



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

**TEST DE RAZONAMIENTO LÓGICO Y TEST DE REFLEXIÓN COGNITIVA COMO
POSIBLES PREDICTORES DEL DESEMPEÑO DE LOS ESTUDIANTES EN LA
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS**

TESIS
PARA OBTENER EL TÍTULO DE
MAESTRO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

PRESENTA
LIC. EDGAR SÁNCHEZ CAMPOS

DIRECTOR DE TESIS
DR. JOSIP SLISKO IGNJATOV

CO-DIRECTOR DE TESIS
DRA. LIDIA AURORA HERNÁNDEZ REBOLLAR

PUEBLA, PUE.

JUNIO 2020



BUAP.

DRA. LIDIA AURORA HERNÁNDEZ REBOLLAR
SECRETARIA DE INVESTIGACIÓN Y
ESTUDIOS DE POSGRADO, FCFM-BUAP
P R E S E N T E:

Por este medio le informo que el C:

SANCHEZ CAMPOS EDGAR

Estudiante de la Maestría en Educación Matemática, ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 09 de diciembre de 2019, con la tesis titulada:

**“TEST DE RAZONAMIENTO LÓGICO Y TEST DE
REFLEXIÓN COGNITIVA COMO POSIBLES
PREDICTORES DEL DESEMPEÑO DE LOS ESTUDIANTES
EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS”**

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

A T E N T A M E N T E.

H. Puebla de Z. a 29 de mayo de 2020

DR. JOSIP SLISKO IGNJATOV
COORDINADOR DE LA MAESTRÍA
EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA.



Este trabajo ha sido realizado gracias
al apoyo financiero otorgado por el
Consejo Nacional de Ciencia y
Tecnología – México (CONACyT), de
Enero 2018 a diciembre 2019
N° de CVU: 888646

Mi más sincero agradecimiento:

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por haberme otorgado la beca que financió mis estudios de maestría, pues gracias a ella se concretó esta investigación.

Al Dr. Josip Slisko Ignjatov por ser mi asesor y una persona que siempre me apoyo desde la licenciatura. Sus ideas y recomendaciones resultaron muy interesantes además del seguimiento y constante supervisión de esta investigación. Gracias por el apoyo y por encaminarme hacia la investigación.

A la Doctora Lidia Aurora Hernández Rebollar por tomarse la molestia de revisar mi trabajo, así como sus comentarios que han servido para mejorar este documento.

A los miembros del jurado que han aceptado leer y comentar esta tesis con la finalidad de evaluar este trabajo.

Índice General	pág.
Resumen.....	1
Introducción.....	2
Capítulo 1 Antecedentes.....	4
1.1 Pensamiento reflexivo.....	4
1.1.1 Test de reflexión cognitiva.....	5
1.2 Pensamiento formal.....	6
1.2.1 Test de razonamiento lógico.....	6
1.3 Ilusión Cognitiva (trampa cognitiva).....	7
1.3.1 Ilusión de la linealidad.....	9
1.4 Preguntas de investigación y Objetivos.....	13
1.5 Justificación.....	14
Capítulo 2 Marco de Referencia.....	15
2.1 Pensamiento lento y rápido.....	15
2.2 Estadios de pensamiento de Piaget.....	16
2.3 Ilusión de la linealidad y sus propiedades.....	17
2.4 Taxonomía <i>MATH</i>	18
Capítulo 3 Metodología.....	21
Capítulo 4 Resultados.....	28
4.1 Primero de bachiller.....	28
4.1.1 Test de reflexión cognitiva (TRC).....	28

4.1.2 Test de razonamiento lógico (TRL).....	30
4.1.3 Músicos.....	32
4.1.4 Carrera.....	34
4.1.5 Locomotora.....	36
4.1.6 Granjero.....	40
4.1.7 Peso.....	43
4.1.8 Triángulo.....	48
4.2 Tercero de bachiller.....	55
4.2.1 Test de reflexión cognitiva (TRC).....	55
4.2.2 Test de razonamiento lógico (TRL).....	55
4.2.3 Músicos.....	57
4.2.4 Locomotora.....	58
4.2.5 Granjero.....	63
4.2.6 Peso.....	66
4.2.7 Triángulo.....	71
4.3 Segundo de bachiller.....	78
4.3.1 Test de reflexión Cognitiva (TRC).....	78
4.3.2 Test de razonamiento Lógico (TRL).....	78
4.3.3 Músicos.....	80
4.3.4 Carrera.....	82

4.3.5 Locomotora.....	85
4.3.6 Granjero.....	87
4.3.7 Pelota.....	90
4.3.8 Triángulo.....	95
Conclusiones.....	103
Referencias.....	105
Anexo A.....	110
Anexo B.....	111
Anexo C.....	119

Índice de Figuras

Figura 1. Diferenciación de dos sistemas (<i>Tomado de Kahneman, 2002, p.451</i>)	15
Figura 2. Secuencia de los grupos cognitivos en los diferentes grados de bachiller.....	26
Figura 3. Razonamiento lineal en problemas de músicos en primero de bachiller.....	32
Figura 4. Razonamiento lineal (a) en problemas de músicos en primero de bachiller.....	32
Figura 5. Razonamiento no lineal en problemas de músicos de primero de bachiller.....	33
Figura 6. Razonamiento lineal sobre carrera en primero de bachiller.....	34
Figura 7. Razonamiento no lineal sobre carrera en primero de bachiller.....	35
Figura 8. Razonamiento lineal sobre locomotora de primero de bachiller.....	37
Figura 9. Razonamiento lineal (a) sobre locomotora de primero de bachiller.....	37
Figura 10. Razonamiento lineal (b) sobre locomotora de primero de bachiller.....	38
Figura 11. Combinación de operaciones sobre locomotora de primero de bachiller.....	38
Figura 12. Razonamiento no lineal sobre locomotora de primero de bachiller.....	39
Figura 13. Razonamiento no lineal (a) sobre locomotora de primero de bachiller.....	39
Figura 14. Razonamiento lineal sobre granjero de primero de bachiller.....	41
Figura 15. Razonamiento lineal (a) sobre granjero de primero de bachiller.....	41
Figura 16. Razonamiento no lineal sobre granjero de primero de bachiller.....	42
Figura 17. Lectura incorrecta sobre problema de pelota en primero de bachiller.....	45
Figura 18. Lectura correcta sobre problema de pelota en primero de bachiller.....	46
Figura 19. Respuesta correcta no convincente sobre pelota en primero de bachiller.....	47

Figura 20. Fórmula tradicional de triángulo aplicada al problema de triángulo en primero de bachiller.....	50
Figura 21. Error conceptual en el problema de triángulo en primero de bachiller.....	51
Figura 22. Fórmula del triángulo (a) aplicada al problema de triángulo en primero de bachiller..	51
Figura 23. No aplicabilidad de la fórmula tradicional al problema de triángulo en primero de bachiller.....	52
Figura 24. No aplicabilidad de la fórmula tradicional (a) al problema de triángulo en primero de bachiller.....	53
Figura 25. Razonamiento lineal sobre locomotora de tercero de bachiller.....	59
Figura 26. Razonamiento lineal (a) sobre locomotora de tercero de bachiller.....	59
Figura 27. Otro razonamiento sobre locomotora de tercero de bachiller.....	60
Figura 28. Otro razonamiento (a) sobre locomotora de tercero de bachiller.....	61
Figura 29. Razonamiento no lineal sobre locomotora de tercero de bachiller.....	61
Figura 30. Razonamiento lineal sobre granjero de tercero de bachiller.....	63
Figura 31. Otro razonamiento sobre granjero en tercero de bachiller.....	64
Figura 32. Razonamiento no lineal sobre granjero de tercero de bachiller.....	65
Figura 33. Lectura incorrecta y uso inadecuado de operaciones sobre problema de pelota en tercero de bachiller.....	68
Figura 34. Modelación correcta sobre problema de pelota en tercero de bachiller.....	69
Figura 35. Respuesta correcta no convincente sobre problema de pelota en primero de bachiller...	70
Figura 36. Fórmula tradicional de triángulo aplicada al problema de triángulo en tercero de bachiller.....	73

Figura 37. Fórmula tradicional de triángulo (a) aplicada al problema de triángulo en tercero de bachiller.....	73
Figura 38. No aplicabilidad de la fórmula tradicional al problema de triángulo en tercero de bachiller.....	75
Figura 39. No aplicabilidad de la fórmula tradicional (a) al problema de triángulo en tercero de bachiller.....	75
Figura 40. No aplicabilidad de la fórmula tradicional (b) al problema de triángulo en tercero de bachiller.....	76
Figura 41. Razonamiento lineal en problema de músicos en segundo de bachiller.....	80
Figura 42. Razonamiento lineal (a) en problemas de músicos en segundo de bachiller.....	81
Figura 43. Razonamiento no lineal en problema de músicos de segundo de bachiller.....	81
Figura 44. Razonamiento lineal sobre carrera en segundo de bachiller.....	82
Figura 45. Razonamiento lineal (a) sobre carrera en segundo de bachiller.....	83
Figura 46. Otro razonamiento sobre carrera en segundo de bachiller.....	83
Figura 47. Razonamiento no lineal sobre carrera en segundo de bachiller.....	84
Figura 48. Razonamiento lineal sobre locomotora de segundo de bachiller.....	85
Figura 49. Combinación de operaciones sobre locomotora de segundo de bachiller.....	86
Figura 50. Razonamiento no lineal sobre locomotora de segundo de bachiller.....	86
Figura 51. Razonamiento lineal sobre granjero de segundo de bachiller.....	88
Figura 52. Razonamiento lineal (a) sobre granjero de segundo de bachiller.....	88
Figura 53. Razonamiento lineal (b) sobre granjero de segundo de bachiller.....	89
Figura 54. Razonamiento lineal (c) sobre granjero de segundo de bachiller.....	89

Figura 55. Razonamiento lineal (d) sobre granjero de segundo de bachiller.....	89
Figura 56. Respuesta incorrecta en decimal y conversión de operaciones sobre problema de pelota en tercero de bachiller.....	93
Figura 57. Respuesta incorrecta sobre problema de pelota en tercero de bachiller.....	93
Figura 58. Respuesta correcta sin argumento convincente sobre problema de pelota en tercero de bachiller.....	94
Figura 59. Fórmula tradicional de triángulo aplicada al problema de triángulo en segundo de bachiller.....	98
Figura 60. Uso incorrecto de la fórmula de triángulo aplicada al problema de triángulo en segundo de bachiller.....	98
Figura 61. Perímetro de triángulo aplicada al problema de triángulo en segundo de bachiller.....	99
Figura 62. Otros razonamientos aplicados al problema de triángulo en segundo de bachiller.....	99
Figura 63. No aplicabilidad de la fórmula al problema de triángulo en segundo de bachiller.....	100
Figura 64. No aplicabilidad de la fórmula (a) al problema de triángulo en segundo de bachiller...	101

Índice de Tablas

Tabla 1. Jerarquía de evaluación de tareas matemáticas (<i>Smith et al., 1996</i>).....	18
Tabla 2. Combinación de ambas pruebas TRC & TRL.....	24
Tabla 3. Reclasificación de grupos al combinar ambas pruebas.....	24
Tabla 4. Frecuencia de sujetos por grado de cada grupo cognitivo.....	25
Tabla 5. Resultados del test de reflexión cognitiva de primero de bachiller.....	28
Tabla 6. Resultados del test de razonamiento lógico en primero de bachiller.....	30
Tabla 7. Resultados del test de razonamiento lógico por esquemas de operación de primero de bachiller.....	30
Tabla 8. Frecuencia de alumnos que caen en trampa cognitiva de primero de bachiller.....	31
Tabla 9. Frecuencia por grupos que caen en la trampa del problema de músicos de primero de bachiller.....	33
Tabla 10. Frecuencia por grupos que caen en la trampa del problema de carrera de primero de bachiller.....	36
Tabla 11. Frecuencia por grupos que caen en la trampa del problema de locomotora de primero de bachiller.....	40
Tabla 12. Frecuencia por grupos que caen en la trampa del problema de granjero.....	43
Tabla 13. Análisis del problema peso por medio de <i>MATH</i> de cada uno de los grupos cognitivos...	44
Tabla 14. Clasificación de respuestas del problema peso en procedimiento de rutina en primero de bachiller.....	45
Tabla 15. Clasificación de respuestas del problema peso en Transferencia de la información en primero de bachiller.....	46

Tabla 16. Frecuencia por grupos que caen en la trampa del problema de peso de primero de bachiller.....	48
Tabla 17. Análisis del problema triángulo por medio de <i>MATH</i> de cada uno de los grupos cognitivos.....	49
Tabla 18. Clasificación de respuestas del problema triángulo en procedimiento de rutina en primero de bachiller.....	50
Tabla 19. Clasificación de respuestas del problema triángulo en transferencia en primero de bachiller.....	52
Tabla 20. Frecuencia por grupos, que caen en la trampa del problema de triángulo de primero de bachiller.....	53
Tabla 21. Resultados del test de reflexión cognitiva de tercero de bachiller.....	55
Tabla 22. Resultados del test de razonamiento lógico en primero de bachiller.....	55
Tabla 23. Resultados del test de razonamiento lógico por esquemas de operación de tercero de bachiller.....	56
Tabla 24. Frecuencia por grupos que caen en la trampa del problema de músicos de tercero de bachiller.....	58
Tabla 25. Frecuencia por grupos que caen en la trampa del problema de locomotora de tercero de bachiller.....	62
Tabla 26. Frecuencia por grupos que caen en la trampa del problema de granjero de tercero de bachiller.....	65
Tabla 27. Análisis del problema peso por medio de <i>MATH</i> de cada uno de los grupos cognitivos.....	67
Tabla 28. Clasificación de respuestas del problema peso en procedimiento de rutina en tercero de bachiller.....	68

Tabla 29. Clasificación de respuestas del problema peso en Transferencia de la información en primero de bachiller.....	69
Tabla 30. Frecuencia por grupos que caen en la trampa del problema de peso de tercero de bachiller.....	70
Tabla 31. Análisis del problema triángulo por medio de <i>MATH</i> de cada uno de los grupos cognitivos.....	71
Tabla 32. Clasificación de respuestas del problema triángulo en procedimiento de rutina en tercero de bachiller.....	72
Tabla 33. Clasificación de respuestas del problema triángulo en transferencia en tercero de bachiller.....	74
Tabla 34. Frecuencia por grupos, que caen en la trampa del problema de triángulo de tercero de bachiller.....	76
Tabla 35. Resultados del test de reflexión cognitiva de segundo de bachiller.....	78
Tabla 36. Resultados del test de razonamiento lógico en segundo de bachiller.....	78
Tabla 37. Resultados del test de razonamiento lógico por esquemas de operación de segundo de bachiller.....	79
Tabla 38. Frecuencia por grupos, que caen en la trampa del problema de músicos de segundo de bachiller.....	81
Tabla 39. Frecuencia por grupos, que caen en la trampa del problema de carrera de segundo de bachiller.....	84
Tabla 40. Frecuencia por grupos, que caen en la trampa del problema de locomotora de segundo de bachiller.....	87
Tabla 41. Frecuencia por grupos, que caen en la trampa del problema de granjero de primero de bachiller.....	90

Tabla 42. Análisis del problema peso por medio de <i>MATH</i> de cada uno de los grupos cognitivos.....	91
Tabla 43. Clasificación de respuestas del problema peso en procedimiento de rutina en segundo de bachiller.....	92
Tabla 44. Clasificación de respuestas del problema peso en Transferencia de la información en segundo de bachiller.....	94
Tabla 45. Frecuencia por grupos, que caen en la trampa del problema de peso de segundo de bachiller.....	95
Tabla 46. Análisis del problema triángulo por medio de <i>MATH</i> de cada uno de los grupos cognitivos.....	96
Tabla 47. Clasificación de respuestas del problema triángulo en procedimientos de rutina en segundo de bachiller.....	97
Tabla 48. Clasificación de respuestas del problema triángulo en transferencia en segundo de bachiller.....	100
Tabla 49. Frecuencia por grupos, que caen en la trampa del problema de triángulo de segundo de bachiller.....	102

Resumen

Resultados de algunas investigaciones demuestran que existe relación entre pruebas estandarizadas y resolución de problemas matemáticos. En esta investigación se utilizan el Test de Razonamiento Lógico (TRL) y el Test de Reflexión Cognitiva (TRC) para clasificar el tipo de pensamiento de los estudiantes, con el objetivo de poder relacionarlo con su desempeño en resolución de problemas matemáticos con “trampa lineal” (“ilusión de la linealidad”) y problemas similares. Varios estudios indican que existe un excesivo uso de métodos lineales en el razonamiento y en las estrategias de solución de los estudiantes, en problemas donde no es aplicable el método lineal. Este estudio presenta evidencia inicial de que los estudiantes con un pensamiento formal y un pensamiento reflexivo medianamente desarrollado son los que con menor probabilidad usan el método lineal cuando este no es el adecuado.

Abstract

Some research results show that there is a relationship between standardized tests and mathematical problem solving. In this investigation, the Test of Logical Thinking (ToLT) and the Cognitive Reflection Test (CRT) are used to classify the students' type of thinking, with the aim to relate it to their performance in solving mathematical problems with a “linear trap” (“illusion of linearity”) and similarly problems. Some studies indicate that there exist an excessive usage of linear methods in students' reasoning and solving strategies in problems where this is inadequate. This study presents an initial evidence that students with a moderately developed formal and reflective thought are those who use the linear method whit minor probability.

Introducción

Es importante, en las investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de la matemática, poder encontrar predictores del rendimiento en esta disciplina escolar. Diversos estudios señalan que existe una estrecha relación entre el nivel de desarrollo de los esquemas de razonamiento formal e hipotético-deductivo y los resultados alcanzados por los estudiantes en evaluaciones de desempeño escolar, tanto en matemáticas como en ciencias (Aguilar et al., 2002). Los estudiantes con mayores niveles de pensamiento formal son capaces de organizar y recordar más información relevante y de carácter situacional, aspecto fundamental a la hora de comprender la naturaleza del problema (Orrantia et al., 2011).

El pensamiento formal es una condición necesaria para acceder al conocimiento científico. Sin embargo, las investigaciones demuestran que los jóvenes escolarizados no manejan esquemas de operaciones formales (Navarro et al., 1996). Eso explica, por lo menos parcialmente, la incapacidad de muchos de los estudiantes para resolver problemas que exigen un nivel de abstracción y razonamiento típico del pensamiento formal. Los resultados alcanzados por las investigaciones anteriores permiten deducir que los estudiantes no cuentan con las habilidades cognitivas necesarias para resolver las situaciones problemáticas planteadas, puesto que manifiestan deficiencias al procesar información de una manera sistemática. Ello implicaría los bajos resultados obtenidos por los estudiantes al desarrollar pruebas de conocimiento a nivel nacional e internacional, lo que supone, por tanto, un desempeño deficiente a nivel académico, especialmente en el área de matemáticas.

Es por esta razón que en esta tesis se realiza un análisis del desempeño de estudiantes en la resolución de problemas matemáticos (problemas con “trampa cognitiva”) en combinación con dos pruebas: Test del Razonamiento Lógico (TRL) (Tobin y Capie, 1981; Acevedo y Martínez, 1995) y Test de Reflexión Cognitiva (TRC) (Frederick, 2005; López Puga, 2012). El objetivo es averiguar si existe una relación entre el razonamiento lógico y reflexión cognitiva, con el rendimiento de los estudiantes en problemas matemáticos con trampa cognitiva, los resultados muestran que son los estudiantes con un nivel cognitivo “moderadamente alto” en ambos test (TRC y TRL) los que mejor desempeño tienen en este tipo de problemas matemáticos.

Esta tesis se compone de cinco capítulos. En el primer capítulo se presentan los antecedentes que resultaron más relevantes para este tipo de trabajo. Este capítulo 1 se divide en cinco secciones en la que se incluyen dos constructos teóricos en los que están basados el test de reflexión cognitiva y el test de razonamiento lógico, también se revisa un estudio importante que menciona el uso corrompido del método lineal y para terminar se menciona el planteamiento del problema, así como la justificación. El marco de referencia se plantea en el capítulo 2, en este se revisan conceptos identificados en la revisión de la literatura que nos dieron la pauta para poder clasificar el tipo de pensamiento tanto reflexivo como lógico y también abstraer las propiedades de la linealidad que surgen de estudios en profundidad por parte de autores como De Bock y Verschaffel, esto para poder analizar los resultados de los sujetos en estudio. En el capítulo 3 se menciona el método por el cual se analizan los datos para poder responder las preguntas de investigación. En el capítulo 4 se analizan los resultados de los tres grupos de bachiller conforme al marco de referencia, esto interpretando las soluciones con base en las propiedades de la linealidad. Esto nos ayuda a determinar quiénes caen en la trampa y quiénes no. Para finalizar, en el capítulo 5 se presentan conclusiones derivadas de la interpretación de los datos.

Capítulo 1 Antecedentes

En este capítulo se muestra la revisión de literatura relacionada con el presente trabajo de investigación. Se empieza con definiciones sobre pensamiento crítico y cómo evoluciona para poder hacer una distinción práctica. Con respecto al pensamiento formal, simplemente se hace mención a la definición que propone Piaget.

Se mencionan algunos ejemplos de test que utilizan el mismo constructo teórico de esta investigación, así como sus distintos roles que tienen y se enfatiza en el test que se utiliza, así como la importancia de su elección.

1.1 Pensamiento reflexivo o pensamiento crítico

Existen definiciones de pensamiento reflexivo muy variadas y generales que no logran diferenciar el pensamiento reflexivo de la inteligencia general, en contraste con el psicólogo norteamericano John Dewey quien formuló una sola idea cuando definió el pensamiento reflexivo como:

“La consideración activa, persistente, y cuidadosa de una creencia o supuesta forma de conocimiento a la luz de las bases que la soportan y las conclusiones consiguientes a las que tiende” (Dewey, 1909, citado por Fischer, 2001, p.2)

El significado de “activo” en la definición de Dewey implica que no trata de recibir ideas, almacenarlas y comunicarlas, sino que las pasa por un filtro crítico. Nótese que “persistente” y “cuidadoso” se oponen a “perezoso”, “automático” e “impulsivo”.

Fisher y Scriven (1997) concluyeron que el pensamiento crítico es una diestra y activa interpretación y evaluación de observaciones y comunicaciones, información y argumentación. Aquí se manifiesta de manera más completa la naturaleza del concepto como una habilidad académica crucial.

El pensamiento reflexivo no es cualquier tipo de pensamiento sino de uno dirigido hacia un fin o propósito, como responder una pregunta, tomar una decisión, diseñar un plan o conducir un proyecto.

Kahneman et al. (1982) hicieron una distinción muy práctica entre las explicaciones positivas y negativas de los errores de juicio en situaciones probabilísticas, y se puede sostener que esta distinción también es válida para los errores de juicio en los dominios de las matemáticas. Kahneman (2002) distinguió dos tipos de pensamiento, el pensamiento rápido al cual se le ha considerado preconsciente, implícito, automático y de bajo esfuerzo y el pensamiento lento que se caracteriza por ser consciente, explícito, controlado, de alto esfuerzo, analítico y reflexivo.

1.1.1 Test de reflexión cognitiva

Existen diversas pruebas para medir el pensamiento reflexivo, Facione (1990b) desarrolló el test de Habilidades Críticas de California que consta de 35 ítems repartidos en cinco componentes: análisis, evaluación, inferencia, razonamiento deductivo y razonamiento inductivo. También existe el test de Evaluación del Pensamiento Crítico (Watson y Glaser, 1980). Otros han sido resumidos por Ennis (2001). El más popular de todos es el Halpern Critical Thinking Assessment, (Halpern, 2010a) que es comercializado por Schuhfried VTS en Australia y por Laffayette Instrument Company en Estados Unidos como un test de aplicación del pensamiento reflexivo a asuntos de la vida cotidiana. Tales pruebas confunden demasiado el pensamiento reflexivo con habilidades intelectuales generales.

El enfoque de creación del **Test de Reflexión Cognitiva (TRC)** de Frederick (2005) es diferente a todos los test existentes de pensamiento reflexivo, él definió los contenidos del test partiendo de investigaciones cognitivas sobre descontextualización y razonamiento disyuntivo. El test consiste en sólo tres ítems que se caracterizan por estar diseñados para llevar a errores en la ausencia de pensamiento reflexivo. Los ítems suelen inducir en la gente una tendencia a dar una respuesta que parece lógica, pero, es errónea y, entonces, el sujeto acierta solamente si se percata del error y persiste en la búsqueda de una solución.

Toplak et al. (2011) han demostrado que TRC es un potente predictor de desempeño en una amplia variedad de tareas sobre heurísticas y sesgos.

1.2 Pensamiento formal

En esta investigación se utiliza el concepto de pensamiento formal descrito por Piaget como: “El pensamiento formal no es algo que esté a priori, algo previamente grabado en el sistema nervioso, sino que es el resultado del intercambio entre los individuos, con el medio físico y su maduración neurológica.” (Piaget, 1955, citado por Bond, 1995a). La característica importante del pensamiento formal es el razonamiento hipotético-deductivo para realizar operaciones de la lógica proposicional.

1.2.1 Test de razonamiento lógico

Existen varias pruebas para determinar el nivel de desarrollo cognitivo de los estudiantes que siguen muy de cerca las ideas de Piaget, la más conocida se llama BLOT que consta de 35 items de opción múltiple (Bond’s Logical Operational Test) (Bond, 1995a; Bond, 1995b; Bond y Bunting, 1995). Otras pruebas son más sencillas y más prácticas para la aplicación.

En este otro grupo están “El test de aula de razonamiento científico” (Classroom Test of Scientific Reasoning, CTSR), diseñado por Lawson (1993) y “El test de razonamiento lógico” (Test of Logical Thinking, TOLT) diseñado por Tobin y Capie (1981). El primer test se usaba para determinar cuáles son los estudiantes en riesgo (Coletta et al., 2007) o para entender de qué depende el aprendizaje y la resolución de problemas en mecánica (Ates y Cataloglu, 2007). El segundo fue útil, por ejemplo, para predecir las habilidades del pensamiento crítico de los estudiantes (Bitner, 1991).

El test empleado en esta investigación, para determinar el nivel de desarrollo cognitivo, es la versión castellana del “Test of Logical Thinking” (Tobin y Capie, 1981). Fue traducido por el Seminario Permanente de investigación en Didáctica de las Ciencias de Cádiz y se llamó “**Test de Razonamiento Lógico**” (TRL) (Acevedo y Martínez, 1995).

El test consiste en un cuestionario de diez tareas de papel y lápiz, dos por cada uno de los siguientes esquemas de razonamiento:

Proporcionalidad (PP), control de variable (CV), probabilidad (PB), correlación (CR) y operaciones combinatorias (CB).

El TRL se ha usado para determinar la relación entre las habilidades del pensamiento formal y de la resolución de problemas matemáticos (Aguilar et al., 2002). Hernández-Suarez (2013) utilizó el TRL para medir el pensamiento concreto, pensamiento en transición y pensamiento formal con las escalas que se mencionan en el capítulo de metodología.

1.3 Ilusión Cognitiva

Como revisión del término “ilusión cognitiva” o “trampa cognitiva” encontramos en la línea de investigación de la psicología matemática la siguiente definición: la ilusión cognitiva o trampa cognitiva ha evolucionado en analogía con el dominio más conocido de ilusiones ópticas (Roediger, 1996).

La característica principal de un fenómeno, para que se considere una ilusión, es que conduce a una percepción, juicio o memoria que se *desvía* de manera confiable de la “realidad”, sin considerar estas desviaciones como malentendidos. Esta desviación debe ser de una manera *sistemática* (es decir en una dirección predecible) en lugar de solo al azar.

Otro aspecto muy importante de las ilusiones cognitivas es que aparecen *involuntariamente*, es decir, sin instrucciones específicas o voluntad deliberada, simplemente suceden. Como consecuencia de esta propuesta de definición, una ilusión cognitiva es muy difícil, si no es que imposible de evitar. Para algunas ilusiones, una instrucción adecuada, una cuidadosa selección del material u otras variaciones de procedimiento pueden reducir e incluso eliminar la ilusión y para otras ilusiones, la mayoría de los intentos de superarla han fallado (Pohl y Hell, 1996). Rüdiger F. Pohl realizó una lista de ilusiones cognitivas y las plasmó en un libro llamado “*Cognitive Illusions*” (Pohl, 2004) en que se realiza una clasificación en tres categorías: *ilusiones de pensamiento*, *ilusiones de juicio* e *ilusiones de memoria* y las define de la siguiente manera:

Ilusión de pensamiento es aquella que implica la aplicación de una determinada regla (como el teorema de Bayes, razonamiento silogístico, cálculo de alguna área entre otros). Estas reglas se derivan de modelos normativos (como la teoría de la probabilidad, axiomas de la geometría,

axiomas de campo para números reales, etc.) y sus resultados generalmente sirven como estándares contra los cuales se evalúa su desempeño humano. El punto crucial es que algunas personas no conocen este tipo de reglas o la concepción que tienen de ellas es errónea (misconcepción) y por lo tanto responden de una manera “incorrecta”. Las tareas típicas son estimar una probabilidad, estimar áreas, volúmenes, pesos, verificar una conclusión lógica, descubrir alguna regla oculta, entre otros. Como ejemplo clásico tenemos la violación a la regla de la probabilidad de una intersección. Como se sabe la probabilidad de que el evento A y el evento B ocurran juntos, es igual a la probabilidad del evento A multiplicada por la probabilidad condicional del evento B dado que A ha ocurrido. El error ocurre cuando a la probabilidad conjuntiva se le asigna un valor superior al asignado a uno o ambos eventos componentes.

En las *ilusiones de juicio* se pide a las personas que califique subjetivamente un aspecto específico de un estímulo dado (agrado, frecuencia o veracidad). Las características específicas de la situación pueden sesgar el juicio de alguien en una determinada dirección, estas características implican, por ejemplo, sentimientos de familiaridad o confianza. Lo más importante de estos juicios es que son bajo incertidumbre, es decir las personas no tienen conocimiento sobre la solución correcta y por tanto están obligados a confiar en impresiones subjetivas o “intuiciones”. Las heurísticas clásicas descritas por Tversky y Kahneman (1974) representan ejemplos de tales mecanismos, el experimento es el siguiente: se le pide a un grupo de personas que juzguen la frecuencia de palabras, específicamente que piensen en la letra K en el idioma inglés y que se responda la pregunta: ¿Qué es más probable: que la K aparezca como primera o tercera letra de una palabra?, la mayoría de los participantes consideraron que la primera posición es la más probable, pero la respuesta correcta es la tercera posición.

