BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

AMBIENTE VIRTUAL DE APRENDIZAJE PARA LA CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES FUNDAMENTADO EN LA TEORÍA APOE

TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE

MAESTRO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

PRESENTA

ING. FRANCISCO JAVIER ANAYA-PUEBLA

DIRECTOR DE TESIS

DRA. LIDIA AURORA HERNÁNDEZ REBOLLAR

CO-DIRECTOR DE TESIS

DRA. ILEANA BORJA TECUATL

PUEBLA, PUE. FEBRERO 2020

BUAP

DRA. LIDIA AURORA HERNÁNDEZ REBOLLAR
SECRETARIA DE INVESTIGACIÓN Y
ESTUDIOS DE POSTGRADO, FCFM-BUAP
P R E S E N T E:

Por este medio le informo que el C:

LIC. FRANCISCO JAVIER ANAYA PUEBLA

Estudiante de la Maestría en Educación Matemática, ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 04 de diciembre de 2019, con la tesis titulada:

"AMBIENTE VIRTUAL DE APRENDIZAJE PARA LA CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES FUNDAMENTADO EN LA TEORÍA APOE"

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

A T E N T A M E N T E.
H. Puebla de Z. a 14 de febrero de 2020

DR. JOSIP SLISKO IGNJATOV
COORDINADOR DE LA MAESTRÍA
EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA.

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA · 1578 · FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS · SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y ESTUDIOS DE POSGRADO

Ccp. Archivo.
DR JSI / l'agm*

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por brindarme el apoyo económico para realizar mis estudios de maestría.

Francisco Javier Anaya Puebla

Becario Nº. 247532

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE FIGURAS

RESUMEN

Este trabajo presenta un *Ambiente Virtual de Aprendizaje* (VLE por sus siglas en inglés) basado en un diseño instruccional para la enseñanza-aprendizaje de Sistemas de Ecuaciones Lineales y su Conjunto Solución bajo el enfoque de la teoría APOE. El diseño de las actividades se orientó por la descomposición genética propuesta por Borja (2015). Se presenta el análisis de contenido de diez actividades presentes en el VLE, un instrumento para la recolección de información, análisis de resultados obtenidos y algunas reflexiones finales. La principal aportación del presente trabajo es la incorporación de tecnología a través de applets desarrollados en GeoGebra que permiten al estudiante enfrentarse a tareas diseñadas en representaciones múltiples del objeto matemático y que pretenden promover las estructuras y mecanismos mentales sugeridos por la descomposición genética.

ABSTRACT

This thesis presents a Virtual Learning Environment (VLE) based on instructional design for the teaching-learning of Linear Equation Systems and its Solution Set under the APOS theory approach. The design of activities has been guided by the genetic decomposition proposed by Borja (2015). The content analysis of ten activities present in the VLE, an instrument for the collection of information, analysis of results and some final reflections is presented. The main contribution of this work is the incorporation of technology through applets developed in GeoGebra that allow the student to face tasks designed in multiple representations of the mathematical object and that seek to promote the mental structures and mechanisms suggested by genetic decomposition.

INTRODUCCIÓN

Los sistemas de ecuaciones lineales constituyen un tema de estudio en diferentes niveles escolares, generalmente, a partir del nivel secundario en muchos países del mundo (Oktaç, 2018), distintos autores han investigado el tema desde diferentes enfoques (Borja, 2015; DeVries & Arnon, 2004; Ochoviet, 2009; Oktaç, 2018; Possani, Trigueros, Preciado, & Lozano, 2010; Ramírez-Palacios, Oktaç, & García, 2002; Segura, 2004; Trigueros, Oktaç, & Manzanero, 2007). A diferencia de otras investigaciones, este trabajo presenta un ambiente virtual de aprendizaje (VLE por sus siglas en inglés) el cual contiene el diseño de un tratamiento instruccional basado en la descomposición genética de Borja (2015).

La descomposición genética de Borja (2015) integra el modelo 3UV y la teoria APOE. La aportación principal del trabajo fue incorporar tecnología al diseño, la cual permite el desarrollo de nuevos entornos en donde las restricciones habituales del papel y lápiz cambian radicalmente (Arzarello & Robutti, 2010). Una de las ventajas de la tecnología es el uso de representaciones múltiples, ya que ofrece numerosas ocasiones para comprender mejor la "realidad" de los objetos matemáticos y, por lo tanto, para nuevas formas de enseñar y aprender matemáticas (Aldon, 2015).

En el Capítulo 1 se presenta el planteamiento del problema, los objetivos de la investigación y algunos antecedentes de investigaciones sobre el tema. En el Capítulo 2 se presenta el marco teórico constituido por el modelo 3UV, la teoría APOE, algunos planteamientos sobre el uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas y la importancia de la coordinación entre registros de representación semiótica. El Capítulo 3 presenta la metodología del trabajo, la cual, está de acuerdo con el ciclo de investigación que propone la teoría APOE, además, un análisis de contenido de diez actividades, las cuales a su vez pueden incluir distintas tareas y, por último, se presenta un instrumento diseñado para recolectar información con la intención de refinar el tratamiento instruccional. El Capítulo 4 presenta el análisis de los resultados obtenidos y por último presentamos algunas reflexiones.

El Ambiente Virtual de Aprendizaje está disponible en https://sites.google.com/quadrivium-puebla.mx/algebra-lineal/página-principal. Cabe señalar que con motivo de acotar el presente trabajo solo se presenta el análisis de diez actividades aun cuando en el sitio se presentan veintiocho actividades (al día 1 de diciembre de 2019).

Capítulo 1

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Los sistemas de ecuaciones lineales constituyen un tema de estudio en diferentes niveles escolares, generalmente a partir del nivel secundario en muchos países del mundo. Aunque la profundidad y los métodos de estudio de este tema varían, se considera importante principalmente por dos razones: 1) la comprensión de los sistemas de ecuaciones lineales constituye un paso importante para estudios posteriores en matemáticas en general y en álgebra lineal en particular; 2) muchas aplicaciones en los campos de la ingeniería y las ciencias sociales involucran modelos que hacen uso de este tema (Oktaç, 2018).

Distintos autores reportan dificultades en la comprensión de los sistemas de ecuaciones lineales y su solución en estudiantes de educación media, media superior y superior; incluso algunos estudiantes que han llevado un curso introductorio de álgebra lineal presentan dificultad al resolver problemas de aplicación en materias como física, química y otras para solucionar e interpretar el conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales.

Un ejemplo de la situación anterior es el balanceo de ecuaciones químicas por el método algebraico, al que comúnmente se enfrentan los estudiantes de ingenierías, en el cual, el estudiante debe plantear un sistema de ecuaciones lineales homogéneo de m ecuaciones lineales con n variables, donde $n > m$, con al menos una solución: la solución cero o trivial, o un número infinito de soluciones. Esto implica que el individuo debe proponer un conjunto solución que satisfaga al sistema de ecuaciones lineales asociado y posteriormente busque soluciones enteras positivas, debido a que el problema no admite una interpretación física para valores decimales o negativos.

Ante este escenario respecto de la enseñanza y aprendizaje de los sistemas de ecuaciones lineales, este trabajo pretende aportar a la investigación en este tema proponiendo un diseño instruccional que permita fomentar las construcciones mentales necesarias para comprender el conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales en estudiantes de carreras de ingeniería.

1.1 Objetivo

Proponer un diseño instruccional en un ambiente virtual de aprendizaje que fomente las construcciones mentales necesarias para la comprensión del conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales desde la perspectiva de la teoría APOE y el uso de diferentes representaciones semióticas.

1.2 Antecedentes

En esta sección se presenta una breve revisión sobre algunas investigaciones que han abordado el tema de Sistemas de Ecuaciones Lineales y su solución, observar la Tabla 1.

Tabla 1. Revisión de investigaciones sobre Sistemas de Ecuaciones Lineales.

Autores	Enfoque	Nivel Educativo	Marco Teórico
Ramírez - Palacios, M., Oktaç, A. García, C., (2002)	Dificultades en la representación gráfica de Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos variables	Superior	Modos de pensamiento – Sierpinska
DeVries D., Arnon I., (2004)	Solución de un Sistema de Ecuaciones Lineales	Formativo para Profesores	APOE
Segura de Herrero, S. M. (2004)	Construcción de una secuencia didáctica para la enseñanza de Sistemas de Ecuaciones Lineales - dos ecuaciones con dos incógnitas	Media	Registros de representación - Duval
Trigueros, M., Oktaç A. y Manzanero, L. (2007)	Descomposición Genética - Sistemas de Ecuaciones Lineales	Superior	APOE
Ochoviet Filgueiras, T.C. (2009)	Solución de un Sistema de Ecuaciones Lineales con dos incógnitas	Nivel Medio Superior	Modos de pensamiento - Sierpinska
Trigueros, M., Possani, E., Lozano, M.D., Sandoval, I., (2009)	Modelación como estrategia para la enseñanza de Sistemas de Ecuaciones Lineales	Superior	Modelo 3UV
Barrera, J., Bautista, L., Pérez-Campos, A., (2015)	Sistemas de Ecuaciones Lineales Homogéneos	Superior	Modos de pensamiento - Sierpinska
Borja, I. (2015)	Descomposición Genética - Sistemas de Ecuaciones Lineales	Superior	APOE
Trigueros M. (2018)	Diseño de tareas y situaciones de modelado para introducir conceptos de álgebra lineal - SEL (entre otros)	Superior	APOE
Oktaç, A., (2018)	Concepción de Sistemas de Ecuaciones Lineales y su solución que desarrollan los estudiantes, recomendaciones pedagógicas	Básica, Media Superior y Superior	Modos de pensamiento - Sierpinska

Hernández - Jaramillo, D., (2018)	Descomposición Genética (4) - Sistemas de Ecuaciones Lineales y su solución.	Media Superior	APOE
Moreno, O., Gallo, H., Arguello, M., Herrera, C., (2018)	Descomposición Genética - Sistemas de Ecuaciones Lineales	Superior	APOE
Rodríguez Jara, M. A., Mena Lorca, A., Mena Lorca, J., Vásquez Saldias, P. y Del Valle Leo, M. E. (2019)	Conjunto Solución de Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos incógnitas	Formación para profesores	APOE

Fuente: Elaboración propia

A partir de esta revisión podemos identificar tres grandes grupos, uno que utiliza el enfoque de los modos de pensamiento propuestos por Sierpinska, un segundo grupo que ha utilizado como marco teórico a la Teoría APOE y algunas otras investigaciones que han adoptado otros modelos o teorías para analizar sus resultados, como la teoría de las representaciones de Duval o el Modelo 3UV de Ursini y colaboradores. Igualmente, con respecto al nivel educativo en que se han realizado dichas investigaciones encontramos aquellas que se han realizado en nivel básico, medio superior, superior e incluso con profesores en formación. Cabe señalar que, aunque en su gran mayoría, estas investigaciones han tomado una única teoría como marco teórico, distintas investigaciones han adoptado más de un enfoque, como es el caso de Borja (2015) quien integra al modelo 3UV con la teoría APOE. A diferencia de las investigaciones referidas anteriormente, en este trabajo nos enfocamos en proponer un tratamiento instruccional apoyado en el diseño de un ambiente virtual de aprendizaje, además, se abordan sistemas de ecuaciones lineales en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, los cuales permiten pueden ser representados de manera gráfica, o sistemas en $\mathbb{R}^4$ que, si bien no permiten su representación gráfica (con la tecnología disponible), si podemos verificar su solución en problemas como el de ajuste polinomial de curvas.

Capítulo 2

MARCO TEÓRICO

2.1 El Modelo 3 Usos de la Variable (Modelo 3UV)

Ursini y Trigueros (2006) reportan que aunque se ha encontrado que los estudiantes no alcanzan una comprensión aceptable del uso de la variable y manifiestan serias dificultades al trabajar con sus distintos usos, estas dificultades no se tienen en cuenta en los niveles universitarios cuando se imparten los cursos de matemáticas avanzadas. Por esta razón es importante considerar el fortalecimiento de la comprensión del uso de las variables en los cursos de nivel superior como el de álgebra lineal.

El Modelo 3 Usos de la Variable (3UV) es el resultado de varios años de trabajo conjunto, principalmente, entre Sonia Ursini y María Trigueros (Ursini, Escareño, Montes, & Trigueros, 2016), y puede ser usado como una guía para el diseño y análisis de diagnósticos, diseño de actividades para los alumnos y análisis de libros de texto.

De manera general, el Modelo 3UV plantea que, en un nivel elemental, las habilidades que deben desarrollarse para tener una comprensión básica de las variables son:

- Realizar cálculos sencillos operando con variables
- Comprender por qué es posible operar con las variables y por qué estas operaciones permiten llegar a un resultado, sea este numérico o no
- Darse cuenta de la importancia que tiene lograr la capacidad de usar las variables para modelar matemáticamente situaciones de distinto tipo
- Distinguir entro los distintos usos que se les da a las variables en álgebra
- Transitar con flexibilidad entre los distintos usos de las variables
- Integrar los diversos usos para verlos como caras distintas de un mismo objeto matemático, que se revelan dependiendo de la situación particular

Ursini et al. (2016) proponen que para cada uno de los usos más comunes de las variables (incógnita, número general y relación funcional) se contemplen distintos aspectos que corresponden a los distintos niveles de abstracción en los que la variable puede ser manejada. Estos aspectos, constituyen requisitos para que los estudiantes trabajen exitosamente con problemas y ejercicios que involucran la variable en estos tres usos (ver Tabla 2).

Tabla 2. Usos de la variable según el Modelo 3UV (Ursini et al., 2016, p. 22)

Uso de la Variable		
Número General	**Incógnita**	**Relación Funcional**
(G1) Reconocer patrones, percibir reglas y métodos en secuencias y en familias de problemas. (G2) Interpretar un símbolo como la representación de una entidad general indeterminada que puede asumir cualquier valor. (G3) Deducir reglas y métodos generales en secuencias y familias de problemas. (G4) Manipular (simplificar, desarrollar) la variable simbólica. (G5) Simbolizar enunciados, reglas o métodos generales.	(I1) Reconocer e identificar en una situación problemática la presencia de algo desconocido que puede ser determinado considerando las restricciones del problema. (I2) Interpretar los símbolos que aparecen en una ecuación como la representación de valores específicos. (I3) Sustituir la variable por el valor o los valores que hacen de la ecuación un enunciado verdadero. (I4) Determinar la cantidad desconocida que aparece en ecuaciones o problemas, realizando las operaciones algebraicas o aritméticas. (I5) Simbolizar las cantidades desconocidas identificadas en una situación específica y utilizarlas para plantear ecuaciones.	(F1) Reconocer la correspondencia entre variables relacionadas, independientemente de la representación utilizada (tablas, gráficas, problemas verbales, expresiones analíticas). (F2) Determinar los valores de la variable dependiente, dados los valores de la independiente. (F3) Determinar los valores de la variable independiente, dados los valores de la dependiente. (F4) Reconocer la variación conjunta de las variables involucradas en una relación funcional, independientemente de la representación utilizada (tablas, gráficas, problemas verbales, expresiones analíticas). (F5) Determinar los intervalos de variación de una de las variables, dado el intervalo de variación de la otra. (F6) Simbolizar una relación funcional, basados en el análisis de los datos de un problema.

Por otra parte, Ursini y Trigueros (2004) señalan que la dificultad que presentan los estudiantes con el uso de parámetros puede ser analizada desde la perspectiva del modelo 3UV, para esto es necesario centrarse en su capacidad para interpretarlos, simbolizarlos y manipularlos en diferentes contextos, uno de estos contextos será el uso de la variable como parámetro en el caso de sistemas de ecuaciones lineales con infinitas soluciones.

En este trabajo utilizaremos la perspectiva de Ursini y Trigueros (2004) que definen a los parámetros como números generales de segundo orden, los cuales pueden asumir el papel de variables desconocidas o relacionadas dependiendo del contexto.

2.2 Teoría APOE

El acrónimo APOE de *Acción, Proceso, Objeto* y *Esquema* es una teoría que estudia cómo se pueden aprender los conceptos matemáticos. Esta teoría está basada en el trabajo de Jean Piaget, cuyas ideas fundamentales se introdujeron por primera vez a principios de la década de 1980, y desde ese momento, investigadores, desarrolladores de planes de estudio y profesores han llevado a cabo un extenso desarrollo y aplicación en muchos países del mundo (Arnon et al., 2014).

La teoría APOE es principalmente un modelo para describir cómo los conceptos matemáticos pueden ser aprendidos; es un marco de referencia que busca explicar cómo los individuos construyen mentalmente su comprensión de contenidos matemáticos (Arnon et al., 2014).

La postura de investigación general vinculada a la teoría APOE es reconocida como un paradigma, ya que (1) difiere de la mayoría de las investigaciones en educación matemática en su enfoque teórico, metodología y tipos de resultados ofrecidos; (2) contiene componentes teóricos, metodológicos y pedagógicos que están estrechamente relacionados entre sí; (3) continúa atrayendo a los investigadores que encuentran útil responder preguntas relacionadas con el aprendizaje de numerosos conceptos matemáticos, y (4) continúa proporcionando preguntas abiertas que deben ser resueltas por la comunidad de investigación (Arnon et al., 2014).

2.2.1 Estructuras y mecanismos mentales

Dubinsky (2002) analiza cinco tipos de mecanismos mentales (interiorización, coordinación, reversión, encapsulación y generalización) que conducen a la construcción de estructuras mentales: acciones, procesos, objetos y esquemas. La Figura 2.1 ilustra las relaciones entre estos mecanismos y estructuras.

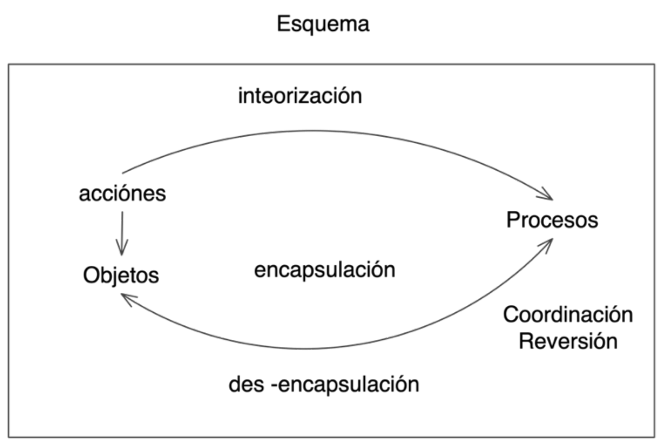


Figura 2.1 Estructuras y mecanismos mentales para la construcción del conocimiento matemático, (Arnon et al., 2014, p. 18)

2.2.2 Acciones

La Teoría APOE propone que un concepto se concibe primero como una *Acción*, es decir, como una transformación dirigida externamente de un *Objeto* u *Objetos* concebidos previamente. Una acción es externa en el sentido de que cada paso de la transformación debe realizarse explícitamente y guiarse por instrucciones externas. Además, cada paso indica el siguiente, es decir, los pasos de la *Acción* aún no se pueden imaginar y ninguno se puede omitir (Arnon et al., 2014).

2.2.3 Interiorización y procesos

Los *Procesos* se construyen utilizando uno de dos mecanismos mentales: interiorización o coordinación. Cada uno de estos mecanismos da lugar a nuevos procesos.

A medida que las *Acciones* se repiten y se reflexionan, el individuo pasa de depender de estímulos externos a tener control interno sobre ellas. Esto se caracteriza por la capacidad de imaginar la realización de los pasos sin tener necesariamente que realizar cada uno de manera explícita y poder omitir los pasos, así como revertirlos. La interiorización es el mecanismo que hace posible este cambio mental, además permite hacerse consciente de una acción, reflexionar sobre ella y combinarla con otras acciones (Arnon et al., 2014).

2.2.4 Encapsulación y objetos

La encapsulación ocurre cuando un individuo aplica una *Acción* a un *Proceso*, es decir, ve una estructura dinámica (*Proceso*) como una estructura estática a la que se pueden aplicar *Acciones*. Cuando un individuo se da cuenta del proceso como una totalidad, se da cuenta de que las transformaciones pueden actuar en esa totalidad y realmente pueden construir tales transformaciones (explícitamente o en la imaginación), entonces decimos que ha resumido el proceso en un objeto cognitivo (Arnon et al., 2014).

2.2.5 Desencapsulación, coordinación y reversión de procesos

Una vez que un *Proceso* se ha encapsulado en un *Objeto* mental, se puede desencapsular, cuando sea necesario, volver a su *Proceso* subyacente. En otras palabras, al aplicar el mecanismo de desencapsulación, un individuo puede volver al Proceso que dio origen al Objeto (Arnon et al., 2014).

El mecanismo de coordinación es indispensable en la construcción de algunos objetos. Se pueden desencapsular dos objetos, coordinar sus procesos y encapsular el proceso coordinado para formar un nuevo objeto (Arnon et al., 2014).

2.2.6 Tematización y esquemas

La interacción de los elementos presentados en la Figura 2.1 da lugar a los *Esquemas*. Según Dubinsky (2002), un esquema se caracteriza por su dinamismo y su reconstrucción continua según lo determinado por la actividad matemática del sujeto en situaciones matemáticas específicas. La coherencia de un esquema está determinada por la capacidad del individuo para determinar si se puede utilizar para tratar una situación matemática particular. Una vez que un esquema se construye como una colección coherente de estructuras (acciones, procesos, objetos y otros esquemas) y conexiones establecidas entre esas estructuras, se puede transformar en una estructura estática (objeto) y/o usarse como una estructura dinámica que asimila otros objetos o esquemas relacionados (Arnon et al., 2014).

2.2.7 Ciclo de enseñanza ACE

El ciclo de enseñanza ACE (por sus siglas en inglés) es una estrategia pedagógica que consiste en tres componentes: (A) Actividades, (C) Discusión en Clase y (E) Ejercicios. Para las Actividades, que constituyen el primer paso en el ciclo, los estudiantes trabajan colaborativamente en equipos en tareas diseñadas para ayudar a los estudiantes a realizar las construcciones mentales propuestas por la descomposición genética. El objetivo de estas tareas es promover la abstracción reflexiva más que las respuestas correctas.

La discusión en clase, que corresponde a la segunda parte del ciclo, involucra a un pequeño grupo y a un instructor que dirigirá la discusión, basándose en los trabajos realizados por los estudiantes ya sea a lápiz y papel o, en su caso, actividades desarrolladas en laboratorio de cómputo. La discusión en clase y el trabajo dentro del salón proporciona a los estudiantes la oportunidad de reflexionar sobre su trabajo, particularmente de las actividades realizadas en el laboratorio. La labor del instructor consiste en guiar la discusión, proveer definiciones, ofrecer explicaciones, y/o presentar un punto de vista para unir lo que los estudiantes han estado pensando y trabajando.

Los ejercicios de tarea, que corresponde a la tercera parte del ciclo, consisten en una serie de problemas típicos diseñados para reforzar las actividades y la discusión en clase. Los ejercicios ayudan como soporte para el continuo desarrollo de las construcciones mentales sugeridas por la descomposición genética.

