BENEMÉRITA UNIVERSIDAD

AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

LA MANIPULACIÓN DE LA IMAGEN COMO ESTRATEGIA DE VISUALIZACIÓN EN LA RESOLUCIÓN PROBLEMAS DE CÁLCULO DE ÁREAS

TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE

MAESTRA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

PRESENTA

LIC. CARINA ANDREA HERNÁNDEZ PACHECO

DIRECTORA DE TESIS

DRA. ESTELA DE LOURDES JUÁREZ RUIZ

CO-DIRECTOR DE TESIS

DR. JOSÉ DIONICIO ZACARÍAS

PUEBLA, PUE. FEBRERO 2020

BUAP

DRA. LIDIA AURORA HERNÁNDEZ REBOLLAR
SECRETARIA DE INVESTIGACIÓN Y
ESTUDIOS DE POSTGRADO, FCFM-BUAP
P R E S E N T E:

Por este medio le informo que la C:

CARINA ANDREA HERNÁNDEZ PACHECO

Estudiante de la Maestría en Educación Matemática, ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 29 de noviembre de 2019, con la tesis titulada:

"LA MANIPULACIÓN DE LA IMAGEN COMO ESTRATEGIA DE VISUALIZACIÓN EN LA RESOLUCIÓN PROBLEMAS DE CÁLCULO DE ÁREAS"

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

A T E N T A M E N T E.
H. Puebla de Z. a 28 de enero de 2020

DR. JOSIP SLISKO IGNJATOV
COORDINADOR DE LA MAESTRÍA
EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA.

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA - FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS - SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y ESTUDIOS DE POSGRADO · 1578 ·

Ccp Archivo.
DR JAJL / l'agm*

Facultad
de Ciencias
Físico Matemáticas

Av. San Claudio y 18 sur, edif. FM1
Ciudad Universitaria, Col. San
Manuel, Puebla, Pue. C.P. 72570
01 (222) 229 55 00 Ext. 7550 y 7552

Esta investigación se realizó gracias al financiamiento del

Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT)

De enero de 2018 a diciembre de 2019.

N° de CVU 890995

Agradecimientos

Estaré siempre agradecida con Dios por brindarme valiosas oportunidades de formación profesional, por abrirme puertas en lugares que nunca imaginé estar, por presentarme personas con un buen corazón y sobre todo por darme vida para presenciar que los sueños sí se pueden cumplir.

El amor sincero de mi madre Luz Mary Pacheco, el apoyo de mi padre Ramiro Hernández y la admiración y compañía desde lejos de mi hermana-amiga Brenda Hernández, han sido el motor que impulsa mi andar, la fortaleza para soportar la distancia y el ejemplo de entereza y sacrificio. Por eso y muchas cosas más agradezco a mi maravillosa familia.

También abro espacio para gradecer a esas amigas que desde la infancia me han mostrado su amistad incondicional y cuán orgullosas están de mí ahora, al igual que yo de ellas. A esas amistades que en el camino se te van presentando y que se quedan a tu lado para apoyarte y ofrecerte alegrías, aventuras extraordinarias, conocimientos enriquecedores, tardes de ocio, y que al final, las haces parte de tu familia, puesto que te hacen sentir como tal.

Por último, pero no menos importante, agradezco a todos y cada uno de los profesores de la maestría por ese gran trabajo que realizan al formarnos como profesionales, por mantenernos actualizados con investigaciones en este campo de la Educación Matemática y por enseñarnos a amar nuestra profesión. A Aby, por su compromiso y gestión en la maestría. A la Dra. Estela Juárez, directora de esta tesis, por todo su apoyo, conocimiento, dedicación para hacer este trabajo posible, además, por mostrarme ese espíritu de indagación y sed de aprendizaje que tiene hacia su continua formación.

Resumen

Este trabajo de investigación presenta una interpretación de las capacidades visoespaciales y los registros de representación semiótica que evidenciaron un grupo de estudiantes de nuevo ingreso a la educación superior cuando se enfrentaron a problemas que contenían registros figurales, específicamente, a problemas de cálculo de áreas de figuras compuestas, durante la implementación de una secuencia didáctica. Asimismo, se identificaron las estrategias heurísticas que el grupo de estudiantes participantes pusieron en juego para resolver tales problemas. Por lo tanto, el objetivo general que se planteó en la presente investigación consistió en interpretar las estrategias de visualización que los estudiantes participantes manifiestan en la resolución de problemas de cálculo de áreas de figuras geométricas. Los resultados se analizaron bajo el marco de interpretación de capacidades visoespaciales propuesto por Miragliotta y Baccaglini-Frank (2017), el cual está sustentado por la Teoría de los conceptos figurales de Fischbein (1993) y las aprehensiones cognitivas de Duval (1995). Finalmente, se concluyó que una de las capacidades visoespaciales más importantes en la resolución de problemas de cálculo de áreas de figuras compuestas es la de *manipulación de la imagen* y que está estrechamente relacionada con la heurística que se buscaba promover; además, se logró una mejora en la resolución de problemas de este tipo por parte de los estudiantes participantes debido a la secuencia didáctica implementada.

Abstract

This research paper presents an interpretation of the visuo-spatial abilities and registers of semiotic representation that a group of students new entering higher education evidenced when they faced problems with figural registers, specifically, areas calculation problems of composite figures, during the implementation of a didactic sequence. Likewise, the heuristic strategies that the group of participating students put into play to solve such problems are identified. Therefore, the general objective that was raised in the present investigation was to interpret the visualization strategies that the participating students manifest when solving problems of calculation of areas of geometric figures. The results were analyzed under the framework of interpretation of visuo-spatial abilities proposed by Miragliotta and Baccaglini-Frank (2017), which is supported by Fischbein's theory of figural concepts (1993) and Duval's cognitive apprehensions (1995). Finally, it was concluded that one of the most important visuo-spatial abilities in solving problems of areas calculation of composite figures is the *imagery manipulation ability* and it is closely related to the heuristic that was sought to be promoted; in addition, participating students achieved an improvement in solving problems of this type due to the didactic sequence implemented.

Índice

Índice de figuras

Índice de tablas

Introducción

La presente investigación muestra una interpretación de las capacidades visoespaciales que presentan algunos estudiantes de nuevo ingreso a la universidad antes y después de la aplicación de una secuencia didáctica para promover la resolución de problemas de cálculo de áreas de figuras planas a través de dichas capacidades como medios heurísticos. Esto debido a que se encontraron deficiencias en la resolución de problemas de geometría básica en una prueba diagnóstica previamente aplicada.

En el Capítulo 1, denominado Planteamiento de la investigación, se presentan algunos antecedentes que marcan la importancia, tanto de la resolución de problemas como del desarrollo de capacidades visoespaciales. En primera instancia, se expone un poco sobre el avance que se ha dado en torno a la resolución de problemas matemáticos y la relevancia que tiene esta habilidad a nivel mundial. Asimismo, para aquellos problemas que presentan registros figurales, como los geométricos, se requiere de ciertas habilidades de pensamiento espacial y tratamiento figural para resolverlos, con lo cual se muestran varios autores que corroboran en sus investigaciones el impacto que causan estas habilidades en el desarrollo cognitivo del estudiante. Se menciona, además, el planteamiento del problema, haciendo alusión a las deficiencias encontradas en los estudiantes que llamó la atención para ser investigado. Se incluyen también en este capítulo, la pregunta general y específica de investigación que guiaron este trabajo, y el objetivo general y específico que giraron en torno a la interpretación de los procesos de visualización y al diseño de la secuencia didáctica. Se concluye este capítulo con la justificación del presente trabajo.

En el Capítulo 2, llamado Marco teórico, se encuentran los estudios en los cuales se fundamenta esta investigación. En primer lugar, se presentan las consideraciones que se tienen acerca del significado del concepto de problema matemático, la resolución del mismo y las heurísticas que se han identificado en el proceso de solución. En segundo lugar, se ofrece información acerca de la relación entre las representaciones y la visualización, con lo que se citan aspectos de la teoría de representación semiótica de Duval (1995), así como el marco de interpretación de capacidades visoespaciales utilizado para el análisis de los resultados.

