# BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

## UNA SECUENCIA DIDÁCTICA PARA LA CONSTRUCCIÓN DE LA DEFINICIÓN FORMAL DEL LÍMITE DE UNA FUNCIÓN BASADA EN TEORÍA APOE

**TESIS**
PARA OBTENER EL TÍTULO DE
**MAESTRO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA**

PRESENTA
**LIC. JOSÉ DAVID MORANTE RODRÍGUEZ**

DIRECTOR DE TESIS
**DRA. LIDIA AURORA HERNÁNDEZ REBOLLAR**

PUEBLA, PUE. FEBRERO 2020

**BUAP**

**DRA. LIDIA AURORA HERNÁNDEZ REBOLLAR**
**SECRETARIA DE INVESTIGACIÓN Y**
**ESTUDIOS DE POSTGRADO, FCFM-BUAP**
**P R E S E N T E:**

Por este medio le informo que el C:

**LIC. JOSÉ DAVID MORANTE RODRÍGUEZ**

Estudiante de la Maestría en Educación Matemática, ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 04 de diciembre de 2019, con la tesis titulada:

***"UNA SECUENCIA DIDÁCTICA PARA LA CONSTRUCCIÓN DE LA DEFINICIÓN FORMAL DEL LÍMITE DE UNA FUNCIÓN BASADA EN TEORÍA APOE"***

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

A T E N T A M E N T E.
H. Puebla de Z. a 14 de febrero de 2020.

***DR. JOSIP SLISKO IGNJATOV***
**COORDINADOR DE LA MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA.**

Ccp. Archivo.
DR JSI / l'agm*

Facultad
de Ciencias
Físico Matemáticas

Av. San Claudio y 18 sur, edif. FM1
Ciudad Universitaria, Col. San
Manuel, Puebla, Pue. C.P. 72570
01 (222) 229 55 00 Ext. 7550 y 7552

Agradecimientos (institucionales)

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT-México) le agradezco la beca recibida durante los estudios de maestría que permitieron la realización de este trabajo.

A la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla y al Posgrado en Educación Matemática de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de esta casa de estudios por haberme permitido realizar los estudios de maestría, así como por sus múltiples apoyos para la asistencia a congresos durante mi formación académica.

Agradecimientos (personales)

A la Dra. Lidia Aurora Hernández Rebollar por su valiosa instrucción y dedicación en la conducción de este trabajo.

A los miembros del jurado por su colaboración y aportes en la realización de esta investigación.

A familiares y amigos que con su apoyo permiten que el trayecto sea menos arduo.

Al grupo de estudiantes que me permitieron desarrollar este proyecto en el aula.

# Índice

# Índice de Figuras

# Índice de Tablas

## Resumen

Las formas usuales para introducir el concepto de límite de una función recurren, generalmente, a metáforas relacionadas con el movimiento. Si bien esto permite ir construyendo la concepción dinámica del concepto, a menudo se descuida la formalización de estas ideas y, en consecuencia, los razonamientos de los estudiantes son insuficientes para lograr la comprensión de la concepción métrica del concepto, esta última referida a la definición $\varepsilon$-$\delta$. El presente trabajo informa los resultados de un diseño instruccional basado en teoría APOE mediante el cual se buscó que estudiantes de ingeniería construyeran el concepto de límite de una función, que les permitiera la comprensión de la definición $\varepsilon$-$\delta$. Se exhiben las estructuras y mecanismos mentales desarrolladas por un grupo de alumnos que permitieron obtener evidencia empírica de la descomposición genética de límite usada como referencia y su validación en un entorno habitual de clase. Los resultados muestran que es viable transitar hacia la concepción métrica de límite para lograr la construcción de la estructura objeto de este concepto.

Palabras clave: límite, comprensión, teoría APOE, cálculo, nivel superior.

## Abstract

The usual ways to introduce the concept of the limit of a function generally resort to metaphors related to movement. While this allows start building the concept of limit in its dynamic conception, often formalization of these ideas is neglected and consequently, the reasoning of the students are insufficient to achieve understanding of the metric conception of the definition ε-δ. The present work informs the results of an instructional design based on APOS theory through which it was sought that engineering students build the concept of the limit of a function, that would allow them to understand the definition ε-δ. The mental structures and mechanisms developed by a group of students that allow us to obtain empirical evidence of the genetic decomposition of the limit used as a reference and its validation in a normal classroom environment are exhibited. The results show that it is feasible to move towards the metric conception of limit to achieve the construction of the structure object of this concept.

**Keywords:** limit, understanding, APOS theory, calculus, higher level.

## Introducción

El estudio del límite de una función constituye uno de los conceptos alrededor del cual se han priorizado las investigaciones sobre el pensamiento matemático avanzado (Tall y Vinner, 1981) y sobre el cual se ha observado la recurrencia de conflictos cognitivos en los estudiantes sobre su comprensión (Tall y Vinner, 1981; Cottrill, et al., 1996). Si bien existe una amplia documentación en torno a las caracterizaciones de esas dificultades (Tall y Vinner,1981; Cornu, 1983, 1991; Sierpinska, 1987; Monaghan, 1991; Williams, 1991; Kidron, 2008) poco se ha indagado sobre la perspectiva del qué hacer para que los estudiantes comprendan el concepto de límite.

Uno de los marcos teóricos sobre los que se puede adoptar esta última perspectiva lo ofrece la teoría APOE, la cual, a través de un modelo denominado *Descomposición Genética* hipotetiza las estructuras mentales que deberían construirse para lograr la comprensión de un concepto matemático.

Nuestro trabajo adopta esta vertiente investigativa para explorar si la enseñanza del concepto de límite de una función, en términos de la definición ε-δ, puede hacerse comprensible a estudiantes de ingeniería; para lograrlo partimos de la *Descomposición Genética* del concepto de límite reportada por Swinyard y Larsen (2012). Estos autores proponen un refinamiento de la *Descomposición Genética* de límite propuesta originalmente por Cottrill et al (1996). Sin embargo, en su estudio manifiestan la necesidad de elaborar diseños instruccionales, basados en su *Descomposición Genética*, que permitan validar el refinamiento en un entorno natural de clase.

En este contexto, nuestro trabajo pretende reconocer elementos del proceso cognitivo de los alumnos que permitan obtener evidencia empírica de los aspectos considerados en la *Descomposición Genética* de límite reportada por Swinyard y Larsen (2012). Para lograrlo, se asumen dos tareas fundamentales: el diseño de actividades para conformar una instrucción didáctica basada en la *Descomposición Genética* de estos autores y la validación de la misma en un entorno habitual de clase a través de la identificación de las estructuras mentales logradas por los estudiantes tras su implementación en el aula.

Lo anterior, permite contribuir a ampliar el vacío de información en torno al grado de correspondencia de la *Descomposición Genética* de Swinyard y Larsen (2012) en la tarea de lograr que los estudiantes, de nivel universitario, logren construir la definición formal de límite de una función.

La forma en que se organiza este trabajo es la siguiente:

Capítulo 1. *Planteamiento del problema*. Este capítulo profundiza en la problemática a explorar a partir de la contextualización y análisis de las investigaciones alrededor del concepto de límite que permitieron definir los objetivos y preguntas de investigación.

Capítulo 2. *Marco teórico y diseño de la investigación*. Se presentan como marcos teóricos la teoría APOE y la teoría de Representaciones Semióticas, se explican los constructos que permiten caracterizar el desarrollo del pensamiento de los estudiantes, el ciclo de investigación propuesto por la teoría APOE y los aspectos por los cuales serán usados algunos registros de representación en el diseño de la instrucción. Finalmente, se expone el diseño metodológico de nuestra investigación.

Capítulo 3. *Análisis teórico del diseño instruccional*. Este capítulo se conduce por las componentes del ciclo de investigación de la teoría APOE. Por lo que, en primer lugar, se presenta la *Descomposición Genética* del concepto de límite que guía y fundamenta la construcción de las actividades que componen la instrucción. Posteriormente, se analizan, en términos de la teoría, las estructuras y mecanismos mentales que se pretenden construir por medio de las actividades diseñadas.

Capítulo 4. *Análisis de los datos*. Se discuten los resultados de la implementación del diseño instruccional a través de las respuestas de los estudiantes a los instrumentos aplicados. Se describen las construcciones mentales evidenciadas por los estudiantes y su categorización de acuerdo con la teoría APOE.

*Conclusiones*. Esta sección resume los resultados empíricos que permiten validar la Descomposición Genética del concepto de límite propuesta por Swinyard y Larsen (2012). Además, se ofrecen algunas recomendaciones de tipo didáctico que permitan mejorar el diseño instruccional propuesto. Finalmente, se presentan algunas preguntas de investigación que podrían explorar nuevos trabajos en relación con el concepto de límite.

# Capítulo 1

## Planteamiento del problema

Este capítulo presenta de forma general las investigaciones acerca de la enseñanza-aprendizaje del concepto de límite de una función desde diversos enfoques. Una vez presentados, se identifica un problema primordial relacionado con la forma de abordar el concepto y la necesidad de concebir la definición de límite desde la definición $\varepsilon$-$\delta$, como aspecto ineludible para el entendimiento real del concepto. Para lo cual se plantean los objetivos y preguntas de investigación que encauzarán este trabajo.

### 1.1 Revisión de literatura, una mirada general

Las investigaciones sobre los fenómenos en torno a la enseñanza-aprendizaje del concepto de límite de una función ponen de manifiesto su relevancia al mostrar las abundantes dificultades en su aprendizaje y los diversos enfoques desde donde se han abordado. Esto no resulta sorpresivo si se considera que el desarrollo y naturaleza propia del concepto acarrea obstáculos epistemológicos y conflictos con las distintas representaciones de este. Los rasgos mencionados anteriormente constituyen elementos que ubican al concepto de límite dentro del llamado *Advanced Mathematical Thinking* (AMT), siendo esta una de las líneas investigativas de mayor desarrollo sobre el concepto de límite.

En relación con el *Advanced Mathematical Thinking* y los intentos por comprender las dificultades en el aprendizaje del concepto de límite, Tall y Vinner (1981) centran su interés en los procesos cognitivos de los individuos y desarrollan la teoría de imágenes conceptuales. Para estos autores una imagen conceptual se compone de imágenes mentales, procesos y procedimientos que un individuo asocia a un concepto específico. Ellos afirman que cada individuo genera su propia imagen conceptual del concepto formal que le es dado y que esta puede ser coherente o no, por lo que es probable que contenga elementos que entren en conflicto con la definición formal del concepto cuando esta les es presentada. Esta idea permitió a estos autores hacer notar que los obstáculos relacionados con la comprensión errónea del concepto de límite pueden, en parte, generarse desde la imagen conceptual que el individuo tenga del concepto. Por ejemplo, la imagen que un individuo tenga de límite como un proceso dinámico de aproximación sucesiva que confluye a un valor sin alcanzarlo entra en conflicto con la definición formal del concepto y de hecho persiste por encima de la definición formal (Tall y Vinner, 1981).

Los aspectos epistemológicos del concepto son abordados en primera instancia por Cornu (1983) y Sierpinska (1987). Cornu (1983) enuncia una lista de obstáculos epistemológicos del concepto de límite basados en el desarrollo histórico del concepto y las concepciones de los alumnos destacando la importancia de las ideas previas de los alumnos sobre este concepto. Sierpinska (1987) propone una lista de obstáculos alrededor del concepto de límite desde una perspectiva del desarrollo histórico del concepto y de estudios de casos con alumnos. En general, distingue los siguientes obstáculos: horror al infinito, obstáculos ligados a la noción de función, geométricos, lógicos y derivados del uso de símbolos.

Otros trabajos han explorado la influencia del lenguaje en el concepto de límite de una función. Monaghan (1991) indaga sobre el significado que los alumnos dan a las expresiones "tender a", "converger a", "aproximarse a", "límite". Confirmando que los alumnos usan esos términos de forma común en la vida cotidiana y que estos les supondrán a los estudiantes obstáculos más adelante.

La investigación de Williams (1991) desarrolla la noción de modelos intuitivos de límite a través de 6 categorías: *Dinámico-teórico, Dinámico-práctico, Cota, Formal, No alcanzable, Aproximación*, estas categorías definen las comprensiones de los estudiantes alrededor del concepto de límite.

Es importante advertir que, hasta este punto, las investigaciones centran su atención en la caracterización de las dificultades con relación a la enseñanza aprendizaje del concepto de límite. Superada esta primera fase comienzan a reportarse algunos intentos partiendo de la problemática del qué hacer para mejorar su enseñanza.

Uno de estos acercamientos, al concepto de límite, se propone desde la teoría APOE (Dubinsky, 1991), la cual, basándose en los constructos de *Acción, Proceso, Objeto y Esquema* caracteriza las etapas cognitivas por las cuales un individuo debería transitar para lograr la construcción de un concepto matemático. Bajo estas ideas y una revisión minuciosa sobre el concepto de límite, Cottrill et al. (1996) desarrollan una *Descomposición Genética* de este concepto a través de la cual se describen las estructuras y mecanismos mentales, propios de la teoría, por los que un individuo necesitaría transitar para construir el concepto de límite.

Un enfoque más lo constituyen las investigaciones de Gatica y Ortega (2002), Bokhari y Yushau (2006), Blázquez, Gatica y Ortega (2009) las cuales proponen definiciones equivalentes a la definición formal de límite de modo que su introducción en el aula pueda facilitar su entendimiento. No obstante, aunque se han observado progresos por parte de los estudiantes la transición de estas nociones hacia la definición estandarizada $\varepsilon$-$\delta$, deja de priorizarse.

Por ejemplo, Blázquez, Gatica y Ortega (2009) construyen definiciones alternativas de límite puntualizando la definición a través del rigor lingüístico, pero reconociendo que la transición a la definición estandarizada $\varepsilon$-$\delta$ debe hacerse en etapas posteriores, sugiriendo que su propuesta puede ser utilizada como un preámbulo a dicha transición.

Kidron (2008) utiliza diferentes marcos teóricos como el modelo de abstracción en contexto y la teoría de la instrumentación para abordar la conceptualización de la noción de límite. Los resultados que presenta concluyen que los estudiantes ven al proceso límite como un infinito potencial. No obstante, su trabajo ofrece una perspectiva más en torno a la complementariedad de distintos marcos teóricos para abordar una misma problemática.

Por su parte, Swinyard (2011) reporta la evolución sobre la forma en que los estudiantes reconstruyen la definición formal, definición $\varepsilon$-$\delta$, de límite de forma asistida a través de distintas fases de entrevistas clínicas. Posteriormente, Swinyard y Larsen (2012) tomando como modelo de desarrollo la *Descomposición Genética* propuesta por Cottrill et al. (1996) y la idea de la reconstrucción del concepto por parte de los estudiantes proponen un refinamiento de la *Descomposición Genética* de Cottrill et al (1996).

En esta serie de aportaciones, enfoques y diseños complementarios autores como: Blázquez (1999), Blázquez y Ortega (2001), y Pons (2014), usando como marco de referencia la teoría de Representaciones Semióticas identifican el papel importante que guardan las distintas representaciones del concepto en su comprensión.

## 1.2 Planteamiento del problema

Con fundamento en lo expuesto hasta ahora se evidencia la dificultad, por parte de los estudiantes, de tratar de construir el concepto de límite abordado tanto desde la perspectiva formal $\varepsilon$-$\delta$, como desde las nociones intuitivas de aproximación, a partir de la cual surge la pregunta ¿por qué es necesario promover la comprensión de límite a través de la definición $\varepsilon$-$\delta$? Las investigaciones muestran que una de las formas más comunes en que suele introducirse el concepto de límite se basa en la idea de aproximación y movimiento. Si bien esto permite ir construyendo la concepción dinámica del concepto, a menudo se descuida la formalización de estas ideas y, en consecuencia, los razonamientos de los estudiantes suelen ser insuficientes en situaciones problemáticas que requieren de una comprensión sólida del concepto. Por lo anterior se hace necesario explorar maneras de introducir la construcción del concepto de límite desde la perspectiva de la definición $\varepsilon$-$\delta$, de modo que los estudiantes puedan establecer razonamientos adecuados que les permitan poner en práctica el significado del concepto de límite ante problemas de una amplia variedad.

La óptica desde la cual se ha decidido abordar esta cuestión es el de la teoría APOE, ya que, como se ha mencionado, proporciona un modelo cognitivo que contempla las etapas por las que la mayoría de los estudiantes deben poder transitar para lograr la construcción de un concepto matemático.

Por lo anterior, se busca indagar si mediante actividades diseñadas con base en la *Descomposición Genética*, propuesta por Swinyard y Larsen (2012), para la construcción del concepto de límite de una función se puede hacer comprensible la definición $\varepsilon$-$\delta$ de este concepto a estudiantes de ingeniería. No obstante, dado que la carga simbólica del concepto podría obstaculizar su comprensión, la línea a explorar consiste en promover la construcción del concepto de límite a través de la idea de aproximación y validación como preámbulo al sentido simbólico de la definición.

Con esta propuesta pretendemos dar respuesta a la siguiente pregunta de investigación:

¿En qué medida la implementación de actividades basadas en la descomposición genética del concepto de límite Swinyard y Larsen (2012) contribuye a lograr la construcción del concepto de límite de una función en estudiantes de ingeniería?

## 1.4 Objetivos de la investigación

Para dar respuesta a la pregunta de investigación planteada en la sección anterior, se plantean los siguientes objetivos:

**Objetivo general**

Explorar las construcciones mentales que un grupo de estudiantes de ingeniería desarrolla cuando se enfrenta al concepto de límite por medio de actividades diseñadas con la teoría APOE.

**Objetivos específicos**

- Diseñar actividades fundamentadas en la descomposición genética del concepto de límite propuesta por Swinyard y Larsen (2012) que promuevan la transición de la concepción dinámica a la concepción métrica del concepto de límite.
- Identificar las estructuras mentales de los estudiantes que pudieran aportar elementos para la validación de la descomposición genética de Swinyard y Larsen (2012).

## 1.3 Justificación

En la sección anterior se presentaron de forma genérica las principales investigaciones sobre el concepto de límite. En ellas queda de manifiesto la amplia gama de enfoques desde donde se ha abordado la problemática de la enseñanza-aprendizaje del concepto en cuestión.

En particular, Swinyard y Lockwood (2007), clasifican las investigaciones del concepto de límite en dos vertientes, la primera conformada por aquellas investigaciones que abordan el límite de manera informal, entendiendo por ello, aquellas que no precisan indagar acerca del razonamiento estudiantil al confrontarlos con la definición $\varepsilon$-$\delta$ del concepto. La segunda vertiente la constituyen aquellas investigaciones que centran su interés en cómo los estudiantes razonan al enfrentarse a la definición formal del concepto (definición en términos de $\varepsilon$-$\delta$).

La primera clase de estudios generalmente reporta que los acercamientos informales con frecuencia desarrollan conceptos erróneos de límite (Tall y Vinner,1981; Cornu, 1983, 1991; Sierpinska, 1987; Monaghan, 1991; Williams, 1991; Kidron, 2008) por ejemplo, al conceptualizar que el límite es “inalcanzable”. La segunda clase de estudios reporta que los tratamientos desde la definición formal del concepto también han resultado improductivos (Oehrtman, 2003), debido a que la carga simbólica del concepto requiere de un nivel cognitivo mayor para su entendimiento por parte de los estudiantes. Más aún con frecuencia este acercamiento es relegado a estudiantes de ciencias exactas bajo el argumento de que un estudiante con otros intereses no necesitará de tal desarrollo especializado. En cambio, basados en la revisión bibliográfica, pensamos que adoptar esta posición implica aceptar conscientemente que la mayoría de los estudiantes únicamente logrará construir una concepción errónea del concepto.

Por otra parte, pocos son los autores (Cottrill et al., 1996, Fernández, 2004) que, partiendo de esta problemática, se han centrado en averiguar cómo los estudiantes podrían llegar a comprender este concepto. En este sentido, revisamos el trabajo realizado por Cottrill et al. (1996) quien, usando como marco teórico la teoría APOE, propone la *Descomposición Genética* del concepto de límite. Este modelo describe los mecanismos y estructuras mentales (en términos de los constructos de la teoría APOE) por los que un individuo necesitaría transitar para lograr la construcción del concepto de límite. Sin embargo, Cottrill reporta que ninguno de los estudiantes logró adquirir la concepción *Esquema* del concepto de límite, entendido como la colección de *Acciones*, *Procesos Objetos* y otros *Esquemas* que permiten a un individuo hacer frente a problemáticas relacionadas con el concepto de límite.

En síntesis, el trabajo de Cottrill et al. (1996) proporciona un acercamiento a la problemática de la enseñanza desde la perspectiva de lo que los estudiantes necesitarían poder realizar para lograr la comprensión del concepto. Aunque su desarrollo se basa en la definición formal del concepto, los resultados reportados en su investigación sólo proporcionan evidencia en torno al proceso informal de construcción de la noción de límite (Swinyard, 2007), ya que, la parte de la descomposición genética que aborda la construcción formal no llegó a ser construida por los estudiantes. Ante esta limitada información, Swinyard y Larsen (2012) se propusieron, partiendo del trabajo Cottrill et al. (1996), obtener evidencia empírica de los últimos cuatro pasos de su *Descomposición Genética* de límite. Sus resultados ofrecen pruebas de cómo los estudiantes pueden reinventar la definición formal de límite. Su estudio permitió a los autores proponer un refinamiento de la *Descomposición Genética* propuesta por Cottrill et al. (1996).

En este trabajo partimos de la *Descomposición Genética* del concepto de límite reportada por Swinyard y Larsen (2012), quienes identifican dos obstáculos medulares en el razonamiento de los estudiantes. Por una parte, tienden a centrar su atención en los valores de entrada de la función al determinar el límite, perspectiva que se contrapone con el proceso descrito por la definición formal. Por otro lado, los estudiantes luchan constantemente para caracterizar lo que significa estar infinitamente cerca de un valor. En este sentido, la *Descomposición Genética* que proponen estos autores considera que la búsqueda de candidatos a límite y la verificación de si esos candidatos son límites, constituyen procesos mentales de construcción independientes. Sobre estas ideas se cimienta el refinamiento de la *Descomposición Genética*.

Otro aspecto importante por tomar en cuenta es el papel de los distintos modos de representación del concepto de límite. Se entiende, según Duval (2006), que la comprensión matemática de un concepto depende de la coordinación de distintas representaciones de este.

En el contexto de las investigaciones sobre la comprensión del concepto de límite Blázquez (1999) señala que el uso excesivo de cualquiera de las representaciones de límite generará deficiencias interpretativas por parte de los estudiantes. Por lo que precisa que la utilización de distintos registros (algebraico, numérico, tabular y verbal) mejora la comprensión del concepto.

Atendiendo a esta idea, Blázquez y Ortega (2001), usando como marco de referencia la teoría de Representaciones Semióticas de Duval, especifican el tipo de asociaciones presentes en las distintas representaciones de límite. Por ejemplo: en el sistema verbal, el concepto de límite de una función en un punto se asocia con la aproximación óptima de los valores de la función en un entorno del punto de interés del dominio. En cambio, en el sistema numérico, se relaciona con un proceso de tendencia asociado a una tabla de valores y sus imágenes. Por otra parte, en el sistema gráfico el concepto de límite se asocia con un punto sobre el eje Y en un plano cartesiano tal que, a todo intervalo que lo contiene le asocia un intervalo en torno al punto de interés del dominio que se esté examinando. Finalmente, en el sistema algebraico, se presenta la definición en términos $\varepsilon - \delta$ asociada al control de las aproximaciones.

En suma, los autores proponen que cualquier instrucción debiera comenzar con la representación numérica de límite, por ser esta la que presenta las mayores características asociadas al concepto, para posteriormente introducir la representación gráfica que complemente los aspectos estáticos de la definición y prepare el camino hacia la representación algebraica del concepto. Adicionalmente, señalan que siendo el concepto de función parte medular del concepto de límite este debe enseñarse en las distintas representaciones del concepto de función.

Con fundamento en lo anteriormente descrito, este trabajo usa la teoría APOE para modelar el desarrollo del concepto de límite de una función y la teoría de Representaciones Semióticas como herramienta conceptual para el diseño de las actividades que constituyen la instrucción didáctica. Lo anterior deriva en que ambos marcos teóricos complementan y nutren el diseño instruccional para la comprensión del concepto de límite. En este contexto: "la descripción de tratamientos y conversiones como acciones o procesos a realizar en distintas representaciones agregan especificidad y un nuevo ángulo de descripción para el análisis utilizando la teoría APOE" (Trigueros y Matinez-Planell, 2010, p. 6).

Finalmente, es pertinente mencionar que la *Descomposición Genética* de Swinyard y Larsen (2012) tuvo su origen en la investigación de dos parejas de alumnos en el contexto de la reinvención (confrontación del entendimiento) del concepto de límite. Dichos autores plantean la necesidad de obtener evidencia empírica de su *Descomposición Genética* más allá del contexto de la reinvención, por ejemplo, en entornos escolares diseñando experimentos de enseñanza a través de la propuesta de materiales de instrucción basados en sus resultados.

Por lo anterior, como se mencionó en los objetivos, este trabajo aborda la tarea de reportar el impacto que tiene la *Descomposición Genética* de Swinyard y Larsen (2012) en un diseño instruccional destinado a un entorno escolar cotidiano. Cabe mencionar el hecho de que en la revisión bibliográfica realizada no identificamos trabajos que se planteen dicho propósito, por lo que esta investigación contribuye a aportar evidencia empírica en relación con las tareas pendientes que Swinyard y Larsen (2012) ponen de manifiesto en su estudio.

# Capítulo 2

# Marco Teórico y diseño de la investigación

En este capítulo presentamos el marco teórico sobre el cual se desarrolla nuestra investigación, así como el diseño metodológico de la misma. Para ello, es preciso tener presente que lo que se busca es promover la construcción formal del concepto de límite de una función. Al examinar las investigaciones sobre el concepto de límite y sus complejidades a lo largo su enseñanza-aprendizaje encontramos, en la Teoría APOE, un modelo cognitivo apropiado que nos permitirá guiar nuestra investigación. Por lo que se prosigue con una descripción de los aspectos que constituyen esta teoría.

## 2.1 Teoría APOE

APOE es una teoría constructivista que intenta describir lo que sucede en la mente de un individuo cuando este pretende aprender un concepto matemático. Su nombre se toma del acrónimo de las estructuras principales que la teoría define para caracterizar el pensamiento de los individuos al estudiar un concepto las cuales son: *Acción, Proceso, Objeto* y *Esquema*.

Dubinsky es considerado el progenitor de la teoría APOE y gran parte de las investigaciones alrededor de la comprensión de conceptos matemáticos específicos usando la teoría APOE fueron desarrolladas por el grupo RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Education Community) que él mismo lideró.

Partiendo de sus investigaciones sobre la estructura cognitiva de los individuos, Piaget nombró *abstracción reflexiva* al medio en el que se desarrolla el pensamiento y distinguió que este mecanismo deriva todas las estructuras lógico-matemáticas. Dentro de la abstracción reflexiva Piaget distingue dos etapas: la primera asociada al pensamiento contemplativo y la segunda ligada a la reconstrucción y reorganización del contenido que se adquiere, unidas por medio de ciertos mecanismos entre ellas. Esta serie de ideas llevó a Dubinsky, en la década de los 80's, a sospechar que la abstracción reflexiva podría usarse para describir el proceso mediante el cual se adquieren los conceptos matemáticos en la educación superior.