Ilusiones de memoria son aquellas en las que el material codificado anterior debe recordarse más adelante. La prueba crítica generalmente implica recordar o reconocer. Como un ejemplo de este tipo de ilusión cognitiva que podemos encontrar en la literatura es la ilusión de Moisés, en la que se le pregunta a un grupo de personas “¿Cuántos animales de cada tipo tomó Moisés en el arca?”, la mayoría respondió “dos”, a pesar de que saben que fue Noé y no Moisés quien tomó los animales en el arca (Erickson y Mattson, 1981). Cuando un término en una oración o pregunta se reemplaza por un término semánticamente similar pero incorrecto, las personas tienen dificultades para

detectar la distorsión. Esta tendencia a pasar por alto las distorsiones en las declaraciones se conoce como ilusión de Moisés. La ilusión de Moisés fue explorada por primera vez como un tema de investigación científica por Erickson y Mattson (1981), quienes descubrieron que la gente frecuentemente no notaba el término distorsionado “Moisés” cuando se le pedía que respondiera, a pesar de leer la pregunta en voz alta antes de responderla e incluso se advirtió sobre posibles distorsiones, esta ilusión es tan robusta que no necesita presión de tiempo para caer en la trampa.

El estudio de las ilusiones cognitivas ha sido ampliamente estudiado por psicólogos para poder descifrar los tipos de pensamiento que llevan al error, el término ilusión cognitiva es un concepto que no ha quedado definido con precisión, por lo que autores como Gigerenzer (1991) ha criticado la fiabilidad de una ilusión cognitiva. Con base en estos antecedentes no se realizará una profunda investigación en ilusiones cognitivas, solamente se toma el constructo (ilusión cognitiva) y un solo tipo de ilusión cognitiva (ilusión de pensamiento) de acuerdo a la clasificación o taxonomía de Pohl.

1.3.1 Ilusión de la linealidad

Autores como Dirk De Bock, Wim Van Dooren, Dirk Janssens y Lieven Verschaffel realizaron investigaciones enfocadas a un tipo especial de ilusión de pensamiento, llamada *ilusión de la linealidad*, la cual se encuentra más direccionada en la Matemática Educativa. Este tipo de ilusión es uno de los ejemplos más comunes de un comportamiento corrompido en la resolución de problemas. *La ilusión o trampa lineal* es la tendencia de los alumnos a generalizar en exceso la aplicabilidad del modelo proporcional. El concepto de linealidad (o proporcionalidad) es un concepto clave en las matemáticas y en la educación desde la escuela primaria hasta la universidad (De Bock et al., 2002) y la forma más común de aparecer es el uso de la “regla de tres”.

Revisando la literatura nos encontramos con un primer estudio, en el que estudiantes de primaria resuelven *problemas verbales* sin darle sentido o significado, este tipo de estudiantes eran confrontados por problemas tales como:

“El mejor tiempo de Juan corriendo los 100 metros es de 17 segundos, ¿Cuánto tiempo tardará en recorrer 1 kilómetro?”

“Una tienda vende 312 postales navideñas en diciembre, ¿Cuántas venderá en total entre los meses de enero, febrero y marzo?”

Más del 80% de los alumnos responden utilizando un razonamiento del tipo *k veces a, k veces b* (esto es, para el primer problema: “Juan necesita 10 veces más de tiempo, para llegar corriendo 10 veces más lejos), sólo el 7% de los alumnos no aplicaron el modelo proporcional y le dieron un sentido más realista (Verschaffel et al., 2000).

Los investigadores Van Dooren et al. (2005) aplicaron una prueba por escrito compuesta por *problemas verbales* lineales y no lineales de tercero de primaria a segundo de secundaria. Se encontró que los estudiantes que a medida que iban adquiriendo habilidades de razonamiento lineal tendían a sobre generalizar los modelos lineales, un 30% de estudiantes de tercero de primaria aplicaban modelos lineales donde no correspondía y esta situación experimentó un aumento considerable hasta alcanzar un 51% en quinto de primaria y un descenso posterior hasta el 22% en segundo de secundaria.

Con respecto al entorno *gráfico*, Leinhardt et al. (1990) encontraron una fuerte tendencia de alumnos de diferentes edades a graficar funciones lineales que pasan por el origen, cuando en realidad este tipo de funciones eran no lineales. El dominio del razonamiento *probabilístico* es muy sensible a este tipo de ilusión. El ejemplo más característico es la creencia equivocada de los estudiantes de que la probabilidad de tener al menos un éxito en un juego de azar es proporcional al número de intentos, es decir, la probabilidad de obtener al menos un tres en un dado justo es igual a $1/6$, entonces la probabilidad de obtener al menos un tres en dos dados es $2(1/6)$, una vez más la mayoría de los estudiantes utiliza este razonamiento (*si k veces a, k veces b*). Un estudio muy interesante lo realizó Stacey (1989), quien estudió la modelización que hacían estudiantes de 9 a 13 años de *patrones* de la forma $f(n) = an + b$ (con $b \neq 0$). Las respuestas equivocadas más frecuentes fueron debido a la aplicación de la proporcionalidad en lugar de la determinación de la relación afin, los resultados mostraron que la mayoría de los estudiantes hicieron uso de las propiedades de las funciones lineales (Ver el Capítulo 2).

Otros errores de linealidad parecidos se han descrito en el campo del *álgebra*, también en este dominio los alumnos tienden a sobre generalizar las propiedades de funciones lineales a las

funciones no lineales. Por ejemplo, se comete el error de utilizar las propiedades de la raíz cuadrada de la siguiente manera: *la raíz cuadrada de la suma es igual a la suma de las raíces cuadradas* (Gagatsis y Kyriakides, 2000).

Por último, en el dominio de la *geometría* se presenta igualmente este fenómeno de una manera más marcada, ya que más del 90% de niños de 12 años y más del 80% de los de 16 años fallaron en el siguiente problema que se les aplicó a lápiz y papel:

“El granjero Carlos necesita aproximadamente 8 horas para abonar un terreno cuadrado de 200 m de lado. ¿Cuántas horas necesitará para abonar un terreno cuadrado de 600 m de lado?”

Los resultados mostraron que los estudiantes tienen una fuerte tendencia a aplicar métodos lineales, incluso se les pidió que realizaran un dibujo de la situación del problema pero no fue suficiente, ya que los estudiantes pensaban que al triplicarse los lados del cuadrado, también se triplicaría el tiempo (De Bock et al., 1998).

En un estudio posterior con entrevistas en profundidad, De Bock et al. (2002) trataron de complementar los resultados que obtuvieron del estudio de prueba a lápiz y papel, se encontraron los siguientes resultados:

- La mayoría de los sujetos utiliza un razonamiento lineal de forma espontánea, casi intuitivo (en el sentido de Fischbein, 1987).
- Muchos estudiantes mostraron limitaciones en su conocimiento *geométrico*.
- Varios estudiantes tenían creencias y actitudes erróneas hacia la resolución de problemas matemáticos aritméticos verbales, por ejemplo, tenían la creencia de que los dibujos no sirven de ayuda, que la primera solución es la mejor, etc.

Los autores De Bock, Van Dooren, Janssens, y Verschaffel identificaron los diferentes factores causantes de la aparición del fenómeno de la ilusión de la linealidad en estudiantes de diversas edades, que se clasifican en tres categorías principales:

- a) Elementos relacionados con el concepto de linealidad y su carácter intuitivo, así como su simplicidad

- b) El sistema escolar
- c) El dominio matemático o científico

El carácter intuitivo y su simplicidad

La razón más importante para la aparición del exceso de dependencia de las relaciones lineales es su carácter intrínsecamente simple, ya que es un modelo que naturalmente viene a la mente sin necesidad de una justificación, muy parecido al término intuición que utiliza Fischbein (1987), que la describe como un tipo de cognición inmediata que conduce de manera coercitiva a generalizaciones, produce gran confianza y a menudo es persistente a la formalidad. Nuestras intuiciones son resistentes al cambio porque están relacionadas a nuestro sistema adaptativo, que consiste en esquemas, un esquema es definido por Fischbein (1999, p.39) como “un programa que permite almacenar, procesar, controlar e integrar mentalmente información. Fischbein considera a la *proporcionalidad* como un esquema de este tipo.

Es por esta razón que estudiantes sin conocer el tema escolar de proporcionalidad aplican modelos lineales de una forma natural.

Sistema escolar

El sistema escolar también es factor ya que algunos estudios, como de Van Dooren et al. (2005), demuestran que los estudiantes de primaria adquieren una destreza rutinaria a medida que se involucran con el tema de proporción. En el currículo habitual de matemáticas, el razonamiento proporcional se practica principalmente por medio de los llamados problemas de valor faltante. En este tipo de problemas se proporcionan tres números a , b y c , para encontrar el valor x que satisface la siguiente razón $a/b = c/x$, la mayoría de las tareas matemáticas se encuentran en este formato, tanto en libros de texto como en el salón de clases, lo cual es un factor explicativo para la aparición y persistencia de la ilusión de la linealidad (De Bock et al., 2002b).

Dominio matemático o científico

Son varios los contenidos específicos que juegan un papel en la aparición del fenómeno, en este estudio se muestran resultados de la aparición muy marcada del razonamiento ilícito en problema

de área. Resultados de estudios indican que la ilusión de la linealidad se debe en parte a las dificultades de los estudiantes en la adquisición de las nociones de área y volumen. Por ejemplo, Tierney et al. (1990) encontraron que los maestros en formación tenían dificultades en el cambio entre las unidades lineales (como el metro) y las unidades de área (como los metros cuadrados), lo que puede indicar que no captan el carácter bidimensional del concepto de área. Aunque los errores de la linealidad están causados por deficiencias en el conocimiento del contenido específico de los estudiantes, parece haber procesos más generales que conducen al estudiante a la solución lineal donde no corresponde. Para eso, Kahneman et al. (1982) hicieron una distinción muy práctica entre los errores de juicio bajo incertidumbre que se extiende a la mayoría de los dominios de las matemáticas.

“El esquema de proporcionalidad o linealidad es, en la terminología piagetiana, un esquema operacional, esto es, muy general e influyente, se desarrolla con la edad y en su forma cuantitativa plena se manifiesta durante la etapa de las **operaciones formales**” (Fischbein, 1999, p.45). La proporcionalidad es un esquema operacional muy utilizado en la matemática escolar por lo que es muy importante investigarlo.

1.4 Preguntas de investigación

Con base en los antecedentes sobre el pensamiento formal, reflexivo y las tendencias de los estudiantes para resolver problemas matemáticos aplicando en exceso modelos lineales, se tienen las siguientes preguntas de investigación:

¿Qué tipo de estudiantes, de acuerdo a sus estadios de pensamiento tanto reflexivo como lógico, son los que presentan mayor tendencia a caer en problemas matemáticos con trampa cognitiva?

¿Qué tipo de estrategias utilizan los estudiantes de bachillerato del Instituto Salvador Allende, al tratar de resolver problemas matemáticos con “trampa cognitiva”?

Objetivos

Para el presente trabajo de tesis se han fijado los siguientes objetivos.

General:

Explorar la influencia del nivel cognitivo de los estudiantes en la resolución de un tipo específico de problemas matemáticos (problemas con “trampa cognitiva”).

Específicos:

- Analizar el nivel cognitivo de los estudiantes a través del TRC y TRL
- Clasificar las estrategias de resolución de problemas matemáticos con “trampa cognitiva”
- Encontrar alguna relación entre el nivel cognitivo (tipo de pensamiento) y el desempeño en resolución de problemas matemáticos con “trampa cognitiva”.

1.5 Justificación

Resulta de gran interés en las investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de la matemática poder encontrar predictores del rendimiento en esta disciplina escolar. Diversos estudios señalan que existe una estrecha relación entre el nivel de desarrollo de los esquemas de razonamiento formal y los resultados alcanzados por los estudiantes en evaluaciones de desempeño escolar tanto en matemáticas como en ciencias (Aguilar et al., 2002).

Por otro lado, en la educación media superior en México se abordan problemas de proporcionalidad y la mayoría de los problemas que se resuelven son de tipo valor faltante y se resuelven usualmente con lo que se conoce como “regla de tres” (Ramírez y Block, 2009). Por lo que es importante encontrar algunos predictores sobre el rendimiento en problemas con trampa lineal, ya que varios estudios mencionan que los estudiantes utilizan en exceso los métodos lineales donde no son aplicables, pero no existen estudios que de alguna manera caractericen este tipo de estudiantes de acuerdo a su nivel cognitivo.

Capítulo 2 Marco de Referencia

En el presente capítulo se mencionan constructos que son importantes en la investigación, tales como “pensamiento formal”, “pensamiento concreto”, “pensamiento rápido”, “pensamiento lento” y proporcionalidad o linealidad para ver sus características, así como sus propiedades. También se hace mención de la taxonomía Mathematical Assessment Task Hierarchy (*MATH*) por Smith et al. (1996) que nos sirve para analizar los problemas que no son factibles con el marco de la linealidad.

2.1 El pensamiento reflexivo como parte de procesos duales (pensamiento lento y rápido)

El concepto de procesamiento dual se refiere a la coexistencia de dos modos de procesar la información que Kahneman (2002) resumió en la Figura 1.

	PERCEPCIÓN	INTUICIÓN (Sistema 1)	Razonamiento (Sistema 2)
PROCESOS	Rápidos Paralelos Automáticos Sin esfuerzo Asociativos De aprendizaje lento		Lentos Seriales Controlados Esforzados Bajo reglas Flexibles
CONTENIDOS	Perceptos Estimulación actual Limitados por el estímulo		Representantes conceptuales Pasadas, presentes, y futuras Pueden ser evocados por el lenguaje

Figura 1: Diferenciación de dos sistemas (Tomado de Kahneman, 2002, p.451).

A los procesos del Sistema 1 se les ha considerado preconcientes, implícitos, automáticos, de bajo esfuerzo, rápidos, de alta capacidad, en formato de default, holísticos y perceptuales, y a los del Sistema 2, conscientes, explícitos, controlados, de alto esfuerzo, lentos, de baja capacidad, inhibitorios, analíticos, y reflexivos. Parece adecuado concebir al Sistema 2 como una forma de pensamiento bajo control de nivel intencional, apoyado por los procesos subconscientes del Sistema 1 que proporcionan perceptos, memorias, También parece que la vía más promisoría es la de operacionalizar el concepto de conciencia considerando que el pensamiento del Sistema 2 requiere acceso a un sistema central de memoria de trabajo de capacidad limitada, cosa que no ocurre con el Sistema 1 (Kahneman, 2002).

2.2 Estadios de pensamiento de Piaget

La teoría de Piaget establece los “estadios de desarrollo cognitivo” que van desde la infancia hasta la adolescencia. Piaget divide el desarrollo cognitivo en cuatro periodos importantes que resume Jean-Marie Dolle en su libro “Para comprender a Jean Pieget” (Dolle, 2006) de la siguiente manera:

Etapa sensoriomotor

La conducta del niño es esencialmente motora, no hay representación interna de los acontecimientos externos, no piensa mediante conceptos. Esta etapa se subdivide en estadios como; mecanismos reflejos congénitos, coordinación de esquemas de conducta, nuevos descubrimientos, nuevas representaciones mentales etc. Por lo regular se desarrolla en los primeros 24 meses.

Etapa preoperacional

Es la etapa del pensamiento y del lenguaje que visualiza su capacidad de pensar *simbólicamente*, imita objetos de conducta, juegos simbólicos, dibujos, imágenes mentales y el desarrollo del lenguaje hablado.

a. Estadio preconceptual (2-4 años)

b. Estadio intuitivo (4-7 años)

Etapa de las operaciones concretas (7-11 años)

Los procesos de razonamiento se vuelven *lógicos* y pueden aplicarse a *problemas concretos o reales*. En el aspecto social el niño ahora se convierte en un ser verdaderamente social y en esta etapa aparecen los *esquemas lógicos de seriación, ordenamiento mental de conjuntos y clasificación de los conceptos de espacio, tiempo y velocidad*.

Etapa de las operaciones formales (11 años en adelante)

En esta etapa el adolescente logra la *abstracción* sobre conocimientos concretos observados que le permiten emplear el razonamiento lógico inductivo y deductivo. Desarrolla sentimientos idealistas y se logra formación continua de la personalidad.

2.3 Ilusión de la linealidad y sus propiedades

De Bock et al. (2007) señalan que los términos “lineal” y “proporcionalidad (directa)” (así como sus derivados) los utilizaremos como sinónimos y también para referirnos a las funciones de la forma $f(x) = ax$ (con $a \neq 0$). La representación gráfica de este tipo de función es una línea recta que pasa por el origen. Sin embargo, existen otras propiedades y representaciones de las funciones lineales que son conocidas y utilizadas con frecuencia, cada una de estas propiedades y representaciones pueden ser aplicadas por los estudiantes en situaciones en los que no son aplicables, esta tendencia se llama “la ilusión de la linealidad”, “la trampa de la linealidad”, etc. (De Bock et al., 2007). Tales propiedades son las siguientes:

- $f(x + y) = f(x) + f(y)$ cuando el factor de proporcionalidad es un número entero (relativamente pequeño), los estudiantes tienden a centrarse en esta propiedad (aditiva) por ejemplo: para cubrir 21 m^2 ($3 \text{ m}^2 + 18 \text{ m}^2$) necesitamos 3.5 litros (0.5 litros + 3 litros) de pintura.
- $f(kx) = kf(x)$ Esta propiedad (multiplicativa) se refiere a la igualdad de las relaciones internas y con frecuencia está representado en la regla “si k veces a entonces k veces b ”, lo anterior se utiliza por lo general en el aula para resolver problemas verbales, por ejemplo, para cubrir 36 m^2 ($2 \times 18 \text{ m}^2$) necesitamos 6 litros (2×3 litros) de pintura, es decir para cubrir dos veces más de área, necesitamos dos veces más de pintura.

2.4 Taxonomía MATH

La modificación a la taxonomía de Bloom (1956), propuesta por Smith et al. (1996) pretende evaluar tareas matemáticas de acuerdo con la naturaleza de la actividad que se requiere para completar la tarea de forma exitosa. Los autores denominan a esta taxonomía MATH, haciendo referencia a las siglas de Mathematical Assessment Task Hierarchy.

Las categorías que se incluyen en la taxonomía se muestran en la Tabla de abajo

Grupo A	Grupo B	Grupo C
Conocimiento factual	Transferencia de la información	Justificación e interpretación
Comprensión	Aplicación en situaciones nuevas	Implicaciones, conjeturas y comparaciones
Uso rutinario de procedimientos		Evaluación

Tabla 1: Jerarquía de evaluación de tareas matemáticas (Smith et al., 1996, p.67).

Smith et al. (1996) puntualizan que la jerarquía no se basa en la dificultad del reactivo sino en la naturaleza de la actividad que debe realizarse. Las ocho categorías, con base en las características proporcionadas por los autores, se describen a continuación:

Conocimiento factual y sistema de hechos. La dificultad y profundidad del material puede abarcar un amplio rango, desde recordar una fórmula o definición hasta aprender un teorema complejo, pero la única habilidad requerida es recordar información aprendida previamente.

Comprensión. Para demostrar comprensión del conocimiento factual, el sujeto debería:

- Ser capaz de decidir qué condiciones de una definición simple se satisfacen. Se entiende por definición simple, una que se refiere a una cuestión de terminología, haciendo uso de conocimientos o habilidades adquiridos previamente.
- Comprender el significado de los símbolos de una fórmula y mostrar habilidad para sustituir en ella.
- Ser capaz de reconocer ejemplos y contraejemplos.

Procedimiento de rutina. Requiere habilidades que van más allá del simple recuerdo fáctico. La característica esencial es que cuando el procedimiento o algoritmo se utiliza correctamente, todos los sujetos que resuelven una tarea mediante dicho procedimiento, obtienen el mismo resultado; esto no excluye la posibilidad de que pueda haber más de un procedimiento rutinario aplicable a un problema determinado.

Transferencia de información. Puede reconocerse por la habilidad de desempeñar las siguientes tareas:

- Transformar información de una forma a otra, por ejemplo, verbal a numérica o viceversa.
- Decidir qué condiciones de una definición conceptual se satisfacen. Una definición conceptual es aquella cuya comprensión requiere un cambio en la forma de pensar del estudiante, por ejemplo, la definición de límite o independencia lineal.
- Reconocer la aplicabilidad de una fórmula o método en un contexto inusual.
- Reconocer la inaplicabilidad de una fórmula genérica en un contexto particular.
- Resumir o parafrasear en términos no técnicos para una audiencia distinta.
- Resaltar un argumento matemático a partir de un bosquejo verbal del método.
- Explicar la relación entre las partes que componen el material.
- Explicar procesos.
- Reensamblar, con orden lógico, las partes de un argumento.

Aplicación en situaciones nuevas. Habilidad para elegir y aplicar métodos o información apropiados en situaciones nuevas, incluyendo:

- Modelar situaciones de la vida real.
- Demostrar un teorema o resultado que va más allá del uso de procedimientos rutinarios.
- Extrapolar procedimientos conocidos a nuevas situaciones.
- Elegir y aplicar técnicas estadísticas apropiadas.
- Elegir y aplicar algoritmos apropiados.

Justificar e interpretar. Habilidad para justificar o interpretar un resultado dado. Esto incluye:

- Demostrar un teorema para justificar un resultado, método o modelo.
- Habilidad para encontrar errores en el razonamiento.
- Reconocer las limitaciones en un modelo y ser capaz de decidir si un modelo es apropiado.
- Reconocer limitaciones computacionales y fuentes de error.
- Interpretar modelos de regresión.
- Discutir el significado de ejemplos y contraejemplos dados.
- Reconocer suposiciones no declaradas.

Implicaciones, conjeturas y comparaciones. Dada una situación, tener la habilidad de plantear implicaciones y conjeturas, así como justificarlas. Además, contar con la habilidad de realizar comparaciones justificadas en distintos contextos matemáticos, por ejemplo:

- Comparar algoritmos.
- Deducir implicaciones de un resultado.
- Construir ejemplos y contraejemplos.
- Realizar conjeturas basadas, por ejemplo, en argumentos heurísticos o inductivos y, posteriormente, demostrar esas conjeturas con métodos rigurosos.

Evaluación. Habilidad de juzgar el valor de un material para un propósito dado, con base en criterios definidos. Esto incluye:

- Hacer juicios.
- Seleccionar por relevancia.
- Argumentar de forma coherente las virtudes de un algoritmo.
- Habilidades de organización.
- Creatividad, lo que incluye reestructurar la información e identificar aquella que no resulta obvia para otros.

En la descripción de características antes listada, se presenta así en el documento de Smith et al. (1996).

Capítulo 3 Metodología

La metodología que se utiliza en este estudio es de tipo **cualitativa**. De acuerdo con Álvarez-Gayou (2014) esta metodología se considera descriptiva-interpretativa puesto que se abarca un grado de observación y análisis de la información (palabras, textos, discursos, dibujos, gráficos e imágenes) para poder encontrar patrones narrativos explicativos entre las variables de interés y llevar a cabo la interpretación y descripción de dichos patrones.

Para responder la primera pregunta de investigación:

¿Qué tipo de estudiantes, de acuerdo a sus estadios de pensamiento tanto reflexivo como lógico, son los que presentan mayor tendencia a caer en problemas matemáticos con trampa cognitiva?

Se aplicó el test de reflexión cognitiva diseñado por Frederick (2005), el test de razonamiento lógico en versión castellano y validado por Acevedo y Martínez (1995) así como una serie de problemas matemáticos.

Los dos primeros test son para poder estratificar los tipos de pensamiento con los que cuentan los sujetos y poder saber ¿cuántos alumnos son pensadores rápidos, cuántos son pensadores lentos, cuántos son concretos y cuántos formales y así poderlos “relacionar” con su desempeño en la resolución de problemas matemáticos con trampa cognitiva.

Para la segunda pregunta de investigación:

¿Qué tipo de estrategias utilizan los estudiantes de bachillerato del Instituto “Salvador Allende”, al tratar de resolver problemas matemáticos con “trampa cognitiva”?

Se aplicaron una serie de problemas matemáticos con trampa cognitiva (trampa lineal) tomados del libro ilusión de linealidad de De Bock et al. (2007) y acertijos matemáticos de Gardner (1986) con otro tipo de trampa cognitiva. Esta aplicación fue para saber *¿cómo resuelven los problemas matemáticos con trampa cognitiva?* Es decir, poder analizar los tipos de respuestas y estrategias que utilizan los sujetos de acuerdo a su nivel cognitivo y poder encontrar alguna regularidad entre estudiantes de un nivel cognitivo “alto” y su tipo de estrategia o solución del problema y poder hacer una distinción entre su tipo de estrategia.

Los sujetos de estudio son estudiantes de nivel medio superior del colegio privado “Salvador Allende” en Puebla ubicado en la localidad de San Francisco Totimehuacan. Así, la muestra depende del número de alumnos inscritos en ese colegio y por lo conveniencia de trabajar en ella. Cohen et al. (2007) indican que una muestra no probabilística se denomina conveniente si se elige por la oportunidad de trabajar con ella y es llamada dimensional si se agregan condiciones para su elección de acuerdo con los factores de interés. En total se analizaron 95 sujetos en dos tantos, primer tanto son 33 sujetos pertenecientes a primero de bachiller y 32 a tercero de bachiller, segundo tanto 30 sujetos pertenecientes a segundo de bachiller.

La aplicación de los instrumentos se realizó en dos etapas.

Primera etapa:

Se aplicó el test de reflexión cognitiva y el test de razonamiento lógico para poder analizar su nivel cognitivo inicial.

- **Test de Reflexión Cognitiva (TRC)** de Frederick (2005). El test consiste en sólo tres ítems que se caracterizan por estar diseñados para llevar a errores en la ausencia de pensamiento reflexivo, y sus criterios de medición son los siguientes de *cero a un reactivo correcto pensador rápido* y de *dos a tres reactivos correctos pensador lento* (Toplak et al., 2013). Se presenta en el [Anexo1](#)
- **Test de Razonamiento Lógico (TRL)** (Acevedo y Martínez, 1995). El test consiste en un cuestionario de diez tareas de papel y lápiz, dos por cada uno de los siguientes esquemas de razonamiento:

Proporcionalidad (PP), control de variable (CV), probabilidad (PB), correlación (CR) y operaciones combinatorias (CB). Se presenta en el [Anexo2](#)

Y sus criterios de evaluación son los siguientes: de *0 a 3* reactivos correctos **pensador concreto**, de *4 a 6* reactivos correctos **pensador en transición** y de *7 a 10* reactivos correctos **pensador formal** esto de acuerdo a Hernández-Suarez et al. (2013).

Segunda etapa:

Fue aplicar problemas matemáticos con trampa cognitiva y para después analizarlos con el marco de referencia que mejor convenga.

Problemas o tareas con trampa lineal:

- Un grupo de 5 músicos toca una canción en 10 minutos, otro grupo de 35 músicos tocará la misma canción ¿cuánto tiempo le tomará a este grupo tocar la canción?
- Ellen y Kim están corriendo alrededor de una pista. Corren igual de rápido, pero Ellen comenzó más tarde. Cuando Ellen ha corrido 5 vueltas, Kim ha corrido 15 vueltas. Cuando Ellen ha corrido 30 vueltas, ¿cuántas ha corrido Kim?
- La locomotora de un tren tiene 12 m de largo. Si hay 4 vagones conectados a la locomotora, el tren tiene una longitud de 52 m. Si hubiera 8 vagones conectados a la locomotora, ¿cuál sería el largo del tren?
- El granjero Carlos necesita aproximadamente 8 horas para abonar un terreno cuadrado de 200m de lado. ¿Cuántas horas necesitará para abonar un terreno cuadrado de 600m de lado?

De Bock (2007)

Problemas o tareas con trampa cognitiva que no es la lineal y para este tipo de problemas se analizaron con la taxonomía *Math* de Smith (1996).

- Si una pelota de basketball pesa $\frac{1}{2}$ kilo más la mitad de su propio peso, ¿cuánto pesa?
- Un triángulo tiene lados de 17, 35 y 52 centímetros. ¿Cuál es su superficie en centímetros cuadrados?

Gardner (1986)

Cabe mencionar que tanto el primer grado como el tercer grado de bachiller fueron los primeros sujetos que se les aplicó estas dos fases y después se obtuvo otro grupo distinto de los anteriores, de segundo de bachiller a quienes se les repitió esta estrategia de recolección de datos para poder complementar una muestra total de 95 sujetos de los tres niveles de bachiller de un colegio privado de Puebla.

Una vez recogido los datos en dos fases se procede al análisis de datos. Como en la primera fase se utilizaron **dos test** (reflexión cognitiva y razonamiento lógico) al vaciar los resultados de ambos test se pueden dar las siguientes **combinaciones** de acuerdo a sus escalas de clasificación de cada uno de los test como se observa en la Tabla 2.

TRC/TRL	P. concreto	P. en transición	P. formal
P. rápido	P. rápido & P. concreto	P. rápido & P. transición	P. rápido & P. formal
P. lento	P. lento & P. concreto	P. lento & P. transición	P. lento & P. formal

Tabla 2: Combinación de ambas pruebas test de reflexión cognitiva vs test de razonamiento lógico

Como se puede observar en el capítulo de resultados en promedio 90% de sujetos se encuentran en el nivel cognitivo de pensador rápido en el sentido Kahneman y en promedio el 70% de sujetos se encuentra en el estadio de pensador concreto en el sentido de Piaget, por lo que fue conveniente realizar una reclasificación sólo para el estadio de pensador concreto, es decir, el estrato de pensador concreto de acuerdo a Hernández-Suarez et al. (2013). oscila entre 0 y 3 ítems correctos, entonces la reclasificación la llamamos **pensador concreto A1** para respuestas correctas entre 0 y 1, y **pensador concreto A2** para respuestas correctas entre 2 y 3. Por lo tanto todos los grupos o estratos posibles que se pudieran presentar en cada uno de los grados de bachiller (1°, 2° y 3°) al combinar estas dos pruebas (Test de reflexión cognitiva y Test de razonamiento lógico) quedaría resumido en la Tabla 3.