Luego, en el Capítulo 3, referente al marco metodológico, se exhibe el proceso que se siguió en este estudio presentando el método de investigación, la población de estudio, las técnicas e instrumentos utilizados y una descripción del diseño de la secuencia didáctica, con su fundamentación teórica.

En el Capítulo 4 se analizan los resultados obtenidos en la prueba diagnóstica inicial, algunas actividades aplicadas durante la secuencia y la prueba diagnóstica final. Esto con el fin de interpretar las capacidades visoespaciales que los estudiantes manifiestan en sus producciones. También, se analiza el extracto de una entrevista realizada a un estudiante participante sobre su resolución de los problemas en la prueba inicial. Asimismo, para tener una visión general del impacto de la secuencia didáctica en los estudiantes participantes se presenta por medio de gráficos las capacidades visuoespaciales evidenciadas antes y después de la implementación de la misma.

Finalmente, se presentan las conclusiones que surgieron en el estudio de esta problemática. En ese apartado, se le da respuesta tanto a la pregunta general de investigación como al objetivo general que se plantearon en el inicio del estudio, de acuerdo con la interpretación que se obtuvieron de los datos durante su análisis. Después de ello, se presentan las referencias bibliográficas, un anexo y un apéndice. En el anexo se presenta la descripción de la segunda y tercera sesión de la secuencia didáctica; en el apéndice, algunas de las tareas hechas por los estudiantes que fueron cargadas a la plataforma Blackboard.

Capítulo 1

PLANTEAMIENTO DE LA INVESTIGACIÓN

La resolución de problemas es considerada a nivel mundial parte fundamental en la enseñanza de las matemáticas, numerosas propuestas curriculares de diferentes países reconocen a la resolución de problemas como un eje central en la organización de los contenidos matemáticos (Santos, 2008). Por ejemplo, el Consejo Nacional de Profesores de Matemática (NCTM, 1989, 1995) identifica la resolución de problemas como uno de los objetivos primordiales en el aprendizaje de las matemáticas. Además, autores, desde una perspectiva científica, han resaltado la importancia de la resolución de problemas identificándola como el "corazón de las matemáticas" (Halmos, 1980) y como aquella que contribuye sustancialmente al desarrollo de conceptos y teorías (Kleiner, 1986). Desde un enfoque educativo, por otro lado, se le atribuye a la capacidad de resolver problemas, según Novotná, Eisenmann, Přibyl, Ondrušová y Břehovský (2014), como un indicador del estado de comprensión de los conceptos y las ideas que los alumnos están aprendiendo.

De acuerdo con la importancia destacada de la resolución de problemas, la educación matemática, como disciplina científica, se ha dedicado a estudiar los fenómenos involucrados en esta área y se ha constatado que cuando los matemáticos se enfrentan a problemas de la materia despliegan una amalgama de estrategias para resolverlos. Uno de los primeros en cuestionarse sobre las formas de resolver problemas matemáticos fue Polya (1945), el cual presentó un libro dedicado principalmente a mostrar que tanto profesores como estudiantes, tuvieran una metodología heurística que contribuyera a la solución de problemas matemáticos. Este autor generó un modelo para resolver problemas matemáticos que ha inspirado y ha sido muy utilizado en estudios e investigaciones sobre resolución de problemas matemáticos. El modelo consta de cuatro fases: 1. Entendimiento del problema; 2. Diseño de un plan; 3. Ejecución del plan; y 4. Examinar la solución obtenida. Estas fases, sin embargo, no garantiza que se halle la solución, pero son tomadas como guía para resolver el problema.

Posteriormente, Schoenfeld (1985), al leer el libro de Polya, se planteó ciertas preguntas como *¿Qué significa pensar matemáticamente?* y además *¿Cómo podemos ayudar a los estudiantes a hacerlo?*, que inspiraron a la realización de su obra sobre la resolución de problemas (Mathematics problem solving). Este autor manifiesta que aprender a pensar matemáticamente implica mucho más que tener grandes cantidades de conocimientos; incluye ser flexible e ingenioso dentro de las matemáticas, por tanto, busca dar sentido a la conducta matemática de las personas. Consecuente a ello, el autor formula un marco teórico y empírico para el análisis del comportamiento complejo en el sujeto solucionador de problemas. Este marco está compuesto por una serie de aspectos que inciden en el sujeto, entre los cuales se encuentran: los recursos, las estrategias cognitivas o heurísticas, el control y los sistemas de creencias relacionados a las matemáticas.

Siguiendo este camino, Santos (2007) muestra que la preocupación en referencia a la motivación de los estudiantes hacia el estudio de las matemáticas ha sido constante y acepta que es importante que los estudiantes aprendan a formular preguntas y a buscar los caminos que posibiliten dar la solución a esas preguntas, y que además, reflexionen en torno al significado y formas de razonamiento asociados a la solución del problema (habilidades de metacognición).

Evidentemente, se puede identificar que la resolución de problemas, como campo de investigación, es de gran relevancia en la educación matemática, al igual que su promoción en el aula de clase. Los estudios sobre este tema, por lo tanto, se han ido profundizando cada vez más, y siguiendo los caminos de los autores anteriores, se han realizado varias investigaciones enfocadas a las estrategias empleadas en la resolución de problemas matemáticos por parte del sujeto solucionador, en los cuales no solo se demuestran las estrategias generales propuestas en primera instancia, sino que también se registran numerosas estrategias particulares, que dependen del tipo de problema matemático presentado, siendo estas estrategias más efectivas en el proceso de solución de acuerdo a cada problema.

Un ejemplo de ello es el estudio realizado por Novotná et al. (2014), centrado en mejorar la cultura de la resolución de problemas en los estudiantes por medio de intervenciones en el aula enfocadas en promover la utilización de las siguientes estrategias heurísticas: “Estrategia de analogía”, “Adivina-prueba-revisa”, “Experimentación sistemática”, “Reformulación del problema”, “Dibujar la solución”, “Trabajar hacia atrás” y “Uso de gráficos de funciones”. El objetivo, entonces, se basa en desarrollar un enfoque creativo en los estudiantes al resolver problemas matemáticos, atendiendo a las preguntas de qué estrategias preferirán los alumnos y con qué resultados. Además, expone la importancia de cambiar el enfoque que tienen los estudiantes para resolver problemas mediante el uso de algoritmos a la búsqueda creativa de estrategias adecuadas. Los resultados arrojados por el estudio muestran que aun cuando el trabajo se realizó en un corto plazo, durante un período de tres meses, se obtuvo importantes cambios en lo que respecta a la visión de los estudiantes para resolver problemas.

Por otro lado, uno de los problemas matemáticos de interés, en los que han trabajado investigaciones de educación matemática, son aquellos que presentan registros figurales. Debido a que los problemas geométricos giran en torno al desarrollo del pensamiento espacial, su resolución lleva consigo procesos de visualización y tratamientos figurales, los cuales requieren de un alto dominio visual y espacial, por lo tanto, el proceso de visualización es considerado fundamental para resolver problemas compuestos por registros figurales.

