BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

LA RECONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE LÍMITE EN UN GRUPO DE PROFESORES DEL NIVEL MEDIO SUPERIOR UTILIZANDO LA TEORÍA APOE

TESIS
PARA OBTENER EL TÍTULO DE
MAESTRO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

PRESENTA
LIC. JOSÉ JAVIER GUERRERO MALDONADO

DIRECTORA DE TESIS
DRA. LIDIA AURORA HERNÁNDEZ REBOLLAR

CODIRECTORA DE TESIS
DRA. MARÍA ARACELI JUÁREZ RAMÍREZ

PUEBLA, PUE. JUNIO 2020

Carta de autorización para realizar Examen de Grado

BUAP

DRA. LIDIA AURORA HERNÁNDEZ REBOLLAR
SECRETARIA DE INVESTIGACIÓN Y
ESTUDIOS DE POSGRADO, FCFM-BUAP
P R E S E N T E:

Por este medio le informo que el C:

GUERRERO MALDONADO JOSÉ JAVIER

Estudiante de la Maestría en Educación Matemática, ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 03 de diciembre de 2019, con la tesis titulada:

"LA RECONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE LÍMITE EN UN GRUPO DE PROFESORES DEL NIVEL MEDIO SUPERIOR UTILIZANDO LA TEORÍA APOE"

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

A T E N T A M E N T E.
H. Puebla de Z. a 03 de junio de 2020

DR. JOSIP SLISKO IGNJATOV
COORDINADOR DE LA MAESTRÍA
EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA.

Ccp Archivo
DR JSI / l'ggm*

Facultad
de Ciencias
Físico Matemáticas

Av. San Claudio y 18 sur, edif. FM1
Ciudad Universitaria, Col. San
Manuel, Puebla, Pue. C.P. 72570
01 (222) 229 55 00 Ext. 7550 y 7552

Agradecimientos

Al Consejo de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por permitirme llegar al grato final de mi Maestría producto de su apoyo a través de la beca recibida durante mis dos años de estudios, la cual me permitió realizar y culminar este proyecto de investigación para crecer académicamente.

A la Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrado (VIEP) de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP) por el apoyo económico brindado con el pago de los pasajes aéreos para asistir a la 41° Conferencia Anual del Capítulo Norte Americano del Grupo para la Psicología de la Educación Matemática (PME-NA) celebrada en noviembre de 2019 en San Luis, Missouri de los Estados Unidos, lo cual permitió enriquecer y compartir con expertos de renombre mis investigaciones de Tesis de Grado en el área de desarrollo.

A la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, al Posgrado en Educación Matemática por el apoyo económico brindado que me permitió asistir a la XXI Escuela de Invierno en Matemática Educativa (EIME XXI) celebrada en la BUAP y a la 41° Conferencia Anual del Capítulo Norte Americano del Grupo para la Psicología de la Educación Matemática (PME-NA) celebrada en San Luis, Missouri de los Estados Unidos.

Finalmente, al grupo de profesores de Educación Media Superior quienes con su asistencia al curso de “Enseñanza-aprendizaje de los conceptos de límite y derivada de una función” permitieron el desarrollo de los dos bloques de actividades planificadas para llevar a cabo el presente trabajo de investigación.

DEDICATORIA

"Y todo lo que hagáis, hacedlo de corazón,
como para el Señor y no para los hombres;"
Colosenses 3:23

A Dios quien todo lo puede y permitió mi salida de Venezuela en crisis, junto con mi familia para llevar a cabo de forma satisfactoria la Maestría con excelentes profesores y compañeros colegas de clase.

A mis amados esposa e hijos motores e impulsadores de cada amanecer en mi vida tratando de ser molde, modelo y ejemplo para ellos aún en medio de mis humanas imperfecciones. Gracias por su apoyo y tolerancia a pesar de las circunstancias.

A mis amados padre en vida, madre en el cielo y hermanos Mary y Daniel quienes formamos un equipo unido basado en la buena educación, consejos y ejemplos de constancia y tesón.

A mi tutora de Tesis Dra. Lidia Aurora Hernández Rebollar por aceptarme en primera instancia como su alumno, por su paciencia, por sus constantes sugerencias y correcciones durante el desarrollo de la investigación, gracias por el tiempo dedicado y por cada sábado valioso de tutoría donde debo reconocer que sin ello no hubiera podido llegar hasta aquí.

A los fieles asistentes al Seminario sabatino sobre Teoría APOE, Dras. Araceli Juárez, Honorina Ruiz y Lidia Hernández, los colegas y compañeros de clase Gerardo Amaro, Francisco Anaya y David Morante, donde a pesar de muchos no creer duramos casi dos años compartiendo experiencias y aprendizajes que al final sirvieron para enriquecer y mejorar nuestras tesis y nuestros perfiles académicos en una nutrida y constante retroalimentación.

RESUMEN

En este trabajo de investigación se presenta el diseño, implementación y análisis de dos bloques de actividades didácticas sobre el concepto de límite de una función en un punto desde la concepción dinámica y métrica fundamentadas en la Teoría APOE (estructuras mentales: Acción, Proceso, Objeto y Esquema) y en específico en la descomposición genética propuesta por Cottrill, Dubinsky, Nichols, Schwingendorf, Thomas y Vidakovic (1996), como modelo que describe la construcción de conceptos matemáticos de nivel superior.

Para tal efecto se realizó un curso denominado "Curso de enseñanza-aprendizaje de los conceptos de límite y derivada de una función" dividido en dos secciones donde la primera correspondió al límite y se desarrolló en cuatro sesiones de dos horas cada una. La segunda sección se dedicó al concepto de derivada y constituye otro trabajo de investigación que no se abordará aquí.

Una vez aplicadas las actividades se procedió con sus respectivos análisis para determinar las estructuras mentales iniciales y finales de los maestros asistentes al mencionado curso.

Palabras claves: Teoría APOE, pensamiento matemático avanzado y límite de una función.

ABSTRACT

In this research work, the design, implementation and analysis of two blocks of didactic activities on the concept of the limit of a function at a point from the dynamic and metric conception based on the APOS Theory (mental structures: Action, Process, Object and Scheme) are presented and specifically on the genetic decomposition proposed by Cottrill, Dubinsky, Nichols, Schwingendorf, Thomas and Vidakovic (1996), as a model that describes the construction of higher level mathematical concepts.

For this purpose, a course called "Teaching-learning course on the concepts of limit and derived from a function" was carried out, divided into two sections where the first corresponded to the limit and was developed in four sessions of two hours each

Once the activities were applied, we proceeded with their respective analyzes to determine the initial and final mental structures of the teachers attending the course.

Key words: APOS Theory, Mathematical Advanced Thinking and limit of a function.

ÍNDICE

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE CUADROS RESÚMENES

Introducción

En el marco de la Maestría en Educación Matemática dictada por la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP) se debe realizar un Examen Final de Tesis de Grado como fin último y esencial para la obtención del título de Maestro.

En ese orden de ideas se planifica ir avanzando en su desarrollo en aras de propiciar su culminación junto con los estudios regulares, en consecuencia, se planteó un “Foro de Avance” al final de cada semestre con el objetivo de que cada alumno presentara los resultados de su investigación teórico-práctica a medida que el tiempo transcurría.

Recordando el título de la investigación **“*La reconstrucción del concepto de límite en un grupo de profesores de matemáticas del nivel medio superior utilizando la Teoría APOE*”**, presentado junto con una introducción a través de un cartel en verano de 2018 como primer paso, un segundo en diciembre a través de un foro contentivo de antecedentes, marco teórico y procedimientos metodológicos, un tercero en julio de 2019 con un primer reporte y análisis preliminares de resultados y un último en diciembre del mismo año con la presentación del informe del coloquio donde se afinaron detalles, como preámbulo al Examen Final.

Dicho coloquio tuvo por objetivo dar forma casi definitiva a la Tesis de Grado al fortalecer los antecedentes, el marco teórico y metodológico, así como presentar los resultados de la investigación llevada a cabo con sus respectivos análisis, corregir o incluir las observaciones planteadas por parte de los profesores involucrados en el desarrollo de la Tesis y los sinodales.

En este caso se tiene el análisis concerniente a una actividad diagnóstica y luego una de refuerzo, consolidación o desarrollo del concepto de límite en cuanto al análisis de las estructuras mentales se refiere, ambos en el marco de un curso de veinte horas llevado a cabo en cinco sesiones de cuatro horas cada una, con un grupo de maestros de media superior a quienes se les aplicó tomando como base su respectiva descomposición genética.

En primera instancia, sienta su base la justificación de la presente investigación en que se han llevado a cabo muchos estudios en el tema del aprendizaje y pocos dirigidos a la enseñanza impartida por parte de los maestros quienes también forman parte del triángulo didáctico y por ende también son dignos de estudio.

Surge así la idea de hacer un diagnóstico de las concepciones mentales del concepto de límite de una función en un grupo de docentes y luego en la requisición de hacer una propuesta fundamentada en la actualización o formación de los mismos, esto en el marco de contribuir con la mejora u optimización de su enseñanza respecto al tema y por ende del sistema educativo actual.

En todo caso las propuestas están fundamentadas en el análisis de las estructuras y mecanismos mentales mostrados por los profesores de matemáticas al enfrentarse a situaciones problemáticas cotidianas donde el concepto de límite esté involucrado.

Respecto a la referencia, se toma en cuenta la relacionada con la Teoría APOE en cuanto a la descomposición genética (DG) llevada a cabo en el estudio del concepto de límite, haciendo un análisis del estado del arte, así como lo relativo a su estudio desde el punto de vista de las dificultades en la enseñanza y aprendizaje del cálculo diferencial propiamente dicho.

Se espera contribuir a la formación y mejoramiento profesional de un grupo de docentes de matemáticas en un tema fundamental del cálculo diferencial como lo es en este caso específico el límite de una función para su posterior proyección. La Tesis ha sido estructurada en cuatro capítulos, unas conclusiones y sugerencias pedagógicas, donde sus ideas principales se resumen a continuación.

El Capítulo 1 tiene por título planteamiento del problema y contiene todo lo derivado respecto al mismo como objetivos, pregunta de investigación, objeto de estudio, justificación e hipótesis planteada con sus respectivos argumentos teóricos.

En el Capítulo 2 llamado Antecedentes y Marco Teórico se presenta en primera instancia un análisis de los estudios realizados o estado del arte en el campo del concepto del límite de una función como aproximación dinámica y desde la perspectiva APOE y los elementos principales de la Teoría como abstracción reflexiva, estructuras y mecanismos mentales necesarios para la comprensión de conceptos matemáticos, su Ciclo de Investigación y la descomposición genética como herramienta importante en el diseño de estrategias de enseñanza y diagnóstico.

En cuanto al Capítulo 3 denominado Método se describe la población de maestros participantes en el curso como parte de la investigación, el contenido e intencionalidad para

la selección y aplicación de las actividades y el análisis de ambos bloques por separado, en todo caso conforme a la descomposición genética.
El Capítulo 4 presenta el análisis de las respuestas al describir las estructuras y mecanismos mentales presentados por los maestros tanto en la actividad de diagnóstico, como en la de desarrollo por separado, con cuadros conclusivos de cada actividad y uno de resumen en cada caso.
Las conclusiones representan la última parte del trabajo, originadas una vez se concluyó el análisis de los datos obtenidos con la aplicación del par de actividades, así como las sugerencias pedagógicas del caso.

CAPÍTULO 1

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La comprensión de cualquier concepto matemático para su posterior puesta en práctica a través del análisis y la resolución de ejercicios o problemas ha sido un campo de desafío e interés en cuanto a la investigación desarrollada por la Educación Matemática, es decir, a la par del análisis matemático funcional propiamente dicho, se ha desarrollado una corriente de estudio de su enseñanza y aprendizaje desde el punto de vista didáctico educacional con el surgimiento de la Didáctica de la Matemática como ciencia.

Esto dado por las dificultades relacionadas con pensamientos de orden superior implicados en procesos internos como la demostración, abstracción, análisis e inducción, entre otros; en este caso particular se centra el estudio en el concepto del límite de una función real estudiado a nivel de educación media superior como tópico base fundamental en el cálculo.

1.1 Objetivo general

Determinar las estructuras mentales construidas por un grupo de profesores del nivel medio superior, relacionadas con el concepto de límite de una función, antes y después de la aplicación de una secuencia de actividades basadas en la Teoría APOE.

1.2 Pregunta de Investigación

¿Cuáles son las estructuras mentales presentadas por un grupo de profesores de nivel medio superior después de realizar una secuencia de actividades basadas en la Teoría APOE?

1.3 Objeto de estudio

El objeto de estudio fueron las actividades didácticas. Luego viene su aplicación y análisis de su efecto en los profesores, momento en el cual éstos pasan a ser el sujeto de investigación pues se busca observar el efecto provocado en ellos por dichas actividades, es decir, si realmente se produce un cambio en la concepción del límite de una función.

En definitiva, secuencialmente hablando son las actividades, el concepto de límite y los profesores, siempre desde la óptica de la Teoría APOE.

1.4 Justificación

El hecho de ser fundamental el concepto de límite de una función en un punto o en el infinito tanto a nivel pre como universitario, ha llevado a muchos investigadores a estudiar su naturaleza en el campo del proceso de su enseñanza y aprendizaje. Cornu (1991) afirma al respecto que el límite "mantiene una posición central que abarca todo el análisis matemático, como fundamento de la teoría de la aproximación, la continuidad y el cálculo diferencial e integral" (p.153).

Surge así la idea de realizar una investigación de su comprensión por parte de profesores de Educación Media Superior desde la perspectiva de la Teoría APOE, al diseñar y evaluar una secuencia de actividades didácticas en función de contribuir a enfrentar de manera óptima situaciones problemáticas donde se encuentre inmerso el concepto.

En consecuencia, sienta su base la justificación de la realización del presente proyecto de Tesis en la problemática del aprendizaje del cálculo en general y en este caso específico de los estudiantes del nivel medio superior y sus bajos resultados reportados en cuanto a su desempeño académico.

Como parte del triángulo didáctico se ha optado por seleccionar a los profesores como sujeto de investigación, esto en aras de hacer un diagnóstico de sus concepciones mentales acerca del concepto de límite y, luego, sobre esa base hacer propuestas fundamentales para su actualización, formación o promoción al siguiente nivel.

La Teoría APOE se fija en un concepto y establece qué problema puede presentar el mismo como para que se haga difícil de entender por parte del sujeto de estudio, en vista de esto, se consideró importante diseñar y aplicar una secuencia didáctica basada en las aproximaciones teóricas existentes para ponerla a prueba en los profesores y hacer un aporte a la teoría referente a la enseñanza del concepto de límite.

1.5 Hipótesis planteada

La primera hipótesis planteada es que los profesores van a mostrar o evidenciar las estructuras mentales reportadas en la descomposición genética igual o mejor que las de los estudiantes del mismo nivel.

En tal sentido se espera que evidencien las mismas estructuras o en un nivel más avanzado, si los estudiantes reflejan Acción y Proceso, se espera de parte de los profesores que se encuentren en la estructura de Proceso u Objeto.

El trabajo plantea como segunda hipótesis que las actividades que han sido reportadas en la literatura acerca de la construcción del concepto de límite con la Teoría APOE podrían favorecer la construcción de las estructuras en los profesores.

En función de esto se ha llevado a cabo un Taller de veinte horas sobre la Teoría APOE en cuanto a la enseñanza del límite y la derivada, dirigido a profesores de la preparatoria donde se ha elaborado un primer cuestionario diagnóstico de tareas para ubicar su estructura inicial y otro posterior en donde se incorporaron nuevas o modificaron actividades del primer cuestionario con el objetivo de fortalecer, promover o mejorar su estructura inicial del concepto de límite de una función en este caso.

CAPÍTULO 2
ANTECEDENTES Y MARCO TEÓRICO

APOE es una Teoría constructivista desarrollada por Dubinsky y basada en el concepto de abstracción reflexiva planteado por Piaget para describir la construcción de conceptos matemáticos específicos en la educación superior. En tal sentido plantea, tal como se ha señalado, cinco tipos de abstracciones o mecanismos mentales que conducen a la construcción de las estructuras mentales.

2.1 Antecedentes

En términos generales, el estudio del concepto de límite de una función y luego de una sucesión se ha llevado a cabo con interés desde la matemática griega en tiempos ancestrales hasta la actualidad, originando corrientes de análisis que se pueden resumir inicialmente en tres etapas mencionadas más adelante.

Dichas etapas han sido marcadas de acuerdo a la concepción planteada respecto al mismo para el momento y en muchos casos surgidas o motivadas por exigencias de otras ciencias como la mecánica, astronomía o física entre otras.

No ha sido fácil el establecimiento y fortalecimiento del concepto de límite a través de la historia por su carácter complejo y relacional con otros conceptos, lo cual indica que no se ha desarrollado de forma autónoma, independiente o automática, sino que más bien ha sido obtenido y refinado gracias a la interacción e interdependencia con el número, el continuo numérico, la variable, la función y con la continuidad entre otros, llegando incluso a ser influenciado por el pensamiento o tendencia matemática de cada época, algunas veces a favor y otras lamentablemente en detrimento de su avance o posible consolidación.

En todo caso, alguna razón de peso ha tenido el concepto como para que varios de los connotados matemáticos y físicos de la historia se hayan abocado a su estudio, como referencia, cronológicamente se pueden mencionar entre otros a Newton, Leibnitz, Euler, Cauchy, Bolzano y a Weierstrass con su formulación métrica de carácter estático presentando una definición que se puede considerar como cercana a la utilizada en la actualidad.

En tal sentido Tall (1991) señala que la comprensión del esquema de límite de una función real de variable real es un aspecto importante para que los estudiantes de educación post secundaria comprendan los elementos de cálculo tal como se señala anteriormente.

Partiendo de la definición de concepto matemático planteado por Vergnaud (1982) el cual se considera determinado por una terna constituida por un conjunto de situaciones que le dan sentido, el conjunto de invariantes que constituyen al concepto en sí y el conjunto de representaciones simbólicas empleadas para presentarlo junto con sus propiedades y situaciones a las que se refiere, de forma análoga una concepción está constituida por dicha terna considerada en un momento dado por la evolución del concepto, es así como entre otras se pueden mencionar en específico la concepción geométrica heurística de aproximación cinética infinitesimal de Newton (1643-1727), la metafísica algebraica infinitesimal de Leibnitz (1646-1716) y la geométrica heurística que abarca tres épocas: rigurosa (época clásica), heurística rigurosa (época greco-alejandrina) y heurística de aproximación finita (Renacimiento) (Baron, 2003).

De igual forma la concepción métrica es definida en términos de desigualdades como: "Sea f una función y a un número real, el número L es el límite de la función f en el punto a, y se debiera escribir $\underset{x \to a}{Lím} f(x)$, si cuando $|x - a|$ en valor absoluto se aproxima a cero, $|f(x) - L|$ también se aproxima a cero". Se tiene también la concepción dinámica del límite como "aproximación óptima" definida más adelante.