El ciclo ACE y su relación con la descomposición genética se ilustra en la figura 2.2:

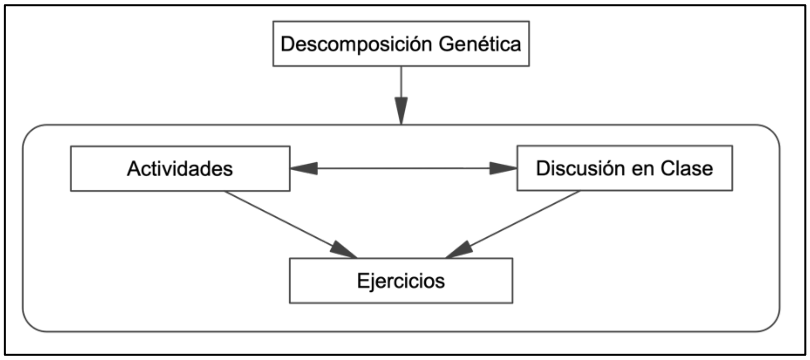


Figura 2.2. Ciclo de Enseñanza ACE (Arnon et al, 2014)

2.2.8 Descomposición Genética

Una Descomposición Genética es un modelo hipotético que describe las estructuras mentales y los mecanismos que un estudiante podría necesitar para aprender un concepto matemático específico. Por lo general, comienza como una hipótesis basada en las experiencias de los investigadores en el aprendizaje y la enseñanza del concepto, su conocimiento de la Teoría APOE, su conocimiento matemático, la investigación previamente publicada sobre el concepto y el desarrollo histórico del concepto. Hasta que se prueba experimentalmente, una descomposición genética es una hipótesis y se conoce como preliminar (Arnon et al., 2014, p. 27).

2.2.9 El paradigma de investigación de la teoría APOE

De acuerdo a Arnon et al. (2014), un proyecto de investigación basado en APOE involucra tres componentes: análisis teórico, diseño e implementación del tratamiento instruccional y recolección y análisis de datos. La figura número 2.3 muestra cómo se relacionan estos componentes.

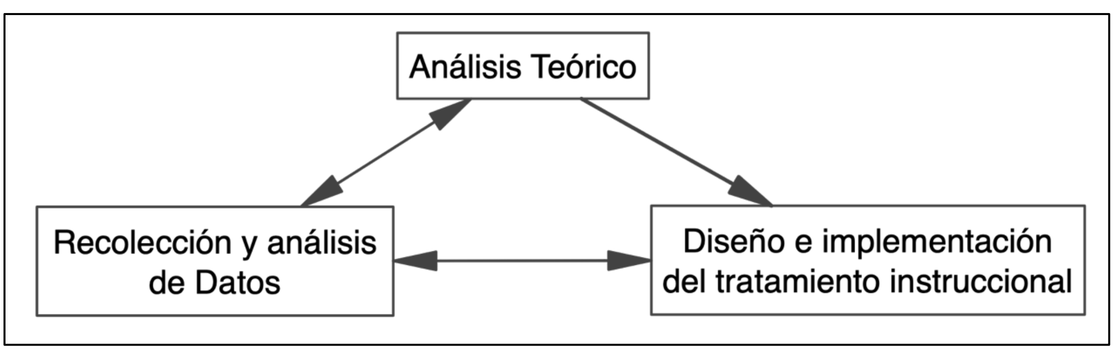


Figura 2.3. Marco de investigación de la teoría APOE

Según este paradigma, la investigación comienza con un análisis teórico de la cognición del concepto matemático bajo estudio. Esto da lugar a una descomposición genética preliminar del concepto. Una descomposición genética es una descripción de las construcciones mentales y los mecanismos mentales que un individuo podría hacer al construir su comprensión de un concepto matemático (Arnon et al., 2014).

Como lo indican las flechas en la figura 2.3 los tres componentes del ciclo de investigación influyen entre sí. El análisis teórico dirige el diseño y la implementación del tratamiento instruccional a través de actividades destinadas a fomentar las construcciones mentales propuestas en el análisis. Las actividades y ejercicios están diseñados para ayudar a los estudiantes a construir acciones, interiorizarlas en procesos, encapsular procesos en objetos y coordinar dos o más procesos para construir nuevos procesos. Una variedad de estrategias pedagógicas, como el aprendizaje cooperativo, la resolución de problemas en grupos pequeños e incluso algunas clases tradicionales, pueden ser muy efectivas para ayudar a los estudiantes a aprender el contenido matemático. La implementación del tratamiento instruccional brinda una oportunidad para la recopilación y el análisis de datos, los cuales se recolectarán y analizarán bajo la lente de la teoría APOE.

El propósito del análisis es responder dos preguntas: (1) ¿Los estudiantes hicieron las construcciones mentales requeridas por el análisis teórico? (2) ¿Qué tan bien aprendieron los estudiantes el contenido matemático? Si la respuesta a la primera pregunta es negativa, la instrucción se reconsidera y revisa. Si la respuesta a la primera pregunta es positiva y la respuesta a la segunda pregunta es negativa, el análisis teórico es reconsiderado y revisado. En cualquier caso, el ciclo se repite hasta que estas preguntas sean respondidas positivamente y el instructor / investigador esté satisfecho de que los estudiantes hayan aprendido los conceptos matemáticos suficientemente bien. En otras palabras, el ciclo continúa hasta que la evidencia empírica y el análisis teórico apuntan hacia las mismas construcciones mentales. Finalmente, como parte de sus conclusiones, cada estudio ofrece sugerencias pedagógicas para la implementación y direcciones para futuras investigaciones.

2.3 Descomposición genética para el concepto conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales.

El presente trabajo de investigación partirá del análisis teórico presentado en Borja (2015), en la cual se destaca que:

> La principal aportación de esta investigación es una descomposición genética sobre las construcciones cognitivas y los elementos matemáticos involucrados en la resolución de un sistema de ecuaciones lineales que puede dar luz sobre aquellas construcciones que juegan un papel clave esencial para el aprendizaje significativo de los conceptos asociados a la solución de un sistema de ecuaciones lineales (Borja, 2015, pp. 272–273).

En las siguientes secciones se hará una transcripción de la Descomposición Genética de Borja (2015).

2.3.1 Construcción del concepto *Sistema de Ecuaciones Lineales*.

La construcción del concepto de la solución de un sistema de ecuaciones lineales empieza con la construcción del concepto *Sistema de Ecuaciones Lineales* (*SLE*) en sí. Esta construcción se logra cuando los estudiantes consideran una lista de m ecuaciones como un conjunto de ecuaciones que tiene la característica de compartir un dominio común de solución, $\mathbb{R}^n$. Para ello, los estudiantes interiorizan las acciones de evaluación de una función lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ en un *Proceso*, que coordinan con el proceso de establecer una igualdad entre dos valores, a saber, la evaluación de la función y el valor que la ecuación establece. Dicha coordinación da lugar a la construcción de una ecuación lineal como *Proceso*. Este proceso se encapsula en el objeto ecuación lineal, al realizar acciones o transformaciones con o sobre él, por ejemplo, transformar la ecuación en una relación funcional explícita. Cuando los estudiantes consideran los distintos dominios apropiados a una ecuación (*Proceso*) y los coordinan mediante la comparación para establecer un valor apropiado de n, que permita a todas las ecuaciones de la lista tener un dominio de evaluación común y las agrupan bajo esa característica, construyen el concepto de un conjunto de ecuaciones lineales con dominio común $\mathbb{R}^n$ (*Proceso*). Al pensar en este conjunto como un todo que es susceptible a transformaciones, los estudiantes pueden preguntarse cuántas y qué n-adas existirán en el dominio común que satisfagan todas las ecuaciones del conjunto; de esta manera construyen el *Objeto* Sistema de Ecuaciones Lineales (Borja, 2015).

Borja (2015) propone que una concepción *Objeto* del concepto Sistema de Ecuaciones Lineales implica que los estudiantes pueden operar con y sobre el sistema de ecuaciones lineales de la manera que lo requieran, por ejemplo, para construir sistemas de ecuaciones lineales equivalentes o encontrar la solución al sistema.

Una vez construido el concepto de Sistema de Ecuaciones Lineales, el estudiante puede construir el concepto de solución de éste. Esta construcción inicia con la construcción del conjunto solución de cada ecuación. La construcción de estos conjuntos implica, en primer lugar, desencapsular el sistema las ecuaciones que dieron origen al sistema. Una vez que los estudiantes ejecutan acciones nuevamente sobre cada ecuación, sin perder de vista el dominio común que comparten todas las ecuaciones como parte del sistema, los estudiantes relacionan el esquema de función con el esquema de conjunto para construir el conjunto solución de cada una de las ecuaciones (Borja, 2015).

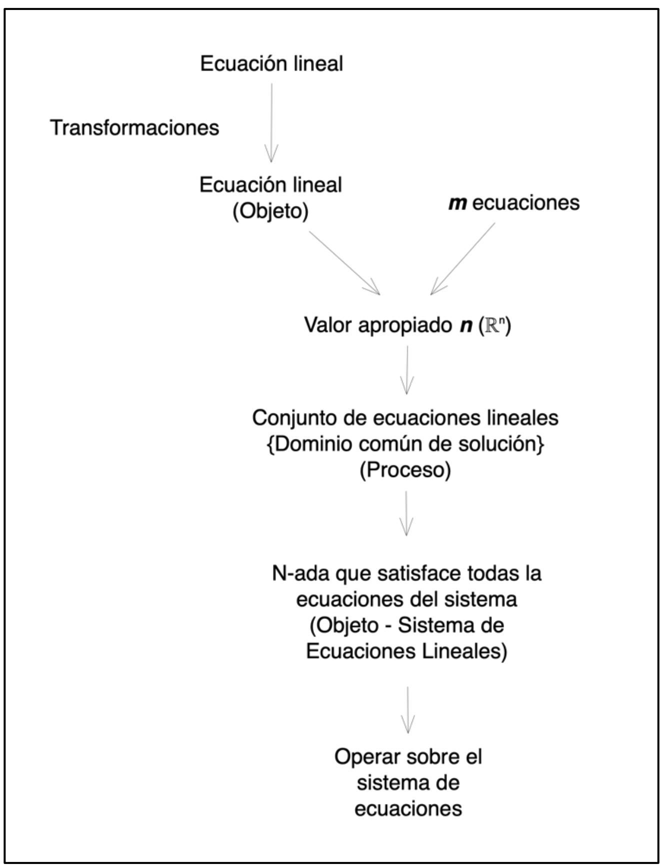


Figura 2.4. Descomposición Genética para el concepto Sistema de Ecuaciones Lineal, elaboración propia con datos de Borja (2015)

2.3.2 Construcción del concepto *Conjunto Solución de una Ecuación Lineal*

La construcción del concepto de una solución a una ecuación lineal se logra con la vinculación de dos esquemas, por un lado el de n-ada y por otro lado el de variable, mediante las acciones de escribir la ecuación como una función condicionada y la de evaluar la función en las variables del espacio dominio, para lo cual se debe des-encapsular la n-ada (percibida como el objeto n -dimensional sobre el que actúa la función) en las variables – o coordenadas – que la componen. La acción de evaluar la función en distintos puntos permite a los estudiantes recuperar la información sobre las variables reales que satisfacen la función y la ecuación. Estas acciones se interiorizan al considerar una n -ada solución como una n -ada genérica (variable) cuyas coordenadas guardan la relación impuesta por la ecuación (que es una condición a la evaluación de la función).

Borja (2015) también explica, en términos de la variable, la construcción del conjunto solución de una ecuación lineal: Si la ecuación involucra sólo una coordenada, los estudiantes requerirán reconocer e identificar la presencia de algo desconocido que puede ser determinado (I1) realizando operaciones algebraicas o aritméticas (I4), mientras que las demás variables deben interpretarse como números generales (G2), cuya presencia en la ecuación es tácita. Esto implica que los estudiantes reconozcan mentalmente que ai = 0 para todas las xi cuya presencia en la ecuación no es explícita en la función de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ que actúa sobre la n-ada, $f(x_i, \ldots, x_n) = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + q$. Los estudiantes pueden plantear así una n-ada solución genérica (G5), una de cuyas coordenadas conocen específicamente.

Si la ecuación involucra más de una coordenada, entonces los estudiantes requerirán reconocer que la ecuación expresa una relación funcional entre las coordenadas (F1). La acción de evaluar la función de una n -ada implica determinar los valores de la variable dependiente, dados los valores de las variables independientes (F2) y, en consecuencia, obtendrían ejemplos de n -adas solución. Si los estudiantes han construido un proceso son capaces de reconocer la variación conjunta de las variables involucradas de manera general (F4) y transformar la ecuación en una relación funcional explícita para alguna de las coordenadas (F6), y así determinar una n-ada genérica que revela la dependencia explícita de una de las coordenadas en términos de las otras. Este proceso requiere, a su vez, que los estudiantes puedan escribir la n-ada genérica como un arreglo ordenado de números generales (G2), uno de los cuales se expresa en términos de los otros (G5), pues al momento de escribir la n-ada se debe utilizar únicamente la información de la coordenada como una expresión abierta, ya no como una ecuación entre variables relacionadas. Este proceso se encapsula en una n-ada, que al compararse con otras que también son solución de la ecuación, puede ser agrupada en un conjunto, el conjunto solución de la ecuación.

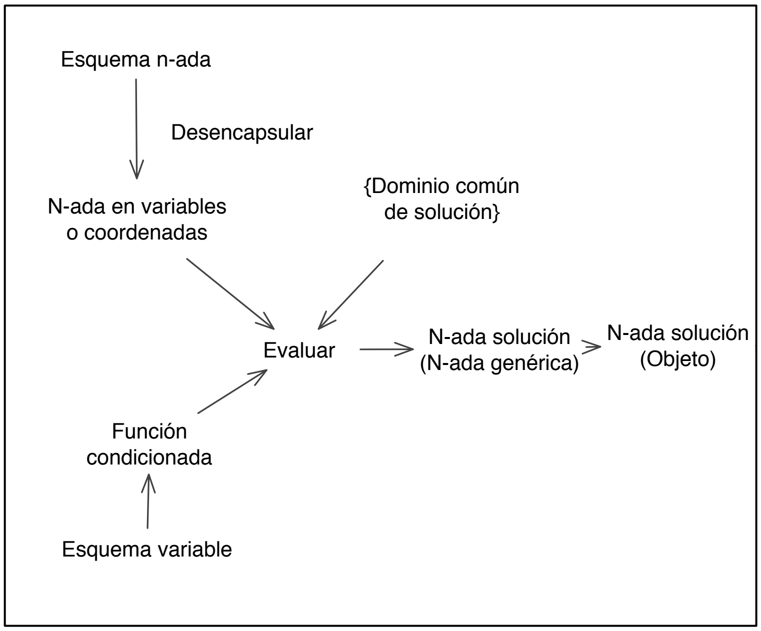


Figura 2.5. Construcción de la solución de una ecuación lineal, elaboración propia con datos de Borja (2015)

2.3.3 Construcción del concepto *Conjunto Solución de un Sistema de Ecuaciones Lineales*.

Una vez construido el concepto conjunto solución de cada ecuación del sistema, la construcción del *Conjunto Solución de un Sistema de Ecuaciones Lineales* (CS-SEL) requiere que los estudiantes reflexionen sobre el significado de resolver el sistema de ecuaciones en sí. Para ello deben partir de los procesos desde los que se construyó el sistema (considerar un conjunto de ecuaciones y encontrar un dominio común de solución para ellas) y coordinarlos en el proceso mediante el cual es posible determinar que una solución que está en un conjunto solución, pero no en los demás, no es solución del conjunto de todas las ecuaciones, por tanto no es solución del sistema, es decir: la(s) solución(es) del sistema de ecuaciones lineales está(n) en todos los conjuntos solución simultáneamente. Este proceso es encapsulado en un *Objeto* cuando se requiere realizar acciones sobre la(s) solución(es), como describir sus coordenadas, ubicarla(s) en un espacio cartesiano apropiado (si la dimensión de la n-ada lo permite), descomponerla(s) como suma de dos o más n-adas, o agruparla(s) en un conjunto.

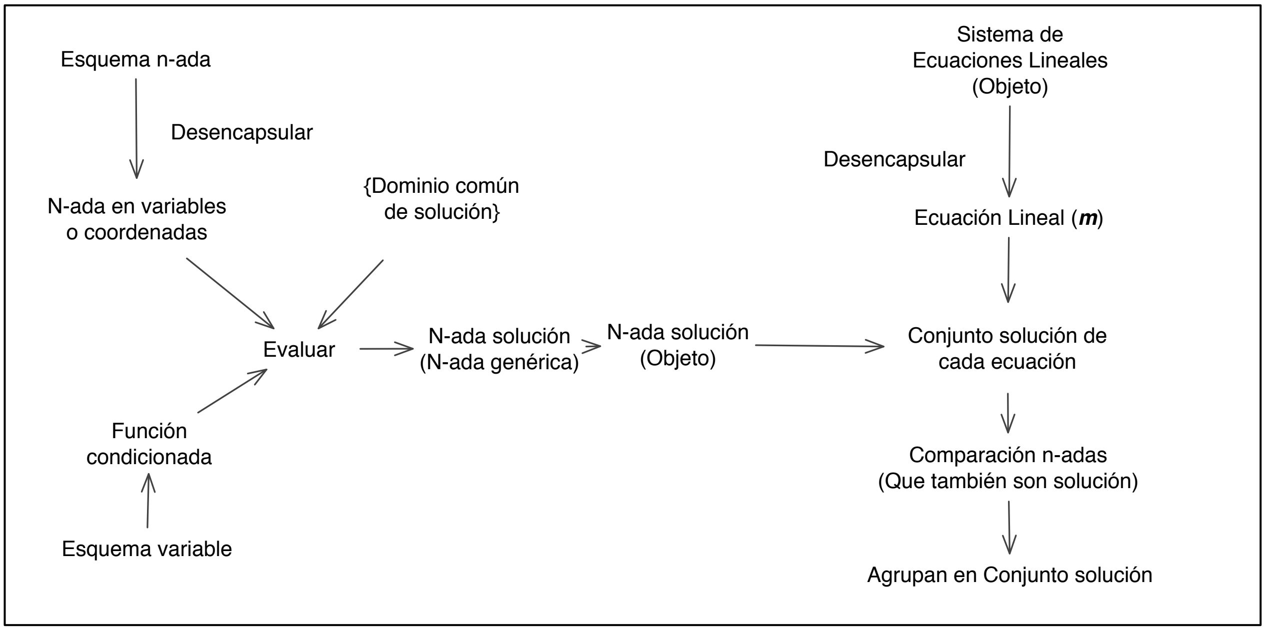


Figura 2.6. Construcción del concepto de conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales, elaboración propia con datos de Borja (2015)

2.4 Uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas

En esta sección abordaremos algunos de los aspectos del uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas que son tomados en cuenta para el diseño del tratamiento instruccional.

2.4.1 Ambientes Virtuales de Aprendizaje

Borba et al. (2016) mapearon el desarrollo de la investigación sobre la interfaz entre la tecnología digital y la educación matemática, dentro de su trabajo identificaron cinco tendencias que presentaron en el Congreso Internacional sobre Educación Matemática (ICME 13) y que aquí presentamos en la figura 2.7.

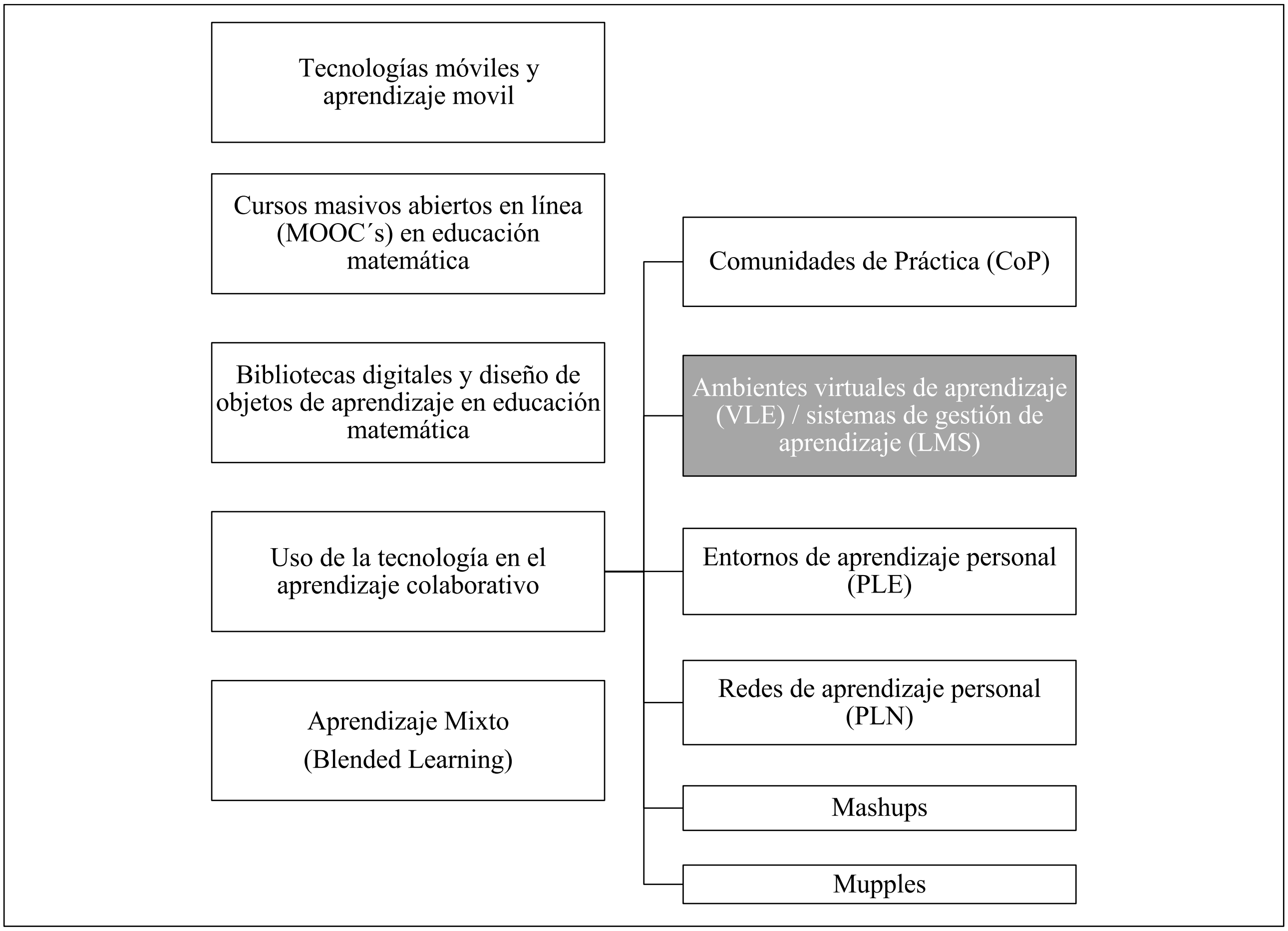


Figura 2.7. Interfaz entre la tecnología digital y la educación matemática, Fuente: elaboración propia con datos de Borba y colaboradores (2016)

Dentro de las tendencias de desarrollo discutidas en su artículo encontramos aspectos de interés para esta investigación. Por ejemplo, la disponibilidad de recursos de aprendizaje de matemáticas en línea (como las bibliotecas digitales y los objetos de aprendizaje) permite que muchos estudiantes ahora puedan recurrir a estas herramientas antes de consultar a un maestro o un libro de texto. Esto plantea preguntas sobre cómo organizar los recursos para facilitar el acceso y cómo diseñarlos pedagógicamente para fomentar la comprensión de los conceptos. Por otra parte, el uso de propuestas de aprendizaje mixto (*blended learning*) para ampliar y complementar el aprendizaje en el aula, con exploración y discusión en línea, o para emplear un modelo de aula invertido para hacer que el aula sea un lugar de extensión y elaboración, en lugar de instrucción directa, plantea preguntas sobre la necesidad de investigar los diversos modelos utilizados en educación matemática (Borba et al., 2016).