En este contexto, Dubinsky distingue cuatro estructuras mentales por las cuales un individuo transita cuando aprende un concepto: *Acción, Proceso, Objeto* y *Esquema.* Estas permiten describir las etapas en las cuales los individuos se encuentran cuando están aprendiendo un concepto matemático. La forma en que se construyen estas estructuras mentales se logra mediante ciertos mecanismos de abstracción reflexiva denominados: *Interiorización, Coordinación, Reversión, Encapsulación y Desencapsulación*.

La relación entre estructuras y mecanismos mentales es concebida por Dubinsky (1991) como un sistema circular de retroalimentación. Sin embargo, cabe aclarar que la construcción del conocimiento no es lineal y el hecho de que parezca que así lo es, se deriva de la descripción jerárquica de la misma. De modo que a continuación se describe cada uno de los mecanismos y estructuras mentales ya mencionados.

*Interiorización.* Se caracteriza por la capacidad de imaginar y reconstruir una actividad específica del mundo físico en una actividad interna donde se deja de depender de la representación externa (física). Este mecanismo es el que permite transformar una *Acción* en un *Proceso*.

*Coordinación*. Este mecanismo se usa para describir el acoplamiento de dos o más *Procesos* combinando *Acciones* sobre los mismos que permiten generar nuevos *Procesos*.

*Reversión*. Consiste en restituir el mecanismo que dio origen al *Proceso*. Cuando el *Objeto* es restituido en *Proceso* se nombra *Desencapsulación*.

*Encapsulación*. Este mecanismo transforma un *Proceso* en un *Objeto*. De manera que siendo el *Proceso* una estructura dinámica esta se vuelva estática y se adquiera una estructura *Objeto*.

*Tematización*. Consiste en aplicar un *Esquema* en otro contexto, adhiriendo *Objetos* al *Esquema* de modo que puedan ser adaptados a otros contextos.

Los mecanismos anteriormente descritos permiten pasar por las estructuras que a continuación se presentan:

*Acción*. Un individuo tiene una concepción Acción de un concepto si su comprensión está limitada a transformaciones dirigidas de manera externa. Puede decirse en términos de un concepto matemático que el sujeto no es capaz de imaginar, ni saltarse pasos en este estado.

*Proceso*. Cuando un individuo reflexiona sobre las acciones y puede recrearlas mentalmente sin la necesidad de depender de estímulos externos se dice que el individuo a interiorizado las acciones en un Proceso. Sin embargo, debe asegurarse que el individuo es capaz no sólo de dejar de depender de las representaciones externas sino también lograr la reversión de las acciones interiorizadas que dieron origen al Proceso.

*Objeto*. Esta concepción se adquiere a través del mecanismo de encapsulación. Cuando un individuo aplica una acción a un Proceso (ente dinámico) y lo transforma en un ente estático para el cual es capaz de aplicar nuevas acciones, se dice que el sujeto ha encapsulado el Proceso en un Objeto cognitivo.

*Esquema*. Es una construcción coherente de Acciones, Procesos, Objetos y otros Esquemas cuya reconstrucción es permanente y determinada por una situación matemática particular a la cual un individuo se enfrenta. Esta reconstrucción se lleva a cabo mediante el mecanismo de *Tematización* el cual permite asimilar otros Objetos y aplicarlos a la estructura de Esquema.

La teoría APOE sostiene que un individuo es capaz de aprender cualquier concepto matemático mediante la construcción de las estructuras mentales antes descritas, mismas que se edifican por medio de los mecanismos ya mencionados. De tal manera que una acción sea *interiorizada* en un proceso mental que puede ser *coordinado* y *revertido* para formar otros procesos. Un proceso se encapsula en un Objeto cognitivo por medio de acciones que transforman el Proceso dinámico en estático, además, un Objeto puede *desencapsularse* para generar nuevos Procesos coordinados que den origen a otro Objeto. Finalmente, la aplicación coherente de Acciones, Procesos y Objetos en distintos contextos generan un Esquema mismo que puede ser *tematizado* para añadir nuevos Objetos.

Para lograr el desarrollo de estas estructuras se requiere de un modelo hipotético de transición de una estructura a otra conocida como *Descomposición Genética*.

## 2.2 Descomposición genética

Uno de los aspectos clave de la teoría APOE es ayudar a predecir lo que los estudiantes pueden llegar a aprender acerca de un concepto y la forma en que lo aprenden. Por lo que una vez definidos los constructos de la teoría y los mecanismos que muestran cómo esas construcciones se entrelazan, estas pueden integrarse en modelos hipotéticos que pueden ser llevados a la práctica para probar su veracidad y utilidad.

A partir de este contexto se presenta uno de los conceptos medulares de la teoría APOE llamado *Descomposición Genética*. Una *Descomposición Genética* de un concepto matemático es un modelo hipotético que describe los mecanismos y estructuras mentales que un individuo podría necesitar construir para lograr la comprensión de un concepto. Es decir, describe cómo las Acciones sobre un concepto matemático particular pueden ser interiorizadas para convertirse en Procesos y estos a su vez en Objetos y continúa de esta manera hasta conformar la descripción de todos los mecanismos y estructuras que caracterizan la aprensión de un concepto matemático.

De manera que, para la construcción de una *Descomposición Genética* se toman en cuenta elementos como la experiencia del investigador, tanto en la enseñanza como en el aprendizaje del concepto que se estudie, el conocimiento de la teoría APOE, los conocimientos matemáticos, investigaciones sobre el concepto de interés y su desarrollo histórico. Una vez conjugados todos estos elementos es posible establecer una *Descomposición Genética* preliminar, misma que puede implementarse y probarse en campo. Con los datos derivados de su implementación se realiza una revisión de esta y se propone un refinamiento de dicha descomposición con el cual se espera que en cada nuevo ciclo iterativo se genere una mejor cognición del concepto que se está estudiando.

Otro rasgo importante de una *Descomposición Genética* es que puede ser usada para guiar el desarrollo instruccional, con lo que el diseño de actividades alrededor de un concepto consiste en proponer actividades que propicien la construcción de las estructuras y mecanismos mentales dictados por la *Descomposición Genética*.

## 2.3 El ciclo de investigación de APOE

Un proyecto de investigación basado en la teoría APOE involucra tres componentes: análisis teórico, elaboración y aplicación de un diseño instruccional, recolección y análisis de los datos.

El análisis teórico inicial, primera etapa del ciclo, del concepto que se desea abordar y en el cual se explora lo que significa entender el concepto matemático y cómo un individuo puede construirlo, conduce a la propuesta de una *Descomposición Genética* preliminar. En la siguiente fase se procede al diseño instruccional que busca que los individuos alcancen las estructuras mentales identificadas en el análisis teórico del concepto. Finalmente, los datos que se obtienen del tratamiento instruccional, como consecuencia de su aplicación, son analizados en el contexto de la teoría APOE y, en su caso, utilizados para reiniciar el ciclo antes descrito con el propósito de refinar la instrucción didáctica que permita lograr la comprensión del concepto estudiado.

La figura 1, muestra cómo se relacionan estas componentes:

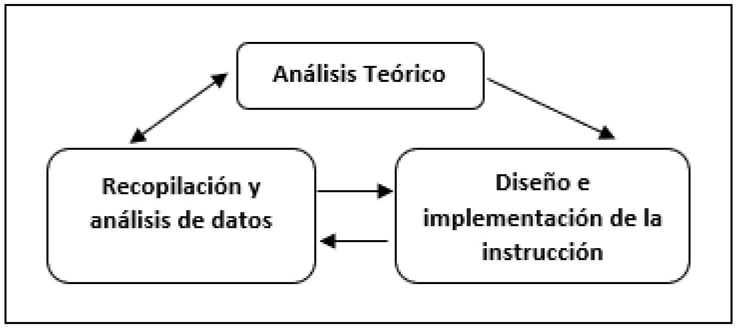



*Figura 1 Componentes del ciclo de investigación de la teoría APOE (Adaptado de Asiala et al. 1996)*

El análisis teórico impulsa el diseño y la implementación de la instrucción mediante actividades que buscan fomentar las construcciones mentales señaladas en la *Descomposición Genética* (modelo de construcción del conocimiento derivado del análisis teórico), es decir *interiorizar* acciones, *coordinar* procesos, etc. La instrucción proporciona la oportunidad para recopilar y analizar los datos obtenidos. Este análisis se lleva a cabo en términos de los constructos de la teoría APOE y su propósito se centra en responder dos preguntas: ¿hicieron los estudiantes las construcciones mentales requeridas por el análisis teórico?, ¿qué tan bien aprendieron los estudiantes el contenido matemático? Si la respuesta a la primera pregunta es negativa la instrucción didáctica se reconsidera y revisa. Si la respuesta a la primera pregunta es positiva y la de la segunda pregunta es negativa el análisis teórico se reconsidera y revisa. En cualquier caso, el ciclo de investigación se repite hasta que las preguntas son respondidas positivamente y el instructor o investigador está satisfecho de que los estudiantes han aprendido los conceptos matemáticos suficientemente bien. Finalmente, como parte de las conclusiones del ciclo de investigación, cada estudio ofrece sugerencias pedagógicas para la implementación y matices para nuevas investigaciones.

## 2.4 La teoría de registros de representación semiótica

La teoría de registros de representación semiótica es propuesta por Duval (1993) el cual parte de la premisa de que los objetos matemáticos no son tangibles y por ende solo puede tenerse acceso a ellos a través de una representación semiótica que no es el objeto en sí, sino un medio por el cual un individuo accede a él.

Sin embargo, el tránsito a través de los distintos registros de representación de un objeto matemático no siempre se realiza con éxito al grado de que un individuo puede confundir el objeto matemático con una representación particular del mismo.

Para Duval (1993), la apropiación de un objeto matemático tiene que tomar en cuenta: el uso de más de un registro de representación semiótico y la creación (o desarrollo) de nuevos registros del objeto. Por tal motivo, la enseñanza-aprendizaje de un objeto matemático no puede limitarse a una única representación, sino que debe fomentarse la capacidad de traducir la información de un registro a otro (Duval, 2004).

Un registro de representación se caracteriza por tres aspectos que incluyen: una *representación identificable* del objeto, un *tratamiento* y una *conversión*. La primera característica se asocia con la expresión de una representación mental del objeto. Por su parte, el *tratamiento* es una transformación interna de la representación en el mismo registro en que está dada y la *conversión* es una transformación externa, es decir, representa la transición de una representación a otra.

Cabe señalar que el éxito que un individuo tenga al trabajar en un registro de representación no necesariamente garantiza que el individuo pueda realizar *tratamientos* o *conversiones* en otros registros de representación. De manera que la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en general debe procurar favorecer las transiciones entre distintas representaciones de un objeto matemático si se quiere lograr su comprensión.

## 2.5 Diseño de la investigación

### 2.5.1 Metodología y tipo de estudio

La metodología usada para la dirección de este trabajo se basa en la propuesta por la teoría APOE mediante su ciclo de investigación de tres componentes: análisis teórico, elaboración y aplicación de un diseño instruccional, recolección y análisis de los datos.

El tipo de estudio que aborda nuestra investigación es de corte exploratorio y cualitativo debido a que busca identificar si la instrucción didáctica basada en la Descomposición *Genética* de Swinyard y Larsen (2012) se corresponde con las estructuras mentales ahí señaladas, además de que la caracterización se basa en la descripción cualitativa de las construcciones logradas por los estudiantes.

### 2.5.2 Grupo de estudio

Para este trabajo el grupo de estudio consistió en 25 alumnos universitarios de entre 18 y 19 años del primer año de ingeniería en biotecnología que cursaron la materia de cálculo diferencial por primera vez, en una universidad pública del Estado de Puebla.

Previo al curso de cálculo diferencial, los alumnos habían cursado la materia de álgebra lineal y funciones matemáticas, por lo que directamente se trabajó con ellos considerando estos conocimientos previos, en particular, el concepto de función, el concepto de desigualdad y orden de los números reales.

### 2.5.3 Instrumento de investigación y modo de implementación

La primera de las tres componentes del ciclo de investigación la constituye la descomposición genética del concepto de límite propuesta por Swinyard y Larsen (2012). Posteriormente, siguiendo el modelo teórico seleccionado, se diseñó una secuencia de 25 actividades asociadas al concepto de límite de una función.

Constituidos los instrumentos de investigación se llevó a cabo la aplicación de estos en el grupo de estudio mencionado, mediante el ciclo de enseñanza sugerido por la teoría APOE, denominado ciclo de enseñanza ACE (acrónimo de las palabras inglesas *Activities*, *Classroom Discussion*, *Exercises*) el cual consta de tres componentes: Actividades (A), Discusión en el aula

(C) y Ejercicios (E). Para las Actividades que constituyen el primer paso del ciclo, los estudiantes trabajan en equipos en tareas diseñadas para estimular el desarrollo de las construcciones mentales sugeridas por la descomposición genética. El objetivo de estas tareas es promover la abstracción reflexiva. La segunda parte del ciclo de enseñanza la constituye la Discusión en clase, la cual propicia el intercambio de ideas y la reflexión. Como el instructor guía la discusión, él puede proporcionar definiciones, ofrecer explicaciones y presentar resúmenes para unificar las ideas que los estudiantes han pensado y trabajado. La tercera parte del ciclo de enseñanza la constituyen los Ejercicios de tarea que consisten en problemas diseñados para reforzar las Actividades y Discusiones que se llevan a cabo en el aula. Los Ejercicios ayudan a promover el desarrollo mental en relación con las construcciones mentales sugeridas por la descomposición genética, además de guiar a los estudiantes a aplicar lo aprendido.

El ciclo de enseñanza ACE, se esquematiza en la figura 2.

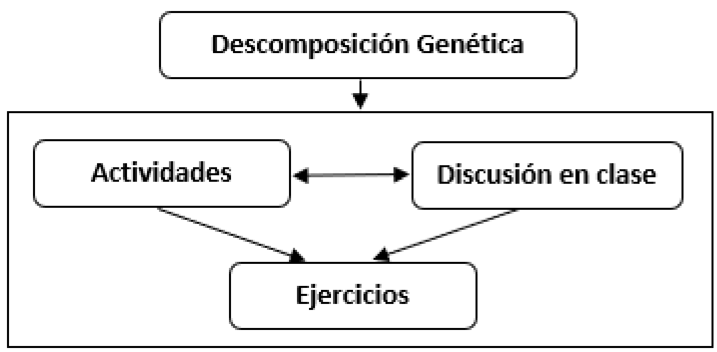



*Figura 2 Esquema del ciclo de enseñanza ACE*

El esquema de la figura 1 permite observar mejor la relación entre el ciclo de enseñanza ACE y la *Descomposición Genética*. A partir de él observamos cómo la descomposición genética influye en cada una de las componentes del ciclo ACE. La flecha bidireccional entre Actividades y Discusión en el aula muestra, por un lado, que las actividades son el tema principal de la discusión en clase y, por otro lado, que la discusión en el aula propicia en los estudiantes la reflexión sobre las actividades. Las flechas a los Ejercicios que parten de las Actividades y la Discusión en el aula reflejan el propósito de los ejercicios: reforzar las construcciones mentales que los estudiantes hacen o han comenzado a hacer mientras trabajan las Actividades y participan en la Discusión en el Aula.

La implementación de las actividades tuvo lugar durante 3 semanas con dos intervenciones por semana en sesiones de dos horas cada una. Los participantes en el estudio fueron 25 alumnos que cursaban el tercer cuatrimestre de la carrera de ingeniería en biotecnología inscritos en el curso de cálculo diferencial, en el periodo mayo-agosto de 2019. Los participantes trabajaron en binas todas las sesiones, pero cada estudiante contestaba por separado la actividad. El docente fue uno de los investigadores y durante las sesiones con los alumnos orientó las discusiones que permitieron convenir los resultados que se iban obteniendo. Todas las producciones de los estudiantes eran recogidas al término de las sesiones. Finalmente, la tercera fase del ciclo de investigación consistió en la recopilación y análisis de los datos.

# Capítulo 3

# Análisis teórico y diseño instruccional

En este capítulo presentamos la *Descomposición Genética* que nos permitirá fundamentar la elaboración de la instrucción didáctica y de los elementos a tomar en cuenta durante la elaboración de las actividades. Para cada actividad diseñada presentamos el análisis a priori basado en el análisis teórico.

## 3.1 Análisis de la Descomposición Genética de límite

Como ya se ha mencionado, Cottrill et al. (1996) proporcionan una descomposición genética que describe teóricamente lo que la mayoría de los estudiantes deberían experimentar para lograr la construcción del concepto de límite.

La descomposición genética de Cottrill et al. (1996) puede sintetizarse en los siguientes pasos:

1. La acción de evaluar $f$ en un solo punto $x$ que se considera cercano, o incluso igual al valor $a$.
2. La acción de evaluar la función $f$ en unos pocos puntos, cada punto sucesivo más cercano al valor $a$ que el anterior.
3. Construcción de un esquema coordinado de la siguiente manera:
   (a) Interiorización de la acción del paso 2 para la construcción de un proceso en el dominio en el que $x$ se aproxima al valor $a$.
   (b) Construcción de un proceso en el rango en el que $y$ se aproxima al valor $L$.
   (c) Coordinación de (a), (b) a través de $f$.
4. Encapsulación del proceso del paso 3(c) para que el límite se convierta en un Objeto al que se pueden aplicar acciones.
5. Reconstruir el proceso del paso 3(c) en términos de intervalos y desigualdades. Esto se realiza mediante la introducción de estimaciones numéricas de la cercanía de las aproximaciones, en símbolos, $0 < |x - a| < \delta$ y $|f(x) - L| < \varepsilon$
6. Aplicación de un esquema de cuantificación de dos niveles para conectar el proceso reconstruido del paso 5 con la definición formal de límite.

7. Aplicación de una concepción completa $\varepsilon - \delta$ a situaciones específicas.

Los primeros tres pasos de la *Descomposición Genética* de límite (en lo sucesivo DG) corresponden con lo que Cottrill et al. (1996) denominan la noción informal de límite, referida por otros autores como la concepción dinámica de límite.

Más adelante Cottrill et al. (1996) describen que los pasos del 4 al 7 (en lo sucesivo usaremos el prefijo DG y el número e inciso correspondiente para abreviar el paso al cual nos referiremos, por ejemplo, DG4 al DG7) se corresponden con la noción formal del concepto de límite. Denominada en Pons (2014) como la concepción métrica de límite.

Sin embrago, hay dos aspectos a considerar en la DG de Cottrill et al. (1996), el primero es que él mismo señala en su investigación que los estudiantes no lograron avanzar más allá del paso DG3 y, por consiguiente, no tuvo evidencia empírica de la idoneidad de los pasos DG4 a DG7.

Por otra parte, Cottrill apunta a que la construcción del concepto de límite se logra, en parte, reconstruyendo los pasos DG1 a DG3 en términos de desigualdades (léase el paso DG5 de la DG). No obstante Larsen (2001) citado por Swinyard y Lockwood (2007) reporta que la transición del pensamiento informal al formal no se da de forma inmediata y que la mayoría de sus estudiantes no realizaron conexiones entre sus entendimientos informales (pasos DG1 al DG3) con los entendimientos formales.

También sugiere que: la definición formal es estructuralmente diferente de la concepción dinámica según lo descrito por los cuatro primeros pasos de la descomposición genética, por lo que, es poco probable que un estudiante pudiera interpretar correctamente la sintaxis en términos de su concepción dinámica (Swinyard y Lockwood, 2007, p. 5)

Este señalamiento marca la vertiente para proponer con mayor cuidado cómo un estudiante podría realizar la transición de la concepción dinámica a la concepción métrica. Más aún, Swinyard y Larsen (2012) identifican que el punto medular para dilucidar los pasos DG4 a DG7 propuestos por Cottrill et al. (1996) debe basarse en que el proceso de proponer a un candidato a límite y el proceso de validación de este son procesos distintos sobre los cuales debe trabajarse.

Al respecto, señalan que la concepción dinámica únicamente proporciona un razonamiento hacia adelante en el sentido de que el individuo piensa en las entradas de la función y luego en las salidas para proponer un candidato a límite.

Por otra parte, para validar el candidato a límite el estudiante debe revertir el proceso y adoptar una perspectiva “hacia atrás” en el sentido de que, en lugar de fijar su atención en las entradas de la función, el estudiante debe examinar, en primer lugar, lo que está ocurriendo con las salidas de la función. En concreto, debe coordinar un intervalo completo de valores de salida, revertir el proceso de la función y determinar el intervalo de los valores de entrada, al tiempo que otro proceso realiza la reducción del intervalo sin olvidar coordinar los resultados para lograr el ajuste deseado o continuarlo de manera hipotética.

Esta descripción deja claro, nuevamente, que la DG de Cottrill et al. (1996) debe dilucidarse aún más si se quiere que el estudiante logre la transición de la concepción dinámica a la métrica. La escasez de información al respecto llevó a Swinyard y Larsen (2012) a proponerse obtener evidencia empírica de lo que el individuo necesitaría para lograr la transición descrita. Sus resultados permitieron proponer un refinamiento a la DG de Cottrill et al. (1996), para la parte de la transición de la concepción dinámica de límite a la concepción métrica, dicha DG se presenta a continuación:

1. La acción de evaluar $f$ en un solo punto $x$ que se considera cercano, o incluso igual al valor $a$. (PASO DG1)
2. La acción de evaluar la función $f$ en unos pocos puntos, cada punto sucesivo más cercano al valor $a$ que el anterior. (PASO DG2)
3. Construcción de un esquema coordinado de la siguiente manera:

   (a) Interiorización de la acción del paso 2 para la construcción de un proceso en el dominio en el que $x$ se aproxima al valor $a$. (PASO DG3(A))

   (b) Construcción de un proceso en el rango en el que $y$ se aproxima al valor $L$. (PASO DG3(B))

   (c) Coordinación de (a), (b) a través de $f$. Es decir, la función $f$ se aplica al proceso de x aproximándose al valor $a$ para obtener el proceso de $f(x)$ aproximándose a $L$. (PASO DG3(C))
4. Construir un proceso mental en el cual uno prueba si un candidato es un límite:

   a) Elegir una medida de proximidad al valor límite $L$ a lo largo del eje $Y$; (PASO DG4(A))

b) Determinar si hay un intervalo alrededor del valor en el cual uno está conjeturando el límite (es decir $a$) para el cual el valor de la función, aparte del que está en ese punto, está lo suficientemente cerca de $L$; (PASO DG4(B))

c) Repetir los pasos (a) y (b) para cada vez más pequeñas medidas de cercanía. (PASO DG4(C))

5. Asociar la existencia de un límite con la capacidad de continuar (teóricamente) este proceso para siempre, sin dejar de producir el intervalo deseado sobre $a$, o de manera equivalente, con la observación de que no hay un caso en el que será imposible encontrar dicho intervalo. (PASO DG5)
6. Encapsular este proceso a través de la noción de cercanía arbitraria. Esto implica darse cuenta de que se puede establecer que el proceso en el paso 4 funcionará para todas las medidas de cercanía demostrando que funcionará para una medida arbitraria de cercanía. (PASO DG6)

En la DG de Swinyard y Larsen (2012), notamos la división que hacen para adquirir la concepción dinámica (correspondiente a los primeros tres pasos de la DG de Cottrill et al. (1996)) y la forma en que se construye la concepción métrica (pasos DG4 a DG6).

Para el caso de la concepción métrica, Swinyard y Larsen (2012) adoptan la perspectiva del pensamiento revertido, discutida con anterioridad, al proponer la construcción de un proceso en el que se elige una medida de proximidad sobre el eje $Y$, perspectiva acorde a la definición formal y, posteriormente, producir el intervalo deseado alrededor del valor $a$ (paso DG4).

Si el individuo es capaz de replicar estas acciones y asociarlas con un proceso de ajuste, relativo a la medida de proximidad elegida en el eje $Y$ en torno al valor $L$, podrá asociar la existencia del límite con esta propiedad y lograr transitar a la construcción del Objeto límite al *encapsular* el proceso descrito a partir de la noción de cercanía arbitraria.

Con fundamento en lo anterior, nuestro trabajo opta por considerar la DG de Swinyard y Larsen (2012) para el diseño de las actividades de intervención.

## 3.2 Diseño y análisis de la secuencia de actividades

La siguiente tabla, establece la correspondencia entre las actividades y el paso de la descomposición genética que se desea promover.

| Actividad -Registro | Pasos de la Descomposición Genética | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | **DG1** | **DG2** | **DG3(A)** | **DG3(B)** | **DG3(C)** | **DG4(A)** | **DG4(B)** | **DG4(C)** | **DG5** | **DG6** |
| | Inciso de la actividad | | | | | | | | | |
| 1-AN | a | a | b | c | d | | | | | |
| 2-G | a | a | b | c | d | | | | | |
| 3-AN | a | a | b | c | d | | | | | |
| 4-AN | a | a | b | c | d | | | | | |
| 5-G | a | a | b | c | d | | | | | |
| 6-G | | | a | b, c | d | | | | | |
| 7-N | | | a | b | c | | | | | |
| 8-AN | a | a | b | c | d | | | | | |
| 9-G | | | a | b | c | | | | | |
| 10.1-GN | | | a | b | c, d | | | | | |
| 10.2-G | | | | | | a | b | c | | |
| 10.3-G | | | | | | a | b | c, d, e | | |
| 10.4-G | | | | | | a | b, c | d, e | f | |
| 11-GN | | | | | | | | a, b | c | |
| 12-AN | | | a | b | a, b, c | c | d | e, f, g, h | i, j, k | |
| 13-G | | | | | | a | b, c | d | e | |
| 14-AN | | | a, b | a, b | a, b | c | c | c | c | |
| 15-A | a | a | a | a | a | b | b, c | b, c, d | d, e | d, e |
| 16-AG | | | | | | a, b | a, b | a, b | | |
| 17-A | | | | | | | | | | a, b |
| 18-A | | | | | | | | | | a, b |
| 19-AG | | | | | | a | b, c | d, e, f | | |
| 20-N | | | | | a | b | b | b | b | b |
| 21-G | | | | | | | | | | a, b, c |
| 22-G | | | | | | | | | | a, b, c |
| 23-G | | | | | | | | | | a, b, c, d |
| 24-AG | | | | | | | | | | a, b, c |
| 25-G | | | | | | | | | | a |

*Tabla 1 Correspondencia entre actividades y pasos de la DG*

Las abreviaturas respecto al registro en que se desarrollaron las tareas es el siguiente:

| Registro que se contempla en la actividad | Abreviatura |
|---|---|
| Algebraico, numérico | AN |
| Gráfico | G |
| Numérico | N |
| Gráfico, numérico | GN |
| Algebraico, gráfico | AG |
| Algebraico | A |

*Tabla 2 Tabla de abreviaturas. Tipo de registro usado en la actividad*

## 3.3 Análisis teórico de las actividades para la construcción del concepto de límite

A continuación, se presentan y describen los objetivos de cada una de las preguntas de las actividades propuestas, en algunos casos, por tratarse de actividades similares, su descripción se agrupa de acuerdo con la estructura mental que se pretende fomentar.