Sierpinska (1985) manifiesta que la simbolización de la operación del paso al límite con el signo "=" hace que se asimile con el álgebra escondiendo las diferencias y llevando de esta forma a una pérdida de significado, en muchos casos sería ideal usar el signo de tiende a, en vez del igual como cuando el límite tiende a infinito, por citar un ejemplo.

Para identificar las dificultades en el proceso de enseñanza y aprendizaje es importante conocer su génesis y evolución a través de la historia, en tal sentido se tiene que el concepto ha tenido múltiples concepciones (Medina, 2001), pudiendo los estudiantes manifestar durante su estudio cualquiera de ellas conforme a la visión o posición de sus maestros.

En cuanto al análisis del concepto de límite funcional desde la perspectiva de la Teoría APOE se tiene que ha venido evolucionando con diferentes investigaciones al respecto, partiendo de un análisis teórico de sus conocimientos matemáticos y de la Teoría en cuestión, Cotrill et al. (1996) se constituyen en los primeros en plantear desde esta perspectiva una DG sobre

dicho concepto haciendo luego una mejora o refinación de la misma a siete pasos y luego tomando como base la misma diseñan e implementan una estrategia de su enseñanza.
Por otro lado, Swinyard y Larsen (2012) plantean un refinamiento dejando los tres primeros pasos iguales y reformulando a partir del cuarto, esto conforme a tabla comparativa mostrada como Anexo 1.
Finalmente, se tiene que Tomàs (2014) realiza varias investigaciones junto con un grupo de colegas de España incluyendo su Tesis Doctoral donde buscan mejorar la comprensión de los estudiantes de enseñanza postobligatoria sobre el concepto de límite de una función luego de concluir su curso de cálculo diferencial.
En consecuencia, utiliza los tres primeros pasos de la DG de Cotrill referentes a la concepción dinámica, haciendo una adaptación del cuarto que se enfoca en la concepción métrica en términos de desigualdades al introducir un apartado nuevo sobre la formalización del concepto en sí. Para tal efecto diseña y aplica diez actividades considerando los modos de representación numérico, algebraico-numérico y gráfico.
El análisis de los datos producto de su aplicación refleja que los estudiantes acceden de mejor forma a la concepción dinámica de límite al usar el modo de representación gráfica cuando coinciden las aproximaciones laterales, luego progresan al trabajar en el modo numérico y finalmente consolidan el concepto con el algebraico-numérico.

2.2 Aproximación dinámica de límite

En este caso se hace referencia a la concepción dinámica del límite de una función como una aproximación óptima definida por Blázquez y Ortega (2002) como: "Sea *f* una función y a un número real, el número L es el límite de la función *f* en un punto a y se debiera escribir $\underset{x \to a}{Lím} f(x)$, si cuando *x* se acerca al número a más que cualquier otra aproximación fijada, sus imágenes $f(x)$ se acercan a L más que cualquier otra aproximación fijada" (Pág. 67).

Es decir, la concepción dinámica de límite de una función en un punto implica construir un proceso en el dominio donde la variable *x* se aproxima a un valor a y otro en el rango donde $f(x)$ se aproxima al valor del límite L, y utilizar la función para coordinar ambos procesos. Cabe señalar aquí la definición de concepción métrica del límite de una función en términos de desigualdades proporcionada por Weierstrass: "sea *f* una función y el valor a un número real, el número L es el límite de la función f en el punto a y se debiera escribir $\underset{x \to a}{Lím}\, f(x)$, si cuando $|x - a|$ se aproxima a 0 se tiene que $|f(x) - L|$ se aproxima igualmente a 0".

2.3 El límite y la Teoría APOE

La importancia de la enseñanza y aprendizaje del concepto de límite se basa en su carácter estructural y utilidad de aplicación como herramienta para los siguientes objetos de estudio en el cálculo tales como continuidad, diferenciación e integración, así como en otras ciencias. Al conjunto de adaptaciones experimentadas por el conocimiento desde su estado de saber científico hasta convertirse en saber escolar y en el saber del alumno en un sentido amplio, proceso en donde intervienen las adaptaciones del maestro y la relación didáctica, se le denomina Transposición Didáctica por Chevallard (1991).

La búsqueda de la comprensión como construcción y apropiación de significados relativos a elementos constitutivos de los conceptos matemáticos por parte de los estudiantes se constituye en uno de los elementos esenciales del educador matemático, generando respecto a sus actividades preguntas como ¿Qué concepciones o imágenes del concepto se forman? ¿Dichas concepciones los aproximan al concepto? Y ¿Cómo aprenden el concepto? entre otras (Sierpinska, 1998).

Estas interrogantes cobran importancia en el caso específico del presente estudio respecto a límite donde investigaciones indican por ejemplo que "la definición de un concepto no garantiza la comprensión del mismo" (Tall y Vinner, 1981, p.153) pues la definición formal encapsula las situaciones y procesos que le dan sentido al concepto, ocultando algunas veces su complejidad, comprensión y significado.

En el marco del estudio del concepto de límite existen múltiples investigaciones las cuales permiten concluir que los estudiantes presentan dificultades que retrasan su proceso de aprendizaje en la escuela (Hitt, 2003; Vrancken, Gregorini, Engler, Muller y Hecklein, 2006).

En cuanto a la Teoría APOE se tiene que nace de la reflexión de Dubinsky sobre la abstracción reflexiva planteada por Piaget en cuanto a las matemáticas de educación superior.

2.4 Abstracción reflexiva

La propuesta de Piaget consta de una primera parte planteada sobre la reflexión en un sentido estático de la conciencia y del pensamiento contemplativo, llamado contenido y las operaciones sobre dicho contenido en un nivel cognitivo inferior.

La segunda se ubica en un ambiente dinámico de reconstrucción y reorganización del contenido convirtiéndolo en aquel al cual se le pueden aplicar nuevas operaciones.

Lo anterior lleva a Dubinsky a considerar la abstracción reflexiva como una herramienta sólida con la cual se puede describir el desarrollo mental de los conceptos matemáticos avanzados.

Al contrario del pensamiento general de que las ideas provienen de extraer características comunes de un conjunto de objetos (los objetos pueden ser mentales y no físicos necesariamente) Piaget consideraba que el desarrollo del conocimiento de un objeto requiere que el sujeto actúe sobre el mismo y viceversa, es decir, el objeto y sujeto no pueden estar separados.

Las acciones mentales y operaciones interiorizadas constituyen las diferencias entre las estructuras mentales de Acción y Proceso, así como los mecanismos mentales de interiorización y encapsulación que conducen a la formación de las concepciones de Acción, Proceso, Objeto y Esquema correspondientes al acrónimo APOE que forma la Teoría.

Piaget considera que la "abstracción reflexiva consiste en traducir una sucesión de acciones materiales en un sistema de operaciones interiorizadas" (Arnon, Cottrill, Dubinsky, Oktaç, Fuentes, Trigueros y Weller, 2013, p.7, traducción propia). Dubinsky interpreta a las "acciones materiales" como las acciones que son llevadas a cabo por el sujeto, pero que son externas a él.

Dentro de la Teoría APOE, las "operaciones interiorizadas" de Piaget se convirtieron en el mecanismo mental de interiorización en el cual una acción física externa se reconstruye en la mente del sujeto en un proceso, es decir, se realiza la misma acción, pero completamente en la mente del sujeto. Esta noción de la abstracción reflexiva influyó en el desarrollo de la Teoría, analizando cómo un proceso (acción interiorizada) se transforma en un objeto (operación en la cual, en etapas superiores se le pueden realizar nuevas operaciones) a través del mecanismo mental de la encapsulación.

2.5 ¿Qué es la Teoría APOE?

Tal como se ha señalado, APOE es el acrónimo de las llamadas estructuras mentales: Acción, Proceso, Objeto y Esquema. Dubinsky en su etapa inicial entre 1989-1995 desarrolla esta Teoría de aprendizaje constructivista que pasa de las ideas de Piaget sobre la teoría de abstracción reflexiva al análisis cognitivo de un concepto matemático estudiado en un nivel escolar superior (Dubisnky, Stenger y Vidakovic, 2008). En tal sentido, resaltan que Piaget señala una relación estrecha entre la naturaleza matemática de los conceptos y su desarrollo en la mente del individuo, permitiendo así indicar que el análisis basado en la Teoría es a su vez de carácter epistemológico y psicológico.

Cinco tipos de abstracciones o mecanismos mentales (interiorización, coordinación, encapsulación, desencapsulación y generalización) que conducen a la construcción de las estructuras, son planteados por la Teoría (Arnon et al., 2014) los cuales se presentan en la figura 1.

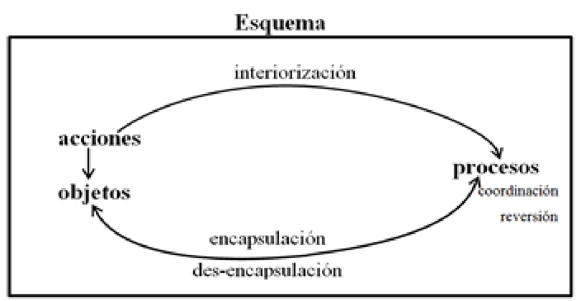


Figura 1. Teoría APOE (Arnon et al., 2013).

Al estudiar desde la óptica de la Teoría cómo un individuo puede aprender un concepto matemático en particular, un ingrediente esencial que debe ser provisto por el investigador es el análisis del mismo en términos de esas estructuras específicas, la descripción resultante de dicho análisis es la llamada descomposición genética del concepto en cuestión la cual no es única y debe ser validada y de ser necesario refinada a partir del trabajo con diferentes individuos (Villabona y Roa, 2016).

La Teoría cuenta con su propio paradigma de investigación mostrado en la figura 2, el cual ha sido aplicado a cursos de pre-cálculo, cálculo, matemáticas discretas y álgebra abstracta. Tal como se señaló anteriormente, una de esas investigaciones es la presentada por Cotrill et al. (1996), quienes, luego de hacer un análisis teórico, presentan una descomposición genética la cual busca que los estudiantes construyan una definición formal del concepto de límite.

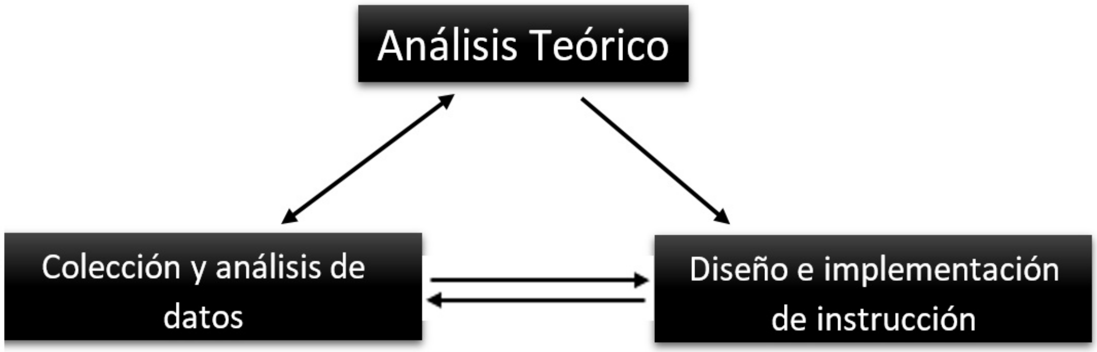


Figura 2. El Ciclo de Investigación (Adaptado de Asiala et al., 1996).

Determinar los resultados de los diferentes experimentos no es fácil, pues como se indica en la hipótesis básica mencionada, un individuo solamente tiene una tendencia a responder a situaciones o problemas matemáticos en términos de las construcciones mentales que ha hecho o pueda hacer.

2.6 Descomposición genética del concepto de límite de una función

Al estudiar cómo un individuo puede aprender un concepto matemático en particular, un ingrediente esencial que debe ser provisto por el investigador en el campo de la Teoría APOE, es el análisis de las estructuras mentales específicas necesarias para construirlo. La descripción resultante de dicho análisis es la llamada descomposición genética (DG) del concepto en cuestión, la cual como se dijo anteriormente no necesariamente es única pudiendo ser mejorada o refinada.

Tal como se ha mencionado en el objetivo específico, se tomó como base para el desarrollo del presente trabajo la descomposición genética de Cotrill et al. (1996) planteada en función de que el individuo construya su definición formal y la cual consta de siete pasos mencionados, cabe señalar de nuevo que luego Swinyard y Larsen (2012) plantean un refinamiento dejando igual los tres primeros pasos iguales y reformulando a partir del cuarto, conforme a tabla comparativa mostrada como Anexo 1.

En el análisis de las actividades y de acuerdo con la descomposición genética señalada, se toma como referencia que la estructura Acción implica tener una concepción de límite cuando una variable se aproxima a una cantidad fija a, cuando no puede ir más allá de calcular un número finito de valores de la función en puntos cercanos a los valores del valor de a. La distinción entre preconcepción y acción se da cuando el estudiante solo es capaz de evaluar un valor único antes de concluir cuál es el límite.

Se describe a continuación la descomposición genética planteada por Cotrill et al. (1996) quienes plantean seis pasos en una preliminar (P) y siete luego de un refinamiento (R), los mismos son detallados a continuación:

1R: la Acción de evaluar la función *f* en un solo punto *x* considerado cercano o incluso igual a un valor a.

2R: la Acción de evaluar la función *f* en unos pocos puntos, donde cada punto sucesivo está más cercano al valor de a.

3R: construcción de un Proceso coordinado de Esquema:

a) Interiorización de la Acción del paso 2R para construir un Proceso en el dominio donde *x* se aproxima al valor a.
b) Construcción de un Proceso en el rango en el cual *y* se aproxima a *L*.
c) Coordinación de los pasos a y b vía la función.

4R: encapsulación del Proceso del paso 3R(c) de tal forma que el límite se convierte en un Objeto al cual se le puede aplicar una Acción.

5R: reconstrucción del Proceso del paso 3R(c) en términos de los intervalos y desigualdades. Esto es hecho al introducir estimados numéricos del enfoque de proximidad de la forma $0 < |x - a| < \delta$ y $0 < |f(x) - L| < \varepsilon$

6R: aplicación de una cuantificación de dos niveles de Esquema para conectar el Proceso descrito en el Paso 5R a la definición formal.

7P: aplicación de una concepción finalizada de ε-δ para situaciones específicas.

2.7 ¿Cómo se utiliza la Teoría APOE?

Tal como se puede observar en la figura 2, el mencionado Ciclo de Investigación está formado por tres componentes: el análisis teórico, el diseño e implementación de instrumentos de enseñanza y el diseño de instrumentos para la observación y análisis de datos.

De acuerdo con el paradigma, el trabajo comienza con un análisis teórico que es un componente de cualquier trabajo de investigación general y desarrollo curricular, basado inicialmente en el conocimiento de los investigadores del concepto en cuestión y de la investigación de la Teoría. Las mismas recorren los pasos de este paradigma y, cuando se repiten, el análisis teórico hace uso de los datos obtenidos del ciclo anterior.

La aplicación del ciclo permite obtener una descripción más detallada y cercana a la forma como un individuo puede construir un determinado concepto matemático, esto porque tanto el análisis teórico como los instrumentos se van refinando y por ende mejorando como resultado del análisis de los datos, producto del desarrollo de la tercera componente.

Una vez establecido el modelo hipotético que describe las estructuras mentales y los mecanismos que un individuo podría necesitar para construir un concepto matemático especifico, es decir, la descomposición genética preliminar, el Ciclo propone el diseño de un modelo de enseñanza con la idea de seguir la ruta o camino cognitivo descrito por la misma de tal forma que se pueda construir el concepto basado en los principales elementos descritos en el análisis teórico.

2.8 Estructura mental del individuo de acuerdo a la descomposición genética

En el análisis de las actividades y de acuerdo con la descomposición genética señalada, se toma como referencia que la estructura Acción implica tener una concepción de límite cuando una variable se aproxima a una cantidad fija, cuando no puede ir más allá de calcular un número finito de valores de la función en puntos cercanos a los valores del valor de a. La distinción entre preconcepción y acción se da cuando el estudiante solo es capaz de evaluar un valor único antes de concluir cuál es el límite.

Cuando una Acción es repetida y el individuo reflexiona sobre ella, puede ser interiorizada en un Proceso. Se produce una construcción interna que realiza la misma Acción, pero ahora no necesariamente dirigida por un estímulo externo. Quien ha construido un Proceso puede reflexionar sobre él, describirlo o reinvertir los pasos del mismo sin necesidad de volver a realizarlos. Según Cotrill et al. (1996) al realizar un cálculo que incluye un número infinito de operaciones, un individuo ha interiorizado las Acciones y su comprensión entra a la etapa de Proceso. En este caso, Dubinsky (1991) dice que se podrían crear nuevos procesos al "coordinar dos o más procesos".

Cuando una persona reflexiona sobre operaciones que se aplican a un Proceso particular, toma conciencia del Proceso como una totalidad, realiza transformaciones (Acciones o Procesos) que puedan actuar sobre él y puede construir esas transformaciones, entonces piensa en el Proceso como un Objeto. Aquí decimos que el Proceso ha sido encapsulado (mecanismo) en un Objeto. De acuerdo con Cotrill et al. (1996) esta concepción se da cuando el individuo piensa en el límite de la suma de dos funciones como Objetos, forma la suma coordinando los Procesos de las dos funciones y encapsula el proceso resultante para obtener el límite de la función suma.

Finalmente, una colección de Procesos y Objetos pueden ser organizados de forma estructurada para formar un Esquema. Estructurada en el sentido de proveer al individuo con una forma de decidir qué estructura mental utilizar al tratar con situaciones matemáticas problemáticas referentes al concepto en cuestión, en este caso al límite. En fin, las tareas propuestas permiten analizar el tipo de concepción de los profesores o si fuera el caso de los alumnos o de cualquier individuo.

CAPÍTULO 3
MÉTODO

En primera instancia fueron revisadas y modificadas las actividades propuestas por Tomàs (2014) con el objetivo de implementarlas a un grupo de profesores del nivel medio superior. Se cuidó que al ser respondidas evidenciaran o mostraran los mecanismos y las estructuras mentales que señala DG planteada por Cotrill et al. (1996). La cantidad de actividades y la decisión de dividirlas en dos bloques responde a la idea de aplicarlas en un curso de ocho sesiones denominado “Enseñanza-Aprendizaje de los conceptos de límite y derivada de una función” subdividido en una primera parte para estudiar el límite de una función y una segunda para la derivada.

3.1 Contenido e intencionalidad de las actividades

En las actividades se utiliza la representación analítica, tabular y gráfica del concepto de función, las cuales sirven como recurso para que los profesores construyan o re-construyan la concepción de aproximación y métrica del límite de una variedad de funciones dadas. En algunos casos se estima que los docentes observen la aproximación de las imágenes de una función mientras los valores del dominio se aproximan a un número dado en una tabla y en otros casos se presenta este proceso de forma gráfica.