Uno de los estudios que ha tratado este tema es el trabajo de Marmolejo y Vega (2005), el cual está interesado en mostrar el impacto que tiene la geometría en el desarrollo cognitivo del estudiante durante su aprendizaje. Este es un artículo enfocado solo en el registro de representación semiótico de las figuras, pues destaca que ver sobre las figuras requiere de un nivel cognitivo complejo, ya que permiten observar proposiciones que el leguaje natural no permite, posibilitan la exploración heurística de situaciones complejas y vistazos sinópticos sobre ellas, permiten la resolución de problemas o contribuyen a realizar demostraciones matemáticas. No obstante, las autoras manifiestan en su trabajo que la mayoría de los estudiantes de tercer grado de primaria, de la ciudad de Cali, Colombia, se encontraban muy lejos de considerar estas características de las figuras, puesto que existía un desconocimiento de tratamientos permitidos sobre las figuras, o que éstas tenían un carácter estático, imposibilitando la reconfiguración de las figuras por medio de divisiones y/o transformaciones. Además, identificaron que los profesores de matemáticas de estos estudiantes tenían dificultades en acompañar y alentar discursivamente los procedimientos de solución de problemas, ya que consideraban que las figuras "hablan por sí solas". Asimismo, este trabajo muestra la implementación de situaciones de aprendizaje que viabilicen las diferentes formas de visualizar una figura, lo cual desencadenó procedimientos de naturaleza diferente, obteniendo como resultado el aprovechamiento heurístico de las figuras para llevar a los estudiantes a obtener soluciones ágiles y correctas. El artículo concluye que el aprendizaje del área de superficies planas es un punto clave para que los estudiantes accedan a las posibilidades heurísticas de las figuras, debido a que se obtuvieron buenos niveles de visualización.

Otra de las investigaciones interesada en el proceso de visualización, pero en este caso con profesores de secundaria, es la tesis de Gómez (2015). Este estudio se basó principalmente en investigar cómo se desenvuelve el proceso de visualización en profesores de secundaria cuando trabajan con cuadriláteros en un ambiente de geometría dinámica como GeoGebra, desde la perspectiva teórica de registro de representación semiótica y su ampliación al proceso de visualización de Duval. Utilizaron la ingeniería didáctica como metodología de investigación y aplicaron una secuencia de actividades centradas en registros figurales. En ellas, se analizaron las articulaciones de las aprehensiones secuencial, perceptiva, operativa y discursiva que los profesores realizaban con los registros figurales. Entre los resultados mostrados, los profesores evidenciaron utilizar sus conocimientos para realizar tratamientos en el registro figural en GeoGebra, sin embargo, se notaron problemas de coordinación entre el registro y el discurso.

En esta misma línea, Galvis (2017) presenta en una tesis de maestría que ilustra la problemática en torno a los procesos de visualización y tratamientos figurales en tareas de tipo geométrico, especialmente en el caso del teorema de Pitágoras. Por lo tanto, el objetivo que se planteó en esta investigación fue de identificar las formas de aprehensión que recurren los estudiantes de grado octavo (nivel de secundaria) al aproximarse a la noción del teorema de Pitágoras. Esto es debido a que se han reportado dificultades como el poco reconocimiento de formas y sub-formas en los registros figurales o la casi nula movilización de aprehensiones operatorias como rotación y traslación de figuras geométricas. Así, en aras de identificar las formas de aprehensión presentes en los estudiantes, se propuso el diseño de una tarea compuesta de tres situaciones empleando registros figurales, tomando como referencia la Teoría Semiótica-Cognitiva propuesta por Duval. El análisis de los resultados de este estudio mostró factores determinantes en la aproximación de las relaciones pitagóricas, contemplando los procesos cognitivos fundamentales del pensamiento geométrico como la visualización y el razonamiento.

Teniendo en cuenta los resultados de las investigaciones mencionadas, se reconoce que para reconfigurar la visualización de los registros figurales es un proceso que requiere de un alto dominio conceptual que propicia el carácter heurístico de las figuras. Así, una herramienta que permita visualizar y realizar tratamientos sobre registros figurales, es fundamental para el desarrollo del pensamiento espacial de un estudiante. La tecnología, por lo tanto, es capaz de brindarnos estos requerimientos, pues juega un papel poderoso en la representación dinámica de configuraciones geométricas que se realizan con la ayuda de softwares. De hecho, Moreno-Armella y Santos-Trigo (2016) señalaron que los objetos o situaciones matemáticas se pueden representar dinámicamente mediante el uso de un Sistema de Geometría Dinámica y los estudiantes o los solucionadores de problemas pueden identificar y examinar las relaciones matemáticas que emergen de los objetos en movimiento dentro del modelo dinámico, lo cual contribuye a desarrollar un pensamiento espacial. También, Leung y Bolite-Frant (2015) afirmaron que "el software de geometría dinámica se puede utilizar en el diseño de tareas para cubrir un gran espectro epistémico, desde dibujar figuras geométricas robustas y precisas hasta la exploración de nuevos teoremas geométricos y el desarrollo del discurso de argumentación" (p. 195).

1.1 Planteamiento del problema

La presente investigación resalta la pertinencia de estudiar los procesos de visualización y estrategias involucradas para resolver problemas geométricos en estudiantes de nuevo ingreso a la universidad, asistida por el software dinámico GeoGebra. Al tener ciertos supuestos sobre el nivel de formación en matemáticas de estos estudiantes y encontrarse que poseen dificultades resolviendo problemas de nivel básico que contienen registros figurales, detectados por medio de una prueba diagnóstica, surge la propuesta de esta investigación.

A continuación, se presentan tanto las preguntas generales de investigación como los objetivos, que guiarán y darán luz al trabajo.

1.1.1 Pregunta general de investigación

¿Qué estrategias de visualización evidencian estudiantes de nuevo ingreso a la universidad al utilizar la heurística dibujar la solución en la resolución de problemas de cálculo de área de figuras geométricas?

1.1.1.1 Pregunta específica

¿Qué impacto tiene una secuencia didáctica dirigida a promover la estrategia heurística *dibujar la solución* en problemas de cálculo de áreas de figuras compuestas?

1.1.2 Objetivo general de investigación

Interpretar las estrategias de visualización que evidencian estudiantes de nuevo ingreso a la universidad al utilizar la heurística dibujar la solución, en la resolución de problemas de cálculo de área de figuras geométricas.

1.1.2.1 Objetivo específico

Diseñar una secuencia didáctica asistida por GeoGebra sobre las transformaciones de simetría de figuras geométricas en el plano y la resolución de problemas de cálculo de áreas, para promover el desarrollo de la heurística *dibujar la solución*, por medio de las habilidades visoespaciales, en estudiantes de nuevo ingreso a la universidad.

1.1.3 Justificación

Como se ha destacado anteriormente, la capacidad de resolver problemas de un sujeto evidencia el estado de comprensión que éste tiene acerca de los conceptos matemáticos relacionados al problema. Carrillo (1998) resalta la utilidad de la enseñanza de la resolución de problemas para la vida cotidiana de los alumnos y el incremento en la significatividad del aprendizaje de contenidos matemáticos (tanto de tipo conceptual, como procedimental y actitudinal).

Al aplicarle una prueba diagnóstica a algunos estudiantes de ingeniería de sistemas automotrices e ingeniería de energías renovables de nuevo ingreso y detectar que existen deficiencias en resolución de problemas de geometría básica, llama la atención para investigar qué sucede. Siendo la resolución de problemas una muestra del aprendizaje significativo de los estudiantes sobre los conceptos matemáticos, estos estudiantes evidencian que presentan dificultades, por ejemplo, al confundir longitud con área, la poca movilización de aprehensiones operatorias como rotación y traslación de figuras geométricas, la falta de tratamientos figurales en problemas geométricos o la no relación de conceptos matemáticos, conceptos que se toman como aislados.

Es por ello, que se ha tomado el cálculo de áreas de figuras planas como un punto de partida para hacer emerger algunas habilidades visoespaciales que, como se ha mencionado, propician la exploración del potencial heurístico que tienen las figuras para darle solución a problemas matemáticos, las cuales son claves para temas posteriores de nivel superior como lo es el cálculo de volúmenes de sólidos de revolución, por ejemplo, en cálculo integral. Asimismo, el tratamiento de un dibujo o figura es una parte importante para la demostración y que requiere de diferentes niveles de habilidades cognitivas (Gravina, 2008).