### 3.3.1 Actividad 1

Esta actividad busca que el estudiante construya la concepción Acción a través de evaluar una función $f$ en un solo valor $x$ que se considere cercano o incluso igual a un valor $a$, así como en valores sucesivos cada vez más próximos al valor $a$.

**Actividad 1**

Considera la función $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 3x + 2$ y el valor $x = 0$.

a) Evalúa la función $f$ en los valores $x$ que se presentan en la primera fila de la siguiente tabla y anota sus correspondientes valores $f(x)$.

| $x$ | $-1$ | $-0.5$ | $-0.25$ | ... | **0** | ... | 0.02 | 0.6 | 0.98 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | ... | | ... | | | |

Para fomentar la concepción Acción el estudiante recibe un estímulo externo dado por la representación analítica de la función y una serie de valores próximos al valor $x = 0$. La tarea se presenta en el registro tabular de manera que el estudiante pueda relacionar más fácilmente los valores del dominio y del rango de la función.

A continuación, se presenta un análisis hipotético, de las posibles formas de proceder del estudiante, en términos de la DG.

- Si el estudiante es capaz de realizar la evaluación en un sólo valor $x$, es posible que pueda replicar la misma acción para el resto de los valores proporcionados. Por lo que se estaría estimulando la evaluación sucesiva de valores en torno al valor $x = 0$. De esta manera, si un estudiante logra completar de forma correcta la tabla proporcionada con los valores $f(x)$ correspondientes exhibiría que posee la concepción Acción a través de la evaluación de una función en valores sucesivos. Con esto el alumno mostraría haber desarrollado los pasos DG1 y DG2.
- Por otra parte, puede ocurrir que el estudiante realice la evaluación en un solo valor $x$ pero no sea capaz de reproducir el mismo procedimiento para todos los valores restantes de $x$. En este caso, el estudiante se encontraría en el paso DG1. Es decir, puede evaluar de forma aislada un valor bajo la función $f$ y obtener su correspondiente imagen, pero no le es posible articular el mismo procedimiento para un conjunto de valores del dominio de la función dados. Esta habilidad es necesaria, ya que más adelante permitirá al estudiante inferir el comportamiento de las imágenes de la función y su relación con los valores evaluados del dominio de la función.

Una vez que el estudiante ha realizado acciones con la función se plantean las preguntas de los incisos (b), (c) y (d). El objetivo de estas preguntas consiste en propiciar en el estudiante la reflexión sobre la tarea, de forma que esta reflexión conduzca a la *interiorización* de las acciones realizadas. Este mecanismo (*interiorización*) es clave para trasformar las acciones en Procesos articulados que permitirán inferir el comportamiento de la función cerca de un valor de interés $a$ en el dominio de la función.

**Inciso (b) de la actividad 1**

b) Describe el comportamiento de los valores $x$ que evaluaste cuando los comparas con el valor $x = 0$.

Con esta pregunta se pretende que el estudiante reflexione sobre las tareas realizadas en el inciso (a), en específico, se busca que el estudiante interiorice las acciones de los pasos DG1 y DG2, es decir, que centre su atención en el dominio de la función para notar que la serie de valores de $x$ dados se aproximan cada vez más al valor de interés $x = 0$. Para conducir a tal reflexión, la actividad proporciona al estudiante la serie de valores, cada uno más próximo que el anterior al valor del dominio $x = 0$. Adicionalmente, el mismo fue colocado al centro de la tabla para orientar la reflexión de que la proximidad tendría que examinarse en dos direcciones.

El análisis hipotético, de las posibles formas de proceder del estudiante, en términos de la DG, es el siguiente:

- Un estudiante que responda argumentando que los valores de $x$ se aproximan cada vez más al valor $x = 0$ habrá *interiorizado* la acción de evaluar valores sucesivos cada vez más próximos a un valor de interés en el dominio de la función. En este caso diremos que el estudiante ha construido una concepción Proceso de aproximación en el dominio de la función con lo cual diremos que el estudiante ha construido el paso DG3(A).
- En cambio, un estudiante puede no reconocer de forma inmediata que los valores $x$ evaluados guardan una relación de proximidad con el valor de referencia $x = 0$. En tales casos el estudiante puede poseer una concepción Acción del procedimiento para evaluar una función, mas no haber *interiorizado* la relación de proximidad entre los valores de $x$ proporcionados y el valor $x = 0$. En esta situación, el estudiante no posee la concepción Proceso de aproximación en el dominio estipulada en el paso DG3(A).

**Inciso (c) de la actividad 1**

c) Describe el comportamiento de los valores $f(x)$ cuando los comparas con el valor $f(0)$.

Esta pregunta pretende que el estudiante reflexione sobre las acciones realizadas en el inciso (a) de manera que el estudiante interiorice las acciones de los pasos DG1 y DG2, pero esta vez procurando que centre su atención en el rango de la función para notar lo que ocurre con los valores $f(x)$ cuando se comparan con $f(0)$. Tal reflexión busca que el estudiante construya un Proceso de aproximación en el rango de la función en el que $f(x)$ se aproxime a $f(0)$.

El análisis hipotético, de las posibles formas de proceder del estudiante, en términos de la DG, es el siguiente:

- Si el estudiante argumenta que los valores de $f(x)$ se aproximan cada vez más a $f(0)$ habrá *interiorizado* la acción de evaluar valores sucesivos cada vez más próximos a un valor de interés y habrá construido un proceso de aproximación en el rango de la función, pues es capaz de intuir el valor al cual los valores $f(x)$ confluyen. Por lo que afirmaremos que el estudiante ha construido el paso DG3(B). Es decir, ha construido una concepción Proceso de aproximación en el rango de la función.
- En otra situación, un estudiante puede no reconocer de forma inmediata que los valores $f(x)$ evaluados guardan una relación de proximidad con el valor $f(0)$ . En tales casos el estudiante puede poseer una concepción Acción del procedimiento para evaluar una función, mas no haber *interiorizado* la relación de proximidad entre los valores de $f(x)$ calculados y el valor $f(0)$. En consecuencia, el estudiante no posee la concepción Proceso de aproximación en el rango requerida por el paso DG3(B).

**Inciso (d) de la actividad 1.**

d) Describe qué sucede con el comportamiento de los valores $f(x)$ con relación al comportamiento de la variable $x$.

El inciso (d) busca lograr que el estudiante coordine los procesos de los pasos DG3(A) y DG3(B), es decir, que el estudiante asocie la causalidad de que el proceso de aproximación en el dominio produce el proceso de aproximación en el rango a través de la aplicación de la función $f$.

El análisis hipotético de las posibles formas de proceder del estudiante es el siguiente:

- En el caso en que un estudiante concluya que los valores de $f(x)$ se aproximan cada vez más al valor $f(0)$ a medida que los valores de $x$ se aproximan al valor $x = 0$ mostrará evidencia de haber *coordinado* correctamente los procesos de aproximación en el dominio y en el rango (pasos DG3(A) y DG3(B)). Por lo que habrá construido el paso DG3(C), es decir, que la función $f$ se aplica al proceso de $x$ aproximándose a $x = 0$ para obtener el proceso de $f(x)$ aproximándose a $f(0)$.

- Un estudiante puede no identificar la relación de causalidad entre los procesos de aproximación en el dominio y el rango a través de $f$. En este caso se dirá que el estudiante no ha conformado la concepción Proceso de aproximación. Esto es, el individuo puede percibir los procesos de aproximación en el dominio y en el rango como independientes, pero no es capaz de articularlos de modo que pueda inferir el comportamiento de los valores $f(x)$ y $x$ a través de $f$.

  En conclusión, la actividad 1 propicia la construcción de los primeros 3 pasos de la DG. Swinyard y Larsen (2012) llaman a este primer bloque de la DG el proceso para proponer un candidato a límite, ya que el estudiante puede, una vez conformado el esquema de aproximación, deducir un valor L al cual $f(x)$ converge cuando $x$ se aproxima a un valor $a$ de interés en el dominio de $f$.

### 3.3.2 Actividades 2, 3, 4, 5, 7 y 8

Cada una de estas actividades posee los mismos incisos y preguntas de la actividad 1 por lo que los objetivos, en cuanto a la construcción de estructuras mentales, es el mismo que se expuso para la actividad 1.

Con su implementación se busca que por medio de la reflexión se refuerce, o bien, se termine de desarrollar el esquema de aproximación que constituyen los tres primeros pasos de la DG.

Lo anterior se logra introduciendo una variedad de funciones matemáticas, usadas como estímulos externos, en sus distintas representaciones. En este contexto, únicamente nos limitaremos a realizar algunos comentarios en torno a las variantes introducidas y su fundamento con relación a nuestro marco teórico.

**Actividad 2**

En esta actividad se prescinde de la expresión analítica y, a cambio, se propone al estudiante trabajar con la representación gráfica de la función.

En este caso, el estudiante tiene que determinar los valores $f(x)$ para los valores de $x$ proporcionados. Al carecer de la representación analítica de la función, el estudiante es conducido a realizar estas acciones equivalentes, en el registro gráfico.

Lo anterior se fundamenta en el planteamiento de Duval (1999), al establecer que la única manera de tener acceso a los objetos matemáticos es a través de representaciones semióticas. Duval afirma que la habilidad para cambiar o interpretar la forma mediante la cual se representa un objeto matemático constituye un indicador de la comprensión o dificultad del aprendizaje de cierto objeto. Como consecuencia, la actividad cognitiva de tratamiento e interpretación de un objeto en distintas representaciones es fundamental para lograr el aprendizaje conceptual que se busca.

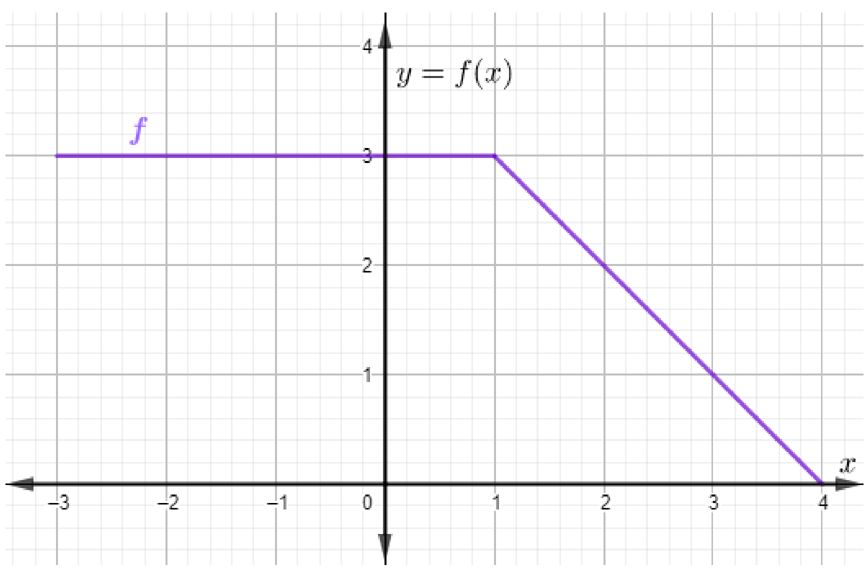



*Figura 3 Gráfica de la actividad 2*

Por lo anterior, la actividad 2 dirige al estudiante a construir los pasos DG1, DG2, DG3(A), DG3(B) y DG3(C) en el registro gráfico.

Finalmente, debe tenerse en cuenta que trabajar dentro del registro gráfico arroja otra serie de estímulos para el estudiante en la construcción del objeto límite debido a que permite al estudiante una visualización de los procesos de aproximación del dominio y el rango.

**Actividad 3**

En esta actividad, el estímulo externo viene dado por la función en su representación algebraica.

**Actividad 3**

Dada la función $f(x) = \frac{x^3+2x^2-1}{4-3x}$

a) Calcula los valores $f(x)$ para los $x$ propuestos en la siguiente tabla.

| $x$ | -1.30 | -1.22 | -1.15 | -1.05 | -1.02 | ... | $\mathbf{-1}$ | ... | -0.98 | -0.95 | -0.93 | -0.90 | -0.88 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | | ... | | ... | | | | | |

La variante en esta tarea es que la función dada es una función racional y que el valor de interés del dominio es un valor negativo $x = -1$, por lo que los valores cada vez más próximos a examinar también lo serán.

Por otra parte, esta función permite que las imágenes $f(x)$ obtenidas tras la evaluación de la función sean positivas para la aproximación por la izquierda y negativas para la aproximación por la derecha. Este recurso distrae la monotonía que pudiera generarse por atender a las mismas preguntas que las actividades anteriores, ya que puede llevar al alumno a pensar con mayor detenimiento lo que sucede con el comportamiento de las imágenes $f(x)$ en el rango de la función. Por ejemplo, deducir que la función se aproxima a 0 en forma decreciente por la izquierda y en forma creciente por la derecha, en el intervalo de valores analizado, mostraría que el alumno tiene una concepción Proceso de aproximación en el rango mucho más sólida que un estudiante que no lo hace.

**Actividad 4**

Esta actividad continua con el objetivo de consolidar la construcción del Proceso de aproximación (pasos DG1, DG2, DG3(A), DG3(B) y DG3(C)). El estímulo externo se mantiene en el registro algebraico, sin embargo, la variante cognitiva introducida es una función definida por partes.

**Actividad 4**

Dada la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} x, & si\ -1 \leq x < 1 \\ x-1, & si\ \ 1 \leq x < 3 \end{cases}$$

a) Calcula los $f(x)$ para los valores de $x$ que se indican en la siguiente tabla.

| $x$ | -1.02 | 0.00 | 0.50 | 0.85 | 0.98 | ... | **1** | ... | 1.01 | 1.04 | 1.07 | 1.10 | 1.21 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | | ... | | ... | | | | | |

Dos aspectos importantes reflejan el valor cognitivo de la actividad. Por un lado, la actividad permite centrar la atención en el dominio de definición de la función ya que el valor $x = -1.02$ no está definido. Un estudiante que advierta tal situación reflejaría una interiorización adecuada de la acción de evaluar una función en un valor dado, es decir, una construcción sólida del paso DG1, así mismo, del paso DG2, si el estudiante logra completar la tabla de forma correcta.

Por otra parte, la evaluación de los valores $x$ bajo la función $f$ por la izquierda da como resultado una convergencia de las imágenes $f(x)$ al valor 1 y por la derecha al valor 0. Este resultado, nuevamente permite romper la monotonía de las preguntas al presentarse un caso para el cual las imágenes $f(x)$ de los valores próximos al valor $x = 1$ confluyen a valores diferentes dependiendo de la dirección en que se aproximen.

Si un estudiante advierte tal situación y la refleja en su respuesta al inciso (d) mostrará evidencia de la concepción Proceso de aproximación en el rango, paso DG3(C).

Finalmente, esta actividad permite generar la discusión en torno al porqué la aproximación debe examinarse en ambos sentidos del valor de interés.

**Actividad 5**

Para esta actividad se reanuda el trabajo en el registro gráfico mediante la introducción de un estímulo externo dado por una función definida por partes. Se busca que el estudiante ponga a prueba la experiencia obtenida en la actividad 4 al trasladarse al registro gráfico.

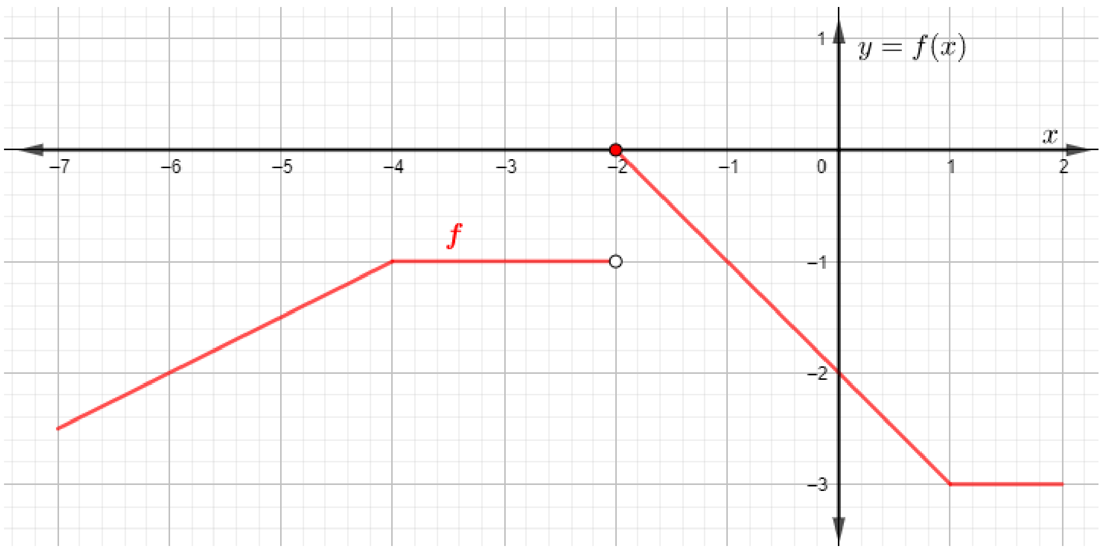



*Figura 4 Gráfica de la función de la actividad 5*

**Actividades 7 y 8**

En estas actividades la cantidad de estímulos externos ha aumentado, ya que lo que se persigue es centrar la atención del estudiante en los elementos que permitirán establecer un candidato al valor límite de una función.

**Actividad 7**

En la siguiente representación tabular de una función se muestran algunos valores sucesivos de $x$, además de sus correspondientes valores $f(x)$.

$x$ tiende al valor

| $x$ | 3.9 | 3.99 | 3.999 | 3.9999 | ⋯ | ¿? | ⋯ | 4.0001 | 4.001 | 4.01 | 4.1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1.97484 | 1.99749 | 1.99974 | 1.99997 | ⋯ | ¿? | ⋯ | 2.00002 | 2.00024 | 2.00249 | 2.02484 |

$f(x)$ tiende al valor

Por ejemplo, en la actividad 7, la tabla se encuentra rellenada y no se ha proporcionado al estudiante la función. El estímulo externo incluso va más allá de proporcionar la tabla, al colocar sobre el registro tabular las etiquetas "$x$ tiende al valor" y "$f(x)$ tiende al valor" acompañadas de las flechas que indican el sentido en que debe analizarse.

Las preguntas planteadas también han sido reescritas de la siguiente manera:

a) ¿A qué número se aproximan los valores de $x$?
b) ¿A qué número se aproximan los valores $f(x)$?
c) Describe qué sucede con el comportamiento de los valores $f(x)$ con relación al comportamiento de la variable $x$.

Con lo anterior se espera que el estudiante comprenda que el análisis tabular también puede arrojar información que permita responder a las preguntas planteadas. De hecho, en sí misma, la tabla es otra representación del concepto de límite en el cual un estudiante debe poder realizar interpretaciones y deducir conclusiones.

La forma de las preguntas de los incisos (a), (b) y (c) difieren de las realizadas en actividades anteriores, ya que en lugar de preguntar por el comportamiento de $x$ y $f(x)$ respectivamente, ahora se pregunta directamente por "el número al que se aproximan". Esto se realiza ya que, hasta este avance de las actividades se comienza a discutir y a introducir la notación $a$ para el valor de interés en el dominio y $L$ para el valor al cual confluyen las imágenes de la función como un candidato a límite de la función.

Análogamente, se plantea la actividad 8, la cual busca reforzar los planteamientos de la actividad 7, donde la única variación es que se pide evaluar la función como un procedimiento previo al análisis en el registro tabular.

**Actividad 8**

a) Calcula los $f(x)$ para los valores de $x$ que se muestran en la siguiente tabla. Donde $f(x) = x - 2$.

$x$ tiende al valor

| $x$ | 5.9 | 5.99 | 5.999 | 5.9999 | ⋯ | ¿? | ⋯ | 6.0001 | 6.001 | 6.01 | 6.1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x) = x - 2$ | | | | | ⋯ | ¿? | ⋯ | | | | |

$f(x)$ tiende al valor

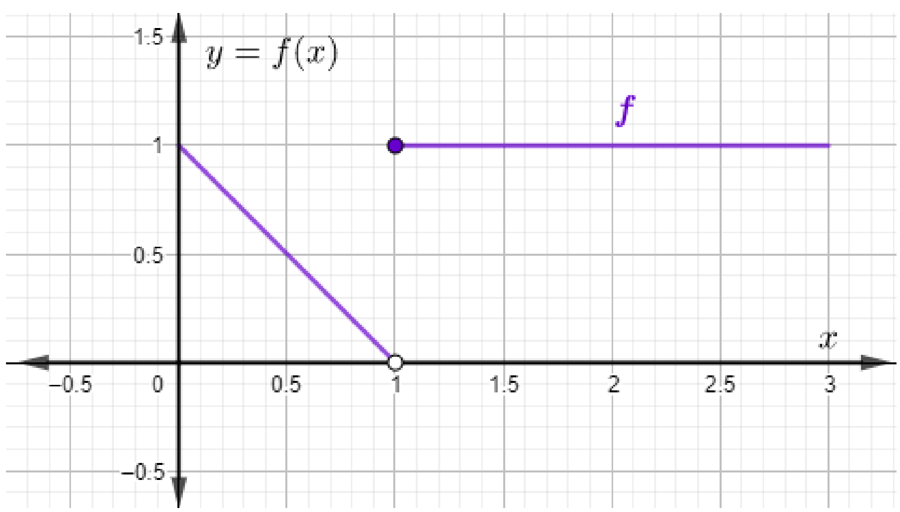
## Actividades 6 y 9

Estas actividades buscan coordinar la representación gráfica y tabular de una función de modo que se refleje la construcción del proceso de aproximación en el dominio, paso DG3(C). Para ello, se introduce una ligera variación en las preguntas acerca del comportamiento de los valores del dominio y el rango, incitando al estudiante a responder las preguntas usando la tabla, en el caso del inciso (a), o bien usando la gráfica de la función, en el caso de los incisos (b) y (c).

De acuerdo con Duval (1993), la actividad de coordinación de registros de representación es esencial para explorar las variantes posibles en una representación. En este sentido, un estudiante que deduce conclusiones a partir de la exploración de las representaciones tabular y gráfica de la función pone en juego la coordinación de ambos registros y la identificación de aspectos propios de cada registro que, en conjunto, complementan la comprensión del objeto matemático de aprendizaje.

### Actividad 6

Considera la siguiente representación gráfica de la función $f$ y la tabla que se te presenta para responder lo que se te pide.




$x$ tiende al valor

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 0.9 | 0.99 | 0.999 | 0.9999 | ... | ¿? | ... | 1.0001 | 1.001 | 1.01 | 1.1 |

a) ¿A qué número se aproximan los valores de $x$? (Utiliza la tabla).

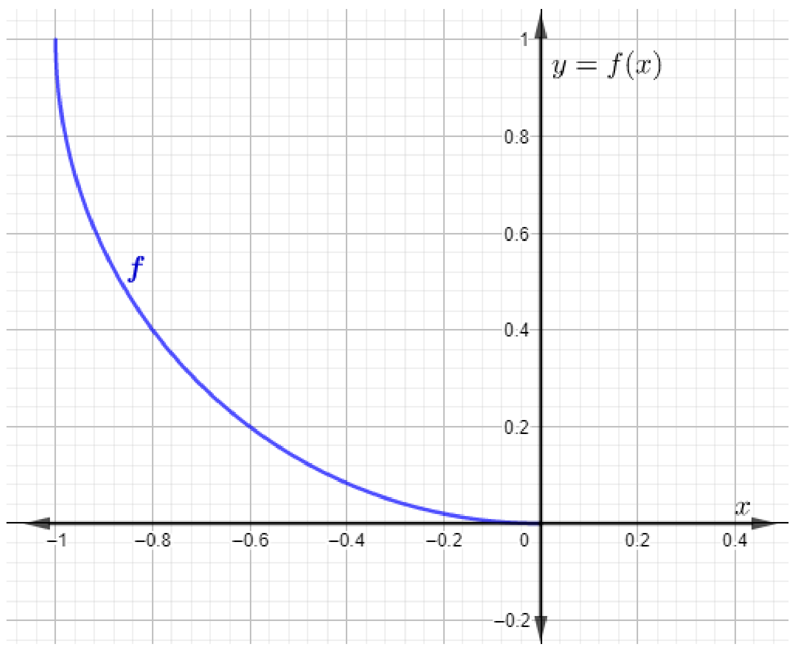
b) Si los valores de $x$ se aproximan a 1 desde la izquierda, es decir, con valores menores que 1 ¿a qué número se aproximan los valores $f(x)$? (Utiliza la gráfica).

c) Si los valores de $x$ se aproximan a 1 desde la derecha, es decir, con valores mayores que 1 ¿a qué número se aproximan los valores $f(x)$? (Utiliza la gráfica).

d) Describe qué sucede con el comportamiento de los valores $f(x)$ con relación al comportamiento de la variable $x$.

**Actividad 9**

Considera la siguiente representación gráfica de la función $f$ y la tabla que se te presenta para responder lo que se te pide.




$x$ tiende al valor

| $x$ | -0.61 | -0.601 | -0.6001 | -0.60001 | ... | ¿? | ... | -0.59999 | -0.5999 | -0.599 | -0.59 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

a) ¿A qué número se aproximan los valores de $x$? (Utiliza la tabla)

b) Apoyándote en la representación gráfica de $f$ ¿A qué número se aproximan los valores $f(x)$?

c) Describe qué sucede con el comportamiento de los valores $f(x)$ con relación al comportamiento de la variable $x$.

## Actividad 10

La actividad 10 está dividida en cuatro secciones denotadas como 10.1, 10.2, 10.3 y 10.4, su objetivo es la construcción de la noción de límite en términos de intervalos a través de la elección de medidas de proximidad en el dominio y en el rango. Esta actividad sienta las bases para la construcción del paso DG4 denominada construcción de un proceso, por el cual uno prueba si un candidato a valor límite lo es. Esta actividad marca el inicio de la vertiente de la DG usada como referencia (descomposición genética de Swinyard y Larsen, 2012).

El hilo conductor de toda la actividad 10 es la siguiente representación gráfica de una cierta función.