El presente trabajo contiene elementos que podemos enmarcar en el diseño de un Ambiente Virtual de Aprendizaje, VLE por sus siglas en inglés, utilizando un modelo de aprendizaje mixto, ya que se contará con sesiones en el salón de clases, en laboratorio de cómputo acompañados por el docente y tareas a realizar en línea fuera de clase. El ambiente virtual de aprendizaje cuenta con applets desarrollados en la plataforma *GeoGebra*.

2.4.2 GeoGebra

GeoGebra es un software de matemáticas para todo nivel educativo. Reúne dinámicamente geometría, álgebra, estadística y cálculo en registros gráficos, de análisis y de organización en hojas de cálculo (https://www.geogebra.org/about).

2.4.2.1 Una categorización de applets de GeoGebra

Jiménez (2018) resalta la necesidad de contar con una clasificación de las distintas aplicaciones que se pueden generar o usar con GeoGebra, ver Tabla 2.

Tabla 3. Clasificación de aplicaciones generadas o usadas en Geogebra, Jiménez (2018)

Applets de conjetura	Applets de evaluación
Su propósito es ejemplificar hipótesis o supuestos asociados a un objeto o situación, de manera que, a partir de su exploración se ratifiquen o invaliden los supuestos planteados. Características: • Ausencia de textos que indique el proceso a seguir. No se dan instrucciones al usuario. • Se encuentran activas tanto la vista algebraica como la de ejecución (gráfica, 3D, tabla o CAS). • No hay botones ni casillas de ingreso. • Si hay deslizadores, aparecen en su forma usual.	Como su nombre lo indica, este tipo de aplicativos son actividades que le permiten al docente evaluar procesos, conocimientos o habilidades. Características: • Contienen preguntas de selección múltiple, numéricas, emparejar, completar, graficar, entre otras. • Se define la variable Grade (en su mayoría). • Contiene una breve retroalimentación (puede ser una nota).

<table>
<tr><th>Applets de aprendizaje autónomo</th><th>Applets calculadoras</th></tr>
<tr><td>Estas construcciones están diseñadas para que el usuario caracterice algún concepto o procedimiento sin acompañamiento obligatorio de un docente; en general se evidencia un esfuerzo adicional en el diseño de la interfaz.

Características

• En su diseño se incluyen botones o casillas que le permiten al usuario interactuar con el applet.
• Se incluyen indicaciones para el uso del applet.
• Su construcción permite al usuario reproducir una amplia gama de casos.
• No aparece la vista algebraica</td><td>Este tipo de aplicativos le permiten al usuario efectuar diversos tipos de cálculo en los diferentes campos disciplinarios que el software ofrece.

Características

• Su diseño incluye botones y casillas que le permiten al usuario interactuar con el aplicativo.
• Permite realizar una gran cantidad de cálculos.
• Contiene indicaciones breves acerca de su uso.
• Se particularizan funciones de GeoGebra para que el usuario no asuma el proceso de programar</td></tr>
<tr><th colspan="2">Applets de acompañamiento</th></tr>
<tr><td colspan="2">Su propósito es ser un material de apoyo o soporte a las explicaciones dadas por el docente. En su gran mayoría son representaciones gráficas, no aparecen indicaciones de uso puesto que en la mayoría de los casos el autor es el usuario.

Características

• No aparecen textos que indiquen el uso de las herramientas, pero en ocasiones si señales para quien manipula la construcción.
• Los casos que se pueden reproducir son limitados.
• Los títulos en general señalan un concepto o procedimiento.
• La utilidad de los mismos carece de sentido sin el acompañamiento del docente.</td></tr>
</table>

2.4.3 Entornos de representación múltiple o multi-representación

El uso de herramientas tecnológicas permite el desarrollo de nuevos entornos en donde las restricciones habituales del papel y lápiz cambian radicalmente; de hecho, los entornos tecnológicos ofrecen más de una opción para que los estudiantes puedan interactuar, con la posibilidad de integrar y utilizar simultáneamente registros diferentes (como numéricos, simbólicos, gráficos) con la misma herramienta (pantalla de la herramienta tecnológica), o diferentes herramientas (las pantallas de las diferentes herramientas presentes en el aula). Estos entornos los consideraremos de representación múltiple, en el sentido de que los estudiantes tienen dos o más representaciones de los mismos objetos matemáticos a su disposición (Arzarello & Robutti, 2010).

El uso de una tecnología no significa una repetición de las actividades tradicionales realizadas en papel y lápiz, sino que introduce una nueva metodología que puede dar diferentes enfoques a las matemáticas. Esto tiene consecuencias para las diferentes modalidades de comportamientos activados simultáneamente por los estudiantes durante sus procesos de aprendizaje. Por ejemplo, en sus producciones verbales, escritas y gestuales. Dichas características representan una novedad en el panorama de los entornos tecnológicos, y es natural preguntarse si dichas innovaciones modifican los procesos y los productos de las personas que aprenden matemáticas y cómo podrían cambiar las prácticas de los docentes (Arzarello & Robutti, 2010).

Con respecto a las contribuciones de la tecnología a la construcción de conocimiento matemático:

> Se puede considerar que el desarrollo de una parte experimental de las matemáticas vincula representaciones y objetos, así como medios y contenidos. La posibilidad de representaciones múltiples inherentes a la tecnología ofrece numerosas ocasiones para comprender mejor la "realidad" de los objetos matemáticos y, por lo tanto, para nuevas formas de enseñar y aprender matemáticas (Aldon, 2015, p. 380).

2.5 Importancia de la coordinación entre registros de representación

Como mencionamos anteriormente el uso coordinado de las dos teorías como un solo marco no es algo nuevo, por ejemplo Romero y Oktaç (2015) proponen que el uso de la teoría APOE y la teoría de representaciones semióticas de Duval (1999) permitiría ganar precisión y entendimiento sobre varios aspectos del aprendizaje de las transformaciones lineales: sobre el desarrollo de las estructuras mentales, el papel de la semiosis en el aprendizaje y la naturaleza de varias dificultades de aprendizaje.

Al respecto Arnon et al. (Arnon et al., 2014, p. 181) resaltan que:

La razón por la cual los estudiantes tienen tantos problemas para realizar transiciones entre una representación y otra es que ellos van directamente de una representación a la otra (y así son enseñados) sin pasar por el significado cognitivo del concepto (dado por la descomposición genética.

Capítulo 3

METODOLOGÍA

En apego al ciclo de investigación que propone la teoría APOE esta investigación partió del análisis teórico propuesto por Borja (2015) el cual orientó el diseño del tratamiento instruccional, posteriormente se implementó dicho diseño y se aplicó un instrumento para la recolección de datos para su posterior análisis. Cabe mencionar que, como objetivo del presente trabajo, no se planteó llegar a proponer un refinamiento a la descomposición genética.

A continuación describimos las fases en las que se desarrolló la investigación:

- Primera fase: Revisión de literatura, esta fase inició durante el primer semestre del año 2018 y continuó durante el desarrollo de toda la investigación; de la revisión de literatura y partiendo de la descomposición genética de Borja (2015) se identificaron aquellas construcciones mentales que era necesario desarrollar en los estudiantes para promover la comprensión de SEL y su CS-SEL, lo anterior sirvió para fundamentar el diseño del conjunto de actividades y tareas.
- Segunda fase: Diseño de actividades y construcción del VLE. Durante todo el año 2018 se continuó con el diseño de actividades y construcción del VLE, inicialmente en el dominio de la Universidad Politécnica de Puebla y posteriormente se migró al sitio https://sites.google.com/quadrivium-puebla.mx/algebra-lineal/página-principal en el mes de julio de 2019.
- Tercera fase: Pilotaje de actividades. Esta fase se realizó durante el cuatrimestre Agosto-Diciembre 2018 en la Universidad Politécnica de Puebla, con tres grupos de la materia de Álgebra Lineal. Esta fase sirvió para probar las actividades con la finalidad de detectar dificultades que podrían presentarse tanto con las tareas propuestas como con el uso de las applets desarrolladas.
- Cuarta fase: Aplicación de actividades y recolección de información. Se realizó durante el cuatrimestre Enero-Mayo de 2019 en la Universidad Politécnica de Puebla en el programa académico de Ingeniería en Biotecnología, con un grupo de estudiantes que no acreditaron el curso de Álgebra Lineal en el cuatrimestre inmediato anterior, con un total de 24 horas (de las cuales 12 horas fueron utilizadas para el tema de Sistemas de Ecuaciones Lineales).

Es importante mencionar que el tratamiento instruccional consideró algunos de los elementos propuestos por la metodología ACE, pero su aplicación no fue en estricto apego. En esta etapa se aplicó un instrumento de evaluación al finalizar el curso.

3.1 Diseño del tratamiento instruccional

En esta sección se presentan las características del diseño instruccional: 1) se describen las características generales del VLE como son su ubicación digital, contenidos disponibles y cuáles de estos contenidos forman parte del presente estudio, 2) se presenta el análisis de contenido de las actividades diseñadas.

3.1.1 Ambiente virtual de aprendizaje (VLE)

A continuación se presenta el "*mapa del sitio*" del VLE que contiene las actividades y tareas diseñadas, y que pueden servir de apoyo en un curso de álgebra lineal de diversos programas de ingeniería. Cabe señalar que debido al alcance del presente trabajo solo se analizarán las actividades que aportan directamente a la construcción de las estructuras y mecanismos mentales mencionadas en la DG de partida, aunque el VLE contiene también otro conjunto de actividades relacionadas con la construcción de estructuras previas que se consideran necesarias en la descomposición genética.

El VLE consiste en una página web hospedada en el sitio: https://sites.google.com/quadrivium-puebla.mx/algebra-lineal/página-principal. Cada una de las sub páginas presenta uno de los subtemas que se mencionan en la figura 7, marcado con un asterisco; contienen una breve descripción del concepto a abordar, una applet de acompañamiento, según lo que propone Jiménez (2018), y se asignan tareas que el estudiante debe realizar, ya sea durante la sesión o como trabajo para casa.

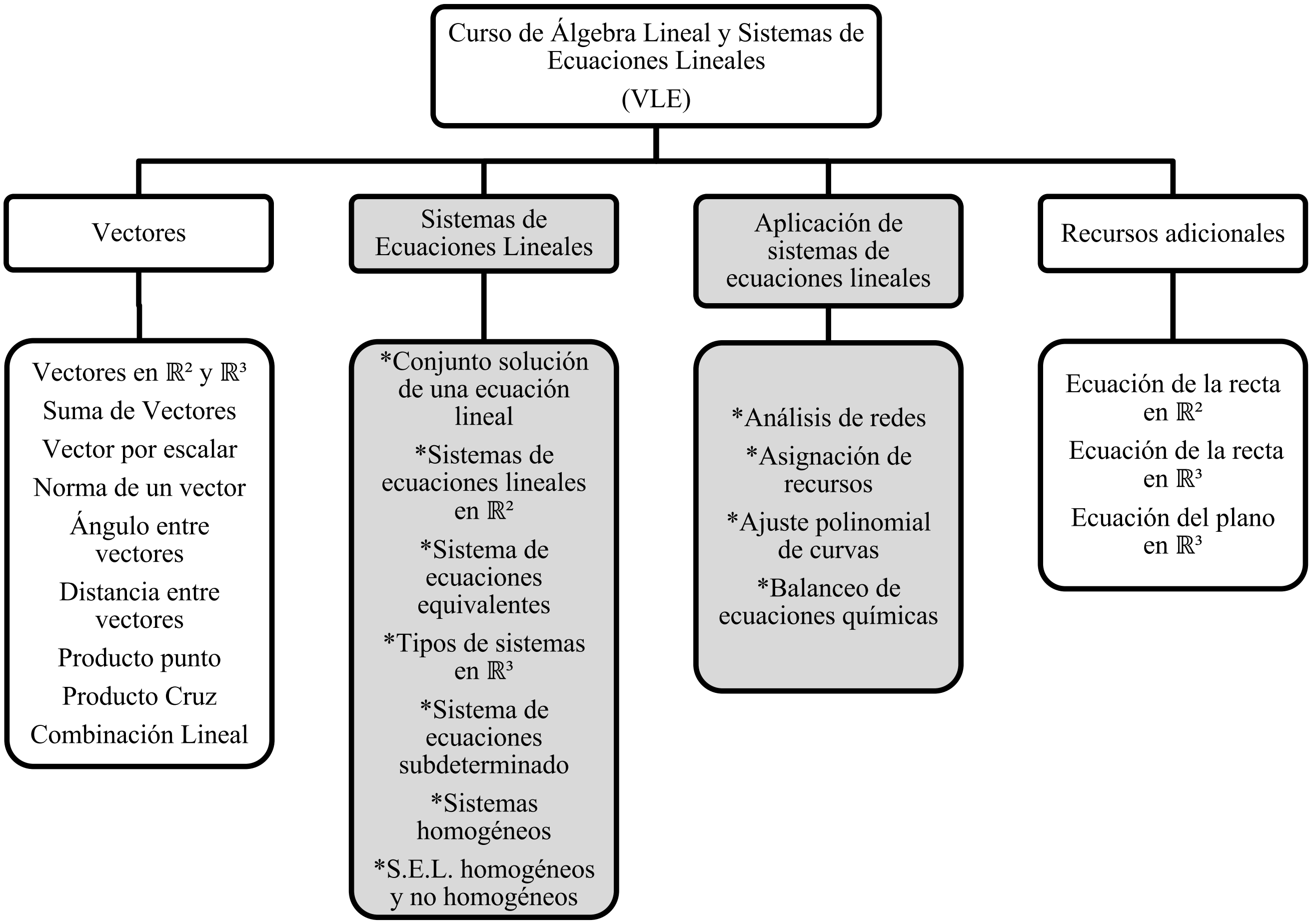


Figura 3.1. Mapa del Sitio (VLE), Fuente: elaboración propia.

Los recuadros sombreados son justamente los que se analizarán detenidamente a la luz de la descomposición genética de Borja (2015).

Es importante mencionar que varias actividades promueven el uso de los vectores debido a que la descomposición genética resalta la importancia de que los estudiantes coordinen los procesos algebraicos y los procesos geométricos involucrados, cuando la geometría de los espacios en que se insertan las ecuaciones lo permita, para que los estudiantes logren una mejor comprensión de los sistemas con que trabajan y la solución que obtienen.

3.1.2 Descripción y análisis previo de actividades

Las siguientes actividades se desarrollaron para servir de apoyo a las sesiones realizadas en el salón de clase, se desarrollaron en los laboratorios de cómputo de la Universidad Politécnica de Puebla y estas tareas tuvieron la función de Actividades de acuerdo con el ciclo de enseñanza ACE que propone la teoría APOE, pero a diferencia de lo que propone el ciclo los estudiantes trabajaron de manera individual y posteriormente se discutió en la misma sesión sobre las actividades realizadas en clase.

La figura 3.2 ejemplifica el uso de multi-representación en el ambiente virtual de aprendizaje, por ejemplo, del lado izquierdo de la pantalla el estudiante cuenta con la representación algebraica y matricial de un SEL $\mathfrak{M}_{3x2}$, además de la representación vectorial del CS-SEL y un deslizador que asigna valores al parámetro r. Del lado derecho de la pantalla el estudiante puede observar la representación geométrica del sistema, así como las transformaciones que provocan las modificaciones a la representación matricial. Además, se cuenta con la representación geométrica del conjunto solución que, en este caso, es la recta determinada por el vector director y el punto de la pantalla izquierda, así como soluciones particulares del sistema calculadas a partir de los valores asignados al parámetro r al mover el deslizador.

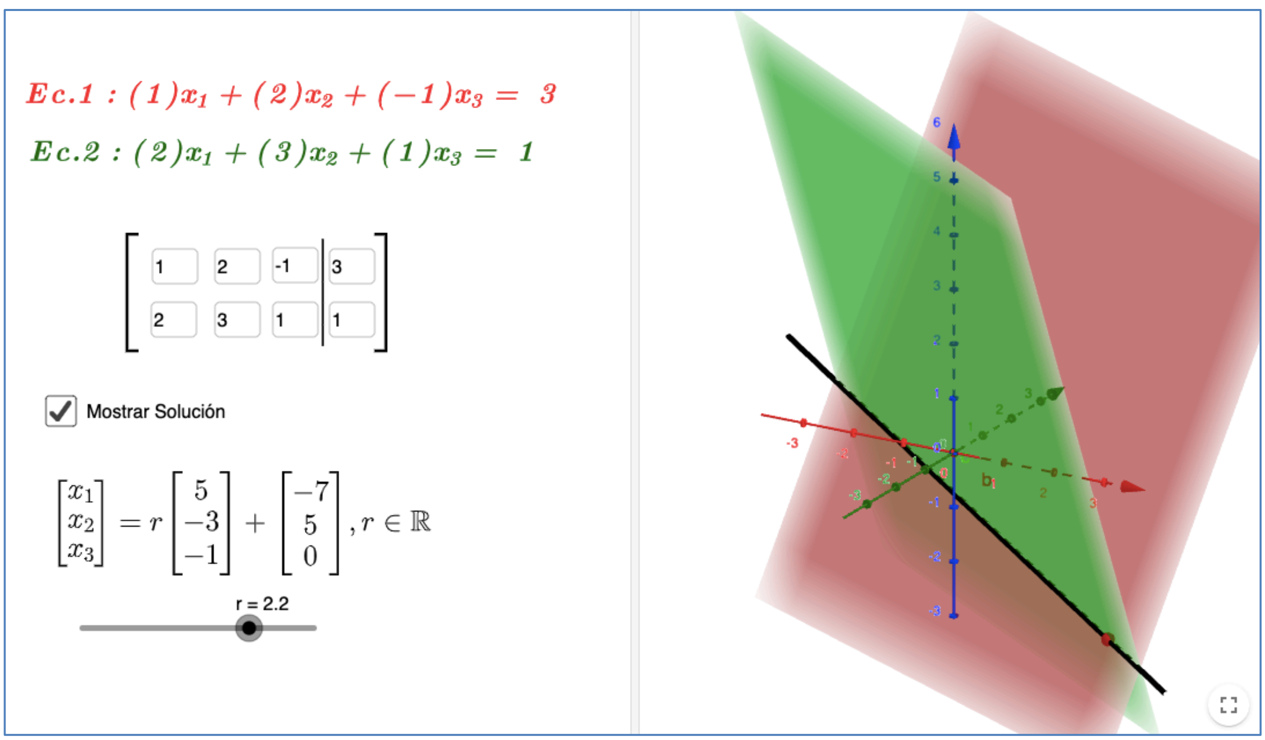
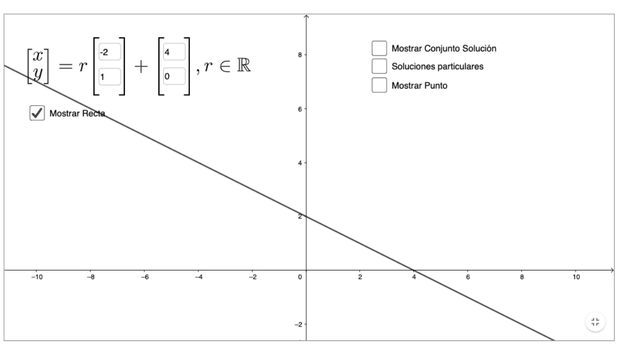


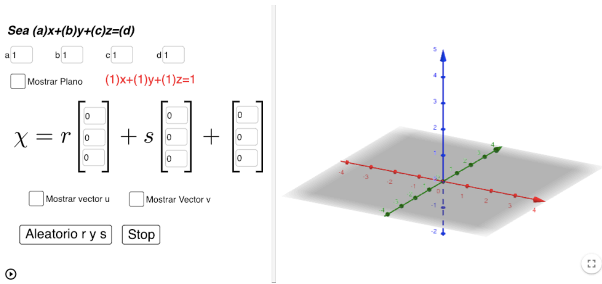
Figura 3.2 Ejemplo del uso de multi-representaciones utilizado en el VLE, Fuente: elaboración propia

3.1.2.1 Conjunto solución de una ecuación lineal

Introducción – Descripción de la actividad	Análisis / Justificación
Una solución de una ecuación lineal en n variables es una sucesión de n números reales s_1, s_2, s_3, …,s_n ordenados de modo que la ecuación se cumple cuando los valores $x_1 = s_1, x_2 = s_2, x_3 = s_3, \ldots, x_n = s_n$ se sustituyen en ésta. Por ejemplo, la ecuación $x_1 + 2x_2 = 4$. Se cumple cuando x_1=2 y x_2=1. Otras soluciones son x_1=-4 y x_2=4, y también x_1=0 y x_2=2, y x_1=-2 y x_2=3. El conjunto de todas las soluciones de la ecuación lineal se denomina conjunto solución y cuando se determina este conjunto, se dice que se ha resuelto la ecuación. Para describir todo el conjunto solución de una ecuación lineal, a menudo se utiliza la representación paramétrica. Ejemplo: Resuelva la ecuación lineal $x + 2y = 4$; Por lo tanto: $x=4-2r$, $y=r$, $r \in \mathbb{R}$. $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}, r \in R$	Se introduce el concepto de conjunto solución de una ecuación lineal, se presenta una definición formal del concepto y se da un ejemplo del conjunto solución de una ecuación lineal en $\mathbb{R}^2$, también se muestra la representación paramétrica del conjunto solución. Consideramos que esta actividad permitirá a los estudiantes conocer una representación de la ecuación lineal diferente a las utilizadas de manera convencional en la matemática escolar, la representación vectorial de una recta o representación paramétrica. La intención es establecer esta representación como punto de partida de las construcciones que se promoverán con el resto de las actividades. Por otra parte, en el caso de sistemas de ecuaciones lineales en $\mathbb{R}^3$ con infinitas soluciones el conjunto solución puede representarse como una recta en $\mathbb{R}^3$, por lo cual es necesario que el estudiante pueda identificar y representar dicho conjunto solución.
Construcción en GeoGebra	
	Aquí el estudiante deberá capturar los coeficientes numéricos correspondientes dados en la representación paramétrica, además de poder verificar si los coeficientes son correctos al mostrar la recta y la solución (seleccionando las casillas de verificación correspondientes). La intención es que el estudiante realice acciones en la representación analítica (vectorial) que le permitan obtener la representación gráfica de la recta que representa (conversión) En caso de que sus resultados no coincidan con la recta solicitada deberá verificar y proponer

	nuevamente otra combinación lineal para obtener la gráfica correcta.
Actividades en salón de cómputo	Justificación
Otra forma de representar el conjunto solución es como la pareja ordenada (4 - 2r, r), en este caso representa la pareja ordenada (x,) como relación de x en función de y. Actividades: Proporciona tres soluciones particulares de la ecuación lineal (sugerencia: desliza el punto A sobre la recta e identifica la pareja ordenada que es solución de la ecuación lineal). Verifica las soluciones particulares obtenidas en la ecuación inicial. ¿Cuáles de las siguientes parejas ordenadas son solución de la ecuación?; (0,4); (4,0); (0,0), (6,-1). Encuentra el valor de la variable dependiente cuando r es igual a: -2, 0 y 2.	Inicialmente se presenta al estudiante otra representación del conjunto solución, como pareja ordenada. En la primera tarea se pretende que el estudiante "deslice" el punto A en la construcción y seleccione tres soluciones particulares e identifique que el punto siempre está en la recta. En la segunda tarea se espera que el estudiante verifique que dichas coordenadas del punto son solución de la ecuación lineal original (*Acción*), es decir sustituya los valores de las variables y verifique si la ecuación es un enunciado verdadero (**I3**). En la tercera tarea el estudiante deberá verificar cuáles de las parejas ordenadas dadas corresponden a soluciones de la ecuación lineal y cuáles no, nuevamente mediante sustitución directa en la ecuación lineal (*Acción*). Nuevamente deberá sustituir los valores de las variables y verificar si la ecuación es un enunciado verdadero (**I3**), si es así, la pareja ordenada será solución de la ecuación. Por último se busca verificar que el estudiante es capaz de identificar la *n*-ada genérica dada como una relación funcional entre las variables x y y, y de encontrar el valor de la variable x dando valores al parámetro r; esta tarea involucra identificar al parámetro r como número general, y por lo tanto, asigne los valores propuestos, y determine el valor de la variable dependiente dado un valor de la independiente (**F2**).
Tareas	Justificación
Encuentra la representación paramétrica del conjunto solución de la ecuación lineal dada como y en función de x (de ser necesario verifica tu solución en la construcción)	En esta actividad esperamos que el estudiante sea capaz de encontrar el conjunto solución como relación funcional (**F1**) de y en función de x y pueda expresarlo como pareja ordenada. Si el estudiante es capaz de encontrar el

Representa el conjunto solución como pareja ordenada de y en función de x. Proporciona tres soluciones particulares asignando valores a la variable independiente y representa dichas soluciones como pareja ordenada.	conjunto solución utilizando exclusivamente métodos analíticos se considerará evidencia de que ha alcanzado una concepción *Proceso* del concepto conjunto solución de una ecuación lineal. En caso de que requiera verificar su respuesta en la construcción se considerará que el estudiante está en concepción *Acción*. Por último, esperamos que el estudiante pueda proporcionar tres soluciones particulares. Para esta tarea el estudiante deberá interpretar el parámetro como la representación de una entidad general indeterminada que puede asumir cualquier valor (G2), una vez identificado esto el estudiante deberá asignar distintos valores al parámetro y encontrar el valor de la otra variable (I4); en este caso si el estudiante necesita realizar todos los cálculos para encontrar los valores de la variable dependiente en función de la independiente nuevamente consideramos una concepción *Acción*. En caso de que el estudiante identifique que las soluciones particulares que encontró en las actividades realizadas en el salón de clases también son solución de la ecuación, no importando como se establezca la relación, consideramos que se encuentra en un nivel *Proceso*.
Introducción – Descripción de la actividad	Análisis / Justificación
¿Qué representa la ecuación $x + 2y = 4$ en $\mathbb{R}^3$? La representación paramétrica del conjunto solución de la ecuación en $\mathbb{R}^3$ $$\chi = r\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix} + s\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}4\\0\\0\end{bmatrix}$$ Otra forma de representar el conjunto solución es como terna ordenada $(-2r + 4, r, s)$. En este caso se representa la terna ordenada (x, y, z) como relación funcional de x en función de y y z como variable libre.	En esta actividad se busca que el estudiante identifique la ecuación $x + 2y = 4$ en $\mathbb{R}^3$ como un plano, para esto se presenta la representación paramétrica del conjunto solución como la combinación lineal de dos vectores. Posteriormente se presenta el conjunto solución como terna ordenada. Esperamos que el presentar al estudiante el mismo objeto matemático en tres distintos registros de representación semiótica (algebraico, gráfico y como combinación lineal) se favorezca la construcción del concepto.