En resumen, se plantean para analizar las estructuras y mecanismos mentales necesarios para la construcción del concepto de límite en dos bloques de seis actividades cada uno, con los sistemas de representación numérico, algebraico-numérico y gráficos presentes; el primer bloque a manera de diagnóstico y el segundo de desarrollo propiamente dicho.

Las actividades de ambos bloques se pueden clasificar en tres grupos conforme a su intención. En un primer grupo las actividades (de la uno a la cuatro) tienen el objetivo de evaluar la concepción del límite de una función, pero como aproximación dinámica. Las producciones de los docentes nos permiten saber si ellos se ubican en la concepción Acción o Proceso del concepto en cuestión, pero en el sentido de aproximación.

El segundo grupo lo constituye la actividad 5 del segundo bloque que hace referencia a los elementos de la aproximación métrica del límite de una función. Aquí se pretende obtener información sobre la capacidad de coordinar (o no) las aproximaciones en términos de desigualdades al ser presentadas como estimaciones numéricas de la proximidad (vecindad) en el punto de interés.

El tercer grupo lo constituye la actividad 6 de ambos bloques, pensadas para identificar si quienes han encapsulado la noción dinámica de límite son capaces de desencapsular dicho proceso revirtiéndolo. Es decir, se pretende analizar si los maestros que comprendan el límite de una función como Proceso (Dubinsky y Tall, 2002), son capaces de resolverlas partiendo de unos límites conocidos, para tal efecto, deben encontrar la gráfica de la función que cumpla las condiciones, esto al poner en funcionamiento el mecanismo cognitivo de "inversión" en el sentido de desempaquetar la información dada por la representación analítica del límite para obtener información del comportamiento de la gráfica de la función.

En cuanto a la primera actividad del diagnóstico, es planteada en términos teóricos al pedir definir el límite de una función y qué se entiende al señalar que un límite no existe, pudiendo esperar tres posibilidades de acuerdo con el lenguaje natural, simbólico o gráfico utilizado para responder.

En general, al pedir que respondan a preguntas como "Elige un valor de la x, y calcule el valor de la función $f(x)$ en ese punto", solo se le exige hacer un cálculo simple, manifestando así con su respuesta acertada tener una concepción de Acción.

Preguntas como "¿A qué número se aproxima x o $f(x)$?", donde el individuo va más allá de calcular un número finito de valores de la función, conllevan a decir que se tiene una concepción de Proceso (Cottrill et al., 1996).

Preguntas del tipo "describe el comportamiento de la función $f(x)$ en relación al comportamiento de la variable x", donde se pide que construya un doble proceso, uno en el dominio y otro en el rango, utilizando la función para coordinarlos mentalmente, permiten inducir que el individuo tendría un conocimiento como Proceso si es capaz, por una parte, de comprender la idea de aproximación, y por otra cuando sea capaz de comprender y coordinar dos aproximaciones (la aproximación en el dominio con la del rango).

La actividad 6 pide representar la gráfica de una función que debe cumplir tres condiciones. Para ejecutarla se deberían coordinar las tres condiciones después de haber desempaquetado (inversión) el significado del límite y manejarlo como Proceso. Es decir, coordinar el valor de la función en un punto con la doble coordinación de la aproximación en el dominio y en el rango. En este caso ya se encuentra en el nivel Esquema donde maneja los criterios y mecanismos establecidos por la DG como tal.

3.2 Análisis de contenido del primer bloque de actividades

1. Definir el concepto de límite de una función en un punto y ¿qué se entiende al señalar que un límite no existe?

Su planteamiento busca tener una percepción inicial del dominio o recuerdo del concepto o la no existencia de límite. Las respuestas de los profesores se clasifican como natural que a su vez puede utilizar el concepto de aproximación y la simbólica en términos de vecindades o de épsilon y delta.

De las posibles conceptualizaciones de límite funcional, la informal ha sido más perdurable en la memoria de sus estudiosos, luego se tienen la métrica y de optimización como posible respuesta más esperada (Blázquez, Gatica y Ortega, 2008).

Resulta evidente que los procesos de enseñanza-aprendizaje tienen que ver con el registro y almacenamiento de la información cuyo uso será posible si se accede en el momento y forma apropiada y requerido guardando relación con las estructuras mentales presentadas en cada caso de resolución o definición del concepto en cuestión.

La segunda actividad es planteada de modo representativo numérico:

2. Dada la Tabla 1 para $f(x) = -1$ *, analizarla, completarla y responder.*

x	3.9	3.99	3.999	4	4.0001	4.001	4.01
$f(x)$							

Tabla 1. Actividad 2 del diagnóstico.

Por ser una constante busca determinar si se presenta dificultad en determinar el valor de la función en dicho caso, en su análisis para completar la tabla se lleva a cabo una Acción conforme a la DG. Además, contiene un inciso:

i. ¿Cómo es el comportamiento de la función $f(x)$ con relación al de la variable, al ésta crecer o decrecer?

La idea es coordinar o no el proceso de aproximación en el dominio cuando x tiende a *4* con el proceso de aproximación en el rango cuando $f(x)$ tiende a -1 con el detalle de su comportamiento homogéneo por ser constante.

La tercera actividad es presentada en modo de representación algebraico-numérico:

3. Dada la función $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x<0 \\ 2 & x \geq 0 \end{cases}$ *completar la tabla 2:*

x	-0.1	-0.01	-0.001	-0.0001	0	0.0001	0.001	0.01	0.1
$f(x)$									

Tabla 2. Actividad 3 del diagnóstico.

Luego se pide:

i) Calcular el $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

Para responder y explicar si:

ii) ¿Es igual el comportamiento de la imagen a medida que la variable "x" se aproxima a cero por la izquierda que por la derecha?

Al igual que el ejercicio anterior se debe realizar la Acción de evaluar una función en algunos valores del dominio que se aproximan a 0 al calcular el límite que permite determinar su existencia o no. Luego se coordina o no el proceso de aproximación en el dominio cuando x tiende a 0, manifestando la existencia de los límites laterales al indicarlos expresamente.

Formulada para describir el desempeño de la variable dependiente respecto a la independiente y para determinar si hay coordinación o no en el proceso de aproximación en el dominio cuando x tiende a 0 por la izquierda con su respectiva aproximación en el rango cuando $f(x)$ tiende a 1 o cuando tiende por la derecha con el proceso de aproximación en el rango cuando $f(x)$ tiende a 2.

La cuarta actividad es planteada en el modo de representación gráfica con la Figura 3.

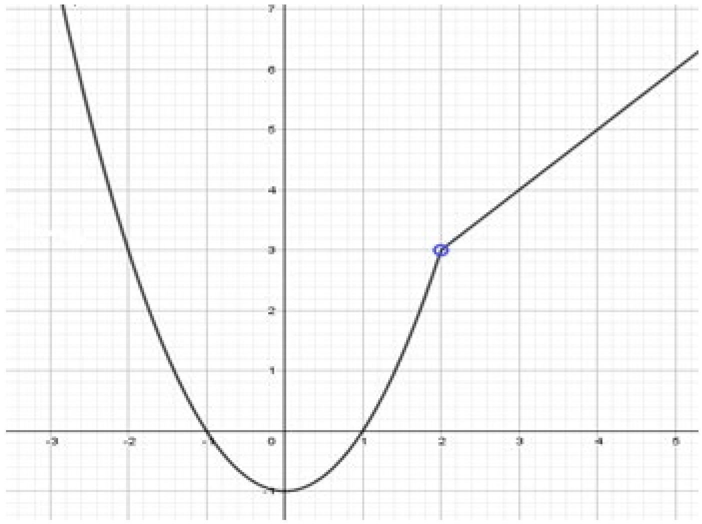


Figura 3. Gráfica de actividad 4 para ser analizada.

Para responder tres ítems:

i y ii. Cuando *x* tome sucesivamente los valores establecidos de 0.5, 1, 1.3, 1.5, 1.7, 1.9,… en el primer caso y de 3.5, 3, 2.7, 2.5, 2.3, 2.1,… en el segundo, ¿a qué número se aproximan los valores de la función $f(x)$ correspondiente?

Planteadas para establecer la coordinación o no del proceso de aproximación en el dominio cuando *x* tiende a 2 tanto por la izquierda como por la derecha, al igual que el tercer inciso.

iii. ¿Cómo es el comportamiento de la imagen con relación a la variación de *x*?

Planteada con el mismo objetivo de las dos anteriores, pero de forma gráfica pudiendo concluir si existe o no el límite al analizar el proceso de acercamiento hacía un punto de discontinuidad.

La quinta actividad es de modo algebraico:

5. Calcular el $\underset{x\to\infty}{Lím}\frac{4+7x-5x^2}{-1-10x^2}$

Explicando el procedimiento aplicado para determinar si ha interiorizado el caso de función racional con iguales exponentes en el numerador y denominador pudiendo aplicar teoría de límites o Regla de L´Hôpital si fuera el caso para su resolución.

La sexta actividad fue presentada en modo algebraico-numérico.

6. Dada una función $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x<0 \\ -2x-3 & x \geq 0 \end{cases}$, *calcular los valores de la misma cuando x toma los valores señalados en la Tabla 3 y completar el resto de valores calculando los valores absolutos indicados.*

x	$f(x)$	$\lvert x-0 \rvert$	$\lvert f(x)+3 \rvert$
0,1			
0,01			
0,001			
0,0001			
…		…	
-0,0001			
-0,001			
-0,01			
-0,1			

Tabla 3. Actividad 6 del diagnóstico.

Luego se plantean dos preguntas:

i. ¿Qué tan próximos a cero deben de estar los valores de x, para que la diferencias de $f(x)+3$, en valor absoluto, sean menores que 0.002?

ii. Con la información obtenida hasta ahora, ¿podrías indicar cuál es el límite de la función $f(x)$ en el punto $x=0$?

Se busca determinar la coordinación o no de las aproximaciones en el dominio con las del rango en términos de desigualdades, los valores de *x* deberían estar a 0.0002 de 3 por la izquierda y deben ser mayores a 3.9998 por la derecha, además por la derecha la diferencia no es menor a 0.0002 en ningún caso.

Manifiestan (o no) formalmente la existencia del límite afirmando al tener en cuenta que cuando los valores de la diferencia en valor absoluto entre los valores de *x* y 3 se aproximan a 0, los valores de la diferencia en valor absoluto entre los valores de $f(x)$ y 3 también se aproximan a 0 por la izquierda, pero no por la derecha, entonces cuando *x* tiende a 3, el límite de la función $f(x)$ no existe, o manifiestan la existencia del límite por la izquierda.

3.3 Análisis de contenido del segundo bloque de actividades

Una vez analizado el bloque de diagnóstico se hace lo pertinente con el de desarrollo, tomando en cuenta que también fueron seis actividades y a pesar de que algunas tienden a guardar relación respecto al diagnóstico, se ha hecho su análisis por separado.

Las preguntas 1 y 4 son planteadas en modo algebraico por la forma en que se presenta la función y numérico por el manejo de la información requerida por el maestro para completar la tabla mostrada, su propósito es promover las estructuras y mecanismos mentales de los tres primeros pasos de la DG, además de que la primera actividad cuenta con cuatro incisos y la segunda con cinco y de que son funciones diferentes, la diferencia entre ambas preguntas radica en los límites laterales en cuanto a su coincidencia en el primer caso y la no coincidencia en el segundo.

La primera actividad suministra una función:

1. Si $f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$ *completar la Tabla 4*:

x tiende a… → ← x tiende a…

x	1.9	1.99	1.999	1.9999	2.0001	2.001	2.01	2.1
$f(x)$								

$f(x)$ tiende a… → ← $f(x)$ tiende a…

Tabla 4. Actividad 1 del desarrollo.

De igual forma la cuarta actividad:

4. Siendo $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x<0 \\ -2x-3 & x \geq 0 \end{cases}$ *completar la Tabla 5*:

x	-0.1	-0.01	0.001	-0.0001…	0.0001	0.001	0.01	0.1
$f(x)$								

Tabla 5. Actividad 4 del desarrollo.

El análisis de los incisos de las actividades 1 y 4 se hará de conjuntamente, así se tiene:

i. ¿A cuál valor se aproxima *x*?

Tiene por objetivo evaluar si los maestros son o no capaces de determinar el valor de la función en más de un punto. Luego se tiene el segundo inciso:

ii. ¿A qué número se aproxima la función $f(x)$?

Busca analizar si asocian o no la aproximación en el dominio de una secuencia numérica a un valor a, a 2 en el caso de la primera actividad y a 0 en el de la cuarta. Luego se pide:

iii. Describir el comportamiento de la función con relación al de la variable x.

Esto para determinar si pueden asociar o no el proceso de aproximación en el rango a partir del cual los valores de $f(x)$ se aproximan cada vez más a 0.25 en la primera actividad; en cuanto a la cuarta, la aproximación es diferente, por la izquierda es hacia uno y por la derecha a -3.

iv. Describa el comportamiento de la función $f(x)$ con relación al comportamiento de la variable x.

El cuarto inciso permite determinar si hay o no coordinación en el proceso de aproximación en el rango cuando $f(x)$ tiende a 0.25 en la primera actividad, de igual forma en la cuarta, si coordinan o no el proceso en el dominio cuando x tiende a cero por la izquierda con el de aproximación en el rango cuando $f(x)$ tiende a uno o en el dominio cuando x tiende a cero por la derecha con el proceso de aproximación en el rango cuando $f(x)$ tiende a -3.

v. Decir si es posible, ¿cuál es el límite de la función en $x = 0$?

El quinto inciso incluido solo en la cuarta actividad evalúa si manifiesta la no existencia del límite mismo cuando x tiende a cero o en su defecto la existencia de los limites laterales no coincidentes para concluir que el límite no existe.

La segunda actividad planteada en modo numérico, donde se suministra la Tabla 6 de datos completos y mostrada a continuación, la cual debe ser analizada para responder sus cuatro incisos.

2. A partir de la tabla 6, responder con claridad en cada caso

x	3.99	3.999	3.9999	3.99999	…	4.00001	4.0001	4.001	4.01
f(x)	15.530	15.5254	15.5015	15.50001	…	14.00003	14.0003	14.003	14.03

Tabla 6. Actividad 2 del desarrollo.

i. ¿A cuál valor se aproxima x?

Tiene por objetivo evaluar si los maestros asocian o no la aproximación en el dominio de una secuencia numérica, a 4 en este caso.

ii. ¿A qué número se aproxima la función de $f(x)$?

Con esta pregunta se busca la asociación o no de la aproximación en el rango de una secuencia numérica por la izquierda a 15.5 y por la derecha a 14.

iii. Describir el comportamiento de la función $f(x)$ con relación al comportamiento de la variable x.

En tal sentido se coordina o no el proceso de aproximación en el dominio cuando x tiende a 4 por la izquierda, con el proceso en el rango cuando $f(x)$ tiende a 15.5, o en el dominio cuando x tiende a 4 por la derecha con el proceso de aproximación en el rango cuando $f(x)$ tiende a 14.

iv. De ser posible decir ¿cuál es el $\underset{x \to 4}{Lím} f(x)$?

Planteada para que manifiesten formalmente en este caso, la no existencia del límite cuando x tiende a 4 pues las aproximaciones laterales no coinciden.

La actividad 3 es hecha de modo gráfico al presentar una función $f(x)$ como la mostrada en la figura 4 para responder y explicar cuatro incisos, los dos primeros coinciden con análisis anteriores:

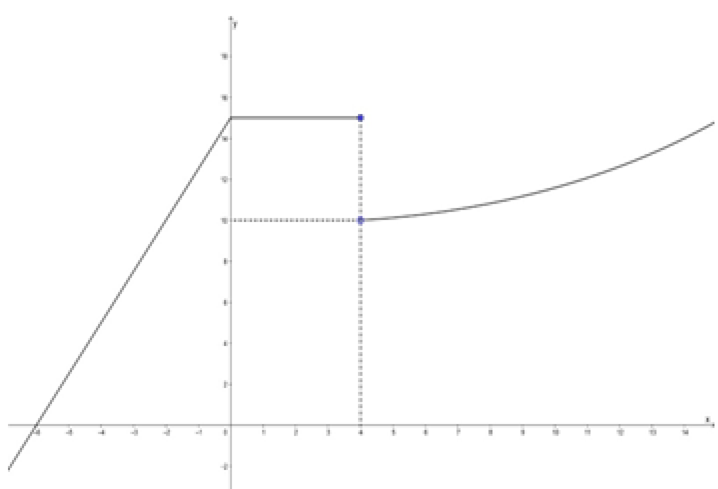


Figura 4. Gráfica de actividad 3 para ser analizada.

iii. Describir el comportamiento de la función $f(x)$ en relación con el comportamiento de la variable x.

Planteada para evaluar si coordinan o no el proceso de aproximación en el dominio cuando x tiende a 4 por la izquierda con el proceso en el rango cuando $f(x)$ tiende a 15 o en el dominio cuando x tiende a 4 por la derecha cuando $f(x)$ tiende a 10, al tener funciones por partes, el esquema encapsulado en los incisos i y ii permite en este caso realizar acciones sobre el concepto de límite.

iv. De ser posible mencione ¿cuál es el límite de la función en $x = 4$?

En este último inciso se busca la manifestación formal de la no existencia del límite cuando x tiende a 4, el proceso de aproximación de funciones por partes y la no coincidencia de los límites laterales permite determinar si el maestro se encuentra en la estructura Objeto.

Se presenta la quinta actividad de modo numérico con una tabla a ser completada y dos incisos, haciendo referencia a la coordinación métrica en términos de desigualdades del límite de una función en un punto:

x	$f(x)$	$\lvert 2.5 - x \rvert$	$\lvert 3.5 - f(x) \rvert$
2.45	3.35		
2.49	3.47		
2.499	3.497		
2.4999	3.4997		
2.49999	3.49997		
2.499999	3.499997		
…	…		
2.500001	2.000002		
2.50001	2.00002		
2.5001	2.0002		
2.501	2.002		
2.51	2.020		
2.55	2.1		

Tabla 7. Actividad 5 del desarrollo.

Al completar la tabla se avalúa la capacidad de evaluar sucesiones de valores que resultan de las diferencias en valor absoluto tanto respecto a x como a $f(x)$. El primer inciso pregunta:

i. ¿Cuán próximos han de estar los valores de x a 2.5 para que la diferencia de $3.5 - f(x)$ en valor absoluto sea menor a 0.001?

Esta pregunta es planteada para evaluar si coordinan o no el proceso de reconstrucción de aproximación en el dominio con el del rango en términos de desigualdades, realizado con la introducción de estimaciones numéricas en la cercanía de dichas aproximaciones al valor en estudio, en este caso 2.5.

Aquí los valores de x han de estar a 0.0001 de 2.5 por la izquierda o ser mayores a 2.4999 por la derecha donde la diferencia nunca podrá ser menor que 0.0001.

ii. Con la información del anterior inciso, ¿cuál es el límite de la función $f(x)$ en el punto donde $x=2.5$?