### Actividad 10.1

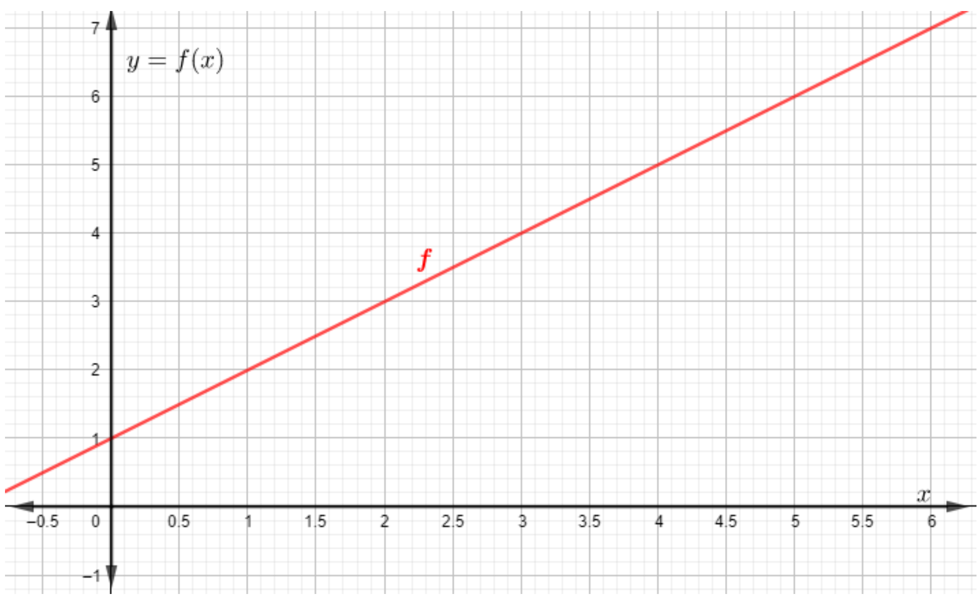



*Figura 5 Gráfica de la función de la actividad 10.1*

A partir de la gráfica y la siguiente tabla de valores:

$x$ tiende al valor

| $x$ | 2.9 | 2.99 | 2.999 | 2.9999 | ... | ¿ $\boldsymbol{a}$? | ... | 3.0001 | 3.001 | 3.01 | 3.1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 3.9 | 3.99 | 3.999 | 3.9999 | ... | ¿ $\boldsymbol{L}$? | ... | 4.0001 | 4.001 | 4.01 | 4.1 |

$f(x)$ tiende al valor

El estudiante debe contestar a las preguntas:

a) ¿A qué número $\boldsymbol{a}$ se aproximan los valores de $x$?
b) ¿A qué número $\boldsymbol{L}$ se aproximan los valores $f(x)$?

Esto con el fin de verificar que el estudiante ha *interiorizado* los procesos descritos en el paso DG3, de modo que pueda encaminarse a la construcción del paso DG4.

Dentro de esta actividad se introducen, como andamiaje cognitivo, las siguientes indicaciones:

c) Usa la gráfica para hallar el valor de $x$ cuya imagen es $f(x) = 2$.
d) Usa la gráfica para hallar el valor de $x$ cuya imagen es $f(x) = 6$.

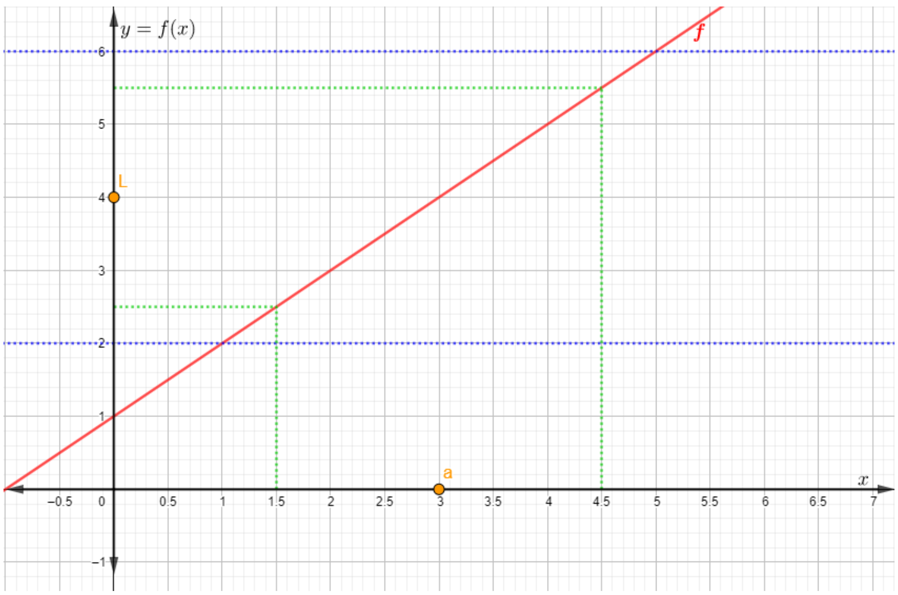
Su finalidad es concentrar la atención del estudiante en observar el rango de la función, antes que el dominio. Esta perspectiva es fundamental debido a que, como se discutió en el capítulo 2 la definición formal $\varepsilon - \delta$ de límite, enuncia la necesidad de considerar cualquier intervalo en torno al valor límite propuesto.

Cabe resaltar, que las actividades anteriores en el registro gráfico pueden facilitar esta tarea debido a que el estudiante ya ha realizado acciones similares en este registro.

**Actividad 10.2**

En esta actividad se introduce, dentro de la misma representación gráfica, los elementos que intervienen en la definición de límite finito, atendiendo a la siguiente instrucción:

En la gráfica de la función $f$ se muestra un intervalo abierto (representado con las líneas punteadas en azul) centrado en $L$, cuyos extremos son los valores determinados en los incisos (c) y (d) de la actividad anterior. Además, se muestra un intervalo abierto (representado con las líneas punteadas en color verde) centrado en $a$.




Usando esta representación gráfica responde lo que se te pide.

a) ¿Cuál es el radio del intervalo centrado en $L = 4$?

Este inciso pretende fomentar la construcción del paso DG4(A) el cual consiste en elegir una medida de proximidad al valor límite $L$ propuesto a lo largo del eje $Y$.

Para responder esta pregunta, el estudiante debe realizar la acción de determinar la longitud del radio del intervalo generado en torno al valor $L$ propuesto. En este caso, el estímulo externo para dicha acción está dado por la representación del intervalo en la gráfica que se está analizando.

b) ¿Cuál es el radio del intervalo centrado en $a = 3$?

Este inciso permite la construcción del paso DG4(B), el cual consiste en determinar si hay un intervalo en torno al valor del dominio donde se está conjeturando el valor límite (es decir el valor $a$) para el cual los valores de la función están suficientemente cerca de $L$.

Con esta pregunta el estudiante debe realizar la acción de determinar la longitud del radio del intervalo generado en torno al valor $a$, el cual no necesariamente debe pertenecer al dominio de la función. El estímulo externo viene dado por el intervalo propuesto en torno al valor $a$.

c) Describe lo que ocurre con las $f(x)$ de los valores $x$, contenidos en el intervalo centrado en $a = 3$, cuando las comparas con los valores del intervalo centrado en $L = 4$.

Esta pregunta dirige al estudiante a *interiorizar* las acciones realizadas en los pasos DG4(A) y DG4(B), de modo pueda concluir que, para la medida de proximidad dada en el eje $Y$ en torno a $L$ y la proporcionada en torno al valor $a$ se cumple que los elementos contenidos en el intervalo alrededor de $a$ quedan contenidos en el intervalo generado alrededor de $L$, en símbolos: $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$. Esta concepción de límite se denomina concepción métrica de Weierstrass y puede asociarse con los pasos DG4, DG5 y DG6 (si se incluyen los cuantificadores de la definición de límite) por lo que cuando se haga referencia a la propiedad de contención en términos de intervalos, de los pasos de la DG antes referidos, usaremos la expresión concepción métrica.

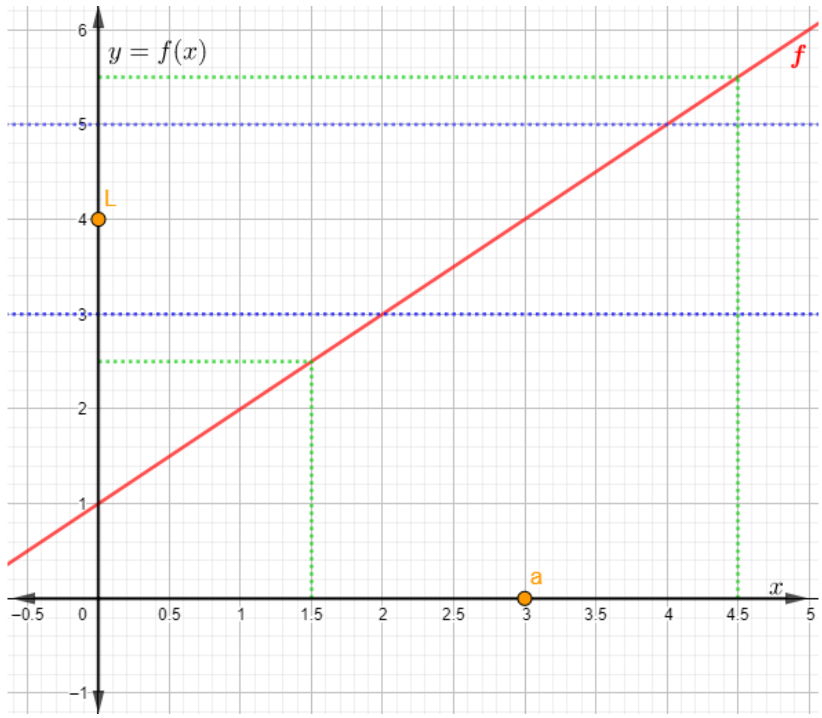
Es importante mencionar que la actividad bajo análisis (actividad 10.2) tiene como fin mostrar al estudiante el rol de los intervalos generados en la concepción métrica como preámbulo a las acciones reiterativas de este proceso para una medida de proximidad arbitraria en el rango de la función alrededor de $L$, razón por la cual, el análisis de las posibles respuestas de los estudiantes no se presenta para esta actividad.

**Actividad 10.3**

De forma similar, la actividad 10.3 continúa propiciando la reflexión alrededor de la concepción métrica. En este sentido, se plantea el subsecuente escenario al estudiante:

**Actividad 10.3**

En la siguiente representación gráfica de $f$ se muestra un intervalo centrado en $L = 4$ (líneas en color azul). Pero el intervalo centrado $a = 3$ (líneas en color verde) permanece como en la actividad anterior. A partir de esta representación, responde lo que se te pide.




a) ¿Cuál es el radio del intervalo centrado en $L = 4$?

Nuevamente, con esta pregunta se pretende fomentar la construcción del paso DG4(A) el cual consiste en elegir una medida de proximidad al valor límite $L$ propuesto a lo largo del eje $Y$.

b) Describe lo qué ocurre con las $f(x)$ de los valores $x$, contenidos en el intervalo centrado en $a = 3$, cuando las comparas con los valores del intervalo centrado en $L = 4$.

Esta pregunta lleva al estudiante a *interiorizar* las acciones realizadas en los pasos DG4(A) y DG4(B), de modo que pueda concluir que para "otra" medida de proximidad dada en el eje $Y$ en torno a $L$ y la "misma medida del intervalo" proporcionada en torno al valor $a$ "no" se cumple que los elementos contenidos en el intervalo alrededor de $a$ quedan contenidos en el intervalo generado alrededor de $L$.

Si un estudiante es capaz de advertir tal implicación entenderemos que ha construido el paso DG4(B), es decir, el estudiante puede determinar si la elección de una medida de proximidad en el eje $X$ en torno al valor $a$ cumple la propiedad métrica de la definición de límite.

Las siguientes preguntas se analizan en bloque, ya que en conjunto pretenden que el estudiante consolide el paso DG4(C).

c) Construye un nuevo intervalo centrado en $a = 3$ cuyos extremos sean $x = 2.2$ y $x = 3.8$, márcalos en la representación gráfica.

d) ¿Cuál es el radio del intervalo generado en el inciso anterior?

e) ¿Qué sucede con las imágenes de los valores $x$, contenidos en el nuevo intervalo centrado en $a = 3$, cuando las comparas con los valores del intervalo centrado en $L = 4$?

Una vez que el estudiante concluye (inciso b), que al elegir otra medida de proximidad en torno al valor $L$, los valores contenidos en el intervalo alrededor de $a$ no cumplen la propiedad de contención, entonces se insta al estudiante a realizar un ajuste en la medida de proximidad, intervalo en torno al valor $a$, mediante los incisos (c) y (d).

Realizadas estas tareas, se cuestiona al estudiante (inciso e), sobre la propiedad métrica de contención. Un estudiante que concluya que el nuevo intervalo generado alrededor de $a$ cumple la propiedad métrica de contención, mostrará evidencia de haber *coordinado* tal propiedad.

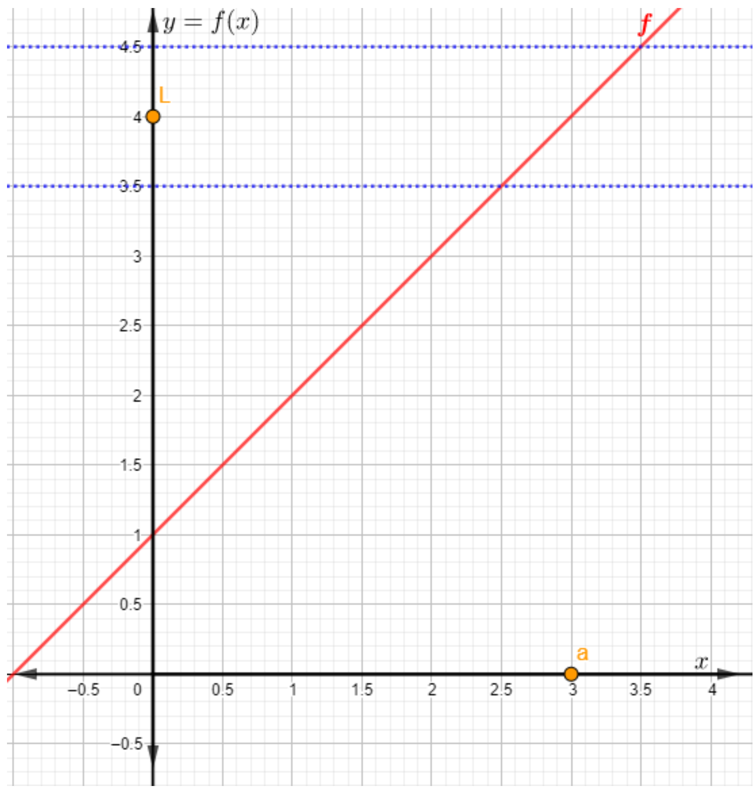
En síntesis, si la tarea es realizada con éxito y el estudiante coordina la propiedad métrica para medidas de proximidad arbitrarias, habrá construido el *Proceso* requerido para probar si un candidato a límite, previamente propuesto, lo es.

**Actividad 10.4**

Esta actividad busca evaluar la construcción del *Proceso* descrito en el paso DG4 de la DG.

**Actividad 10.4**

En la siguiente representación gráfica de $f$, se muestra un intervalo abierto centrado en $L = 4$ (líneas en color azul). A partir de esta representación, responde lo que se te pide.




a) ¿Cuál es el radio del intervalo centrado en $L = 4$?

b) Construye y marca sobre la representación gráfica un intervalo abierto centrado en $a = 3$ de modo que las imágenes de los valores de $x$ contenidas en ese intervalo se mantengan dentro del intervalo centrado en $L = 4$.

c) ¿De qué radio es el intervalo que construiste en el inciso anterior?

Los incisos (a), (b) y (c) evalúan los pasos DG4(A) y DG4(B) de la DG. Un estudiante que realice con éxito la tarea probará haber adquirido la concepción Acción de establecer una medida de proximidad alrededor del valor $a$ y verificar si cumple la propiedad métrica dado un valor de $\varepsilon > 0$. En este caso, el estímulo externo viene dado por la medida de proximidad en torno al valor $L$ y la gráfica propuesta.

Los incisos siguientes, también se analizan en conjunto.

d) ¿Puedes proponer más de un intervalo centrado en $a = 3$ que posea la misma propiedad que se solicitó en el inciso (b)?

e) Si la respuesta a la pregunta anterior es sí. ¿Describe qué característica debe cumplir ese intervalo para que cumpla la propiedad enunciada en el inciso (b)?

Un análisis hipotético de las posibles respuestas de los estudiantes en el contexto de la DG de referencia es el siguiente:

- Si un estudiante afirma que es posible construir otro intervalo alrededor del valor $a$ con la propiedad métrica solicitada, pero no es capaz de enunciar una característica que le permita lograr tal construcción, diremos que posee la concepción Acción, debido a que no es posible para el alumno imaginar lo que sucederá para deducir una consecuencia, en otras palabras, no ha dejado de depender de un estímulo externo.
- En cambio, un estudiante que deduzca que tal propiedad se consigue haciendo que el intervalo alrededor del valor $a$ sea menor que la longitud del intervalo en torno al valor $L$ habrá interiorizado las acciones realizadas en los incisos (a), (b) y (c) y por lo tanto habrá construido la concepción Proceso.

f) Si se te proporcionara un intervalo abierto de menor radio centrado en $L = 4$ ¿consideras posible continuar construyendo intervalos centrados en $a = 3$ cuyas imágenes de los valores $x$ contenidas en ese intervalo se mantengan dentro del intervalo propuesto centrado en $L$? Argumenta tu respuesta.

El inciso (f) busca recabar evidencia con relación a las implicaciones que se producen cuando se reduce nuevamente la medida de proximidad alrededor de $L$, es decir, pueden construirse los intervalos adecuados, en torno al valor $a$, que produzcan la propiedad métrica para medidas arbitrarias del intervalo centrado en $L$.

- Si un estudiante afirma que esto es posible, pero no muestra argumentos sobre cómo lograría tal construcción, diremos que el alumno no ha *coordinado* las implicaciones que tiene reducir la longitud del intervalo alrededor de $L$ sobre el intervalo centrado en $a$.
- Por otra parte, un alumno puede exhibir argumentos sobre lo que debe suceder con la longitud del intervalo centrado en $a$ para garantizar la propiedad métrica. Por ejemplo, responder que cada vez que se reduzca el intervalo alrededor de $L$ hay que reducir la longitud del intervalo alrededor de $a$. Esta afirmación, aunque no siempre válida, refleja que el estudiante ha identificado en una primera etapa el rol de la propiedad métrica. Por lo tanto, habrá *coordinado* tal efecto, para lograr la construcción de la concepción Proceso.

Si bien, una justificación precisa debería enunciarse en términos de ajustar los intervalos de forma que se asegure el cumplimiento de la propiedad métrica y no en la reducción (ya que no siempre es necesario), creemos que, dada la naturaleza constructiva de la instrucción didáctica, hasta este punto es razonablemente válido tomar esta respuesta como suficientemente correcta debido a que aún no se ha confrontado al estudiante con casos en los cuales no sea imprescindible reducir necesariamente el intervalo en $a$ dado un intervalo arbitrario en $L$.

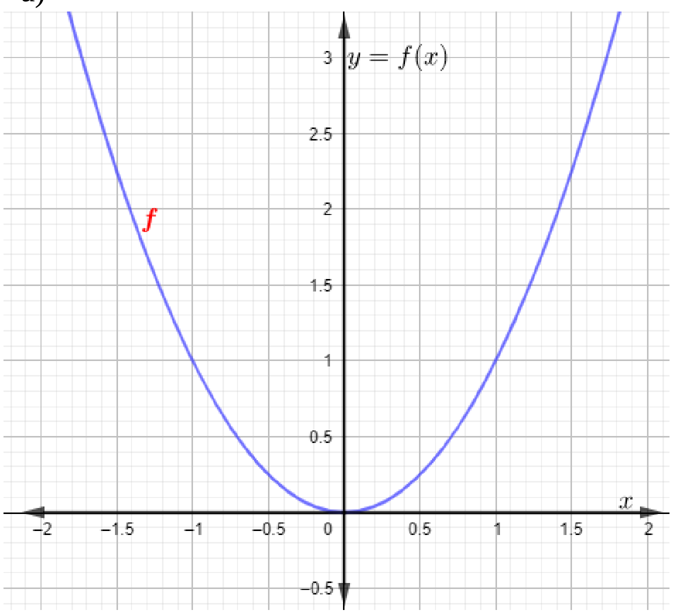
## Actividad 11

Esta actividad continúa promoviendo la construcción del paso DG4 a la vez que se introduce la notación pertinente de la definición formal de límite.

**Actividad 11**

Para la siguiente representación gráfica y los datos proporcionados responde ¿cuál debería ser el radio $\delta$ del intervalo abierto centrado en $a$ para estar seguros de que los valores $f(x)$ se mantengan dentro del intervalo abierto de radio $\varepsilon$ centrado en $L$?

a)




| Para: | | | El intervalo abierto centrado en $a$ debe tener longitud |
|---|---|---|---|
| $L = 1$ | $a = 1$ | $\varepsilon = 0.5$ | $\delta =$ |
| $L = 1$ | $a = 1$ | $\varepsilon = 0.4$ | $\delta =$ |
| $L = 1$ | $a = 1$ | $\varepsilon = 0.3$ | $\delta =$ |
| $L = 1$ | $a = 1$ | $\varepsilon = 0.2$ | $\delta =$ |
| $L = 1$ | $a = 1$ | $\varepsilon = 0.1$ | $\delta =$ |

En este caso, el estudiante debe realizar la acción de proponer intervalos adecuados centrados en el valor $a = 1$ para distintas longitudes del intervalo centrado en $L$, pasos DG4(B) y DG4(C). El estímulo externo es proporcionado por la tabla con diferentes valores de $\varepsilon$ y la representación gráfica de $f$, de modo que el estudiante coordine ambos registros para producir sus respuestas.

b) Si se te proporcionara un intervalo de radio menor centrado en $L$ ¿consideras posible continuar construyendo intervalos centrados en $a$ cuyas imágenes de los valores de $x$ contenidas en ese intervalo se mantengan dentro del intervalo propuesto centrado en $L$? Argumenta tu respuesta.

Con este inciso se pretende obtener evidencia sobre el estado de construcción del paso DG4(C), es decir, si el estudiante es capaz de imaginar la continuación de este proceso para medidas de proximidad cada vez más cercanas a $L$.

c) Apoyándote en tu respuesta a los incisos anteriores, establece si la función del inciso (a) tiene como límite $\boldsymbol{L = 1}$ en el valor $\boldsymbol{a = 1}$. Argumenta tu respuesta.

Con este inciso se pretende favorecer la construcción del paso DG5 de manera que el estudiante asocie el proceso del paso DG4 con la validación del candidato a límite. No se busca que el estudiante deduzca tal propiedad, sino orientar la reflexión a tal conclusión.

Sin embargo, la reflexión buscada debe encaminarse a que el estudiante asocie la veracidad del límite propuesto deduciendo que no habrá un valor de $\varepsilon$ para el cual será imposible construir el intervalo $\delta$ que cumpla la propiedad métrica.

## Actividad 12

La actividad 12 es una retrospectiva de las construcciones mentales logradas por el estudiante hasta este punto de la DG, por tal motivo, incluye 11 incisos que evalúan los primeros 5 pasos de la DG.

**Actividad 12**

La siguiente tabla muestra la evaluación sucesiva de valores $x$ próximos a un valor $a$ para la función $f(x) = 2x + 1$.

$x$ tiende al valor

| $x$ | 0.4 | 0.49 | 0.499 | 0.4999 | ... | ¿ $\boldsymbol{a}$? | ... | 0.5001 | 0.501 | 0.51 | 0.6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x) = 2x + 1$ | 1.8 | 1.98 | 1.998 | 1.9998 | ... | ¿ $\boldsymbol{L}$? | ... | 2.0002 | 2.002 | 2.02 | 2.2 |

$f(x)$ tiende al valor

Utiliza la tabla para responder lo que se te pide.

a) ¿A qué número $\boldsymbol{a}$ se aproximan los valores de $x$?

b) ¿A qué número $\boldsymbol{L}$ se aproximan los valores $f(x)$?

Los incisos (a), (b) evalúan la estructura Proceso de la concepción dinámica, es decir, el paso DG3.

c) Si se ha elegido un intervalo abierto centrado en $L$ de radio $\varepsilon = 0.2$, apoyándote en la tabla determina los valores $f(x)$ que conforman los extremos de ese intervalo y anótalo.

d) ¿Cuál debería ser el radio $\delta$, del intervalo abierto centrado en $a = 0.5$ para estar seguros de que las imágenes de los valores de $x$ contenidas en ese intervalo se mantengan dentro del intervalo centrado en $L$?

Los incisos (c) y (d) examinan la construcción de los pasos DG4(A) y DG4(B), un análisis hipotético de las posibles respuestas de los estudiantes se presenta a continuación:

- Si un estudiante ejecuta de forma acertada las actividades propuestas habrá logrado desarrollar la concepción Acción de validación de un candidato a límite, es decir el estudiante puede realizar la construcción del intervalo de radio $\delta$ centrado en el valor $a$ de manera que se cumpla la propiedad métrica.

e) Si ahora se propone un intervalo centrado en $L$ de radio $\varepsilon = 0.02$, ¿cuál debería ser el radio $\delta$, del intervalo centrado en $a = 0.5$ para estar seguros de que las imágenes de los valores de $x$ contenidas en ese intervalo se mantengan dentro del intervalo centrado en $L$? Argumenta tu respuesta.

f) ¿Puedes proponer más de un intervalo abierto centrado en $a$ que posea la misma propiedad que se solicitó en el inciso (d)?

g) Si la respuesta a la pregunta anterior es sí. ¿Describe qué característica debe cumplir ese intervalo para que cumpla la propiedad enunciada en el inciso (d)?

h) Un intervalo centrado en $L$ tiene radio $\varepsilon = 0.0002$, ¿cuál debería ser el radio $\delta$, del intervalo abierto centrado en $a = 0.5$ para estar seguros de que las imágenes de los valores de $x$

contenidas en ese intervalo se mantengan dentro del intervalo centrado en $L$? Argumenta tu respuesta.

Los incisos (e), (f), (g) y (h), dirigen la reflexión necesaria para construir el paso DG4(C) de la DG, un análisis hipotético de las posibles respuestas de los estudiantes se presenta a continuación:

- En un primer escenario el estudiante puede responder afirmativamente sobre la posibilidad de seguir construyendo el intervalo deseado de forma que se cumpla la propiedad métrica. Diremos que el estudiante ha construido la concepción Proceso de validación de un candidato a límite, paso DG4(C), si exhibe argumentos que reflejan la característica que debe poseer el radio del intervalo $\delta$ en comparación con el intervalo de radio $\varepsilon$. En otras palabras, un estudiante puede argumentar que $\delta < \varepsilon$ y, en etapas más consolidadas del proceso, un estudiante podría concluir que $\delta$ depende del valor de $\varepsilon$.
- En otro caso, el estudiante puede responder afirmativamente a la posibilidad de realizar la construcción solicitada pero no mostrar argumentos sobre porqué o cómo es que se haría, por lo que el estudiante no ha realizado la *interiorización* de las acciones de tal construcción, en este caso diremos que el estudiante únicamente posee la concepción Acción.

i) Si se te proporcionara un intervalo de menor radio, centrado en $L$ ¿consideras posible continuar construyendo intervalos centrados en $a$ cuyas imágenes de los valores de $x$ contenidas en ese intervalo se mantengan dentro del intervalo centrado en $L$? Argumenta tu respuesta.

j) ¿Existirá un intervalo de radio $\varepsilon$ centrado en $L$, a partir del cual ya no sea posible construir un intervalo de radio $\delta$ centrado en $a$ que cumpla la propiedad del inciso (d)? Argumenta tu respuesta.

k) Apoyándote en tu respuesta a la pregunta anterior, establece si el siguiente enunciado es verdadero y argumenta tu respuesta. Para la función $f(x) = 2x + 1$, $\boldsymbol{L}$ es el límite de la función en el valor $\boldsymbol{a}$.