Construcción en GeoGebra	
	En esta construcción el estudiante deberá capturar los coeficientes a, b, c, d, Al capturar los coeficientes numéricos y activar la casilla de verificación "Mostrar Plano", podrá observar el plano que representa la ecuación dada. Por otra parte, el estudiante deberá capturar las coordenadas de los vectores y el punto que generarán el plano, y activar "Aleatorio r y s" con lo cual se mostrará una serie de puntos que estarán contenidos en el plano que representa a la ecuación.
Actividades en salón de cómputo	Justificación
Proporciona tres soluciones particulares de la ecuación lineal. Cuáles de las siguientes ternas ordenadas son solución de la ecuación?; (0,4,0); (4,0,1); (6,-1), (0,0,0).	En esta actividad esperamos que el estudiante sea capaz de proporcionar soluciones particulares a partir de la terna proporcionada $(-2r + 4, r, s)$, asignando inicialmente valores al parámetro r, y encontrando el valor correspondiente a la coordenada en x , en este caso se espera que los estudiantes superen el obstáculo que puede representar el tener la variable libre z, representada por el parámetro s. Esperamos que realizar la *acción* de evaluar las ternas proporcionadas ayude al estudiante a identificar que el coeficiente numérico 0 (cero) que debió capturar en la construcción permite asignar a la variable z cualquier valor. Por ejemplo, el evaluar la pareja ordenada (6,-1), la cual es solución en $\mathbb{R}^2$ pero no en $\mathbb{R}^3$, obliga a los estudiantes a evaluar la función en las variables del espacio dominio. Estas actividades toman en cuenta que la construcción del concepto de una solución a una ecuación lineal se logra con la vinculación de dos esquemas, por un lado el de *n*-ada y por otro lado el de variable, mediante las acciones de escribir la ecuación como una función condicionada y la de evaluar la función en las variables del espacio

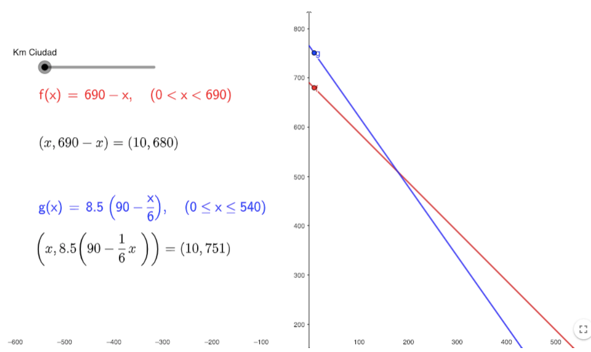
	dominio, esperamos que con el desarrollo de estas actividades se favorezca en los estudiantes una concepción *Proceso* del conjunto solución y permitan más adelante encapsular el concepto cuando necesiten operar sobre el conjunto solución de cada ecuación lineal, como por ejemplo, encontrar sistemas de ecuaciones equivalentes.

Recurso disponible en:
https://sites.google.com/quadrivium-puebla.mx/algebra-lineal/página-principal/conjunto-solución-de-una-ecuación-lineal

3.1.2.2 Sistemas de ecuaciones lineales 2 x 2

Presentación del problema	Análisis / Justificación
Dentro de la ciudad, cierto automóvil rinde 6 kms por litro; en cambio en carretera rinde 8.5 kms por litro. Si el automóvil consumió 90 litros en un recorrido de 690 kms determínese qué parte del recorrido fue en la ciudad.	Se presenta un problema típico que puede resolverse utilizando cualquier método de resolución de sistemas lineales e incluso otras estrategias, como por ejemplo tanteo.
Propuesta de solución	**Análisis / Justificación**
Para resolver este problema debemos considerar las dos condiciones que propone el problema: 1) el total del recorrido fue de 690 kilómetros 2) el consumo de combustible fue de 90 litros Si establecemos a x como los kilómetros recorridos en ciudad y y como el total de kilómetros recorridos en carretera podemos plantear dos ecuaciones, una para cada condición dada por el problema: $x + y = 690$ $(^1/_6)\ x + (^1/_{8.5})\ y = 90$ Recordando que el conjunto solución de una ecuación lineal es aquel que contiene todas las soluciones de dicha	Debido a que el objetivo del presente estudio no es la modelación, se orienta al estudiante para plantear un sistema de ecuaciones lineales tomando en cuenta las restricciones que proporciona el problema. Una vez propuestas las ecuaciones que conforman el SEL se presenta el CS-SEL como pareja ordenada genérica de ambas ecuaciones y se propone buscar la intersección entre estos conjuntos solución mediante el método de resolución de sistema de ecuaciones lineales por igualación. El hecho de establecer la igualdad entre las dos ecuaciones que forman el sistema de ecuaciones lineales requiere que el estudiante encapsule el objeto ecuación lineal para

ecuación lineal podemos representar lo conjuntos de las ecuaciones anteriores como las siguientes parejas ordenadas: $(x , 690 - x)$ $(x , 8.5(90 - {}^{1}/_{6}\, x))$ Ya que tenemos ambos conjuntos lo que estamos buscando es la intersección entre ellos, es decir aquel punto en que ambas ecuaciones se solucionan de manera simultánea, por ejemplo en aquel en que las x son iguales: $690 - x = 8.5(90 - {}^{1}/_{6}\, x)$	permitirle realizar acciones o transformaciones sobre el cómo es, por ejemplo presentarla como una pareja ordenada o relación funcional. En este caso, debido a que se le dan instrucciones precisas al estudiante sobre las acciones y transformaciones que deberá realizar al sistema esperamos que alcance una concepción *Acción* del Sistema de Ecuaciones Lineales.
Actividad	Justificación
Resuelve de manera algebraica la ecuación lineal propuesta en el punto anterior.	En este caso buscamos indagar sobre el dominio que tiene sobre el uso de la variable como incógnita, específicamente los siguientes aspectos del modelo 3UV: **(I1)** Reconocer e identificar en una situación problemática la presencia de algo desconocido que puede ser determinado considerando las restricciones del problema. **(I4)** Determinar la cantidad desconocida que aparece en ecuaciones o problemas, realizando las operaciones algebraicas o aritméticas. Si los alumnos son capaces de encontrar el valor de la incógnita se orientará la discusión grupal para: **(F2)** Determinar los valores de la variable dependiente, dados los valores de la independiente. Y finalmente proponer la solución al problema en los términos del planteamiento contextualizado.
Introducción – Descripción de la actividad	Análisis / Justificación
Otra forma de resolver este problema es por el método gráfico, es decir representamos ambas ecuaciones como por ejemplo: $f(x)= 690 - x$	Ahora se propone resolver el sistema de ecuaciones utilizando el método gráfico con la ayuda de una construcción dinámica en GeoGebra

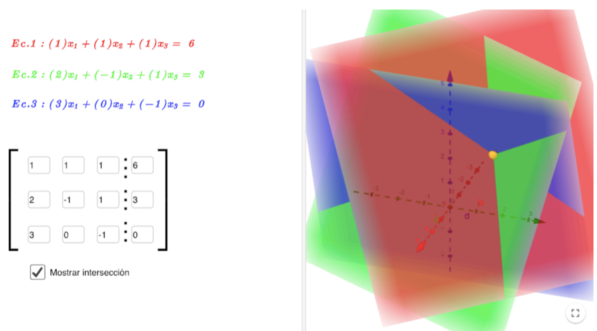
g(x)=8.5(90 - $^1/_6\,x$)	
Construcción en GeoGebra	
	La construcción presenta las gráficas de las funciones f(x) y g(x), el deslizador “Km ciudad” modifica los valores de la variable x , y por lo tanto, la ubicación de cada uno de los puntos que se encuentran en sus respectivas gráficas, los puntos están determinados como (x, f(x)) y (x, g(x)), por lo que el estudiante deberá manipular el deslizador hasta que los puntos se unan en la intersección de las rectas. Además de la intersección gráfica cuentan con las parejas ordenadas de cada punto que se modifican de acuerdo al valor del deslizador. Esperamos que el presentar al estudiante el mismo objeto matemático en distintos registros de representación semiótica (algebraico, como pareja ordenada y gráfico) favorezca la construcción del concepto.
Actividades en salón de cómputo	Justificación
Las siguientes n-adas genéricas representan a cada una de las dos ecuaciones de un sistema de ecuaciones lineales, encuentra su intersección y por lo tanto la solución del sistema: (x, 2x+3) y (x, 2x - 3) (x, 3-x) y (x, (9-3x)/3) Si es necesario grafica las rectas que representan cada una de las parejas ordenadas y encuentra su intersección si es que existe.	En esta actividad se presentan dos sistemas de ecuaciones lineales, el primero inconsistente y el segundo consistente con infinitas soluciones. Esperamos que tras la comparación de los conjuntos solución de cada una de las ecuaciones el estudiante pueda establecer una igualdad e intente resolver la ecuación lineal encontrada; debido al tipo de sistemas propuestos el estudiante se enfrentará a situaciones como: 0 = -6, en el primer sistema 0 = 0, en el segundo sistema Debido a que puedan ser los primeros acercamientos a sistemas de ecuaciones inconsistentes o consistentes con infinitas soluciones es probable que el estudiante deba recurrir a la representación gráfica del sistema para encontrar que:

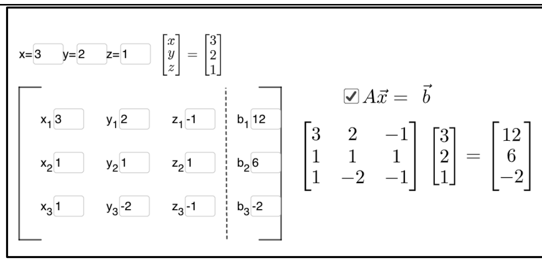
	En el primer caso, no es posible encontrar un punto de intersección debido a que las rectas son paralelas. En el segundo caso, que ambas expresiones algebraicas tienen la misma representación geométrica, es decir, que ambas corresponden a la misma recta, por lo que el conjunto solución puede ser cualquiera de las parejas ordenadas dada.

Recurso disponible en:
https://sites.google.com/quadrivium-puebla.mx/algebra-lineal/página-principal/sistemas-de-ecuaciones-lineales-2-x-2

3.1.2.3 Sistemas de ecuaciones equivalentes

Introducción de conceptos	Análisis / Justificación
Operaciones elementales con renglones Las operaciones permisibles, llamadas operaciones elementales con renglones, corresponden a las operaciones que pueden realizarse sobre un sistema de ecuaciones lineales para transformarlo en un sistema equivalente. Las siguientes operaciones elementales con renglones pueden realizarse sobre una matriz: 1. Intercambiar dos renglones. 2. Multiplicar un renglón por una constante distinta de cero. 3. Sumar un múltiplo de un renglón a otro renglón. En cada paso del proceso anterior se obtiene un sistema equivalente; es decir, comparten el mismo conjunto solución.	Se introduce el concepto de operaciones elementales con renglones para el método de Gauss – Jordan y el de sistema de ecuaciones equivalentes; esta actividad se diseñó para promover la coordinación de registros mediante el uso de la multi-representación que permite el uso de tecnología, no se espera que sea una actividad de introducción al algoritmo de Gauss – Jordan.
Actividad	**Análisis / Justificación**
Resuelve a lápiz y papel el siguiente sistemas de ecuaciones lineales por el método de Gauss - Jordan $x_1 + x_2 + x_3 = 6$ $2x_1 - x_2 + x_3 = -4$ $3x_1 - x_3 = 1$	En esta actividad se pide al estudiante resuelva a lápiz y papel el sistema de ecuaciones dado, es importante que cuente con el desarrollo completo del algoritmo ya que se utilizará en la siguiente actividad.

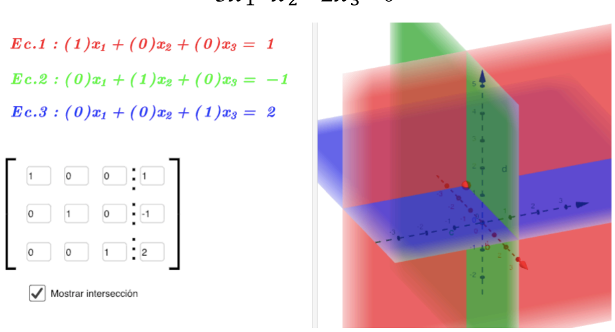
Construcción en GeoGebra e instrucciones	Justificación
La siguiente construcción muestra la representación algebraica y matricial (del lado izquierdo) y la representación gráfica del sistema de ecuaciones lineales del punto anterior, captura los coeficientes numéricos de cada uno de los sistemas equivalentes obtenidos al resolver el sistema por Gauss - Jordan en la representación matricial y observa las transformaciones al sistema. De acuerdo a la definición de Sistema de Ecuaciones Equivalentes, si la operación elemental sobre los renglones del sistema fue correctamente realizada esto quiere decir que compartirán el mismo conjunto solución.  	Aquí el estudiante deberá modificar los coeficientes numéricos en la representación matricial del sistema de ecuaciones de acuerdo a las operaciones realizadas sobre el sistema y observar las transformaciones que genera en los planos, si la operación fue correctamente realizada el estudiante podrá verificar visualmente que comparten el mismo conjunto solución, el cual está representado por el punto amarillo en la construcción, de acuerdo a la D.G. La tercera ecuación permitirá evaluar si el estudiante es capaz de establecer el dominio común de la solución de todas la ecuaciones ya que ésta última sólo cuenta con dos variables, si el estudiante es capaz de establecer un dominio común, en este caso $\mathbb{R}^3$, se considerará una concepción *Proceso* del Sistema de Ecuaciones Lineales. Si el estudiantes logra una concepción *Objeto* del SEL podrá operar sobre el sistema y encontrar Sistemas de Ecuaciones Equivalentes y finalmente encontrar la solución del sistema. Con el desarrollo de esta actividad esperamos que los estudiantes mediante la comprobación repetitiva de verificar la validez del conjunto solución de los sistemas de ecuaciones equivalentes encontrados, interioricen que un sistema de ecuaciones equivalentes comparte el mismo conjunto solución, pero que el sistema es equivalente mas no igual, y que lo visualice a través de las transformaciones que implican las operaciones realizadas. Esperamos que el presentar al estudiante el mismo objeto matemático en distintos registros de representación semiótica (algebraico, matricial y geométrico) favorezca la construcción del concepto.
Construcción en GeoGebra e instrucciones	Análisis / Justificación
	Adicionalmente se ofrece al estudiante una “calculadora” para verificar que el sistema de

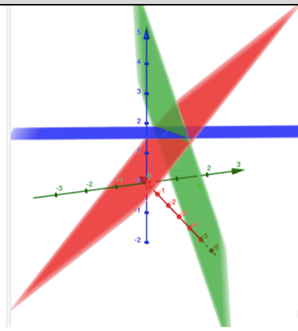
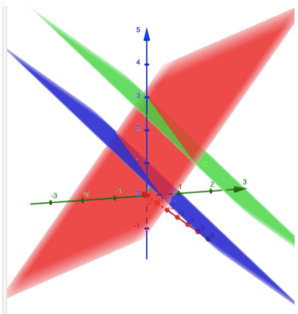
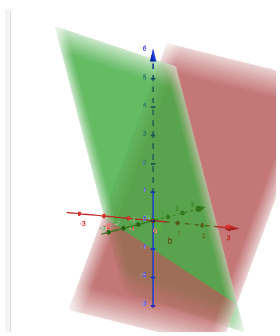
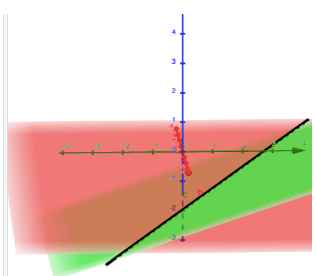
	ecuaciones obtenido es verdaderamente un sistema de ecuaciones equivalentes al compartir el mismo conjunto solución mediante la ecuación matricial $A\vec{x} = \vec{b}$.

Recurso digital disponible en:

https://sites.google.com/quadrivium-puebla.mx/algebra-lineal/página-principal/sistemas-de-ecuaciones-equivalentes

3.1.2.4 Tipos de Sistemas

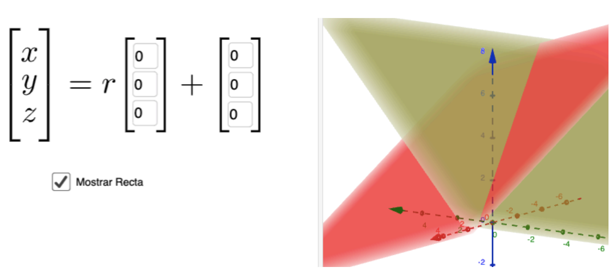
Actividad	Análisis / Justificación
Operaciones elementales con renglones Actividad: • Determine si los siguientes sistemas son o no consistentes (argumenta tu respuesta). Para realizar la tarea deberás resolver los sistemas de ecuaciones lineales propuestos a lápiz y papel, puedes ir reescribiendo el sistema equivalente que obtengas después de aplicar alguna de las operaciones elementales hasta lograr que la solución (en caso de existir) sea evidente.	En esta actividad se pide al estudiante resuelva a lápiz y papel tres SEL, es importante que cuente con el desarrollo completo del algoritmo ya que se utilizará para capturar los coeficientes numéricos en la representación matricial.
Sistema consistente con única solución	**Análisis / Justificación**
$2x_1 + x_2 - x_3 = -1$ $x_1 - 2x_2 + x_3 = 5$ $3x_1 - x_2 - 2x_3 = 0$ 	Esta actividad es prácticamente idéntica a la anterior, el objetivo de esta actividad es que el se enfrente a un SEL consistente con única solución como aquellos que tradicionalmente se le presentan a los estudiantes. Si el estudiante han logrado una concepción *Objeto* del SEL será capaz de encontrar la solución del sistema, si no es así y necesita la orientación del docente para construirlo el estudiante estará en concepción *Acción*.

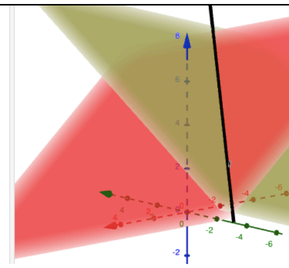
Sistema inconsistente	Análisis / Justificación
$Ec.1: (1)x_1 + (-1)x_2 + (1)x_3 = 0$ $Ec.2: (-1)x_1 + (3)x_2 + (1)x_3 = 5$ $Ec.3: (3)x_1 + (1)x_2 + (7)x_3 = 11$ $\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 7 & 11 \end{array}\right]$  $Ec.1: (1)x_1 + (-1)x_2 + (1)x_3 = 0$ $Ec.2: (0)x_1 + (2)x_2 + (2)x_3 = 5$ $Ec.3: (0)x_1 + (2)x_2 + (2)x_3 = 1$ $\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right]$ 	En este caso el estudiante se enfrentará a un SEL inconsistente, si el estudiante tiene una concepción *Objeto* del SEL será capaz de obtener Sistemas de Ecuaciones Equivalentes y encontrará la inconsistencia en la última operación que realice sobre el sistema. Es probable que aquí el estudiante requiera orientación por parte del docente al enfrentarse a sistemas equivalentes que contengan expresiones como por ejemplo 0=-4, con el apoyo de la herramienta tecnológica será útil pedirle al estudiante que "reescriba" el sistema equivalente un paso antes de llegar a la inconsistencia y observe los planos, justamente ahí el estudiante deberá reflexionar si existe algún espacio común en que los planos puedan coincidir y por lo tanto ser solución del SEL.
Sistema consistente con infinitas soluciones	Análisis / Justificación
$Ec.1: (1)x_1 + (2)x_2 + (-1)x_3 = 3$ $Ec.2: (2)x_1 + (3)x_2 + (1)x_3 = 1$ $\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right]$ ☐ Mostrar Solución  $Ec.1: (1)x_1 + (0)x_2 + (5)x_3 = -7$ $Ec.2: (0)x_1 + (1)x_2 + (-3)x_3 = 5$ $\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 5 & -7 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \end{array}\right]$ ☑ Mostrar Solución $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}, x \in \mathbb{R}$ 	Aquí el estudiante se enfrenta a un SEL con tres incógnitas y dos ecuaciones $\mathfrak{M}_{3x2}$, lo cual obligará a tener al menos una variable libre como es el caso. Nuevamente esperamos que el estudiante pueda operar sobre el sistema y encontrar un sistema de ecuaciones equivalentes si cuenta con una concepción *Objeto* del SEL, además deberá identificar que la solución estará en el dominio común de ambas ecuaciones que es $\mathbb{R}^3$. En este momento no esperamos que construya el conjunto solución del sistema y por lo tanto se presenta la ecuación de la recta que contiene el conjunto solución del sistema. Esperamos que el presentar al estudiante el mismo objeto matemático en distintos registros de representación semiótica (algebraico, matricial, como combinación lineal y geométrico) favorezca la construcción del conocimiento.