Capítulo 2

MARCO TEÓRICO

2.1 Resolución de problemas

Sin lugar a duda, al ingresar a este mundo de la resolución de problemas matemáticos es ineludible hablar sobre el significado de la palabra *problema*, ¿qué es un problema en matemáticas? Siendo más precisos, es fundamental hacer referencia sobre su significado en la educación matemática.

Shoenfeld (1985), por ejemplo, el problema lo toma como una tarea que le resulta difícil a un individuo; y que no solo sea una dificultad operacional o de cálculo, también en un nivel intelectual. En ese sentido, Santos (2007) considera que los problemas de los libros de textos son más bien ejercicios en los que se emplean procesos mecanizados o memorísticos. Polya (1945), por su parte, menciona que tener un problema significa buscar la forma de resolverlo, teniendo claro qué es lo que se pretende alcanzar, pero no de forma inmediata.

Existen algunas caracterizaciones en cuanto a los tipos de problemas, un ejemplo de ello es la aportación de Polya (1945). Éste propuso clasificar los problemas en dos tipos: los problemas que se piden encontrar algo (incógnita) y los problemas donde algo debe ser probado.

Otro investigador que planteó una caracterización de los problemas fue Simon (1973), quien identifica dos tipos de problemas:

- Los problemas bien estructurados (los que aparecen en la instrucción y en libros de textos y existen criterios definidos para resolverlos)

- Los problemas mal estructurados (los que se encuentran en la vida diaria y que no hay un procedimiento que garantice la solución)

Posteriormente, Fredericksen (1984) añadió una tercera categoría a esta clasificación, los problemas estructurados (parecidos a los bien estructurados, pero su solución necesita del diseño del proceso para encontrar dicha solución).

Santos (2007), después de hacer una revisión de literatura sobre la definición de problema y sus caracterizaciones, realizó una interpretación acerca de la pregunta *¿qué es un problema?*, y de manera general, infiere que un problema es una tarea o situación en la que aparecen los siguientes componentes:

- La existencia de un interés
- La no existencia de una solución inmediata
- La presencia de diversos caminos o métodos de solución (aplica también que tenga más de una solución)
- La atención por parte del individuo que lo intenta resolver y emprenda acciones para lograrlo.

Además, agrega que esta concepción en la educación matemática es esencial, puesto que el alumno se enfrenta a una variedad de situaciones en el que se requiere analizar y evaluar las diversas estrategias en las fases de solución. Asimismo, este término incluye las situaciones en las que el aprendizaje está de por medio, es decir, el problema de aprender algún contenido.

2.1.1 La heurística.

Al adentrarse a este campo de investigación en la resolución de problemas matemáticos, por el legado que dejó Polya (1945), necesariamente se debe hablar de la palabra *heurística*. Liljedahl, P., Santos, Malaspina, y Bruder (2016) afirman que la noción de heurística tiene su origen en la época de Arquímedes, al tratar éste de darle solución a un problema impuesto por el rey Siracusa. Arquímedes por su gran capacidad de transferencia, pudo hallar la solución a tal problema que eufóricamente exclamó "¡Eureka, eureka!". Los autores manifiestan que la proveniencia de las palabras *eureka* y *heurística* es la misma, y que además esta disciplina trata de perspectivas efectivas para la resolución de problemas, llamadas heurismos.

Siguiendo esta idea de las heurísticas, primero Polya (1945) y luego Schoenfeld (1985) sugirieron varias estrategias generales para resolver problemas verbales como resultado de intentar dar respuesta a preguntas como: ¿Qué es lo desconocido?, ¿Cuáles son los datos?, ¿Cuáles son las condiciones?, ¿Conoces un problema relacionado que ya ha sido resuelto? Luego, preparar un plan para la solución y verificar los resultados obtenidos. Sin embargo, a lo largo de los años se han venido identificando algunas otras estrategias cognitivas que se utilizan de manera efectiva para darle solución a cierto tipo de problemas. Fan y Zhu (2007) incluyeron entre las estrategias heurísticas las siguientes: *Dibujar un diagrama, Adivinar y verificar, Buscar un patrón, Hacer una lista sistemática, Usar antes de la concepción*. Por otro lado, Stacey (1991) caracterizó la *estrategia de prueba y error.*

Novotná, Eisenmann, Přibyl, Ondrušová y Břehovský (2014) presentan las siguientes estrategias heurísticas: *Estrategia de analogía, Adivina-prueba-revisa, Experimentación sistemática, Reformulación del problema, Dibujar la solución, Trabajar hacia atrás y Uso de gráficos de funciones*. En este caso, el estudio pretende centrarse en la aplicación la estrategia heurística *Dibujar la solución* para problemas de cálculo de áreas de figuras compuestas planas.

2.1.2 Métodos generales y particulares en la resolución de problemas.

Después de las estrategias generales propuestas por Polya (1945), se han encontrado estudios más específicos para identificar estrategias particulares. Santos (2007) muestra una comparación de las ventajas y desventajas de los métodos generales y particulares en la resolución de problemas matemáticos.

En cuanto a las cuestiones que se empezaron a generar con relación a los métodos generales para resolver problemas, emergieron tres líneas de investigación que se oponen a este tipo de estrategias. Una de las líneas es el *estudio de los expertos*, donde se empezó a definir el perfil general del experto. Intervenía el conocimiento de situaciones específicas donde se es experto, el reconocimiento de situaciones donde los patrones se aplican y el razonamiento que va del reconocimiento a la solución por medio de los patrones.

Este tipo de estudio, afirma el autor, señala la importancia de los aspectos particulares asociados a la disciplina.

Otro estudio es el de los *métodos débiles* (*weak methods*), los cuales manifiestan que las estrategias generales, como las heurísticas, son categorizadas como métodos débiles. Por ejemplo, Schoenfeld hace referencia a que algunos estudiantes conocían los métodos de Polya, pero no sabían cuando utilizarlo (Santos, 2007).

La otra línea que cuestiona las estrategias generales es el *estudio de la transferencia,* ya que sugieren que pensar efectivamente depende de un contexto específico, lo cual limita la aplicación a otros dominios. El autor menciona que algunos resultados de investigaciones al respecto reportan que enseñar a los estudiantes el uso de estrategias generales independientes de un dominio específico no producía beneficios fuera del contexto en que eran enseñados.

Thorndike (1924) en sus estudios, mostró que no se produce transferencia desde aprendizajes generales hacia tareas específicas; por lo que formuló la “ley de los elementos idénticos” en la que plantea que la transferencia es el resultado de aplicar el conocimiento adquirido mediante un aprendizaje previo, a una nueva tarea que requiere exactamente la misma conducta que la que se aprendió.

Sin embargo, Santos (2007) alude a que no se debe menospreciar el potencial de los métodos generales, ya que en algunos casos juega un papel relevante; por ejemplo, los filósofos, al usar contraejemplos, aplican en esta categoría, por lo que usan estrategias generales para sus argumentos sin importar el tema que se esté comentando. Aparte, el autor concibe que un buen número de heurísticas generales desarrollan un papel fundamental en el proceso de resolver problemas no rutinarios. Agregando la importancia de que el uso de estrategias metacognitivas ayuda al estudiante a utilizar estrategias generales de manera adecuada y efectiva. De hecho, Schoenfeld (1985) afirma que reflexionar acerca de lo que uno está haciendo ayuda a relacionar el conocimiento base de los estudiantes y aplicarlo convenientemente. Estudios demuestran que cuando se enseña principios generales con prácticas de autoevaluación y aplicaciones potenciales en una variedad de contextos, se logra la transferencia.

2.2 Representación y Visualización.

De acuerdo con Duval (1999) la representación y la visualización pertenecen al núcleo de la compresión en matemáticas. Para el autor, la representación se refiere a una gran variedad de actividades de significado: creencias constantes y holísticas sobre algo, varias formas de evocar y denotar objetos, cómo se codifica la información. Es decir, las representaciones pueden ser creencias individuales, concepciones o concepciones equivocadas, de las cuales se tienen acceso a través de producciones verbales o esquemáticas individuales (Duval, 2006).