Los incisos (i), (j) y (k), guían la reflexión para la construcción del paso DG5, un análisis hipotético de las posibles respuestas de los estudiantes se presenta a continuación:

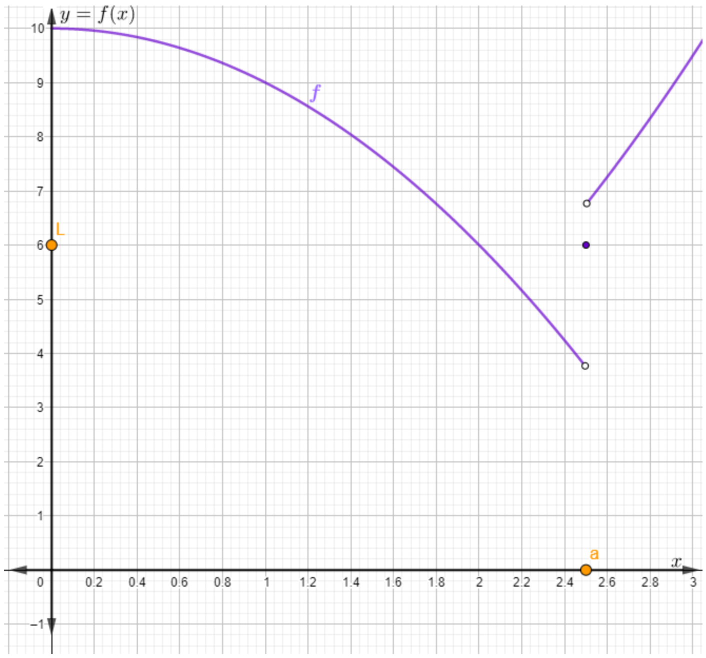
- Si el estudiante concibe la posibilidad de continuar (teóricamente) produciendo el intervalo deseado, $\delta$, cada vez que se proponga un valor de $\varepsilon$ a través del proceso del paso DG4, diremos que ha *coordinado* la acción de validación del candidato a límite y ha logrado asociar este procedimiento con la existencia del límite, por lo que habrá conseguido construir el paso DG5.
  En otras palabras, un estudiante que argumente que el límite propuesto $L$ realmente es el límite de la función, debe deducir como conclusión que no habrá un valor de $\varepsilon$ para el cual será imposible construir el intervalo $\delta$ que cumpla la propiedad métrica.

- En cambio, un estudiante puede tener conciencia, a nivel Proceso, del procedimiento de generación de los intervalos cada vez que se propone un valor de $\varepsilon$ arbitrario y concluir que siempre será posible realizar tal procedimiento, pero puede no ser capaz de relacionar esta propiedad como necesaria para asegurar la validación del límite $L$ propuesto.

Cabe mencionar que el inciso (j) busca conducir a la reflexión de que no siempre podrá lograrse la construcción del proceso del paso DG4. Un estudiante que muestre dificultades en la construcción del paso DG5 puede encontrar un andamio cognitivo si se enfrenta a casos en los cuales tal propiedad de contención no siempre se logra, como en la siguiente actividad:

## Actividad 13

Utiliza la siguiente representación gráfica de $f$ para responder lo que se te pide.




a) Considera un intervalo abierto de radio $\varepsilon = 3$ centrado en $L = 6$. Dibuja sobre la representación gráfica las rectas (punteadas): $y = L - \varepsilon$ , $y = L + \varepsilon$ para indicar dicho intervalo.

b) Construye y marca sobre la representación gráfica un intervalo abierto centrado en $a = 2.5$ de radio $\delta$ (con extremos $x = a - \delta$ , $x = a + \delta$) de forma que los $x$ contendios en ese intervalo produzcan valores $f(x)$ que se mantengan dentro del intervalo centrado en $L$.

c) ¿Cuál es el valor del radio $\delta$ que construiste?

d) Si ahora se elige un intervalo de radio $\varepsilon = 0.4$ centrado en $L = 6$ ¿es posible construir un intervalo centrado en $a = 2.5$ de radio $\delta$, de forma que los $x$ contenidos en ese intervalo produzcan valores $f(x)$ que se mantengan dentro del intervalo centrado en $L$? Argumenta tu respuesta.

Los incisos del (a) al (d) promueven, nuevamente, la construcción del paso DG4. En esta actividad, el estímulo externo viene dado por la representación gráfica de la función. Otro elemento importante es que los extremos de los intervalos en torno a los valores $L$ y $a$ se proporcionan en forma genérica como preámbulo al trabajo con las desigualdades $|f(x) - L| < \varepsilon$ y $|x - a| < \delta$.

e) Apóyate en tu respuesta a la pregunta anterior, deduce si $L = 6$ es el límite de la función $f$ en el valor $a = 2.5$. Usa la representación gráfica proporcionada para argumentar tu respuesta.

Este inciso, pretende confrontar al estudiante con la estructura mental desarrollada hasta este momento, sea a nivel de Acción o Proceso. En este sentido el estudiante enfrenta un caso en el cual no es posible ajustar el intervalo de radio $\delta$ centrado en $a$ para un valor particular $\varepsilon = 0.4$ centrado en $L$.

Este planteamiento permite extraer información a distintos niveles. Un análisis hipotético es el siguiente:

- En principio, un estudiante en la concepción Proceso del paso DG4 puede mostrar de manera gráfica (trazando los intervalos) que, no importando cuanto reduzca el intervalo de radio $\delta$, la propiedad métrica no se cumple para todas las imágenes $f(x)$ de los valores $x$ contenidos en el intervalo centrado en el valor $a$. A partir de tal observación, el estudiante puede asociar la imposibilidad de tal proceso de ajuste con la conclusión de que el candidato $L$ no es el límite de la función en el valor $a$. En tal situación, el estudiante habrá fortalecido la construcción del paso DG5, ya que ha nutrido el proceso de validación de un candidato a valor límite y ahora es capaz de discernir en qué casos el candidato a límite es verdaderamente el límite y en cuáles no, a partir del cumplimiento o no de la propiedad métrica.

- Por su parte podría haber estudiantes que aún se encuentren en la concepción Acción del paso DG4, es decir, realizan el proceso de ajuste de intervalos, pero no relacionan la capacidad de continuar este procedimiento (teóricamente) con la validación de que el candidato a límite realmente lo es. Al exhibir un caso concreto, en el cual el proceso de ajuste del intervalo $\delta$ falla para un $\varepsilon$ particular, el alumno amplía su esquema de la situación al observar que tal propiedad puede o no ocurrir. Con estas nuevas herramientas cognitivas, un estudiante en la concepción Acción puede *interiorizar* de forma más gradual las acciones del paso DG4 y *coordinarlas* para deducir el cumplimiento o no de la propiedad métrica, para obtener el procedimiento de validación del candidato a límite. En tal situación, se espera que el estudiante logre la construcción del paso DG5.

La actividad 14 encamina al estudiante a proponer un candidato al límite y a verificar si el candidato es el límite de la función, estos procesos son respectivamente los enunciados en los pasos DG3 y DG4.

## Actividad 14

La siguiente tabla muestra la evaluación sucesiva de valores $x$ próximos a un valor $a$ para la función

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & si\ x \neq 4 \\ 1, & si\ x = 4 \end{cases}$$

$x$ tiende al valor

| $x$ | 3.9 | 3.99 | 3.999 | 3.9999 | ⋯ | ¿ $\boldsymbol{a}$? | ⋯ | 4.0001 | 4.001 | 4.01 | 4.1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1.97484 | 1.99749 | 1.99974 | 1.99997 | ⋯ | ¿ $\boldsymbol{L}$? | ⋯ | 2.00002 | 2.00024 | 2.00249 | 2.02484 |

$f(x)$ tiende al valor

Utiliza la tabla para responder lo que se te pide.

a) ¿A qué número $\boldsymbol{a}$ se aproximan los valores de $x$?

b) ¿A qué número $\boldsymbol{L}$ se aproximan los valores $f(x)$?

c) Propón un intervalo de radio $\varepsilon$ centrado en $L$, que te permita deducir si $L$ es el límite de la función $f$ en el valor $a$. Argumenta tu respuesta.

Hasta este punto se considera que el estudiante es capaz de proponer el candidato a límite, a partir de los incisos (a) y (b). El análisis parte de que en el inciso (c) se asume que el estudiante puede inferir una respuesta única, para un intervalo particular y no considerar la arbitrariedad en la longitud del intervalo de radio $\varepsilon$, en parte debido a la estructura de la pregunta. Sin embargo, se espera que al haber trabajado recurrentemente en el registro grafico el estudiante haga uso de este registro e intente representar tal planteamiento, aun teniendo en cuenta que no se menciona este registro de forma directa en la tarea solicitada.

Un análisis hipotético de las posibles respuestas es el siguiente:

- Conducido por la forma de la pregunta, el estudiante puede dar una longitud al intervalo de radio $\varepsilon$ y deducir si el límite existe. Es decir, el estudiante puede haber construido el paso DG5, asociar la producción perpetua de la propiedad métrica de los intervalos con la validación del candidato a límite, pero no distingue el papel del cuantificador $\forall$ “para todo” de la definición de límite como condición fundamental en el proceso de validación del límite propuesto.
- En menor medida se esperaría que el estudiante esboce la gráfica de la función a partir de la información proporcionada y desemboque en un conflicto al generar los intervalos y examinar la propiedad métrica. Lo anterior debido al comportamiento de la función en el valor $x = 4$. En cuyo caso, el razonamiento del estudiante llevaría a deducir que el candidato $L$ a límite en realidad no es el límite de la función en el valor analizado.

En ambos escenarios lo que buscamos es, por un lado, enfocar la atención del estudiante en el papel de los cuantificadores y por el otro observar que el valor de interés $a$ no es el objeto de estudio, sino el comportamiento de los valores en torno a dicho valor.

Es importante mencionar que las actividades 13, 14 y 15 han desarrollado en gran medida la notación y reflexión pertinente en torno a la definición de límite bajo la concepción métrica.

## Actividad 15

Esta actividad se diseñó para evaluar el estado de las estructuras mentales que los estudiantes han desarrollado hasta este punto de la secuencia, lo cual consiste en los primeros 5 pasos de la DG. Adicionalmente, se aborda el objetivo de lograr la construcción del paso DG6, el cual consiste en encapsular los pasos DG4 y DG5 por medio de la noción de arbitrariedad.

**Actividad 15**

Considera la función $f(x) = 8x - 2$, el valor $a = 4$ en el dominio de $f$ para responder lo que se te pide.

a) Propón un valor $L$, como límite de la función $f$ en el punto $a = 4$ y represéntalo simbólicamente.

- Este inciso evalúa la construcción de los 3 primeros pasos de la DG, se espera que el estudiante proponga valores cercanos $a = 4$ y únicamente recibe como estímulo externo la expresión analítica de la función. Un alumno que genere una representación tabular con una sucesión de valores cada vez más próximos al valor de interés del dominio, realice las evaluaciones correspondientes bajo $f$ y proponga el valor $L$ como límite. Mostrara evidencia de haber alcanzado la concepción Proceso de aproximación.

b) Considera un intervalo de radio $\varepsilon = 0.02$ centrado en $L$, determina un intervalo centrado en $a = 4$, en el cual se cumpla la desigualdad $|f(x) - L| < \varepsilon$.

c) Proporciona un valor $\delta > 0$ que permita construir un intervalo centrado en $a = 4$ que cumpla que para todos los valores $x$ que satisfacen $0 < |x - a| < \delta$, se cumpla la desigualdad $|f(x) - L| < \varepsilon$.

- Los incisos (b) y (c) evalúan la concepción a nivel Acción del paso DG4(B), si el estudiante realiza con éxito la construcción del intervalo de radio $\delta$ (inciso b) que cumpla la propiedad métrica y exhibe un valor adecuado para $\delta$ ( inciso c), diremos que ha relacionado la acción de construir la medida de proximidad en torno al valor $a$ con su representación estática, a saber $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$, para valores particulares de $\varepsilon$.

  Lo anterior se logra en el momento en que el estudiante, partiendo del trabajo algebraico con la desigualdad $|f(x) - L| < \varepsilon = 0.02$, construye la desigualdad $|x - a| < \delta$.

d) Si se genera un intervalo de radio $\varepsilon > 0$ centrado en $L$, ¿cuál debería ser el valor de $\delta > 0$ necesario para construir un intervalo centrado de $a = 4$ que cumpla la propiedad solicitada en el inciso (c)?

- En este caso se somete a evaluación la concepción Proceso del paso DG4, el estudiante debe pensar en una medida de proximidad arbitraria en torno a $L$, la construcción por parte del estudiante es llevada al caso general de trabajar con la desigualdad $|f(x) - L| < \varepsilon$, equiparable al paso DG4(C).

  Se espera que los alumnos utilicen como andamiaje el tratamiento particular para $\varepsilon = 0.02$ y repliquen el proceso para el caso general, esto es, la condición $\forall \varepsilon > 0$.

e) Usando como argumento tu respuesta al inciso anterior responde si la función $f(x) = 8x - 2$ tiene límite $L$ en el valor $a = 4$.

- Este inciso pretende que el estudiante logre encapsular los pasos DG4 y DG5. El objetivo es analizar si el estudiante es capaz de deducir la veracidad del límite. Es importante comprender que para lograrlo, el estudiante necesita realizar la *coordinación* de los procesos construidos y *encapsularlos* a través del tratamiento analítico de las condiciones requeridas en la definición de límite, a saber: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0\ tal\ que\ si\ |f(x) - L| < \varepsilon\ entonces\ |x - a| < \delta$.
- Un estudiante puede responder en dos sentidos, atendiendo únicamente a afirmar que el límite es $L = 30$. O bien, atender a la notación $\lim_{x \to 4} f(x) = 30$. Pero sin hacer hincapié en las condiciones estáticas de los procesos recogidos en la definición.
- Por otra parte, si un estudiante es capaz de confirmar la veracidad del límite y argumentar su respuesta en torno a la versión estática de los procesos implicados en su determinación (es decir en términos de la definición de límite) exhibirá haber *encapsulado* los pasos DG4 y DG5. Si un estudiante logra tal transición diremos que ha construido el concepto de límite a nivel de Objeto.

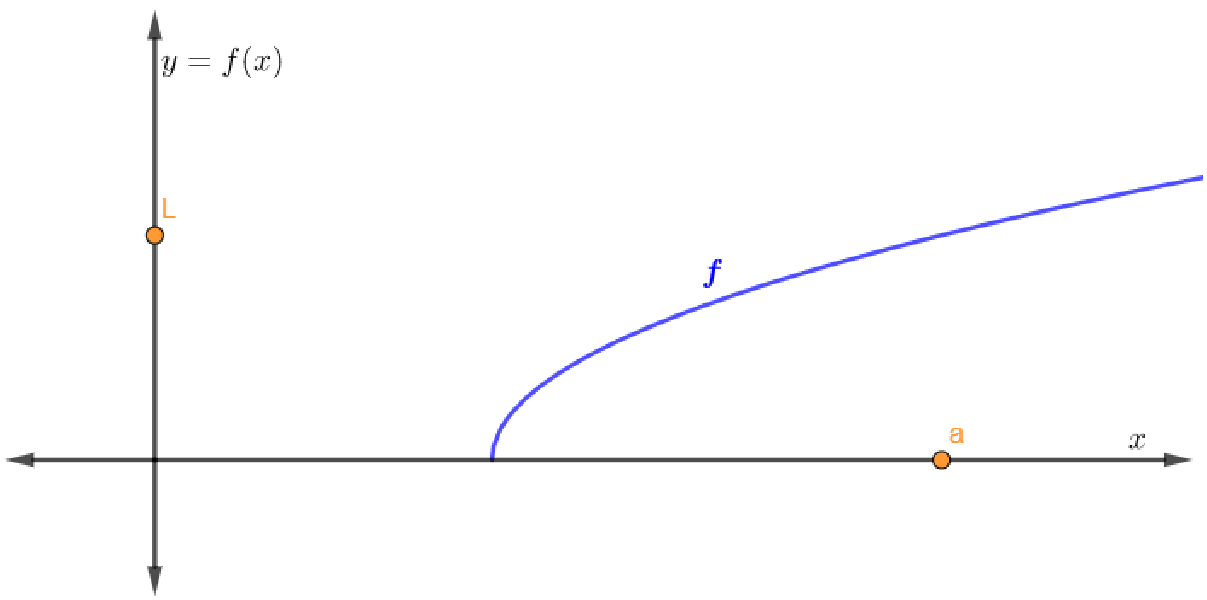
## Actividades 16, 17, 18 y 19

Este conjunto de actividades busca reforzar las construcciones de la DG, principalmente en sus pasos DG4, DG5 y DG6 en términos de las condiciones necesarias y suficientes, de la definición, de modo que el estudiante *interiorice* las acciones y *coordine* los procesos que permitan lograr la construcción del concepto de límite. Por tal razón, solo se mencionan algunas características generales de las actividades.

**Actividad 16**

a) Para el $\lim_{x \to 7} \sqrt{x-3} = 2$, y el valor $\varepsilon = 1$, halla un $\delta > 0$, que cumpla que para todos los valores de $x$ que satisfacen $0 < |x - a| < \delta$, se cumpla la desigualdad $|f(x) - L| < \varepsilon$.

b) En la siguiente representación gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x-3}$ representa los intervalos centrados en $L$ y $a$ respectivamente. Indica los valores correspondientes.




Esta actividad promueve la construcción en términos de desigualdades del paso DG4(A) y DG4(B), tanto en el registro algebraico como en el gráfico, su finalidad es explorar si el estudiante es capaz de dar sentido a la determinación algebraica-analítica del límite en el registro gráfico.

**Actividad 17**

Prueba que el $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$, si $f(x) = \begin{cases} x^2, & si \ \ x \neq 2 \\ 1, & si \ \ x = 2 \end{cases}$

a) Describe las condiciones que se necesitan cumplir para realizar la prueba.

b) Realiza la prueba.

Esta actividad conduce la reflexión del estudiante, a establecer las condiciones que deben probarse para asegurar la validación del límite propuesto, motivo por el cual, el ejercicio parte de proponer el valor candidato a límite y preguntar por la justificación.

- Si un estudiante establece las condiciones en términos de las desigualdades y cuantificadores de la definición de límite, diremos que ha asociado el proceso de validación del límite propuesto, con la noción de arbitrariedad y la propiedad métrica de contención, por lo que, si además es capaz de realizar la prueba diremos que ha logrado *encapsular* los procesos del paso DG4 y DG5 y ha construido el paso DG6.
- En cambio, un estudiante puede, a estas alturas, ofrecer una respuesta en términos de la propiedad métrica y su naturaleza dinámica, pero no asociar la posibilidad de que tal proceso debe considerarse en forma estática de forma que su tratamiento algebraico permita confirmar la veracidad del límite propuesto.

**Actividad 18**

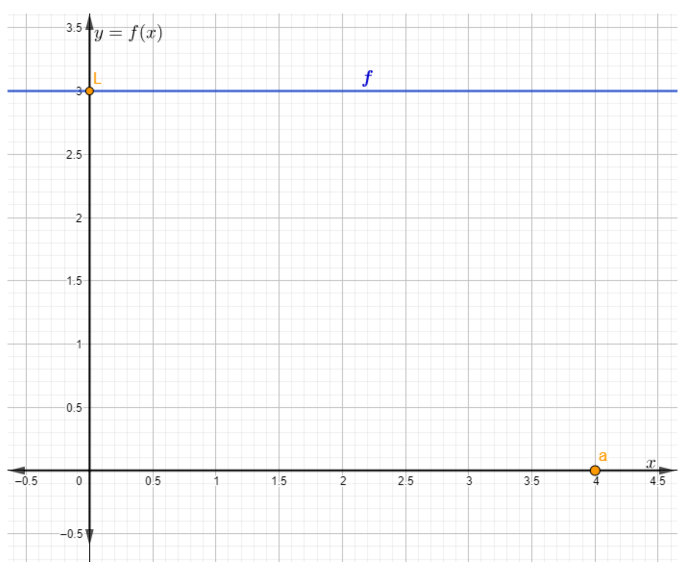
Prueba que el $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$

a) Describe las condiciones que se necesitan cumplir para realizar la prueba.

b) Realiza la prueba.

**Actividad 19**

Utiliza la siguiente representación gráfica de $f(x) = 3$ para responder lo que se te pide.



a) Considera un intervalo abierto de radio $\varepsilon = 0.5$ centrado en $L = 3$. Dibuja sobre la representación gráfica las rectas (punteadas): $y = L - \varepsilon$ , $y = L + \varepsilon$ para indicar dicho intervalo.

b) Construye y marca sobre la representación gráfica un intervalo abierto centrado en $a = 4$ de radio $\delta$ (con extremos $a - \delta$ , $y = a + \delta$) de forma que los $x$ contendios en ese intervalo produzcan valores $f(x)$ que se mantengan dentro del intervalo centrado en $L$.

c) ¿Cuál es el valor del radio $\delta$ que construiste?

d) Si ahora se elige un intervalo de radio $\varepsilon = 0.2$ centrado en $L = 3$ ¿qué radio elegirías para $\delta$ de forma que se cumpla la propiedad solicitada en el inciso (b)?

e) Si ahora se elige un intervalo de radio $\varepsilon = 0.003$ centrado en $L = 3$. ¿Qué radio elegirías para $\delta$ de forma que se cumpla la propiedad solicitada en el inciso (b)?

f) Describe qué es lo que sucede con el radio $\delta$ para la función $f(x) = 3$.

Las actividades 18 y 19 buscan orientar la reflexión del estudiante con relación al valor $a$ en torno al cual se desea indagar sobre el límite de la función, el cual, no necesariamente debe estar contenido en el dominio de definición (actividad 18) y por otra parte robustecer la concepción del Objeto límite, exhibiendo un caso en el cual el ajuste dinámico de los intervalos no siempre implica una reducción.

## Actividad 20

Esta actividad explora la concepción que hasta este punto un estudiante se ha formado a partir de las construcciones mentales realizadas. Para ello, se presenta al estudiante un ejercicio en el cual los valores presentados no arrojan información concluyente sobre el comportamiento de la función cerca del valor $x = 0$.

**Actividad 20**

Utiliza la información de la tabla para responder lo que se te pide.

$x$ tiende al valor

| $x$ | -3 | -1.7 | -0.8 | -0.5 | 0 | 0.1 | 1 | 1.7 | 2.9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 8 | 2.1415 | 0.125 | 0.7485 | 2 | 3.1504 | 2 | 0.1657 | 3.1218 |

$f(x)$ tiende al valor

a) ¿A partir de los valores de la tabla es posible determinar $\lim_{x \to 1} f(x)$? Argumenta tu respuesta.

b) Si tu respuesta fue sí ¿cuál es el $\lim_{x \to 1} f(x)$? Argumenta tu respuesta

- Un estudiante puede, dada la información, responder que no es posible a través de dicha información proponer un valor como candidato a límite. Más aún podría argumentar, en una respuesta idónea, que la aproximación no es lo suficientemente cercana para deducir conclusiones. En este caso el estudiante exhibirá una concepción objeto de límite mucho más sólida, debido a que, para deducir tal conclusión el estudiante debe pensar en que los intervalos alrededor del valor de interés del dominio no son lo suficientemente próximos.
- Un estudiante puede afirmar que el límite es 2 e intentar realizar una prueba de este hecho, en tal situación el estudiante puede no haber *encapsulado* los procesos de aproximación y validación de un candidato a límite.

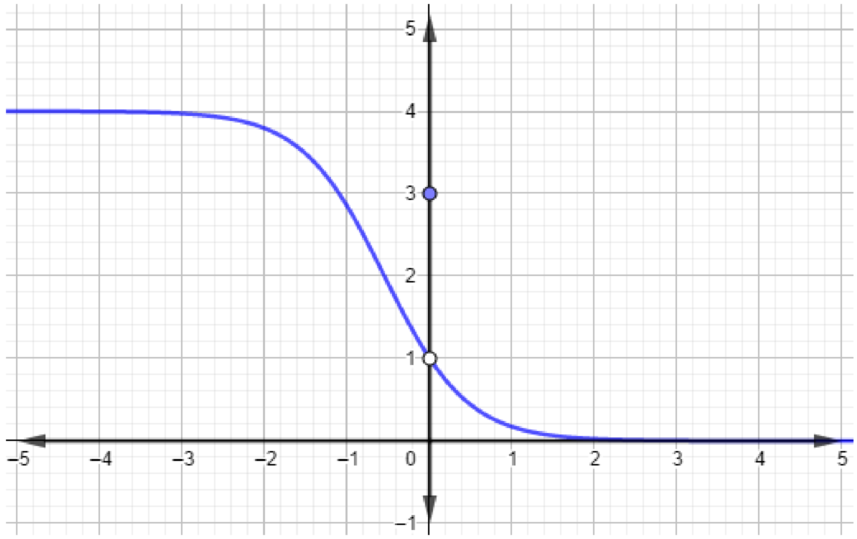
## Actividades 21, 22, 23, 24 y 25

Este conjunto de actividades busca reforzar la concepción del concepto de límite que el estudiante posee en el registro gráfico. Para lo cual se pide al estudiante deducir la veracidad o falsedad de las afirmaciones a partir de la representación gráfica de la función.

Adicionalmente, lo que se pretende es que el estudiante *desencapsule* el Objeto límite construido y *revierta* los procesos de aproximación y validación del candidato a límite.

### Actividad 21

Considera la gráfica de la función $f$ y determina qué expresiones de límite son correctas y cuáles no, argumenta tus respuestas.



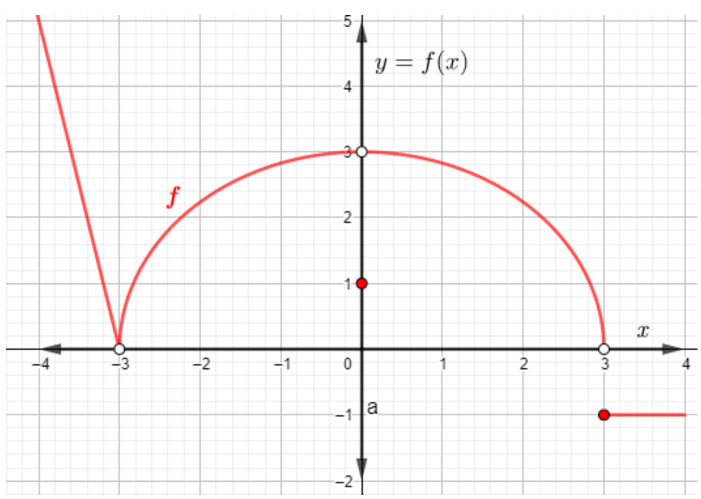

a) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 3$

b) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$

c) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)\ no\ exite$

**Actividad 22**

Considera la gráfica de la función $f$ y determina qué expresiones de límite son correctas y cuáles no, argumenta tus respuestas.