TRC/TRL	Pensador concreto [0,3]		Pensador en transición [4,6]	Pensador formal [7,10]
	Pensador concretoA1 [0,1]	Pensador concretoA2 [2,3]		
P. rápido [0,1]	PRCA1 1° 2° 3°	PRCA2 1° 2° 3°	PRT 2° 3°	PRF 2°
P. lento [2,3]	PLCA1	PLCA2	PLT 1°	PLF

Tabla 3: Reclasificación de grupos al combinar ambas pruebas TRC y TRL

La reclasificación implicaría una combinación mayor de grupos, pero como se puede verificar en el capítulo de resultados no todos los grados de bachiller tienen los mismos resultados en ambas

pruebas. Por ejemplo, se observa en la Tabla 3, en el grado de primero de bachiller (1°) se encontraron sujetos que de acuerdo a las escalas de medición de ambas pruebas se consideraron pensador rápido y pensador concreto con reclasificación A1 (PRCA1), también se encontraron sujetos del tipo pensador rápido y pensador concreto A2 (PRCA2) y sujetos del tipo pensador lento y pensador en transición (PLT). No se encontraron pensadores lentos y concretos del tipo A1 (PLCA1) y A2 (PLCA2), no hubo registro de pensadores rápidos y en transición (PRT), tampoco pensadores rápidos y formales (PRF) y ni mucho menos pensadores lentos y formales (PLF).

Para el grado de segundo de bachiller no se registraron pensadores lentos, pero si se encontraron sujetos en los cuatro tipos de pensadores acerca del test de razonamiento lógico, es decir, pensadores concretos A1 y A2, pensadores en transición y un solo estudiante en el estrato de pensador formal por lo que se clasificaron como corresponde en la Tabla 3.

Para tercer grado de bachiller al igual que segundo grado no se encontraron pensadores lentos, pero si pensadores concretos A1 y A2, así como pensadores en transición, no se encontraron pensadores formales.

De ahora en adelante, a los grupos que resultaron de combinar ambas pruebas los llamaremos grupos cognitivos y son identificados por las iniciales del tipo de pensador, a saber, el grupo cognitivo PRT es del tipo pensador rápido y en transición.

La frecuencia de los sujetos que conforman los grupos cognitivos es la siguiente:

Frecuencia de sujetos por grado			
	1°	2°	3°
PRCA1	23	19	14
PRCA2	7	6	10
PRT		4	8
PRF		1	
PLT	3		
	33	30	32

Tabla 4: Frecuencia de sujetos por grado de cada uno de los grupos cognitivos

En primer grado los sujetos se encuentran distribuidos en los grupos cognitivos PRCA1, PRCA2 y PLT de acuerdo a la Tabla 4. Para segundo grado los sujetos abarcan los grupos cognitivos PRCA1, PRCA2, PRT y PRF con la frecuencia que se muestra en la Tabla 4. Por último, tercer grado sólo contempla los grupos PRCA1, PRCA2 y PRT.

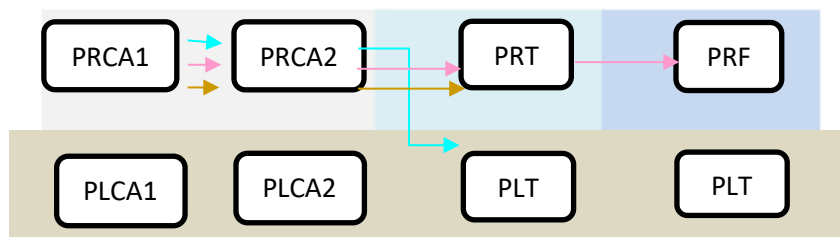


Figura 2. Secuencia de los grupos cognitivos en los diferentes grados de bachiller

Es importante notar que los grupos cognitivos tienen cierto grado de nivel cognitivo de acuerdo a sus escalas de medición de cada test.

Por ejemplo, el grupo cognitivo PRT es de mayor nivel cognitivo que el grupo PRCA1, es decir, el grupo cognitivo que se encuentra a la derecha es de mayor nivel cognitivo de acuerdo a la Figura 2, así también el grupo cognitivo PLT es de mayor nivel cognitivo que PRT esto debido que aunque los dos grupos son pensadores en transición, uno tiene mejor resultado en test de reflexión cognitiva, es decir, es del tipo pensador lento.

En los tres grados de bachiller no se encontraron casos en los que se pudiera comparar grupos cognitivos como por ejemplo PLCA1 con PRT, este tipo de casos no se puede decir que uno es de mayor nivel cognitivo que el otro, en el sentido de las escalas de medición, esto es debido a que el grupo PRT tiene mejor resultado en test de razonamiento lógico que el grupo PLCA1, pero el grupo PLCA1 tiene mejor resultado en test de reflexión cognitiva que PRT.

El diseño de las hojas de tareas

Los problemas con trampa lineal tienen el siguiente formato y fueron aplicados de una manera auto administrada, y contestados a lápiz y papel por parte de los alumnos:

Nombre: _____

Edad: _____ meses _____ Grado: _____ Grupo: _____

Resuelve el siguiente problema

La locomotora de un tren tiene 12 m de largo. Si hay 4 vagones conectados a la locomotora, el tren tiene una longitud de 52 m. Si hubiera 8 vagones conectados a la locomotora, ¿cuál sería el largo del tren?

Si para resolver el problema consideras útil un dibujo, diagrama o esquema, utiliza el recuadro de abajo.



Explica detalladamente tu respuesta

¿Cómo consideras el problema?

a) complejo b) difícil c) simple d) fácil e) sumamente sencillo

Capítulo 4

Resultados

4.1 Primero de bachiller

Con respecto al análisis realizado de los test de razonamiento lógico (TRL) y test de reflexión cognitiva (TRC) se midió el nivel cognitivo de cada uno de los estudiantes y con base en el análisis de los problemas matemáticos con trampa cognitiva se realizó una clasificación de estrategias de resolución, para poder encontrar una relación entre el nivel cognitivo de los estudiantes y su estrategia de resolución.

4.1.1 Test de reflexión cognitiva (TRC)

	Pensamiento rápido	Pensamiento lento
Frecuencia	30	3
Porcentaje	90.90 %	9.09 %

Tabla 5. Resultados del test de reflexión cognitiva de primero de bachiller.

En la Tabla 5 se muestran los resultados del test de reflexión cognitiva de 33 alumnos de primer grado de bachiller, la mayor parte de los alumnos (30) no activan el Sistema II, como menciona Kahneman (2002), este tipo de alumnos son poco analíticos, así como reflexivos y responden de una manera impulsiva. Una parte muy pequeña de alumnos (3) se encuentran en el estrato de pensador lento.

Las respuestas del test de reflexión cognitiva se mencionan a continuación.

Respuesta rápida para ítem 1 (Frederick, 2005, p.27)

La mayoría de los estudiantes en el ítem 1 restan 1.10 menos 1.0 por lo que la mayoría obtiene como respuesta .10, los estudiantes que obtienen como respuesta 2 o 1 realizan una suma porque ellos argumentan que así lo menciona el texto: “esto fue debido a que dice que cuesta un euro más, eso quiere decir que solo aumenta uno” por lo que la respuesta es 1 y para obtener 2 sólo suman 1 euro a 1.

Respuesta Lenta para ítem 1

De todo el grupo de primero un solo estudiante intentó resolver por medio de una ecuación, ya que se observan ecuaciones donde aparece involucrada la variable x que borra para después escribir su respuesta y comprueba con la siguiente suma $0.05 + 1.05 = 1.10$.

Respuesta rápida para ítem 2 (Frederick, 2005, p.27)

La respuesta más común es 100 y la estrategia de solución es la utilización de la regla de tres y para tal efecto multiplican 100×5 para después dividir entre 5, algunos estudiantes argumentan que se trata de una sucesión lógica ya que si 5 máquinas se tardan 5 minutos en fabricar 5 piezas les parece lógico que 100 máquinas tardarán 100 minutos en fabricar 100 piezas, por último otros estudiantes realizan una combinación de operaciones para dar un resultado, por ejemplo, multiplican 5×100 y como respuesta obtienen 500, este tipo de respuesta es muy variada de acuerdo a la operación y combinación de números.

Respuesta Lenta para ítem 2

Dos estudiantes argumentan que las máquinas se tardan 5 minutos, dando como indicio de argumento que se trata de máquinas que trabajan simultáneamente, por lo que no importa si son 100 máquinas, se tendrían que tardar el mismo tiempo ya que están trabajando al mismo ritmo y terminarían igual.

Respuesta rápida para ítem 3 (Frederick, 2005, p.27)

Se observa una tendencia muy marcada en la respuesta de 24, esto es debido a que los estudiantes responden inmediatamente, relacionado la palabra mitad con la operación división entre dos, por lo que la respuesta rápida es $48/2=24$.

Repuesta lenta para ítem 3

Una parte mínima de estudiantes que en este caso son dos, se detienen a analizar el problema con detalle y logran brincar la idea intuitiva de dividir, simplemente haciéndose la pregunta: ¿Qué pasa un día antes de estar completo el lago?

4.1.2 Test de razonamiento lógico (TRL)

	Pensamiento concreto [0,3]	Pensamiento en transición [4,6]	Pensamiento formal [7,10]
Frecuencia	30	3	0
Porcentaje	90.9	9.09	0

Tabla 6. Resultados del test de razonamiento lógico en primero de bachiller.

La Tabla 6 muestra los resultados del test de razonamiento lógica de 33 alumnos de primer grado de bachiller, estos resultados son parecidos con los obtenidos por investigadores como Aguilar et al. (2002), en los que concluyeron que la mayoría se encuentran en transición o en pensamiento concreto y muy pocos son formales. A continuación, se describe los resultados de TRL de acuerdo a cada uno de los esquemas de razonamiento de los que consta la prueba.

Esquemas de razonamiento	Ítems	Respuestas Correctas /33	Porcentaje %
proporcionalidad	1	6	18.1
	2	6	18.1
Control de variable	3	4	12.1
	4	5	15.1
probabilidad	5	4	12.1
	6	1	3
correlación	7	6	18.1
	8	8	24.2
combinatoria	9	1	3
	10	1	3

Tabla 7. Resultados del test de razonamiento lógico por esquemas de operación de primero de bachiller.

En la Tabla 7 se puede inferir que los esquemas de correlación y *proporcionalidad* es donde más respuestas correctas se encontraron y los esquemas de probabilidad, así como combinatoria es donde menos respuestas correctas se encontraron, por lo que en este estudio se aplicaran una diversidad de problemas matemáticos en los que la mayoría se necesite utilizar esquemas de *proporcionalidad*.

Tenemos 30 pensadores concretos de los cuales estos 30 son pensadores rápidos, y el resto que son 3, son pensadores en transición y a la vez pensadores lentos, no se encontraron pensadores formales. En conclusión, se puede decir que los estudiantes con bajo nivel cognitivo en TRC son bajos en TRL y alumnos con alto nivel cognitivo en TRC son medianamente altos en TRL como ya se mencionó en la parte de metodología y revisando los resultados de los sujetos que conforman este grado, se encontraron tres grupos cognitivos.

- Pensador rápido y pensador concreto A1 [PRCA1]
- Pensador rápido y pensador concreto A2 [PRCA2]
- Pensador lento y pensador en transición [PLT]

Como siguiente etapa tenemos la aplicación de problemas matemáticos no rutinarios de trampa cognitiva, los primeros cuatro son un caso especial de trampa cognitiva, llamados trampa lineal o ilusión de la linealidad y los últimos dos también son de ilusión de pensamiento que no están basados en la linealidad, a continuación se muestran los resultados de dichos problemas matemáticos.

Problema	Músicos	Carrera	Locomotora	Granjero	Peso	Triángulo
Caen en la trampa	9	19	21	31	25	31
Brincan la trampa	24	14	12	2	8	2
Total	33	33	33	33	33	33

Tabla 8. Frecuencia de alumnos que caen en trampa cognitiva de primero de bachiller.

La Tabla 8 muestra crecientemente cómo los alumnos tienden a caer en trampas cognitivas, en los dos primeros problemas la mayoría no presentó mayor complicación, los dos siguientes problemas aproximadamente la mitad de los alumnos, caen en la trampa cognitiva, y finalmente los últimos tres problemas la mayoría cae en la trampa.

4.1.3 Análisis del problema de Músicos

El problema menciona lo siguiente:

Un grupo de 5 músicos toca una canción en 10 minutos, otro grupo de 35 músicos tocará la misma canción ¿cuánto tiempo le tomará a este grupo tocar la canción?

Es un problema de tipo ilusión de la linealidad, la respuesta lineal esperada sería; “ $10 \times 7 = 70$ minutos” y la respuesta correcta; “10 minutos”. De acuerdo a sus estrategias de solución se encontraron las siguientes soluciones que se pueden dividir en dos tipos.

Razonamiento lineal

En esta categoría se muestra como ejemplo representativo la solución de tipo lineal, es decir, la solución utiliza el mismo razonamiento de tipo lineal, aunque pudiera variar la respuesta, ya que a veces realizan los cálculos incorrectamente.

Explica detalladamente tu respuesta.

El número de músicos se multiplica por 2 y el resultado son el tiempo que tardaron

Figura 3. Razonamiento lineal en problema de músicos en primero de bachiller.

El estudiante observa los datos y realiza predicciones de manera casi “intuitiva” sin percatarse del contexto del problema, es como si se enfocara en observar relaciones de los números sin atender las palabras, así como al contexto que acompaña al problema, y es por eso que observa la relación de que 10 es el resultado de multiplicar 5 por 2, por tanto, al enfocarse en el número 35 lo multiplica por dos para dar respuesta de 70, eso es lo que De Bock et al. (2007) llaman propiedad de la linealidad.

Otra forma de llegar al mismo resultado es la utilización de secuenciación de números, como se observa en la Figura 4.

Explica detalladamente tu respuesta.

Músicos	Minutos
5	10
10	20
15	30
20	40
25	50
30	60
35	70

Figura 4. Razonamiento lineal (a) en problema de músicos en primero de bachiller.

Otro ejemplo utilizando la propiedad multiplicativa similar lo representaría la Figura 4 que en términos de lo que De Bock et al. (2007) mencionan como propiedad multiplicativa de la linealidad sería la siguiente: *si 5 músicos tardan 10 minutos en tocar una canción, entonces, 35 (7×5) músicos tardaran 70 (7×10) minutos.*

Razonamiento no lineal

La respuesta común en esta categoría es 10 minutos, los alumnos que logran obtener la respuesta satisfactoria logran conectar una situación real o parecida con el problema, ya que la mayoría de los estudiantes escuchan canciones y tienen sus grupos favoritos.

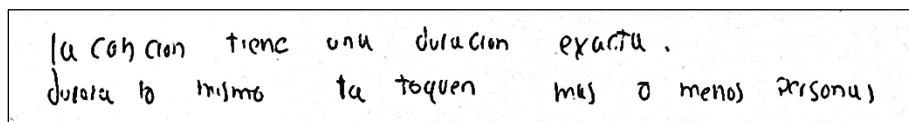


Figura 5. Razonamiento no lineal en problema de músicos de primero de bachiller.

Los alumnos tal vez se percaten de la trampa lineal en la que está diseñado este problema, ya que su familiaridad con la música les ayuda a responder correctamente el problema, su explicación es del tipo: *no importa cuántos músicos toquen una canción, la canción ya está determinada por un periodo y, por tanto, da lo mismo si son 5 o 35 músicos, tardaran el mismo tiempo en tocar la misma canción.*

En este problema la mayoría de los estudiantes no caen en la trampa, posiblemente porque no exige un alto nivel cognitivo, y el contexto es muy cercano a la mayoría de los estudiantes, los resultados que se muestran en la Tabla 9 son de acuerdo a cada uno de los grupos cognitivos, la categoría “caen en la trampa” son los sujetos que utilizaron un razonamiento lineal y la categoría “no caen en la trampa” argumentaron correctamente con un razonamiento no lineal.

Grupo	Caen-	Porcentaje-	No caen+	Porcentaje+	Sujetosxgrupo
PRCA1	9	39.13%	14	60.86%	23
PRCA2	0	0%	7	100%	7
PLT	0	0%	3	100%	3
Total	9		24		33

Tabla 9. Frecuencia por grupos, que caen en la trampa del problema de músicos de primero de bachiller.

Se observa que en todos los grupos la mayoría de sus integrantes logran brincar la trampa lineal, en la cual está enmarcado el problema. En el grupo PRC1 que es de bajo nivel cognitivo tanto en reflexión cognitiva como en razonamiento lógico, un poco menos de la mitad caen en esta ilusión de la linealidad, y en los grupos PRC2 y PLT todos sus integrantes no logran caer en esta ilusión.

4.1.4 Análisis del problema de Carrera

Problema:

Ellen y Kim están corriendo alrededor de una pista. Corren igual de rápido, pero Ellen comenzó más tarde. Cuando Ellen ha corrido 5 vueltas, Kim ha corrido 15 vueltas. Cuando Ellen ha corrido 30 vueltas, ¿cuántas ha corrido Kim?

Es un problema con trampa lineal, la respuesta lineal esperada sería; “ $30 \times 3 = 90$ vueltas” y la respuesta correcta; “ $30 + 10 = 40$ vueltas”.

Es necesario mencionar que con base en la estrategia con la cual los alumnos resolvieron el problema se obtuvieron las siguientes categorías del problema de la carrera.

Razonamiento lineal

La mayoría de los sujetos en el grupo cognitivo PRCA1 son los que muestran estrategias de razonamiento lineal como, por ejemplo, se muestra en la Figura 6:

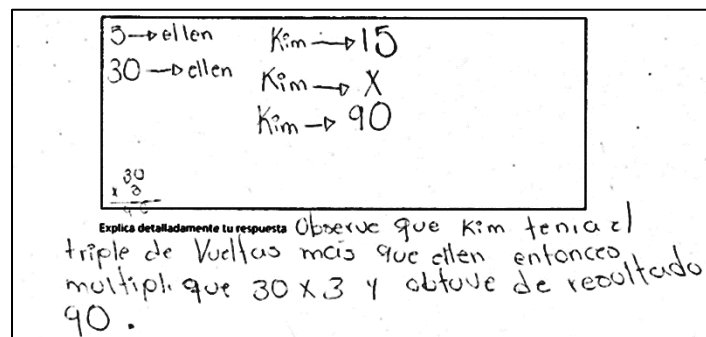


Figura 6. Razonamiento lineal sobre carrera en primero de bachiller.

La tendencia que muestran los alumnos que conforman el grupo cognitivo PRCA1 es la utilización de la regla de tres y se considera un método lineal porque como lo menciona De Bock et al. (2007) es un razonamiento del tipo “*k veces a entonces k veces b*”, es decir, el alumno interpreta de manera incorrecta el problema pensando que Kim tiene el triple de vueltas que Ellen y no se percata que sólo le lleva de ventaja 10 vueltas por lo que responde de manera presurosa argumentando que *Kim ha corrido 3 veces lo que ha corrido Ellen*.

Combinación de operaciones

Algunos alumnos de los que caen en la trampa cognitiva del grupo cognitivo PRCA1 utilizan combinación de operaciones, mezclado con indicios de razonamiento lineal un tanto confusos, por ejemplo, dan razonamientos del tipo “*el doble de vueltas*” y como respuesta $3 \times 15 = 45$ vueltas.

Razonamiento no lineal

Los sujetos que respondieron correctamente utilizaron un razonamiento no lineal, es decir, no caen en la trampa intuitiva de responder presurosamente con algún método lineal que se ejemplifica en la Figura 7.

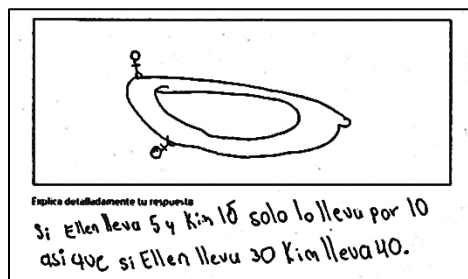


Figura 7. Razonamiento no lineal sobre carrera en primero de bachiller.

Los alumnos que utilizaron este método se percataron de una diferencia importante para resolver correctamente el problema, no lograron caer en el razonamiento impulsivo de interpretar 15 vueltas como un múltiplo de 3, sino que se tuvo un análisis más prolongado para poder visualizar las 15 vueltas como diferencia de 10 vueltas entre Kim y Ellen.

De acuerdo a la Tabla 10 se puede observar que 19 alumnos caen en la trampa cognitiva, al aplicar métodos lineales donde no corresponden en el problema de carrera, así como combinación de

operaciones que implicaron respuestas incorrectas y 14 sujetos no caen en la trampa al utilizar argumentos o métodos no lineales que los encaminó a una respuesta correcta.

Grupo	Caen-	Porcentaje-	No caen+	Porcentaje+	Sujetosxgrupo
PRCA1	18	78.26%	5	21.73%	23
PRCA2	1	14.28%	6	85.71%	7
PLT	0	0%	3	100%	3
Total	19		14		33

Tabla 10. Frecuencia por grupos, que caen en la trampa del problema de carrera de primero de bachiller.

Comparando el grupo PRCA1 con el grupo PLT, se observa de la Tabla 10 que todos los alumnos del grupo PLT que consta de alumnos con un nivel cognitivo medianamente alto (pensadores lentos y en transición) aplicaron métodos no lineales correctos, versus el grupo PRCA1 que consta de alumnos con un nivel cognitivo deficiente (pensadores rápidos y concretos) la mayoría aplicaron métodos lineales donde no corresponde.

4.1.5 Análisis del problema Locomotora

El problema menciona lo siguiente:

La locomotora de un tren tiene 12 m de largo. Si hay 4 vagones conectados a la locomotora, el tren tiene una longitud de 52 m. Si hubiera 8 vagones conectados a la locomotora, ¿cuál sería el largo del tren?

El problema es del tipo ilusión de la linealidad, esperaríamos como respuesta lineal; “ $2 \times 52 \text{ m} = 104 \text{ m}$ ” y como respuesta correcta; “ $12 \text{ m} + (8 \times 10 \text{ m}) = 92 \text{ m}$ ”.

Es necesario mencionar que con base en la estrategia con la cual los alumnos resolvieron el problema se obtuvieron las siguientes categorías del problema de locomotora.

Razonamiento lineal

Las estrategias derivadas del método lineal que se encontraron fueron las siguientes:

- Múltiplo (*k veces a entonces k veces b*)
- Regla de tres

Un 80% de alumnos que utilizaron el método lineal de múltiplo, utilizaron lo que De Bock et al. (2007) llama la propiedad multiplicativa de la ilusión de la linealidad y obtuvieron como respuesta 104 o 24 dependiendo de la comprensión del texto, pero básicamente es el mismo razonamiento.

Como ejemplo de esto, tenemos las siguientes Figuras:

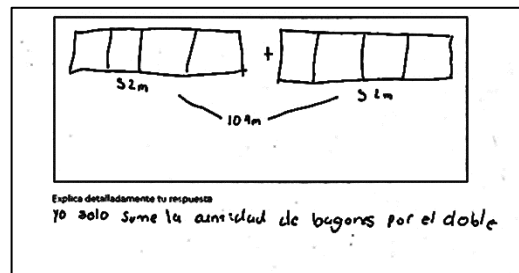


Figura 8. Razonamiento lineal sobre locomotora de primero de bachiller.

Este tipo de respuesta fue la más común que utilizaron los estudiantes como razonamiento lineal. Con respecto a la comprensión del texto los alumnos no comprendieron la diferencia entre locomotora y tren, así como “largo” y “longitud”, respectivamente, por lo que se representaron los 4 vagones de una longitud de 52 metros, entonces al preguntarles el largo del tren, ellos solo multiplicaron $52 \times 2 = 104$ o sumaron $52 + 52 = 104$.

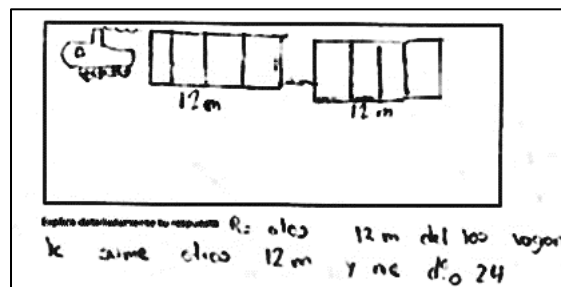


Figura 9. Razonamiento lineal (a) sobre locomotora de primero de bachiller.

En la Figura 9 se muestra un ejemplo de otra respuesta del mismo tipo de razonamiento lineal, sólo varía la forma de entender el problema; en este tipo de respuesta se representó los 4 vagones de “longitud” 12 metros, por lo que la respuesta lineal es 24.

Otra variante de método lineal es la regla de tres:

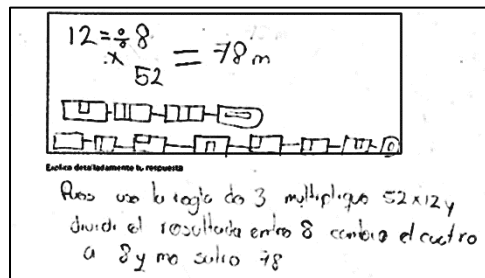


Figura 10. Razonamiento lineal (b) sobre locomotora de primero de bachiller.

Este tipo de respuesta utiliza un razonamiento lineal mal planteado, esto porque combina de una manera arbitraria tres datos del problema para poder formar la famosa regla de tres, la cual es una consecuencia de un razonamiento de tipo lineal.

Combinación de operaciones

Otra categoría de estrategias, que no necesariamente está involucrando un razonamiento lineal, es la búsqueda de una respuesta a través de operaciones aritméticas arbitrarias, con los datos que le proporciona el problema o con los datos que se deducen, pero que no modelan correctamente el problema. A este tipo de fenómeno Brousseau (1997) lo llama “contrato didáctico”. Como ejemplo de esto tenemos la Figura 11.

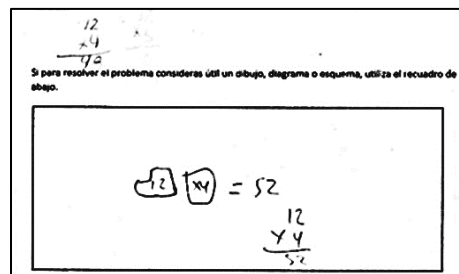


Figura 11. Combinación de operaciones sobre locomotora de primero de bachiller.

En este tipo de respuesta el estudiante se centró en realizar una multiplicación con los datos que se proporcionaron en el problema, por lo que él multiplica 12, que es el largo de la locomotora, por 4, que es el número de vagones, y así obtiene, debido a un error aritmético de multiplicación, como respuesta 52, esto muestra una falta de análisis y comprensión por parte del alumno, en este sentido el alumno se vuelve flojo y sólo da una respuesta rápida, y esta respuesta la proporciona porque, por lo acostumbrado en los cursos, está “obligado” a dar una respuesta (contrato didáctico).

Razonamiento no lineal

Los alumnos en esta categoría no caen en la trampa cognitiva que enmarca el problema y utilizan un razonamiento no lineal ejecutado correctamente, comprendiendo correctamente el problema y la diferencia entre largo y longitud, como lo muestra la Figura 12.

La locomotora de un tren tiene 12 m de largo. Si hay 4 vagones conectados a la locomotora, el tren tiene una longitud de 52 m. Si hubiera 8 vagones conectados a la locomotora, ¿cuál sería el largo del tren?

$4x + 12 = 52 - 12$ $8(10) + 12 =$
 $4x = 40$ $80 + 12 = 92$
 $x = 10$

Si para resolver el problema consideras útil un dibujo, diagrama o esquema, utiliza el recuadro de abajo.

Explica detalladamente tu respuesta

Utilizo ecuación

$x = \text{cada vagón}$

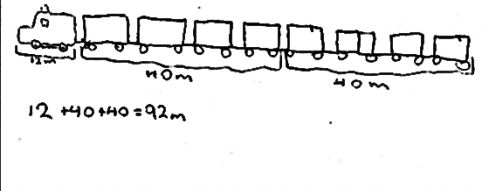
$12 = \text{locomotora}$

$52 = \text{longitud total en el primer caso}$

$92 = \text{longitud total en el 2do caso}$

Figura 12. Razonamiento no lineal sobre locomotora de primero de bachiller.

Como ejemplo representativo de esta categoría un alumno llegó a comprender la diferencia entre largo y longitud de la siguiente manera; a 12 lo corresponde con el largo de la locomotora y 52 lo corresponde con la longitud “total”, por lo que él deduce que 40 es la longitud de los cuatro vagones, y que cada vagón lo puede representar con el símbolo x , y así poder encontrar la longitud de un solo vagón que es 10 metros, por lo tanto, multiplica los 8 vagones por los 10 metros de cada vagón y lo suma al largo de la locomotora.



$12 + 40 + 40 = 92m$

Explica detalladamente tu respuesta

R: En el problema se muestra que la locomotora de un tren tiene 12m de largo y aparte dice que hay 4 vagones conectados a la locomotora el tren tiene una longitud de 52m entonces con 4 vagones cualquiera el largo es 92m

Figura 13: Razonamiento no lineal (a) sobre locomotora de primero de bachiller

La Figura 13 muestra otro ejemplo de una comprensión correcta del problema. Los sujetos en esta categoría no caen en la trampa y tienen como respuesta común 92 m deduciendo que cada vagón tiene una longitud de 10 m y sabiendo que la locomotora es una parte del tren que mide 12 m.

En la Tabla 11 se puede observar que más de la mitad de los estudiantes utilizaron un método lineal que no era aplicable en el problema de Locomotora y se presenta el rendimiento de cada uno de los grupos cognitivos. La categoría caen en la trampa abarca los sujetos que utilizaron razonamiento lineal, así como combinación de operaciones y la categoría no caen en la trampa engloba a los sujetos con razonamiento no lineal.

Grupo	Caen-	Porcentaje-	No caen+	Porcentaje+	Total
PRCA1	16	69.56%	7	30.43%	23
PRCA2	5	71.42%	2	28.57%	7
PLT	0	0%	3	100%	3
Total	21		12		33

Tabla 11. Frecuencia por grupos, que caen en la trampa del problema de locomotora de primero de bachiller.

Comparando los grupos extremos, grupo PRCA1 y grupo PLT se puede observar que aproximadamente un 70% de los estudiantes que conforman el grupo PRCA1 caen en la trampa cognitiva y los alumnos que conforman el grupo PLT el 100% no cae en la trampa lineal, lo que quiere decir que los estudiantes con pensamiento lento y pensamiento en transición son los que mejor desempeño tienen en este problema.

4.1.6 Análisis del problema Granjero

El problema menciona lo siguiente:

El granjero Carlos necesita aproximadamente 8 horas para abonar un terreno cuadrado de 200 m de lado. ¿Cuántas horas necesitará para abonar un terreno cuadrado de 600 m de lado?

El problema tiene una trampa lineal, la respuesta lineal esperada es; “ $8 \times 3 = 24$ horas” y la respuesta correcta es; “ $9 \times 8 = 72$ horas”. A continuación, se describen las categorías de acuerdo al tipo de respuesta que se encontró.