En el contexto de la resolución de problemas, Duval (1999) distingue dos tipos de representaciones, la interna y la externa. Una representación interna es la forma en que el solucionador de problemas almacena los componentes internos del problema en su mente; y una representación externa es algo que significa, simboliza o representa objetos y/o procesos, que pueden ser expresados por medio de palabras, diagramas, ecuaciones, gráficos y bocetos.

Los objetos matemáticos, a diferencia de otras ciencias, no son accesibles por percepción o por medio de instrumentos. Para poder tener acceso a ellos es necesaria la representación, por lo que la actividad matemática recurre a diferentes sistemas de representación semiótica, que se utilizan de acuerdo con la tarea o pregunta que se haga. No obstante, en muchos casos, cuando se realizan tareas matemáticas es necesario usar al menos dos sistemas de representaciones. Por ejemplo, Duval (2006) menciona que en "geometría es necesario combinar el uso de al menos dos sistemas de representación, uno para la expresión verbal de propiedades o para la expresión numérica de magnitud y el otro para visualización" (p. 108). De la misma manera, el autor señala que siempre existe una relación entre representaciones tanto discursivas como visuales en las "figuras geométricas" (cabe notar que estas representaciones pueden ser internas y externas).

Se pueden distinguir diferentes sistemas semióticos, pero no todos los sistemas semióticos son, los llamados, *registros de representación*. Los sistemas de representación semiótica permiten una transformación en sus representaciones (Duval 2006). Por lo tanto, para Duval (2006) existen dos tipos de transformaciones de representaciones semióticas diferentes que resultan obvias en la actividad matemática: *Tratamiento* y *Conversión*. Por un lado, las transformaciones por tratamiento ocurren cuando no hay un cambio de registro, es decir, que las representaciones semióticas ocurren en el mismo registro (ver Figura 1). Por otro lado, las conversiones son las transformaciones de representación que consiste en el cambio de registro sin modificar los conceptos que están denotados (ver Figura 2).

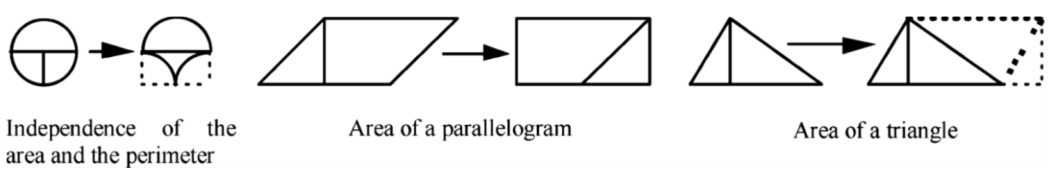


Figura 1. Transformación visual de figuras. Duval (2006).

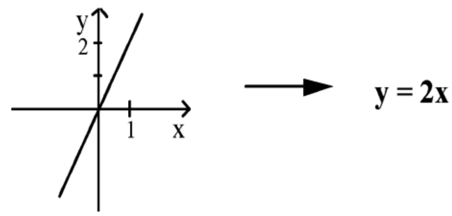


Figura 2. Conversión congruente. Duval (2006)

Se ha hecho mención que problemas que presentan figuras geométricas, es necesario el uso de por lo menos dos sistemas de representación, ya que, poseen una relación entre representaciones tanto discursivas como visuales. Esta característica de las figuras geométricas se le puede atribuir a la concepción que presenta Fischbein (1993) en su *Teoría de conceptos figurales*. El autor describe que las figuras geométricas representan construcciones mentales que poseen propiedades que los conceptos normalmente no tienen, estas además de presentar una imagen visual, también tiene propiedades conceptuales intrínsecas. Es decir, las figuras geométricas tienen, simultáneamente, tanto propiedades conceptuales como propiedades figurales (espaciales).

Desde este punto de vista, la visualización representa un proceso fundamental en el quehacer geométrico, considerado como un proceso cognoscitivo, ya que se encuentra vinculado con la cultura del sujeto (Marmolejo, 2007). Asimismo, Arcavi (2003) define la visualización de la siguiente manera:

> La visualización es la capacidad, el proceso y el producto de creación, interpretación, uso de la reflexión sobre imágenes, figuras, diagramas, en nuestra mente, en papel o con una herramienta tecnológica, con el propósito de representar y comunicar información, pensar y desarrollar ideas previamente desconocidas y entendimientos avanzados.

La visualización, por lo tanto, involucra procesos mentales que contribuyen a organizar la información de manera esquemática, guiando el desarrollo analítico en la solución de problemas matemáticos.

Duval (1995) resalta aspectos importantes en el proceso de visualización de un sujeto, donde describe diferentes tipos de aprehensiones cognitivas al tratar con figuras geométricas. Según el autor, hay varias formas de ver un dibujo o matriz de estímulos visuales, y define cuatro tipos de aprehensiones cognitivas: *aprehensión perceptiva, aprehensión secuencial, aprensión* *discursiva* y *aprehensión operativa*.

2.2.1 Habilidades visuoespaciales.

Desde el punto de vista de la psicología cognitiva, “la generación y el procesamiento de imágenes mentales se encuentran dentro de un proceso complejo de adquisición y uso de habilidades cognitivas, incluidas aquellas denominadas *habilidades visuoespaciales*” (Miragliotta y Baccaglini-Frank, 2017, p.2).

De acuerdo con Kosslyn (1983), el razonamiento geométrico requiere de un razonamiento espacial, entendiendo razonamiento espacial como un conjunto de procesos cognitivos que generan y manipulan la representación mental de objetos espaciales, relaciones y transformaciones.

En el proceso de visualización es clara la necesidad del razonamiento espacial, por lo que Miragliotta y Baccaglini-Frank (2017) proponen un marco para interpretar el procesamiento de las imágenes, en particular objetos geométricos bidimensionales, fundamentados en la Teoría de los conceptos figurales de Fischbein (1993) y los Tipos de aprehensiones cognitivas de Duval (1995). Con el apoyo de la psicología cognitiva, los autores seleccionan un subconjunto de habilidades visuoespaciales y proponen una interpretación teórica en el contexto específico del razonamiento geométrico.

Este marco para interpretar y analizar el proceso de visualización está descrito por las siguientes habilidades: Organización visual, escaneo visual, capacidad reconstructiva visual, capacidad de generación de imágenes, capacidad de manipulación de imágenes, memoria espacial secuencial a corto plazo, memoria espacial a largo plazo, predicción geométrica (ver Tabla 1).

Tabla 1

Habilidades visuoespaciales

Capacidad visuoespacial	Psicología Cognitiva	Interpretación geométrica
Organización visual	Capacidad para organizar modelos incompletos o no perfectamente visibles.	Capacidad para reconocer conceptos figurativos a partir de representaciones incompletas o no perfectamente visibles.
Escaneo visual	Capacidad para inspeccionar de forma rápida y precisa una	Habilidad para reconocer las propiedades de una figura a partir de su representación.

	configuración visual para un propósito determinado	
Reconstrucción visual	Habilidad para reconstruir un modelo dado (con dibujos o herramientas)	Capacidad para reconstruir el componente figurativo de un concepto figurativo en una representación dada de forma autónoma o a partir de indicaciones escritas o verbales o representaciones parciales.
Generación de imágenes	Capacidad para generar rápidamente imágenes mentales visuoespaciales.	Capacidad de reproducir en la mente instantáneamente el componente figural de un concepto figural, recuperándolo de la memoria o generándolo de nuevo.
Manipulación de la imagen	Capacidad para manipular imágenes mentales visuoespaciales para transformarlas y evaluarlas.	Capacidad de usar las propiedades de un concepto figural o de manipular los aspectos figurales de un concepto figural, teniendo en cuenta las relaciones teóricas entre las unidades figurales elementales de las que está compuesta. Esta habilidad está involucrada en tareas que requieren la manipulación mental de una figura para transformarla en una nueva. Esta habilidad hace eco de la *aprehensión operativa de* Duval, pero también difiere de ella. Las manipulaciones mentales en la figura están estrechamente conectadas al componente conceptual de la figura. De hecho, para manipular una figura manteniendo propiedades dadas, se requiere un fuerte control conceptual sobre ella, como lo resalta Arcavi (2003), quien enfatiza, también, la alta demanda cognitiva involucrada.