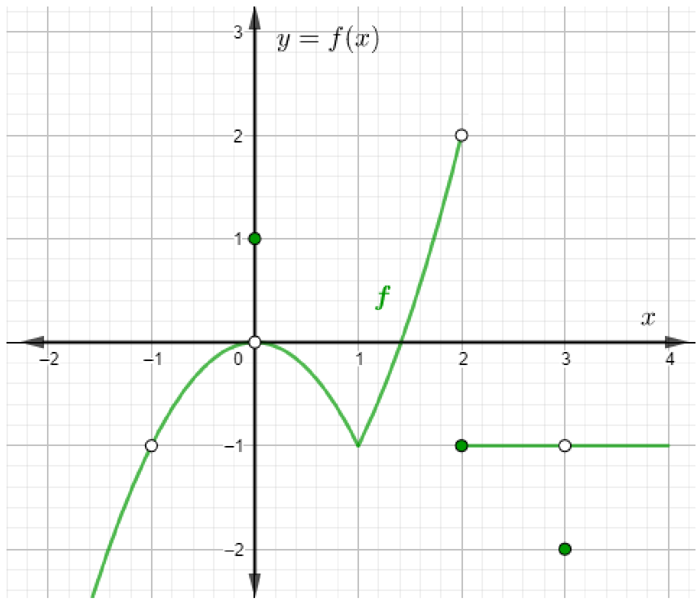

a) $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = 0$

b) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 3$

c) $\lim_{x \to 3} f(x) = -1$

**Actividad 23**

Considera la gráfica de la función $f$ y determina qué expresiones de límite son correctas y cuáles no, argumenta tus respuestas.




a) $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$

b) $\lim_{x \to 2} f(x) = -1$

c) $\lim_{x \to -1} f(x) = -1$

d) $\lim_{x \to 3} f(x) = -1$

**Actividades 24 y 25**

Este conjunto de actividades promueve la *desencapsulación* del Objeto límite construido y la *reversión* de los procesos de aproximación y validación del candidato a límite a través de una serie de enunciados que le permiten proponer una gráfica que represente tal situación.

**Actividad 24**

Una función $f$ se comporta de la siguiente manera cerca del valor $a = -2$ (perteneciente al dominio de la función):

Afirmación 1. A medida que $f$ se aproxima al valor $a = -2$ desde la izquierda, $f(x)$ se aproxima al valor $5$.

Afirmación 2. A medida que $f$ se aproxima al valor $a = -2$ desde la derecha, $f(x)$ se aproxima al valor $4$.

Con la información anterior realiza lo que se te pide.

a) Elabora una representación gráfica aproximada para ilustrar el comportamiento de $f$ cerca del valor $a = -2$. (Utiliza una función lo más sencilla posible).
b) Escribe las afirmaciones 1 y 2 en forma simbólica.
c) Argumenta si el $\lim_{x \to -2} f(x)$ existe o no.

**Actividad 25**

a) Realiza al menos 4 representaciones gráficas posibles de cómo una función podría tener un límite de 4 en $x = 3.5$

# Capítulo 4

# Análisis de los resultados

En este capítulo presentamos la discusión y análisis de los principales resultados de la implementación de las actividades. Los resultados que se exponen reflejan las construcciones mentales logradas por los estudiantes durante el ciclo de la instrucción.

## 4.1 Análisis de los datos obtenidos

Con el objetivo de determinar la viabilidad de las actividades desarrolladas y recuperar información sobre su idoneidad, estas fueron aplicadas en un grupo de estudio cuyas características y metodología se expusieron en el capítulo 3.

Los resultados que se discuten informan únicamente el desempeño de los estudiantes en 8 de las 25 actividades desarrolladas, las cuales permiten analizar las estructuras mentales logradas por los estudiantes durante la implementación de la instrucción.

La siguiente tabla resume las actividades que se seleccionaron para ser analizadas y el registro semiótico utilizado.

| **Actividad/Registro** |
|---|
| Actividad 1/Algebraico, numérico |
| Actividad 2/Gráfico, numérico |
| Actividad 11/Gráfico, numérico |
| Actividad 12/Algebraico, numérico |
| Actividad 15/Algebraico |
| Actividad 18/Algebraico |
| Actividad 23/Gráfico |

*Tabla 3 Actividades analizadas*

Debido a la selección de actividades a analizar, se advierte al lector que estas no se examinarán de forma progresiva, es decir, no se sigue el orden de acuerdo con la numeración de las actividades, sino que el análisis se desarrollará con base en las estructuras mentales, por lo que en ocasiones comenzaremos con una cierta actividad y después regresaremos a ella para constatar otro tipo de estructura mental.

## 4.2 Estructura Acción (concepción dinámica)

Un estudiante que posee esta estructura puede evaluar una función $f$ en un sólo valor $x$ que se considere cercano o incluso igual a un valor $a$. En otra etapa, dentro de esta misma concepción, el estudiante puede evaluar la función $f$ en más valores, cada valor sucesivo más próximo al valor $a$ que el anterior. Estas acciones se asocian a los dos primeros pasos de la DG.

Para evidenciar la construcción de dicha estructura mental se seleccionaron las actividades 1 y 2, la primera en el registro algebraico-numérico y la segunda en el registro gráfico, en las cuales los estudiantes deben realizar las acciones antes descritas y completar la tabla proporcionada.

El 100% de los estudiantes logró evaluar de forma correcta la función en puntos cada vez más próximos al valor de interés, por lo que se considera que los estudiantes fueron capaces de desarrollar la estructura mental Acción.

Por ejemplo, el estudiante E1 completa de forma correcta la tabla proporcionada con los valores correctos bajo la función $f$.

**Actividad 1**

Considera la función $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 3x + 2$ y el valor $x = 0$.

a) Evalúa la función $f$ en los valores $x$ que se presentan en la primera fila de la siguiente tabla y anota sus correspondientes valores $f(x)$.

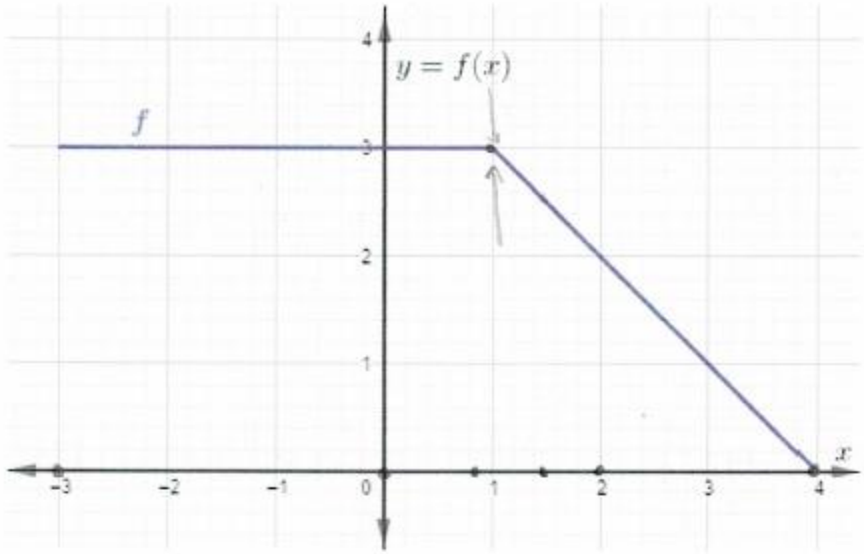
| $x$ | $-1$ | $-0.5$ | $-0.25$ | ... | **0** | ... | 0.02 | 0.6 | 0.98 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | -6 | -0.375 | 1.079 | ... | 2 | ... | 2.06 | 3.7 | 5.84 |

*Figura 6 Actividad 1 (a) estudiante E1*

Otro ejemplo puede verse en la producción del estudiante E18, el cual desarrolla acciones similares en el registro gráfico al completar la tabla de valores con las imágenes $f(x)$ para los valores de $x$ proporcionados usando como estímulo externo la representación gráfica de la función.

**Actividad 2**

Considera la siguiente representación gráfica de una función $f$ para responder lo que se te pide.




a) Determina los valores $f(x)$ de la función para los valores de $x$ que se presentan en la tabla siguiente:

| $x$ | $-3$ | 0 | 0.8 | ... | 1 | ... | 1.4 | 2 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 3 | 3 | 3 | ... | 3 | ... | 2.8 | 2 | 0 |

*Figura 7 Actividad 2 (a) estudiante E18*

En conclusión, podemos aseverar que los estudiantes manifestaron la concepción Acción en ambos registros de representación.

## 4.3 Estructura Proceso (concepción dinámica)

Las actividades de la 1 a la 10, sirvieron de base para construir, progresivamente, la estructura Proceso de la concepción dinámica. Sin embargo, únicamente se presenta el resultado del inciso (a) de la actividad 15, en ella se pide al estudiante directamente proponer un valor límite para la función $f(x) = 8x - 2$ en el valor $a = 4$.

Un estudiante que construye por su cuenta una sucesión de valores próximos al valor $a = 4$, obtiene la sucesión de valores en el rango a través de la función $f$ para los valores propuestos y es capaz de proponer un candidato $L$ como valor límite, habrá construido y coordinado los procesos indicados en el paso DG3.

El 92% de los estudiantes propuso una serie de valores cada vez más próximos al valor $a = 4$, evaluó correctamente las imágenes de dicha sucesión bajo la función $f$ proporcionada y coordinó correctamente ambos procesos para proponer el candidato a valor límite $L = 30$. Por lo que se afirma que estos estudiantes lograron construir la estructura Proceso de límite como aproximación dinámica.

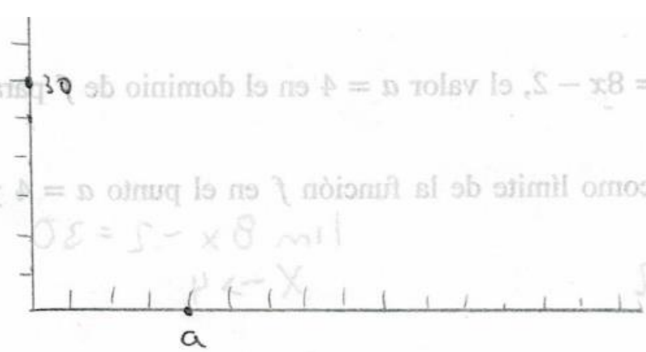
Destaca el hecho de que 36% de los estudiantes, además del registro tabular, realizaron la representación gráfica, parcial o total, de la situación sin que se les hubiera solicitado. Lo que evidencia la capacidad de interpretación de las acciones realizadas en ambos registros promovida en las actividades de la 1 a la 9.

Mostramos como sustento de estas afirmaciones el trabajo del estudiante E25, quien además de proponer el candidato a límite, a partir de la función analítica, realiza un esbozo gráfico de la situación.

**Actividad 15**

Considera la función $f(x) = 8x - 2$, el valor $a = 4$ en el dominio de $f$ para responder lo que se te pide.

a) Propón un valor $L$, como límite de la función $f$ en el punto $a = 4$ y represéntalo simbólicamente.



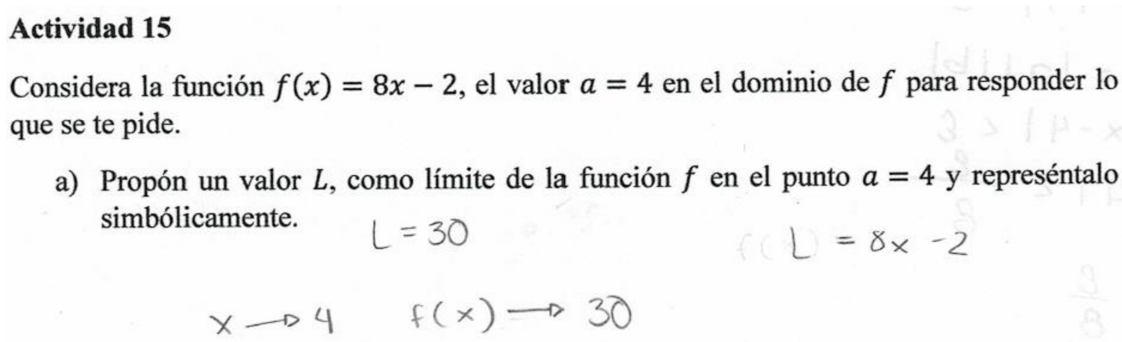

a

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3.9 | 3.99 | 3.999 | 3.9999 | 4 | 4.0001 | 4.001 | 4.01 | 4.1 |
| 29.2 | 29.92 | 29.992 | 29.9992 | 30 | 30.0008 | 30.008 | 30.08 | 30.8 |

L

*Figura 8 Actividad 15 (a) estudiante E25*

Por otra parte, 8% de los estudiantes proponen el valor $L = 30$ pero no evidencian cómo es que obtuvieron dicha conclusión. En su caso, no se cuenta con evidencia para afirmar que estos alumnos construyeron la estructura Proceso de límite como aproximación dinámica a partir de la actividad 15 (a). Por ejemplo, el estudiante E19 realiza la sustitución directa del valor $x = 4$ en la función $f(x) = 8x - 2$ para determinar el candidato a límite.



**Actividad 15**

Considera la función $f(x) = 8x - 2$, el valor $a = 4$ en el dominio de $f$ para responder lo que se te pide.

a) Propón un valor $L$, como límite de la función $f$ en el punto $a = 4$ y represéntalo simbólicamente.

$L = 30$ $\qquad f(L) = 8x - 2$

$x \to 4 \qquad f(x) \to 30$

*Figura 9 Actividad 15 (a) estudiante E19*

Por lo anterior, no es posible determinar, a partir de la evidencia escrita, si el estudiante ha construido la estructura Proceso de límite como aproximación dinámica.

## 4.4 Estructura Acción (concepción métrica)

La concepción métrica de límite se asocia con el proceso de validación del candidato a límite, el cual se divide, inicialmente, en tres etapas descritas en el paso DG4.

Para construir la concepción métrica un estudiante debe realizar las acciones por las cuales se selecciona una medida de proximidad al valor límite $L$ propuesto (DG4(A)) y se determina si existe un intervalo alrededor del valor $a$ que cumpla la propiedad métrica: $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ , paso DG4(B) para un valor particular de $\varepsilon$.

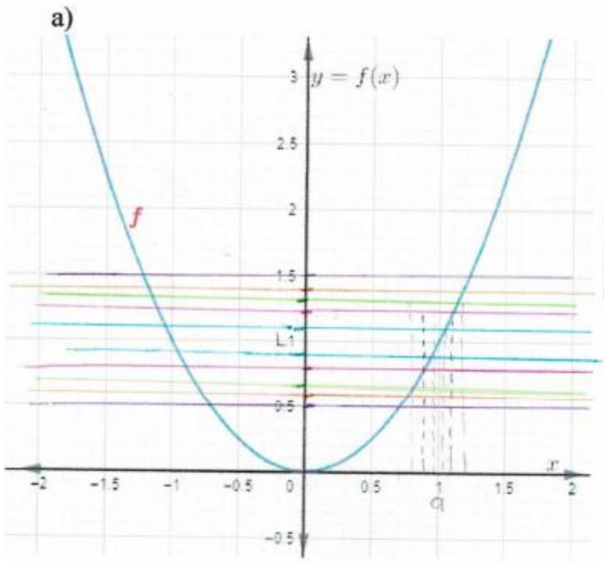
Un estudiante que posee la estructura Acción de la concepción métrica realiza dicha tarea para valores particulares de $\varepsilon$ como puede advertirse en la actividad 11 inciso (a) en la cual el 100% de los estudiantes logró calcular valores $\delta > 0$ para valores de $\varepsilon > 0$ particulares.

Veamos el trabajo desarrollado por el estudiante E17.

**Actividad 11**

Para la siguiente representación gráfica y los datos proporcionados responde ¿cuál debería ser el radio $\delta$ del intervalo abierto centrado en $a$ para estar seguros de que los valores $f(x)$ se mantengan dentro del intervalo abierto de radio $\varepsilon$ centrado en $L$?

a)



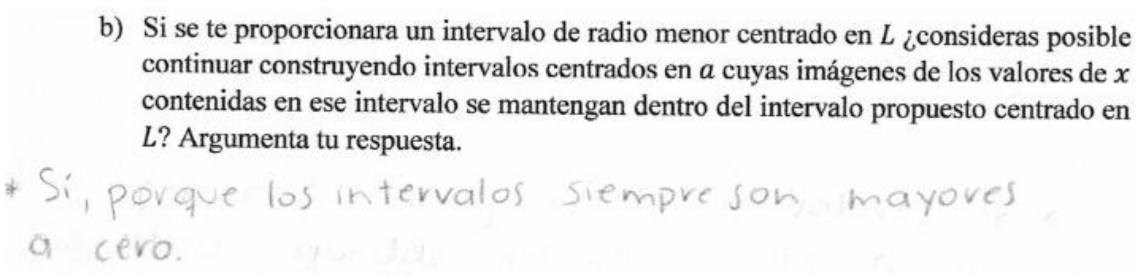

| Para: | | | El intervalo abierto centrado en $a$ debe tener longitud |
|---|---|---|---|
| $L = 1$ | $a = 1$ | $\varepsilon = 0.5$ | $\delta =$ 0.4 |
| $L = 1$ | $a = 1$ | $\varepsilon = 0.4$ | $\delta =$ 0.3 |
| $L = 1$ | $a = 1$ | $\varepsilon = 0.3$ | $\delta =$ 0.2 |
| $L = 1$ | $a = 1$ | $\varepsilon = 0.2$ | $\delta =$ 0.1 |
| $L = 1$ | $a = 1$ | $\varepsilon = 0.1$ | $\delta =$ 0.01 |

*Figura 10 Actividad 11 (a) estudiante E17*

## 4.5 Estructura Proceso (concepción métrica)

Un estudiante debe, en una segunda etapa, reflexionar sobre las acciones del paso DG4(A) y DG4(B), de modo que pueda *interiorizar* estas acciones y replicar esta tarea para valores cada vez más próximos de $\varepsilon$ al valor $L$, paso DG4(C), posteriormente, debe asociar la posibilidad de continuar, teóricamente, la producción del intervalo deseado con la validación del candidato a límite, paso DG5.

Continuemos ejemplificando esta concepción bajo la Actividad 11 (b) en la que se cuestiona la posibilidad de continuar teóricamente con el proceso de construcción métrico, el estudiante E17 concluye lo siguiente:

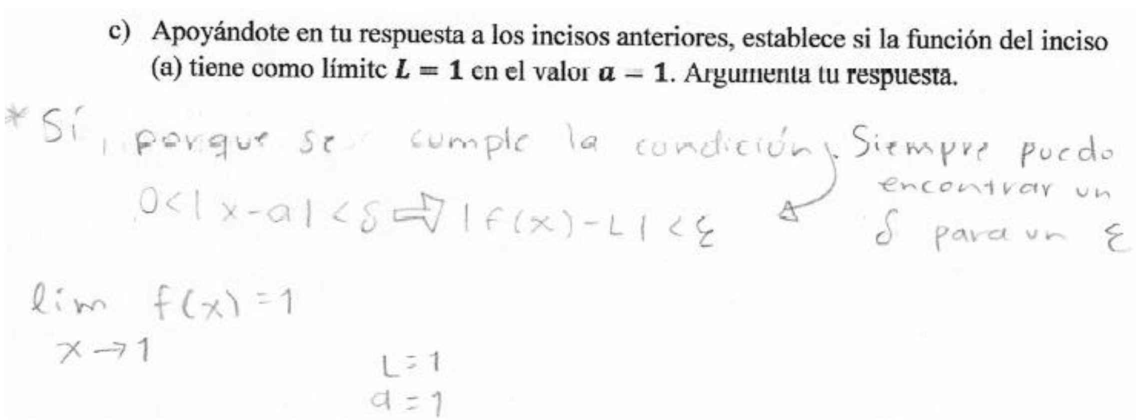


b) Si se te proporcionara un intervalo de radio menor centrado en $L$ ¿consideras posible continuar construyendo intervalos centrados en $a$ cuyas imágenes de los valores de $x$ contenidas en ese intervalo se mantengan dentro del intervalo propuesto centrado en $L$? Argumenta tu respuesta.

* Sí, porque los intervalos siempre son mayores a cero.

*Figura 11 Actividad 11 (b) estudiante E17*

Más aún, al realizar la pregunta Actividad 11(c) para orientar la construcción del paso DG5, es decir, asociar la perpetuidad de la construcción métrica con el proceso de validación del límite propuesto, el estudiante E17 argumenta lo siguiente:



c) Apoyándote en tu respuesta a los incisos anteriores, establece si la función del inciso (a) tiene como límite $\boldsymbol{L = 1}$ en el valor $\boldsymbol{a = 1}$. Argumenta tu respuesta.

* Sí, porque se cumple la condición. Siempre puedo encontrar un $\delta$ para un $\varepsilon$

$0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$

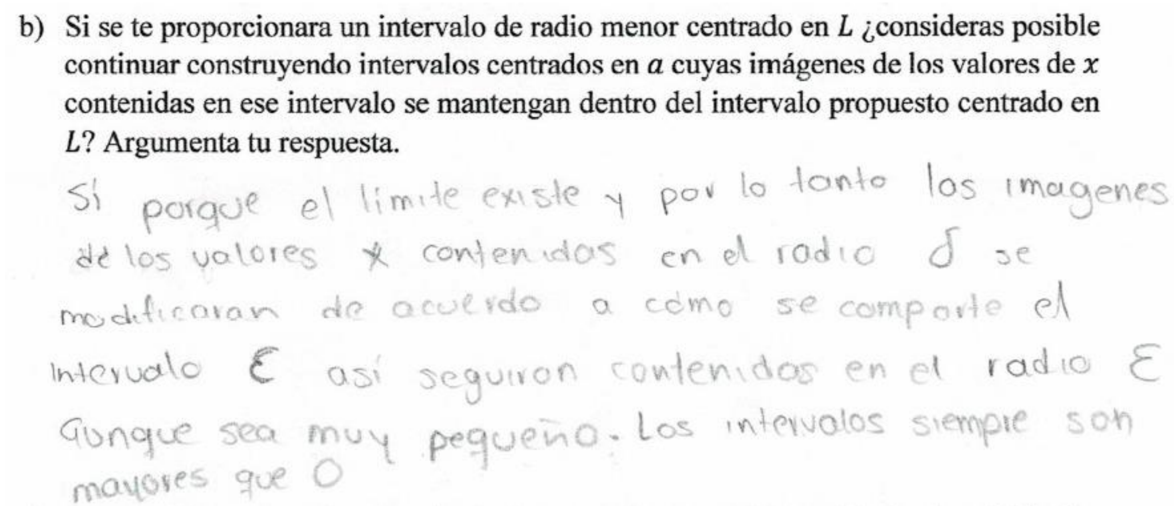
$\lim_{x \to 1} f(x)=1$

$L=1$
$a=1$

*Figura 12 Actividad 11 (b) estudiante E17*

Las respuestas del estudiante E17 reflejan la construcción de la concepción métrica y su asociación con la validación del candidato a límite, aunque el estudiante E17 no ha desarrollado una prueba formal, ha *interiorizado* el proceso de la construcción métrica a un nivel suficiente para continuar con la edificación del concepto de límite.

Una evidencia mucho más robusta de que un estudiante posee la estructura Proceso de la concepción métrica de límite la arroja el estudiante E6 en la actividad 11 bajo análisis.



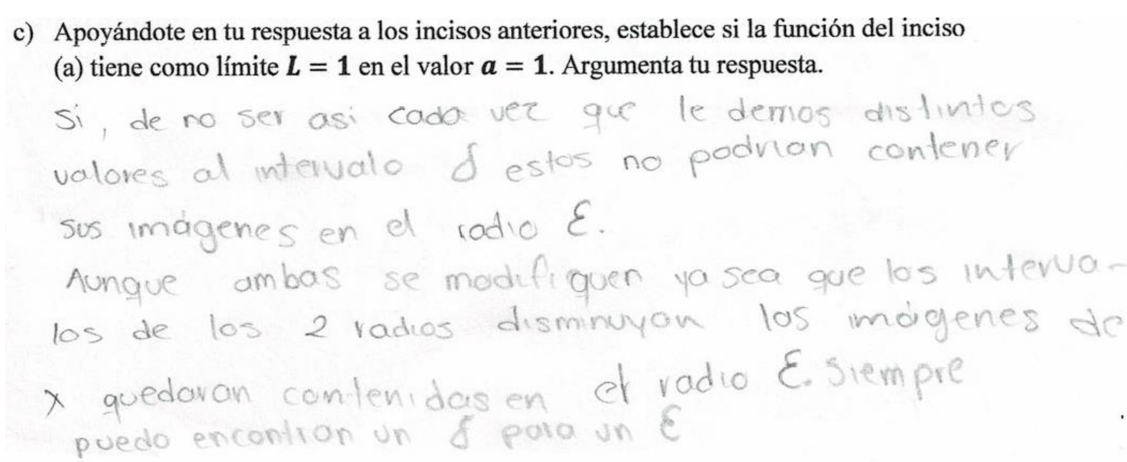
b) Si se te proporcionara un intervalo de radio menor centrado en $L$ ¿consideras posible continuar construyendo intervalos centrados en $a$ cuyas imágenes de los valores de $x$ contenidas en ese intervalo se mantengan dentro del intervalo propuesto centrado en $L$? Argumenta tu respuesta.

Sí porque el limite existe y por lo tanto los imagenes de los valores $x$ contenidos en el radio $\delta$ se modificaran de acuerdo a como se comporte el intervalo $\varepsilon$ así seguiron contenidos en el radio $\varepsilon$ aunque sea muy pequeño. Los intervalos siempre son mayores que 0

*Figura 13 Actividad 11 (b) estudiante E6*

Notamos en la respuesta del estudiante E6 una manifestación mucho más precisa de lo que está sucediendo con la concepción métrica, ya que el estudiante ha advertido la relación de dependencia del valor $\delta$ con el valor $\varepsilon$ que se examine. Por consiguiente, el estudiante ha *interiorizado* las acciones de la concepción métrica para constituir la estructura mental Proceso de esta concepción, al asociar la posibilidad de continuar, teóricamente, con el proceso de ajuste métrico.

Más aun, al conducir la reflexión de la relación que guarda el proceso construido con la validación del candidato a límite, por medio de la pregunta 11(c), el estudiante E6 responde:



c) Apoyándote en tu respuesta a los incisos anteriores, establece si la función del inciso (a) tiene como límite $\boldsymbol{L = 1}$ en el valor $\boldsymbol{a = 1}$. Argumenta tu respuesta.