Razonamiento lineal

Del total de sujetos que utilizan el razonamiento lineal, la estrategia que utilizó un 95% de alumnos, es el método lineal que corresponde a la propiedad multiplicativa de la linealidad “si k veces a entonces k veces b ” y la respuesta común es 24. El 5% restante utilizó el mismo tipo de razonamiento lineal, pero en lugar de multiplicar las horas (8) por el incremento (3 veces) del terrero, se multiplicaron otras cantidades.

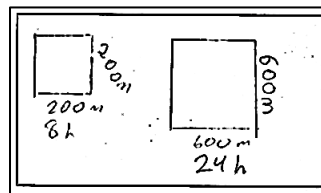


Figura 14. Razonamiento lineal sobre granjero de primero de bachiller.

En este tipo de problema ningún estudiante se percató que si las dimensiones crecen a lo largo también deben crecer a lo ancho la misma cantidad de veces, es por esta razón que la mayoría aplicó la propiedad lineal multiplicativa, es decir, si un terreno cuadrado de 200 m de lado necesita 8 horas para abonarlo, entonces un terreno que crece tres veces su lado se necesitaría el triple de horas, por lo tanto, al aplicar esta propiedad los sujetos responden presurosamente “24 horas”.

Existen otras respuestas, aunque en menor número (5%) también utiliza el mismo método lineal

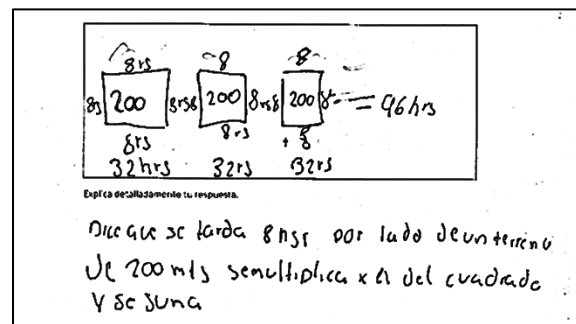


Figura 15. Razonamiento lineal(a) sobre granjero de primero de bachiller.

En este resultado el alumno construye el cuadrado que tiene de lado 8 horas, obtiene el perímetro que es 32 y lo suma tres veces por lo que obtiene como respuesta 96 horas.

Razonamiento no lineal

La estrategia que se utilizó en este problema es una variante de la regla de tres, aunque la regla de tres es una estrategia para resolver problemas de proporción directa o inversa y es un método lineal, se encuentra en esta categoría por la forma de abordar el problema, que a continuación se explica:

Explica detalladamente tu respuesta.

$8 \times 8 = 64$
 $8 - x = 7600$
 $x = \frac{8 \times 3600}{400}$
 $x = \frac{28800}{400}$
 $x = 72 \text{ h}$

$8 \times 8 = 64$
 $6 \times 7600 = 45600$

Figura 16: Razonamiento no lineal sobre granjero de primero de bachiller.

Por lo que se observa en la Figura 16 parece que la idea fue utilizar una regla de tres, pero no al relacionar $8 \times 600 / 200$ sino al relacionar 8, 400 y 3600, que es el área del cuadrado que creció el triple del primero, por lo que comprende que el crecimiento no sólo es en una dimensión, sino en las dos, es por esta razón que se consideró en esta categoría. Otro sujeto simplemente multiplicó lo siguiente: $9 \times 8 = 72$.

En la Tabla 12 se observa que este problema es donde la mayoría de los estudiantes caen en la trampa cognitiva, por tratarse de un problema que exige un mayor nivel cognitivo por el concepto de área y sus dimensiones implícitas, “largo” y “ancho”. En la Tabla 12 se muestran los datos con la frecuencia que los grupos cognitivos caen o no en la trampa del problema. En la categoría caen en la trampa se encuentran el razonamiento de tipo lineal y en la categoría no caen se encuentran los razonamientos de tipo no lineal.

Grupo	Caen-	Porcentaje-	No caen+	Porcentaje+	Total
PRCA1	23	100%	0	0%	23
PRCA2	7	100%	0	0%	7
PLT	1	33.3%	2	66.6%	3
Total	31		2		33

Tabla 12. Frecuencia por grupos, que caen en la trampa del problema de granjero de primero de bachiller.

En la Tabla 12 se puede deducir que el único grupo cognitivo que no cae completamente en la trampa lineal es el grupo PLT, ya que la mayoría de los sujetos que conforman este grupo cognitivo el cual consta de alumnos con un nivel cognitivo medianamente alto en TRC y TRL utilizan un razonamiento no lineal.

4.1.7 Análisis del problema peso

El problema dice lo siguiente:

Si una pelota de basketball pesa $\frac{1}{2}$ kilo más la mitad de su propio peso, ¿cuánto pesa?

Este problema no es del tipo trampa lineal o ilusión de la linealidad, sino un problema de trampa cognitiva que radica en la comprensión del texto, como lo menciona su autor Gardner (1986) el problema se podría enfocar de esta manera: “*la pelota de basketball pesa $\frac{1}{2}$ kg. La mitad de su peso debe ser $\frac{1}{4}$ de kg. Sumamos estos valores y obtenemos esta respuesta $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ de kilo*”.

El problema radica en descubrir el peso de la pelota y si resulta de tres cuartos entonces no puede ser de medio kilo como se afirmó al principio. La respuesta correcta se podría resolver realizando un dibujo que modele correctamente el problema o una ecuación (x es la mitad de peso de la pelota, entonces $\frac{1}{2} + x = x + x$) de dicho problema para obtener como resultado 1 kg.

Para hacer una distinción más específica entre los grupos cognitivos y evaluar las estrategias con las que se realiza esta tarea, se utilizó la taxonomía *Mathematical Assessment Task Hierarchy* de Smith et al. (1996). Algunas categorías no se muestran ya que no aplican para este tipo de tarea en particular, por ejemplo, la categoría de *conocimiento factual* no aplica porque no pide

explícitamente recordar alguna definición. Al igual que en los problemas de trampa lineal se hizo una clasificación de las estrategias con la diferencia de que en este problema no se encontraron categorías del tipo razonamiento lineal, combinación de operaciones y razonamiento no lineal, sino que se clasificó en base la taxonomía *MATH*.

	PRCA1(23)	PRCA2(7)	PLT(3)	Total
Conocimiento factual				
Recordar alguna fórmula o definición.	No aplica	No aplica	No aplica	
Comprensión				
Comprender el significado de la fórmula o de la definición.	No aplica	No aplica	No aplica	
Procedimiento de rutina				
Realizan cálculos, operaciones	18	5	2	25
Transferencia de la información				
Transforma información de una forma a otra.	5	2	1	8
Aplicación en situaciones nuevas				
Elegir y aplicar algoritmos apropiados	0	0	0	

Tabla 13. Análisis del problema peso por medio de *MATH* de cada uno de los grupos cognitivos

La Tabla 13 muestra los dos niveles de la taxonomía *MATH* en donde es aplicable el problema, en el nivel de *procedimiento de rutina* que fueron 25 sujetos que aplicaron operaciones y en *transferencia de la información* fueron 8 sujetos que están distribuidos entre los diferentes grupos cognitivos, por ejemplo, el grupo cognitivo PRCA1 que consta de 23 sujetos de los cuales 18 realizan cálculos rutinarios y 5 reconocen una transformación de la información.

Procedimiento de rutina

Se refiere al uso de operaciones, de las cuales encontramos los siguientes tipos de operaciones que se muestran en la Tabla 14.

	Característica de la respuesta	Frecuencia y grupo	Total
Respuesta Correcta	Respuesta "1" con operaciones. No se encontró registro	0	0
Respuesta Incorrecta	750 g. convierte $\frac{3}{4}$ a gramos.	2 del grupo PRCA1 1 del grupo PRCA2	3
	75 g. convierte $\frac{3}{4}$ a gramos	2 del grupo PRCA1 1 del grupo PRCA2	3
	$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$	13 del grupo PRCA1 3 del grupo PRCA2 2 del grupo PLT	18
	$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$	1 del grupo PRCA1	1
Sin respuesta			

Tabla 14. Clasificación de respuestas del problema peso en procedimiento de rutina en primero de bachiller.

Los sujetos que interpretaron incorrectamente el problema utilizaron el razonamiento de tener un medio y sumarle un cuarto, por consecuencia realizaron operaciones aritméticas, de los cuales se puede ver la clasificación en la Tabla 14. Dos sujetos del grupo cognitivo PRCA1 y un sujeto del grupo PRCA2 realizaron operaciones correctas, al querer convertir $\frac{3}{4}$ de kilogramo en gramos enteros, llegando a la respuesta de 750 gramos. Dos sujetos del grupo PRCA1 y un sujeto del grupo PRCA2 realizaron la conversión incorrecta llegando a la respuesta de 75 gramos, debido a manipulación incorrecta de números o la incorrecta equivalencia de kilogramos a gramos. Los sujetos que obtuvieron la respuesta incorrecta $\frac{3}{4}$, aunque su forma de operar es correcta, se encuentran distribuidos en los cuatro grupos cognitivos de acuerdo a la Tabla 14 y un estudiante del grupo PRCA1 obtuvo como respuesta $\frac{1}{2}$ debido a la operación incorrecta entre fracciones.

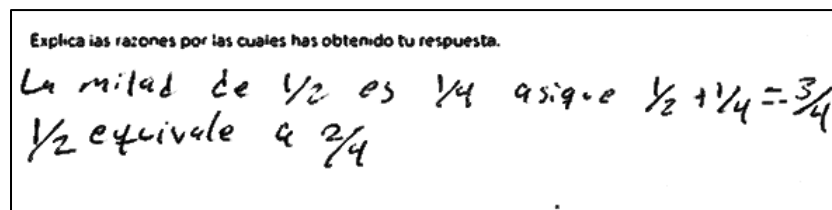


Figura 17. Lectura incorrecta sobre problema de pelota en primero de bachiller.

La Figura 17 es un ejemplo de respuesta donde el alumno interpreta el problema de una manera incorrecta, esto porque como se menciona que la pelota pesa medio kilo más la mitad de su propio peso, es por esto que primero obtienen la mitad de un medio, que es un cuarto y la suman para obtener tres cuartos, no se percatan de que este tipo de razonamiento lleva a una contradicción, ya que se busca el peso de la pelota y si resulta de tres cuartos, entonces no puede ser de medio kilo como se afirma al principio. En esta categoría de uso rutinario de procedimientos se muestra que la mayoría realiza correctamente la suma de dos fracciones entre los que se encuentran distribuidos todos los grupos, pero existen aún dificultades en la conversión de kilogramos a gramos, y es el grupo de bajo nivel cognitivo el que muestra esta dificultad.

Transferencia de la Información.

	Característica de la respuesta	Frecuencia de grupo	Total
Respuesta Correcta	Transforma el problema	0	0
	Modela correctamente		
	Representa el problema en un modelo gráfico	1 sujeto del grupo PLT	1
Parcialmente Correcta	Sólo escribe la respuesta 1	5 sujetos del grupo PRCA1	7
	sin un argumento muy convincente	2 sujetos del grupo PRCA2	
Respuesta Incorrecta	No se encontró registro	0	0

Tabla 15. Clasificación de respuestas del problema peso en Transferencia de la información en primero de bachiller.

Con respecto a este nivel de la taxonomía *MATH* sólo un alumno del nivel PLT (nivel medianamente alto) pudo explicar de forma esquemática utilizando un dibujo en el que representa la situación planteada.

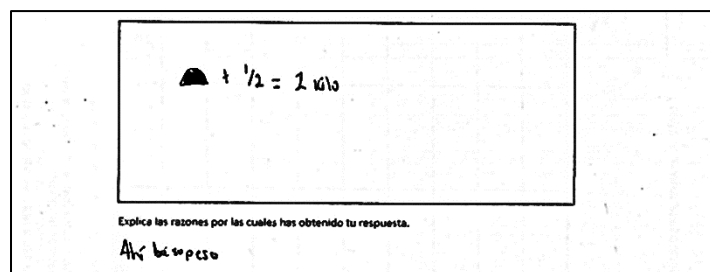


Figura 18. Lectura correcta sobre problema de pelota en primero de bachiller.

Ningún estudiante se encontró con indicios de realizar la representación algebraica deseada para solucionar el problema. La mayoría de respuestas correctas mencionan que es 1 kg pero sin utilizar una ecuación algebraica que modelara la situación.

Resuelve el siguiente problema

Si una pelota de basketball pesa $\frac{1}{2}$ kilo más la mitad de su propio peso, ¿cuanto pesa? 1 kilo

Si consideras útil un dibujo, diagrama o esquema para resolver el problema utiliza el recuadro de abajo

Explica las razones por las cuales has obtenido tu respuesta

Por que es la mitad de su propio peso más 1g que mide

Figura 19. Respuesta correcta no convincente sobre problema de pelota en primero de bachiller.

Ningún estudiante formula una ecuación algebraica ($\frac{1}{2} + x = x + x$), pero si dan como respuesta un kilo. Ellos argumentan que la pelota que es un entero, pesa la mitad de ella más medio kilo, por lo que ellos argumentan que es lógico que media pelota pese medio kilo, como ejemplo el argumento de la Figura 19: “*Porque es la mitad de su propio peso más la otra mitad*”. Pareciese que ellos ya están considerando que la pelota pesa un kilogramo, pero no proporcionan más argumentos para asegurar tal afirmación, lo único que se consideró para esta clasificación es la respuesta y el argumento que mencionan, por lo que se consideró como respuesta parcialmente correcta, pero se incluye en la categoría de sujetos que no caen en trampa.

Por lo tanto, la diferencia de las respuestas correctas entre estudiantes de un grupo cognitivo bajo (PRCA1) con uno medianamente alto (PLT) radica en la *transferencia de la información*. Un estudiante del nivel cognitivo medianamente alto utiliza una forma diferente de representar el problema, es decir, transforma información verbal a gráfica, mientras que el sujeto de nivel cognitivo bajo utiliza parcialmente una transformación verbal a numérica pero sin utilización del método algebraico.

En este problema los resultados son muy parecidos al anterior (granjero) aproximadamente el 76% de los alumnos caen en la trampa. La categoría *procedimiento de rutina de la taxonomía MATH* está comprendida por los sujetos que obtuvieron una respuesta incorrecta y están agrupados en la categoría caen en la trampa de la Tabla 16. La categoría *transformación de la información* está

comprendida por las respuestas correctas y se les consideró en la categoría no caen en la trampa de la Tabla 16.

Grupo	Caen-	Porcentaje-	No caen+	Porcentaje+	Total
PRCA1	18	78.26%	5	21.73%	23
PRCA2	5	71.42%	2	28.57%	7
PLT	2	66.66%	1	33.33%	3
Total	25		8		33

Tabla 16. Frecuencia por grupos, que caen en la trampa del problema de peso de primero de bachiller.

Observando la Tabla 16 se encuentra que todos los grupos, en promedio más de la mitad de los alumnos que lo conforman, caen en la ilusión cognitiva del problema y el grupo PRCA1 (estudiantes de bajo nivel cognitivo) es el que presenta el mayor porcentaje de integrantes que caen en la trampa.

4.1.8 Análisis del problema del triángulo

Problema:

Un triángulo tiene lados de 17, 35 y 52 centímetros. ¿Cuál es su superficie en centímetros cuadrados?

Para este análisis se utiliza la taxonomía MATH, ya que el problema del triángulo es una tarea no rutinaria, que guarda cierta trampa cognitiva, en la que se le pide al estudiante calcular el área o superficie de dicho triángulo. La trampa cognitiva radica en que el estudiante va obtener el área del supuesto triángulo tomando como altura alguno de los datos que le proporciona el problema y la respuesta correcta sería que el estudiante se percatara de que no se puede formar un triángulo con los datos propuestos por el problema y en consecuencia no hay superficie.

Para su análisis se describen las categorías del grupo A (conocimiento factual, comprensión y uso rutinario de procedimientos y B (transferencia de información y aplicación en situaciones nuevas). La tarea que exige el problema es la obtención de una supuesta superficie que en realidad no existe,

por lo que esta tarea no fue diseñada para saber si cierto sujeto puede definir apropiadamente el área de un triángulo, por tal razón conocimiento factual y comprensión no aplican para este tipo de tarea matemática.

	PRCA1(23)	PRCA2(7)	PLT(3)	Total
<i>Conocimiento factual</i>				
Recordar la fórmula del área del triángulo	No se consideró	No se consideró	No se consideró	
<i>Comprensión</i>				
Comprender el significado de la fórmula	No se consideró	No se consideró	No se consideró	
<i>Procedimiento de rutina</i>				
Realizan cálculos con base x altura	23	6	2	31
<i>Transferencia de la información</i>				
Reconoce la inaplicabilidad de una fórmula en un contexto	0	1	1	2
<i>Aplicación en situaciones nuevas</i>				
Elegir y aplicar algoritmos apropiados	0	0	0	

Tabla 17: Análisis del problema triángulo por medio de MATH de cada uno de los grupos cognitivos.

Como se observa en la Tabla 17 la mayoría de los estudiantes se encuentran en los niveles de procedimiento de rutina, ya que es un procedimiento que no requiere alto nivel cognitivo para solucionar problemas, solamente dos estudiantes, uno del grupo cognitivo PRCA2 y otro del grupo PLT pudieron percatarse de que la fórmula tradicional del área de un triángulo no es aplicable para esta tarea. Ningún estudiante se encuentra en el nivel de aplicación en situaciones nuevas, es decir no se encontró ningún indicio de que alguien pudiera usar cierta deducción matemática para percatarse que no hay superficie.

Procedimiento de rutina:

	Característica del problema	Frecuencia de grupo	Total
Respuesta Correcta	La superficie es cero verificando de una forma operatoria	0	0
Respuesta Incorrecta	Realizan cálculos utilizando la fórmula tradicional $\frac{bxh}{2}$	17 del grupo PRCA1 5 del grupo PRCA2 2 del grupo PLT	24
	Realizan cálculos utilizando el perímetro	3 del grupo PRCA1 1 del grupo PRCA2	4
	Realizan cálculos con la fórmula tradicional y además son incorrectos	3 del grupo PRCA1	3

Tabla 18. Clasificación de respuestas del problema triángulo en procedimiento de rutina en primero de bachiller.

Este nivel de la taxonomía *MATH* se refiere al uso operatorio. Para este problema en particular los sujetos que respondieron de manera incorrecta utilizaron dos tipos de cálculo, uno calculando el área con la fórmula de base por altura entre dos y el otro cálculo para medir el perímetro.

Handwritten student work showing the calculation of the area of a triangle using the formula $\frac{b \times h}{2}$. The calculation is $\frac{52 \times 35}{2} = 910$. Below the calculation, the student writes "Explica las razones por las cuales has obtenido tu respuesta." and "respeto la formula $\frac{b \times a}{2}$ ".

Figura 20. Fórmula tradicional de área aplicada al problema de triángulo en primero de bachiller

En la Figura 20 se muestra un ejemplo representativo en el que el sujeto toma como base 52 y como altura 35 para calcular el área del triángulo y dar como respuesta **910**, en este tipo de respuesta los cálculos son correctos pero la estrategia es incorrecta ya que para aplicar la fórmula tradicional de triángulo necesitan conocer la altura, la cual no está explícita en el problema.

Un error conceptual que se encontró es no distinguir la diferencia entre área y perímetro, como ejemplo tenemos la Figura 21.

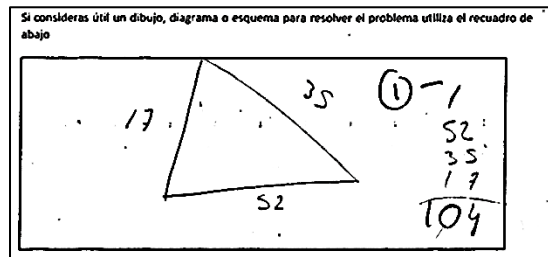


Figura 21. Error conceptual en el problema de triángulo en primero de bachiller

En la Figura 21 el sujeto confunde el cálculo de área con el de perímetro, ya que suma todos los lados del supuesto triángulo y obtienen como respuesta **104**.

Otra respuesta que se encontró con características diferentes se muestra en la Figura 22.

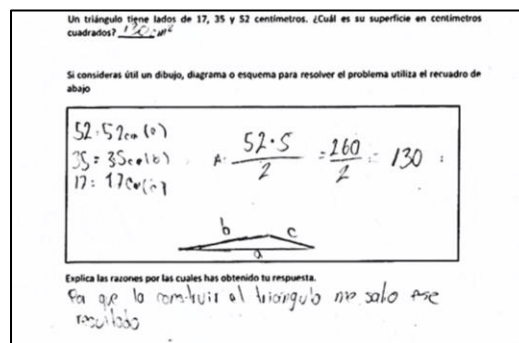


Figura 22. Fórmula tradicional de área (a) aplicada al problema de triángulo en primero de bachiller.

La Figura 22 es un ejemplo representativo del tipo de respuesta que se obtiene utilizando la idea de calcular el área de un triángulo con la fórmula tradicional (base por altura entre dos). Se observa que forma el triángulo con los datos explícitos e implícitos que se obtienen del problema, utilizando de manera deliberada los datos del problema. La diferencia con el primer ejemplo radica en la utilización de la altura ya que no la considera directamente como el dato proporcionado del problema. En esta clasificación de respuestas están las que se consideran por una inadecuada manipulación de operaciones o como en este ejemplo por una ejecución confusa, ya que no se entiende la deducción del número 5.

Transferencia de la información:

	Característica del problema	Frecuencia del grupo	Total
Respuesta Correcta	Reconoce que no puede aplicar directamente la fórmula $\frac{bxh}{2}$ y visualiza que no hay superficie	1 del grupo <i>PLT</i>	1
Respuesta parcialmente correcta	Menciona que no hay superficie por argumentos empíricos	1 del grupo <i>PRCA2</i>	1
Respuesta incorrecta			

Tabla 19. Clasificación de respuestas del problema triángulo en transferencia en primero de bachiller.

Con base en este nivel de la taxonomía *MATH* se pudieron encontrar indicios de dos sujetos en los que de acuerdo a la naturaleza de este problema pudieron identificar la no aplicabilidad de la fórmula tradicional del triángulo, en el sentido de no aplicarla sin antes conocer la naturaleza de los datos.

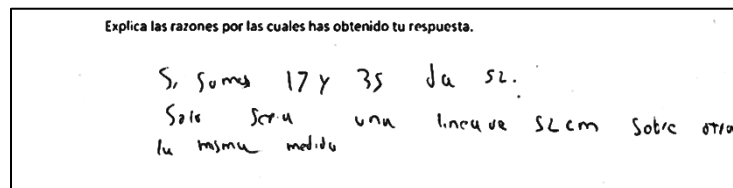


Figura 23. No aplicabilidad de la fórmula tradicional al problema de triángulo en primero de bachiller.

En este ejemplo que se muestra en la Figura 23 el sujeto se percató de que la suma de 17 más 35 da como resultado 52 que es uno de los lados del triángulo por lo que eso le permitió argumentar lo siguiente: "Solo será una línea sobre otra de la misma medida" por tanto obtiene como respuesta: la superficie de dicho triángulo es cero.

Otro sujeto argumenta de una forma empírica, es decir basada en tratar de construir el triángulo con los datos.

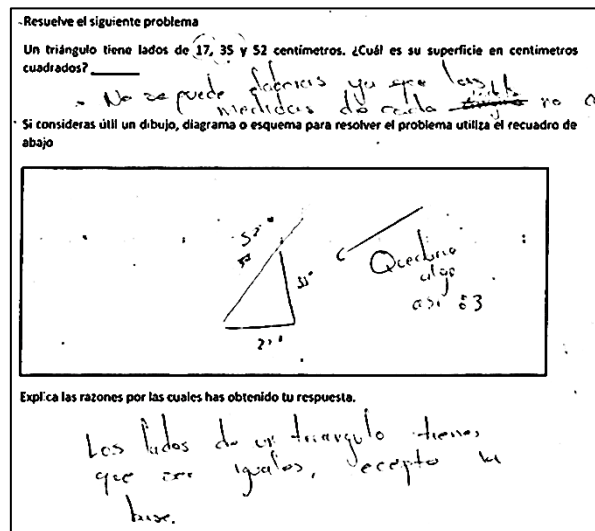


Figura 24. No aplicabilidad de la fórmula tradicional (a) al problema de triángulo en primero de bachiller.

En esta Figura se muestra como el sujeto trata de construir el triángulo y se percata con un solo caso de construcción de que no va ser posible construir el triángulo con los datos proporcionados, sin embargo, lo que argumenta: “*los lados de un triángulo deben ser iguales*”, nos da indicios de pensar en lo siguiente: ¿El sujeto tiene la concepción de que para construir un triángulo debe ser equilátero?, esta pregunta no puede ser respondida en este momento, lo único que se consideró para esta clasificación es la no aplicabilidad de la fórmula base por altura entre dos.

Más del 90% de sujetos caen en la trampa cognitiva, la categoría *procedimiento de rutina* implicó respuestas incorrectas de acuerdo a la naturaleza del problema y *transferencia de la información* a su vez implicó respuesta correcta o parcialmente correcta, las respuestas incorrectas se agrupan en la categoría caen en la trampa y respuestas correctas en la categoría no caen en la trampa.

Grupo	Caen-	Porcentaje-	No caen+	Porcentaje+	Total
PRCA1	23	100%	0	0%	23
PRCA2	6	85.71%	1	14.28%	7
PLT	2	66.66%	1	33.33%	3
Total	31		2		33

Tabla 20: Frecuencia por grupos, que caen en la trampa del problema de triángulo de primero de bachiller.

Como se puede observar en la Tabla 20 el mayor porcentaje de sujetos que caen en la trampa se refiere al grupo cognitivo PRCA1 ya que todos sus integrantes no se percataron de la no existencia del triángulo a diferencia de los grupos restantes que por lo menos un integrante, de alguna manera empírica o numérica se percató de la no existencia del triángulo.

4.2 Tercero de bachiller

Se aplicó el test de razonamiento lógico (TRL) y el test de reflexión cognitiva (TRC) a un grupo de tercero de bachiller para cuantificar el nivel cognitivo y poder relacionarlo con su desempeño en la resolución de los problemas matemáticos que fueron aplicados.

4.2.1 Test de reflexión cognitiva (TRC)

	Pensamiento rápido	Pensamiento lento
Frecuencia	32	0
Porcentaje	100	0

Tabla 21. Resultados del test de reflexión cognitiva de tercero de bachiller.

Los resultados concuerdan con algunos investigadores (Aguilar et al., 2002), al mencionar que la mayor parte de los estudiantes se encuentran en el estadio de pensador rápido, es decir carecen de un cierto tipo de reflexión o pensamiento crítico. En la Tabla 21 se encuentra la clasificación del tipo de pensadores de acuerdo al test de reflexión cognitiva, se puede observar que todos los estudiantes son pensadores rápidos.

4.2.2 Test de Razonamiento Lógico (TRL)

	Pensamiento concreto [0,3]	Pensamiento en transición [4,6]	Pensamiento formal [7,10]
Frecuencia	23	9	0
Porcentaje	71.87	28.12	0

Tabla 22. Resultados del test de razonamiento lógico en primero de bachiller.

La Tabla 22 muestra los resultados del test de razonamiento lógico de 32 alumnos de tercer grado de bachiller, los resultados son parecidos a los obtenidos en primer grado de bachiller, con un pequeño incremento en el estrato de pensador en transición. En seguida se describen los resultados del test de razonamiento lógico por cada uno de los esquemas de razonamiento.

Esquemas de razonamiento	Ítems	Respuestas Correctas /32	Porcentaje %
proporcionalidad	1	12	37.5
	2	12	37.5
Control de variable	3	7	21.8
	4	9	28.1
probabilidad	5	2	6.25
	6	0	0
correlación	7	7	21.8
	8	14	43.75
combinatoria	9	6	18.75
	10	3	9.37

Tabla 23. Resultados del test de razonamiento lógico por esquemas de operación de tercero de bachiller.

En la Tabla 23 se puede inferir que los esquemas de correlación y *proporcionalidad* es donde más respuestas correctas se encontraron y los esquemas de probabilidad, así como combinatoria es donde menos respuestas correctas se encontraron, lo cual induce de una manera prudente a trabajar con problemas de proporcionalidad.

Los resultados obtenidos en ambas pruebas están indicando que no se encontraron pensadores lentos ni pensadores formales, por lo que se realizó una sub clasificación en base a la combinación de los parámetros del test de reflexión cognitiva y razonamiento lógico que se describen en la sección de metodología, por lo tanto, para este grupo de bachillerato, los grupos cognitivos que se encontraron fueron los siguientes:

- Pensador rápido y concretoA1 [PRCA1]
- Pensador rápido y concretoA2 [PRCA2]
- Pensador rápido y en transición [PRT]

4.2.3 Análisis del problema músicos

El problema menciona lo siguiente:

Un grupo de 5 músicos toca una canción en 10 minutos, otro grupo de 35 músicos tocará la misma canción ¿cuánto tiempo le tomará a este grupo tocar la canción?

Es un problema de tipo ilusión de la linealidad, la respuesta lineal esperada sería; “ $10 \times 7 = 70$ minutos” y la respuesta correcta; “10 minutos”. De acuerdo a sus estrategias de solución se encontraron las siguientes soluciones que se pueden dividir en dos tipos.

Razonamiento lineal

En ellos entrarían razonamientos del tipo *si con 5 músicos se tardan 10 minutos, entonces 35 músicos se tardarían siete veces el tiempo que se tardan 5 músicos*”. Por consecuencia obtienen como respuesta común 70 (7×10), aunque también se incluyen otras respuestas diferentes, a causa de una manipulación incorrecta de operaciones, e igualmente utilizando el mismo razonamiento, en consecuencia, este tipo de razonamiento implicó una respuesta incorrecta.

Razonamiento no lineal

En esta categoría se encuentran los sujetos que obtuvieron como respuesta satisfactoria 10 minutos y el razonamiento es el siguiente: *una canción está determinada por un tiempo fijo por lo que la pueden tocar 5 o 35 músicos y tardarían el mismo tiempo en tocarla*. Este tipo de razonamiento tuvo como consecuencia la respuesta correcta.

En la Tabla 24 se muestra la frecuencia absoluta de quienes no logran resolver con satisfacción (caen en la trampa) y quienes si logran resolver con satisfacción (brincan la trampa) el problema de músicos en cada uno de los grupos cognitivos.

Grupo	Caen-	Porcentaje-	No caen+	Porcentaje+	Total
PRCA1	8	57.14%	6	42.85%	14
PRCA2	4	40%	6	60%	10
PRT	1	12.5%	7	87.5%	8
Total	13		19		32

Tabla 24. Frecuencia por grupos, que caen en la trampa del problema de músicos de tercero de bachiller.