Memoria de corto plazo secuencial espacial	Capacidad para recordar una secuencia de diferentes posiciones.	Capacidad para recordar diferentes configuraciones asumidas por el componente figural de un concepto figural durante una manipulación observada o imaginada.
Memoria a largo plazo	Capacidad para mantener la información espacial durante un largo período de tiempo.	Está involucrado en la capacidad de preservar el componente figurativo de un concepto figurativo en la memoria a largo plazo.
Predicción visual	Un proceso que parece ocurrir con frecuencia es imaginar la consecuencia de una manipulación (mental) de la figura; identificando ciertas propiedades o configuraciones de una nueva figura, que surgen de un proceso de manipulación.	

Descripción de las habilidades visuoespaciales. Miragliotta, Baccaglini-Frank y Tomasi (2017).

Capítulo 3

MARCO METODOLÓGICO

3.1 Paradigma

Debido a que no existe una única manera de entender los fenómenos presentes en la educación matemática, es necesario considerar o seleccionar un paradigma adecuado que le permita a la investigación comprender y explicar la realidad en estudio.

> “El paradigma de investigación se define como una forma particular de entender la realidad que se analiza, tanto por parte del investigador como por la comunidad científica a la que este pertenece, lo cual da sentido al tipo de conocimiento que se pretende crear y a la comprensión del mundo que intenta observar e interpretar” (Escudero, 2015, p. 66)

El paradigma, entonces, debe estar estrechamente relacionado y ser coherente con cada uno de los aspectos de la investigación: planteamiento del problema, los objetivos, el marco teórico y la metodología. Entre los paradigmas más usados en la educación matemática, de acuerdo con Godino (1993), se encuentran los siguientes:

- Positivista: Busca explicar, controlar y predecir fenómenos educativos, así como la verificación de ciertas teorías o hipótesis.
- Interpretativo: Su finalidad es interpretar, comprender y describir los fenómenos educativos a partir de los significados e intenciones de los participantes del escenario educativo.

Además, Escudero (2015) indica un tercer paradigma:

- Crítico: Pretende conseguir la emancipación y la transformación de la realidad.

En miras de elegir un paradigma coherente con el problema de investigación se eligió el **paradigma interpretativo**, puesto que dicho problema está centrado en la interpretación de los procesos de visualización en estudiantes de nuevo ingreso a la universidad, los cuales manifiestan dificultades en la resolución de problemas de cálculo de áreas. Asimismo, este paradigma permite darle una perspectiva, propia del investigador, sobre la realidad que se construye sin dar cabida a la generalización, por lo tanto, esta producción se interpretó exclusivamente de acuerdo con los resultados expuestos por los informantes.

3.2 Método

Para obtener un conocimiento más amplio del problema de estudio se plantea una investigación de corte cualitativo, ya que según Sampieri, Fernández y Baptista (2014) "…se enfoca en comprender fenómenos, explorándolos desde la perspectiva de los participantes en un ambiente natural y en relación con su contexto". Como este trabajo tuvo por objetivo, en primera instancia, diseñar una secuencia didáctica para promover una heurística eficaz en problemas de cálculo de áreas de figuras compuestas (dibujar la solución), fue necesario interpretar las habilidades visuoespaciales que los estudiantes llevan a cabo en el proceso de visualización durante su resolución; es por ello que este tipo de enfoque contribuye a aportarle una compresión idónea al fenómeno de estudio desde un "ambiente natural". Asimismo, los métodos cualitativos proporcionan datos que en su mayoría son de naturaleza verbal, lo que permite al investigador brindar un análisis propio para exponer su punto de vista a la comunidad científica, también permite tener la libertad de interactuar con los informantes para indagar más en las cuestiones de interés, dependiendo del objetivo de la investigación, y ofrece a los informantes la oportunidad de proporcionar respuestas más elaboradas y detalladas, por lo tanto se le atribuye a los métodos cualitativos la característica de ser flexible (Carrillo y Muñoz-Catalán, 2011).

3.3 Informantes

El grupo de informantes de la investigación estuvo conformado por 47 estudiantes de nuevo ingreso de la asignatura Matemáticas Elementales de la Facultad de Ciencias de la Electrónica, en la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, en México, en el periodo agosto a diciembre de 2018, pertenecientes a las carreras de ingeniería en sistemas automotrices e ingeniería en energías renovables, quienes, después de haber realizado la prueba diagnóstica, mostraron poco uso de las habilidades visuoespaciales para darle solución a problemas de cálculo de áreas de figuras planas.

3.4 Descripción de las técnicas e instrumentos de recolección de datos en el desarrollo de la investigación

Habiendo seleccionado el paradigma de investigación y especificado el método de investigación, se eligieron las técnicas e instrumentos para la recolección de datos acordes con los métodos cualitativos, estos fueron pruebas diagnósticas (inicial y final), entrevista clínica y actividades de la secuencia didáctica asistida por GeoGebra. A continuación, se describe un poco sobre la aplicación de las técnicas e instrumentos de recolección de la información durante la intervención.

En el inicio del estudio se aplicó una prueba diagnóstica consistente en dos problemas matemáticos de cálculo de áreas: el primero podía resolverse haciendo cálculos de áreas de figuras geométricas y el segundo utilizando propiedades de simetría, rotación y traslación de partes congruentes en la figura. Los problemas que fueron seleccionados para la prueba diagnóstica se presentan en las Figuras 3 y 4.

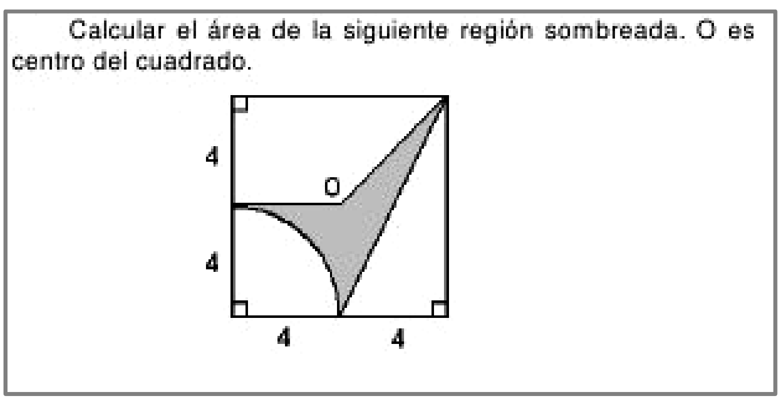


Figura 3. Problema de cálculo de área de región sombreada. Tomado de: https://www.pinterest.es/pin/853221091876591834/

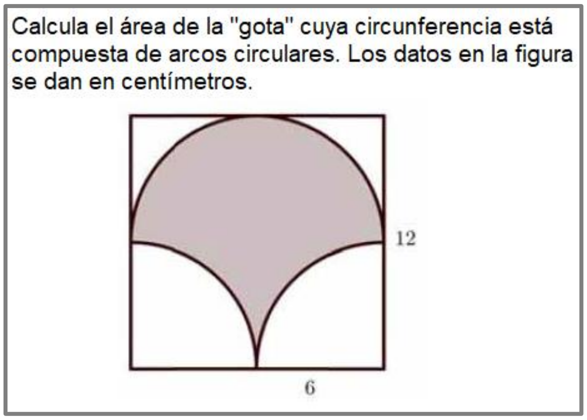


Figura 4. Problema de cálculo de área de la gota. Maláč y Kurfürst (1981)

Posteriormente, los resultados arrojados en la prueba diagnóstica se analizaron bajo el marco teórico de las habilidades visoespaciales propuesto por Miragliotta y Baccaglini-Frank (2017), de los cuales se crearon algunos indicadores en cada una de las habilidades para atribuirle al estudiante si posee o no cierta habilidad (ver Tabla 2). Cabe destacar que, para la resolución de problemas de cálculo de áreas de figuras compuestas, como los propuestos en la prueba diagnóstica, se resaltaron tres habilidades visuoespaciales esenciales: organización visual, escaneo visual y manipulación de la imagen.