Recurso digital disponible en:

https://sites.google.com/quadrivium-puebla.mx/algebra-lineal/página-principal/tipos-de-sistemas

3.1.2.5 Sistemas de ecuaciones lineales ($n > m$)

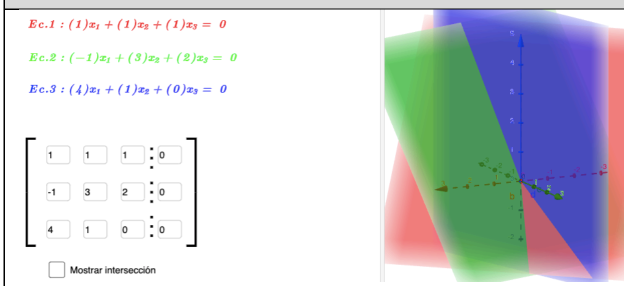
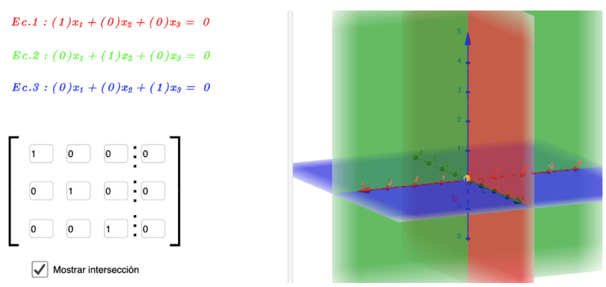
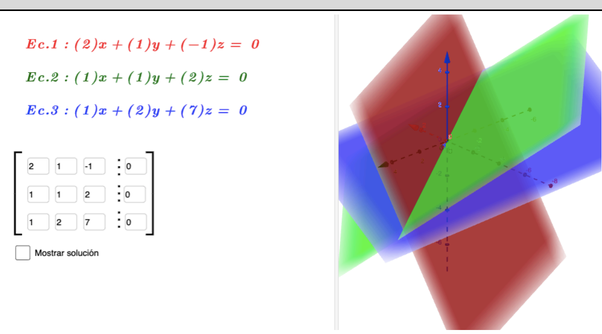
Actividad	Análisis / Justificación
Un sistema de ecuaciones lineales con menos ecuaciones que incógnitas ocasionalmente se denomina sistema subdeterminado. Encuentre la recta de intersección de los planos: $x + 2y + z = 3$ $2x + 3y + z = 1$ Al aplicar la eliminación de Gauss-Jordan a la matriz aumentada y al sustituir variables se tiene: $x - z = -7$ $y + z = 5$ Encuentre la ecuación vectorial de la recta de intersección de los dos planos y compruebe su respuesta en la siguiente construcción: La forma vectorial de la ecuación de una recta en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ es: $x = \boldsymbol{t}d + p$ donde p es un punto específico sobre ℓ y $d \neq 0$ es un vector director para ℓ. Las ecuaciones que corresponden a los componentes de la forma vectorial de la ecuación se llaman ecuaciones paramétricas de ℓ.	En esta actividad se pide al estudiante resuelva a lápiz y papel tres sistemas de ecuaciones lineales, es importante que cuente con el desarrollo completo del algoritmo ya que se utilizará para capturar los coeficientes numéricos en la representación matricial.
Construcción en GeoGebra e instrucciones	**Justificación**
	En esta actividad a diferencia del SEL consistente con infinitas soluciones de la actividad anterior se pide al estudiante que identifique que los dos planos tienen como intersección una recta en $\mathbb{R}^3$. Para ayudar al estudiante se desarrollo material de apoyo para las construcciones previas como el de Recta en $\mathbb{R}^3$ (http://bit.ly/2n94gCB). Para este caso el estudiante deberá identificar el espacio mínimo común que es $\mathbb{R}^3$, por lo que es necesario contar con una concepción *Objeto* de SEL, e identificar que

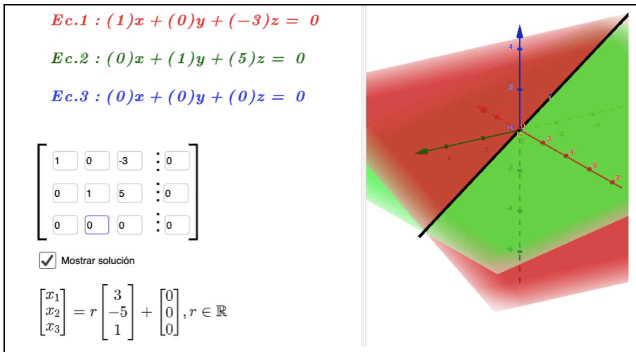
$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$ ☑ Mostrar Recta 	existe una variable libre, en este caso z. Para construir el CS-SEL el estudiante deberá *desencapsular* el Sistema en cada una de las ecuaciones que lo conforman y establecer una relación funcional para cada una de las variables que cuentan con pivote y posteriormente sustituir la variable libre por un parámetro, en este caso r e identificar que con los elementos disponibles es posible construir la ecuación de la recta en $\mathbb{R}^3$ con un punto y un vector director, los cuales deberá capturar en la construcción y verificar que la recta propuesta es verdaderamente la intersección entre los planos. Esperamos que el presentar al estudiante el mismo objeto matemático en distintos registros de representación semiótica (algebraico, como combinación lineal y geométrico) favorezca la construcción del conocimiento.

Recurso digital disponible en:
https://sites.google.com/quadrivium-puebla.mx/algebra-lineal/página-principal/sistemas-de-ecuaciones-lineales-n-m

3.1.2.6 Sistemas de Ecuaciones Lineales Homogéneos

Actividad	Análisis / Justificación
Un Sistema de Ecuaciones Lineales se denomina homogéneo si el término constante en cada ecuación es cero. Un sistema homogéneo siempre tendrá solución, una solución única (la solución cero o trivial) o un número infinito de soluciones. El siguiente teorema dice que el último caso debe ocurrir si el número de variables es mayor que el número de ecuaciones. Teorema: Si [A | 0] es un sistema homogéneo de m ecuaciones lineales con n variables, donde $m>n$, entonces el sistema tiene un número infinito de soluciones. Analice el siguiente sistema de ecuaciones lineales y encuentre su solución.	La actividad inicia presentando el concepto de SEL Homogéneo esto con la intensión de que el estudiante verifique incluso geométricamente este teorema al menos en $\mathbb{R}^3$. Se pide al estudiante que resuelva dos sistemas homogéneos, uno con única solución y otro con infinitas soluciones, el estudiante deberá resolver el sistema a lápiz y papel y posteriormente utilizar el applet para capturar los coeficientes numéricos en la representación matricial del sistema de ecuaciones y observe las transformaciones que sufren los planos después de las operaciones realizadas sobre el sistema.

$x_1 + x_2 + x_3 = 0$ $-x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0$ $4x_1 + x_2 = 0$ Analice el siguiente sistema de ecuaciones lineales y encuentre su solución. $2x_1 + x_2 - x_3 = 0$ $x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$ $x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 0$	
Sistema Homogéneo con única solución	Análisis / Justificación
 	En este caso se trata de un SEL Homogéneo con única solución, en el cual el estudiante puede verificar en la representación geométrica del sistema, en la expresión algebraica y en la representación matricial que la única solución para el sistema de ecuaciones lineales está dada por el punto (0,0,0). Nuevamente se espera que el estudiante pueda operar sobre el sistema y encontrar un sistema de ecuaciones equivalentes si cuenta con una concepción *Objeto* del SEL, además esperamos que el estudiante reflexione sobre el efecto de los términos independientes en los planos que describen estas ecuaciones.
Construcción en GeoGebra	Justificación
	Ahora el estudiante se enfrenta a un SEL Homogéneo con infinitas soluciones, en este caso al aplicar el algoritmo de Gauss–Jordan se enfrentarán a la “eliminación” de una ecuación, por lo que el sistema tendrá infinitas soluciones (es necesaria la concepción *Objeto* de sistema de ecuaciones lineales para escalonar el sistema correctamente).

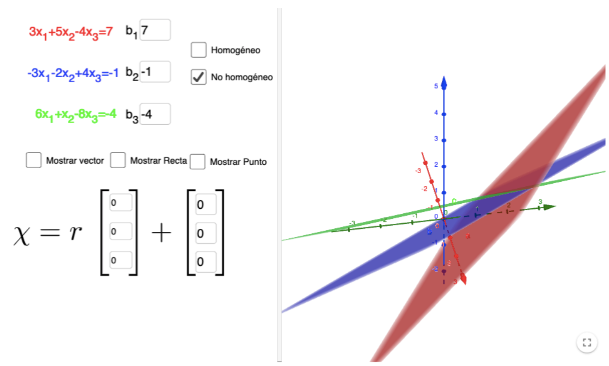
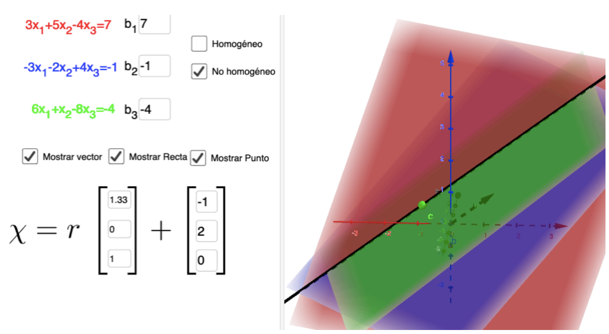


Actividad	Justificación
Actividad: tomando en cuenta que la construcción proporciona el conjunto solución del Sistema de Ecuaciones Lineales Homogéneo con infinitas soluciones: • ¿La solución trivial (0, 0, 0) esta contenida dentro del Conjunto Solución dado? • Proporciona tres soluciones particulares al sistema	En esta actividad se proporciona la solución del sistema, a partir de la solución el estudiante deberá verificar sí la solución trivial forma parte del conjunto solución propuesto, por lo que deberá realizar *acciones* sobre el conjunto solución para evaluar si esta forma parte del conjunto solución, esto será encontrando el valor de r de tal forma que la terna (x_1, x_2, x_3) sea (0, 0, 0); esta es la primera ocasión en que se pide al estudiante realizar *Acciones* sobre el *CS-SEL*.

Recurso digital disponible en:
https://sites.google.com/quadrivium-puebla.mx/algebra-lineal/página-principal/sistemas-homogéneos

3.1.2.7 Sistemas homogéneos y no homogéneos

Actividad	Análisis / Justificación
Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones lineales a lápiz y papel ... $3x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 7$ $-3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -1$ $6x_1 + x_2 - 8x_3 = -4$ Ahora resuelva el Sistema de Ecuaciones Lineales Homogéneo Asociado ... $3x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 0$ $-3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0$ $6x_1 + x_2 - 8x_3 = 0$	En esta actividad se presenta al estudiante dos SEL, uno homogéneo y uno no homogéneo en el cual la matriz del sistema es idéntica mas no la matriz aumentada.

Compare los resultados... En la siguiente construcción puede visualizar ambos Sistemas de Ecuaciones Lineales (homogéneo y no homogéneo), así como capturar los coeficientes numéricos del conjunto solución.	
Construcción en GeoGebra	Justificación
 	El desarrollo de esta actividad consiste en que el estudiante resuelva ambos sistemas y que compare los resultados. Si el estudiante necesita resolver ambos sistemas de manera individual y no interioriza que lo único que se modificará serán los términos independientes se considera que el estudiante aún está en un nivel *Proceso* del concepto SEL, en cambio si el estudiante identifica que los pasos para escalonar el sistema que utilizó en el sistema no homogéneo pueden ser exactamente los mismos para resolver el sistema homogéneo consideraremos que el estudiante se encuentra en una concepción *Objeto* del concepto SEL. Una vez que el estudiante cuenta con los dos conjuntos solución de los sistemas anteriormente resueltos se pide que los compare, en este caso esperamos que el estudiante sea capaz de evaluar e identificar el efecto que tienen los términos independientes sobre cada uno y de los planos y por tanto sobre el sistema, es decir, que el vector director de la recta que representa la intersección entre los planos no se verá afectado, pero si tendrán efecto en el punto de posición donde se proyectará la recta.
Presentación del concepto	Justificación
Soluciones de un sistema lineal no homogéneo: Si xp es una solución particular del sistema no homogéneo $Ax = b$, entonces toda solución de este sistema puede escribirse en la forma $x = xp + xh$, donde xh es una solución del sistema homogéneo $Ax = \mathbf{0}$ correspondiente.	Finalmente se presenta el concepto de manera formal para dar oportunidad a la discusión en clase.

Recurso disponible en:

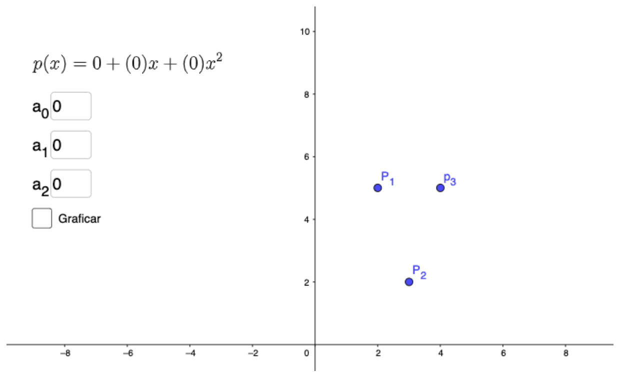
https://sites.google.com/quadrivium-puebla.mx/algebra-lineal/página-principal/sistemas-homogéneos-y-no-homogéneos

3.1.2.8 Problemas de aplicación

Ahora se presentan algunas de las actividades desarrolladas para abordar algunos de los usos más comunes de los Sistemas de Ecuaciones Lineales, consideramos importante esta sección ya que ahora el estudiante deberá evaluar soluciones particulares del conjunto de tal forma que ayuden a resolver una situación contextualizada.

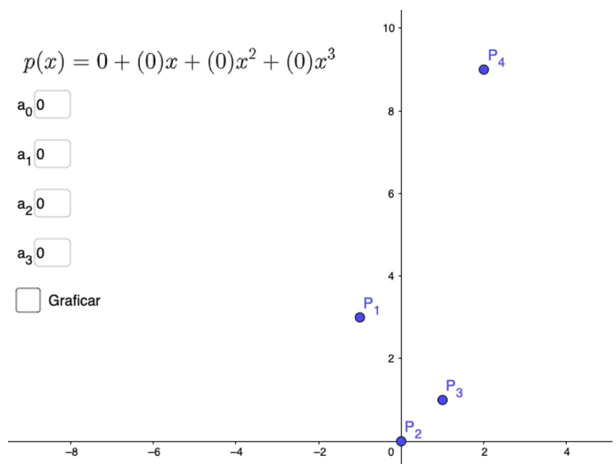
Ajuste polinomial de curvas
Suponga que n puntos en el plano x,y $(x_1,y_1), (x_2,y_2), \ldots, (x_n,y_n)$ representan un conjunto de puntos de datos y se le pide encontrar una función polinomial de grano n -1 $(p)x = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1}$ cuya gráfica pasa por los puntos dados. Este procedimiento se denomina ajuste polinomial de curvas. Si todas las coordenadas x de los puntos son distintas, entonces hay precisamente una función polinomial de grado n -1 (o menor) que se ajusta a los n puntos. Para determinar los n coeficientes de $(p)x$ sustituimos cada uno de los n puntos en la función polinomial para obtener n ecuaciones lineales en n variables $a_0, a_1, a_2, \ldots, a$n-1 $(p)x = a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \ldots + a_{n-1}x_1^{n-1}$ $(p)x = a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + \ldots + a_{n-1}x_2^{n-1}$ ... $(p)\boldsymbol{x} = a_0 + a_1x\text{n} + a_2x\text{n}^2 + \ldots + a\text{n-1}x\text{nn-1}$ Actividad: • Determine el polinomio $((p)x = a_0 + a_1x + a_2x^2$ cuya gráfica pasa por los puntos (2,5), (3,2) y (4,5) Para encontrar los coeficientes numéricos del polinomio se deberá resolver un Sistema de Ecuaciones Lineales de 3 x 3, siendo la primera ecuación por ejemplo: Ya que el punto 1 es (2,5), determinamos la primera ecuación como $a_0 + a_1(2) + a_2(2)^2=5$.

- Una vez que resuelvas el sistema y encuentres los valores para a_0, a_1 y a_2 captura los valores en las casillas correspondientes y selección la casilla de verificación de "Graficar" y verifica que la gráfica efectivamente incluye a los tres puntos dados



Actividad:

Determine el polinomio (p)x = $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ cuya gráfica pasa por los puntos (-1,3), (0,0), (1,1) y (2,9)



Desarrollo de la Actividad y Análisis

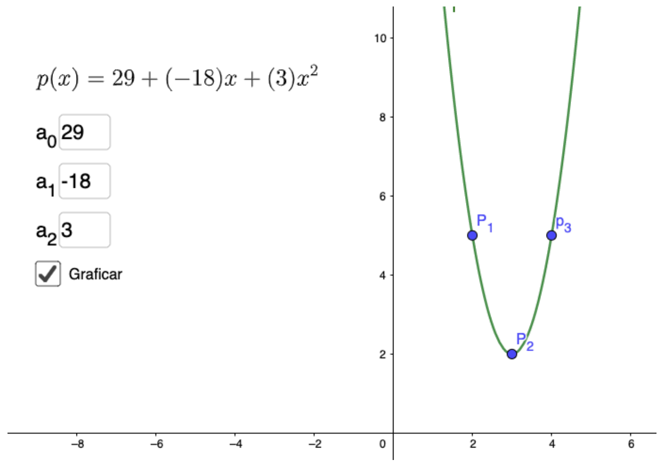
Para desarrollar correctamente esta actividad el estudiante deberá proponer un sistema de ecuaciones lineales $\mathfrak{M}_{3x3}$, si el estudiante es capaz de construir por si mismo el sistema de ecuaciones lineales se considerará que cuenta con una concepción Objeto de SEL. Aquí presentamos la matriz aumentada del sistema:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 9 & 2 \\ 1 & 4 & 16 & 5 \end{array}\right]$$

Ya que el estudiante cuente con la representación matricial del SEL el estudiante deberá resolver el sistema por el método que prefiera y encontrar que se trata de un SEL consistente con única solución, la cual está dada por:

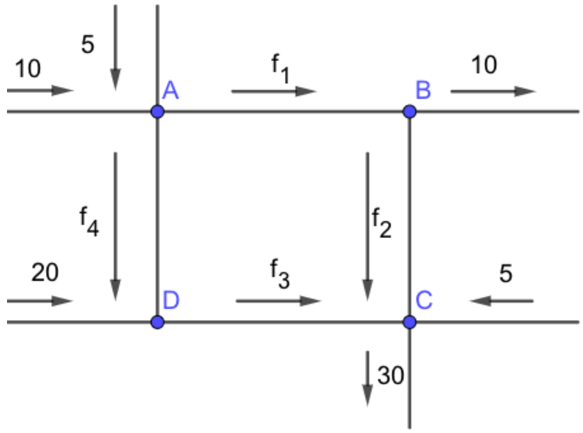
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 \\ -18 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Si el estudiante resuelve correctamente, encuentra el conjunto solución y captura los coeficientes numéricos en el applet deberá visualizar la parábola que contiene a los tres puntos iniciales:



En este caso si el estudiante es capaz de resolver correctamente el SEL y encontrar su conjunto solución consideraremos que cuenta con una concepción *Objeto* de SEL, en este caso por ser consistente con única solución no permite evaluar el nivel de comprensión del CS-SEL.

Análisis de Redes
Consideremos una red como un número finito de nodos conectados mediante una serie de aristas dirigidas llamadas ramas o arcos. Cada rama se marcará con un flujo que representa la cantidad de algún objeto que puede fluir a lo largo o a través de cada rama en la dirección indicada. La regla fundamental que gobierna el flujo a través de una red es la conservación del flujo: En cada nodo, el flujo de entrada es igual al flujo de salida.



Describa los posibles flujos a través de la red de tuberías de agua que se muestra en la figura, donde el flujo se mide en litros por minuto.

En cada nodo, escriba la ecuación que representa la conservación del flujo. Luego reescriba cada ecuación con las variables a la izquierda y la constante a la derecha, para obtener un sistema lineal en forma estándar.

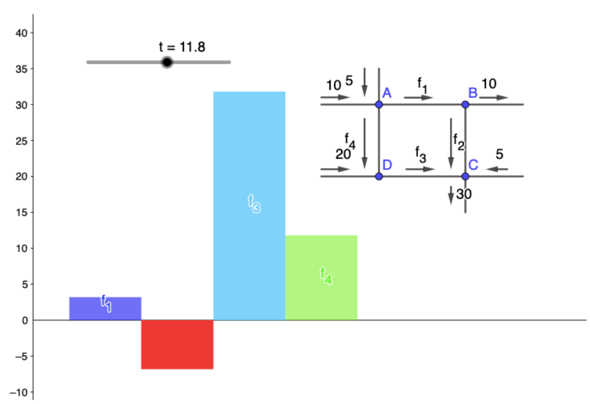
Nodo A: 15= $f_1 + f_4$

Nodo B: $f_1 = f_2 + 10$

Nodo C: $f_2 + f_3 + 5 = 30$

Nodo D: $f_4 + 20 = f_3$

Una vez que encuentre el conjunto solución del sistema de ecuaciones que resuelve el problema verifique su respuesta en la siguiente construcción:



Desarrollo de la Actividad y Análisis

En este caso esperamos que el estudiante sea capaz de construir un *Sistema de Ecuaciones Lineales* de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas y representarlo en notación matricial:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 15 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 25 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 20 \end{array}\right]$$

El Sistema de Ecuaciones Lineales ha construir consta de cuatro ecuaciones, es decir m=4 y el número de incógnitas es n=4 por lo que tenemos un matriz $\mathfrak{M}_{4x4}$. Si el estudiante es capaz de construir por el mismo el SEL y representarlo correctamente en notación matricial considerarnos que el estudiante ha logrado una concepción *Proceso* del concepto SEL, si no es así y requiere orientación por parte del docente para construir el sistema el estudiante estará en concepción *Acción*.

Una vez construido el Sistema será necesario escalonar el sistema mediante el algoritmo de Gauss – Jordan resultando en un Sistema de Ecuaciones Lineales consistente con única solución:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 15 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Ya que se ha escalonado el SEL el estudiante deberá identificar el conjunto solución, ya sea como combinación lineal:

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 15 \\ 5 \\ 20 \\ 0 \end{bmatrix}, t \in R$$

O como n-ada genérica de cuatro dimensiones:

$$(15 - t, 5 - t, 20 + t, t)$$

Aunque matemáticamente $t \in \mathbb{R}$, es necesario que el estudiante evalúe si todos los valores del parámetro t proporcionan soluciones reales al problema en contexto, pare realizar esta evaluación es necesario que el estudiante *desencapsule* el CS-SEL y verifique los intervalos en que el parámetro t no "produce" flujos negativos, los cuales carecen de sentido en cada una de las ecuaciones originales. Para esto deberá identificar el parámetro como un número general y proponer una inecuación donde cada una de éstas siempre tenga resultados positivos y por último comparar los intervalos de cada una de las inecuaciones e identificar sus intersecciones.