De acuerdo a la frecuencia se observa que la mayoría de los sujetos no caen en la trampa y el resto si caen en la trampa, con respecto a cada uno de los grupos el mayor porcentaje de sus integrantes logran resolver con éxito o “brincar la trampa”, excepto el grupo PRCA1, los resultados son muy parecidos con el grupo de primero de bachiller, esto se debe posiblemente a que el contexto del problema es muy cercano al de los sujetos.

4.2.4 Análisis del problema de Locomotora

El problema menciona lo siguiente:

La locomotora de un tren tiene 12 m de largo. Si hay 4 vagones conectados a la locomotora, el tren tiene una longitud de 52 m. Si hubiera 8 vagones conectados a la locomotora, ¿cuál sería el largo del tren?

El problema es del tipo ilusión de la linealidad, esperaríamos como respuesta lineal; “ $2 \times 52 \text{ m} = 104 \text{ m}$ ” y como respuesta correcta; “ $12 \text{ m} + (8 \times 10 \text{ m}) = 92 \text{ m}$ ”.

Es necesario mencionar que con base en la estrategia con la cual los alumnos resolvieron el problema se obtuvieron las siguientes categorías del problema de locomotora.

Razonamiento lineal

Los estudiantes que razonaron linealmente ante este tipo de problema obtuvieron diferentes respuestas incorrectas, ya que su esencia primordial fue el método lineal, a continuación, mostraré algunos ejemplos de este tipo de razonamiento y sus variantes con sus respectivas respuestas.

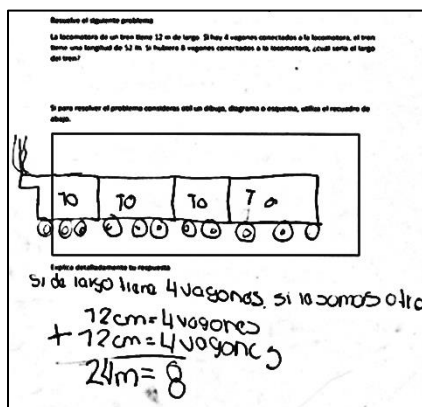


Figura 25. Razonamiento lineal sobre locomotora de tercero de bachiller.

Los estudiantes en esta categoría que obtuvieron como respuesta incorrecta 24 m pertenece al grupo cognitivo PRCA2, es decir, son pensadores rápidos. La respuesta de 24 m es una respuesta rápida en el sentido del poco análisis y reflexión que llevan para comprender el problema y percatarse de la trampa cognitiva.

De acuerdo a la representación gráfica y al cálculo que observa en la Figura 25 el razonamiento fue el siguiente:

Para $4 + 4$ vagones conectados necesitamos $12m + 12m$ de longitud. Este razonamiento es de tipo lineal utilizando la propiedad de la suma lineal. Otra respuesta de tipo lineal es la siguiente:

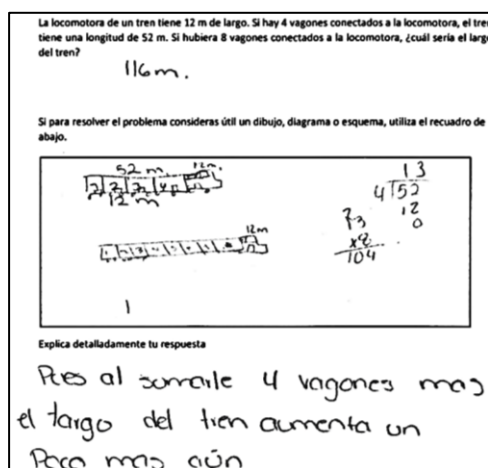


Figura 26. Razonamiento lineal(a) sobre locomotora de tercero de bachiller.

La respuesta incorrecta es 116, en la Figura 26 se argumenta lo siguiente:

“Pues al sumarle 4 vagones más el largo del tren aumenta un poco más”.

De acuerdo a lo que explica como respuesta, a las operaciones que realiza y a su representación gráfica, el estudiante comprende que la longitud de los cuatro vagones es 52 metros por lo que divide 52 entre 4 y obtienen 13, que después multiplica por los 8 vagones para obtener 104 y por ultimo suma los 12 metros a 104 para finalmente dar respuesta de 116. En este tipo de operaciones está implícita la utilización de la propiedad lineal multiplicativa, ya que en la operación se multiplica por ocho, que sería equivalente a multiplicar el doble de 4 vagones.

Otros razonamientos

En esta categoría se encuentran dos respuestas, la primera es 52 m y la segunda es 100 m o 96 m.

La primera respuesta fue común para estudiantes que se encuentran entre los tres diferentes grupos cognitivos su respuesta se presenta en la Figura 27.

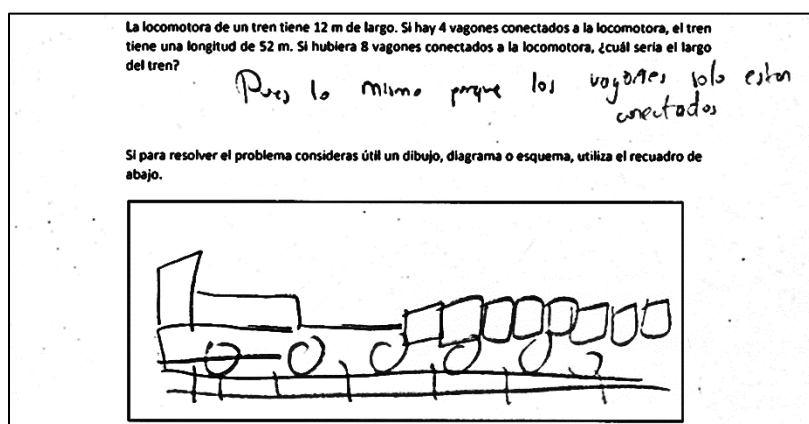


Figura 27: Otro razonamiento sobre locomotora de tercero de bachiller.

En el argumento que se observa en la Figura 27 cuando se le pide al alumno explicar su respuesta, menciona lo siguiente:

“Pues lo mismo porque los vagones solo están conectados”.

Aunque la respuesta no está escrita explícitamente con un número, se sobreentiende que la respuesta que el alumno proporciona es 52 m, pero lo esencial del argumento es lo que asume al entender que el largo del tren es 52 m, por tal razón al alumno no le importa si van conectados 4 o 8 vagones, el largo del tren es lo mismo, por tanto, el alumno confunde en el problema largo con

longitud, así como locomotora con tren. La segunda respuesta es 100 o 96 m, este argumento es de tipo confuso como puede observarse en la Figura 28.

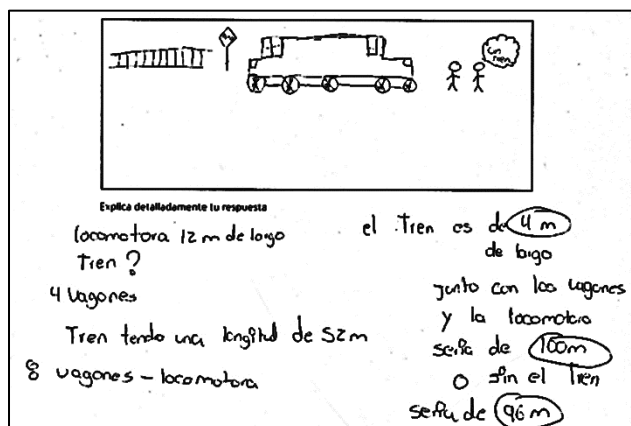


Figura 28. Otro razonamiento(a) sobre locomotora de tercero de bachiller.

No es muy claro el método o técnica utilizada, lo único que se puede deducir es la respuesta de 96, se obtiene simplemente restando 4 a 100 y por la explicación que el autor de la Figura 28 menciona, los 4 m de largo son del tren, pero no se entiende cómo llega al valor de 100. Por lo que esta respuesta es un tipo de razonamiento confuso. Este razonamiento al no ser muy clara la forma lineal, se clasifica en esta categoría llamada “otro razonamiento” que desafortunadamente implicó una respuesta incorrecta.

Razonamiento no lineal

En este tipo de razonamiento 23 alumnos que se encuentran en diferentes grupos cognitivos (Tabla 25) obtuvieron como respuesta correcta 92 metros utilizando un método no lineal.

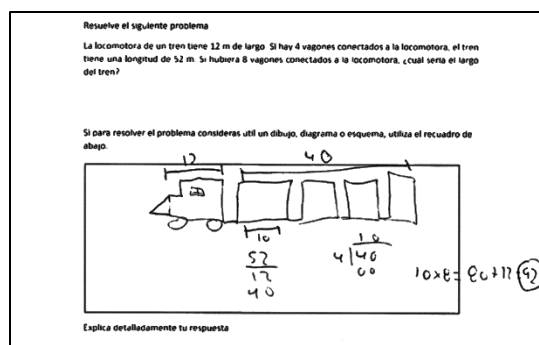


Figura 29. Razonamiento no lineal sobre locomotora de tercero de bachiller.

De la Figura 29 se obtiene una respuesta correcta de 92 metros logrando comprender el problema, por lo que al realizar su representación visual (dibujo), la primera parte del tren, que es la locomotora le asigna el largo de 12 m y a la otra parte que son los 4 vagones le asigna 40 m. Por lo tanto, los sujetos comprenden que al haber otros cuatro vagones conectados se tendría 80 m más los 12 m de la locomotora y es por esta razón que realizan la siguiente operación: $10 \times 8 + 12$.

Otros alumnos obtienen la longitud de cada vagón realizando la división de 40 entre 4, y por ende obtienen 10 como longitud de cada vagón por esta razón llegan a multiplicar 10×8 .

La Tabla 25 que aparece abajo muestra los resultados del problema de Locomotora especificados de acuerdo a los diferentes niveles cognitivos de los estudiantes, del grupo más bajo al más alto de acuerdo a los test aplicados.

Grupo	Caen-	Porcentaje-	No caen+	Porcentaje+	Total
PRCA1	2	14.28%	12	85.71%	14
PRCA2	5	50%	5	50%	10
PRT	2	25%	6	75%	8
Total	9		23		32

Tabla 25. Frecuencia por grupos, que caen en la trampa del problema de locomotora de tercero de bachiller.

Este problema es el único caso en el que los resultados no favorecen la relación explorada, ya que estos resultados particulares sobre este problema muestran que la mayoría de los sujetos que conforman un grupo de bajo nivel cognitivo (PRCA1) no caen en la trampa lineal. También se observa que la mayoría de los integrantes del grupo PRT logran brincar la trampa.

El problema de locomotora es un problema que necesita de un análisis no muy complejo, y una forma de poder resolverlo, radica en observar la diferencia que tiene la palabra locomotora con tren y así poder corresponderles los demás datos que están explícitos en este problema, claro que pudiera existir otros factores por los cuales los estudiantes no pudieran percatarse de esta diferencia u otras para poder resolver el problema.

4.2.5 Análisis del problema granjero

El problema menciona lo siguiente:

El granjero Carlos necesita aproximadamente 8 horas para abonar un terreno cuadrado de 200m de lado. ¿Cuántas horas necesitará para abonar un terreno cuadrado de 600m de lado?

El problema tiene una trampa lineal, la respuesta lineal esperada es; “ $8 \times 3 = 24$ horas” y la respuesta correcta es; “ $9 \times 8 = 72$ horas”. A continuación, se describen las categorías de acuerdo al tipo de respuesta que se encontró.

Razonamiento lineal

La respuesta que se obtuvo común a todos los estudiantes pertenecientes a esta categoría fue de 24 horas, el razonamiento es de tipo lineal porque en la mayoría de las soluciones utilizan las propiedades mencionadas en el estudio del fenómeno de ilusión de la linealidad mencionada por De Bock et al. (2002).

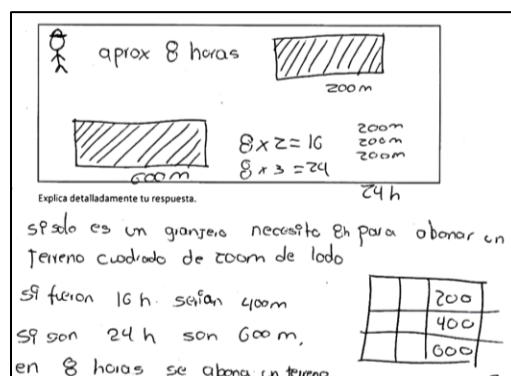


Figura 30. Razonamiento lineal sobre granjero de tercero de bachiller.

El razonamiento que utiliza es la propiedad lineal de la multiplicación razonando de la siguiente manera, si con 8 horas se puede abonar un terreno de 200 metros de lado, entonces con el triple de horas se podría abonar un terreno con el triple de área y por lo tanto 24 horas, así se abonaría un terreno de 600 metros. Los estudiantes que razonan de esta forma no se percatan de que en un área al incrementar los lados proporcionalmente no necesariamente crece a la misma proporción de área. Este tipo de razonamiento los encamina a una respuesta incorrecta.

Otros razonamientos

Este razonamiento es de tipo confuso, porque el método no es muy claro, por esta razón se encuentra en esta categoría.

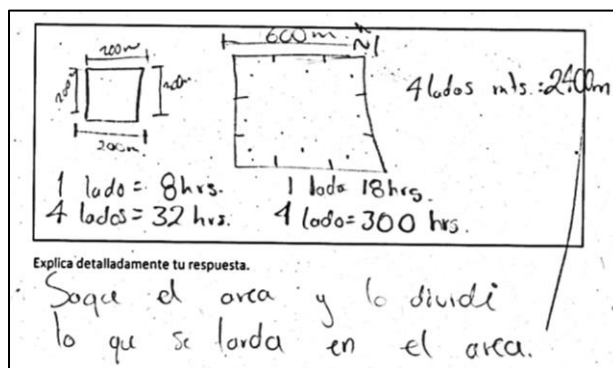


Figura 31: Otro razonamiento sobre granjero en tercero de bachiller.

De acuerdo a la Figura 31 se entiende que la idea es realizar una equivalencia con los datos, es decir, a un lado le corresponde 8 horas, entonces a los 4 lados le corresponde 32 (8×4) horas, pero siguiendo la misma relación el estudiante realiza la siguiente correspondencia, a un lado del cuadrado grande le asigna 18 horas. Entonces tendría que corresponderles a los 4 lados del cuadrado grande 72 horas, pero él le corresponde 300 horas. Es por esta razón que esta respuesta la considero un tanto confusa, además de la Figura 31 se argumenta lo siguiente: “saque el área y lo dividí lo que se tarda en el área”. Tratando de interpretar el argumento sería lo siguiente: obtiene el área del cuadrado grande que sería 360,000 metros cuadrados y esa área dividirla por lo que se tarda en el cuadrado pequeño, es decir dividir 360, 000 entre 8 horas., pero no concuerda con ningún resultado escrito en su representación, por consecuencia la respuesta fue incorrecta.

Razonamiento no lineal

En esta categoría se encuentran los razonamientos que satisfacen los requerimientos del problema y el efecto que tiene es la respuesta correcta por lo que la solución común es 72 horas.

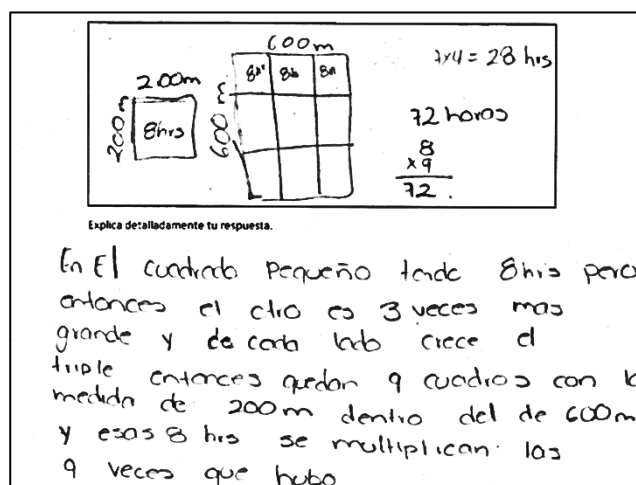


Figura 32. Razonamiento no lineal sobre granjero de tercero de bachiller.

Una estrategia que utiliza el estudiante es la manipulación del dibujo o diagrama que se considera como una posibilidad en la realización de tal tarea, el estudiante logra brincar la trampa, logra concebir que al incrementar un lado 3 veces, entonces el lado faltante del cuadrado también tiene que incrementar el triple por lo que se formarían 9 cuadraditos de lado 200 metros. Para este tipo de abstracción se necesita que aparte de que comprenda el concepto de área, no se deje seducir por una respuesta rápida.

En la Tabla 26 se muestran los resultados del problema del granjero de acuerdo a cada grupo cognitivo empezando del grupo más bajo al más alto, los resultados incorrectos se encuentran en la categoría caen en la trampa y los resultados correctos en la categoría no caen en la trampa.

Grupo	Caen-	Porcentaje-	No caen+	Porcentaje+	Total
PRCA1	14	100%	0	0%	14
PRCA2	8	80%	2	20%	10
PRT	5	62.5%	3	37.5%	8
Total	27		5		32

Tabla 26: Frecuencia por grupos, que caen en la trampa del problema de granjero de tercero de bachiller.

En la Tabla 26 de un total de 32 alumnos de tercero de bachiller 5 estudiantes no caen en la trampa y la diferencia que son 27 si caen en la trampa, se observa que a diferencia del problema de locomotora hubo un aumento considerable de estudiantes que no pudieron brincar la trampa cognitiva sobre la cual está diseñado el problema. En el grupo PRCA1 que es un grupo de bajo

nivel cognitivo todos presentan respuestas incorrectas, y en el grupo PRT es donde presenta mayor porcentaje de alumnos que no caen en trampa.

Si tratamos de comparar este mismo problema con primer grado de bachiller, el grupo cognitivo PLT mostró mayor porcentaje de sujetos que no caen en la trampa que el grupo cognitivo PRT, esto se debe posiblemente a que el grupo PLT tiene mejor resultado en test de reflexión cognitiva que el grupo PRT.

4.2.6 Análisis del problema de peso de la pelota de basquetbol

El problema dice lo siguiente:

Si una pelota de basketball pesa $\frac{1}{2}$ kilo más la mitad de su propio peso, ¿cuánto pesa?

Este problema no es del tipo trampa lineal o ilusión de la linealidad, sino un problema de trampa cognitiva que radica en la comprensión del texto, como lo menciona su autor Gardner (1986) el problema se podría enfocar de esta manera: “*la pelota de basketball pesa $\frac{1}{2}$ kg. La mitad de su peso debe ser $\frac{1}{4}$ de kg. Sumamos estos valores y obtenemos esta respuesta $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ de kilo*”.

El problema radica en descubrir el peso de la pelota y si resulta de tres cuartos entonces no puede ser de medio kilo como se afirmó al principio. La respuesta correcta se podría resolver realizando un dibujo que modele correctamente el problema o una ecuación (x es el peso de la pelota, entonces $\frac{1}{2} + \frac{x}{2} = x$) de dicho problema para obtener como resultado 1 kg.

Al igual que el análisis que se realizó con los sujetos de primero de bachiller para el problema de pelota se usó la herramienta *MATH* como evaluación del desempeño de los estudiantes en este tipo de tareas.

Como se menciona en el marco de referencia la taxonomía *MATH* consta de tres categorías, pero sólo son aplicables 2, a saber, la categoría A y categoría B, la categoría A consta de tres niveles; conocimiento *factual*, *comprensión* y *procedimiento de rutina*, la categoría B consta de dos niveles; *transferencia de la información* y *aplicación en situaciones nuevas* y la categoría C no es aplicable ya que los niveles que maneja se refieren a procedimientos más formales propios de un Matemático.

Para este problema nos centramos en dos niveles; *procedimiento de rutina y transferencia de la información*, aunque pudiera darse el caso que sujetos se encuentren en el *nivel de aplicación en situaciones nuevas*. *Procedimiento de rutina* nos referimos a operaciones, manipulaciones aritméticas o algebraicas, *transferencia de la información* nos referimos a transformaciones de una forma verbal a una numérica, algebraica o gráfica y *aplicación en situaciones nuevas* se refiere a una demostración o resultado que va más allá del uso rutinario de procedimientos.

	PRCA1(14)	PRCA2(10)	PRT(8)	Total
Conocimiento factual				
Recordar alguna fórmula o definición.	No aplica	No aplica	No aplica	
Comprensión				
Comprender el significado de la fórmula o de la definición.	No aplica	No aplica	No aplica	
Procedimiento de rutina				
Realizan cálculos, operaciones	14	9	5	28
Transferencia de la información				
Transforma información de una forma a otra.	0	1	3	4
Aplicación en situaciones nuevas				
Elegir y aplicar algoritmos apropiados	0	0	0	

Tabla 27. Análisis del problema peso por medio de MATH de cada uno de los grupos cognitivos.

En la Tabla 27 se encuentran las frecuencias con la que cada grupo cognitivo se ubica en los diferentes niveles de la taxonomía *MATH* de acuerdo a la naturaleza del problema. A continuación, se describe con más detalle cada una de las fases y se obtiene una clasificación de respuestas.

Procedimiento de rutina

	Característica de la respuesta	Frecuencia y grupo	Total
Respuesta Correcta	Respuesta 1 con operaciones. No se encontró registro	0	0
Respuesta Incorrecta	750 g. convierte $\frac{3}{4}$ a gramos.	1 del grupo PRCA1	1
	.75 kg. Convierte $\frac{3}{4}$ a decimal.	1 del grupo PRCA2	1
	$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$	10 del grupo PRCA1 7 del grupo PRCA2 5 del grupo PRT	22
	$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2}{6}$	3 del grupo PRCA1 1 del grupo PRCA2	4
Sin respuesta			

Tabla 28. Clasificación de respuestas del problema peso en procedimiento de rutina en tercero de bachiller.

En la Tabla 28 se encuentran todas las respuestas de los diferentes grupos cognitivos, los sujetos que utilizaron esta estrategia llegaron a respuestas incorrectas, no se encontraron sujetos que hayan respondido correctamente de una manera operativa. Como ejemplo de este tipo de respuestas se muestran la Figura 33.

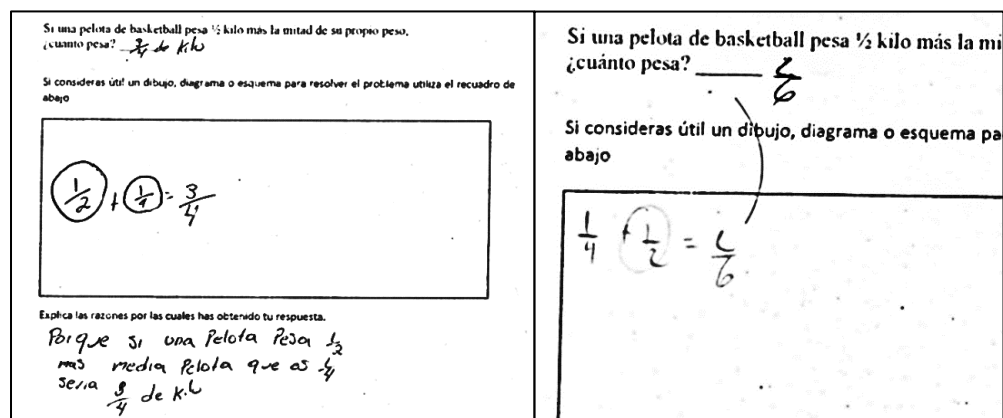


Figura 33. Lectura incorrecta y uso inadecuado de operaciones sobre problema de pelota en tercero de bachiller.

Esta respuesta es representativa de una inadecuada lectura, ya que el estudiante asume tal cual está escrito el problema, y lo interpreta de la siguiente manera: “la pelota pesa medio kilo, y a ese medio

kilo hay que sumarle un cuarto”, es decir un medio más un cuarto es tres cuartos. El estudiante concluye que el peso de la pelota es $\frac{3}{4}$ y no percibe la contradicción que implica tal respuesta.

Transferencia de la Información.

	Característica de la respuesta	Frecuencia de grupo	Total
Respuesta Correcta	Transforma el problema Modela correctamente	0	0
Parcialmente Correcta	Modela correctamente pero la manipulación algébrica es insatisfactoria	1 sujeto del grupo PRT	1
Parcialmente Correcta	Sólo escribe la respuesta 1 sin un argumento muy convincente	1 sujeto del grupo PRCA2 2 sujetos del grupo PRT	3
Respuesta Incorrecta	No se encontró registro	0	0
Sin respuesta			

Tabla 29. Clasificación de respuestas del problema peso en Transferencia de la información en primero de bachiller.

Solo un alumno del grupo cognitivo PRT obtuvo la modelación correcta del problema y la respuesta correcta, como se muestra en la Figura 34.

Resuelve el siguiente problema

Si una pelota de basketball pesa $\frac{1}{2}$ kilo más la mitad de su propio peso, ¿cuánto pesa? 1 kg

Si consideras útil un dibujo, diagrama o esquema para resolver el problema utiliza el recuadro de abajo.

$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x = x$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = x - \frac{1}{2}x$$

$$2.5 = x - \frac{1}{2}x$$

$$2.5 = \frac{1}{2}x$$

$$2.5 = 2x$$

$$x = 248.00$$

500 5

$$500 + \frac{1}{2}x = x$$

$$\frac{1}{2}x = x - 500$$

$$2 = x(x - 500)$$

$$2 = x^2 - 500x$$

$$2 = -498x$$

$$\frac{2}{-498} = -x$$

$$x = 248.00$$

Figura 34. Modelación correcta sobre problema de pelota en tercero de bachiller.

Solamente un alumno llegó a la estrategia de utilizar la variable x como incógnita y poder modelar la situación, aunque la modelación es correcta se observa que hace una inadecuada utilización de la división, ya que la expresión; $\frac{x}{2}$ la confunde con $\frac{2}{x}$.

Otro ejemplo es el siguiente:

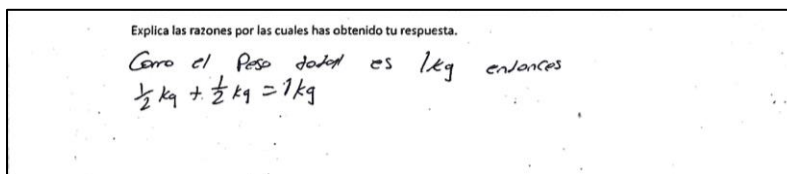


Figura 35. Respuesta correcta no convincente sobre problema de pelota en primero de bachiller.

En este ejemplo el sujeto obtiene la respuesta de un kilogramo la cual es correcta, pero no argumenta como obtuvo tal resultado. La razón que explica se basa más en una comprobación, que en un procedimiento que le lleve a la respuesta, es por esta razón que la considero en respuesta correcta.

El análisis con base en la taxonomía *MATH* nos permite hacer la diferencia entre el tipo de respuestas correctas del grupo cognitivo PRCA2 y el grupo PRT, es así como la diferencia radica en la forma de argumentar su respuesta, sólo un sujeto del grupo cognitivo PRT utiliza una modelación correctamente del problema, el resto no argumenta de forma convincente.

En la Tabla 30 se muestra el total de alumnos que caen en la trampa y el total de alumnos que no caen en la trampa por cada grupo cognitivo, recuerde que el grupo PRCA1 es el grupo cognitivo de bajo nivel cognitivo y el grupo PRT es el más alto relativo a este grupo de bachiller, las respuestas correctas se agrupan en caen en trampa y las respuestas incorrectas en la categoría no caen.

Grupo	Caen-	Porcentaje-	No caen+	Porcentaje+	Total
PRCA1	14	100%	0	0%	14
PRCA2	9	90%	1	10%	10
PRT	5	62.5%	3	37.5%	8
Total	28		4		32

Tabla 30. Frecuencia por grupos, que caen en la trampa del problema de peso de tercero de bachiller.

Se observa que, el grupo PRCA1, todos los estudiantes no respondieron correctamente al problema planteado y el único grupo en que la mayoría de sus integrantes respondió satisfactoriamente es el grupo PRT.

4.2.7 Análisis del problema de triángulo

Problema:

Un triángulo tiene lados de 17, 35 y 52 centímetros. ¿Cuál es su superficie en centímetros cuadrados?

Caer en la trampa cognitiva radica en obtener el área del supuesto triángulo tomando como altura alguno de los datos que le proporciona el problema y la respuesta correcta sería que el estudiante se percatara de que no se puede formar un triángulo con los datos propuestos por el problema y en consecuencia no hay superficie.

Para este análisis se utiliza la taxonomía MATH y se clasifica de igual manera que en primero de bachiller.

	PRCA1(14)	PRCA2(10)	PRT(8)	Total
<i>Conocimiento factual</i>				
Recordar la fórmula del área del triángulo	No se consideró	No se consideró	No se consideró	
<i>Comprensión</i>				
Comprender el significado de la fórmula	No se puede determinar	No se puede determinar	No se puede determinar	
<i>Procedimiento de rutina</i>				
Realizan cálculos con base x altura	14	9	6	29
<i>Transferencia de la información</i>				
Reconoce la inaplicabilidad de una formula en un contexto	0	1	2	3
<i>Aplicación en situaciones nuevas</i>				
Elegir y aplicar algoritmos apropiados	0	0	0	

Tabla 31. Análisis del problema triángulo por medio de MATH de cada uno de los grupos cognitivos.

En la Tabla 31 se encuentra la frecuencia de sujetos ubicados en cada uno de los niveles de la taxonomía *MATH*. El nivel de conocimiento *factual y comprensión* no aplica en esta tarea, ya que por la naturaleza del problema no pide explícitamente una definición o una fórmula, más bien se trata de utilizar la fórmula de acuerdo a una modelación correcta. En *procedimiento de rutina*, el 80% de los sujetos en cada grupo cognitivo realizan cálculos correctos de acuerdo a la modelación que realizan. En el siguiente nivel que es *transferencia de la información*, la cual consta de reconocer la no aplicabilidad de la fórmula tradicional de área de un triángulo, es donde sólo tres sujetos nos dan registro de dicho nivel (de acuerdo a sus argumentos). En el último nivel *Aplicación en situaciones nuevas*, ningún sujeto utilizó otra fórmula no tradicional para calcular área de triángulo o demostrar que la altura de dicho triángulo es cero.

Procedimiento de rutina:

	Característica del problema	Frecuencia de grupo	Total
Respuesta Correcta	La superficie es cero verificando de una forma operatoria	0	0
Respuesta Incorrecta	Su respuesta es 442 o 297.5 realizando cálculos utilizando la fórmula tradicional $\frac{bxh}{2}$	14 del grupo <i>PRCA1</i> 9 del grupo <i>PRCA2</i> 6 del grupo <i>PRT</i>	29

Tabla 32. Clasificación de respuestas del problema triángulo en procedimiento de rutina en tercero de bachiller.