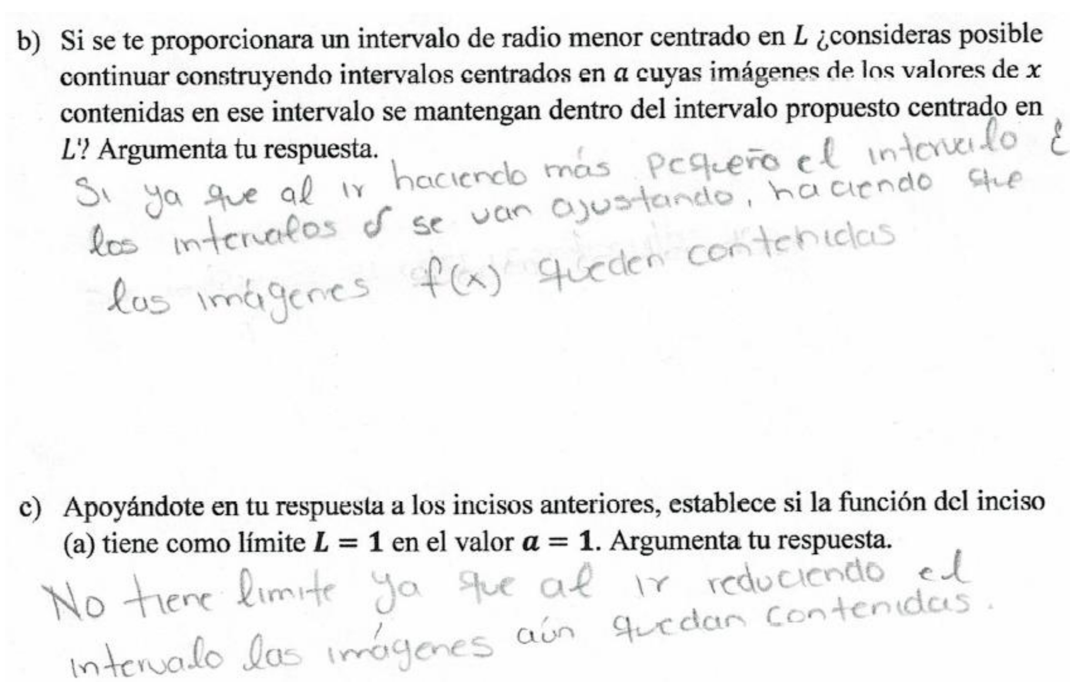
Si, de no ser asi cada vez que le demos distintos valores al intervalo $\delta$ estos no podrian contener sus imágenes en el radio $\varepsilon$.
Aunque ambas se modifiquen ya sea que los intervalos de los 2 radios disminuyan los imágenes de $x$ quedaran contenidas en el radio $\varepsilon$. Siempre puedo encontrar un $\delta$ para un $\varepsilon$

*Figura 14 Actividad 11 (c) estudiante E6*

En la respuesta del estudiante E6 es posible advertir, que ha logrado asociar este proceso, de construcción métrica, con la validación de la existencia del límite, con lo que se puede afirmar que el estudiante logró construir el paso DG5.

Cabe mencionar que no todos los estudiantes lograron evidenciar la estructura Proceso de la concepción métrica de límite en la actividad 11, fue un 60% de los estudiantes quienes la desarrollaron.

Ejemplificamos esta última afirmación a través de las respuestas del estudiante E10 donde es posible observar que el estudiante ha *interiorizado* las acciones de las construcciones métricas y ha constituido el proceso buscado. Sin embargo, no es capaz de conectar dicho proceso con la validación del candidato a límite, por lo que, hasta este punto, el estudiante no realizó la construcción del paso DG5.



b) **Si se te proporcionara un intervalo de radio menor centrado en $L$ ¿consideras posible continuar construyendo intervalos centrados en $a$ cuyas imágenes de los valores de $x$ contenidas en ese intervalo se mantengan dentro del intervalo propuesto centrado en $L$? Argumenta tu respuesta.**

Si ya que al ir haciendo más pequeño el intervalo $\varepsilon$ los intervalos $\delta$ se van ajustando, haciendo que las imágenes $f(x)$ queden contenidas

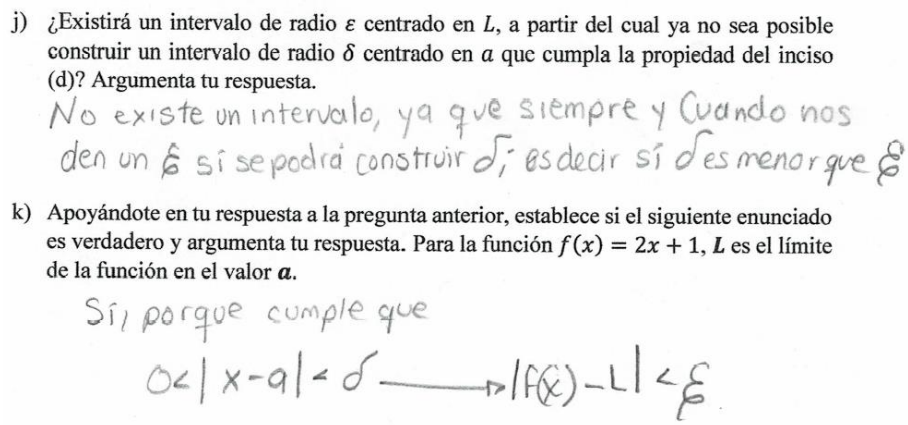
c) **Apoyándote en tu respuesta a los incisos anteriores, establece si la función del inciso (a) tiene como límite $L = 1$ en el valor $a = 1$. Argumenta tu respuesta.**

No tiene límite ya que al ir reduciendo el intervalo las imágenes aún quedan contenidas.

*Figura 15 Actividad 11(b) y (c) estudiante E10*

Esta misma estructura Proceso (de la concepción métrica de límite) se continuó examinando en la actividad 12, para la cual el porcentaje de los estudiantes que no habían logrado desarrollar la estructura Proceso de la concepción métrica y la construcción del paso DG5 se redujo al pasar de un 40% al 8%. Es decir, tras el desarrollo de la instrucción y al término de la actividad 12 los estudiantes dieron evidencia de haber construido el proceso mencionado.

Mostramos como ejemplo las respuestas del estudiante E2 al cuestionar sobre las construcciones de los intervalos con la propiedad métrica deseada para la función $f(x) = 2x + 1$.



j) ¿Existirá un intervalo de radio $\varepsilon$ centrado en $L$, a partir del cual ya no sea posible construir un intervalo de radio $\delta$ centrado en $a$ que cumpla la propiedad del inciso (d)? Argumenta tu respuesta.

No existe un intervalo, ya que siempre y Cuando nos den un $\varepsilon$ sí se podrá construir $\delta$, es decir sí $\delta$ es menor que $\varepsilon$

k) Apoyándote en tu respuesta a la pregunta anterior, establece si el siguiente enunciado es verdadero y argumenta tu respuesta. Para la función $f(x) = 2x + 1$, $\boldsymbol{L}$ es el límite de la función en el valor $\boldsymbol{a}$.

Sí, porque cumple que

$0<|x-a|<\delta \longrightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$

*Figura 16 Actividad 12 (j) y (k) estudiante E2*

En ellas es posible encontrar evidencia de que el estudiante E2 ha *interiorizado* el proceso de la construcción métrica del intervalo deseado para cualquier $\varepsilon > 0$ dado al identificar que la propiedad solicitada (concepción métrica) se consigue haciendo que $\delta < \varepsilon$ para la función analizada. Por lo anterior, podemos afirmar que el estudiante E2 ha construido la estructura Proceso de la concepción métrica de límite. Más aún, muestra evidencia de la construcción del paso DG5 al asociar este proceso con la existencia del límite (véase el inciso k).

## 4.6 Estructura Objeto

Cuando un estudiante *encapsula* el Proceso de la concepción métrica a través de la noción de cercanía arbitraria, es decir, establece que la propiedad del paso DG4 funcionará para cualquier medida de proximidad dada usando la concepción métrica ( $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0\ tal\ que\ si\ |f(x) - L| < \varepsilon\ entonces\ |x - a| < \delta$) habrá *encapsulado* los pasos DG4 y DG5 y adquirido la construcción mental Objeto del concepto de límite de una función. Se requiere, por lo tanto, que el estudiante de sentido explícito al rol que desempeñan los cuantificadores en la definición de límite.

Para transformar el proceso en un Objeto, el rol dinámico característico del proceso de aproximación métrica debe permitir un tratamiento estático que resuelva el obstáculo dinámico de la producción perpetua del intervalo con la característica métrica deseada.

Exploremos el desarrollo de la concepción Objeto límite del estudiante E21 a partir de la Actividad 15, en la cual el estudiante trabaja con la función $f(x) = 8x - 2$ y el valor $a = 4$ en el dominio de $f$.

En el inciso (b) de esta actividad el estudiante E21 determina el radio del intervalo $\delta$ que satisface la concepción métrica para un valor particular $\varepsilon = 0.2$ a través del tratamiento estático del proceso métrico del paso DG4. Más allá del tratamiento algebraico correcto y de la deducción correcta del valor de $\delta$, esta tarea permite que el estudiante de sentido al simbolismo de la definición a través de aplicar una acción sobre el proceso métrico.

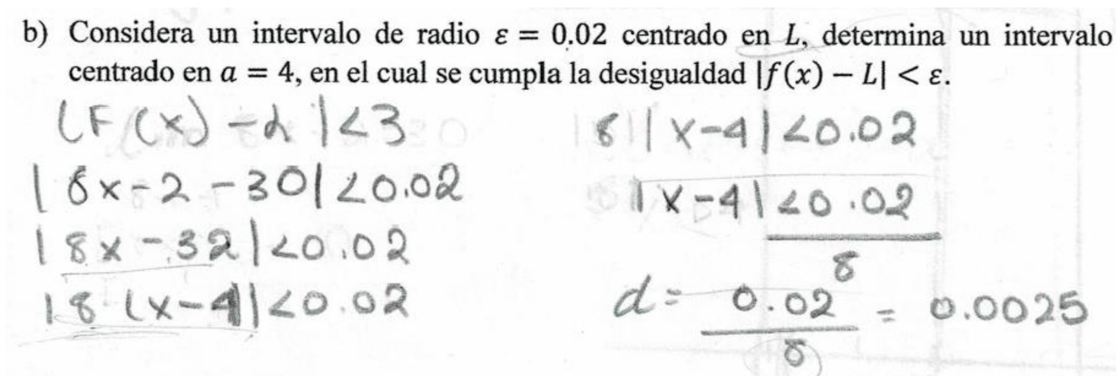

b) Considera un intervalo de radio $\varepsilon = 0.02$ centrado en $L$, determina un intervalo centrado en $a = 4$, en el cual se cumpla la desigualdad $|f(x) - L| < \varepsilon$.



*Figura 17 Actividad 15 (b) estudiante E21*

Establecido este primer contacto se explora la posibilidad de continuar produciendo intervalos adecuados de forma genérica a través del inciso (c).

Aunque la solución del estudiante E21 (ver figura 18) es correcta, esta podría ser condicionada sencillamente por la “comodidad” operatoria que involucra la tarea, por lo que los incisos (c) y (d) exploran si el estudiante asocia estas acciones con la concepción métrica.

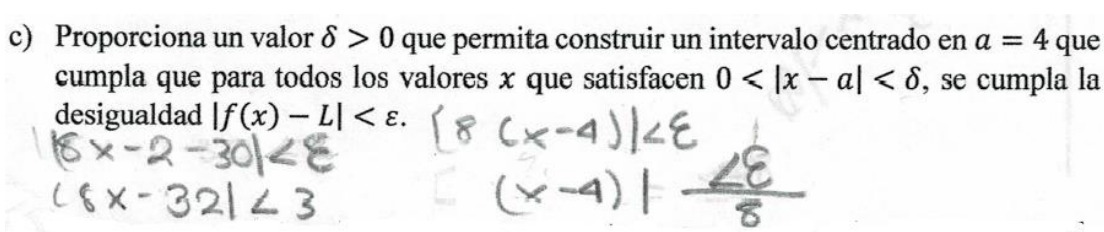
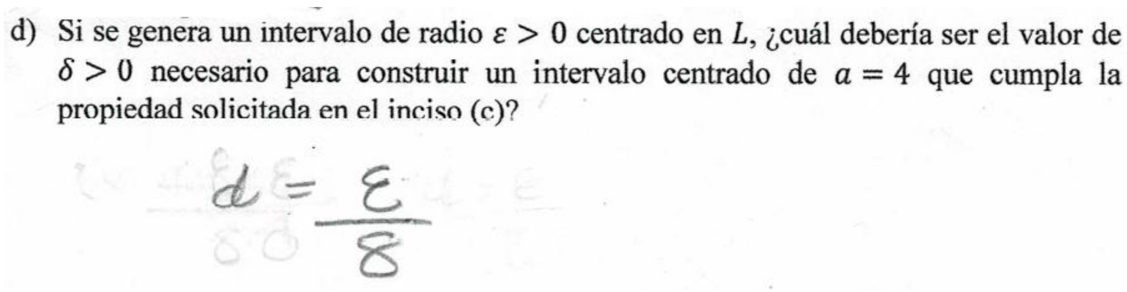

c) Proporciona un valor $\delta > 0$ que permita construir un intervalo centrado en $a = 4$ que cumpla que para todos los valores $x$ que satisfacen $0 < |x - a| < \delta$, se cumpla la desigualdad $|f(x) - L| < \varepsilon$.



*Figura 18 Actividad 15 (c) estudiante E21*



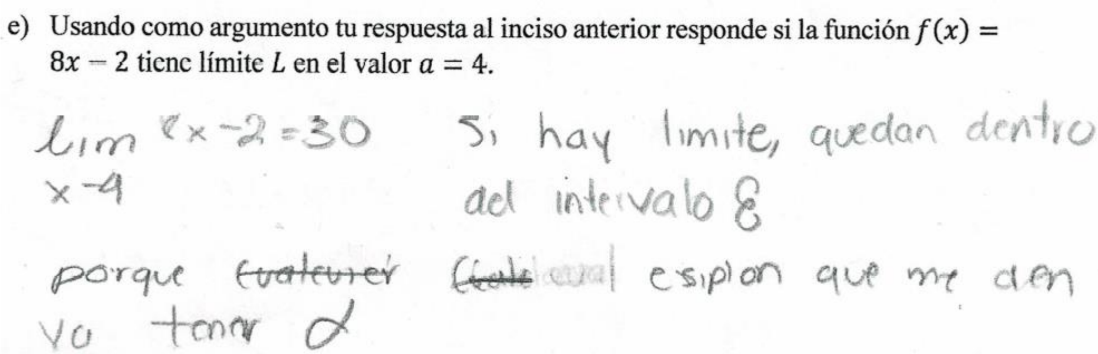
d) Si se genera un intervalo de radio $\varepsilon > 0$ centrado en $L$, ¿cuál debería ser el valor de $\delta > 0$ necesario para construir un intervalo centrado de $a = 4$ que cumpla la propiedad solicitada en el inciso (c)?

$d = \frac{\varepsilon}{8}$

*Figura 19 Actividad 15 (d) estudiante E21*

La respuesta del estudiante E21 arroja una primera idea de cómo es que relaciona las acciones realizadas sobre el proceso de aproximación métrico una vez que ejecuta un tratamiento estático sobre dicho proceso, en este caso, el estudiante logra deducir que para un $\varepsilon > 0$ arbitrario es posible construir un valor de $\delta$ genérico.

Asegurada esta propiedad se explora, a través del inciso (e), si el estudiante logra asociar las acciones realizadas con la validación de la existencia o no del valor límite, $L$, propuesto.



e) Usando como argumento tu respuesta al inciso anterior responde si la función $f(x) = 8x - 2$ tienc límite $L$ en el valor $a = 4$.

$\lim_{x-4} 8x-2=30$ Si hay limite, quedan dentro del intervalo $\varepsilon$

porque ~~cualcuier~~ esiplon que me den yo tener $\delta$

*Figura 20 Actividad 15 (e) estudiante E21*

La respuesta que el estudiante E21 proporciona, aunque incompleta, hace notar que el estudiante está pensando en que el tratamiento estático (algebraico), desarrollado para asegurar la validez del límite (inciso (a) de la actividad) se corresponde con el proceso métrico. En otras palabras, ha transformado un proceso en un ente estático, que bajo un tratamiento específico permite superar la barrera práctica de construir los intervalos deseados para un valor de $\varepsilon > 0$ arbitrario.

Otra evidencia que permite sustentar la afirmación anterior se encuentra en la representación gráfica que el estudiante E21 hace (sin haberse solicitado en la actividad) de los valores calculados para el caso particular $\varepsilon = 1$ y en el cual deduce, correctamente, el valor de $\delta = \frac{1}{8}$, ver figura 21.

Aunque su representación falla en los valores extremos que conforman los intervalos correspondientes en torno al valor $L = 30$ y $a = 4$, el estudiante deja observar nuevamente que puede realizar acciones sobre el proceso estático de la concepción métrica sin dejar de asociar su operabilidad con la propiedad inherente para deducir una conclusión en torno a la veracidad del candidato a valor límite.

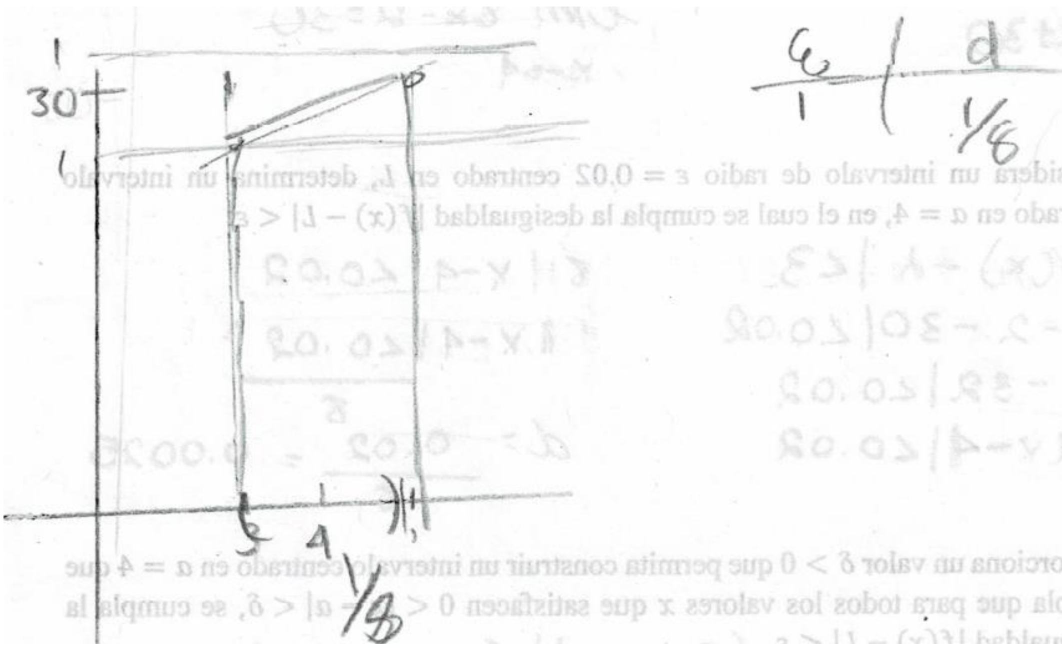



*Figura 21 Actividad 15 estudiante E21*

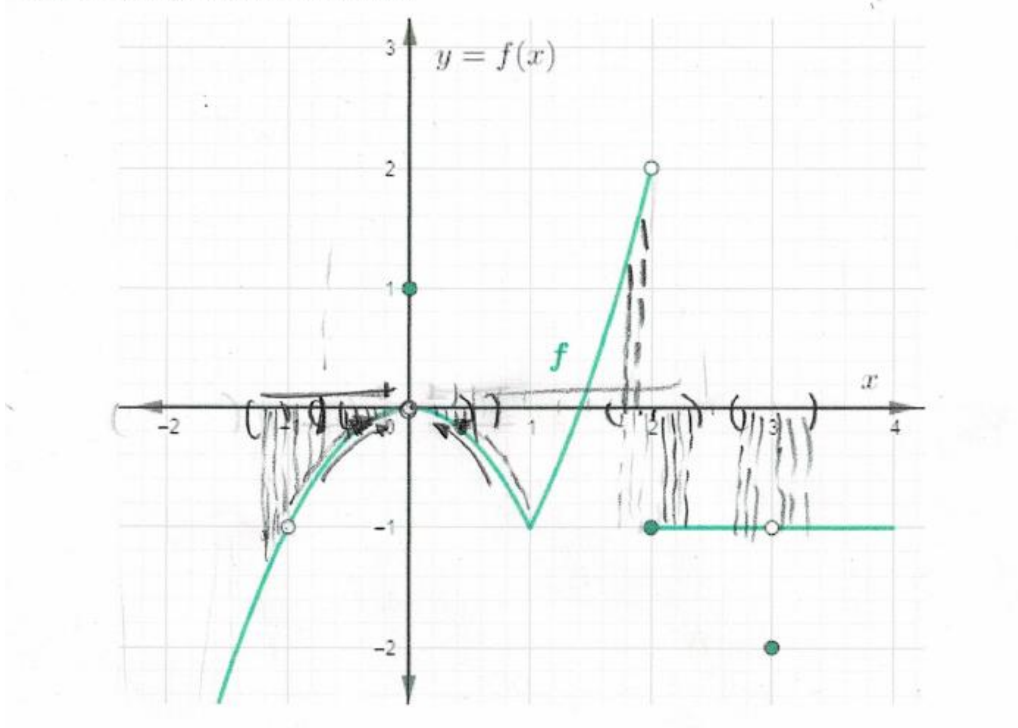
Adicionalmente, se observa que el rol de los cuantificadores no se manifiesta del todo en la respuesta de E21, destaca el hecho de que el estudiante en principio escribe “cualquier” pero después tacha la expresión (Figura 20). Sin embargo, con fundamento en el análisis presentado hasta ahora es posible afirmar que este estudiante manifiesta comprender que la propiedad métrica implica la validez del candidato como límite de la función en estudio.

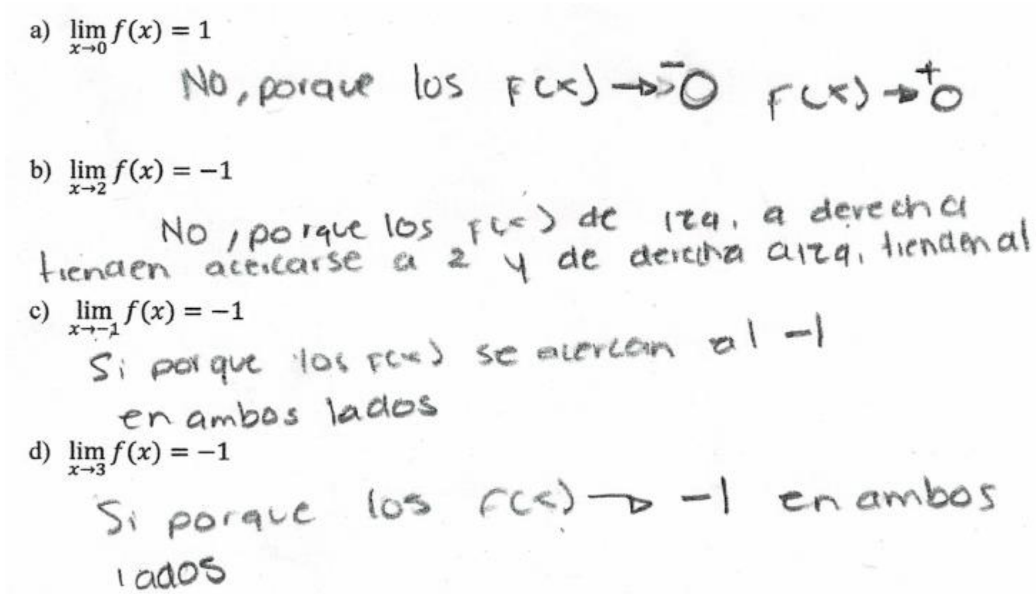
En este contexto, conviene hacer notar, como se mencionó en el capítulo 2, que la forma en que un individuo aprende un concepto no se da de forma lineal, por lo tanto, un individuo puede transitar de una estructura a otra sin estar consolidadas del todo.

Bajo esta serie de ideas continuemos explorando el desarrollo de la estructura mental Objeto del estudiante E21 en la Actividad 23 realizada en el registro gráfico, ver figura 22.

**Actividad 23**

Considera la gráfica de la función $f$ y determina qué expresiones de límite son correctas y cuáles no, argumenta tus respuestas.




a) $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$

No, porque los $f(x) \to 0^-$ $f(x) \to 0^+$

b) $\lim_{x\to 2} f(x) = -1$

No, porque los $f(x)$ de izq. a derecha tienden a acercarse a 2 y de derecha a izq. tienden al-

c) $\lim_{x\to -1} f(x) = -1$

Si porque los $f(x)$ se acercan al $-1$ en ambos lados

d) $\lim_{x\to 3} f(x) = -1$

Si porque los $f(x) \to -1$ en ambos lados

*Figura 22 Actividad 23 estudiante E21*

Esta tarea muestra cómo el estudiante E21 logra la *desencapsulación* del Objeto límite construido y la *reversión* de los procesos de aproximación y validación del candidato a límite a partir del análisis gráfico.

Para determinar qué afirmaciones sobre los límites propuestos son válidas, el estudiante *desencapsula* el objeto límite en el proceso métrico (note que el estudiante dibuja intervalos alrededor de los valores del dominio en torno a los cuales se desea examinar el valor límite propuesto) por lo que la concepción métrica subyace.

Posteriormente, al argumentar sobre la veracidad o falsedad de las afirmaciones, es claro que reconstruye los procesos de aproximación en el dominio y en el rango de la concepción dinámica de límite para deducir su respuesta, debido a que el estudiante argumenta sobre la convergencia de las aproximaciones en ambas direcciones. Más aun, las flechas que traza indicando la dirección de la aproximación en torno al valor $x = 0$ dejan claro que el estudiante es consciente de que está examinando el comportamiento de las imágenes $f(x)$ de los valores $x$ próximos a $x = 0$.

Sin embargo, en ninguno de los incisos el estudiante recurre a la concepción métrica para justificar su respuesta.

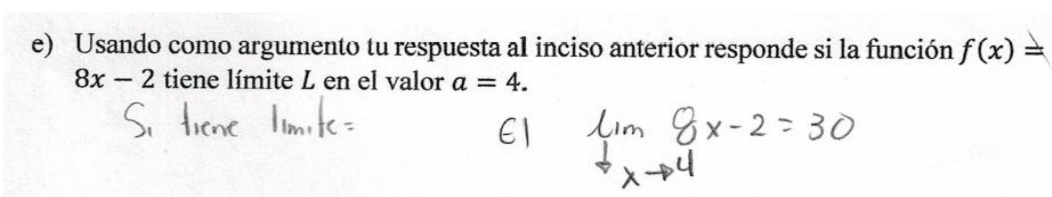
En síntesis, podemos argumentar que el estudiante E21 manifiesta una estructura mental Objeto del concepto de límite que le permite establecer no solo un candidato a límite sino también efectuar, a un nivel básico, la validación de dicho candidato como límite de la función en términos de la concepción métrica de límite. Lo anterior, a pesar del manejo no explícito de los cuantificadores de la definición de límite.

Sin embargo, creemos que el nivel de construcción hasta aquí logrado por el estudiante E21, muestra la idoneidad del desarrollo instruccional, la concordancia con la descomposición genética de límite usada como referencia, al constatarse la manifestación de las estructuras mentales descritas en la DG, y la viabilidad de avanzar más allá de la concepción dinámica de límite.

## 4.7 Estructuras logradas por los estudiantes

En esta serie de ideas, reportamos que 100% de los estudiantes logró desarrollar la estructura mental Proceso tanto para la concepción dinámica como métrica de límite, lo cual corresponde a los primeros 4 pasos de la DG en el registro algebraico y en el registro gráfico.