Es decir, calcular el $\underset{x \to 2.5}{Lím} f(x)$. Su objetivo es evaluar si manifiesta o no la existencia del límite con el atenuante de que cuando los valores de las diferencias en valor absoluto entre los valores de x y 2.5 se aproximan a cero, los valores de las diferencias en valor absoluto entre $f(x)$ y 1.5 también se aproximan a cero por la izquierda más no por la derecha, esto indica que x tiende a 2.5 y que el límite de la función no existe.

La última actividad se presenta en modo gráfico pidiendo:

6. Representar una función que cumpla con las tres condiciones siguientes: i) $f(2) = 2$, ii) $\underset{x \to 2^+}{Lím} f(x) = 3$ y iii) $\underset{x \to 2^-}{Lím} f(x) = 1$

Tiene como principal objetivo evaluar la capacidad de realizar el mecanismo de inversión del concepto del límite de una función en un punto dado en forma analítica al coordinar los procesos de aproximación en el dominio con la aproximación en el rango con sus respectivas inversiones, esto al llevar a cabo la acción de plantear la gráfica que representa el valor de la función en un punto y que coordina los procesos de aproximación cuando x tiende a 2 en el dominio con el de $f(x)$ cuando tiende a 3 por la derecha o a 1 por la izquierda.

CAPÍTULO 4
ANÁLISIS DE RESULTADOS

El análisis de resultados se hace conforme al orden del desarrollo de los dos bloques de actividades llevados a cabo en el curso con once maestros en el primero y catorce en el segundo. Para tal efecto, en aras de resguardar su identidad, cada uno de los once maestros que participaron en ambos bloques, sobre quienes en definitiva se llevará a cabo el análisis, ha sido identificado con las etiquetas M1,…,M11, donde en primera instancia, de ser necesario, se clasifican sus respuestas en correctas (1), incorrectas (0) y no respondidas (NR), empezando con la de diagnóstico.

4.1 Análisis del bloque de diagnóstico

1i. Definir el concepto de límite de una función en un punto.

Su planteamiento busca tener una percepción inicial del dominio o del recuerdo del concepto de límite. Las respuestas de los profesores se categorizaron como natural que a su vez puede utilizar el concepto de aproximación y la definición simbólica en términos de vecindades o de épsilon y delta.

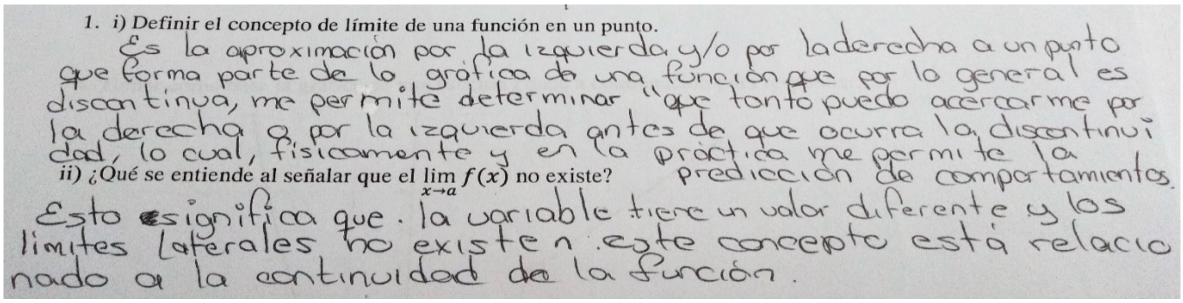
De las posibles conceptualizaciones de límite funcional, la informal ha sido más perdurable en la memoria de sus estudiosos, luego se tienen la métrica y de optimización como posible respuesta más esperada (Blázquez, Gatica y Ortega, 2008).

Resulta evidente que los procesos de enseñanza-aprendizaje tienen que ver con el registro y almacenamiento de la información cuyo uso será posible si se accede en el momento y forma apropiada y requerido. Surge así el llamado por Sierpinska (1987) como acto de comprensión del concepto el cual es proporcionado por el binomio formado por el aprendizaje y la memoria que constituyen una aproximación de las estructuras mentales requeridas para internalizar un concepto matemático.

1.ii. ¿Qué se entiende al señalar que el $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to a} f(x)}$ no existe?

Con el segundo inciso de la primera actividad respecto a su inexistencia tanto desde el punto de vista del registro verbal (conceptual) al distinguir características, como del simbólico y formal o incluso una combinación de ambos de acuerdo a cómo lo expresa de forma correcta o incorrecta.

Fue respondida por la totalidad de los maestros como era de esperar, para tal efecto seis, respondieron en el registro verbal, un ejemplo de esto es el M8 cuya respuesta se muestra en la Figura 5:



1. i) Definir el concepto de límite de una función en un punto.

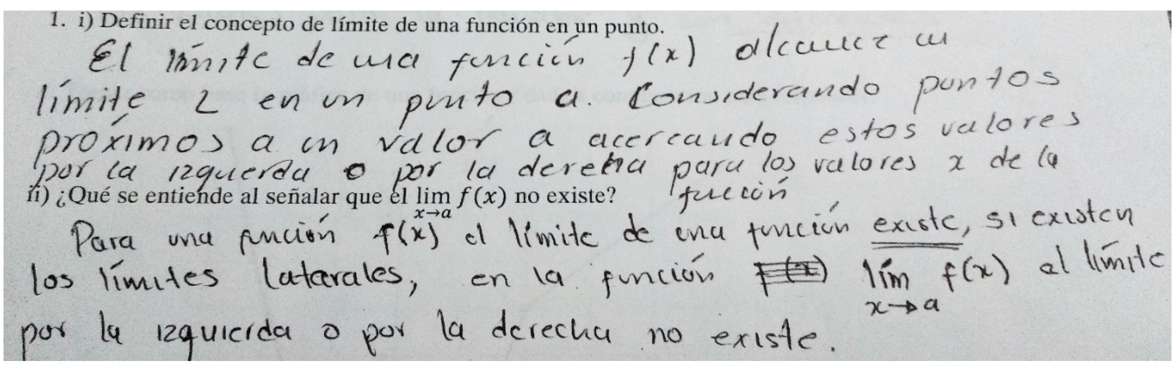
Es la aproximación por la izquierda y/o por la derecha a un punto que forma parte de la gráfica de una función que por lo general es discontinua, me permite determinar "que tanto puedo acercarme por la derecha o por la izquierda antes de que ocurra la discontinuidad, lo cual, físicamente y en la práctica me permite la predicción de comportamientos.

ii) ¿Qué se entiende al señalar que el $\lim_{x\to a} f(x)$ no existe?

Esto significa que la variable tiene un valor diferente y los límites laterales no existen. este concepto está relacionado a la continuidad de la función.

Figura 5. Respuesta de M8 a la actividad 1.

A continuación (Figura 6), se presenta la respuesta del M10 quien se constituye en el único en hacer un intento de definición dinámica del concepto, pero limitada a la aproximación en el dominio, respondiendo de la siguiente forma:



1. i) Definir el concepto de límite de una función en un punto.

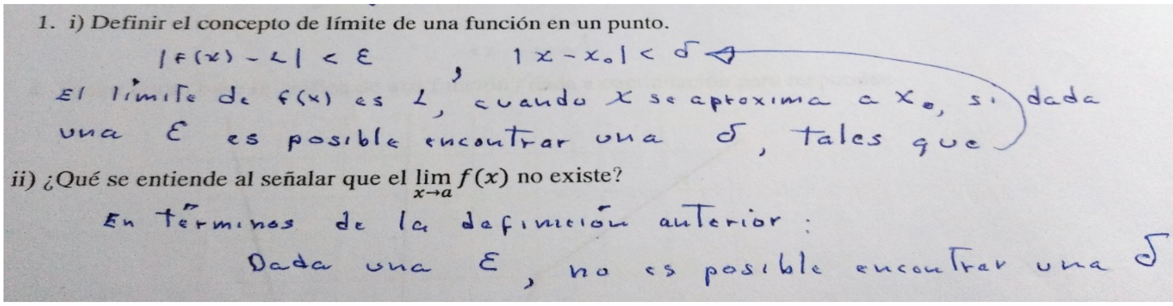
El límite de una función $f(x)$ alcanza un límite L en un punto a. Considerando puntos próximos a un valor a acercando estos valores por la izquierda o por la derecha para los valores x de la función

ii) ¿Qué se entiende al señalar que el $\lim_{x\to a} f(x)$ no existe?

Para una función $f(x)$ el límite de una función existe, si existen los límites laterales, en la función $\lim_{x\to a} f(x)$ el límite por la izquierda o por la derecha no existe.

Figura 6. Respuesta de M10 a la actividad 1.

Los restantes cinco maestros intentan definir parcialmente en términos de épsilon y delta, llamando la atención que todos incluyen el valor absoluto, sin relacionar por completo sus elementos. Por ejemplo, el M2 responde *"…si dada una épsilon es posible encontrar una delta…"*. Basta con una épsilon, de acuerdo a lo que señala y resulta que es: para toda épsilon es posible encontrar una delta, no uno en particular. En fin, este maestro recuerda la definición de límite en términos de épsilon y delta, pero no relaciona bien todos sus elementos, presentando la siguiente respuesta (figura 7):


1. *i)* Definir el concepto de límite de una función en un punto.

$|f(x) - L| < \varepsilon$, $|x - x_0| < \delta$

El límite de $f(x)$ es L, cuando x se aproxima a x_0, si dada una ε es posible encontrar una δ, tales que

ii) ¿Qué se entiende al señalar que el $\lim_{x\to a} f(x)$ no existe?

En términos de la definición anterior:

Dada una ε, no es posible encontrar una δ.

Figura 7. Respuesta de M2 a la actividad 1.

Respecto a la segunda respuesta del M2 al señalar “dada una épsilon, no es posible encontrar una delta” permite inducir que guarda una idea general del concepto dando una respuesta parcial (no completa) acerca del mismo.

A continuación, se presenta un cuadro resumen de la primera actividad.

Actividad 1. Representación teórica		
Estructura Mental	**Número de maestros**	**Tipo de respuesta**
No aplica	6	Registro verbal conceptual
No aplica	5	Registro verbal (concepción métrica)

Cuadro 1. Resumen actividad 1 del diagnóstico.

La actividad 2 se presenta en modo de representación numérica:

2. Dada la siguiente tabla para $f(x) = -1$, analizarla, completarla y responder.

Dados los valores de *x* que se aproximan a 4 tanto por la izquierda como por la derecha, dicha tabla es:

x	3.9	3.99	3.999	4	4.0001	4.001	4.01
$f(x)$							

Tabla 8. Actividad 2 del diagnóstico.

Nueve de los once maestros llevaron a cabo la Acción de evaluar correctamente la función en unos cuantos puntos cercanos a 4 al completar pertinentemente la tabla, uno la dejó en blanco (el M8, no respondió) y otro contestó mal (M4) al asignar erróneamente 1 en vez de -1 al valor de las imágenes.

2.i. ¿Cómo es el comportamiento de la función $f(x)$ con relación al de la variable, al ésta crecer o decrecer?

La idea de su planteamiento es coordinar o no el proceso dado de aproximación en el dominio cuando x tiende a 4 con el proceso de aproximación en el rango cuando $f(x)$ tiende a -1 con el detalle de su comportamiento homogéneo por ser constante, como se ha señalado anteriormente.

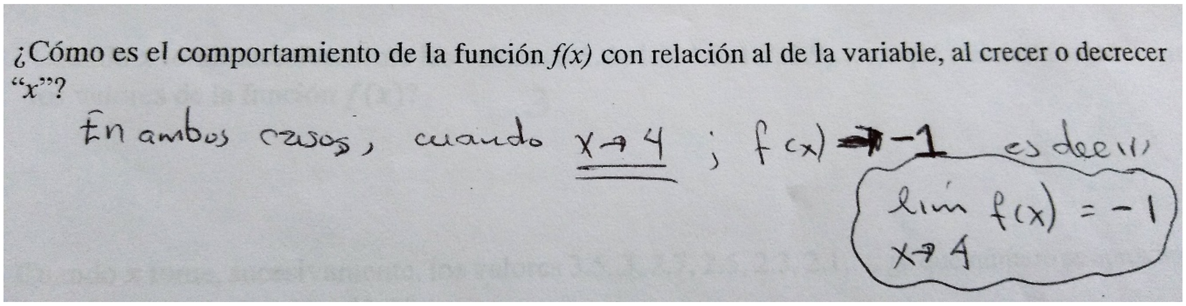
De acuerdo a sus respuestas se clasifican en tres grupos, uno mayoritario de siete maestros quienes responden acertadamente que el comportamiento es constante o continuo sin argumentar, un segundo grupo conformado por tres maestros quienes responden en términos de aproximación, construyendo en ambos grupos un esquema, al coordinar la aproximación en el dominio con la del rango; el tercer grupo lo constituye el M8 quien responde sin concluir acerca del esperado comportamiento constante, se detallan y analizan a continuación algunas de las respuestas.

Tal como se ha indicado, siete responden que el comportamiento de la función es constante, por ejemplo, el maestro M1 con "*Es continua. La gráfica es una línea horizontal*", el M5 responde por su parte que "*no importa la variable si ésta crece o decrece todos van a dar -1*" dando evidencia de que ha internalizado el concepto de función.

En el caso del M9 quien responde que "*no hay ninguna relación pues $f(x)$ no depende del valor de x, $f(x)$ es una función constante*" se considera que si hay relación, pero la misma permanece constante por la característica de la función.

Del segundo grupo se menciona al M7 quien plantea que en ambos casos, el límite de $f(x)$ cuando *x→4* como igual a *-1* (figura 8), lo cual indica que hace una coordinación entre lo acontecido en el rango y el dominio de la función, dando pie a considerar una coordinación en ambos procesos, ubicándose en consecuencia en la estructura de Proceso.

Finalmente se tiene al M8 como integrante del tercer grupo quien deja la tabla sin responder constituyéndose en el único en señalar que "*al crecer x la función decrece y viceversa*" dando indicios de que no concreta la acción solicitada en la pregunta y de no coordinar ambos procesos de aproximación, ni por el dominio ni por el rango como se esperaba pues la función permanece constante.


¿Cómo es el comportamiento de la función *f(x)* con relación al de la variable, al crecer o decrecer "*x*"?

En ambos casos, cuando $\underline{x \to 4}$; $f(x) \to -1$ es decir $\lim_{x \to 4} f(x) = -1$

Figura 8. Respuesta de M7 al inciso i de la actividad 2.

Actividad 2. Representación numérica		
Estructura Mental	**Maestros**	**Comentarios**
Acción de evaluar la función.	9	Un maestro (M8) no rellenó la tabla y otro (M4) lo hizo erróneamente al colocar que $f(x) = 1$ en vez de -1.
Coordinar el proceso de aproximación por el rango y por el dominio (2i)	10	Siete coordinan el proceso por el dominio y el rango de una función constante realizando la acción esperada, tres lo hace en términos de aproximación. El M8 no es capaz de observar el comportamiento constante de la función.

Cuadro 2. Resumen actividad 2 del diagnóstico.

La tercera actividad es presentada en modo algebraico-numérico:

3. Dada la función $\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \mathbf{2x+1} & \boldsymbol{x<0} \\ \mathbf{2} & \boldsymbol{x \geq 0} \end{cases}$ **completar la siguiente tabla:**

x	-0.1	-0.01	-0.001	-0.0001	0	0.0001	0.001	0.01	0.1
$f(x)$									

Tabla 9. Actividad 3 del diagnóstico.

La acción esperada de evaluar una función por partes en algunos puntos cercanos a cero y rellenar la tabla fue llevada a cabo pertinentemente por siete maestros, tres (M6, M7 y M8) lo hicieron de forma incorrecta y el M4 la dejó en blanco. Esta acción cobra valor en el sentido de que al ser completada la tabla se puede inferir que las aproximaciones laterales son diferentes.

3.i. Calcular el $\underset{x\to 0}{Lím} f(x)$

En las respuestas se generan tres grupos, el primero constituido por cuatro maestros respondiendo que no existe, de ellos, tres (M5, M7 y M9) argumentan algebraicamente al realizar la acción de calcular los límites laterales y concluir la no coincidencia (se muestra por ejemplo en figura 9 la respuesta del M9), el M4 lo hace gráficamente (figura 10) lo cual puede ser asumido como que hizo la coordinación mental de forma gráfica, aun con el detalle de haber dejado la tabla sin responder.

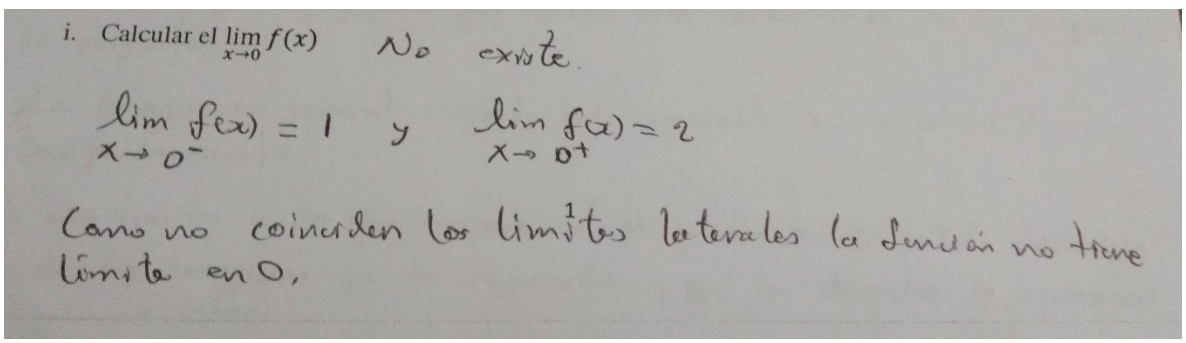


Figura 9. Respuesta de M9 a inciso i de la actividad 3.

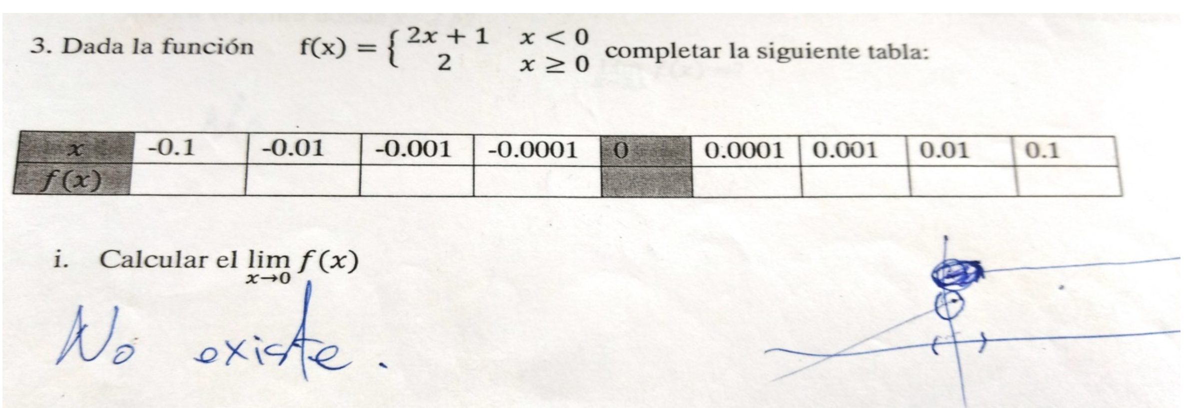


Figura 10. Respuesta de M4 a inciso i de la actividad 3.