Los sujetos que se consideraron en este nivel aplicaron directamente la fórmula tradicional del triángulo con los datos de los lados del supuesto triángulo, por lo que al considerarlo de esta manera su respuesta fue incorrecta pese a realizar cálculos correctos. Como ejemplos tenemos las siguientes respuestas:

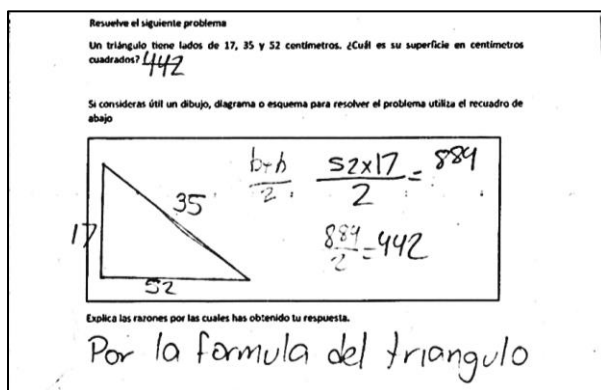


Figura 36. Fórmula tradicional de triángulo aplicada al problema de triángulo en tercero de bachiller.

El sujeto toma como base 52, altura 17 y al resultado lo divide por 2 para dar como respuesta **442**, el sujeto no se percata de la validez de los lados y aplica deliberadamente la altura de un triángulo sin verificar tal afirmación, en la Figura 36 se observa que construye un triángulo rectángulo y no verifica el teorema de Pitágoras. Por tanto, esta respuesta la considero incorrecta y dentro del nivel de procedimiento de rutina ya que el estudiante conoce la fórmula, ejecuta correctamente las operaciones que están involucrados en la fórmula, aunque el resultado es insatisfactorio para la naturaleza del problema.

Otra forma de representar el triángulo es la siguiente:

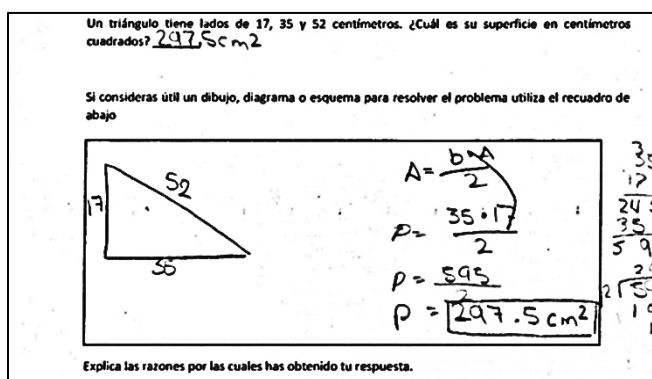


Figura 37. Fórmula tradicional de triángulo (a) aplicada al problema de triángulo en tercero de bachiller.

En la Figura 37 se muestra otro ejemplo representativo de los sujetos que recuerdan la fórmula del triángulo, ingresan datos a la fórmula, pero sin corroborar que 17 sea la altura del triángulo. Aunque en este ejemplo toma un poco de sentido la diagonal de un triángulo ya que es el lado más grande, igualmente el reacomodo de los lados del triángulo es incorrecto porque ni siquiera es construible un triángulo y no cumple con el teorema de Pitágoras. Con los datos que proporciona el problema

y aunque los cálculos (operatividad) son correctos la respuesta es incorrecta, por tal motivo se consideró en este nivel de la taxonomía *MATH*.

Con base en la Tabla 32 y los ejemplos mencionados se puede deducir que los sujetos en los grupos cognitivos PRC A1 y A2 son los que mayor tendencia mostraron en usar deliberadamente los lados del triángulo para calcular el área sin corroborar la construcción de dicho triángulo. En términos de la taxonomía *MATH* se encuentran en un nivel de *procedimiento rutinario*.

Transferencia de la información:

	Característica del problema	Frecuencia del grupo	Total
Respuesta Correcta	Reconoce que no puede aplicar directamente la fórmula $\frac{bxh}{2}$ y visualiza que no hay superficie	1 del grupo PRT	1
Respuesta Correcta	Su respuesta es: “no se puede formar el triángulo”	1 del grupo PRT	1
Respuesta parcialmente correcta	Menciona que es necesario la altura	1 del grupo PRCA2	1
Respuesta incorrecta			
Sin respuesta			

Tabla 33. Clasificación de respuestas del problema triángulo en transferencia en tercero de bachiller.

En el sentido de la taxonomía *MATH* se pudieron encontrar indicios de dos sujetos en los que de acuerdo a la naturaleza de este problema pudieron identificar la no aplicabilidad de la fórmula tradicional del triángulo, en el sentido de no aplicarla sin antes conocer la naturaleza de los datos. Estos sujetos son del grupo cognitivo PRT y sólo un sujeto del grupo cognitivo PRCA2 menciona que para aplicar la formula necesitamos conocer su altura.

No se podría saber porque el triángulo no sería ~~basado~~ a las medidas son incorrectas para la superficie además de que la altura no es conocida y no se podría averiguar.

Figura 38. No aplicabilidad de la fórmula tradicional al problema de triángulo en tercero de bachiller.

En la Figura 38 el sujeto se percata de la no aplicabilidad de la fórmula tradicional de triángulo, el menciona que las medidas del supuesto triángulo son incorrectas, pero no menciona por qué, también menciona que la altura no es conocida y que no se puede obtener.

Otro ejemplo de la no aplicabilidad de la fórmula es la siguiente:

Un triángulo tiene lados de 17, 35 y 52 centímetros. ¿Cuál es su superficie en centímetros cuadrados? _____

No se puede formar el triángulo

$$17 + 35 = (52 - 52)$$

$$52 - 17 = 35 < 52$$

Figura 39. No aplicabilidad de la fórmula tradicional (a) al problema de triángulo en tercero de bachiller.

En este ejemplo que muestra la Figura 39 el sujeto también se percata de la no aplicabilidad de la fórmula tradicional del área de un triángulo al percibir que los datos de los lados del supuesto triángulo no cumplen con la condición o *propiedad triangular*.

“la suma de dos de sus lados cualesquiera es mayor que la del tercer lado y la diferencia de dos lados cualesquiera es menor que la del tercer lado”.

El estudiante trata de aplicar la *propiedad triangular*, aunque no justifica de manera correcta ya que el escribe $17 + 35 = 52$ y luego resta $52 - 52$, lo cual mezcla las propiedades, lo que tendría que hacer según la propiedad tendría que verificar que 52 fuera mayor que el tercer lado que es 52, lo cual no es mayor, es igual.

Otro ejemplo:

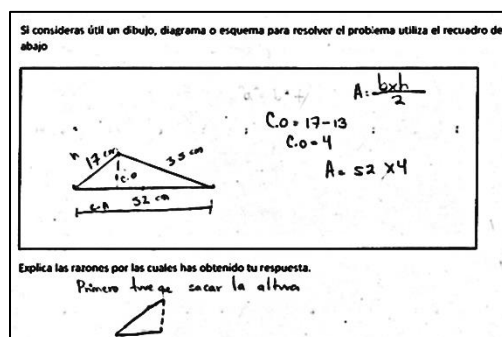


Figura 40. No aplicabilidad de la fórmula tradicional (b) al problema de triángulo en tercero de bachiller.

En este ejemplo el sujeto aplica la fórmula del triángulo, pero no de una manera deliberada, es decir, trata de encontrar la altura del triángulo con ayuda de la trigonometría, aunque no lo realiza de manera exitosa, ya que no considera ningún ángulo y obtiene el cateto opuesto, sólo operando 17 menos 13 que es 4, y que después utiliza como altura, por lo tanto, la respuesta la consideré parcialmente correcta, por la observación de la no aplicabilidad directa de la fórmula tradicional de área de un triángulo.

En este nivel de *transferencia de la información* se encuentran los sujetos con un mejor nivel cognitivo, aunque no demuestran que la superficie es cero, si perciben que no podemos asumir los datos como una altura y se sus respuestas se consideraron correctas.

En este análisis al igual que los resultados de primero de bachiller se basan en el desempeño que tienen los sujetos ante tareas matemáticas. En la Tabla 34 se muestra un resumen de los resultados obtenidos para este problema englobando las respuestas correctas en la categoría caen y respuestas incorrectas en la categoría no caen.

Grupo	Caen-	Porcentaje-	No caen+	Porcentaje+	Total
PRCA2	14	100%	0	0%	14
PRCA1	9	90%	1	10%	10
PRT	6	75%	2	25%	8
Total	29		3		32

Tabla 34. Frecuencia por grupos, que caen en la trampa del problema de triángulo de tercero de bachiller.

El único grupo cognitivo que mejor desempeño tuvo en este problema es el grupo PRT debido al mayor porcentaje de sujetos que respondieron correctamente, esto debido a una *transferencia de la información* para no caer en la trampa, a diferencia del grupo PRCA1 donde el total de sus integrantes no respondieron correctamente debido a un impulso que los encamino a una respuesta rápida, considerando el área de un triángulo sin percatarse de que en realidad no existe. Los resultados son muy similares a los obtenidos para el primer grado de bachiller, aunque recordemos que el grupo PRT no es del mismo nivel cognitivo que el grupo PLT, este último grupo solo se encontró para primer grado de bachiller.

4.3 Segundo de bachiller

Con respecto al análisis realizado de los test de razonamiento lógico (TRL) y test de reflexión cognitiva (TRC) se midió el nivel cognitivo de cada uno de los estudiantes y con base en el análisis de los problemas matemáticos no rutinarios se realizó una clasificación de respuestas de acuerdo a sus estrategias de solución, para poder encontrar una relación entre el nivel cognitivo de los estudiantes y su estrategia de solución.

4.3.1 Test de reflexión Cognitiva (TRC)

	Pensamiento rápido	Pensamiento lento
Frecuencia	30	0
Porcentaje	100%	0%

Tabla 35. Resultados del test de reflexión cognitiva de segundo de bachiller.

Se encontró que todos los estudiantes (30 sujetos) se encuentran en el estadio de pensador rápido, es decir, ningún estudiante logró responder con exactitud más de la mitad de los ítems, la gran mayoría respondió insatisfactoriamente todos los reactivos excepto algunos que respondieron correctamente un solo ítem.

4.3.2 Test de razonamiento lógico (TRL)

	Pensamiento concreto [0,3]	Pensamiento en transición [4,6]	Pensamiento formal [7,10]
Frecuencia	25	4	1
Porcentaje	83.3%	13.3%	3.3%

Tabla 36. Resultados del test de razonamiento lógico en segundo de bachiller.

De acuerdo a la taxonomía de Piaget en el que está diseñado el test de razonamiento lógico se encontraron que 25 sujetos se encuentran en el estadio de pensador concreto, es decir obtuvieron de 0 a 3 reactivos correctos, 4 sujetos son pensadores en transición logrando contestar entre 4 y 6 reactivos correctos y sólo un pensador formal que obtuvo 8 reactivos correctos de un total de 10, por lo que se le considera un pensador formal. Al igual que los resultados de los grupos anteriores muy pocos estudiantes logran ubicarse en niveles cognitivos altos de acuerdo a este test.

En seguida se muestran los resultados del test de razonamiento lógico especificando el número de respuestas correctas de cada uno de los esquemas de razonamiento.

Esquemas de razonamiento	Ítems	Respuestas Correctas /30	Porcentaje %
proporcionalidad	1	5	16.6
	2	4	13.3
Control de variable	3	9	30
	4	2	6.6
probabilidad	5	5	16.6
	6	1	3.3
correlación	7	9	30
	8	8	26.6
combinatoria	9	0	0
	10	1	3.3

Tabla 37. Resultados del test de razonamiento lógico por esquemas de operación de segundo de bachiller.

De la Tabla 37 observa que el mayor porcentaje de respuestas correctas se encuentran en los reactivos 3 y 7 correspondientes al esquema de control de variable y correlación. Los resultados donde se encontró el menor número de respuestas correctas son en los reactivos número 6, 9 y 10 correspondientes a los esquemas de operación de probabilidad y combinatoria.

Los resultados obtenidos en el test de reflexión cognitiva (TRC) está indicando que no se encontraron pensadores lentos, por lo que se realizó una sub clasificación en base a la combinación de los parámetros del test de reflexión cognitiva y razonamiento lógico que se describen en la sección de metodología, por lo tanto, para este grupo de bachillerato, los grupos cognitivos que se encontraron fueron los siguientes:

- Pensador rápido y concretoA1 [PRCA1]
- Pensador rápido y concretoA2 [PRCA2]
- Pensador rápido y en transición [PRT]
- Pensador rápido y formal [PRF]

4.3.3 Análisis del problema de músicos

El problema menciona lo siguiente:

Un grupo de 5 músicos toca una canción en 10 minutos, otro grupo de 35 músicos tocará la misma canción ¿cuánto tiempo le tomará a este grupo tocar la canción?

Es un problema de tipo ilusión de la linealidad, la respuesta lineal esperada sería; “ $10 \times 7 = 70$ minutos” y la respuesta correcta; “10 minutos”. De acuerdo a sus estrategias de solución, se encontraron las siguientes soluciones que se pueden dividir en dos tipos.

Razonamiento lineal

En esta categoría podemos encontrar en su totalidad que los sujetos dan como respuesta 70 minutos y alguna otra respuesta incorrecta debido al cálculo incorrecto. Se encontró que el razonamiento que utilizan se basa en alguna propiedad de la linealidad que se menciona en el marco de referencia De Bock et al. (2007), como ejemplo representativo tenemos la Figura 41.

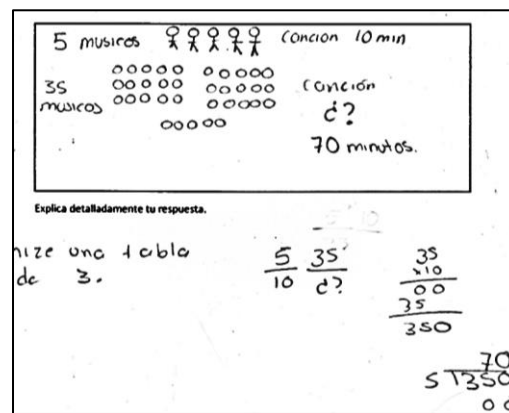
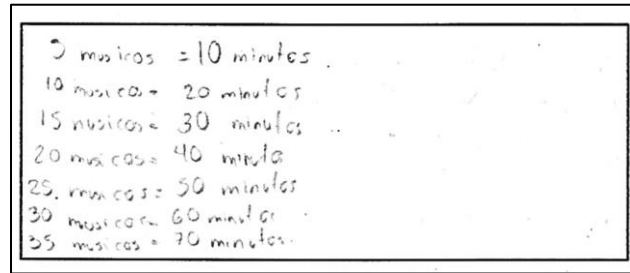


Figura 41. Razonamiento lineal en problema de músicos en segundo de bachiller.

Los estudiantes utilizaron como razonamiento lineal la herramienta; “regla de tres” para poder operar y obtener como resultado 70. Por lo que, al formar la regla de tres, los números que se tendrían que operar sería multiplicar 35×10 y el resultado dividirlo entre 5. Cabe mencionar que algunos estudiantes realizaron el diagrama o dibujo simplemente como requisito de la tarea, es decir, el dibujo no ayudo en la respuesta del alumno. Otro tipo de estrategia en este razonamiento es la utilización de un razonamiento secuencial que se expresa mejor en la Figura 42.

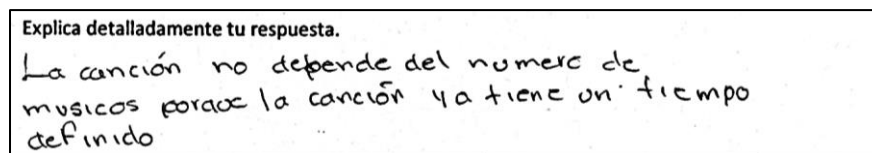


5 músicos = 10 minutos
10 músicos = 20 minutos
15 músicos = 30 minutos
20 músicos = 40 minutos
25 músicos = 50 minutos
30 músicos = 60 minutos
35 músicos = 70 minutos

Figura 42. Razonamiento lineal (a) en problema de músicos en segundo de bachiller.

Razonamiento No lineal

Como respuesta correcta y común a este tipo de razonamiento no lineal es 10 minutos así que el razonamiento es; no importa si son 35 músicos o más, la melodía no depende del número de músicos, si no que la melodía es un invariante. En la Figura 43 se muestra un razonamiento de este tipo.



Explica detalladamente tu respuesta.
La canción no depende del número de músicos porque la canción ya tiene un tiempo definido

Figura 43. Razonamiento no lineal en problema de músicos de segundo de bachiller.

Este tipo de razonamiento implicó una respuesta correcta tal como puede observar en la Figura 43.

En la Tabla 38 se muestra un resumen de los resultados obtenidos para este problema al igual que los grados anteriores de bachiller se utilizó la categoría caen en la trampa para quienes respondieron insatisfactoriamente y no caen para quienes respondieron correctamente.

Grupo	Caen-	Porcentaje-	No caen+	Porcentaje+	Total
PRCA2	8	42.10%	11	57.89%	19
PRCA1	2	33.33%	4	66.66%	6
PRT	0	0%	4	100%	4
PRF	0	0%	1	100%	1
Total	10		20		30

Tabla 38. Frecuencia por grupos, que caen en la trampa del problema de músicos de segundo de bachiller.

En la Tabla 38 se encontró que de un total de 30 sujetos 10 caen en la trampa y el resto que son 20 no caen en la trampa, al igual que en los grupos anteriores (primero y segundo de bachiller) este

problema no fue muy desafiante para los alumnos, pero si se logra observar de acuerdo a esta clasificación que los grupos cognitivos PRT y PRF ninguno de sus integrantes cae en la trampa lineal a diferencia del grupo PRCA1 que casi la mitad logra caer en la trampa.

4.3.4 Análisis del problema de Carrera

Problema:

Ellen y Kim están corriendo alrededor de una pista. Corren igual de rápido, pero Ellen comenzó más tarde. Cuando Ellen ha corrido 5 vueltas, Kim ha corrido 15 vueltas. Cuando Ellen ha corrido 30 vueltas, ¿cuántas ha corrido Kim?

Es un problema con trampa lineal, la respuesta lineal esperada sería; “ $30 \times 3 = 90$ ” vueltas y la respuesta correcta; “ $30 + 10 = 40$ vueltas”. Es necesario mencionar que, con base en la estrategia con la cual los alumnos resolvieron el problema, se obtuvieron las siguientes categorías del problema de carrera.

Razonamiento Lineal

Como respuesta en común para esta categoría es la respuesta 90 vueltas, aunque algunos alumnos dan como respuesta 10 vueltas, esto debido a la utilización de un argumento de la misma especie al referirse como el doble o el triple. Como ejemplo tenemos algunas representaciones:

Handwritten student work showing a linear reasoning strategy. On the left, it lists "E → 5 → 30" and "K → 15 → X". On the right, it shows a multiplication calculation: $15 \times 30 = 450$, followed by a division: $450 \div 5 = 90$.

Figura 44. Razonamiento lineal sobre carrera en segundo de bachiller.

La herramienta preferida a utilizar en este tipo de método es la famosa “regla de tres” en la que el alumno esta seducido por la simplicidad del problema, es la inercia del problema a utilizar los tres datos que proporciona el problema, el alumno multiplica 15 por 30 y al resultado lo divide por 5

tal y cual se observa en la Figura 44. Cabe mencionar que otra estrategia que utilizan es la secuencia de números, 10 con 30, 15 con 45, ..., 30 con 90 en la que no relación los tres datos del problema.

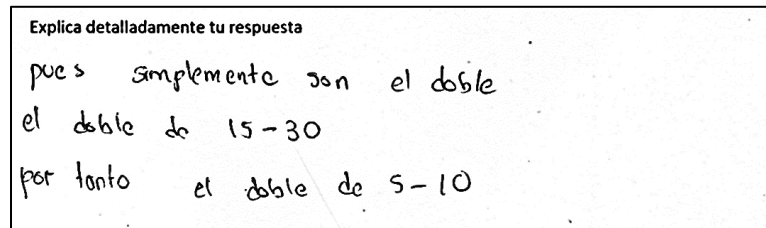


Figura 45. Razonamiento lineal (a) sobre carrera en segundo de bachiller.

Otra respuesta que se encuentra, aunque no tan común es 10 vueltas, el razonamiento es de tipo lineal ya que utiliza la segunda propiedad de la linealidad (si k veces a , entonces k veces b). Es decir, el argumento se puede mencionar de la siguiente manera: si el doble de 15 es 30, entonces el doble de 5 es 10, y por tanto la respuesta.

Otros razonamientos

En esta categoría, aunque no es de razonamiento lineal se consideró como respuesta del tipo “caer en la trampa” por la razón de que el argumento y su respuesta no es satisfactoria al problema.

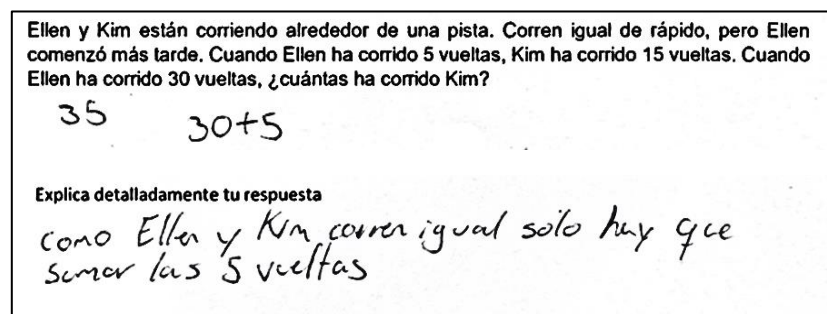


Figura 46. Otro razonamiento sobre carrera en segundo de bachiller.

El estudiante no logra comprender el problema, y realiza cálculos con los valores asignados, de acuerdo al argumento que menciona el estudiante, podemos interpretar que el estudiante asume que hay una diferencia de 5 vueltas, por lo que al terminar las 30 vueltas Ellen, entonces Kim llevaría $30 + 5$.

Razonamiento no lineal

La respuesta subyacente a esta categoría es 40 vueltas. Este tipo de razonamiento induce a una respuesta correcta. Para más detalle de la respuesta, presentamos el siguiente argumento que se muestra en la Figura 47.

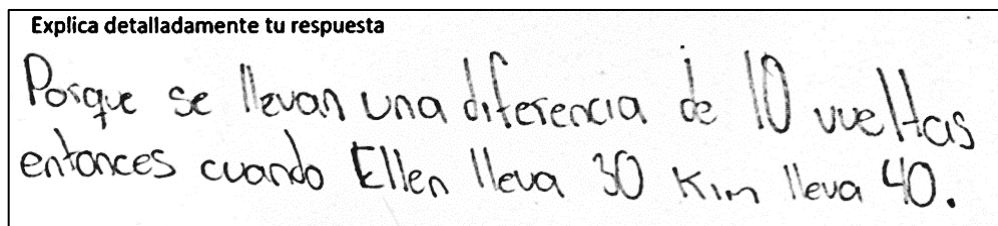


Figura 47. Razonamiento no lineal sobre carrera en segundo de bachiller.

la respuesta correcta radica en observar 15 vueltas a partir de agregarle 10 vueltas a las ya concretadas (5 vueltas) y no 15 como el producto de 5 por 3, sino más bien de acuerdo al contexto del problema encontrar la diferencia que es de 10 vueltas.

La Tabla 39 muestra la frecuencia de repuestas satisfactoria e insatisfactorias de los sujetos en cada uno de los grupos cognitivos del problema de carrera. Las estrategias que fueron clasificadas como razonamiento lineal y otros razonamientos están agrupadas en la categoría caen y las estrategias de razonamiento no lineal están agrupadas en la categoría no caen.

Grupo	Caen-	Porcentaje-	No caen+	Porcentaje+	Total
PRCA2	17	89.47%	2	10.52%	19
PRCA2	5	83.33%	1	16.66%	6
PRT	2	50%	2	50%	4
PRF	0	0%	1	100%	1
Total	24		6		30

Tabla 39. Frecuencia por grupos, que caen en la trampa del problema de carrera de segundo de bachiller.

En la mayoría de los alumnos se observa el fenómeno de la ilusión respecto de este problema, de los cuales los únicos grupos en el que la mayoría o la mitad de sus integrantes logran saltar este obstáculo lineal en el que está enmarcado este problema, son los grupos PRF y PRT respectivamente.

4.3.5 Análisis del problema de locomotora

El problema menciona lo siguiente:

La locomotora de un tren tiene 12 m de largo. Si hay 4 vagones conectados a la locomotora, el tren tiene una longitud de 52 m. Si hubiera 8 vagones conectados a la locomotora, ¿cuál sería el largo del tren?

El problema está enmarcado en la ilusión de la linealidad, esperaríamos como respuesta lineal; “ $2 \times 52 \text{ m} = 104 \text{ m}$ ” y como respuesta correcta; “ $12 \text{ m} + (8 \times 10 \text{ m}) = 92 \text{ m}$ ”. Se encontraron las siguientes respuestas y se pudieron clasificar en las siguientes categorías que se describen a continuación.

Razonamiento lineal

En esta categoría se encuentran una variedad de respuestas producto de aplicación de métodos lineales y sus derivados como la famosa regla de tres. Entre la respuesta más popular se encuentra 104 y 24.

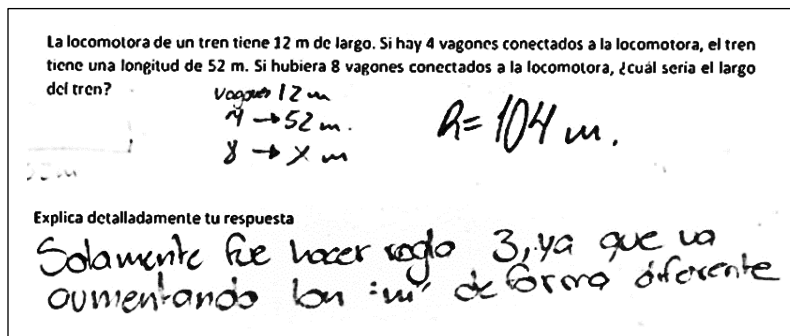


Figura 48. Razonamiento lineal sobre locomotora de segundo de bachiller.

El alumno ordena los datos de forma tradicional, 4 le corresponde 52 y 8 es el valor faltante. El alumno entonces multiplica 8×52 y al resultado lo divide entre 4, por lo que obtiene 104, aquí se muestra como el alumno no utiliza un dibujo, porque para él, la regla de tres es el mecanismo que ha aprendido durante su vida escolar. Otra manera de obtener 104 como lo que se menciona De Bock et al. (2002) es utilizando la propiedad de suma o de multiplicación de la linealidad, es decir, obtienen 104 ya sea sumando dos veces la longitud del tren que es 52 o multiplicarla por dos.

¿Combinación de operaciones o linealidad?

En esta categoría se encontrarían aquellos resultados producto del contrato didáctico, en la que el estudiante realiza cálculos con los datos proporcionados sin necesidad de un sentido lógico.

Explica detalladamente tu respuesta

$$52 - 12 - 40 \times 8 = 320 + 12 = 332$$

Figura 49. Combinación de operaciones sobre locomotora de segundo de bachiller.

Eso se puede interpretar de la siguiente manera: en su primer paso tiene sentido ya que a la longitud del tren es 52 metros y le resta el largo de la locomotora 12 metros, por lo que obtiene 40 metros que serían los cuatro vagones, pero al multiplicar por 8 se entiende que es por el doble de vagones.

Razonamiento no lineal

La respuesta que se obtienen como consecuencia de no caer en la trampa lineal es 92 metros, la estrategia fue no deliberar rápidamente los datos para realizar operaciones, sino comprender el problema y realizar un dibujo para mostrar tal comprensión.

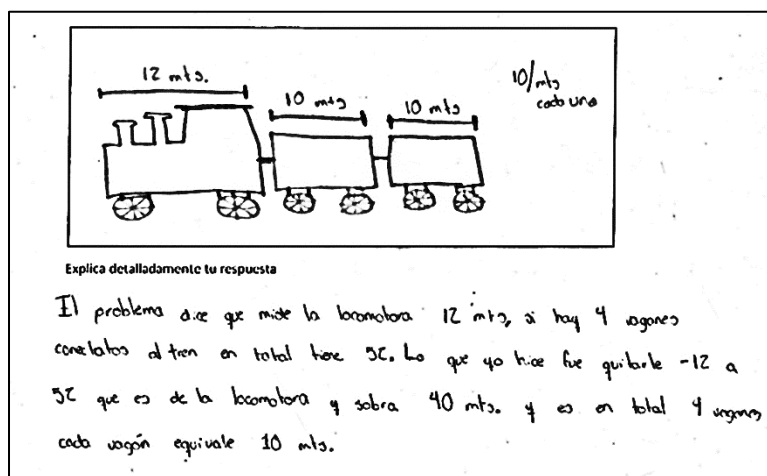


Figura 50. Razonamiento no lineal sobre locomotora de segundo de bachiller.

La estrategia que utilizan en este tipo de razonamiento es obtener las longitudes equivalentes de cada vagón para poder realizar el cálculo correcto de los ocho vagones y sumarle los 12 metros, es por esta razón que a 52 metros del tren le restan la longitud de la locomotora.

Se describen para una mejor visualización la frecuencia de respuestas satisfactorias e insatisfactorias de acuerdo a este tipo de problemas por cada uno de los grupos cognitivos que se clasificaron.

Grupo	Caen-	Porcentaje-	No caen+	Porcentaje+	Total
PRCA1	17	89.47%	2	10.52%	19
PRCA2	3	50%	3	50%	6
PRT	0	0%	4	100%	4
PRF	0	0%	1	100%	1
Total	20		10		30

Tabla 40. Frecuencia por grupos, que caen en la trampa del problema de locomotora de segundo de bachiller.

La Tabla 40 visualiza que la mayoría (20) de los sujetos caen en la trampa y el resto (10) no caen en la trampa, y en este caso en particular muestra casi idealmente el supuesto de este trabajo, el grupo cognitivo de nivel medianamente alto (PRF) y el grupo de nivel medio (PRT) son los que mejor desempeño tienen en este problema en concreto.

Análisis del problema de granjero

El problema menciona lo siguiente:

El granjero Carlos necesita aproximadamente 8 horas para abonar un terreno cuadrado de 200 m de lado. ¿Cuántas horas necesitará para abonar un terreno cuadrado de 600 m de lado?

El problema tiene una trampa lineal, la respuesta lineal esperada es; “ $8 \times 3 = 24$ horas” y la respuesta correcta es; “ $9 \times 8 = 72$ horas”. A continuación, se describen las categorías de acuerdo al tipo de respuesta que se encontró.

