltiplo de otro porque, los números pares tienen esta propiedad, los números impares son, un número primo, entre otros conceptos.

El lenguaje geométrico: cuando el alumno en lugar de escribir la fracción en forma numérica lo hace de manera gráfica.

El lenguaje algebraico: usan un vocabulario matemático al describir el proceso de resolución de la actividad, identifican el significado de los símbolos al utilizar las fórmulas para determinar el radio, la ecuación general y ordinaria de la circunferencia.

La función lúdica se utiliza en la realización del juego, poniendo en práctica conocimientos matemáticos que requieren de cálculos aritméticos, estrategias espaciales al ubicar un asiento disponible.

La función representativa se emplea cuando el alumno presenta algún número en la tarjeta y entiende la relación que tiene ese número con la expresión dada por el compañero que permanece de pie.

La función comunicativa se utiliza de manera oral al estar diciendo las características de los números, de manera escrita cuando entregan su mapa mental correctamente.

CONCLUSIONES

Se construyó un marco conceptual con las características que hacen a las matemáticas un lenguaje matemático, considerando la investigación de Goodenough (1971) quien clasificó los sistemas de normas del lenguaje. Estos sistemas después fueron adaptados al lenguaje matemático por Saussure (1945) y esta adaptación fue ampliada para esta tesis. También se consideró la investigación de Oyaneder (2002) para recopilar las funciones del lenguaje. Otro aspecto que se integró al marco conceptual fueron las características del lenguaje de acuerdo con algunas áreas de la matemática. Con el marco conceptual construido se analizó un conjunto de actividades didácticas para mostrar cómo estas podrían promover el uso del lenguaje matemático en las categorías consideradas en el marco conceptual; las normas y las funciones del lenguaje matemático y aspectos particulares del lenguaje aritmético, algebraico y geométrico. Las actividades son de temas diversos de la matemática y solo se presentan como ejemplo de la aplicación del marco conceptual. Estas podrán ser aplicadas en diferentes momentos del curso a criterio del profesor, se recomienda para las actividades que la población de alumnos sea menor o igual a 12 alumnos.

Las actividades 1, 2,3 y 5 utilizan juegos conocidos que buscan fomentar la función lúdica del lenguaje, con la cual el conocimiento se adquiere de manera colaborativa y divertida (Oyaneder, 2002). En particular, la actividad “el rompecabezas” que fue modificada de Solares (2006) busca promover el discurso matemático y la representación de figuras geométricas. La actividad 4 hace uso de la función representativa del lenguaje y fomenta el discurso matemático, en particular, del algebraico. En todas las actividades se incluyó una propuesta de evaluación basada en el marco conceptual.

De la misma manera que se enseña el español deberíamos de enseñar el lenguaje de las matemáticas desde la edad infantil para que los estudiantes se familiaricen con sus sistemas de normas: fonético, semántico, sintáctico, simbólico-gráfico, así como comprender que las diferentes áreas de la matemática tienen características propias del lenguaje matemático. Se recomienda este marco conceptual para cualquier profesor que desee diseñar actividades o secuencias didácticas que promuevan el lenguaje matemático.

REFERENCIAS

- Alcalá, M. (2009). *La construcción del lenguaje matemático*, Universidad Pedagógica Nacional, Unidad 111 Guanajuato.
- Austin, J. L. (1962). *Cómo hacer cosas con palabras: palabras y acciones*, Barcelona: Paidós (G. Carrió & E. Rabossi, Trads.).
- Beyer, W. O. (2001). Algunos aspectos epistemológicos de la matemática: ¿Es la matemática un lenguaje? *Educere*, 5(14), 236-240.
- Booth, L., & Johnson, D. C. (1984). *Algebra: children's Strategies and Errors: A report of the Strategies and Errors in Secondary Mathematics Project*. Nfer Nelson.
- Bronckart, J. (1977) *Theories du langage*. Bruselas: Pierre Mardaga. (Trad. cast. Teorías del lenguaje. Barcelona: Herder, 1980).
- Caballero, M. y Cantoral, R. (2013). Una caracterización de los elementos del pensamiento y lenguaje variacional. En R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 26, 1195-1203. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Cabrera, L. (2009). *El pensamiento y lenguaje variacional y el desarrollo de competencias. Un estudio en el marco de la reforma integral de bachillerato*. Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN. México.
- Calabro, K., Taylor W.C. y Kapadia, A. (1996) "Pregnancy, alcohol use and the effectiveness of written health education materials". *Patient Education Counseling*, 29.
- Calderón, D. (2005). *Dimensión cognitiva y comunicativa de la argumentación en matemáticas*. Tesis Doctoral. Cali: Universidad del Valle.