En el segundo grupo tres (M2, M11 y M12) hacen el cálculo de los límites laterales de forma correcta con el detalle de que no terminan de coordinar el par de procesos como para llegar a concluir que el límite no existe por tener valores diferentes en sus aproximaciones laterales, tal como se ha señalado. Por ejemplo, M11 luego de calcular bien los laterales, responde "*por la derecha es 2 y por la izquierda es 1*" sin concluir como era de esperar.

Un tercer grupo lo conforman tres maestros quienes respondieron erradamente, M1 y M8 diciendo que el límite es igual a uno y M6 que es igual a dos, finalmente por su parte el M10 no respondió.

De dicho tercer grupo se menciona al M8 quien completa mal la tabla y sin embargo señala respecto a esta pregunta que "*se dice que el límite lateral derecho existe, el límite general no existe*" lo cual permite inducir que está terminando de coordinar ambos procesos tanto por la izquierda (aún sin escribirlo) como por la derecha en el dominio, con su aproximación respectiva en el rango, el detalle en la respuesta que finalmente plasma escribiendo que el límite es igual a 1, se muestra a continuación en la figura 11.

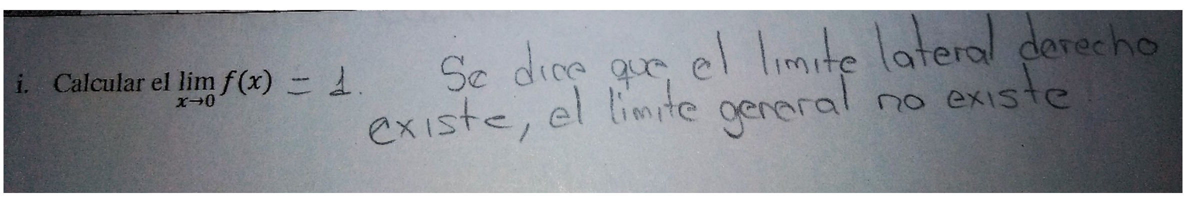
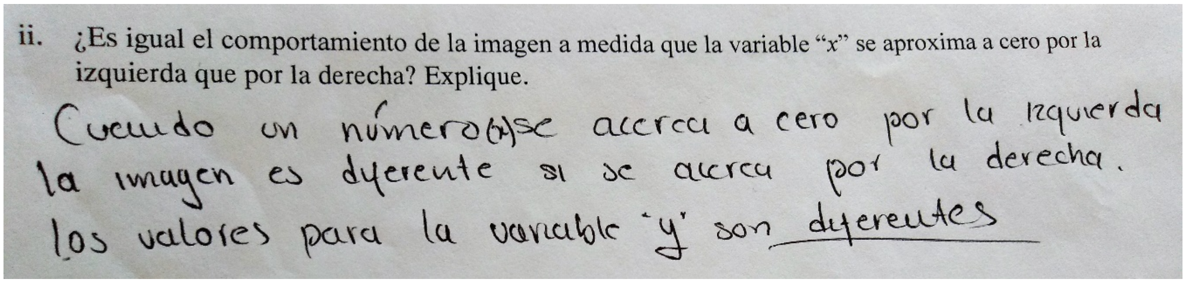


Figura 11. Respuesta de M8 a inciso i de la actividad 3.

3.ii. ¿Es igual el comportamiento de la imagen a medida que la variable "*x*" se aproxima a cero por la izquierda que por la derecha? Explique.

Presenta tres categorías de respuestas, siete que responden "no" con argumento, uno (M4) de igual forma "no" pero sin explicar y quienes dan una explicación, pero no concluyen (M2, M5 y M8).

El primer grupo hace ver que está coordinando los procesos de acercamiento tanto en el dominio como en el rango, por ejemplo, el M10 luego de un análisis inicial asevera que "*son diferentes*" tal como se muestra en la Figura 12.

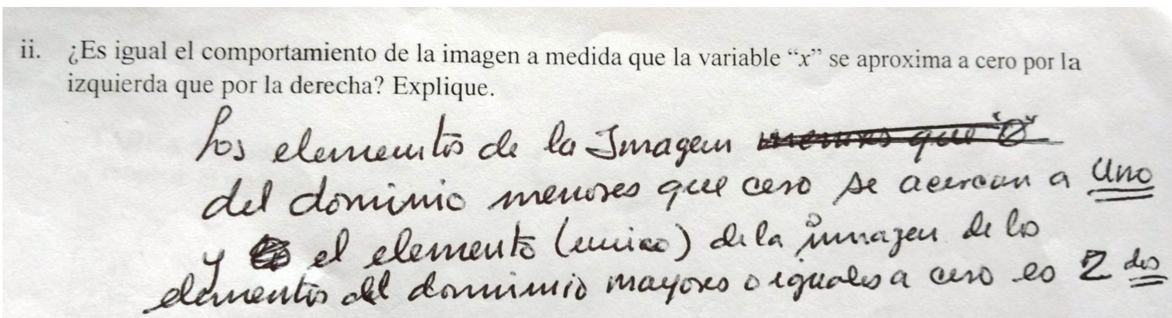


ii. ¿Es igual el comportamiento de la imagen a medida que la variable "x" se aproxima a cero por la izquierda que por la derecha? Explique.

Cuando un número (x) se acerca a cero por la izquierda la imagen es diferente si se acerca por la derecha. los valores para la variable "y" son diferentes

Figura 12. Respuesta de M10 a inciso ii de la actividad 2.

En el caso del tercer grupo que explican sin llegar a concluir que efectivamente el comportamiento no es igual, se puede señalar que han reconstruido el proceso en términos de intervalos que en el dominio se aproximan a cero, con tendencias laterales diferentes en el rango, se muestra por ejemplo la respuesta del M5 (figura 13).



ii. ¿Es igual el comportamiento de la imagen a medida que la variable "x" se aproxima a cero por la izquierda que por la derecha? Explique.

Los elementos de la Imagen ~~menores que 0~~ del dominio menores que cero se acercan a Uno y el elemento (único) de la imagen de los elementos del dominio mayores o iguales a cero es 2 dos

Figura 13. Respuesta de M5 a inciso ii de la actividad 3.

Actividad 3. Representación algebraico-numérica		
Estructura Mental	**Maestros**	**Comentarios**
Acción de evaluar y rellenar la tabla	7	Un maestro (M4) no rellenó la tabla y tres (M6, M7 y M8) lo hicieron erróneamente.
Encapsulamiento del proceso (3i)	5	Cinco maestros (M3, M4, M5, M7 y M9) a través de coordinar las aproximaciones laterales determinan que el límite no existe. Dos maestros (M2 y M12) no terminan de coordinar efectivamente

		el par de procesos pues no concluyen acerca de la no existencia del límite. M1, M6 y M8 responden con error y M10 no responde.
Coordinar el proceso de aproximación lateral por el rango y por el dominio (3ii)	7	Tres maestros (M2, M5 y M8) explican sin concluir, el M4 responde que no sin argumentar y los otros 7 maestros que responden bien.

Cuadro 3. Resumen actividad 3 del diagnóstico.

En cuanto a la cuarta actividad planteada en modo de representación gráfica tal como se ha señalado anteriormente, contiene tres incisos.

4. Tomar como base la gráfica de una función *f* dada a continuación para responder:

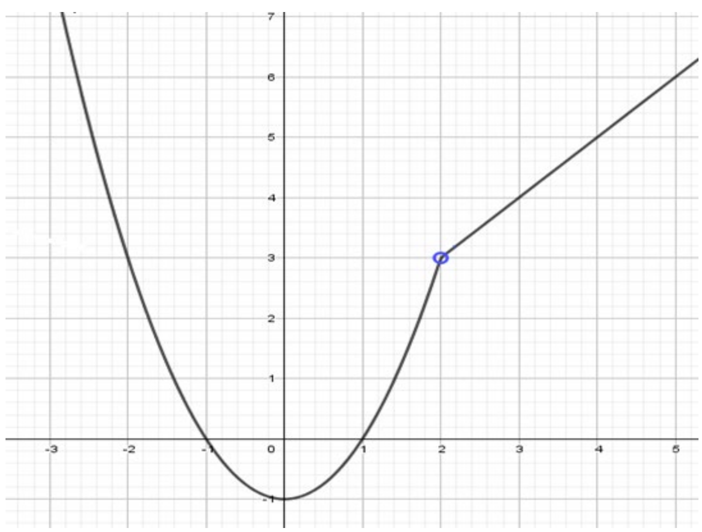


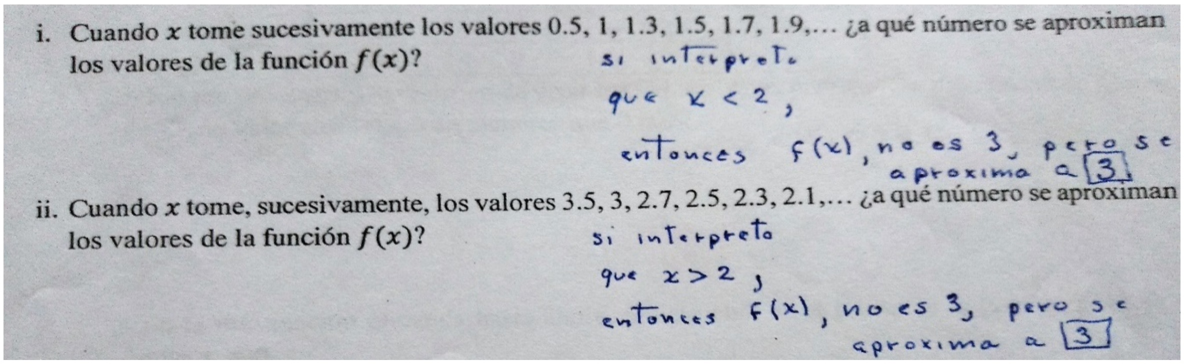
Figura 14. Gráfica de actividad 4 del diagnóstico.

4.i. Cuando x toma sucesivamente los valores 0.5, 1, 1.3, 1.5, 1.7, 1.9… ¿a qué número se aproximan los valores de la función $f(x)$?

4.ii. Cuando x toma sucesivamente los valores 3.5, 3, 2.7, 2.5, 2.3, 2.1… ¿a qué número se aproximan los valores de la función $f(x)$?

En este caso se hace el análisis de ambos incisos en conjunto, para tal efecto un primer grupo de nueve maestros coordinan la aproximación tanto por la izquierda como por la derecha de dos, al responder bien que se aproxima a 3 en el rango en ambos incisos, solo dos maestros (M1 y M10) responden erróneamente que se aproxima a dos.

Del primer grupo llama la atención el M2 quien manifiesta de forma pertinente que "*no es 3, pero se aproxima a 3*", mostrando tener claro el concepto de aproximación, tal como se puede observar en la figura 15.



i. Cuando x tome sucesivamente los valores 0.5, 1, 1.3, 1.5, 1.7, 1.9,… ¿a qué número se aproximan los valores de la función $f(x)$?

si interpreto que $x < 2$, entonces $f(x)$, no es 3, pero se aproxima a $\boxed{3}$

ii. Cuando x tome, sucesivamente, los valores 3.5, 3, 2.7, 2.5, 2.3, 2.1,… ¿a qué número se aproximan los valores de la función $f(x)$?

si interpreto que $x > 2$, entonces $f(x)$, no es 3, pero se aproxima a $\boxed{3}$

Figura 15. Respuesta de M2 a incisos i y ii de la actividad 4.

4.iii. ¿Cómo es el comportamiento de la imagen con relación a la variación de *x*?

Se reporta a nueve maestros coordinando en términos gráficos de crecimiento o decrecimiento, o geométricos a la izquierda o derecha de dos, esto en el sentido de que el comportamiento es que se aproxima a 3.

M1 y M10 por su parte manifiestan erróneamente que "*los límites laterales cuando x→2 no existen*", por su parte el M7 escribe acertadamente al coordinar ambos procesos, tanto por la izquierda, como por la derecha y concluir que "*en ambos casos, tienden a 3, podemos decir, que el límite existe y es 3*".

Actividad 4. Representación gráfica		
Estructura Mental	**Maestros**	**Comentarios**
Proceso en el rango en donde $f(x)$ se aproxima a 2	9	Dos maestros (M1 y M10) responden erróneamente que se aproxima a dos, el resto coordinan bien el proceso de aproximación tanto por la izquierda como por la derecha.

Proceso que surge de la coordinación de dos procesos de aproximación, uno en el dominio y otro en el rango (4iii)	9	Dos maestros (M1 y M10) señalan erróneamente que el límite no existe y los otros 9 maestros responden acertadamente.

Cuadro 4. Resumen actividad 4 del diagnóstico.

5. Calcular el $\underset{x\to\infty}{\boldsymbol{Lím}}\frac{4+7x-5x^2}{-1-10x^2}$ explicando el procedimiento seguido para su respuesta.

En esta actividad se asocia la existencia de un límite con la capacidad de continuar o no el proceso para siempre al tender a infinito, para tal efecto dos maestros (M1 y M10) la dejan sin responder, ocho lo hacen correctamente al dar como resultado el ½ esperado, explicando relativamente el procedimiento aplicado al usar teoría de límites y un último (M8) responde de forma errónea (figura 16), al no ejecutar la técnica algebraica para el cálculo de límites en funciones racionales al llevar a cabo la operación de dividir por el término con mayor exponente, tal como se señala a continuación:

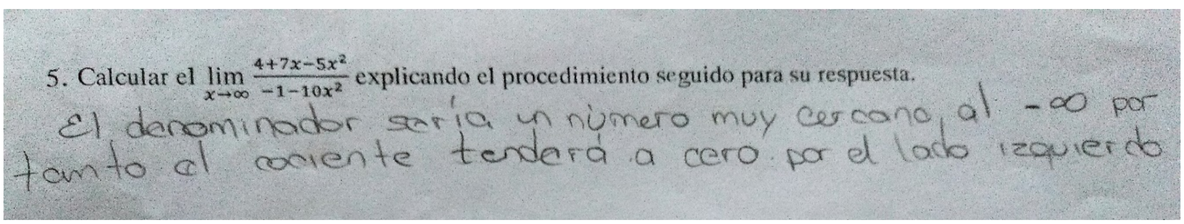

5. Calcular el $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4+7x-5x^2}{-1-10x^2}$ explicando el procedimiento seguido para su respuesta.
El denominador sería un número muy cercano al $-\infty$ por tanto el cociente tenderá a cero por el lado izquierdo

Figura 16. Respuesta de M8 a la actividad 5.

Luego de operar algebraicamente el maestro realiza o no la Acción de coordinar la aproximación del dominio hacia el infinito para obtener el proceso de $f(x)$ aproximándose a ½.

Actividad 5. Representación algebraica		
Estructura Mental	**Maestros**	**Comentarios**
Se analiza técnica algebraica para el cálculo de límites en funciones racionales y la	8	Dos maestros (M1 y M10) no responden, el M8 lo hace erróneamente y el resto coordinan el resultado esperado de ½.

coordinación del esquema de aproximación de x hacia el infinito mientras $f(x)$ lo hace hacia 1/2.		

Cuadro 5. Resumen actividad 5 del diagnóstico.

6. Dada la función $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x<0 \\ -2x-3 & x \geq 0 \end{cases}$, calcular los valores de la misma cuando x toma los valores señalados en la tabla. Completa el resto de valores de la tabla calculando los valores absolutos indicados.

x	$f(x)$	$\lvert x-0 \rvert$	$\lvert f(x)+3 \rvert$
0,1			
0,01			
0,001			
0,0001			
…		…	
-0,0001			
-0,001			
-0,01			
-0,1			

Tabla 10. Actividad 6 del diagnóstico.

La acción de completar la tabla en términos de intervalos y desigualdades fue ejecutada de manera correcta por los once maestros, esto se realiza mediante la introducción de estimaciones numéricas de la cercanía de las aproximaciones en valor absoluto.

6i. ¿Qué tan próximos a cero deben de estar los valores de x, para que la diferencias de $f(x)+3$, en valor absoluto, sean menores que 0.002?

Diez de los once maestros responden correctamente, siendo el M10 quien no responde. Las respuestas correctas señalando que las diferencias de $\lvert f(x)-(-3) \rvert$ son menores a 0,002, dan evidencia de que han coordinado dos procesos, uno en el dominio y otro en el rango, en términos de distancias y desigualdades.

Es así como el esquema desarrollado al coordinar la construcción del proceso de aproximación en el rango y en el dominio da evidencia de una concepción Proceso en términos de desigualdades.

6.ii. Con la información obtenida hasta ahora, ¿podrías indicar cuál es el límite de la función $f(x)$ en el punto $x = 0$?

Aquí cuatro maestros (M1, M4, M6 y M11) no realizan el proceso esperado sobre el concepto en el caso de función por partes al responder erróneamente que es igual a *-3*, tres (M2, M8 y M10) no llegan a concluir como tal pues se limitan a indicar que los límites laterales no coinciden, sin coordinar pertinentemente la no existencia, por ejemplo el M10 expresa que "*parece que el límite no existe, …*" y el M2 llega a representar gráficamente sin concluir, como se muestra a continuación en la figura 17:

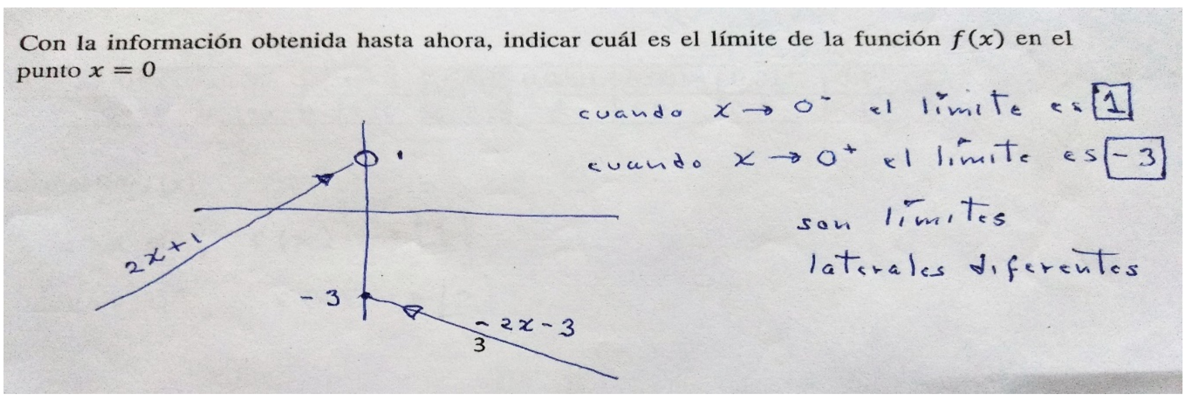


Figura 17. Respuesta de M2 a inciso ii de la actividad 6.