Razonamiento lineal

En este razonamiento lineal se observa la utilización de la segunda propiedad de la linealidad (si k veces a entonces k veces b) De Bock, et al. (2007). Se obtienen como respuesta común 24 horas.

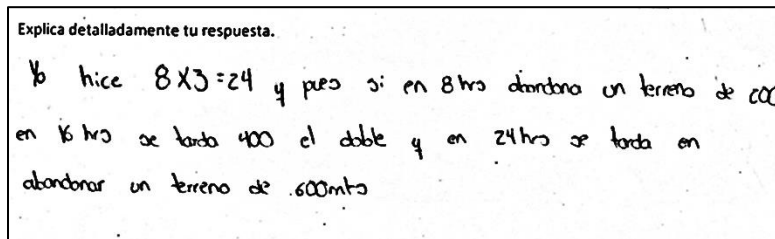


Figura 51. Razonamiento lineal sobre granjero de segundo de bachiller.

Otra técnica para obtener como respuesta insatisfactoria es la utilización de la famosa “regla de tres” en la Figura 52 que se muestra abajo se observa claramente, esto debido a la forma de agrupar los datos, esto nos da indicio de la utilización de regla de tres, 8 lo corresponde a 200, entonces ¿cuánto le corresponde a 600?

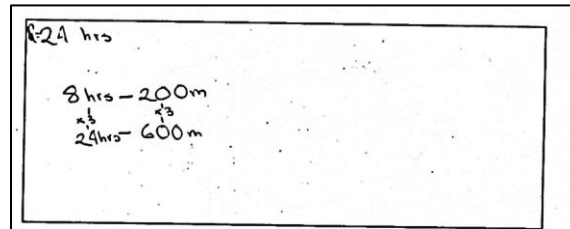


Figura 52. Razonamiento lineal (a) sobre granjero de segundo de bachiller.

Otra representación, es la utilización de un diagrama, el sujeto realiza el dibujo por cumplir con la tarea, pero en realidad no le funciona como herramienta para solucionar el problema. Kellah (2007) menciona que existe una relación entre los estudiantes que mejor desempeño tienen en problemas matemáticos con la representación gráfica que realizan. Reuter et al. (2014) realizaron un estudio con dos grupos (experimental y de control) y a uno le sugirió la utilización del algún dibujo o diagrama para la resolución del problema y encontró que no existe una diferencia significativa entre los dos grupos experimentales y de control, por lo que concluyó que se necesita de una enseñanza para realizar representaciones gráficas, esquemáticas que realmente ayuden a resolver el problema.

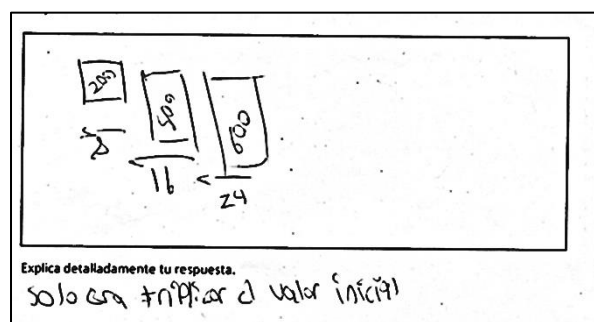


Figura 53. Razonamiento lineal (b) sobre granjero de segundo de bachiller.

Otra estrategia lineal que se encontró fue la utilización de una secuencia de números que sería una parte comprensiva del problema, en el sentido de que el sujeto va enlistando uno por uno los números que le corresponde de una manera lógica.

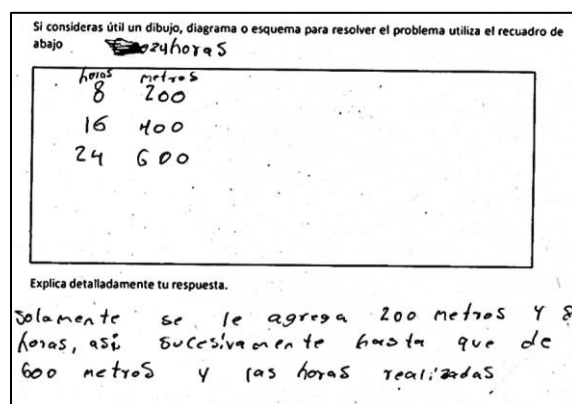


Figura 54. Razonamiento lineal (c) sobre granjero de segundo de bachiller.

Por último, a manera de ejemplo muestro alguna respuesta incorrecta en base al cálculo pero que se utiliza un razonamiento lineal y es por esta razón que respuestas de este tipo se consideran en esta categoría.

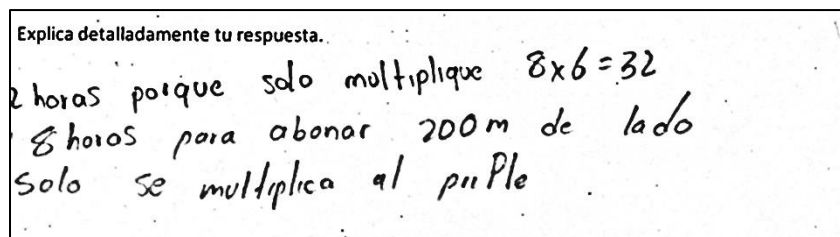


Figura 55. Razonamiento lineal (d) sobre granjero de segundo de bachiller.

En la Tabla 41 se muestra el número de sujetos que caen en la trampa lineal y la cantidad de sujetos que no caen en la trampa lineal del problema de granjero, en cada uno de los grupos cognitivos de igual forma como se han agrupado en el análisis anterior.

Grupo	Caen-	Porcentaje-	No caen+	Porcentaje+	Total
PRCA1	19	100%	0	0%	19
PRCA2	6	100%	0	0%	6
PRT	4	100%	0	0%	4
PRF	1	100%	0	0%	1
Total	30		0		30

Tabla 41. Frecuencia por grupos, que caen en la trampa del problema de granjero de segundo de bachiller.

Este problema al igual que en los grupos anteriores de bachiller exige un alto nivel cognitivo, ya que lo muestran los datos crudos, los 30 sujetos caen en la trampa, por este motivo no se encontró la relación buscada en este problema en particular, ya que el grupo cognitivo alto al igual que los grupos restantes mostraron muy marcadamente el fenómeno de la ilusión de la linealidad.

Si comparamos este resultado con primer grado de bachiller nos mostraría que primer grado de bachiller se desempeñó de mejor forma que segundo grado, esto se debe posiblemente a que en primero de bachiller se encontraron pensadores lentos y por consecuencia grupos más altos cognitivamente hablando en el sentido de las escalas de ambos test.

4.3.7 Análisis del problema de peso de la pelota

El problema dice lo siguiente:

Si una pelota de basketball pesa $\frac{1}{2}$ kilo más la mitad de su propio peso, ¿cuánto pesa?

Este problema no es del tipo trampa lineal o ilusión de la linealidad, sino un problema de trampa cognitiva en el que la trampa cognitiva radica en la comprensión del texto, como lo menciona su autor Gardner (1986) el problema se podría enfocar de esta manera: “la pelota de basketball pesa $\frac{1}{2}$ kg. La mitad de su peso debe ser $\frac{1}{4}$ de kg. Sumamos estos valores y obtenemos esta respuesta $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ de kilo”.

El problema radica en descubrir el peso de la pelota y si resulta de tres cuartos entonces no puede ser de medio kilo como se afirmó al principio. La respuesta correcta se podría resolver realizando un dibujo que modele correctamente el problema o una ecuación (x es la mitad de peso de la pelota, entonces $1/2 + x = x + x$) de dicho problema para obtener como resultado 1 kg.

En los grados anteriores para hacer una distinción más específica entre los grupos cognitivos y evaluar las estrategias con las que se realiza esta tarea, se utilizó la taxonomía *Mathematical Assessment Task Hierarchy* de Smith et al. (1996).

Análisis del problema pelota mediante la taxonomía *MATH*

	PRCA1(19)	PRCA2(6)	PRT(4)	PRF(1)	Total
Conocimiento factual					
Recordar alguna fórmula o definición.	No aplica	No aplica	No aplica	No aplica	
Comprensión					
Comprender el significado de la fórmula o de la definición.	No aplica	No aplica	No aplica	No aplica	
Procedimiento de rutina					
Realizan cálculos, operaciones	19	5	2	0	26
Transferencia de la información					
Transforma información de una forma a otra.	0	1	2	1	4
Aplicación en situaciones nuevas					
Elegir y aplicar algoritmos apropiados	0	0	0	0	

Tabla 42. Análisis del problema peso por medio de *MATH* de cada uno de los grupos cognitivos.

Por la naturaleza del problema nos centramos en el análisis de dos niveles de la taxonomía *MATH*, *el procedimiento de rutina y la transferencia de la información*, para el primer nivel se refiere al manejo de operaciones y se encontró que todos los sujetos del grupo cognitivo PRCA1 realizaron operaciones aritméticas basadas en un razonamiento incorrecto. En el grupo PRCA2, 5 de sus integrantes aplicaron operaciones y sólo uno mostró un razonamiento encajado en una transferencia de la información. En el grupo PRT la mitad de sujetos aplicó operaciones y la otra mitad realizaron transferencia de la información. El último grupo PRF, el único sujeto que lo conforma aplicó transferencia de la información, cabe rescatar que los sujetos que se ubican en el nivel de procedimiento de rutina fueron respuestas incorrectas y los sujetos que se encuentran en transferencia de la información sus respuestas fueron correctas o parcialmente correctas.

Procedimiento de rutina

	Característica de la respuesta	Frecuencia y grupo	Total
Respuesta Correcta	Respuesta 1 con operaciones. No se encontró registro	0	0
Respuesta Incorrecta	750 g. convierte $\frac{3}{4}$ a gramos.	4 del grupo PRCA1 1 del grupo PRCA2	5
	.75 kg. Convierte $\frac{3}{4}$ a decimal.	2 del grupo PRCA1	2
	$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$	13 del grupo PRCA1 4 del grupo PRCA2 2 del grupo PRT	19
Sin respuesta			

Tabla 43. Clasificación de respuestas del problema peso en procedimiento de rutina en segundo de bachiller.

La estrategia en común que utilizaron los estudiantes para resolver el problema fue sumarle a un medio un cuarto y obtener tres cuartos, ya sea de forma fraccionaria o decimal o convertida a su correspondiente equivalencia en gramos. Como consecuencia de utilizar esta estrategia obtuvieron respuestas incorrectas y por la operatividad que induce esta estrategia se consideró en el nivel de procedimiento de rutina, su clasificación de respuestas se encuentra en la Tabla 43, la cual está

distribuida entre los diferentes grupos cognitivos por ejemplo en la respuesta incorrecta de $\frac{3}{4}$, 13 sujetos del grupo PRCA1 realizaron esta estrategia. A continuación, algunos ejemplos ilustrativos:

Resuelve el siguiente problema Si una pelota de basketball pesa $\frac{1}{2}$ kilo más la mitad de su propio peso, ¿cuánto pesa? <u>250g</u> Si consideras útil un dibujo, diagrama o esquema para resolver el problema utiliza el recuadro de abajo 3 cuartos :v	Resuelve el siguiente problema Si una pelota de basketball pesa $\frac{1}{2}$ kilo más la mitad de su propio peso, ¿cuánto pesa? <u>750g</u> Si consideras útil un dibujo, diagrama o esquema para resolver el problema utiliza el recuadro de abajo 750g, $\frac{3}{4}$ $1\frac{1}{2} = 1000$ $\frac{1}{2} = 500 + 250 =$ Explica las razones por las cuales has obtenido tu respuesta.
---	--

Figura 56. Respuesta incorrecta en decimal y conversión de operaciones sobre problema de pelota en tercero de bachiller.

Estos ejemplos que se muestran en la Figura 56 son una forma diferente de escribir la respuesta de $\frac{3}{4}$, la diferencia radica en la conversión de fracción a decimal o de kilogramos a gramos, en la cual se necesita saber la equivalencia, también se observa en la Figura 56 que el sujeto conoce la equivalencia de kilogramo a gramos.

Otro ejemplo de respuesta incorrecta es $\frac{3}{4}$:

Si una pelota de basketball pesa $\frac{1}{2}$ kilo más la mitad de su propio peso, ¿cuánto pesa? $\frac{3}{4}$ kg

Si consideras útil un dibujo, diagrama o esquema para resolver el problema utiliza el recuadro de abajo



$\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

Explica las razones por las cuales has obtenido tu respuesta.

Porque la mitad de $\frac{1}{2}$ que es su propio peso es $\frac{1}{4}$, al sumarlos son $\frac{3}{4}$

Figura 57. Respuesta incorrecta sobre problema de pelota en tercero de bachiller.

Es la respuesta más común y la estrategia es sumarle a un medio un cuarto y es considerado en el nivel de procedimiento de rutina porque es un procedimiento operatorio rutinario.

Transferencia de la Información.

	Característica de la respuesta	Frecuencia de grupo	Total
Respuesta Correcta	Transforma el problema Modela correctamente	0	0
Parcialmente Correcta	Modela correctamente pero la manipulación algébrica es insatisfactoria	0	0
Parcialmente Correcta	Sólo escribe la respuesta 1 sin un argumento muy convinciente	1 sujeto del grupo PRF 2 sujetos del grupo PRT 1 sujeto del grupo PRCA2	4
Respuesta Incorrecta	No se encontró registro	0	0
Sin respuesta			

Tabla 44. Clasificación de respuestas del problema peso en Transferencia de la información en segundo de bachiller.

En transferencia de la información se consideró como respuesta correcta el encontrar alguna modelación algebraica o algún modelo gráfico, así como esquema, que resuelva la situación. Lo único que se encontró fue la respuesta correcta, pero sin una argumentación muy clara, como ejemplo tenemos la Figura 58.

Si una pelota de basketball pesa $\frac{1}{2}$ kilo más la mitad de su propio peso, ¿cuánto pesa? 1 K

Si consideras útil un dibujo, diagrama o esquema para resolver el problema utiliza el recuadro de abajo

Explica las razones por las cuales has obtenido tu respuesta.

Dice $\frac{1}{2}$ K mas la mitad de su propio peso que es $\frac{1}{2}$ K entonces es 1 K

Figura 58. Respuesta correcta sin argumento convincente sobre problema de pelota en tercero de bachiller.

La respuesta es correcta, la pelota pesa 1 kilogramo, pero el sujeto argumenta que la mitad de su peso es medio kilogramo sin alguna deducción o argumento válido.

Este problema no es de tipo ilusión de la linealidad, pero enmarca una trampa cognitiva de tipo comprensión verbal, al igual que en los problemas de linealidad se contabilizó el número de sujetos que no lograron responder satisfactoriamente y los que sí lograron responder satisfactoriamente, por cada uno sus grupos cognitivos.

Grupo	Caen-	Porcentaje-	No caen+	Porcentaje+	Total
PRCA1	19	100%	0	0%	19
PRCA2	5	83.33%	1	16.66%	6
PRT	2	50%	2	50%	4
PRF	0	0%	1	100%	1
Total	26		4		30

Tabla 45. Frecuencia por grupos, que caen en la trampa del problema de peso de segundo de bachiller.

En el grupo de bajo nivel cognitivo (PRCA1) todos sus integrantes no logran responder satisfactoriamente, en el grupo PRCA2 83.3% de sus integrantes no logran encontrar la solución, el grupo mediano PRT, aunque es un grupo con pocos integrantes, la mitad de ellos logran comprender el problema y en el último grupo solo es un integrante que logró responder satisfactoriamente

4.3.8 Análisis del problema de triángulo

Problema:

Un triángulo tiene lados de 17, 35 y 52 centímetros. ¿Cuál es su superficie en centímetros cuadrados?

Para este análisis se utiliza la taxonomía MATH, ya que el problema del triángulo es una tarea no rutinaria, que guarda cierta trampa cognitiva, en la que se le pide al estudiante calcular el área o superficie de dicho triángulo. La trampa cognitiva radica en que el estudiante va obtener el área del supuesto triángulo tomando como altura alguno de los datos que le proporciona el problema y la respuesta correcta sería que el estudiante se percata de que no se puede formar un triángulo con los datos propuestos por el problema y en consecuencia no hay superficie.

Para su análisis se describen las categorías del grupo A (conocimiento factual, comprensión y uso rutinario de procedimientos) y B (transferencia de información y aplicación en situaciones nuevas). La tarea que exige el problema es la obtención de una supuesta superficie que en realidad no existe, por lo que esta tarea no fue diseñada para saber si cierto sujeto puede definir apropiadamente el área de un triángulo, por tal razón conocimiento factual y comprensión no aplican para este tipo de tarea matemática.

	PRCA1(19)	PRCA2(6)	PRT(4)	PRF(1)	Total
<i>Conocimiento factual</i>					
Recordar la fórmula del área del triángulo	No se determinó	No se determinó	No se determinó	No se determinó	
<i>Comprensión</i>					
Comprender el significado de la fórmula	No se puede determinar	No se puede determinar	No se puede determinar	No se puede determinar	
<i>Procedimiento de rutina</i>					
Realizan cálculos base x altura	19	6	2	0	27
<i>Transferencia de la información</i>					
Reconoce la inaplicabilidad de una fórmula en un contexto	0	0	2	1	3
<i>Aplicación en situaciones nuevas</i>					
Elegir y aplicar algoritmos apropiados	0	0	0	0	

Tabla 46. Análisis del problema triángulo por medio de MATH de cada uno de los grupos cognitivos.

Se registran los resultados cuantitativos en la Tabla 46 de acuerdo a cada grupo cognitivo, este problema es de tipo tarea matemática, ya que se les pide calcular “tramposamente” el área de un triángulo que no existe”. De un total de 30 alumnos 27 alumnos responden inadecuadamente calculando el área con los datos que le proporcionan en dicho problema o combinan operaciones y 3 alumnos si logran responder satisfactoriamente.

Procedimiento de rutina:

	Característica del problema	Frecuencia de grupo	Total
Respuesta Correcta	La superficie es cero verificando de una forma operatoria	0	0
Respuesta Incorrecta	Realizan cálculos utilizando la fórmula tradicional $\frac{bxh}{2}$	13 del grupo PRCA1 3 del grupo PRCA2 2 del grupo PRT	18
	Utilizan incorrectamente la fórmula tradicional del triángulo	2 del grupo PRCA1	2
	Realizan cálculos utilizando el perímetro	2 del grupo PRCA1 1 del grupo PRCA2	3
	Otros razonamientos	2 del grupo PRCA1 2 del grupo PRCA2	4

Tabla 47. Clasificación de respuestas del problema triángulo en procedimiento de rutina en segundo de bachiller.

En la Tabla 47 se muestran la clasificación de respuestas incorrectas de los sujetos distribuidos en cada uno de los grupos cognitivos, por ejemplo 13 sujetos del grupo PRCA1 realizan cálculos utilizando la fórmula tradicional del área de un triángulo como estrategia para solucionar el problema. A continuación, describiré con más detalle y ejemplo cada una de las respuestas en este nivel de la taxonomía *MATH*.

Utilizan la fórmula $\frac{b \times h}{2}$:

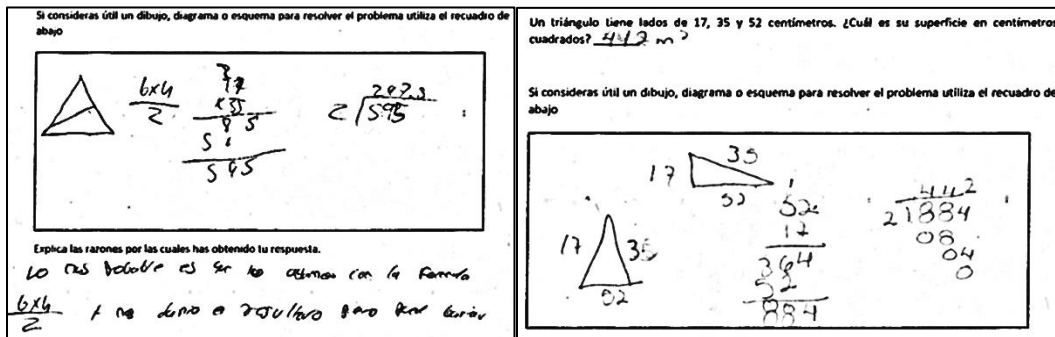


Figura 59. Fórmula tradicional de triángulo aplicada al problema de triángulo en segundo de bachiller.

En la Figura 59 se muestran dos ejemplos representativos del uso prematuro de la fórmula del área triángulo que con frecuencia se utiliza en la escuela tradicional, se encontraron dos respuestas comunes para este tipo de estrategia, la primera que se obtienen multiplicando 17 por 35 y el resultado dividido entre dos lo cual nos arroja **297.5** y la segunda respuesta que es **442** que se obtiene multiplicando 52 por 17 y dividido entre dos.

Utilizan incorrectamente la fórmula:

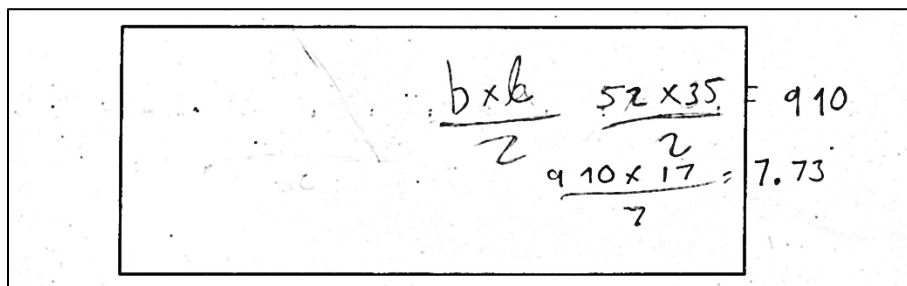


Figura 60. Uso incorrecto de la fórmula de triángulo aplicada al problema de triángulo en segundo de bachiller.

En este ejemplo se consideró de uso inadecuado de la fórmula del área del triángulo, porque el sujeto escribe la fórmula correcta, aplica los valores que él considera correctos, es decir multiplica 52 por 35 y lo divide entre dos para obtener 910, pero este resultado lo vuelve a multiplicar por el dato del lado que no ha utilizado (17) y dividirlo entre 2 y él obtiene 7.7 el cual es un cálculo incorrecto que posiblemente confunda con 7,735.

Calculan perímetro en lugar de área:

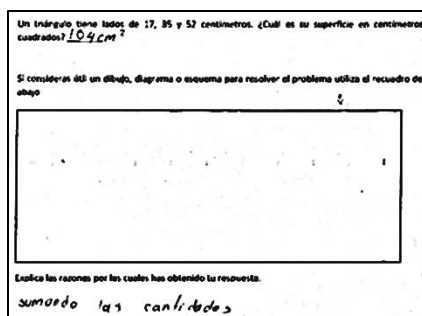


Figura 61. Perímetro de triángulo aplicada al problema de triángulo en segundo de bachiller.

En este ejemplo los sujetos calculan el perímetro del triángulo sumando cada uno de sus lados para obtener como respuesta 104.

Otros razonamientos:

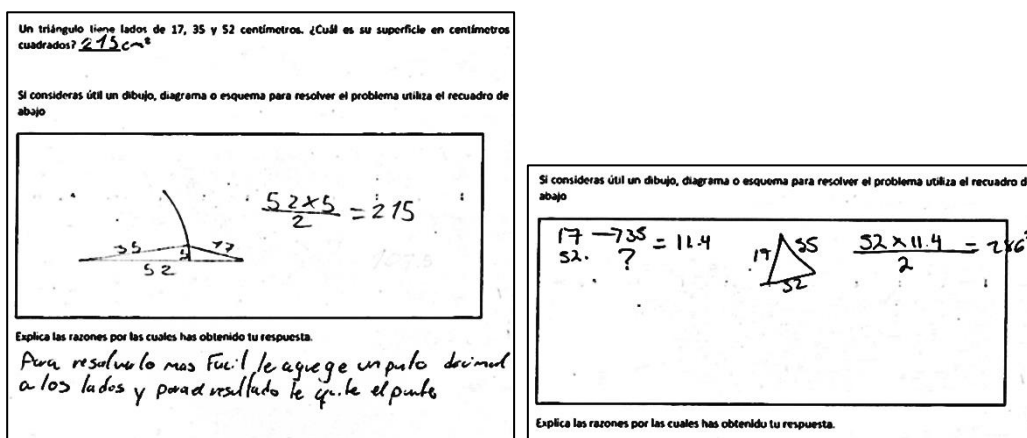


Figura 62. Otros razonamientos aplicados al problema de triángulo en segundo de bachiller.

En estos ejemplos hay dos respuestas una es **215** y la otra **286**, la primera respuesta es una estrategia un tanto confusa por que el sujeto menciona “para resolverlo más fácil le agregue un punto decimal a los lados y para el resultado le quite el punto”. No se determinó con exactitud la lógica que le llevo a esta respuesta por lo que la consideré en la categoría de otros razonamientos.

Con la segunda respuesta la estrategia que utiliza es la regla de tres, el obtiene 11.4 como el valor faltante y después la multiplica por el lado que mide 52 y lo divide entre dos. También se encontró como respuesta 30,940 que se obtuvo multiplicando los tres lados del triángulo.

Transferencia de la información:

	Característica del problema	Frecuencia del grupo	Total
Respuesta Correcta	Reconoce que no puede aplicar directamente la fórmula $\frac{bxh}{2}$ y no puede calcular la altura	1 del grupo PRF	1
Respuesta parcialmente correcta	Menciona que no se puede calcular la superficie por argumentos no convincentes	2 del grupo PRT	2
Respuesta incorrecta			
Sin respuesta			

Tabla 48. Clasificación de respuestas del problema triángulo en transferencia en segundo de bachiller.

En la Tabla 48 en total se encuentran 3 sujetos que argumentan que no se puede calcular, los sujetos del grupo PRT argumentan no muy convincente y el sujeto del grupo PRF intenta encontrar la altura.

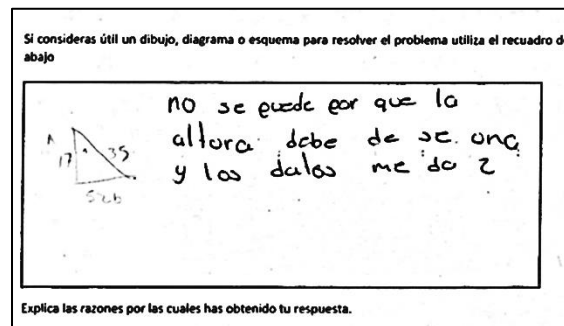
No se puede calcular la superficie

Figura 63. No aplicabilidad de la fórmula al problema de triángulo en segundo de bachiller.

El sujeto menciona que no puede calcular la superficie mencionando: “no se puede porque la altura debe ser una y los datos me dan 2” La idea es muy subjetiva y no muy clara, lo único que se puedo rescatar es la no aplicabilidad directa de los datos proporcionados de los lados del triángulo y porque el sujeto nos muestra indicios de un intento por obtener la altura.

No aplicabilidad directa de la fórmula tradicional de triángulo:

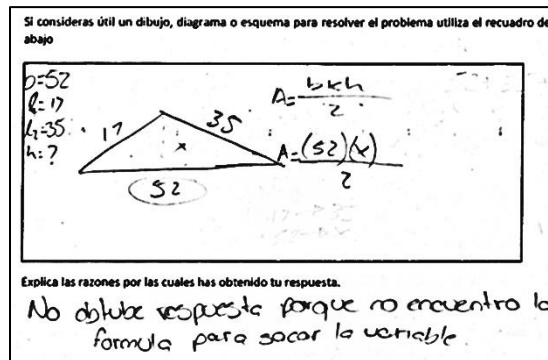


Figura 64. No aplicabilidad de la fórmula (a) al problema de triángulo en segundo de bachiller.

En este ejemplo el sujeto intenta encontrar la altura del triángulo asignándole una variable x , pero no obtienen el resultado deseado porque no lo encuentra directamente en los datos, lo importante de lo que se percata el sujeto, es la no aplicabilidad directa de la fórmula con los datos proporcionados, es decir no toma como altura alguno de los lados del triángulo.

Utilizando como herramienta la taxonomía *MATH* se pudo encontrar resultados muy interesantes con respecto a diferentes niveles en las estrategias de resolución de esta particular tarea, por ejemplo, al igual que en anteriores grupos de bachiller la mayoría de los estudiantes muestran habilidad para recordar una fórmula, es así que plasman correctamente la fórmula del área del triángulo lo cual no depende del nivel cognitivo, es decir que los estudiantes no importa en qué grupo cognitivo se encuentren, son hábiles para recordar una fórmula, que es parte del *conocimiento factual*, es por esta razón y por la naturaleza del problema que no se analizó esta fase.

En el nivel de *procedimiento de rutina* igualmente no hay una diferencia significativa entre los diferentes grupos cognitivos ya que se trata de una habilidad que no exige un alto grado de abstracción, más bien es una mecanización que requiere un poco de habilidad, aunque los pocos sujetos que se encontraron con problemas en este nivel pertenecen a los grupos cognitivos PRCA1 y PRCA2. Donde se puede encontrar un poco de diferencia es en el nivel de *transferencia de la información*, esto es porque requiere que el sujeto pueda aplicar ciertas estrategias a problemas no rutinarios o en este caso que pudiera identificar la no aplicabilidad de la fórmula tradicional del área de un triángulo o que pudiera utilizar otro tipo de fórmula para demostrar que no existe una

superficie, lo que se encontró es que los alumnos en los grupos cognitivos PRT y PRF se percatan de la trampa cognitiva debido a que realizan pruebas empíricas para poder trazar el triángulo y de tal manera dan argumentos de este tipo: “no puedo aplicar la fórmula porque no tengo la altura del triángulo”.

En este análisis al igual que los resultados de primero de bachiller y de tercero de bachiller se basan en el desempeño que tienen los sujetos ante tareas matemáticas, al igual que en los resultados anteriores la agrupación de las estrategias que implicaron respuestas incorrectas se reparten en la Tabla 49, recordando la categoría caen en trampa son las clasificaciones anteriores que implicaron respuestas incorrectas y la categoría no caen son las que implicaron respuestas correctas.

Grupo	Caen-	Porcentaje-	No caen+	Porcentaje+	Total
PRCA1	19	100%	0	0%	19
PRCA2	6	100%	0	0%	6
PRT	2	50%	2	50%	4
PRF	0	0%	1	100%	1
Total	27		3		30

Tabla 49. Frecuencia por grupos, que caen en la trampa del problema de triángulo de segundo de bachiller.