Del total, 32% de los estudiantes no mostraron evidencia concluyente de la construcción del paso DG5, esto es, asociar el proceso de la concepción métrica con la existencia del límite, ya que no mostraron argumentos al cuestionarles sobre la validez o existencia del valor límite como puede notarse en la respuesta que da el estudiante E22:

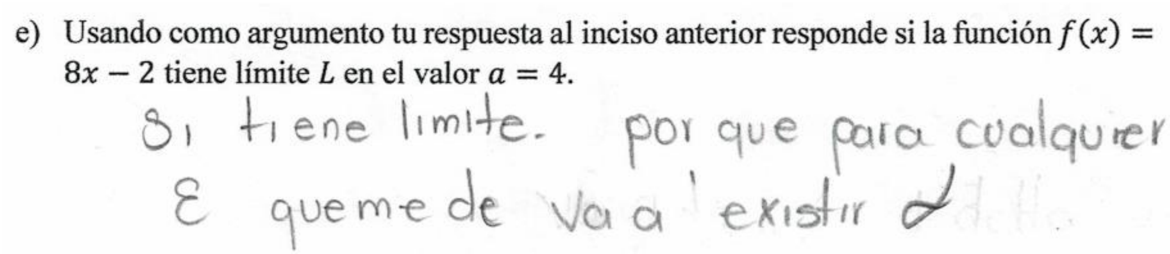

e) Usando como argumento tu respuesta al inciso anterior responde si la función $f(x) = 8x - 2$ tiene límite $L$ en el valor $a = 4$.

Si tiene limite = El $\lim_{x \to 4} 8x - 2 = 30$

*Figura 23 Actividad 15(e) estudiante E22*

Lo anterior, debido en gran medida a la estructura de la pregunta ya que se pide al estudiante responder basado en el resultado obtenido en el inciso anterior (inciso d) con lo cual el estudiante pudo haber prescindido de dar un argumento.

Por otro lado, 68% de los estudiantes logró avanzar hasta la construcción del paso DG5, es decir, pudieron conectar la concepción métrica del paso DG4 con la veracidad del límite propuesto al argumentar en sus respuestas que el límite propuesto realmente lo es porque la condición métrica se satisface, como puede observarse en la respuesta del estudiante E8, ver figura 24.


e) Usando como argumento tu respuesta al inciso anterior responde si la función $f(x) = 8x - 2$ tiene límite $L$ en el valor $a = 4$.

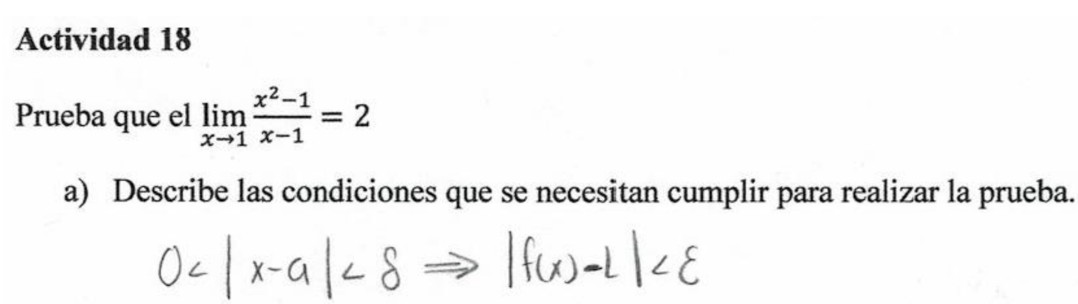
Si tiene limite. por que para cualquier $\varepsilon$ que me de va a existir $\delta$

*Figura 24 Actividad 15(e) estudiante E8*

No obstante, aunque lo que restaba era *encapsular* el paso DG4 y DG5 a través de la noción de arbitrariedad, únicamente el 4% de los estudiantes logró hacerlo y dar evidencia de la construcción Objeto, este es el caso del estudiante E21, el cual ya fue abordado a detalle en la sección anterior.

Cabe aclarar que el 94% de los estudiantes que construyeron con éxito los pasos del DG1 a DG5 constituyeron un Objeto límite desprovisto de los elementos necesarios para garantizar la veracidad del límite propuesto. Por ejemplo, la gran mayoría realizó las acciones sobre el Proceso en términos de las desigualdades y determinó el valor $\delta$ para un $\varepsilon > 0$ genérico, pero no propuso argumentos que mostraran que es consciente de porqué realizó dichas acciones y qué implicaciones tienen sobre la veracidad o no del límite propuesto. Lo anterior se afirma porque el Objeto límite construido por estos estudiantes no manifiesta comprender que la propiedad métrica implica la validez del candidato como límite de la función en estudio.

A continuación, figura 25, se muestra la tarea del estudiante E1 para ejemplificar la afirmación anterior.


**Actividad 18**

Prueba que el $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$

a) Describe las condiciones que se necesitan cumplir para realizar la prueba.

$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon$

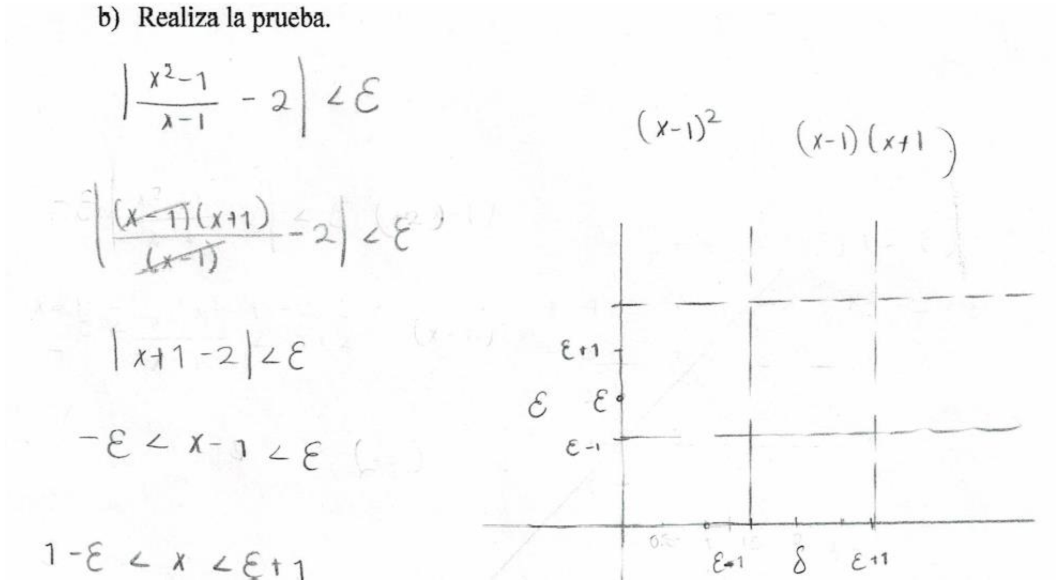



*Figura 25 Actividad 18(a) estudiante E1*

Tal como se aprecia, el estudiante E1 realiza acciones sobre el proceso métrico estático, pero estas no le permiten obtener conclusiones sobre la veracidad del valor límite, ya que no conecta la implicación que tiene haber deducido el valor de $\delta$ para un $\varepsilon > 0$, con la condición de validación del límite propuesto.

Finalmente, se destaca el hecho de que gran parte de los estudiantes encontraron en el registro gráfico un andamiaje para la construcción del concepto promovido a lo largo de las actividades implementadas. Esta afirmación se sustenta en que, en las producciones realizadas por los estudiantes, es posible identificar bosquejos gráficos en actividades donde no se pedía tal interpretación de forma explícita.

## Conclusiones

En este capítulo presentamos las conclusiones de nuestra investigación. Considerando los resultados obtenidos, discutimos el efecto de la instrucción didáctica para la construcción del concepto de límite, el papel de los distintos registros implementados en ella, sus posibles mejoras y algunas preguntas de investigación que podrían desprenderse de este trabajo.

### La instrucción didáctica y la Descomposición Genética

Recordemos que la pregunta de investigación que se planteó en este trabajo fue la siguiente: ¿en qué medida la implementación de actividades basadas en la descomposición genética del concepto de límite Swinyard y Larsen (2012) contribuye a lograr la construcción del concepto de límite de una función en estudiantes de ingeniería?

A partir de sus trabajos, Swinyard y Larsen (2012) hacen un refinamiento de la DG de límite que amplía la descripción sobre cómo desarrollar la concepción métrica del concepto. Al final de su investigación proponen, como tarea pendiente, examinar el efecto de su DG en un salón de clases común y en un curso habitual, tarea recogida por esta investigación.

Es por esto que nuestro trabajo tuvo el objetivo de ofrecer evidencia empírica del grado de correspondencia de la DG de Swinyard y Larsen (2012) con las estructuras mentales desarrolladas por los estudiantes. Resultados que se discuten a continuación.

Bajo la anterior contextualización, concluimos que las actividades diseñadas promueven la construcción del concepto de límite al reflejar las construcciones mentales descritas por la DG.

De manera más detallada se constató, en la evolución de los estudiantes durante la instrucción didáctica, que el 100% de los estudiantes logró construir la concepción dinámica del concepto, mostrando evidencia de su manejo tanto en el registro gráfico como en el numérico y el algebraico.

Lo anterior permitió el desarrollo de la estructura mental Proceso de la concepción dinámica de límite, que permite al estudiante proponer un candidato a límite de la función en un valor de interés.

A partir de este punto se deriva uno de los resultados primordiales de esta investigación que consistió en lograr, por medio de las actividades propuestas, la transición de la concepción dinámica a la concepción métrica de límite. En su trabajo, Swinyard y Larsen (2012) identificaron que dicha transición no puede obviarse al pretender únicamente reconstruir la concepción dinámica en términos de desigualdades y mostraron que la definición formal exige un proceso de reversión. En dicho proceso, un estudiante debe partir de un análisis en el rango de la función en torno al valor límite propuesto, para la validación del candidato a límite como se enuncia en la definición formal ($\varepsilon - \delta$), perspectiva que no se logra únicamente interpretando la concepción dinámica en términos de desigualdades como sugería originalmente Cottrill et al. (1996).

El diseño instruccional propuesto contempla actividades que permiten que el estudiante adopte una perspectiva de “trabajo hacia atrás”, como sugieren los autores de la DG, de forma que el estudiante advierta que el proceso por el cual se propone un candidato a límite y el proceso por el cual se valida su existencia, son procesos independientes. Por lo anterior, la estructura mental Proceso de la concepción métrica requiere que el estudiante valide si el candidato propuesto en efecto es el límite de la función. Este proceso fue desarrollado por el 100% de los alumnos al término de la instrucción didáctica por lo que se exhibe la correspondencia con lo descrito en la DG.

La estructura mental Proceso de la concepción métrica debía manifestarse con la afirmación de que el límite propuesto en efecto lo es, después de las actividades propuestas, 68% de los estudiantes pudieron establecer tal conexión señalada en el paso DG5. Hasta este punto, el estudiante debía encapsular el proceso de la concepción métrica en el Objeto límite, al establecer que el proceso funciona para medidas de proximidad arbitrarias en torno al valor límite propuesto, sin embargo, solo un estudiante (4%) dio evidencia de comenzar a adquirir tal estructura mental.

Cabe aclarar que el 68% de los estudiantes que lograron la construcción del paso DG5 *encapsularon* un Objeto límite que no reflejó el rol de los cuantificadores en sus producciones ($\forall$ "$para\ todo$" y $\exists$ "$existe$"). De estos, solo un estudiante manifiesta comprender que la propiedad métrica implica la validez del candidato como límite de la función en estudio.

En síntesis, podemos afirmar que la estructura mental Objeto del concepto de límite descrita en la DG es susceptible de ser construida por medio de la secuencia didáctica que se diseñó e implementó en este trabajo. Nuestros resultados ofrecen la oportunidad de seguir estudiando la forma en que se puede consolidar dicha estructura.

Derivado de lo expuesto anteriormente, afirmamos que el objetivo del trabajo de investigación se logró, ya que se obtuvo evidencia empírica de que la DG de Swinyard y Larsen (2012) describe las estructuras mentales necesarias para la comprensión de la definición formal del concepto de límite de una función real, en un entorno de clase habitual.

La ampliación o mejora de las actividades que constituyeron la instrucción didáctica queda abierta para que en otro ciclo de implementación se consolide de mejor manera la estructura mental Objeto buscada por la DG. Más aún, el punto crucial para la *encapsulación*, como ya se ha dicho, es el rol de los cuantificadores, el cual por si solo constituye un *Esquema* a desarrollar como menciona Cottrill et al. (1996).

Por otra parte, manifestamos que los resultados aquí expuestos constituyen la evidencia empírica de un primer ciclo de investigación, por lo que adicionalmente se debe considerar continuar implementando nuevos ciclos de investigación que arrojen información sobre la DG de referencia.

## El papel de los registros de representación en la instrucción didáctica

Otra variante a explorar en esta investigación fue que las actividades diseñadas consideraran el papel de las representaciones del concepto de límite (Duval, 1999; Blázquez, 1999; Blázquez y Ortega 2001; Pons, 2014) de forma que su inclusión mejorara la comprensión y desarrollo de las estructuras mentales deseadas. Los registros de representación incluidos en las actividades fueron el registro algebraico, gráfico y numérico-tabular.

La serie de actividades propuestas en los distintos registros siguieron la recomendación de Blázquez y Ortega (2001) al promover, con la representación numérica de límite, las características asociadas al concepto, para posteriormente complementar los aspectos estáticos de la definición por medio de la representación gráfica y, de este modo, dotar de sentido al simbolismo de la representación algebraica del concepto. Estas vertientes se entrelazaron en las actividades propuestas para desarrollar cada uno de los pasos contemplados por la DG.

En su implementación se constató el efecto benéfico de trabajar con los distintos registros, ya que permitió a los estudiantes acceder con mayor facilidad a la concepción métrica de límite. Por ejemplo, el 68% de los estudiantes que logró adquirir una estructura Objeto (sin el uso de los cuantificadores) manifestaron algunos esbozos en el registro gráfico, sin que estos se solicitaran en la actividad, dando evidencia de que podían transitar entre los registros algebraico y gráfico. Lo anterior les facilitó la interpretación de las desigualdades de la definición, es decir, les permitió dar sentido al simbolismo de la definición a partir de una interpretación en el registro gráfico y lograr una mejor transición del Proceso al Objeto.

Aclaramos que, aunque sus producciones carecían de uno u otro elemento (situación reflejada en la construcción mental Objeto) sí manifestaban los elementos esenciales de la interpretación, por lo que creemos que el éxito del desarrollo de la concepción métrica alcanzada se debe en gran medida a la habilidad de trabajar en los distintos registros promovida por las actividades diseñadas.

Si bien el efecto benéfico de los distintos registros para el concepto de límite ya había sido observado con anterioridad por Blázquez y Ortega (2001) y Pons (2014), nuestro trabajo aporta actividades diseñadas en los distintos registros para la concepción métrica de la DG de Swinyard y Larsen (2012), lo cual no fue observado en la revisión de literatura realizada para este trabajo.

Aunque las actividades presentadas en distintas representaciones permitieron una construcción más gradual del Objeto límite, el papel del *tratamiento* y la *conversión* (Duval, 1999, 2006) no se exploró en las actividades propuestas, por lo que se podría diseñar otro estudio que tome en cuenta estos constructos.

## Del diseño de las actividades

Uno de los objetivos de este trabajo fue el diseño de actividades que promovieran las estructuras y los mecanismos mentales de la DG de Swinyard y Larsen (2012). Estas actividades constituyeron una de las partes medulares de esta investigación. Derivado de esta labor se constituyó una secuencia didáctica de 25 actividades diseñadas para que los estudiantes lograran gradualmente las construcciones descritas por la DG. Más aún, en su diseño se consideró el papel de las distintas representaciones del concepto, tomando como fundamento la teoría de Representaciones Semióticas.

Por lo anterior, se destacan los siguientes aspectos en la propuesta de las actividades:

- En una gran mayoría de trabajos, las actividades propuestas han sido diseñadas para estudios de tipo diagnóstico, es decir para recoger información que permita caracterizar fenómenos asociados a la enseñanza-aprendizaje del concepto de límite. Son pocos los trabajos que presentan explícitamente un material concreto para la instrucción basada en el resultado de sus investigaciones. Nuestro trabajo atendió a esta particular vertiente partiendo de la evidencia experimental obtenida por Swinyard y Larsen (2012) al conformar un material para la instrucción susceptible de ser usado en el trabajo de aula.

- Las actividades diseñadas conforman un material para la instrucción del tema límite de una función en estudiantes universitarios que es fácilmente adaptable a estudiantes del nivel medio superior. Su contenido está dirigido a lograr que los estudiantes construyan el concepto de límite en términos de la definición $\varepsilon - \delta$. Enfoque poco explorado (Swinyard y Larsen, 2012) por lo que, al menos 15 de las actividades que conforman la instrucción fueron elaboradas para este fin.

- La amplia descripción de las actividades en el capítulo 3 puede permitir a profesores, que no estén familiarizados con la teoría APOE, reconocer de forma más profunda los objetivos que persiguen cada una de las actividades y la interpretación de los posibles razonamientos por parte de los estudiantes.

- Como se mencionó en capítulos anteriores la instrucción didáctica permitió que 68% de los estudiantes lograran construir algunos aspectos de la concepción métrica del concepto. Además, un estudiante construyó la estructura Objeto del concepto de límite a un nivel en el que reconoce que la propiedad métrica implica la validez del candidato como límite de la función. Así, la secuencia didáctica propuesta en este trabajo exhibe la viabilidad de avanzar más allá de la concepción dinámica del concepto.

- Su diseño paulatino permitió, por ejemplo, que al conducir al estudiante a la construcción de la estructura Proceso de la concepción métrica, el porcentaje de alumnos que lograron la construcción fuera del 60%, hasta la actividad 11. Sin embargo, al continuar con la instrucción didáctica, otro 32% logró construir dicho Proceso a través de las discusiones originadas por las preguntas de la actividad 12. Finalmente, el 8% restante logró la construcción Proceso de la concepción métrica en la actividad 13, en donde se analizó un caso, para el cual, el proceso de ajuste métrico no se cumplía. Lo anterior refleja que la constante confrontación de ideas a través de una diversidad adecuada y guiada de actividades y preguntas que detonen la abstracción reflexiva puede ayudar a los estudiantes a concebir de mejor manera el concepto en estudio.

- Esta investigación contribuye con material para la instrucción basado en la investigación, que pretende mejorar la enseñanza-aprendizaje del concepto de límite en el nivel universitario, desde la perspectiva de la definición estandarizada $\varepsilon - \delta$ en el contexto de las carreras de ingeniería. Sin embargo, se presenta como resultado de un primer ciclo de investigación, por lo que se sugiere seguir probando y refinando (como se discutirá más adelante) las actividades que conforman la instrucción como propone la teoría APOE.

## Posibles mejoras y recomendaciones para la intervención en clase

Esta investigación permitió aportar evidencia empírica de la correspondencia de la DG de Swinyard y Larsen (2012) con las construcciones mentales desarrolladas por estudiantes de ingeniería en un curso de cálculo diferencial habitual. Si bien se han expuesto los resultados y conclusiones, es importante mencionar posibles mejoras en el diseño instruccional y su implementación en el aula.

Consideramos que si bien el diseño de las actividades logró su cometido también reveló aspectos a considerar:

- En correspondencia con la estructura mental Objeto de límite que se deseaba construir, se reconoce la necesidad de ampliar o mejorar el diseño de actividades que continúen robusteciendo el papel de los cuantificadores $\forall$ "$para\ todo$" y $\exists$ "$existe$" en la definición de límite, como condición necesaria para validar la existencia del límite propuesto.

- El diseño de las actividades en las distintas representaciones usadas debe, una vez observado su efecto benéfico y constatada la correspondencia con la DG, especializarse más en estimular los constructos de *tratamiento* y *conversión* propios de la teoría de representaciones semióticas (Duval, 1999, 2006). Esta declaración involucra un problema de fondo a discutir más adelante.

- El diseño instruccional basado en el ciclo de enseñanza ACE permitió en gran medida generar discusiones en el aula que permitieron conducir la reflexión por el camino correcto, por lo que, si alguna persona busca implementar las actividades, producto de este trabajo, debe tener en cuenta que las actividades por sí solas no lograrán el efecto deseado si no se tiene un marco adecuado para la instrucción. Más aún, el concepto de límite exige una confrontación recurrente de las concepciones paulatinamente generadas por los estudiantes, por lo que el ciclo de enseñanza ACE constituyó un complemento vital durante la intervención en clase.

  Sin embargo, no consideramos que el ciclo de enseñanza ACE sea el único pertinente para lograr el objetivo deseado, por ejemplo, Swinyard y Larsen (2012) exploraron el desarrollo del concepto a través de la reinversión guiada y el uso de otras heurísticas en un contexto más controlado.

  La instrucción didáctica basada en el ciclo ACE fue usada por ser la recomendada por la propia teoría APOE.

- En la serie de ideas anteriores, el docente debe tener en cuenta que su papel es esencial en la conducción de las discusiones alrededor de las actividades que conforman la instrucción. Por lo que no debe asumir los logros, retrocesos o respuestas inesperadas como indicadores del éxito o fracaso de la instrucción. El docente debe tener claro que el objetivo de la instrucción es promover el desarrollo del pensamiento de manera que el estudiante logre la construcción de las estructuras mentales que permitan la edificación del concepto. Esta puede exhibirse por el estudiante desde la actividad 15 o bien exhibirse hasta la actividad 25, inclusive podría necesitarse de más trabajo para consolidar cierta estructura mental.

## Problemáticas a investigar

Como se ha venido exhibiendo a lo largo del trabajo este presentó limitaciones y a la vez generó cuestiones que podrían desarrollarse en investigaciones posteriores. Por ejemplo, en referencia al papel de las distintas representaciones usadas y la aseveración de que deben diseñarse tareas de manera que se tengan presentes en mayor medida las *conversiones* y *tratamientos* de cada registro, se advierten dos cuestiones fundamentales:

La primera de ellas es el uso de dos marcos teóricos para abordar la misma problemática. Por un lado, la teoría APOE como marco para modelar el desarrollo del concepto de límite y, por el otro, el uso de la teoría de Representaciones Semióticas, como descriptor específico de propiedades del Objeto matemático que se preservan o complementan al pasar de un registro a otro.

La amalgama de dos marcos teóricos para describir un fenómeno no es nueva en la matemática educativa y existen estudios en donde se usa la teoría APOE y la teoría de Representaciones Semióticas (Trigueros y Matinez-Planell, 2010).

Si bien nuestro trabajo exploró esta vertiente, el análisis de los resultados no abordó la descripción de *tratamientos* y *conversiones* debido a una segunda problemática fundamental: la DG de Swinyard y Larsen (2012) únicamente contempla la construcción del concepto en el registro algebraico y no describe cómo un estudiante podría realizar las construcciones mentales en otras representaciones del concepto.

Por tal motivo, la descripción de las construcciones mentales en términos de la especificidad de los tratamientos y conversiones inmersos en las acciones y procesos de la DG no son directamente analizables con los pasos de la DG, por lo que haría falta una adaptación de la DG del concepto de límite en otras representaciones del concepto. Es decir, se necesita de una DG que contemple los distintos registros de representación del concepto de límite de forma que el análisis pueda enriquecerse en términos de la teoría de Representaciones Semióticas y con ello lograr mejores caracterizaciones de las estructuras mentales logradas por los estudiantes.

Adicionalmente, una tercera cuestión se relaciona con un diseño más refinado de las actividades, para la parte del paso DG6, es decir, la construcción de la estructura Objeto debido a que, como se evidenció, en la actividad 15(e), la estructura de la pregunta originó una ausencia de información valiosa para recabar elementos del proceso mental de los estudiantes con relación a la construcción del paso DG6.

Con fundamento en estas ideas es que se considera avanzar en la propuesta de una DG del límite de una función que contemple en su descripción a las distintas representaciones del concepto, de manera que se enriquezcan las caracterizaciones del desarrollo del pensamiento de los estudiantes asociado a este concepto. Lo anterior, continuaría la línea de los trabajos de Blázquez (1999), Blázquez y Ortega (2001), y Pons (2014).

## Bibliografía


Asiala, M., Brown, A., DeVries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D., & Thomas, K. (1996). A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. *Research in Collegiate Mathematics Education II, CBMS Issues in Mathematics Education, 6*, 1-32.

Blázquez, S. (1999). Sobre la noción del límite en las matemáticas aplicadas a las ciencias sociales. *Actas del III SEIEM: Valladolid, 1999* (pp. 167-184). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Blázquez, S., Gatica, N., & Ortega, T. (2009). Análisis de diversas conceptualizaciones de límite funcional. *Gaceta de la RSME, 12(1),* 145-168.

Blázquez, S., & Ortega, T. (2001). Los sistemas de representación en la enseñanza del límite. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME, 4(3),* 219-236.

Blázquez, S., & Ortega, T. (2002). Nueva definición del límite funcional. *UNO: Revista de Didáctica de las Matemáticas, (30),* 67-84.

Bokhari, M. A., & Yushau, B. (2006). Local (L, ε)-approximation of a function of single variable: an alternative way to define limit. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 37(5),* 515-526.

Cornu, B. (1983). Quelques obstacles a l'apprentissage de la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathematiques, 4*, 236-268.

Cornu, B. (1991). Limits In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 153-166). Dordrecht: Kluwer Academic Press.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K., & Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process scheme. *Journal of Mathematical Behavior, 15(2)*, 167-192.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall, (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*. (pp. 95-123). Dordrecht: Kluwer Academic Press.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 9(1)*, 143-168.

Duval, R. (1993). Semiosis y noesis. *Lecturas en didáctica de la matemática:* Escuela Francesa, 118-144.

Duval, R. (1999). *Argumentar, demostrar, explicar: ¿continuidad o ruptura cognitiva?* (pp. 15-17). Grupo Editorial Iberoamérica.

Duval, R. (2004). Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores en el desarrollo cognitivo. *Cali: Universidad del Valle*.

Fernández, E. (2004). The students' take on the epsilon-delta definition of a limit. *Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies, 14(1)*, 43-54.

Kidron, I. (2008). Abstraction and consolidation of the limit procept by means of instrumented schemes: The complementary role of three different frameworks. *Educational Studies in Mathematics, 69(3)*, 197-216.

Monaghan, J. (1991). Problems with the language of limits. *For the learning of mathematics, 11(3)*, 20-24.

Oehrtman, M. C. (2003). Strong and Weak Metaphors for Limits. *International Group for the Psychology of Mathematics Education, 3*, 397-404.

Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational studies in Mathematics, 18(4)*, 371-397.

Swinyard, C. (2011). Reinventing the formal definition of limit: The case of Amy and Mike. *The Journal of Mathematical Behavior, 30(2)*, 93-114.

Swinyard, C., & Larsen, S. (2012). Coming to understand the formal definition of limit: Insights gained from engaging students in reinvention. *Journal for Research in Mathematics Education, 43(4)*, 465-493.

Swinyard, C., & Lockwood, E. (2007). Research on students' reasoning about the formal definition of limit: An evolving conceptual analysis. *Proceedings of the 10th Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education, USA,* CRUME, 2007.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12(2),* 151-169.

Tomàs, J. P. (2014). Análisis de la comprensión en estudiantes de bachillerato del concepto de límite de una función en un punto (Doctoral dissertation, Universitat d'Alacant-Universidad de Alicante).

Trigueros, M., & Martínez-Planell, R. (2010). Geometrical representations in the learning of two-variable functions. *Educational Studies in Mathematics, 73(1),* 3-19.

Williams, S. R. (1991). Models of limit held by college calculus students. *Journal for research in Mathematics Education, 22(3),* 219-236.