Si el estudiante solamente proporciona soluciones particulares, incluso si estas no tienen correspondencia con la realidad, por ejemplo t=10, donde el flujo 2 sería f_2=-5 consideramos que el estudiante está en nivel *Acción* del concepto CS-SEL, si el estudiante verifica distinto valores buscando encontrar soluciones particulares las cuales estén dentro de los intervalos donde no genera flujos negativos consideramos que el estudiante esta en concepción *Acción*, por último si el estudiante reflexiono sobre el intervalo en que el parámetro *t* no produce flujos negativos, ya sea revisando cada una de las ecuaciones o identificando cual es la que presenta mayor restricción consideramos que el estudiante está en concepción *Proceso*.

Asignación de Recursos

En una fábrica de ropa se producen tres estilos de camisas que llamaremos 1, 2, 3. Cada prenda pasa por el proceso de cortado, cosido, planchado y empaquetado. Las camisas se elaboran por lote. Para producir un lote de camisas del tipo 1 se necesitan 30 minutos para cortarlas, 40 minutos para coserlas y 50 minutos para plancharlas y empaquetarlas. Para el tipo 2, 50 minutos para cortar, 50 minutos para coser y 50 minutos para planchar y empaquetar. Para el tipo 3, 65 minutos para cortar, 40 minutos para coser y 15 minutos para planchar y empaquetar. ¿Cuántos lotes se pueden producir si se trabajan 8 horas en cortar, 8 horas en coser y 8 horas en planchar y empaquetar?

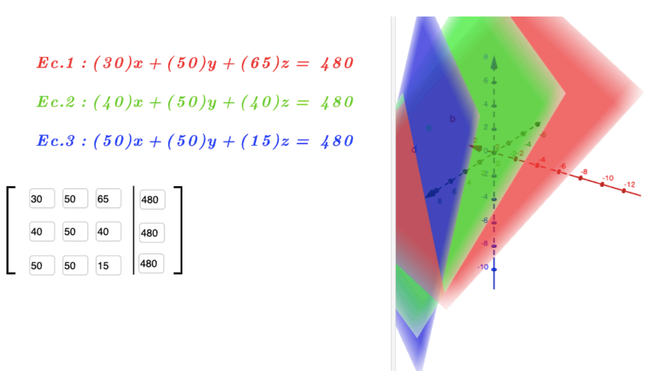
Sean:

x= lotes de la camisa 1 al día

y= lotes de la camisa 2 al día

z= lotes de la camisa 3 al día

Actividad		**Camisa 1**		**Camisa 2**		**Camisa 3**	**Tiempo disponible por actividad**
Corte	**x**	30	**y**	50	**z**	65	480
Cosido		40		50		40	480
Planchado y empaquetado		50		50		15	480



Desarrollo de la Actividad y Análisis

En esta actividad el estudiante debe escalonar el sistema mediante el algoritmo de Gauss – Jordan resultando en un SEL consistente con infinitas soluciones:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5/2 & 0 \\ 0 & 1 & 14/5 & 48/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Ya que se ha escalonado el Sistema de Ecuaciones Lineales el estudiante deberá identificar el conjunto solución en su forma vectorial:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 5/2 \\ -14/5 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 48/5 \\ 0 \end{bmatrix}, t \in R$$

O como n-ada genérica de cuatro dimensiones:

$$({}^{5}/_{2}\, t\, ,\, {}^{-14}/_{5}t + {}^{48}/_{5},\, t)$$

Aunque matemáticamente $t \in \mathbb{R}$, es necesario que el estudiante evalúe si todos los valores del parámetro t proporcionan soluciones reales al problema en contexto, pare realizar esta evaluación es necesario que el estudiante *desencapsule* el SEL y verifique los intervalos en que el parámetro t no genera lotes incompletos idealmente. Para esto deberá identificar el parámetro como un número general, esta actividad puede realizarla mediante prueba y error, asignando al parámetro distintos valores hasta que el estudiante identifique el valor de t que proporciona una solución al problema, la cual es t=2, que propone que fabriquen 5 lotes de la camisa tipo I, 4 lotes de la camisa tipo II y dos de la camisa tipo III.

Si el estudiante solamente proporciona soluciones particulares, incluso si estas no generan lotes completos, por ejemplo t=1 o incluso lotes negativos consideramos que el estudiante está en nivel *Acción* del concepto CS-SEL, si el estudiante verifica distintos valores buscando encontrar soluciones particulares las cuales generan lotes completos consideramos al estudiante en nivel *Proceso*.

3.2 Diseño del instrumento de evaluación

Como se mencionó anteriormente, durante el cuatrimestre Enero–Abril de 2019 se realizó un pilotaje del uso del VLE y se diseñó el siguiente instrumento de evaluación con la intención de recolectar información para refinar el tratamiento instruccional. El cuestionario que se presenta a continuación fue aplicado a 6 estudiantes de recurso de la materia Álgebra Lineal.

Tarea 1:

El conjunto solución de una ecuación lineal en $\mathbb{R}^2$ es el siguiente:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1. En el siguiente plano cartesiano identifica: a) el vector director, b) el punto y c) la recta que genera.
2. Encuentra la ecuación lineal de la forma $ax + by = c$
3. ¿Cuántas soluciones tiene esta ecuación lineal?, proporciona tres ejemplos.

Análisis previo

En el primer ítem esperamos que el estudiante pueda realizar las siguientes acciones: 1) identificar el vector director y dibujarlo en el plano proporcionado, 2) identificar el punto (2,0) en el plano cartesiano, 3) Dibujar la recta correspondiente al conjunto solución proporcionado. Cuando el estudiante sea capaz de identificar alguno de los elementos descritos anteriormente pero no sea capaz de identificar la recta que representa consideraremos que tiene una concepción *Acción* del concepto *Conjunto Solución de una Ecuación Lineal*, como puede ser trazar una recta o un segmento que incluya a los puntos (-3,1) y (2,0).

Para responder al segundo ítem el estudiante deberá desencapsular el objeto *Conjunto Solución de la Ecuación Lineal* dado en su representación vectorial en las dos ecuaciones que dieron origen, es decir:

$$x = -3r + 2$$
$$y = r$$

que sustituyendo la variable y en la primera ecuación (I3) sea capaz de identificar la ecuación lineal que comparte el conjunto solución propuesto, es decir:

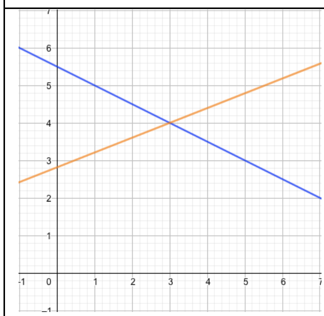
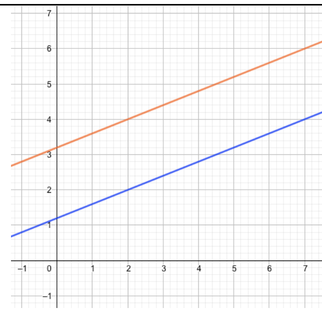
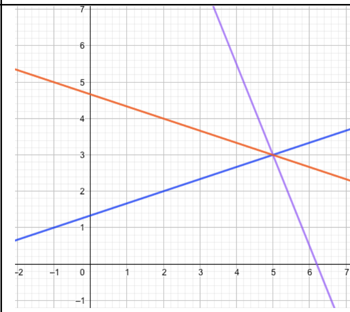
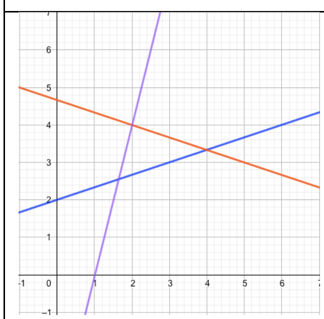
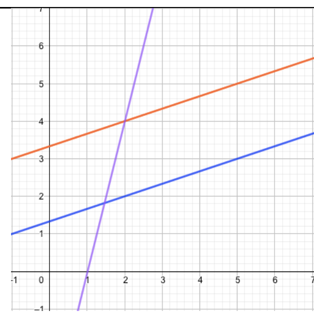
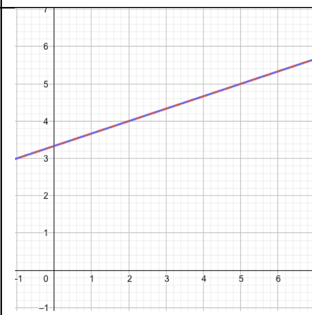
$$x = -3y + 2 \text{ o } x + 3y = 2$$

Si el estudiante cuenta con una concepción *Objeto* del concepto *Conjunto Solución de una Ecuación Lineal* será capaz de realizar con fluidez las actividades propuestas.

Con respecto a la tercera tarea, si el estudiante obtuvo la ecuación de la forma $ax + by = c$, es capaz de identificar que la ecuación tendrá un número infinito de soluciones, proporciona los tres ejemplos a partir de asignar valores a alguna de las variables y encuentra los valores de la variable dependiente (F3, F4), entonces consideraremos que el estudiante se encuentra en una concepción *Objeto*. Si el estudiante no fue capaz de obtener la ecuación de la forma $ax + by = c$, pero fue capaz de proporcionar tres soluciones particulares a partir de dar valores al parámetro r, entonces consideraremos que el estudiante tiene una concepción *Acción* del concepto *Conjunto Solución de una Ecuación Lineal*.

Tarea 2:

En seguida se presenta la representación gráfica de algunos sistemas de ecuaciones lineales en $\mathbb{R}^2$, analiza sus representaciones y contesta las preguntas propuestas:

Sistema I	Sistema II	Sistema III
		
Sistema IV	Sistema V	Sistema VI
		

¿Cuántas soluciones tiene cada uno de los sistemas de ecuaciones lineales anteriores?

Análisis Previo:

En esta tarea el estudiante puede realizar las acciones de identificar las intersecciones de las rectas que conforman el sistema. En caso de que el concepto SEL se encuentre en una concepción *Acción* el estudiante puede considerar cada una de las intersecciones de las rectas como posible solución del sistema, esta respuesta puede ser correcta en sistemas 2x2 con única solución, pero en sistemas del tipo $m>n$ el estudiante deberá reflexionar si cada una de las intersecciones, como pareja ordenada, forma parte del conjunto solución de todas y cada una de las ecuaciones que conforman el sistema. Posteriormente, el estudiante deberá identificar si el sistema es consistente o inconsistente.

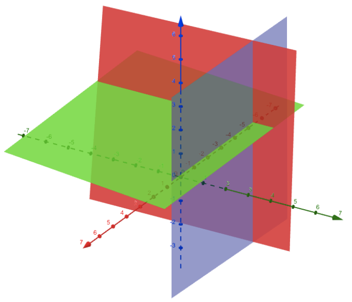
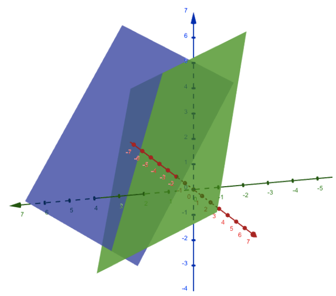
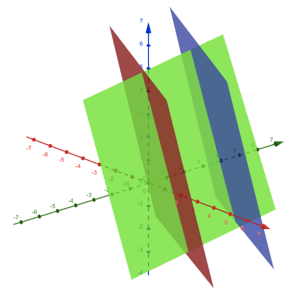
Para considerar que el estudiante ha alcanzado una concepción *Proceso* del concepto SEL él tendrá que reflexionar si cada una de las intersecciones encontradas en la representación gráfica del sistema de ecuaciones pertenece al conjunto solución de todas y cada una de las ecuaciones que conforman el sistema, es decir, deberá coordinar el *Proceso* mediante el cual es posible determinar que una solución que está en un conjunto solución, pero no en los demás, no es solución del conjunto de todas las ecuaciones, todo esto exclusivamente con la información presentada en las representaciones gráficas.

Por otra parte, para que el estudiante verifique si cada una de las intersecciones es una solución del sistema o no, debe desencapsular el sistema y analizar, en cada una de las ecuaciones que lo conforman, si esa intersección pertenece al conjunto solución de dicha ecuación lineal o no. Si a partir de esto, él logra concluir que el SEL es inconsistente o consistente y cuántas soluciones tiene, entonces diremos que ha alcanzado una concepción *Objeto* del concepto Sistema de Ecuaciones Lineales.

Con respecto al concepto *Conjunto Solución de un Sistema de Ecuaciones Lineales,* si el estudiante determina correctamente la cantidad de soluciones para algunos de los sistemas, entonces consideramos que el estudiante cuenta con una concepción *Acción* del concepto CS-SEL. En caso de que el estudiante haga esto para todos los sistemas, consideraremos que da evidencia de una concepción *Proceso* del concepto CS-SEL en el registro gráfico.

Tarea 3:

Las siguientes imágenes corresponden a distintos sistemas de ecuaciones lineales en $\mathbb{R}^3$, analiza sus representaciones y contesta la pregunta propuesta:

Sistema I	Sistema II	Sistema III
		

¿Cuántas soluciones tienen cada uno de los sistemas de ecuaciones lineales anteriores?

Análisis Previo

En este ítem el estudiante puede realizar las acciones de identificar las intersecciones de los planos que conforman el sistema, en caso de que el concepto SEL se encuentre en una concepción *Acción* el estudiante puede considerar que el Sistema II y III pueden tener una solución en el primer caso, considerando como una sola solución toda la recta que se forma en la intersección de los dos planos y no considerar como un sistema consistente con infinitas soluciones. En el caso III igualmente podría considerar que este sistema cuenta con dos soluciones al identificar que dos de los planos intersecan con el tercero en dos rectas.

Para considerar que el estudiante ha alcanzado una concepción *Proceso* del concepto SEL (en su representación gráfica) esperamos que el estudiante reflexione sobre qué tipo de objeto puede representar la intersección de tres planos en $\mathbb{R}^3$. Por ejemplo, esperamos que note que en el caso I los tres planos intersecan en un solo punto, y por lo tanto el sistema es consistente con única solución, en el caso II esperamos que el estudiante identifique que dos planos al intersecar forman una recta en $\mathbb{R}^3$. En este caso el estudiante deberá reflexionar sobre cuántas posibles ternas ordenadas están incluidas en dicha intersección. Por último, en el caso tres esperamos que el estudiante identifique que se trata de un par de planos paralelos y uno transversal, el cual los interseca en una recta con cada uno de ellos, lo que genera un par de rectas las cuales no se intersecan entre si por ser paralelas. Así, el estudiante deberá reflexionar si las dos rectas que se forman por la intersección de los tres planos forman parte de todos y cada uno de los conjuntos solución de los planos, y en caso de que el estudiante identifique que este no es el caso deberá responder que el sistema es inconsistente.

Al igual que en el ítem anterior, para que el estudiante verifique si cada una de las intersecciones es una solución del sistema él debe desencapsular el sistema y analizar en cada una de las ecuaciones que lo conforman si esa intersección pertenece al conjunto solución de dicha ecuación lineal o no. En caso de que él lo logre, esto implicaría que ha alcanzado una concepción *Objeto* del concepto Sistema de Ecuaciones Lineales en el registro gráfico 3D.

Tarea 4:

La matriz escalonada de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo por el método de Gauss es la siguiente:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

1. Proporciona el conjunto solución en su forma vectorial.
2. Proporciona dos soluciones particulares del sistema.
3. Da un ejemplo de un sistema de ecuaciones lineales equivalentes que podría compartir el mismo conjunto solución.

La matriz escalonada del sistema de ecuaciones lineales no homogéneo es la siguiente:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

4. Proporciona el conjunto solución en su forma vectorial.

Análisis previo

En este caso es necesario que el estudiante sea capaz de desencapsular el *Objeto* Sistema de Ecuaciones Lineales para identificar las ecuaciones que dan origen a este sistema en su representación matricial, además de identificar que la variable z es una variable libre, es decir:

$$x - z = 0$$

$$y + 2z = 0$$

$$z = r$$

Ahora, el estudiante deberá sustituir a la variable z por el parámetro r y representar a cada una de las variables en una relación funcional con respecto al parámetro (F4):

$$x - r = 0$$

$$y + 2r = 0$$

Por último, deberá representar el Conjunto Solución en su forma vectorial:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, r \in R$$

Si el estudiante es capaz de obtener la representación vectorial del *Conjunto Solución* y es capaz de proponer soluciones particulares del sistema, entonces consideraremos que se encuentra en la concepción *Objeto* del concepto *Conjunto Solución del SEL*.

El tercer ítem indaga nuevamente sobre el concepto Sistema de Ecuaciones Lineales, y específicamente sobre sistemas de ecuaciones equivalentes. Para responder a esta tarea el estudiante deberá realizar cualquiera de las operaciones elementales sobre el sistema. Si el estudiante es capaz de proporcionar cualquier ejemplo, siempre y cuando este sea correcto, consideraremos que el estudiante se encuentra en la concepción *Objeto* de sistema de ecuaciones lineales, ya que para realizar dicha tarea deberá operar sobre el sistema.

El último ítem busca indagar acerca de la concepción que tiene el estudiante sobre un SEL homogéneo y un SEL no homogéneo asociado al primero, es decir, identificar si el estudiante es capaz de considerar el efecto de los términos independientes en el conjunto solución. Por lo tanto, si el estudiante identifica que el vector director del SEL homogéneo y el no homogéneo son iguales y considera el punto (-1, 1, 0) en el conjunto solución del sistema, entonces consideraremos que el estudiante da evidencia de una concepción *Objeto* del CS-SEL. En caso de que el estudiante realice todo el procedimiento para encontrar el conjunto solución, y lo haga correctamente, dará evidencia de una concepción *Objeto* del SEL en el registro matricial-algebraico.

Tarea 5:

El conjunto solución de un Sistema de Ecuaciones Lineales en $\mathbb{R}^4$ es el siguiente:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1. Proporciona tres soluciones particulares del sistema.
2. Da un ejemplo de cómo se habría visto la matriz escalonada con el método de Gauss de este sistema.

Análisis previo

El primer ítem nos permitirá evaluar si el estudiante identifica la correspondencia entre las variables relacionadas (F1), reconoce las variables libres, representadas con los parámetros r y s, los cuales deberán ser interpretados como número generales (G2), asigna valores a dichos parámetros y, por último, determina el valor de las otras dos variables (I4).

Para la última tarea el estudiante deberá desencapsular el objeto Conjunto Solución en las ecuaciones que dieron origen, es decir:

$$x = r - s + 2$$
$$y = r$$
$$z = s + 1$$
$$w = s$$

Ahora, el estudiante deberá sustituir a las variables libres y representar las ecuaciones de la forma $ax + by + cz + dw = e$, es decir:

$$x = y - w + 2$$
$$z = w + 1$$

Por lo tanto:

$$x - y + w = 2$$
$$z - w = 1$$

Después, representar el sistema de forma matricial considerando el dominio mínimo común que es $\mathbb{R}^4$, pudiendo representar al sistema como una matriz cuadrada o rectangular, siempre y cuando respete el dominio común, por ejemplo:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Si el estudiante logra proponer un Sistema de Ecuaciones lineales en su forma matricial del cual es solución el conjunto dado, consideraremos que tiene una concepción *Objeto* del concepto Sistema de Ecuaciones Lineales y su Conjunto Solución. En caso de que el estudiante solo pueda proporcionar soluciones particulares a partir de asignar valores a los parámetros r y s consideramos que el estudiante cuenta con una concepción *Proceso* del concepto CS-SEL.

Capítulo 4

RESULTADOS

4.1 Análisis de resultados de la tarea 1

El estudiante 106 (figura 4.1) no identificó el vector ni el punto de la representación paramétrica del conjunto solución, pero identificó la recta que representa. Al parecer el estudiante interpreta correctamente la función del parámetro r, ya que proporcionó las tres soluciones particulares asignando valores al parámetro de 0, -1 y 1, ocupó estas soluciones particulares para identificar la recta que representa y posteriormente la trazó. Podemos considerar que el estudiante cuenta con una concepción Proceso del conjunto solución de una Ecuación Lineal, ya que identificó la recta que representa dicho conjunto solución. Además, proporcionó adecuadamente tres soluciones particulares a partir de asignar distintos valores al parámetro, pero no realizó transformaciones sobre él, es decir, no proporcionó la ecuación de la recta de la forma $ax + by = c$, o identificó el vector director y el punto, y a partir de ellos trazar la recta que representa el conjunto solución.

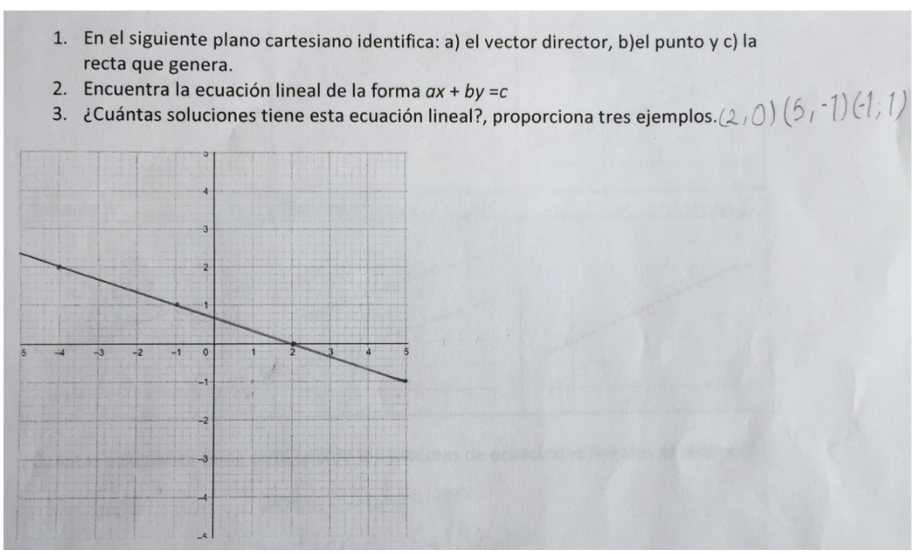

1. En el siguiente plano cartesiano identifica: a) el vector director, b)el punto y c) la recta que genera.
2. Encuentra la ecuación lineal de la forma $ax + by = c$
3. ¿Cuántas soluciones tiene esta ecuación lineal?, proporciona tres ejemplos. (2,0) (5,-1) (-1,1)

Figura 4.1 Respuestas del estudiante 106 a la tarea 1.

El estudiante 102 (figura 4.2) no identificó el vector, el punto o la recta, tampoco proporcionó soluciones particulares, da evidencia de intentar transformar el conjunto solución de la forma paramétrica a la ecuación de la recta de la forma $ax + by = c$, pero no reconoció que el parámetro

r ($x = -3r + 2$), correspondía a la variable y, por lo tanto, consideramos que el estudiante se encuentra en concepción Acción del concepto conjunto solución de una ecuación lineal.

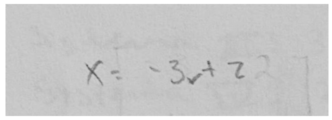


Figura 4.2 Respuestas del estudiante 106 a la tarea 1

El estudiante 098 identificó en la representación paramétrica cuál es el vector director (figura 4.3) en el conjunto solución proporcionado, incluso identificó el punto (-3,1) pero trazó el vector como el segmento de recta dirigido del origen a dicho punto; al parecer confunde el efecto que produce el punto (2,0) e incluso su ubicación en el plano es errónea ya que señala en el plano el punto (0,2), una vez que cuenta con estos dos puntos los une formando una recta, la cual no corresponde a la representación geométrica del conjunto solución propuesto.