Por otra parte, tres maestros (M5, M7 y M9) muestran una concepción Proceso al responder correctamente que el límite "*no existe*" , el M3 responde igual pero al justificar señala que "*… debido a que los límites laterales no existen*", lo cual no es correcto pues si existen pero no coinciden, esto al presentarse la función definida por partes, en este caso el maestro (M5) en su justificación utiliza una concepción métrica a través del valor absoluto de las diferencias $x - 0$ y $f(x) - 3$ (figura 18).

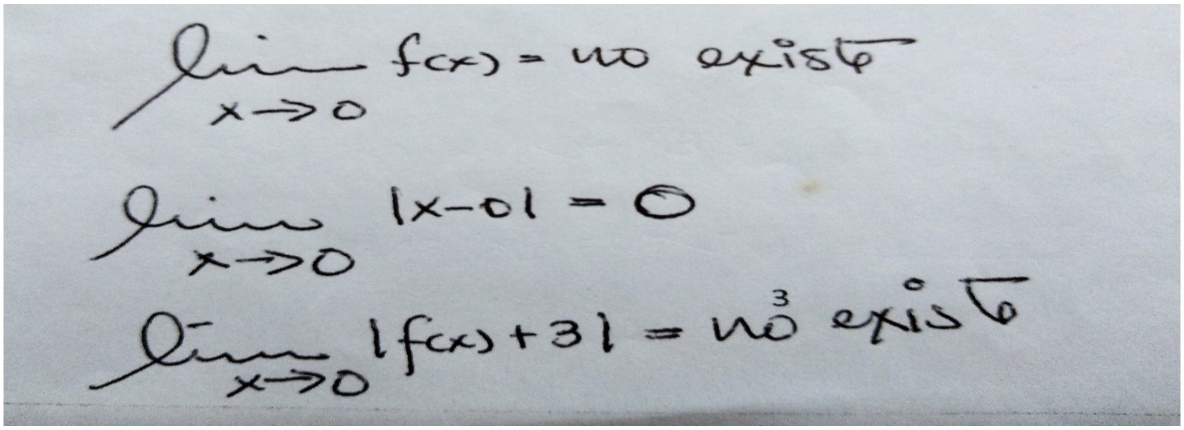


Figura 18. Respuesta de M5 a inciso ii de la actividad 6.

Actividad 6. Representación numérica (métrica)		
Estructura Mental	**Maestros**	**Comentarios**
Acción de evaluar la función y calcular distancias tanto en el dominio como en el rango para valores de *x* cercanos a cero.	11	Realizada mediante la introducción de estimaciones numéricas de la cercanía de las aproximaciones en valor absoluto.
Reconstrucción del proceso de coordinación de aproximación tanto en el dominio como en el rango en términos de intervalos y desigualdades (6i).	10	Dejada sin responder por el M10, el resto respondió de acuerdo al esquema desarrollado al coordinar la construcción del proceso de aproximación en el rango y en el dominio.
Proceso resultante de coordinar dos procesos, uno en el dominio y otro en el rango (4iii).	3	Cuatro maestros (M1, M4, M6 y M11) responden erróneamente que es igual a -3, los M2, M8 y M10 no coordinan la no existencia y los M3, M5, M7 y M9 indican como debe ser que el límite no existe.

Cuadro 6. Resumen de actividad 6 del diagnóstico.

4.2 Resumen del análisis del bloque de diagnóstico.

Una vez analizadas en conjunto las respuestas de los maestros de acuerdo a la primera actividad de diagnóstico se tienen que siete maestros M1, M2, M4, M6, M8, M10 y M11 presentaron la estructura Acción mientras que el resto M3, M5, M7 y M9 presentaron la estructura de Proceso.

4.3 Análisis del bloque de desarrollo.

A continuación se hace el análisis del segundo bloque de actividades llamada de desarrollo la cual se llevó a cabo en las dos sesiones siguientes del curso mencionado anteriormente, cabe volver a señalar que dichas actividades fueron llevadas a cabo por 14 maestros de los cuales once estuvieron en la primera de diagnóstico, por lo que se hace el análisis en definitiva con los once comunes por su continuidad en el curso, para poder concluirlo y evaluar el posible avance en función de su antes (diagnóstico) y su después (desarrollo), para tal efecto se les asignó la misma notación desde M1 hasta M11.

La primera actividad es planteada en modo algebraico-numérico, consiste en realizar la acción de evaluar $f(x)$ en unos puntos y rellenar la tabla pertinentemente.

1. Si $f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$ complete la tabla siguiente:

x tiende a… $\rightarrow$ $\leftarrow$ x tiende a…

x	1.9	1.99	1.999	1.9999	2.0001	2.001	2.01	2.1
$f(x)$								

$f(x)$ tiende a… $\rightarrow$ $\leftarrow$ $f(x)$ tiende a…

Tabla 11. Actividad 1 del desarrollo.

Luego se tienen cuatro incisos donde se pide responder y explicar en cada caso:

a. ¿A cuál valor de *a* se aproxima *x*?

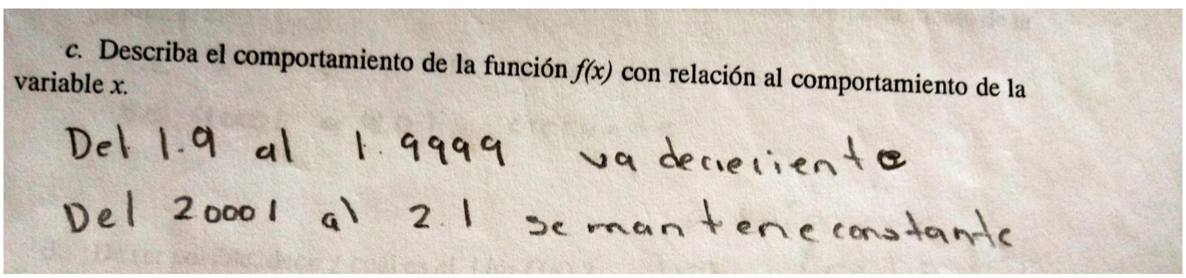
La Acción de rellenar la tabla y responder el inciso “a” fue llevada a cabo por los once maestros, se reseña por ejemplo la respuesta completa del M3 “*ya sea por la izquierda (aumentan) o derecha (disminuyen) se aproxima a 2*”.

b. ¿A qué número se aproxima la función $f(x)$?

Fue respondido bien que se aproxima a 0.25 (¼) por diez maestros. Una vez más se reseña la respuesta del M3 “*a ¼ pasa lo mismo que en el inciso anterior, por la izquierda aumentan las imágenes hasta aproximarse a ¼ y por la derecha disminuyen hasta aproximarse también a ¼* ” y donde además solo el M6 no realizó la Acción de construir el proceso en el rango en donde *y* se aproxima a un valor numérico, respondiendo de forma errónea que a cero.

c. Describir el comportamiento de la función $f(x)$ con relación al comportamiento de la variable *x*.

En tal sentido nueve maestros responden en términos generales que se acerca a 0.25 cuando x tiende a 2, el M8 no concluye pues no termina de coordinar las aproximaciones laterales coincidentes al responder con duda “a medida que x se acerca a 2, $f(x)$ se acerca a cero o 0.25” y una vez más el M6 no responde correctamente como se muestra en la siguiente figura 19.


c. Describa el comportamiento de la función *f(x)* con relación al comportamiento de la variable *x*.

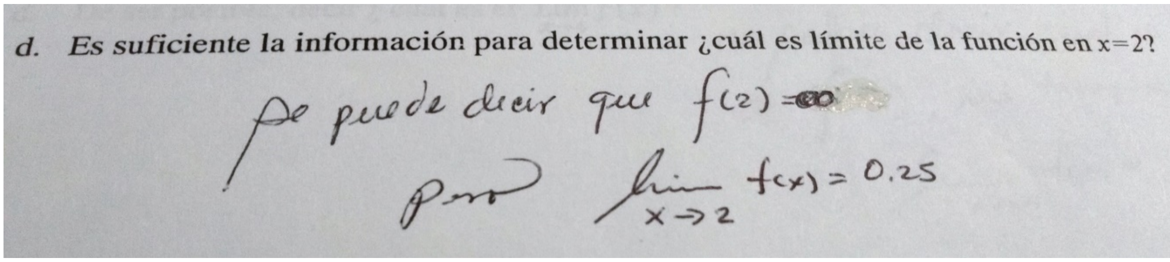
Del 1.9 al 1.9999 va decreciente
Del 2.0001 al 2.1 se mantene constante

Figura 19. Respuesta de M6 a inciso c de la actividad 1 del desarrollo.

De este inciso se mencionan algunas respuestas, por ejemplo, el M4 “*mientras más cercano el valor es a 2, más cercano el valor de $f(x)$ a 0.25*” y el M10 “*cuando x aumenta, $f(x)$ disminuye y viceversa*”, las cuales hacen notar la coordinación de la Acción de aproximación en ambos sentidos, tanto por el dominio como en el rango.

d. Es suficiente la información para determinar ¿cuál es el límite de la función en *x=2*?

Siete maestros expresaron que si, por otra parte el M1 que “*la información no es suficiente*”, el M4 que “*formalmente no*”, el M10 responde dubitativamente con “*de acuerdo al análisis en la tabla parece que sí es suficiente la información*” y finalmente el M5 señala lo mostrado en la figura 20, con lo cual se induce que no realiza la construcción del esquema coordinado por completo con $f(x)$ aproximándose a 0.25, esto al responder:



d. **Es suficiente la información para determinar ¿cuál es límite de la función en x=2?**

Se puede decir que $f(2) = \infty$

Pero $\lim_{x \to 2} f(x) = 0.25$

Figura 20. Respuesta del M5 a inciso d de la actividad 1 del desarrollo.

Actividad 1. Representación algebraico-numérica		
Estructura Mental	**Maestros**	**Comentarios**
Acción de evaluar $f(x)$ en puntos próximos a 2 y de rellenar la tabla.	11	Todos los maestros realizaron la Acción de completar la tabla correctamente.
Construcción de un proceso en el dominio donde x se aproxima a 2 (1a).	11	Interiorización de la acción anterior para la construcción del proceso en el dominio donde x se aproxima a 2 realizada correctamente por los 11 maestros.
Construcción de un proceso en el rango donde $f(x)$ se aproxima a ¼ (1b).	10	Respondida erróneamente por el M6 al decir que se aproxima a cero, el resto respondió de acuerdo al esquema esperado al coordinar la construcción del proceso de aproximación en el rango.
Coordinación de ambos procesos de aproximación, tanto del dominio como del rango (1c).	9	El M8 no concluye pues no termina de coordinar las aproximaciones laterales coincidentes al responder con duda, el M6 no responde correctamente.
Encapsulación del esquema desarrollado en 1b y 1c para convertirlo en Objeto (1d).	7	Cuatro maestros (M1, M4, M5 y M10) no alcanzar a construir el esquema de aproximación completo al no realizar la acción sobre el concepto.

Cuadro 7. Resumen de actividad 1 del desarrollo.

La segunda actividad fue planteada en modo numérico con una tabla completada, la cual sirve de base para responder con claridad cuatro incisos de acuerdo a la instrucción dada:

x	3,99	3,999	3,9999	3,9999	…	4,00001	4,0001	4,001	4,01
f(x)	15,530	15,5254	15,5015	15,50001	…	14,00003	14,0003	14,003	14,03

Tabla 12. Actividad 2 del desarrollo.

a. ¿A cuál valor se aproxima *x*?

Fue respondido de manera coordinada y acertada por los once maestros, por ejemplo, el M3 señala que "*ya sea por la derecha o izquierda se aproxima a 4*".

b. ¿A qué número se aproxima la función $f(x)$?

Respondida por nueve maestros pertinentemente que a 14 por la derecha y a 15.5 por la izquierda; el M4 señala por su parte que "*a un solo número no se acerca*", lo cual es cierto y finalmente M1 y M6 no alcanzan a coordinar la aproximación con límites diferentes al responder que se aproxima a 5.

c. Describir el comportamiento de la función $f(x)$, con relación al comportamiento de la variable *x*.

Al igual que en el inciso anterior los M1 y M6 responden de forma insuficiente que tiende a cuatro, al no lograr coordinar los incisos a y b anteriores.

Los nueve maestros restantes coinciden con que a medida que se acerca a 4 por la izquierda los valores de la imagen se van aproximando a 15.5 y cuando los valores de *x* se aproximan a 4 por la derecha, las imágenes correspondientes se aproximan a 14, la respuesta del M4 es que para "*Valores menores que cuatro sus imágenes se acercan a 15.5 y valores mayores que cuatro sus imágenes se acercan a 14*".

d. De ser posible, decir ¿cuál es el $\lim_{x \to 4} f(x)$?

Aquí ocho maestros coordinan la aproximación por ambos lados para concluir efectivamente al responder de una u otra forma que el límite no existe, por ejemplo, el M2 "*si por definición, el límite es único, entonces el límite no existe*".

El M4 no responde, mientras que M6 lo hace erróneamente al señalar que "*podría ser 15*" y finalmente se tiene al M1 diciendo que "*no es posible*".

Actividad 2. Representación numérica		
Estructura Mental	**Maestros**	**Comentarios**
Construcción de un proceso en el dominio donde x se aproxima a 4 (2a).	11	Construcción del proceso en el dominio donde x se aproxima a 4 realizada correctamente por los 11 maestros.
Construcción de un proceso en el rango donde $f(x)$ se aproxima a 15.5 por la izquierda y a 14 por la derecha (2b).	9	Respondida erróneamente por M1 y M6 al decir que se aproxima a 5, el resto respondió de acuerdo al esquema esperado al coordinar la construcción del proceso de aproximación en el rango.
Coordinación de ambos procesos de aproximación, tanto en el dominio como en el rango (2c).	9	M1 y M6 responden que tiende a 4, los nueve restantes coordinan 2a y 2b a través de $f(x)$ para obtener el proceso de aproximación integral al indicar que no existe.
Encapsulación del esquema desarrollado en 2b y 2c para convertirlo en Objeto (2d).	8	Tres maestros (M1, M4 y M6) no alcanzar a construir el esquema de aproximación completo al no realizar la acción sobre el concepto.

Cuadro 8. Resumen de la actividad 2 del desarrollo.

La tercera actividad es planteada en modo gráfico, para responder y explicar cuatro incisos al analizarla, así se tiene que:

3. Dada la función $f(x)$ mostrada en la siguiente gráfica (Figura 21):

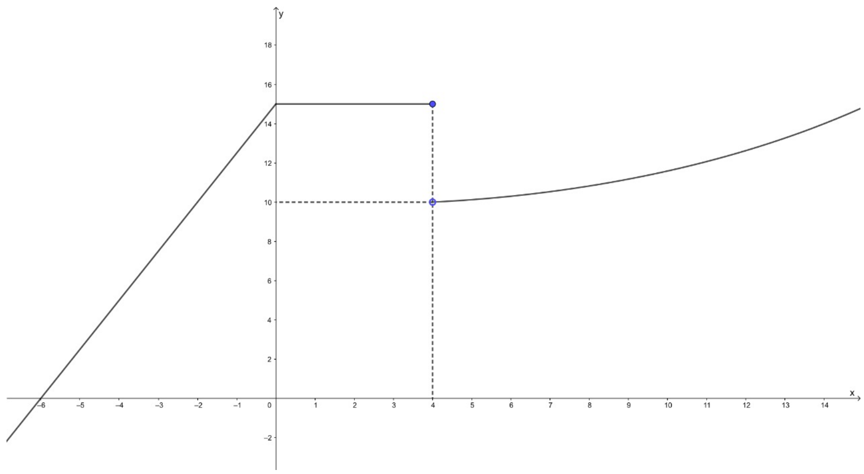


Figura 21. Gráfica de función $f(x)$ de la actividad 3

a. Elija un valor para la x y calcula el valor de la función $f(x)$ en ese punto.

Esta acción de evaluar gráficamente en un punto fue llevada a cabo por los once maestros de forma pertinente, tomando diferentes valores de *x* para evaluar su respectiva imagen, es decir, asociaron de forma correcta un valor en el dominio con su respectivo valor en el rango.

b. ¿A cuál número se aproxima la función $f(x)$ cuando *x* toma sucesivamente los valores 3.9, 3.99, 3.999, …?

Respondida bien por diez maestros entre quienes se puede señalar al M2 con "*en el intervalo propuesto,* $f(x)$ *es constante e igual a 15*" y el M10 con "*cuando x toma los valores anteriores parece que se aproxima a 15*" lo cual puede interpretarse como dudoso al acotar que "*parece*", finalmente el M6 se constituye en el único maestro en responder mal al no coordinar la aproximación y señalar que se aproxima a 4.

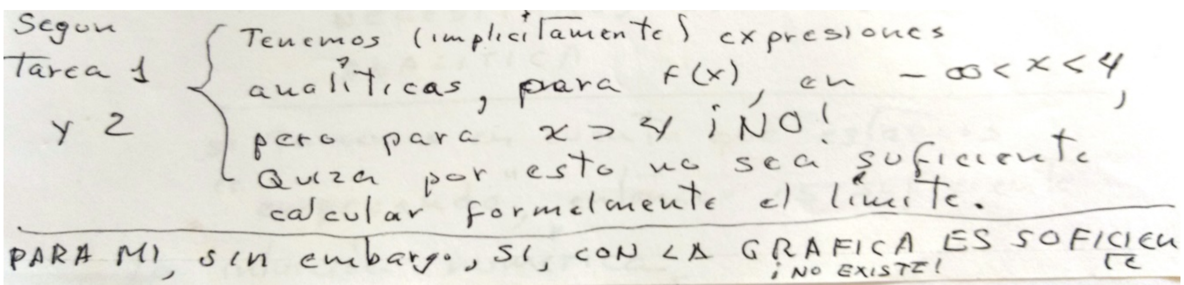
c. Describir el comportamiento de la función $f(x)$ en relación con el comportamiento de la variable *x*.

Presenta varias respuestas, los M8, M10 y M11 señalan que es una función definida a trozos, por ejemplo el M8 con "*es una función a trozos donde se observan tres comportamientos cuando x<0* ∪ *0<x<4* ∪ *x>4*", por otro lado se tiene el M4 "*Para valores menores que 4 y muy cercanos a 4 las imágenes son 15*" sin señalar el comportamiento para los mayores a 4 y el M6 "*de (-∞ a 0) la función es lineal, de [0,4) es constante y de [4,+8) es continua*" que coincide con el M5 palabras más o menos. El resto de los maestros, es decir, los M1, M2, M3 y M7 también responden bien el comportamiento dentro de lo esperado.

El M1 responde erradamente que "*y tiende a cero cuando x tiende a -∞…*" y de igual forma el M9 con "*cuando* $x \to 4$, $f(x) \to 15$"

d. De ser posible mencionar ¿cuál es el límite de la función en *x=4*?