- Calderón, D. I. (2012). El lenguaje en las matemáticas escolares. *Perspectivas en la didáctica de las matemáticas*, 79-107.
- Cantoral, R. (2004). Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, una mirada socioepistemológica. En L. Díaz Moreno (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 17, 1-9. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios de construcción social del conocimiento*. México: Gedisa.
- Chomsky, N. (1957). *Structures*. La Haya: Mouton. (Trad. Cast. Estructuras sintácticas. México: Siglo XXI, 1974).
- Clement, J., 1982. Algebra Word problem solutions: Thought processes underlying a common misconception, *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 13, pp. 16-30.
- Cooper, M., 1984. The Mathematical «Reversal Error» and attempts to correct it, in B. Southwell, R. Eyland, M. Cooper, J. Conroy y K. Collis (eds.), *Proceedings of the eighth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, pp. 162-171.
- D'Amore, B., Laborde, C., Romero, L. R., Puga, A. B., Brousseau, G., & Pinilla, M. I. F. (2006). *Didáctica de la matemática*. Bogotá, Colombia: Cooperativa Editorial Magisterio.
- Díaz H. H. (2009) *El lenguaje verbal como instrumento matemático*. Educación y Educadores, Vol. 12, Núm. 3, diciembre, 2009, pp. 13-31, Universidad de La Sabana. Colombia
- Duval, R. (1996-1997). Notas preliminares no publicadas del curso dado en el IUFM de Gravelines.

- Echeverría, R. (2005), *Ontología del lenguaje*. Santiago: Granica
- Española, R. A. (2001). Diccionario de la lengua española, Madrid.
- Fernández (1994). Sobre los diversos lenguajes matemáticos y del paso de unos a otros.1
seminario de lenguaje y matemática.
- Flores, C. D. (2010). El lenguaje variacional en el discurso de la información. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME*, 13(4-II), 241-254.
- Ford, A.; Peat, D. (1988). *The Role of Language in Science*. Foundations of Physics, Vol 18.
- Fillooy, E., & Rojano, T. (1989). Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the learning of mathematics*, 9(2), 19-25.
- Godino, J. D. (2000). *Significado y comprensión de los conceptos matemáticos*. Uno: Revista de didáctica de las matemáticas, 7(25), 77-87.
- Godino, J. D. (2010). *Marcos teóricos sobre el conocimiento y el aprendizaje matemático*. Granada, España: Universidad de Granada/Departamento de Didáctica de las Matemáticas.
- Gonzales, P. (1897). La Historia de la Matemática como recurso didáctico e instrumento de integración cultural de la Matemática. *Historia de la matemática para la enseñanza secundaria estudio crítico de tres obras cumbres de la literatura matemática, los elementos de Euclides, el método de Arquímedes, la geometría de Descartes. Preface to Method T. L Heath, The Works of Archimedes. Cambridge University Press*.
- Goñi, J y Planas, N. (2011). *Comunicación, Interacción y lenguaje en la clase de matemáticas*. Barcelona: Grao.
- Goodenough, W. (1971). Cultura, lenguaje y sociedad. En: J. Kahn (Comp.) (1975), *El concepto de cultura: textos fundamentales* (pp. 157-244). Barcelona: Anagrama