Tabla 2

Habilidades visuoespaciales y sus indicadores

Habilidad visuoespacial	**Interpretación geométrica**	**Indicadores de presencia de la habilidad**
Organización visual	Capacidad para reconocer conceptos figurativos a partir de representaciones incompletas o no perfectamente visibles.	El estudiante es capaz de reconocer figuras geométricas planas, como cuadrados, triángulos, círculos, a partir de la figura compuesta presentada en el problema.
Escaneo visual	Habilidad para reconocer las propiedades de una figura a partir de su representación	El estudiante es capaz de identificar aquellas propiedades de las figuras que

		le permiten hallar su área, tales como sus dimensiones y la congruencia entre las figuras.
Manipulación de la imagen	Capacidad de usar las propiedades de un concepto figural o de manipular los aspectos figurales de un concepto figural… para transformarla en una nueva.	El estudiante es capaz de reconfigurar el registro figural, manteniendo las propiedades identificadas en el escaneo visual, es decir, que el estudiante puede modificar la figura al identificar, por ejemplo, la congruencia entre las subfiguras de las que está compuesta el problema.

Habilidades visuoespaciales destacables en la resolución de problemas de cálculo de áreas de figuras compuestas e indicadores a considerar en el análisis de los resultados.

Con base en el análisis de la prueba diagnóstica se diseñó una secuencia didáctica con el esquema general de elaboración de una unidad didáctica sugerida por Fernández, Elortegui, Rodriguez y Moreno (2002), junto con las medidas de instrucción propuestas por Solaz-Portolés y Lopez (2007) y la asistencia del software de geometría dinámico GeoGebra, en la plataforma de aprendizaje en línea Blackboard. Esta secuencia fue aplicada durante tres sesiones de 60 minutos, cada una.

Previo al proceso de instrucción y después de la realización de la evaluación diagnóstica se realizó una entrevista a dos estudiantes, con el propósito de comprender las dificultades encontradas en los problemas de la valoración diagnóstica e interpretar el proceso de visualización que pusieron en juego durante la resolución de los problemas. Al final del proceso de instrucción, se aplicó nuevamente la prueba diagnóstica, con el fin de identificar si hubo mejora en las respuestas de los estudiantes analizando e interpretando las habilidades visoespaciales que revelaron.

Durante la instrucción se propusieron problemas equivalentes a los de la prueba diagnóstica, con actividades de andamiaje en la plataforma Blackboard que ayudaran a los estudiantes a desarrollar sus habilidades visuoespaciales para resolver problemas de cálculo de áreas de figuras compuestas por una vía más rápida, sin dejar de ser correcta.

Dentro de las actividades se trabajaron conceptos de transformaciones en el plano (simetría, rotación, traslación) y congruencia entre figuras, con el propósito de que esos conocimientos pudieran ser recuperados por los estudiantes, ya que son estudiantes de nivel superior, y finalmente ser tomados como estrategias claves para resolver problemas de cálculo de áreas de figuras compuestas. Estas actividades fueron presentadas en papel, y se plantearon, además, tareas que pusieran en práctica estos conceptos y procedimientos para luego visualizarlos con el software dinámico, GeoGebra, dentro de la plataforma de aprendizaje Blackboard a la que ellos tenían acceso (ver la Figura 5).

Figura 5. Captura de pantalla de la plataforma Blackboard, resaltando los grupos con los que se trabajó.

Un ejemplo de actividad con GeoGebra es el siguiente problema:

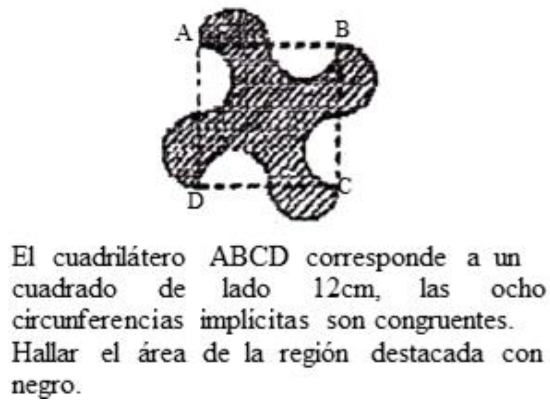


Figura 6. Problema de cálculo de área de la región destacada. Tomado de https://www.monografias.com/trabajos-pdf/algebra-funciones-geometria-trigonometria/algebra-funciones-geometria-trigonometria2.shtml

En la plataforma Blackboard, los estudiantes lograron realizar problemas de cálculo de áreas de figuras compuestas, que con ayuda de las animaciones en GeoGebra les permitió visualizar los movimientos en el plano aplicados a las figuras, con el objetivo de la identificación de figuras congruentes, como se muestran en las Figuras 7, 8, y 9.

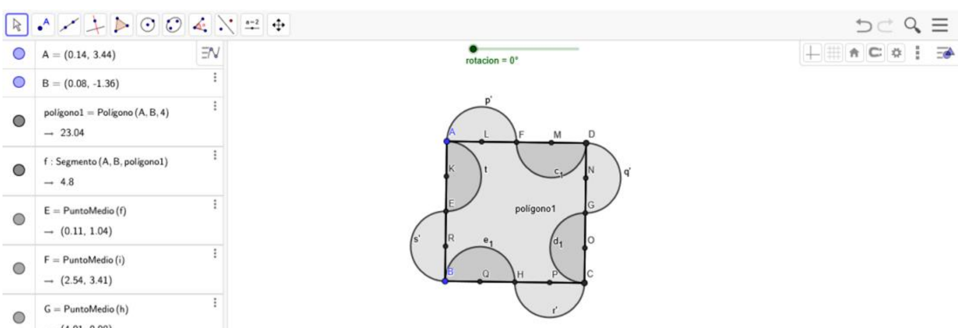


Figura 7. Figura sin rotación. Construcción propia

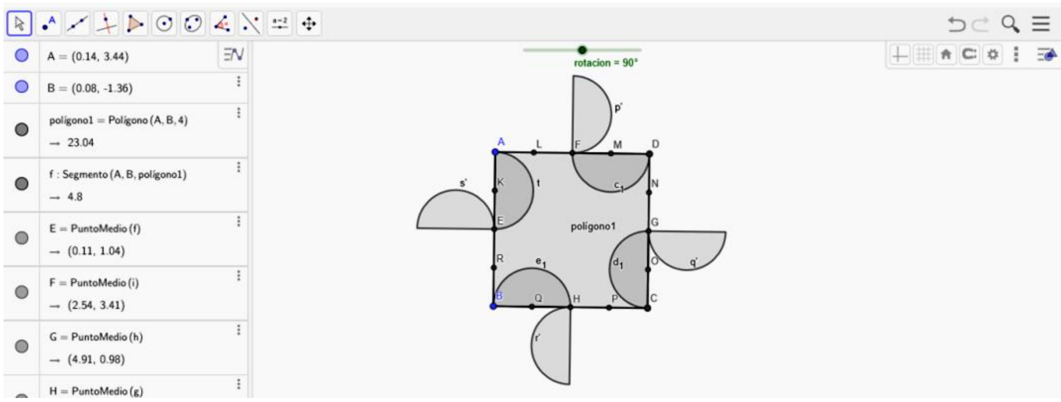


Figura 8. Figura con rotación de 90°. Construcción propia.