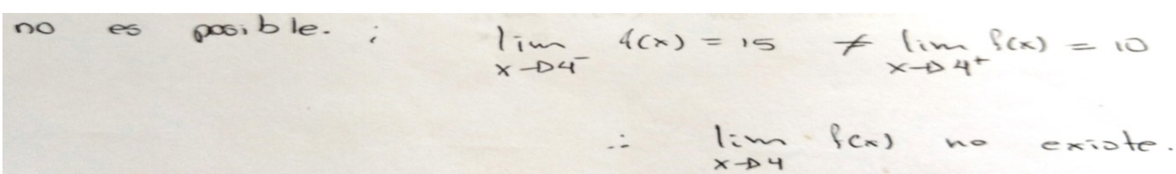
Para tal efecto se presentan diversidad de respuestas por ejemplo M4 "*no es posible*", M5 "*no puedo*", M6 "*no tiene límite*", los M7, M8 y M11 "*el límite no existe ya que en la gráfica se observa que los límites laterales son diferentes*", el M10 "*en la gráfica el valor del límite no es el mismo cuando los valores de x se aproximan por la izquierda y por la derecha*" dejando en sí sin responder la pregunta pertinentemente al no concluir sobre su no existencia. Las respuestas del M2 y M3 son contradictorias pues inicialmente señalan que no es posible pero luego argumentan para concluir que "*no existe*" tal como se muestra en las figuras 22 y 23, finalmente se tiene que los M1 y M9 dejan sin responder este último inciso.



Segun tarea 1 y 2 { Tenemos (implicitamente) expresiones analíticas, para $f(x)$, en $-\infty < x < 4$, pero para $x > 4$ ¡NO! Quiza por esto no sea suficiente calcular formelmente el limite.

PARA MI, sin embargo, SI, CON LA GRAFICA ES SOFICIENTE ¡NO EXISTE!

Figura 22. Respuesta de M2 a inciso d de la actividad 3.



no es posible. ; $\lim_{x \to 4^-} f(x) = 15 \neq \lim_{x \to 4^+} f(x) = 10$

$\therefore \lim_{x \to 4} f(x)$ no existe.

Figura 23. Respuesta de M3 a inciso d de la actividad 3.

Actividad 3. Representación gráfica		
Estructura Mental	**Maestros**	**Comentarios**
Acción de evaluar $f(x)$ en un solo punto (3a).	11	Asociación de un punto en el dominio con su respectivo valor en el rango realizada correctamente por los 11 maestros.
Construcción de un proceso en el rango donde $f(x)$ se aproxima a 4 por la izquierda (3b).	10	Respondida erróneamente por el M6 al decir que se aproxima a 4, el resto respondió de acuerdo al esquema esperado al coordinar la construcción del proceso de aproximación en el rango.
Coordinación de ambos procesos de aproximación, tanto en el dominio como en el rango (3c).	9	M1 y M9 responden erradamente, los nueve restantes coordinan los procesos para obtener el proceso de aproximación integral.
Encapsulación del esquema desarrollado para convertirlo en Objeto (3d).	3	M1 y M9 dejan sin responder este inciso. M2 y M3 primero dicen que no se puede calcular el límite y luego de analizar concluyen que "no existe". Tres maestros (M4, M5 y M6) no alcanzan a construir el esquema de aproximación completo al no realizar la acción sobre el concepto. M7, M8, M10 y M11 responden

Cuadro 9. Resumen de la actividad 3 del desarrollo.

La cuarta actividad es planteada en modo algebraico-numérico presentando la función:

4. Siendo $\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x<0 \\ -2x-3 & x \geq 0 \end{cases}}$

a. Completar la tabla:

x	-0,1	-0,01	0,001	-0,0001…	0,0001	0,001	0,01	0,1
$f(x)$								

Tabla 13. Actividad 4 del desarrollo.

Acción que fue realizada correctamente por nueve maestros, solo los M2 y M6 tuvieron errores en rellenarla, luego se pide responder y explicar donde considere necesario los siguientes cuatro incisos.

b. ¿A cuál número *a* se aproxima *x*?

Acción realizada de analizar la tabla para responder que a cero por los once maestros con el detalle del M6 quien responde que "*por la izquierda a cero*".

c. ¿A cuál número se aproxima la función $f(x)$ cuando *x* se aproxima al valor de *a* calculado en anterior inciso?

Fue respondido bien por ocho de los maestros, se reseña en la figura 24 la respuesta del M4; por otro lado, los M2, M6 y M11 no respondieron acertadamente, por ejemplo, el M11 dice que a "*ningún número*".

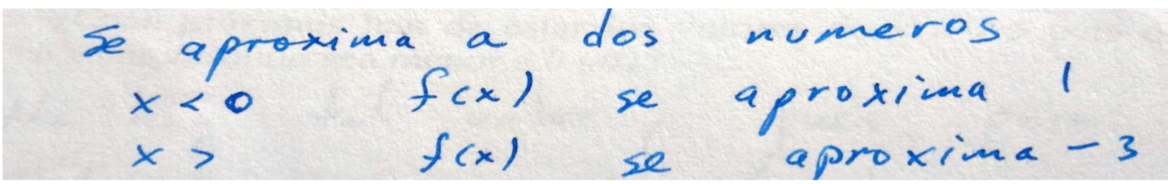
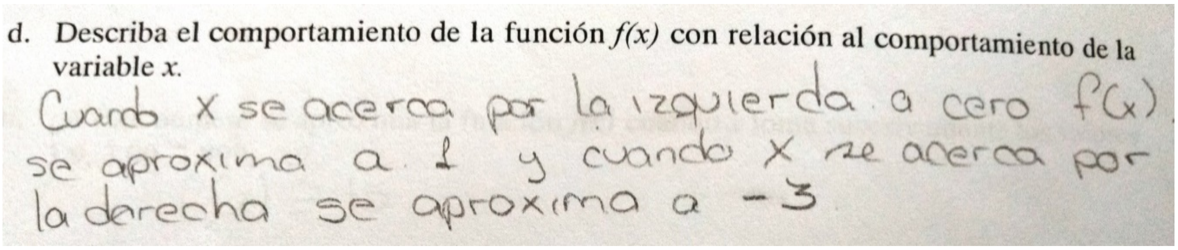


Figura 24. Respuesta de M4 a inciso c de la actividad 4.

d. Describir el comportamiento de la función con relación al comportamiento de la variable *x*.

El M10 la deja sin responder, los M2, M6 y M11 responden erróneamente, por ejemplo el M11 dice que "*no se aproxima a ningún valor en específico $f(x)$ con $x \to 0$*"; el M5 plantea la gráfica de la función sin entrar en detalle respecto a la respuesta propiamente dicha y el resto, es decir, seis maestros coordinan pertinentemente los procesos de aproximación anteriores al responder que por la izquierda las imágenes se aproximan a 1 y por la derecha a -3, por ejemplo el M8 contesta lo mostrado en la figura 25.


d. Describa el comportamiento de la función *f(x)* con relación al comportamiento de la variable *x*.

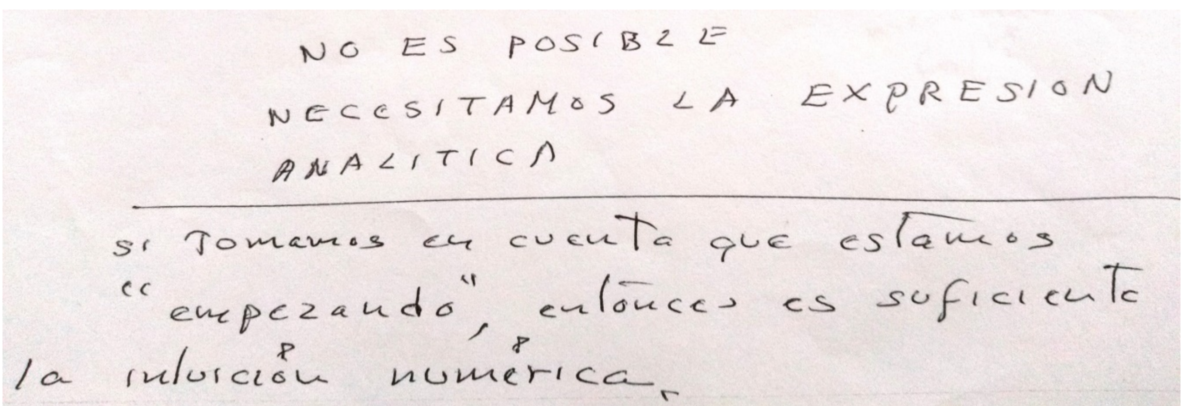
Cuando x se acerca por la izquierda a cero f(x) se aproxima a 1 y cuando x se acerca por la derecha se aproxima a -3

Figura 25. Respuesta de M8 a inciso d de la actividad 4.

Finaliza la cuarta actividad con el inciso e donde se pide:

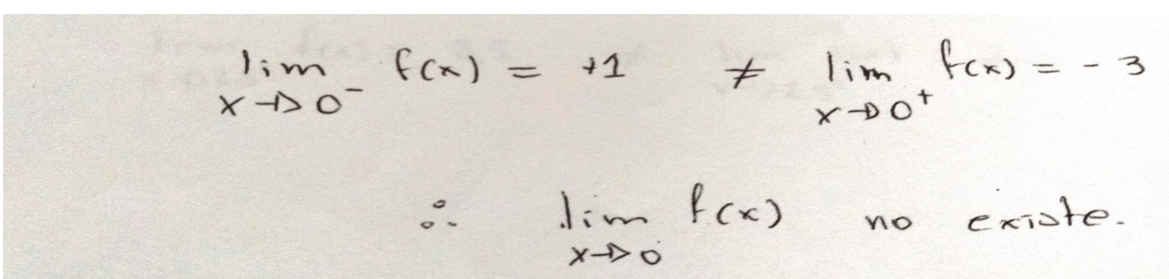
e. Decir si es posible ¿cuál es el límite de la función en $x = 0$?

Cinco maestros M1, M4, M5, M6 y M9 respondieron que no es posible, un ejemplo de este grupo lo constituye el M5 quien responde "*no puedo decir cuál es el límite*"; por su parte los M3, M7, M8 y M11 responden que el límite no existe porque los límites laterales no son iguales, respuesta del M3 de este caso mostrada en Figura 27; M2 responde contradictoriamente, al afirmar que no es posible y luego de argumentar concluir que si, tal como se muestra en las figuras 26. Finalmente se tiene que el M10 la deja sin contestar.


NO ES POSIBLE
NECESITAMOS LA EXPRESION ANALITICA

si Tomamos en cuenta que estamos "empezando", entonces es suficiente la intuición numérica.

Figura 26. Respuesta de M2 a inciso e de la actividad 4.


$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = +1 \neq \lim_{x \to 0^+} f(x) = -3$$

$$\therefore \lim_{x \to 0} f(x) \text{ no existe.}$$

Figura 27. Respuesta de M3 a inciso e de la actividad 4.

Actividad 4. Representación algebraico-numérica		
Estructura Mental	**Maestros**	**Comentarios**
Acción de evaluar $f(x)$ en puntos próximos a 0 y de rellenar la tabla.	9	Todos los maestros realizaron la Acción de completar la tabla correctamente, salvo los M2 y M6 quienes responden con errores.
Construcción de un proceso en el dominio donde x se aproxima a 0 por los lados (4b).	11	Interiorización de la acción anterior para la construcción del proceso en el dominio donde x se aproxima a 0 realizada correctamente por los 11 maestros.
Construcción de un proceso en el rango donde $f(x)$ se aproxima a 1 por la izquierda y a -3 por la derecha (4c).	8	Respondida erróneamente por los M2, M6 y M11, el resto respondió de acuerdo al esquema esperado al coordinar la construcción del proceso de aproximación en el rango.
Coordinación de ambos procesos de aproximación, tanto del dominio como del rango (4d).	6	M2, M6 y M11 no responden correctamente al no coordinar las aproximaciones laterales no coincidentes, M10 no responde y M5 no concluye pues no termina de coordinar lo expuesto.
Encapsulación del esquema desarrollado en 4c y 4d para convertirlo en Objeto (4e).	3	Cinco maestros (M1, M4, M5, M6 y M9) no alcanzar a construir el esquema de aproximación completo al no realizar la acción sobre el concepto.

Cuadro 10. Resumen actividad 4 del desarrollo.

La quinta actividad es planteada en modo numérico donde se pide:

5. Completar la tabla siguiente:

x	$f(x)$	$\|2,5-x\|$	$\|3,5-f(x)\|$
2,45	3,35		
2,49	3,47		
2,499	3,497		
2,4999	3,4997		
2,49999	3,49997		

2,499999	3,499997		
…	…		
2,500001	2,000002		
2,50001	2,00002		
2,5001	2,0002		
2,501	2,002		
2,51	2,020		
2,55	2,1		

Tabla 14. Actividad 5 del desarrollo.

Los once maestros ejecutaron la Acción de completar la tabla pertinentemente en términos de desigualdades. Para luego sobre su análisis responder dos incisos:

a. ¿Cuán próximos han de estar los valores de x a 2.5 para que la diferencia $3.5 - f(x)$ en valor absoluto sea menor a 0.001?

Respondida en los términos esperados por nueve maestros en el caso de la diferencia por la izquierda, porque respecto a la derecha solo los M2 respondiendo "*solo por la izquierda*" y el M4 con "no hay tal valor, pues para valores mayores que 2.5 no se puede" hicieron acotación expresa a este caso, finalmente se tiene que fue dejada sin responder por los M7 y M8.

b. Con la información del ítem anterior ¿podría indicar cuál es el límite de la función $f(x)$ en el punto donde *x=2.5*?

$$\underset{x\to 2.5}{Lím} f(x) = ?$$

Los maestros M3, M6 y M8 logran interiorizar la concepción dinámica del concepto de límite al señalar que el límite no existe, por ejemplo el M8 "*no existe el límite porque los límites laterales no son iguales*", por otro lado el M10 en el mismo orden de ideas señala una vez más sin aseverar que "…*parece que el límite no existe*…" conforme a lo mostrado en la figura 28, el M2 señala erróneamente que el límite es 3.5, mientras que los M1, M4, M5, M7, M9 y M11 (seis maestros) respondieron que no es posible.

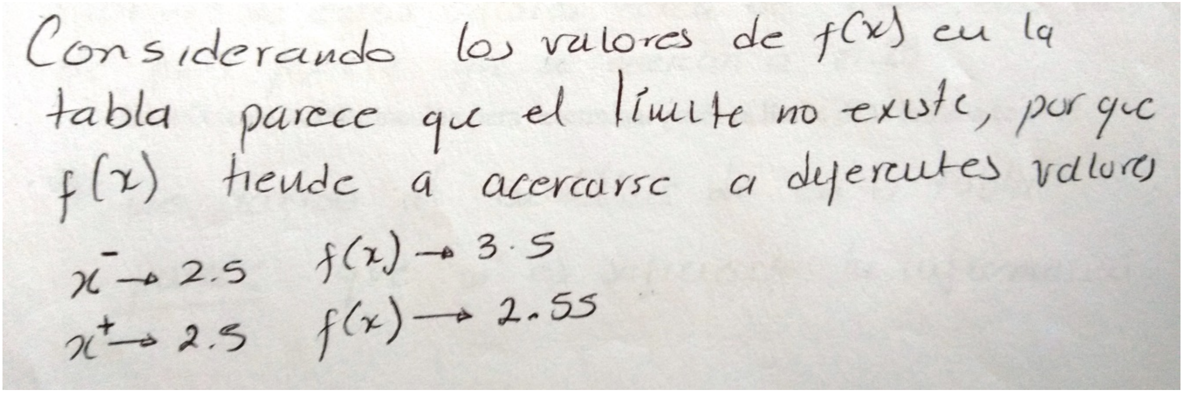


Figura 28. Respuesta de M10 a inciso b de la actividad 5.

Actividad 5. Representación numérica		
Estructura Mental	**Maestros**	**Comentarios**
Acción de evaluar x y $f(x)$ en puntos próximos a 2.5 y 3.5 rellenando la tabla.	11	Todos los maestros realizaron la Acción de completar la tabla correctamente.
Reconstrucción del proceso de aproximación tanto en el dominio como en el rango (5a).	9	Dejada sin responder por los M7 y M8. Respondida en términos completos de aproximación por la derecha y por la izquierda por M2 y M4, los otros nueve hacen alusión solo a las diferencias por la izquierda.
Aplicación del esquema de cuantificadores para conectar el proceso reconstruido en 5a y obtener la definición formal (5b).	3	M2, M6 y M8 interiorizan al reconstruir el proceso de coordinación tanto en el dominio como en el rango. Seis maestros respondieron que no es posible, el M2 responde erróneamente y el M10 no concluye.

Cuadro 11. Resumen de la actividad 5 del desarrollo.

La última pregunta fue planteada de modo gráfico.

6. Representar la gráfica de una función que cumpla a la vez con tres condiciones:

i) $\boldsymbol{f(2)=2}$, **ii)** $\boldsymbol{\lim_{x\to 2^+} f(x) = 3}$ **y iii)** $\boldsymbol{\lim_{x\to 2^-} f(x) = 1}$ **.**

Bien respondida por siete maestros, dentro de quienes se puede reseñar al M2 cuya respuesta se muestra en la figura 29, por otro lado, los M1, M4, M6 y M12 la dejaron sin responder.

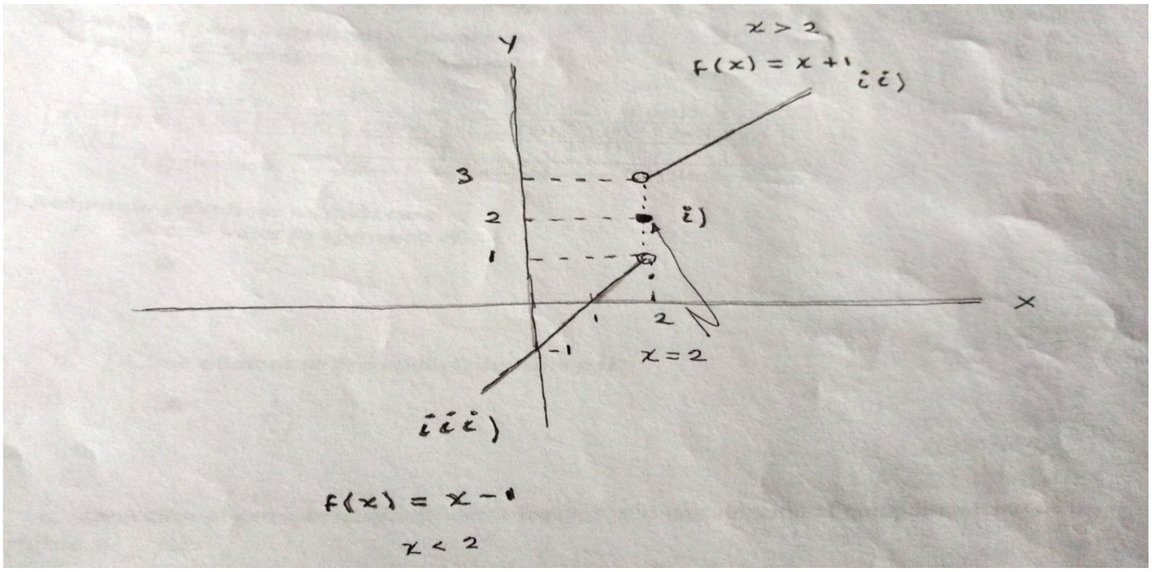


Figura 29. Respuesta de M2 a la actividad 6

Actividad 6. Representación algebraica		
Estructura Mental	**Maestros**	**Comentarios**
Desencapsular la información dada por la representación analítica del límite.	7	Siete maestros responden bien al suministrar información acerca del comportamiento de la gráfica de la función; cuatro la dejan sin responder.