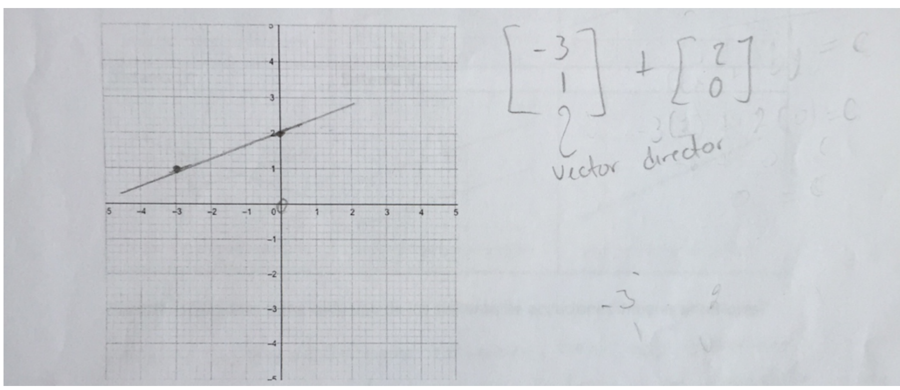


Figura 4.3 Respuestas del estudiante 098 a la tarea 1

Con respecto a las soluciones particulares el estudiante 098 encontró adecuadamente tres de ellas asignando valores al parámetro r, aunque no identifica que dichas soluciones deben formar parte de la recta que trazó. Dadas las evidencias que proporciona el estudiante consideramos que cuenta con una concepción *Acción* del concepto conjunto solución de una ecuación lineal.

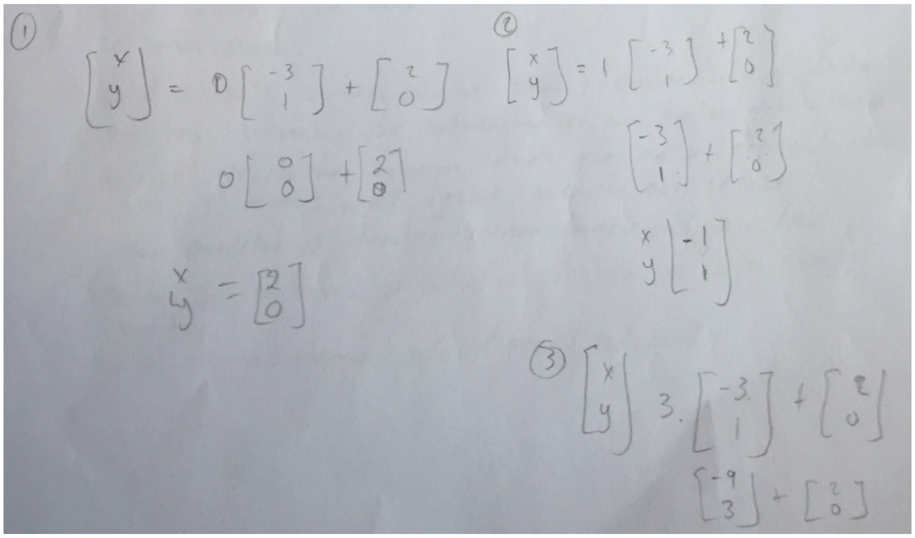


Figura 4.4 Respuestas del estudiante 098 a la tarea 1(segunda parte)

El estudiante 141 (figura 4.5) transformó el conjunto solución en la ecuación de la recta, aunque en el procedimiento muestra algunos errores de notación, la ecuación es correcta. Estos errores pueden deberse a que el estudiante trató de operar por el “método de la balanza”, como se fomentó durante el curso, pero todavía no es claro para él. Por otra parte, la representación geométrica de la recta es equivocada, además, parece que solo considera un segmento de recta de los puntos (-3,1), la coordenada del vector director y el punto (2,2). Aunque logró operar y transformar el conjunto solución consideramos que cuenta con una concepción *Acción* del concepto conjunto solución de una ecuación lineal, ya que no proporcionó soluciones particulares.

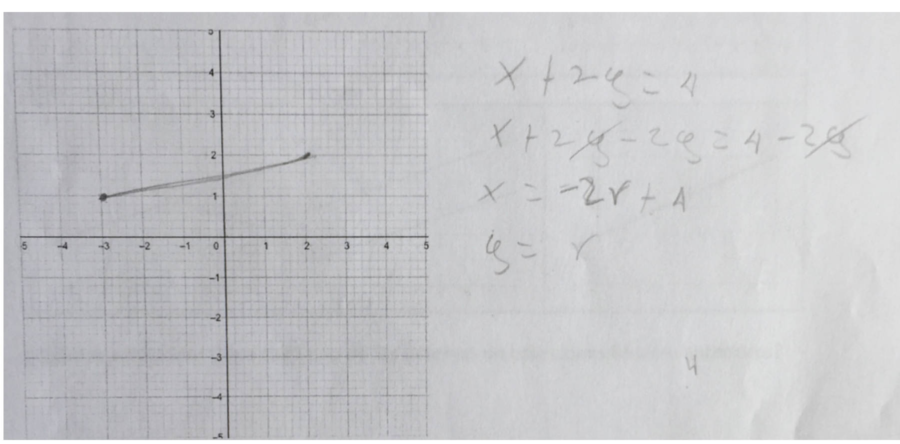


Figura 4.5 Respuestas del estudiante 141 a la tarea 1

El estudiante 058 propone una ecuación lineal arbitraria y asigna valores tanto a x, como a y, identifica que se trata de una recta, aunque el trazo es erróneo, traza un vector y un punto (-2,1), el cual no está contenido en la recta que trazó. Consideramos que el estudiante se encuentra en una concepción *Acción* del conjunto solución de una ecuación lineal.

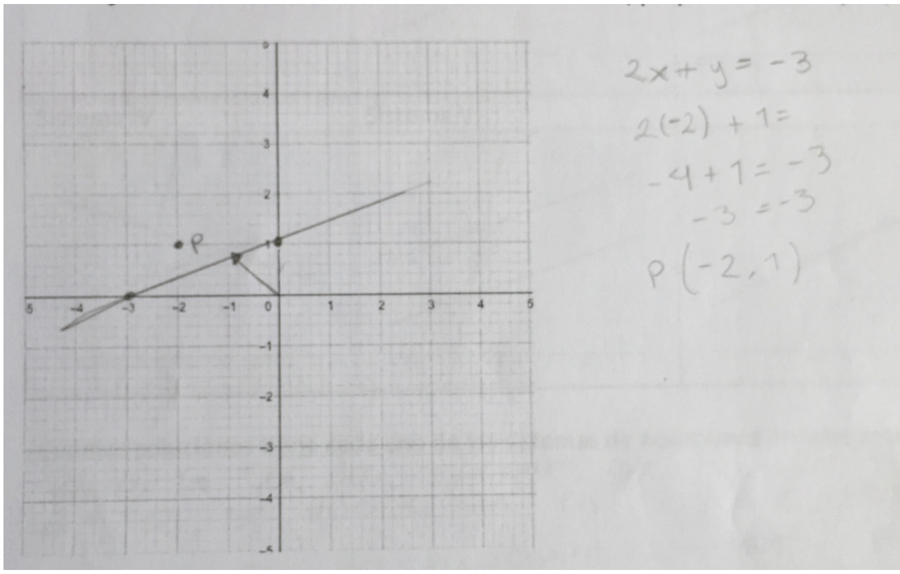


Figura 4.6 Respuestas del estudiante 058 a la tarea 1

El estudiante 070 identificó el punto (-3,1) como el punto final del vector director, trazó dicho punto en el plano cartesiano pero no lo trazó como el segmento dirigido del origen a dicho punto, tampoco identificó la función de este como director, al contrario, identificó el punto (2,0) y trazó un segmento de recta que une dichos puntos. Dadas las evidencias proporcionadas por el estudiante consideramos una concepción *Acción* del concepto conjunto solución de una ecuación lineal.

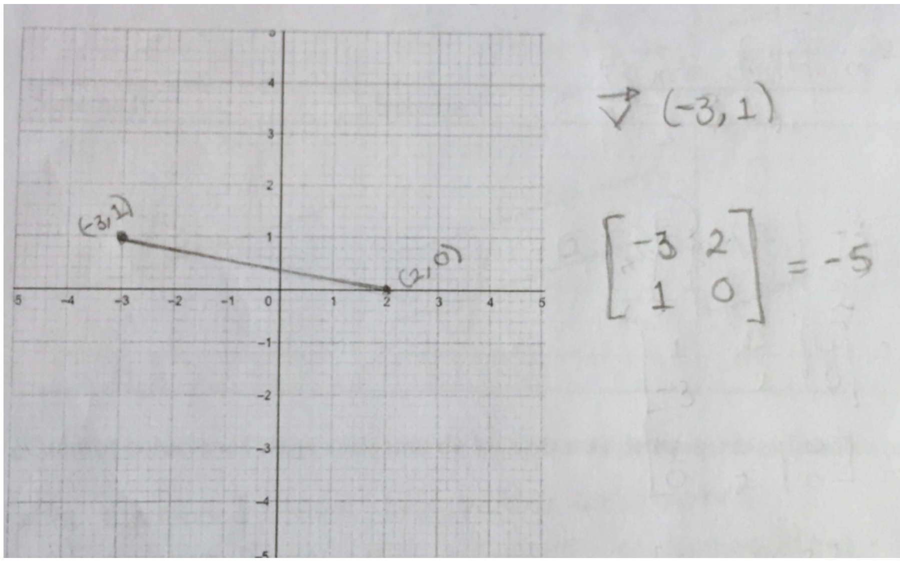


Figura 4.7 Respuestas del estudiante 070 a la tarea 1

4.2 Análisis de resultados de la tarea 2

En la Tabla 4 presentamos la transcripción de las respuestas de los estudiantes y el análisis de la tarea 2.

Tabla 4. Análisis de resultados de la tarea 2

Estudiante	Transcripción	Análisis
106	Sistema 1 = Una sola solución Sistema II = No tiene solución Sistema III = Una sola solución Sistema IV = No tiene solución Sistema V = No tiene solución Sistema VI = infinitas soluciones	En este caso el estudiante cuenta con una concepción *Objeto* del concepto SEL ya que reconoce cuáles de los sistemas propuestos tienen solución (única o infinitas) y cuáles de ellos son indeterminados. Así mismo, consideramos que el estudiante da evidencia de contar con una concepción *Proceso* del concepto CS-SEL al contestar adecuadamente al número de soluciones de todos los sistemas propuestos.
102	Sistema I : 2 Sistema II : 1 Sistema III: 3 Sistema IV : 2 Sistema V : 2	Debido a la poca información que aportan sus respuestas y que ninguna de ellas es correcta, no da evidencia de poder realizar acciones del SEL en la representación gráfica.

098	En el sistema I si tiene solución, tiene dos soluciones En el sistema II no tiene solución dado que son paralelas y no se intersectan En el sector 3 si tiene solución tiene 3 posibles soluciones dado que las 3 rectas se intersecan en un punto del plano. El sistema IV No tiene solución dado que no se intersectan las 3 rectas, al igual sucede con el sistema V son paralelas y tiene una línea transversal que las corta. Sin embargo las rectas no se tocan las 3 en ningún punto. En el último sistema solo tiene 1 solución.	El estudiante respondió correctamente que el sistema II no tiene solución al identificar al par de rectas como paralelas, además identifica que el sistema III si tiene solución debido a que las tres rectas se intersecan en un punto en el plano, aunque identifica que es un único punto menciona que existen tres soluciones. Además, identifica correctamente que los sistemas IV y V no tienen solución. Por otra parte, comete errores al identificar el número de soluciones del sistema I y el sistema VI. La evidencia que proporciona el estudiante indica que tiene cierto grado de desarrollo en la concepción *Acción* del concepto SEL en su representación gráfica.
141	I intersección en determinado punto II Son paralelas en la misma dirección III intersección en el mismo punto del plano, la misma solución de tres puntos (sistema equivalente) IV intersección en distintos puntos del plano con diferente solución V dos líneas paralelas donde una tercera recta interseca VI $xa + yb = c$ en donde la suma de sus valores en forma ascendente tiende a cambiar su valor c.	El estudiante identifica correctamente el número de soluciones en los sistemas I, II y III. Cabe mencionar que aún presenta dificultades con respecto al uso del lenguaje matemático al confundir un sistema consistente con un sistema equivalente (sistema III). Comete errores al identificar el sistema IV, ya que menciona tener tres distintas soluciones y en los casos V y VII se enfoca en describir más bien las características de los sistemas que en contestar sobre el número de soluciones. Lo anterior nos permite interpretar que el estudiante cuenta con una concepción *Acción*, ya que en los tres primeros casos reconoció las intersección de las rectas en el plano cartesiano, al parecer aún no logra una adecuada coordinación entre la representación algebraica de una recta y su representación gráfica, es evidente que aún no interioriza el concepto pero puede identificar casos con los que está más familiarizado como pueden ser los sistemas de ecuaciones lineales cuadrados en $\mathbb{R}^2$.

058	Sistema I: Son dos ecuaciones que dan dos rectas y estas se intersectan en un punto (1 solución) Sistema II: Son dos ecuaciones similares que dan dos rectas paralelas (ninguna solución por que no se tocan en ningún punto) Sistema III: Son tres sistemas de ecuaciones las cuales diferentes con un mismo término común que hace que estas se encuentren en un punto (tiene tres soluciones) Sistema IV: Son tres sistemas de ecuaciones con distintas coordenadas que se tocan en alguno de sus puntos (2 soluciones) Sistema V: Son tres sistemas de ecuaciones con dos ecuaciones similares y una distinta. La ecuación distinta toca en uno de sus puntos a las ecuaciones similares (tiene una solución)	El estudiante 058 no tiene ninguna dificultad en interpretar los dos sistemas cuadrados y diferenciar entre un sistema consistente y uno inconsistente (sistemas I y II respectivamente). Con respecto a los sistemas del tipo $m_x n$ el estudiante confunde las ecuaciones con sistemas de ecuaciones e incluso el número de soluciones que tiene el sistema, por lo tanto, consideramos que cuenta con una concepción *Acción* del concepto SEL, aún no interioriza estas acciones y por lo tanto no identifica a cada una de las ecuaciones lineales como un conjunto que debe compartir una solución común, al menos en su representación gráfica.
070	En el sistema I tiene infinitas soluciones En el sistema II no tiene solución, es inconsistente En el sistema III, tiene una única solución En el sistema IV tiene una única solución En el sistema V no tiene solución	El estudiante 070 identifica correctamente el número de soluciones en los sistemas II, III y V, pero responde correctamente sobre el número de soluciones de los sistemas I, IV y VI. Debido a que el estudiante no interpretó correctamente, incluso el caso más típico, un sistema 2x2 con única solución, nos hace pensar que el estudiante cuenta con una concepción *Acción* del concepto SEL y, por lo tanto, no reconoce el número de soluciones a partir de la representación gráfica de un sistema de ecuaciones lineales.

4.3 Análisis de resultados de la tarea 3

En la Tabla 5 presentamos la transcripción de las respuestas de los estudiantes y el análisis de la tarea 3.

Tabla 5. Análisis de resultados de la tarea 3

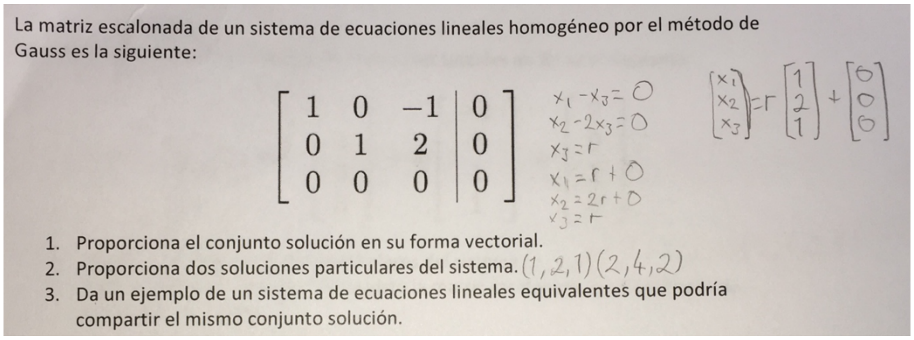
Estudiante	Transcripción	Análisis
106	Sistema I: Tiene una sola solución Sistema II: . . . (se observa que borró indefinido) Sistema III: No tiene solución	El estudiante 106 es identificó correctamente el número de soluciones en los sistemas I y III, en el caso del sistema II, aunque no da respuesta, da evidencia de que rectificó su respuesta, ya que inicialmente había considerado que era un sistema inconsistente. La evidencia que proporciona el estudiante es consistente con el análisis de los sistemas en $\mathbb{R}^2$, motivo por el cual consideramos que el estudiante cuenta con una concepción *Objeto* del concepto SEL.
102	En los sistemas I y II tiene muchas soluciones En el sistema III: hay menos soluciones	El estudiante 102 no especifica el número de soluciones de los sistemas, en lugar de eso utiliza los términos muchas y menos soluciones, haciendo evidente que no puede realizar acciones del concepto SEL en el registro gráfico. Sus respuestas son consistentes con la evidencia proporcionada en la interpretación de sistemas en $\mathbb{R}^2$ en su representación gráfica.
098	El sistema I tiene tres soluciones, ya que hay un punto en que se cruzan los 3 datos. El sistema II si tiene solución puesto que se llegan a tocar en un punto las 2 notas o planos que se forman y tiene 2 soluciones. En el sistema III no tiene solución dado que son paralelos y no hay punto en el que se crucen estas rectas.	El estudiante 098 interpreta correctamente la representación gráfica de un sistema inconsistente en $\mathbb{R}^3$, aunque presenta dificultades al confundir que son planos en lugar de rectas en el espacio. Con respecto a los sistemas consistentes con única solución y con infinitas soluciones no reconoció el número de soluciones que contendrá el conjunto solución, nuevamente estas respuestas son consistentes con las respuestas en el ítem anterior, lo que nos permite reforzar la idea de que el estudiante no ha interiorizado el concepto SEL.
141	I ecuaciones lineales de 3x3 donde hay una intersección de las tres en un mismo punto II ecuaciones lineales de 2x2 III ecuaciones lineales de 3x3 donde son paralelas y una tercera las interseca	El estudiante 141 no da respuesta sobre el número de soluciones que tiene cada uno de los sistemas, en lugar de eso describe la representación gráfica del sistema, incluso confunde el tamaño del sistema con el dominio común. Lo anterior permite afirmar que realiza las acciones de describir correctamente los sistemas I y III, en cuanto a su tamaño, es decir sistemas 3x3, pero no manifiesta haber

		interiorizado el número de soluciones que tiene cada uno de ellos, esto permite ubicar al estudiante en una concepción *Acción* del concepto SEL.
058	Sistema I: tiene dos soluciones Sistema II: tiene una solución Sistema III: tiene una solución	Dado que todas sus respuestas son incorrectas, no tenemos evidencias de ninguna construcción del concepto SEL en el registro gráfico
070	El sistema I tiene una única solución El sistema II tiene infinitas soluciones El sistema III no tiene solución, es inconsistente	Aunque en esta tarea el estudiante responde adecuadamente al tipo de solución de los tres sistemas, sus respuestas no son consistentes con la tarea anterior (Sistemas en $\mathbb{R}^2$). Esto nos invita a interpretar que el estudiante ha alcanzado una concepción *Proceso* del concepto SEL, al poder identificar solo en algunos casos el tipo y número de soluciones que puede presentar un SEL.

4.4 Análisis de resultados de la tarea 4

El estudiantes 106 realizó una conversión en el registro de representación matricial al algebraico, además logró identificar que la variable x_3 es una variable libre, esto implicó desencapsular el *Objeto* SEL en las ecuaciones que lo conforman y posteriormente reescribirlas en función de la variable libre x_3, a la cual asignó el parámetro r (figura 4.8. Respuestas del estudiante 106 a la tarea 4.1 y 4.2).

Una vez realizadas las tareas anteriores el estudiante 106 proporcionó el CS-SEL en su forma vectorial, aunque comete un error en el “despeje” de la variable x_2 da suficiente evidencia para considerar que cuenta con una concepción *Objeto* del CS-SEL, ya que además de proponerlo proporcionó soluciones particulares. Con respecto al ítem 3 de la tarea no dio respuesta.


La matriz escalonada de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo por el método de Gauss es la siguiente:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$x_1 - x_3 = 0$
$x_2 - 2x_3 = 0$
$x_3 = r$
$x_1 = r + 0$
$x_2 = 2r + 0$
$x_3 = r$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1. Proporciona el conjunto solución en su forma vectorial.
2. Proporciona dos soluciones particulares del sistema. (1,2,1)(2,4,2)
3. Da un ejemplo de un sistema de ecuaciones lineales equivalentes que podría compartir el mismo conjunto solución.

Figura 4.8. Respuestas del estudiante 106 a la tarea 4.1 y 4.2

En el ítem 3 el estudiante identificó que dado que el segundo sistema comparte idénticos coeficientes numéricos en las columnas de las variables x_1, x_2 y x_3, pero no así en los términos independientes logra asociarlo al sistema de ecuaciones homogéneo anterior e identifica que el nuevo conjunto solución se encuentra desplazado por el efecto de los términos independientes sobre el conjunto solución (figura 4.9). Esto nuevamente nos da suficiente evidencia de que el estudiante ha alcanzado una concepción *Objeto* del concepto CS-SEL.

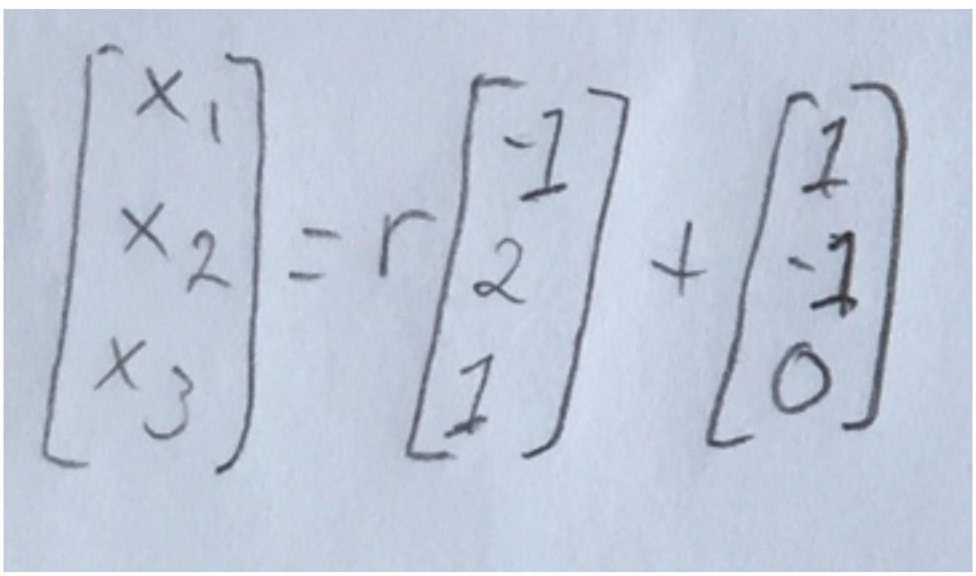


Figura 4.9. Respuesta del estudiante 106 a la tarea 4.3

En este caso el estudiante 098 intentó seguir operando sobre el sistema aun cuando la instrucción era encontrar el conjunto solución en su forma vectorial ya que el sistema propuesto ya se encontraba escalonado, por lo que se encuentra en un nivel *Acción* para SEL y CS-SEL (figura 4.10).