Se observa que los primeros dos grupos PRCA1 y PRCA2 todos sus integrantes respondieron de una manera incorrecta, y por ende se considera un desempeño deficiente, el grupo PRT la mitad de los sujetos, aunque la respuesta no fue cero, si se percataron de la no aplicabilidad directa de la fórmula tradicional del triángulo, y el único estudiante que es de tipo pensador rápido y pensador formal PRF igualmente se percató de la no aplicabilidad directa de la forma tradicional para calcular área de un triángulo. Esto muestra que en este problema particular los que mejor desempeño mostraron fueron los grupos PRT y PRF.

Conclusiones

En lo referente al pensamiento crítico o reflexión cognitiva, el 85% de los estudiantes son pensadores rápidos (Sistema 1) y el 15% son pensadores lentos (Sistema 2).

Con respecto al pensamiento formal, solo un estudiante de toda la muestra estudiada (95 sujetos) se encuentra en este estadio por lo que fue necesario realizar una clasificación en cuatro grupos donde los resultados más evidentes se encuentran en los grupos extremos grupo 1 de bajo nivel cognitivo con el grupo 4 de nivel medianamente alto.

En la mayoría de los problemas matemáticos con trampa cognitiva, el grupo de bajo nivel cognitivo tiene bajo desempeño y el grupo medianamente alto tiene un buen desempeño lo cual responde la pregunta de investigación, ya que en esta muestra en particular y con este tipo de tareas matemáticas se puede decir que los estudiantes con nivel de reflexión cognitiva y un razonamiento lógico aceptable son los que tienen menos probabilidad de utilizar métodos lineales en exceso donde no corresponden.

Lo señalado concuerda con la revisión de antecedentes en la que se destacan los estudios realizados por Navarro et al. (1996), cuya investigación sobre el pensamiento formal y resolución de problemas matemáticos indica serias dificultades presentes en los adolescentes al resolver los problemas propuestos. También se han encontrado resultados similares en otras investigaciones (Hernández-Suarez et al., 2013).

El Test de Razonamiento Lógico (TRL) es un predictor seguro que puede indicar cuáles son los estudiantes que tendrán dificultades en resolver problemas desafiantes con trampa cognitiva. El TRL predice que solamente los estudiantes con el nivel aceptable podrán acercarse a las respuestas correctas. Sin embargo, tal nivel aceptable no garantiza que un estudiante particular tendrá éxito en resolver un problema. Obviamente, el nivel aceptable del razonamiento lógico es necesario, pero no es una condición suficiente para un buen desempeño en la resolución de problemas matemáticos. Tal desempeño depende de otras variables (conocimientos previos, mentalidad, motivación) y esas variables se deberían tomar en cuenta en estudios posteriores.

Con respecto a la segunda pregunta de investigación gracias al extenso estudio cualitativo se pudo encontrar una amplia gama de estrategias tales como métodos lineales de varios tipos y métodos no lineales, así como una categoría aparte, en la que está presente el *contrato didáctico*. La conclusión importante al analizar sus estrategias es que la diferencia entre estudiantes de nivel cognitivo medianamente alto y estudiantes de nivel cognitivo bajo es que los primeros son capaces de percibir la no aplicabilidad de cierta fórmula, que es una fase en la taxonomía *MATH* y eso les ayuda a resolver cierto tipo de tareas con éxito.

Otra conclusión importante es que no hay diferencia entre los tres grados de bachiller, es decir, no importa si un estudiante de tercer grado tiene más tiempo en la vida escolar que un estudiante de primero de bachiller, los tipos de estrategia de resolución son muy parecidos y no hay una diferencia significativa. Esto tiene una implicación fuerte en la educación media, ya que nos dice que los estudiantes, al pasar de un cierto grado, no logran concebir las estrategias o herramientas necesarias para la solución de problemas no rutinarios

Se recomienda que los docentes enseñen a sus estudiantes a enfrentarse a un tipo de problemas no tradicionales, claro que para esto es necesario incrementar el nivel cognitivo de los estudiantes.

Con este trabajo hemos intentado caracterizar de alguna manera a los estudiantes que usan inadecuadamente la proporcionalidad. Comprender las estrategias subyacentes en las ideas equivocadas de los estudiantes es un primer paso en su corrección o prevención, lo cual tiene una fuerte implicación para la enseñanza de las matemáticas. Una opción para corregir este error es usar diseños didácticos que promuevan tanto el pensamiento reflexivo como lógico y como ejemplo Slisko (2017) utiliza el aprendizaje autorregulado.

Referencias

- Acevedo, J., y Martínez, J. M. O. (1995). Validación y aplicación de un test de razonamiento lógico. *Revista de psicología general y aplicada*, 48(3), 339-351.
- Aguilar, M., Navarro, J., López, J. y Alcalde, C. (2002). Pensamiento formal y resolución de problemas matemáticos. *Psicothema*, 14(2002), 382-386.
- Álvarez-Gayou, J. L., Camacho, S. M., Maldonado, G., Trejo, C., Olguín, A. y Pérez, M. (2014). La investigación cualitativa. *Sikua, Boletín científico de la Escuela Superior de Tlahuelilpan*, 2(3). Recuperado de <https://www.uaeh.edu.mx/scige/boletin/tlahuelilpan/n3/e2.html>
- Ates, S., y Cataloglu, E. (2007). The effects of students' reasoning abilities on conceptual understanding and problem-solving skills in introductory mechanics. *European Journal of Physics*, 28(6), 1161.
- Bitner, B. L. (1991). Formal operational reasoning modes: Predictors of critical thinking abilities and grades assigned by teachers in science and mathematics for students in grades nine through twelve. *Journal of Research in Science Teaching*, 28(3), 265-274.
- Bloom, B. (Ed.). (1956). Taxonomy of Educational Objectives. Book 1: *Cognitive Domain*. Nueva York: McKay.
- Bond, T. G. (1995a). Piaget and measurement I: The twain really do meet. *Archives de Psychologie*, 63, 71-87.
- Bond, T. G. (1995b). Piaget and measurement II: Empirical validation of the Piagetian model. *Archives de Psychologie*, 63, 155-185.
- Bond, T. G. & Bunting, E. (1995). Piaget and measurement III: Reassessing the méthode clinique. *Archives de Psychologie*, 63, 231-255.
- Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics* (Edited and translated by N. Balacheff, M. Cooper, R. Shuterland, y V. Warfield). Dordrecht: Kluwer.
- Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2007). *Research Methods in Education*. Londres: Routledge
- Coletta, V. P., Phillips, J. A., y Steinert, J. J. (2007). Why you should measure your students' reasoning ability. *The Physics Teacher*, 45(4), 235-238.

- De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D., y Verschaffel, L. (2007). *The illusion of linearity: From analysis to improvement*. New York: Springer.
- De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D., y Verschaffel, L. (2002). Improper use of linear reasoning: An in-depth study of the nature and the irresistibility of secondary school students' errors. *Educational Studies in Mathematics*, 50, 311-334.
- De Bock, D., Verschaffel, L., y Janssens, D. (1998). The predominance of the linear model in secondary school students' solutions of word problems involving length and area of similar plane figures. *Educational Studies in Mathematics*, 35, 65-83.
- De Bock, D., Verschaffel, L., y Janssens, D. (2002b). The effects of different problem presentations and formulations on the illusion of linearity in secondary school students. *Mathematical Thinking and Learning*, 4, 65-89.
- Dolle, J. M. (2006). *Para comprender a Jean Piaget*. Segunda edición: Ciudad de México: Trillas.
- Ennis, R. (2001). Critical thinking assessment. *Theory and Practice*, 32, 179-186.
- Erickson, T. A., y Mattson, M. E. (1981). From words to meaning: A semantic illusion. *Journal of Verbal Learning and Verbal Behavior*, 20, 540-552.
- Facione, P. (1990b). *The California Critical Thinking Skills Test: College Level*. Millbrae, CA: The California Academic Press.
- Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics*. Dordrecht:Reidel.
- Fischbein, E. (1999). Intuitions and schemata in mathematical reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 38, 11-50.
- Fisher, A. (2001). *Critical thinking: An introduction*. New York: Cambridge University Press.
- Fisher, A. y Scriven, M. (1997). *Critical thinking: Its definition and assessment*. Point Reyes, CA: Edgepress.
- Frederick, S. (2005). Cognitive reflection and decision making. *The Journal of Economic Perspectives*, 19(4), 25-42.
- Gagatsis, A., y Kyriakides, L. (2000). Teachers' attitudes towards their pupils' mathematical errors. *Educational Research and Evaluation*, 6(1), 24-58.
- Gardner, M. (1986). *Entertaining mathematical puzzles*. New York: Dover Publications, Inc.

- Gigerenzer, G. (1991). How to make cognitive illusions disappear: Beyond “heuristics and biases”. *European Review of Social Psychology*, 2, 8–115.
- Halpern, D. F. (2010a). Halpern Critical Thinking Assessment. SCHUHFRIED (Vienna Test System): Moedling, Austria. <http://www.schuhfried.com/vienna-test-system-vts/all-tests-from-a-z/test/hcta-halpern-critical-thinking-assessment-1/>
- Hernández-Suarez, C. A., Ramírez-Leal, P. y Rincón-Álvarez, G. A. (2013). Pensamiento matemático en estudiantes universitarios. *ECOMATEMATICO*, 4(1), 4-10. <https://doi.org/10.22463/17948231.72>
- Kahneman, D. (2002). *Maps of bounded rationality: A perspective on intuitive judgment and choice. Nobel Prize Lecture*. Recuperado el 08 de diciembre, 2002 en <https://www.nobelprize.org/uploads/2018/06/kahnemann-lecture.pdf>
- Kahneman, D., Slovic, P., y Tversky, A. (1982). *Judgement under uncertainty: Heuristic and biases*. Cambridge University Press.
- Kellah Edens, y Ellen Potter (2007) The Relationship of Drawing and Mathematical Problem Solving: Draw for Math Tasks, *Studies in Art Education*, 48:3, 282-298, DOI:10.1080/00393541.2007.11650106
- Lawson, A. E. (1993). Classroom test of scientific reasoning: Revised paper–pencil edition. *Tempe, AZ: Arizona State University*.
- Leinhardt, G., Zaslavsky, O., y Stein, M. K. (1990). Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning, and teaching. *Review of Educational Research*, 60, 1–64.
- López Puga, J. (2012). Evolución de la reflexión cognitiva en la Universidad. *Divulgación Matemática*, 5(2), 17-18.
- Toplak, M. E., West, R. F., y Stanovich, K. E. (2013). Assessing miserly information processing: An expansion of the Cognitive Reflection Test. *Thinking & Reasoning*, 20(2), 147–168.
- Toplak, M. E., West, R. F., y Stanovich, K. E. (2011). The Cognitive Reflection Test as a Predictor of Performance on heuristics-and-biases-task, *Memory & Cognition*, 39, 1275-1289.
- Navarro, V., Batanero, C. y Díaz, J. (1996). Razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria. *Educación Matemática*, 1(8), 26-39.

- Orrantia, J., Tarín, J. y Vicente, S. (2011). El uso de la información situacional en la resolución de problemas aritméticos. *Infancia y Aprendizaje*, 34(1), 81-94.
- Pohl, R. F., y Hell, W. (1996). No reduction of hindsight bias with complete information and repeated testing. *Organizational Behaviour and Human Decision Processes*, 67, 49–58.
- Pohl, R. F. (2004). *Cognitive Ilusions*. New York: Psychology:Press.
- Ramírez, M. y Block, D. (2009). "La fracción y la razón: un vínculo difícil en las matemáticas escolares". *Educación Matemática*, 21(1), 63-90
- Roediger, H. L. III (1996). Memory illusions. *Journal of Memory and Language*, 35, 76–100.
- Reuter, Timo., Schnotz, W., y Rasch, R. (2014). Does representation matter? Teacher-provided tables and drawings as cognitive tools for solving non-routine word problems in primary school. *Proceedings of the frontiers in Mathematics and Science Education Research Conference*. Famagusta, Norht Cyprus.
- Slisko, J. A. (2017). Self-regulated learning in a general university course: design of learning tasks, their implementation and measured cognitive effects. *Journal of European Educational*, 7(2), 12-24.
- Smith, G., Wood, L., Coupland, M., Stephenson, B., Crawford, K. y Ball, G. (1996). Constructing mathematical examinations to asses a range of knowledge and skills. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 27(1), 65–77. doi: 10.1080/0020739960270109
- Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalizing problems. *Educational Studies in Mathematics*, 20, 147–164.
- Tierney, C., Boyd, C., y Davis, G. (1990). Prospective primary teachers' conceptions of area. In G. Booker, P. Cobb, & T. N. de Mendicuti (Eds.), *Proceedings of the 14th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 307–314). Oaxtepe, Mexico.

Tobin, K. G., y Capie, W. (1981). The development and validation of a group test of logical thinking. *Educational and Psychological Measurement*, 41(2), 413-423.

Tversky, A., y Kahneman, D. (1974). Judgments under uncertainty: Heuristics and biases. *Science*, 185, 1124–1131.

Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D., y Verschaffel, L. (2005). Not everything is proportional: Effects of age and problem type on propensities for overgeneralization. *Cognition and Instruction*, 23(1), 57–86.

Verschaffel, L., Greer, B., y De Corte, E. (2000). *Making sense of word problems*. Lisse, The Netherlands: Swets, & Zeitlinger.

Watson, G. y Glaser, E. (1980). *Critical Thinking Appraisal*. San Antonio: Harcourt Brace Jovanovich.

Anexo A**Test de Reflexión Cognitiva**

Nombre: _____

Edad: _____

1. Una raqueta y una pelota cuestan 1.10 euros en total. La raqueta cuesta 1.00 euro más que la pelota.
¿Cuánto cuesta la pelota?

La pelota cuesta _____ euros.

¿Cómo llegaste a tal respuesta?

2. Si 5 máquinas tardan 5 minutos en fabricar 5 piezas, ¿cuánto tardarán 100 máquinas en fabricar 100 piezas?

Las máquinas tardarán _____ minutos.

¿Cómo llegaste a tal respuesta?

3. En un lago hay una zona cubierta de lirios. El área de lirios se hace el doble de grande cada día. Si el área de lirios tarda 48 días en cubrir el lago entero, ¿cuántos días tardarán los lirios en cubrir la mitad de lago?

Los lirios tardarán _____ días

¿Cómo se llega a tal respuesta?

Anexo B

Test de Razonamiento lógico

Instrucciones

El cuestionario tiene por finalidad poder comprender mejor la lógica que usas para pensar.

El razonamiento que elijas para cada respuesta se considera tan importante como la respuesta misma.

Para responder cada pregunta marca la respuesta en la hoja que se entrega. Por favor, no escribas nada sobre las preguntas del cuestionario.

Para responder cada una de las preguntas sigue los siguientes pasos.

1. Lee con cuidado el enunciado de cada pregunta.
2. Piensa detenidamente la respuesta haciendo los cálculos que estimes oportunos.
3. Escribe la respuesta en el recuadro correspondiente de la hoja de respuestas.

Ej. 12. Razón

4. Lee todos los razonamientos que se presentan como posibles explicaciones de la respuesta que has elegido.
5. Selecciona cuidadosamente la opción que consideres oportuna teniendo en cuenta el razonamiento que utilizaste en tu respuesta.
6. Señala en el recuadro correspondiente de la hoja de respuesta la letra que indique la opción que has elegido.

Ej. 12. Razón

7. Si en algún momento quieres modificar la respuesta ofrecida, táchala y señala la nueva de la forma que se te indique a continuación.

Ej. 12. Razón

No olvides escribir tu nombre en la hoja de respuestas.

Pregunta 1

Se necesitan exprimir 4 naranjas para obtener seis vasos de jugo. ¿Qué cantidad de jugo se podría obtener con seis naranjas?

(Considere que todas las naranjas son del mismo tamaño)

- a. 7 vasos
- b. 8 vasos
- c. 9 vasos
- d. 10 vasos
- e. Otra respuesta

Razón

1. El número de vasos y el número de naranjas estarán siempre en la relación 3 a 2.
2. Con más naranjas, las diferencias serán menos.
3. La diferencia entre las cantidades será siempre de dos.
4. Con cuatro naranjas la diferencia era dos. Con seis naranjas sería dos más
5. No se podría predecir

Pregunta 2

Usando las mismas naranjas de la pregunta 1. ¿Cuántas naranjas se necesitarán para hacer 15 vasos de jugo?

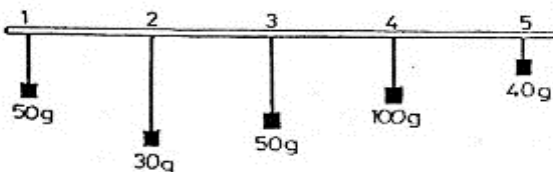
- a. 7 naranjas y media.
- b. 9 naranjas
- c. 10 naranjas
- d. 13 naranjas
- e. Otra respuesta

Razón

1. El número de naranjas y el número de vasos de jugo estarán siempre en la relación 2 a 3.
2. El número de naranjas será siempre menor que el número de vasos de jugo.
3. La diferencia entre las cantidades será siempre de dos
4. El número de naranjas necesarias será la mitad de número de vasos de jugo
5. No se podría predecir

Pregunta 3

Supongamos que queremos hacer un experimento para averiguar si al modificar la longitud de un péndulo cambia también la cantidad de tiempo en oscilar de un lado a otro. ¿Qué péndulos deberíamos usar para realizar dicho experimento?



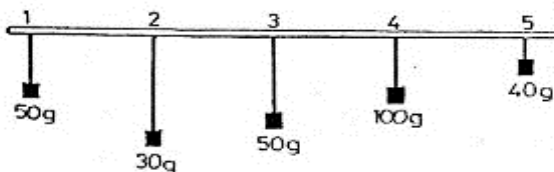
- a. 1 y 4
- b. 2 y 4
- c. 1 y 3
- d. 2 y 5
- e. Todos

Razón

1. Compararíamos el péndulo más largo con el más corto.
2. Necesitaríamos comparar todos los péndulos entre sí.
3. Al aumentar la longitud tendríamos que disminuir el peso.
4. Los péndulos elegidos tendrían que tener todas las mismas longitudes y distinto peso.
5. Los péndulos elegidos tendrían que tener todos distinta longitud e igual peso.

Pregunta 4

Supongamos que queremos realizar un experimento para averiguar si al cambiar el peso del péndulo cambia también la cantidad de tiempo que tarda en oscilar de un lado a otro. ¿Qué péndulos tendríamos que usar para realizar dicha experiencia?



- a. 1 y 4
- b. 2 y 4
- c. 1 y 3
- d. 2 y 5
- e. Todos

Razón

1. compararíamos el péndulo más pesado con el más ligero.
2. Necesitaríamos comparar todos los péndulos entre sí.
3. Al aumentar el peso tendríamos que disminuir la longitud.
4. Los péndulos elegidos tendrían que tener diferente peso y la misma longitud.
5. compararíamos péndulos de igual peso y distinta longitud.

Pregunta 5

Un jardinero compró un paquete que contenía 3 semillas de calabaza y 3 semillas de frijol. Si se extrae una semilla del paquete. ¿Cuál es la probabilidad de que ésta sea de frijol?

- a. 1 de cada 2
- b. 1 de cada 3
- c. 1 de cada 4
- d. 1 de cada 6
- e. 4 de cada 6

Razón

- 1. Se necesitarían cuatro extracciones dado que las tres semillas de calabaza podrían suceder que se extrajesen seguidas.
- 2. Hay seis semillas entre las cuales ha de extraerse una de frijol.
- 3. De las tres semillas de frijol que hay se necesita extraer una.
- 4. La mitad de las semillas son de frijol.
- 5. Del total de seis semillas, además de la de frijol se podrían extraer tres de calabaza.

Pregunta 6

Un jardinero compró un paquete que contenía 21 semillas de diversas clases. La composición era la siguiente:

3 de flores pequeñas rojas	4 de flores pequeñas amarillas
5 de flores pequeñas naranjas	4 de flores grandes rojas
2 de flores grandes amarillas	3 de flores grandes naranjas

Si sólo ha de plantar una semilla, ¿Cuál es la probabilidad de que la planta resultante tenga flores rojas?

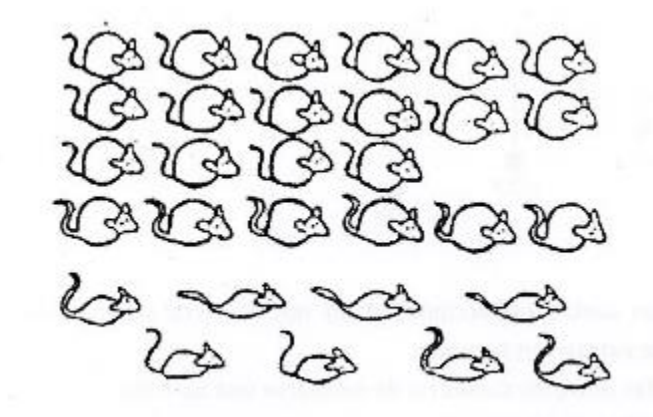
- a. 1 de cada 2
- b. 1 de cada 3
- c. 1 de cada 7
- d. 1 de cada 21
- e. Otra respuesta

Razón

- 1. Ha de elegir una semilla entre aquellas que dan flores rojas, amarillas o naranjas.
- 2. $\frac{1}{4}$ de las pequeñas y $\frac{4}{9}$ de las grandes son rojas.
- 3. No importa que sean grandes o pequeñas. De las siete semillas rojas que hay se ha de elegir una.
- 4. Ha de seleccionar una semilla roja de un total de 21 semillas.
- 5. Siete de las 21 semillas darán flores rojas.

Pregunta 7

La siguiente figura representa una muestra de los ratones que viven en un campo. A partir de la figura, indica si es más probable que tengan cola negra los ratones gordos que los delgados.



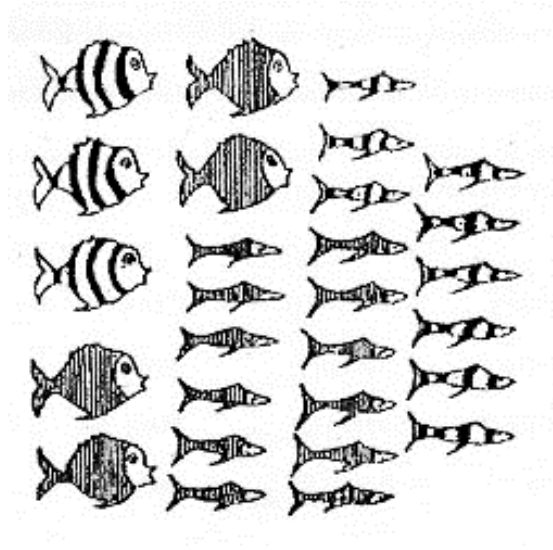
- a. Si los ratones gordos tienen mayor probabilidad de tener cola negra que los delgados.
- b. No. Los ratones gordos no tienen más probabilidad de tener cola negra que los delgados.

Razón

- 1. $\frac{8}{11}$ de los ratones gordos tienen cola negra y $\frac{3}{4}$ de los ratones delgados tienen cola blanca.
- 2. Tanto alguno de los ratones gordos como alguno de los ratones delgados tienen cola blanca.
- 3. De los treinta ratones, 18 tienen cola negra y 12 cola blanca.
- 4. Ni todos los ratones gordos tienen cola negra, ni todos los delgados tienen cola blanca.
- 5. $\frac{6}{12}$ de los ratones con cola blanca son gordos.

Pregunta 8

¿Es más probable que tengan rayas anchas los peces gordos que los peces delgados?



- a. Sí
- b. No

Razón

1. Unos peces gordos tienen rayas anchas y otros estrechas.
2. $\frac{3}{7}$ de los peces gordos tienen rayas anchas.
3. $\frac{12}{28}$ tienen rayas anchas y $\frac{16}{28}$ las tienen estrechas.
4. $\frac{3}{7}$ de los peces gordos y $\frac{9}{21}$ de los peces delgados tienen rayas anchas.
5. Algunos de los peces con rayas anchas son delgados y otros son gordos.

Pregunta 9

Tres estudiantes de cada uno de los cursos de 1°, 2° y 3° de preparatoria son candidatos al consejo escolar. La representación estará constituida por un estudiante de cada curso. Cada votante debe considerar todas las combinaciones posibles antes de decidir su voto.

Dos posibles combinaciones serían Tomas, José y Pedro (TJP) e Isabel, Carmen y María (ICM)

Has una lista con todas las combinaciones posibles usando los espacios que se ofrecen en la hoja de respuestas. Hay más espacios de los necesarios.

Consejo Escolar		
1° DE PREPA	2° DE PREPA	3° DE PREPA
Tomás (T)	José (J)	Pedro (P)
Isabel (I)	Carmen (C)	María (M)
Antonia (A)	Beatriz (B)	Luis (L)

Pregunta 10

Se prevé abrir en breve 4 tiendas en un nuevo centro comercial.

Optan por comprar los locales una peluquería (P), una farmacia (F), un supermercado (S) y una cafetería (C).

Cada uno de los negocios mencionados ha de ocupar uno de los locales previstos.

Una posible forma de ocupación sería PFSC.

Has una lista con todas las formas posibles de ocupación de los locales.

Hay más espacios en la hoja de respuestas de los que son necesarios.

1	2	3	4
---	---	---	---

Hoja de respuestas

Apellidos _____ Nombre _____ Edad _____

Escuela _____

1. - ☐

razón. - ☐
2. - ☐

razón. - ☐
- 3.- ☐

razón. - ☐
- 4.- ☐

razón. - ☐
- 5.- ☐

razón. - ☐
6. - ☐

razón. - ☐
7. - ☐

razón. - ☐
8. - ☐

razón. - ☐

9. -

10.-

Anexo C

Primero de bachiller

			TRC		TRL				
	TRC	TRL	PR[0,1]	PL[2,3]	PCA1[0,1]	PCA2[2,3]	PT[4,6]	PF[7,10]	TRCvsTRL
Alumno1	0	0	X		X				PRCA1
Alumno2	0	0	X		X				PRCA1
Alumno3	0	3	X			X			PRCA2
Alumno4	0	2	X			X			PRCA2
Alumno5	0	1	X		X				PRCA1
Alumno6	0	0	X		X				PRCA1
Alumno7	0	0	X		X				PRCA1
Alumno8	0	1	X		X				PRCA1
Alumno9	2	6		X			X		PLT
Alumno10	0	1	X		X				PRCA1
Alumno11	0	1	X		X				PRCA1
Alumno12	0	1	X		X				PRCA1
Alumno13	0	0	X		X				PRCA1
Alumno14	0	1	X		X				PRCA1
Alumno15	0	1	X		X				PRCA1
Alumno16	0	0	X		X				PRCA1
Alumno17	0	1	X		X				PRCA1
Alumno18	0	0	X		X				PRCA1
Alumno19	0	0	X		X				PRCA1
Alumno20	2	5		X			X		PLT
Alumno21	0	2	X			X			PRCA2
Alumno22	0	0	X		X				PRCA1
Alumno23	0	0	X		X				PRCA1
Alumno24	0	2	X			X			PRCA2
Alumno25	0	3	X			X			PRCA2
Alumno26	2	5		X			X		PLT
Alumno27	0	2	X			X			PRCA2
Alumno28	0	1	X		X				PRCA1
Alumno29	0	0	X		X				PRCA1
Alumno30	0	2	X			X			PRCA2
Alumno31	0	0	X		X				PRCA1
Alumno32	0	0	X		X				PRCA1
Alumno33	0	1	X		X				PRCA1

Tercero de bachiller

No. Alumno	TRC	TRL	PR[0,1]	PR[2,3]	PCA1[0,1]	PCA2[2,3]	PT[4,6]	PF[7,10]	TRCvsTRL
Alumno1	0	0	X		X				PRCA1
Alumno2	0	3	X			X			PRCA2
Alumno3	1	3	X			X			PRCA2
Alumno4	1	5	X				X		PRT
Alumno5	0	0	X		X				PRCA1
Alumno6	0	2	X			X			PRCA2
Alumno7	0	2	X			X			PRCA2
Alumno8	1	5	X				X		PRT
Alumno9	0	4	X				X		PRT
Alumno10	0	2	X			X			PRCA2
Alumno11	0	0	X		X				PRCA1
Alumno12	0	2	X			X			PRCA2
Alumno13	0	4	X				X		PRT
Alumno14	1	3	X			X			PRCA2
Alumno15	0	0	X		X				PRCA1
Alumno16	0	0	X		X				PRCA1
Alumno17	0	4	X				X		PRT
Alumno18	0	0	X		X				PRCA1
Alumno19	0	0	X		X				PRCA1
Alumno20	0	0	X		X				PRCA1
Alumno21	1	6	X				X		PRT
Alumno22	0	4	X				X		PRT
Alumno23	0	2	X			X			PRCA2
Alumno24	0	0	X		X				PRCA1
Alumno25	1	4	X				X		PRT
Alumno26	1	3	X			X			PRCA2
Alumno27	0	0	X		X				PRCA1
Alumno28	0	0	X		X				PRCA1
Alumno29	1	3	X			X			PRCA2
Alumno30	0	0	X		X				PRCA1
Alumno31	0	0	X		X				PRCA1
Alumno32	0	0	X		X				PRCA1

Segundo de bachiller

No. Alumno	TRC	TRL	PR[0,1]	PL[2,3]	PCA1[0,1]	PCA2[2,3]	PT[4,6]	PF[7,10]	TRCvsTRL
Alumno1	0	0	X		X				PRCA1
Alumno2	0	2	X			X			PRCA2
Alumno3	0	1	X		X				PRCA1
Alumno4	0	0	X		X				PRCA1
Alumno5	1	8	X					X	PRF
Alumno6	0	0	X		X				PRCA1
Alumno7	0	2	X			X			PRCA2
Alumno8	0	1	X		X				PRCA1
Alumno9	0	0	X		X				PRCA1
Alumno10	0	4	X				X		PRT
Alumno11	0	0	X		X				PRCA1
Alumno12	0	2	X			X			PRCA2
Alumno13	0	1	X		X				PRCA1
Alumno14	1	0	X		X				PRCA1
Alumno15	0	1	X		X				PRCA1
Alumno16	0	0	X		X				PRCA1
Alumno17	0	4	X				X		PRT
Alumno18	0	4	X				X		PRT
Alumno19	0	1	X		X				PRCA1
Alumno20	0	1	X		X				PRCA1
Alumno21	1	2	X			X			PRCA2
Alumno22	0	1	X		X				PRCA1
Alumno23	0	1	X		X				PRCA1
Alumno24	0	1	X		X				PRCA1
Alumno25	0	5	X				X		PRT
Alumno26	0	0	X		X				PRCA1
Alumno27	0	2	X			X			PRCA2
Alumno28	0	0	X		X				PRCA1
Alumno29	0	0	X		X				PRCA1
Alumno30	0	2	X			X			PRCA2