Cuadro 12. Resumen de la actividad 6 del desarrollo.

4.4 Resumen del análisis del bloque de desarrollo.

Una vez analizada en conjunto las respuestas de los maestros y comparando al primer bloque de diagnóstico se tiene que de los seis maestros iniciales que presentaron estructura Acción solo tres se mantuvieron en la misma, los M6, M8, y M10, mientras que el resto M1, M2 y M11 se promueven a la siguiente de Proceso.

En cuanto al segundo grupo de maestros, los M3, M4 y M5 muestran evidencia de haber mejorado su estructura para promoverse al siguiente nivel de Objeto, los otros dos M7 y M9 permanecen en su estructura inicial de Proceso.

Cabe destacar que a pesar de que estos dos últimos permanecen en su estructura inicial, son más quienes lograron una promoción o reconstrucción de sus estructuras, evidenciado a través del análisis de sus desempeños del antes y del después de las dos actividades.

CONCLUSIONES

Las actividades didácticas diseñadas y aplicadas a once maestros de educación media superior han sido adecuadas en cuanto a la determinación de sus estructuras mentales, de igual forma han tenido éxito en cuanto a dar a conocer la Teoría APOE gracias al curso llevado a cabo, esto específicamente al realizar actividades sobre límites de una función en un punto en un primer bloque de actividades de diagnóstico y en un segundo de desarrollo.

En el segundo bloque de desarrollo llevado a cabo en la segunda y tercera sesión se evidencia una mejora en cuanto a las estructuras mentales presentadas por los maestros con respecto a su comportamiento inicial reflejado con la actividad de diagnóstico lo cual indica que la misma tuvo el efecto esperado.

No existen patrones de comparación en cuanto a resultados se refiere pues los estudios hechos a la fecha se han orientado hacia los estudiantes, pudiendo en consecuencia decirse que ha sido novedoso al incluir a los maestros como parte del triángulo didáctico en esta investigación.

Como referencia al respecto se puede mencionar el análisis hecho por Hardy (2009) en el sentido de corroborar la conceptualización y formalización de la noción de límite y su tratamiento en la enseñanza al indicar que hay diferencias entre las percepciones de los profesores generadas desde las praxis llevadas a cabo en las instituciones de enseñanza y las percepciones de los estudiantes generadas a partir de las estrategias creadas de manera espontánea para superar las evaluaciones sobre la materia.

En cuanto a lo planteado por Tomàs (2014) quien señala a la función como conocimiento previo requerido por los estudiantes para el buen desarrollo del concepto de límite se observó, en este caso, que los maestros no tuvieron problema con respecto a su concepción de la misma.

Uno de los hallazgos en la investigación de Cotrill et al. (1996) es que los estudiantes no terminan o logran conectar la relación del comportamiento en el dominio con la del rango, llegando incluso a observarse que lo toman como un proceso diferente e independiente situación ésta que no se presentó en los maestros, con seguridad, basados en su conocimiento de función y su relación conforme a lo señalado.

Se hace importante iniciar entre los profesores de matemáticas de enseñanza media una discusión sobre el infinito potencial (designando la posibilidad de ir más lejos, continuación indefinida,...) y el infinito actual el cual tiene que ver con la idea de verlo como un proceso terminado y diseñar nuevas actividades en aras de afianzar o mejorar la enseñanza de este importante tema de matemáticas.

Algunos de los profesores de este estudio no realizaron una lectura correcta de una gráfica. Es posible que los mismos profesores de matemáticas restrinjan su instrucción a una enseñanza de corte algebraico.

Dada la complejidad del concepto se hacen necesarios otros acercamientos de enseñanza en donde las tablas y las gráficas de funciones jueguen un mejor rol. Una opción podría ser la de introducir los procesos algebraicos utilizados hasta ahora, acompañados de un acercamiento que promueva tareas de conversión entre las representaciones numérica, gráfica y algebraica de un problema de cálculo de límites. La predicción del límite se puede obtener por medio del uso de una tabla o de la lectura correcta de una gráfica (este acercamiento parece ser desdeñado por la instrucción).

Una vez realizada la predicción se puede pasar al cálculo algebraico de la sustitución de valores con el antecedente de haber comprendido el principio dinámico del concepto de por medio.

REFERENCIAS

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Fuentes, S. R., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). *APOS theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education.* Springer Science & Business Media.

Blázquez, S., & del Rincón, T. O. (2002). Nueva definición del límite funcional. *UNO: Revista de Didáctica de las Matemáticas,* (30), 67-84.

Blázquez, S., & Ortega, T. (2001). Los sistemas de representación en la enseñanza del límite. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME*, *4*(3), 219-236.

Dubinsky, E., & Tall, D. (2002). Advanced mathematical thinking and the computer. In Advanced mathematical thinking (pp. 231-248). Springer, Dordrecht.

Hardy, N. (2009). Students' perceptions of institutional practices: the case of limits of functions in college level Calculus courses. *Educational Studies in Mathematics* 72, 341–358.

Medina, A. C. (2001). Concepciones históricas asociadas al concepto de límite e implicaciones didácticas. *TED: Tecné, Episteme y Didaxis*, (9).

Sierpinska, A. (1985). Obstacle épistémologiques relatifs à la notion de limite. *Recherches en didactique des mathématiques*, *6*(1), 5-67.

Sierpinska, A. (1998). Three epistemologies, three views of classroom communication: Constructivism, sociocultural approaches, interactionism. *Language and communication in the mathematics classroom*, 30-62.

Stenger, C., Weller, K., Arnon, I., Dubinsky, E., & Vidakovic, D. (2008). A search for a constructivist approach for understanding the uncountable set P (N). *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *11*(1), 93-125.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational studies in mathematics*, *12*(2), 151-169.

Tomàs, J. P. (2014). *Análisis de la comprensión en estudiantes de bachillerato del concepto de límite de una función en un punto* (Doctoral dissertation, Universitat d'Alacant-Universidad de Alicante).

Vergnaud, G. (1982). Cognitive and developmental psychology and research in mathematics education: some theoretical and methodological issues. *For the learning of Mathematics*, *3*(2), 31-41.

Villabona Millán, D. P., & Roa Fuentes, S. (2016). Procesos iterativos infinitos y objetos trascendentes: un modelo de construcción del infinito matemático desde la teoría APOE. *Educación matemática*, *28*(2), 119-150.

ANEXOS

ANEXO 1

Tabla comparativa entre la descomposición genética planteada por Cotrill y la de Swinyard.

Paso	Descomposición genética Cottrill et all.,1996	Paso	Descomposición genética: Swinyard, 2012
1	La acción de evaluar f en un solo punto x que se considera cercano, o incluso igual a a.	1	
2	La acción de evaluar la función f en unos pocos puntos, cada punto sucesivo más cercano a a que el anterior.	2	
3	Construcción de un esquema coordinado de la siguiente manera: (a) Interiorización de la acción del paso 2 para la construcción de un proceso en el dominio en el que x se aproxima a a. (b) Construcción de un proceso en el rango en el que y se aproxima a L. (c) Coordinación de (a), (b) a través de f. Es decir, la función f se aplica al proceso de x aproximándose a a para obtener el proceso de $f(x)$ aproximándose a L.	3	
4	Realizar acciones sobre el concepto de límite hablando, por ejemplo, sobre límites de combinaciones de funciones. De esta manera el esquema desarrollado en el paso 3 es encapsulado para convertirse en un objeto.	4	Construir un proceso mental en el cual uno prueba si un candidato es un límite: a) Elegir una medida de proximidad al valor límite L a lo largo de Y; b) Determinar si hay un intervalo alrededor del punto en el cual uno está tomando el límite (es decir a) para el cual el valor de la función , aparte del que está en ese punto, está lo suficientemente cerca de L; c) Repitiendo esto para cada vez más pequeñas medidas de cercanía.
5	Reconstruir el proceso de 3(c) en términos de intervalos y desigualdades. Esto se realiza mediante la introducción de	5	Asociar la existencia de un límite con la capacidad de continuar (teóricamente) este proceso para siempre, sin dejar de producir el intervalo deseado sobre a, o de manera equivalente con la

	estimaciones numéricas de la cercanía de las aproximaciones, en símbolos, $0<\left\|x-a\right\|<\delta$ y $\left\|f\left(x\right)-L<\varepsilon\right\|$		observación de que no hay un punto en el que será imposible encontrar dicho intervalo.
6	Aplicar el esquema de los cuantificadores para conectar el proceso reconstruido del paso anterior para obtener la definición formal de límite.	6	Encapsulando este proceso a través de la noción de cercanía arbitraria. Esto implica darse cuenta de que se puede establecer que el proceso en el paso 4 funcionará para todas las medidas de cercanía demostrando que funcionará para una medida arbitraria de cercanía.
7	Una concepción completa $\varepsilon-\delta$ aplicada a situaciones específicas.		

ANEXO 2

CURSO ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LOS CONCEPTOS DE LÍMITE Y DERIVADA DE UNA FUNCIÓN

Actividades de diagnóstico sobre límites de una función en un punto.

1. i) Definir el concepto de límite de una función en un punto.

ii) ¿Qué se entiende al señalar que el $\underset{x \to a}{Lím} f(x)$ no existe?

2. Dada la siguiente tabla para $f(x) = -1$, analizarla, rellenarla y responder.

x	3.9	3.99	3.999	4	4.0001	4.001	4.01
$f(x)$							

i. ¿Cómo es el comportamiento de la función $f(x)$ con relación al de la variable, al crecer o decrecer "x"?

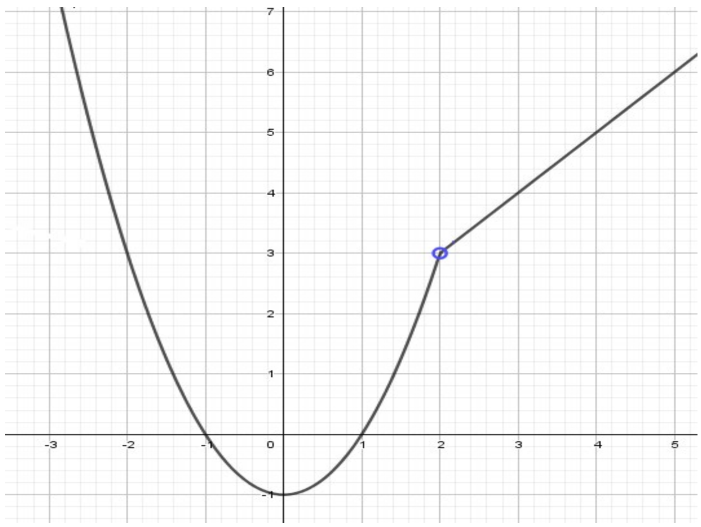
3. Dada la función f(x) $= \begin{cases} 2x+1 & x < 0 \\ 2 & x \geq 0 \end{cases}$ completar la siguiente tabla:

x	-0.1	-0.01	-0.001	-0.0001	0	0.0001	0.001	0.01	0.1
$f(x)$									

i. Calcular el $\underset{x \to 0}{Lím} f(x)$

ii. ¿Es igual el comportamiento de la imagen a medida que la variable "x" se aproxima a cero por la izquierda que por la derecha? Explique.

4. Tomar como base la gráfica de una función *f* dada a continuación para responder:



i. Cuando x tome sucesivamente los valores 0.5, 1, 1.3, 1.5, 1.7, 1.9,… ¿a qué número se aproximan los valores de la función $f(x)$?
ii. Cuando x tome, sucesivamente, los valores 3.5, 3, 2.7, 2.5, 2.3, 2.1,… ¿a qué número se aproximan los valores de la función $f(x)$?
iii. ¿Cómo es el comportamiento de la imagen con relación a la variación de *x*?

5. Calcular el $\underset{x\to\infty}{Lím}\frac{4+7x-5x^2}{-1-10x^2}$ explicando el procedimiento seguido para su respuesta.

6. Dada la función $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x<0 \\ -2x-3 & x \geq 0 \end{cases}$, calcular los valores de la misma cuando x toma los valores señalados en la tabla. Complete el resto de valores de la tabla calculando los valores absolutos indicados.

x	$f(x)$	$\lvert x-0 \rvert$	$\lvert f(x)+3 \rvert$
0.1			
0.01			
0.001			
0.0001			
…		…	
-0.0001			
-0.001			
-0.01			
-0.1			

i. ¿Qué tan próximos a cero deben de estar los valores de x, para que las diferencias de $\lvert f(x)+3 \rvert$, en valor absoluto, sean menores que 0.002?

ii. Con la información obtenida hasta ahora, ¿podrías indicar cuál es el límite de la función $f(x)$ en el punto $x=0$?

ANEXO 3 (Segundo bloque)

Actividades sobre límites planteadas para su respectivo análisis durante la sesión 3.

ACTIVIDAD 1 (modo algebraico - numérico)

Si $f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$ completar la tabla siguiente:

x tiende a… → ← x tiende a…

x	1.9	1.99	1.999	1.9999		2.0001	2.001	2.01	2.1
$f(x)$									

f(x) tiende a… → ← f(x) tiende a…

Responder y explicar en cada caso:

a. ¿A cuál valor de *a* se aproxima *x*?

b. ¿A qué número se aproxima la función $f(x)$?

c. Describe el comportamiento de la función $f(x)$ con relación al comportamiento de la variable *x*.

d. Es suficiente la información para determinar ¿cuál es límite de la función en *x=2*?

ACTIVIDAD 2 (modo numérico)

A partir de la tabla:

x	3.99	3.999	3.9999	3.9999	…	4.00001	4.0001	4.001	4.01
f(x)	15.530	15.5254	15.5015	15.50001	…	14.00003	14.0003	14.003	14.03

Responder con claridad en cada caso:

a. ¿A cuál valor de *a* se aproxima *x*?

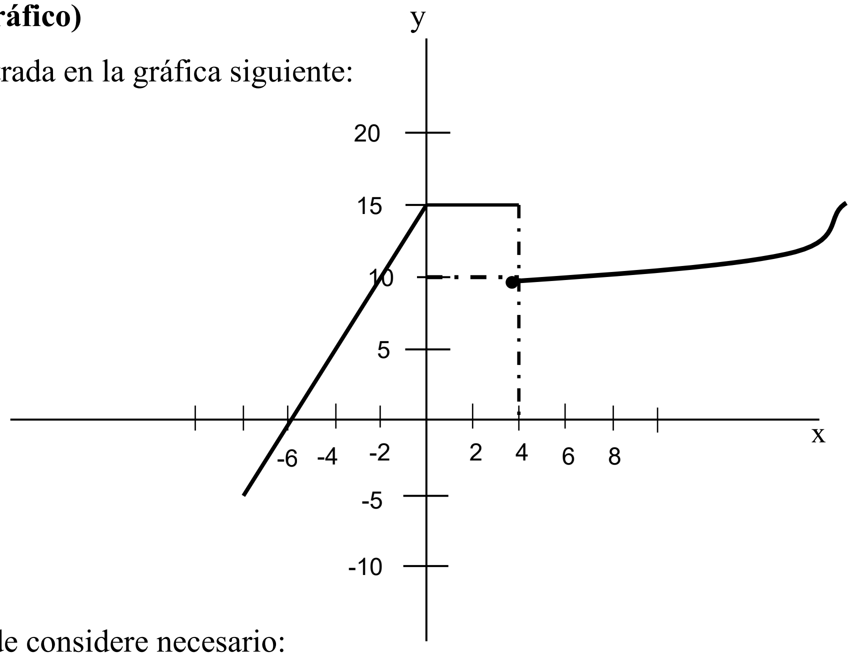
b. ¿A qué número se aproxima la función $f(x)$?

c. Describe el comportamiento de la función $f(x)$, con relación al comportamiento de la variable *x*.

d. De ser posible, decir ¿ Cuál es el $\underset{x \to 4}{Lím} f(x)$?

ACTIVIDAD 3 (Modo gráfico)

Dada la función $f(x)$ mostrada en la gráfica siguiente:



Responder y explicar donde considere necesario:

a. Elige un valor para la x y calcula el valor de la función $f(x)$ en ese punto.

b. ¿A cuál número se aproxima la función $f(x)$ cuando x toma sucesivamente los valores 3.9, 3.99, 3.999, …?

c. Describir el comportamiento de la función $f(x)$ en relación con el comportamiento de la variable *x.*

d. De ser posible mencione ¿cuál es el límite de la función en *x=4*?

ACTIVIDAD 4 (Modo algebraico-numérico)

Siendo $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & x < 0 \\ -2x - 3 & x \geq 0 \end{cases}$

a. Completa la tabla:

x	-0.1	-0.01	0.001	-0.0001…	0.0001	0.001	0.01	0.1
$f(x)$								

Responder y explicar donde considere necesario:

b. ¿A cuál número *a* se aproxima *x*?

c. ¿A cuál número se aproxima la función $f(x)$ cuando *x* se aproxima al valor de *a* calculado en el ítem a?

d. Describe el comportamiento de la función $f(x)$ con relación al comportamiento de la variable *x*.

e. Decir si es posible, ¿cuál es el límite de la función en *x=0*?

ACTIVIDAD 5 (modo numérico)

Alba una estudiante de 1ro de bachillerato con la ayuda de una hoja de cálculo, ha ido sustituyendo valores en una función y ha obtenido las dos primeras columnas de la tabla. Luego pretende construir dos columnas más de diferencias en valor absoluto:

x	$f(x)$	$\|2.5-x\|$	$\|3.5-f(x)\|$
2.45	3.35		
2.49	3.47		
2.499	3.497		
2.4999	3.4997		
2.49999	3.49997		
2.499999	3.499997		
…	…		
2.500001	2.000002		
2.50001	2.00002		
2.5001	2.0002		
2.501	2.002		
2.51	2.020		
2.55	2.1		

a. ¿Cuán próximos han de estar los valores de x a *2.5* para que la diferencia de $|3.5-f(x)|$ en valor absoluto sea menor a *0.001*?

b. Con la información del ítem anterior ¿podrías indicar cuál es el límite de la función $f(x)$ en el punto donde $x=2.5$?

ACTIVIDAD 6 (Modo gráfico)

Si es posible, representa la gráfica de una función que cumpla con las siguientes tres condiciones a la vez:

a. $f(0) = 4$

b. $\underset{x\to 3^+}{Lím} f(x) = 1$

c. $\underset{x\to 3^-}{Lím} f(x) = 0$