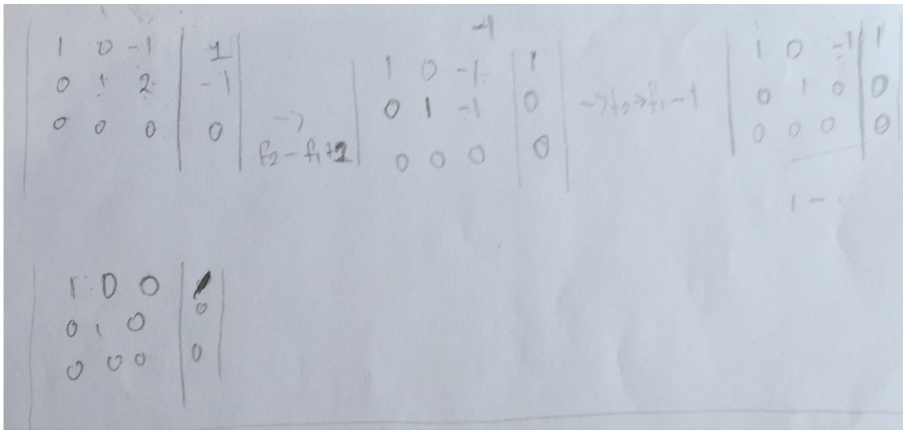


Figura 4.10. Respuesta del estudiante 098 a la tarea 4

El estudiante 141 se limitó a transformar la matriz del sistema en una combinación lineal, por lo que no da evidencia de comprensión de los dos conceptos, motivo por el cual consideramos una concepción *Acción* de ambos conceptos.

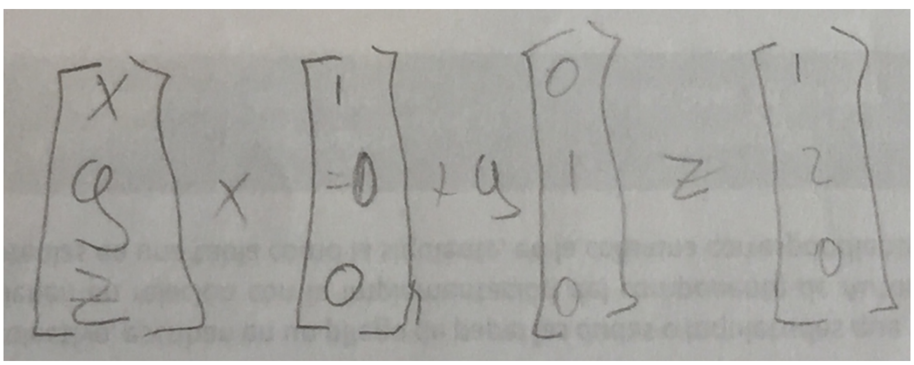


Figura 4.11. Respuestas del estudiante 141 a la tarea 4.

El estudiante 070 realizó la transformación de la representación matricial del SEL a su representación algebraica, razón por la cual consideramos una concepción *Proceso* del concepto SEL. Con respecto al CS-SEL consideramos una concepción *Acción*, debido a que (probablemente por el poco dominio del uso de las variables) en lugar de establecer una relación funcional de las variables x y y, o en su defecto x_1, x_2 con respecto al parámetro que seleccionó, en este caso, simplemente igualó las expresiones a la variable x_i, aunque reconoce el efecto de los términos independientes en el SEL no homogéneo, no logró construirlo correctamente (figuras 4.12 y 4.13).

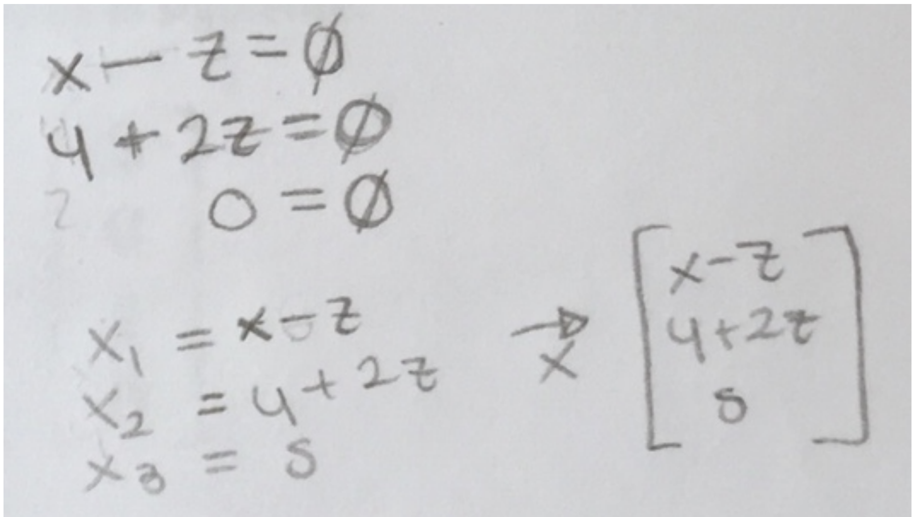


Figura 4.12. Respuesta del estudiante 070 a la tarea 4.1 y 4.2

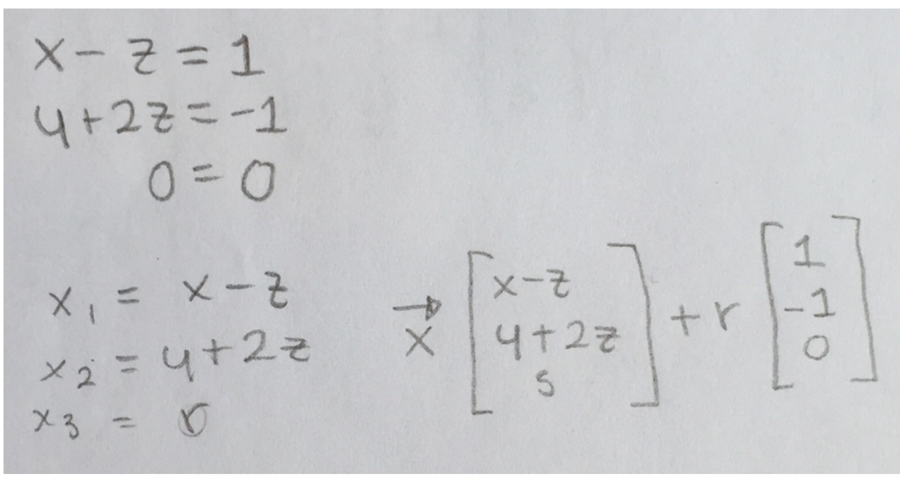


Figura 4.13. Respuesta del estudiante 070 a la tarea 4.3

4.5 Análisis de resultados de la tarea 5

El estudiante 106 identifica el dominio común para todas las ecuaciones $\mathbb{R}^4$ y propone un SEL cuadrado de tamaño 4x4, incluyendo un par de filas nulas para completar la matriz, además, cometió un par de errores al realizar la reversión del CS-SEL a la matriz extendida del sistema, por lo anterior consideramos que cuenta con una concepción *Proceso* del concepto SEL. Para el CS-SEL el estudiante propone dos soluciones particulares correctas y en la restante comente un error de signo para la variable x por lo que consideramos una concepción *Proceso* de CS-SEL (figura 4.14).

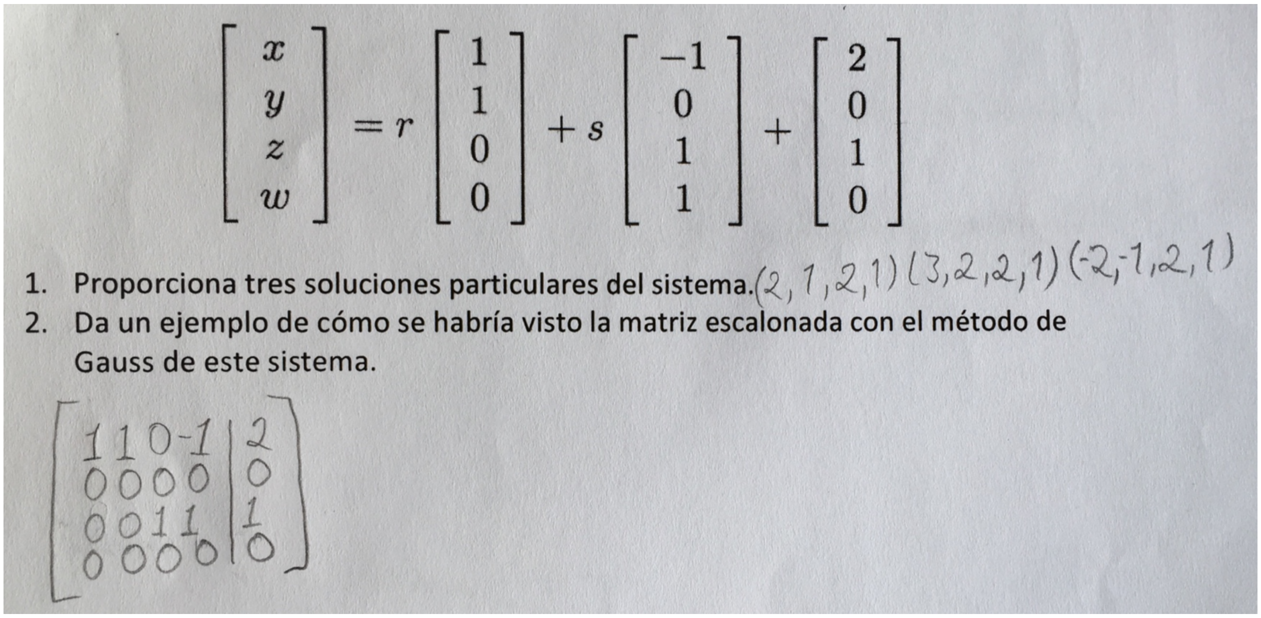


Figura 4.14. Respuestas del estudiante 106 a la tarea 5

El estudiante 070 da evidencia de comprender el valor de los parámetros y encuentra dos soluciones particulares correctas a partir de asignar valores a dicho parámetros, por lo tanto consideramos una concepción *Proceso* del CS-SEL, por otra parte no ejemplificó como se observaría la matriz escalonada del sistema, por lo tanto consideramos que se encuentra en una concepción *Acción* de SEL.

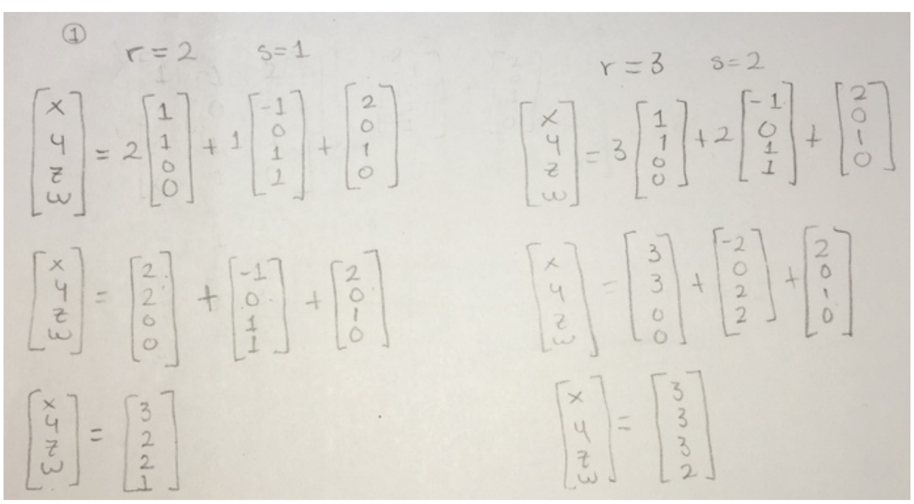


Figura 4.15. Respuestas del estudiante 070 a la tarea 5

En la tabla 6 mostramos un resumen sobre la concepción alcanzada por cada uno de los estudiantes en cada tarea:

Tabla 6. Resumen de resultados

ID	Tarea 1 Conjunto solución Ecuación lineal	Tarea 2 SEL $\mathbb{R}^2$ CS-SEL	Tarea 3 SEL $\mathbb{R}^3$	Tarea 4 SEL y CS-SEL	Tarea 5 SEL y CS-SEL
106	*Proceso*	*Objeto - Proceso*	*Objeto*	*Objeto - Objeto*	*Proceso-Proceso*
102	*Acción*	*Acción*	-	-	-
098	*Acción*	*Acción*	*Acción*	*Acción - Acción*	-
141	*Acción*	*Acción*	*Acción*	*Acción - Acción*	-
058	*Acción*	*Acción*	-	-	-
070	*Acción*	*Acción*	*Proceso*	*Proceso - Acción*	*Acción - Proceso*

CAPÍTULO 5

REFLEXIONES

Con relación a la primera tarea es importante destacar que, no obstante que se trabajó con estudiantes de ingeniería ellos siguen presentando dificultad con el objeto matemático ecuación lineal, esto lo justificamos en el hecho de que solo uno de los seis estudiantes propuso adecuadamente soluciones particulares, aunque no contestó que cuenta con una infinidad de posibles soluciones como esperábamos. Podemos suponer que estas dificultades se agravan al enfrentarse a la ecuación vectorial de una recta, la cual no es una representación típica utilizada en la matemática escolar, aun cuando se abordó el tema durante el tratamiento instruccional.

Aun cuando el diseño instruccional y su aplicación consideró muy importante el que los estudiantes pudieran interactuar entre distintas representaciones, especialmente la gráfica, solo uno de los estudiantes pudo resolver adecuadamente las tareas 2 y 3, en la cuales se pedía que, a partir de la información que podían obtener de la representación gráfica de distintos sistemas de ecuaciones lineales, respondieran la cantidad de elementos que tendría el conjunto solución de cada uno de los sistemas. A pesar del poco éxito obtenido, con el grupo de estudiantes con que se trabajó durante el desarrollo de la investigación, consideramos pertinente trabajar el tránsito entre diferentes representaciones de un sistema (lenguaje verbal, gráfico, algebraico) tal como lo proponen distintas investigaciones (Ochoviet, 2009; Ramírez-Palacios et al., 2002; Segura, 2004).

Por otra parte compartimos con Romero y Oktaç (2015) la utilidad de las representaciones dinámicas, las cuales pueden favorecer la articulación entre registros de representación gráficos y algebraicos.

Con respecto a la tarea 4, en la cual los estudiantes debían trabajar con la representación matricial de dos sistemas de ecuaciones, uno no homogéneo y uno homogéneo asociado al primero, solamente uno de los seis estudiantes dio evidencia de contar con una concepción *Objeto* del concepto Sistema de Ecuaciones Lineales y *Proceso* de su Conjunto solución. En este caso podemos afirmar que el estudiante desarrolló las estructuras mentales propuestas por la

Descomposición Genética y logró poner en juego su conocimiento matemático para resolver las tareas propuestas. El estudiante identificado como 070 realizó algunas transformaciones a la representación matricial pero no identificó o representó el conjunto solución del sistema.

Por último, la tarea 5 presentaba el conjunto solución de un sistema en $\mathbb{R}^4$, aunque en este caso el espacio no permite la representación gráfica del sistema, era importante verificar si los estudiantes eran capaces de resolver el problema, ya que las construcciones mentales requeridas son las mismas que las de un sistema 2x2, como lo propone Borja (2015, p. 108) "cognitivamente las construcciones requeridas son las mismas ya sea un sistema de 2x2 o de 5x6. Matemáticamente, en cambio, el trabajo es más complejo con un sistema que con otro". En este caso, nuevamente uno de los seis estudiantes dio evidencia de haber construido una concepción *Proceso* tanto del concepto Sistema de Ecuaciones Lineales como de su Conjunto Solución.

Recordando el objetivo de la tesis, que es el diseño de un tratamiento instruccional en un ambiente virtual de aprendizaje que fomente las construcciones mentales necesarias para la comprensión del conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales, como resultado se tiene el VLE disponible en la página https://sites.google.com/quadrivium-puebla.mx/algebra-lineal/página-principal, mismo que se encuentra bajo la Licencia Creative Commons Atribución – No Comercial – Compartir Igual 4.0 Internacional.

Como se mencionó anteriormente, el conjunto de estudiantes con los que se probó el diseño instruccional correspondía a un grupo de estudiantes que repetían el curso de álgebra lineal con un número reducido de horas a la semana (2 horas por semana, 3 horas menos en comparación con un curso regular que consta de 5 horas por semana). No obstante lo anterior, uno de seis de los estudiantes construyó adecuadamente el concepto en estudio, esto nos da pie a pensar en validar el tratamiento instruccional en investigaciones futuras con un grupo regular de álgebra lineal y en su caso proponer un refinamiento a la Descomposición Genética.

Conclusión

En esta tesis se presentó una secuencia de actividades en un ambiente virtual de aprendizaje que utiliza aplicaciones construidas en GeoGebra. Mediante un análisis de contenido de dichas actividades se mostró que éstas podrían fomentar la construcción de las estructuras y los mecanismos mentales propuestos en una descomposición genética de los conceptos Sistema de Ecuaciones Lineales y de su Conjunto Solución elaborada por Borja (2015). También se reporta la aplicación de cinco tareas que se diseñaron para evidenciar las concepciones que un grupo de estudiantes logró construir después de haber seguido la secuencia didáctica propuesta. El análisis de las producciones de estos estudiantes confirmó que las actividades son adecuadas para promover la comprensión de los conceptos en estudio y el uso de diferentes representaciones de estos conceptos. Sin embargo, no se obtuvieron las respuestas esperadas. Algunos factores que se detectó que pudieron influir en estos resultados podrían ser, un tiempo reducido de trabajo (24 horas totales) y la falta de conocimientos y habilidades previos indispensables para la construcción de los conceptos.

Como mencionamos anteriormente, aun cuando durante el tratamiento instruccional se promovió el tránsito entre distintas representaciones como algebraicas, matricial y gráfica, solo uno de seis estudiantes reconoció de forma correcta el número de soluciones que debería tener un sistema de ecuaciones lineales a partir de su representación gráfica en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

Cabe mencionar que durante el curso los estudiantes dieron evidencia suficiente de poder resolver sistemas de ecuaciones lineales mediante distintos algoritmos, pero esto no significa forzosamente que tengan una comprensión del concepto sistema de ecuaciones lineales o su conjunto solución.

Aun cuando el estudio se realizó con estudiantes de ingeniería concordamos con lo que reportan Ursini y Trigueros (2006), es decir, la capacidad de pensamiento algebraico de los estudiantes no está tan desarrollada como sería deseable, esto dificultó obtener los resultados esperados.

Una de las problemáticas enfrentadas en el desarrollo del presente trabajo fue el poco tiempo disponible (24 horas) para implementar el desarrollo instruccional, no obstante, esto sería importante considerar en los planes de asignatura ya que, en el plan de asignatura de la materia de Álgebra Lineal, sólo se consideran 25 horas de 90 totales del curso para tópicos de álgebra lineal en sí como son, sistemas de ecuaciones lineales, matrices, matrices inversas, operaciones con matrices y determinantes.

Por último, consideramos oportuno que en investigaciones posteriores se implemente el tratamiento instruccional con el objetivo de recolectar información y en su caso proponer un refinamiento a la Descomposición Genética de Borja (2015).

REFERENCIAS

Aldon, G. (2015). Technology and Education: Frameworks to Think Mathematics Education in the Twenty-First Century. En U. Gellert, J. Giménez Rodríguez, C. Hahn, & S. Kafoussi (Eds.), *Educational Paths to Mathematics. Advances in Mathematics Education* (pp. 365–381). https://doi.org/https://doi.org/10.1007/978-3-319-15410-7_24

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa Fuentes, S., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). APOS Theory. En *APOS Theory*. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-7966-6

Arzarello, F., & Robutti, O. (2010). Multimodality in multi-representational environments. *ZDM*, *42*, 715–731. https://doi.org/10.1007/s11858-010-0288-z

Barrera, J., Bautista, L., & Pérez-Campos, A. (2015). Analysis of ways of thinking in the approach to systems of homogeneous linear equations. *ECOFRAN Jorunal*, *2*(2), 81–86.

Borba, M. C., Askar, P., Engelbrecht, J., Gadanidis, G., Llinares, S., & Sánchez, M. (2016). Blended learning , e - learning and mobile learning in mathematics education. *ZDM*, *48*(5), 589–610. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0798-4

Borja, I. (2015). *Conjunto Solución a un Sistema de Ecuaciones Lineales: una mirada desde la perspectiva de la Teoría APOS* (Tesis de doctorado). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

DeVries, D., & Arnon, I. (2004). Solution - What Does It Mean? Helping Linear Algebra Students Develop The Concept While Improving Research Tools. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *2*, 55–62.

Dubinsky, E. D. (2002). Reflective Abstraction In Advanced Mathematical Thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking, Vol. 11* (pp. 95–126). Springer, Dordrecht.

Hernandez-Jaramillo, D. (2018). *Propuesta didáctica para la enseñanza y evaluación del álgebra desde la perspectiva de la teoria APOE* (Universidad Autónoma de Querétaro). Recuperado de http://ri-ng.uaq.mx/handle/123456789/1309

Jimenez, W. (2018). *Categorización de Aplicaciones para la Enseñanza de las Matemáticas Escolares: el Caso de GeoGebra*. Bogotá: Ciclo de conferencias en Educación Matemática de Gemad.

Moreno, O. E., Gallo, H. G., Aguello, M. A., & Herrera, C. G. (2018). *La Construcción del Concepto Sistemas de Ecuaciones Lineales en R3 desde la Prespectiva de la Teoría APOE*.

Ochoviet, T. C. (2009). *Sobre el Concepto de Solución de un Sistema de Ecuaciones Lineales con*

Dos Incógnitas (Instituto Politécnico Nacional). Recuperado de http://www.repositoriodigital.ipn.mx/handle/123456789/11405

Oktaç, A. (2018). Conceptions About System of Linear Equations and Solution. En S. Stewart, C. Andrews-Larson, A. Berman, & M. Zandieh (Eds.), *Challenges and Strategies in Teaching Linear Algebra* (pp. 71–101). https://doi.org/10.1007/978-3-319-66811-6_4

Possani, E., Trigueros, M., Preciado, J. G., & Lozano, M. D. (2010). Use of models in the teaching of linear algebra. *Linear Algebra and Its Applications*, *432*(8), 2125–2140. https://doi.org/10.1016/j.laa.2009.05.004

Ramírez-Palacios, M. C., Oktaç, A., & García, C. (2002). Dificultades que Presentan los Estudiantes en los Modos Geométrico y Analítico de Sistemas de Ecuaciones Lineales. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *19*, 413–418.

Rodríguez-Jara, M. A., Lorca, A. M., Juan, J., & Mena, F. (2019). *Construcción cognitiva del conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas*. *1*, 71–92. Recuperado de https://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/351060

Romero, C. F., & Oktaç, A. (2015). Representaciones dinámicas como apoyo para la interiorización del concepto de transformación lineal. *Proceedings of the XIV. Interamerican Conference on Mathematics Education*, (1999), 1–13.

Segura, S. (2004). Sistemas de Ecuaciones Lineales: Una secuencia didáctica. *Revista Latinoamericada de Investigación en Matemática Educativa*, *7*, 49–78.

Trigueros, M., Oktaç, A., & Manzanero, L. (2007). Understanding of Systems of Equations in Linear Algebra. *Proceedings of the 5th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, *5*, 2359–2368.

Trigueros, M., Possani, E., Lozano, M., & Sandoval, I. (2009). Learning systems of linear equations through modelling. En M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, & H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 225–232).

Ursini, S., Escareño, F., Montes, D., & Trigueros, M. (2016). *Enseñanza del Álgebra elemental. Una propuesta alternativa*. México: Trillas.

Ursini, S., & Trigueros, M. (2004). How do high school students interpret parameters in algebra? *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *4*(2001), 361–368.

Ursini, S., & Trigueros, M. (2006). ¿Mejora la comprensión del concepto de variable cuando los estudiantes cursan matemáticas avanzadas? *Educación Matemática*, *18*(3), 5–38.