- Hammer, P. (1974) "Lenguaje, aproximación y topologías ampliadas". En: Y. Rauch y Ch. Scott (Eds.). *Estudios de metodología lingüística*. (pp.56-68). Madrid: Editorial Gredos.
- Hernando, L. (1995) *Introducción a la teoría y estructura del lenguaje*. Madrid: Editorial Verbum.
- Kieran, C. (1980). Constructing meaning for non-trivial equations, Boston: *Paper presented at annual meeting of American Educational Research Association*.
- Lee, C. (2009). *El lenguaje en el aprendizaje de las matemáticas*. Ediciones Morata.
- Luria, A. (1977) *Introducción evolucionista a la psicología*. Barcelona: Fontanella.
- Maureira-Cid, F. (2009). Tratado Ontológico Humano. *Revista Electrónica de Psicología Iztacala*, 12(3).
- Moreira, M. A. (2003). Lenguaje y aprendizaje significativo. *IV Encuentro Internacional sobre Aprendizaje Significativo*.
- Maturana, H. (2003). *Desde La Biología a la Psicología*. Buenos Aires: Lumen.
- Norman, F., 1987. Apsycholinguistic perspective of algebraic language, en J. Bergeron, N. Herscovics y C. Kieran (eds.), *Proceedings of the eleventh International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 1, pp. 324- 330.
- Onofre, J. (2017). *Estrategias para mejorar el uso del vocabulario matemático básico en estudiantes de bachillerato*. Tesis de licenciatura. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.
- Ortega, J. F., & Ortega, J. A. (2002). Experiencia sobre el conocimiento del lenguaje matemático. *Acta de las X Jornadas de ASEPUMA*.
- Oyaneder, F. (2002). Cuadernillos para la reflexión pedagógica: Relaciones lógico-matemáticas y cuantificación.
- Pavio, A. y Begg, I. (1981) *Psychology of language*. New Jersey: Prentice-Hall.
- Paz, O. (1956). *El arco y la lira*. México: Fondo de cultura económica

- Peat, D. (1990), *Mathematics and the Language of Nature in Mathematics and Sciences*, Ed. Ronald E. Mickens.
- Pereira, A. (1999). *Lingüística para comunicadores. Ecuador-Quito, Editorial UPS*.
- Pimm, D. (1990). *El lenguaje matemático en el aula*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencias y Ediciones Morata
- Puga, L. A., Rodríguez, J. M., & Toledo, A. M. (2016). Reflexiones sobre el lenguaje matemático y su incidencia en el aprendizaje significativo. *Sophia*, colección de Filosofía de la Educación, 20(1), pp. 195-218.
- Ramírez, A. (2009). La competencia de comunicación en el desarrollo de las competencias matemáticas en secundaria. Master oficial de iniciación a la investigación en didáctica de la matemática y de las ciencias experimentales. Facultad de Ciencias de la Educación. Barcelona: Universitat Autònoma de Barcelona. Disponible en línea: https://nanopdf.com/download/la-competencia-de-comunicacion-en-el-desarrollo-delas_pdf
- Rothery, A. (1980). *Children reading mathematics*. Worcester: College of Higher Education.
- Sanz, L (1995): *La construcción del lenguaje matemático a través de los libros escolares de matemáticas. Las configuraciones gráficas de datos*. Tesis doctoral. Leioa. Servicio Editorial de la Universidad del País Vasco.
- Saussure, F. (1945). *Curso de lingüística general* (20ª ed.). Buenos Aires: Losada.
- Schwarzenberger, R.L.E. (2000). *The Language of Geometry*, publicado en *A Mathematical Spectrum Miscellany*, Applied Probability Trust.
- Serrano G,W.(2005).¿Qué constituye a los lenguajes natural y matemático? *SAPIENS*, 6(1), 47-60. Recuperado en 06 de junio de 2020, de http://ve.scielo.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S131758152005000100004&lng=es&tlng=es.

- Solares, D. (2006). "Canasta revuelta". *Entre maestr@s*, vol. 6, núm. 19, Universidad Pedagógica Nacional, México.
- Spagnolo, F., 1996. *Obstacles Epistemologiques: Le Postulat d'Eudoxe - Archimede*. Tesis de Doctorado, Universidad de Bordeaux I. Quaderni di Ricerca Didattica G.R.I.M., Suplemento n. 5. Publicada por el Atelier de Reproduction des Thésés Microfiches (BP - 38040 Grenoble. Cedex 9 - Francia).
- Trigueros, M. (1991) "El falsacionismo y la enseñanza de las matemáticas". En: A. Nosnik (Coor.). *Caminos de apertura: El pensamiento de Karl R. Popper* (pp. 29-55). México: Editorial Trillas.
- Walter O. Beyer K. Algunos aspectos epistemológicos de la matemática: ¿Es la matemática un lenguaje? *Educere*, vol. 5, núm. 14, julio-septiembre, 2001, pp. 236-240, Universidad de los Andes Venezuela.
- Watson, J. (1924) *Behaviorism*. Nueva York: Norton.
- Wittgenstein, L., & Anscombe, G. E. M. (1953). *Philosophical investigations= philosophische untersuchungen*.