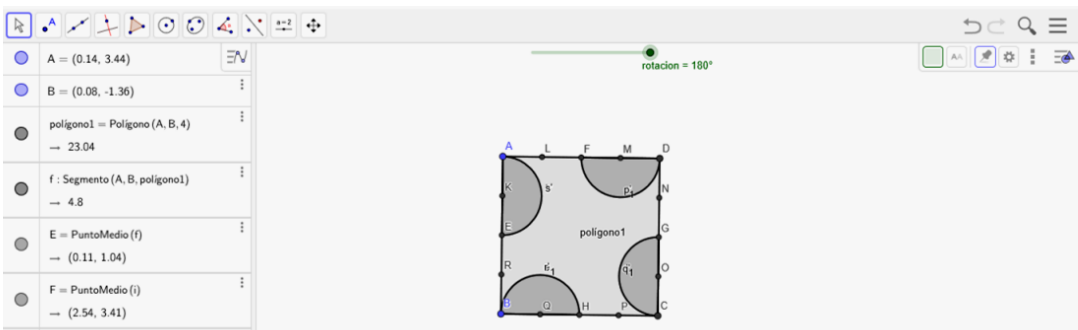


Figura 9. Figura con rotación de 180°. Construcción propia.

Además, la plataforma permitía que los estudiantes cargaran sus producciones de acuerdo con la tarea solicitada, y el profesor encargado podía brindarles retroalimentaciones según fuera el caso, como se logra ver en la Figura 10.

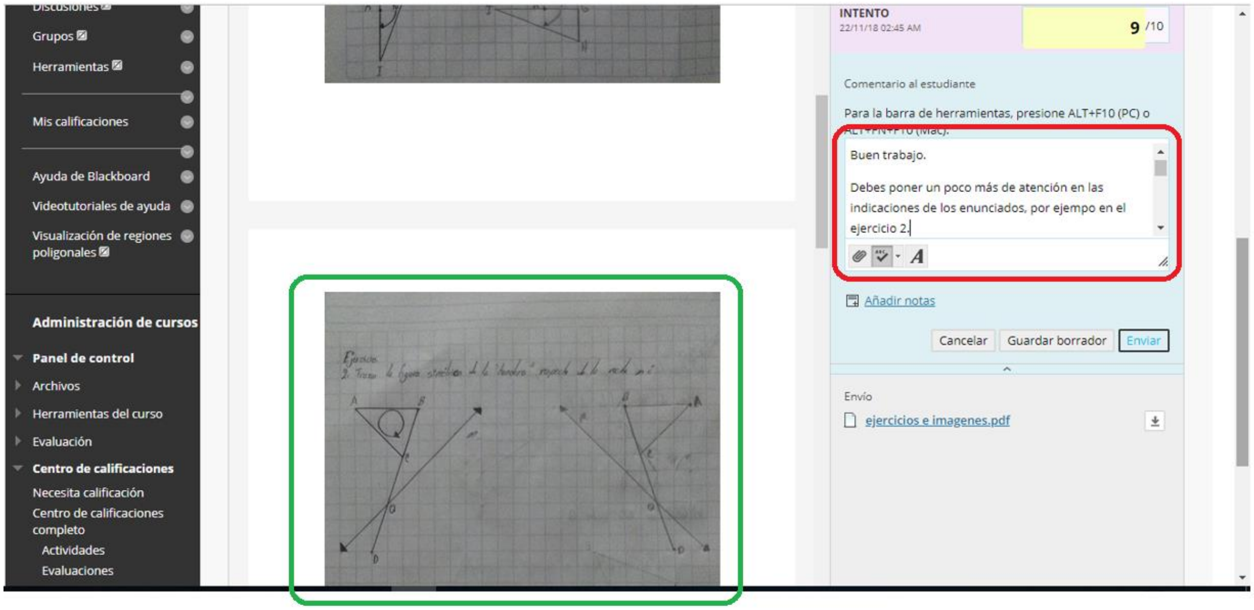


Figura 10. Solución de una tarea cargada a la plataforma Blackboard.

Para observar algunas producciones de los estudiantes en cuanto a las primeras tareas de la secuencia ver Apéndice.

3.5 Secuencia didáctica

Como se ha indicado, el diseño de la secuencia didáctica estuvo soportada por la aportación de Fernández et al. (2002). Para los autores, una unidad didáctica es un conjunto de ideas en forma de hipótesis (refiriéndose a hipótesis como supuestos que no han sido verificados como eficientes en la promoción del proceso de enseñanza y aprendizaje), que incluyen tanto contenido y recursos necesarios para el trabajo diario, como el aprendizaje esperado y estrategias que ordenen y regulen los contenidos del aprendizaje; además, estas ideas puede ser meramente disciplinares u organizadas desde múltiples puntos de vista (transversales). Sin embargo, para Fernández et al., las unidades didácticas están condicionadas por la forma de pensar de los docentes que la elaboran, por lo que es poco probable que se pueda transferir de un grupo de profesores a otros, pero sí tomadas como una guía referencial.

Estos autores proponen un esquema general para la elaboración de una unidad didáctica presentado en la Figura 11, considerados fundamentales en el diseño de las secuencias de actividades.

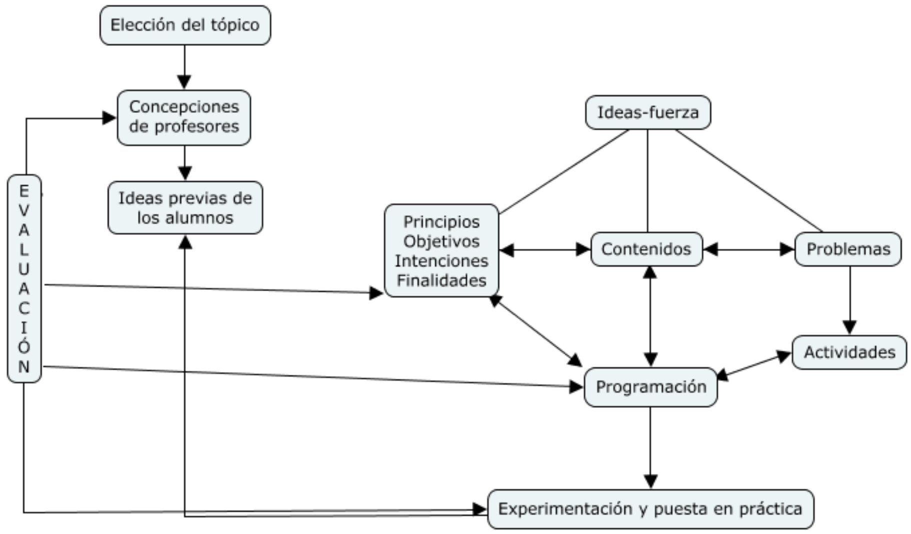


Figura 11. Esquema general de elaboración de una unidad didáctica desde una perspectiva sistemática. Fernández et al. (2002, p.23)

Para los autores de *¿Cómo hacer unidades didácticas innovadoras?*, las **ideas-fuerza** son el núcleo de los aprendizajes esperados, es decir, el contenido y su aplicación práctica presente en la enseñanza, como los principios, objetivos y/o finalidades, y problemas situacionales que son detonantes para el desarrollo de una secuencia de actividades en el aula.

Por parte del proceso de elaboración, los autores conciben dos etapas que van desde *lo que se quiere hacer* hasta la adaptación de *lo que se puede hacer*, añadiendo que a lo largo de este proceso se encuentra presente la evaluación que contribuye a mejorar cada etapa del diseño de la unidad.

3.5.1 Evaluación

La evaluación forma parte esencial de la elaboración de la unidad didáctica, ya que para Fernández et al. (2002) este aspecto se adopta desde el enfoque de la *evaluación formativa*, encontrada en todo el proceso de diseño, con el fin de obtener información significativa que mejore la unidad en todos los ámbitos.

Un aspecto que se le añade a la evaluación es la *triangulación*, ésta es una técnica que para los autores resulta clave al realizar una evaluación global de la unidad. En la triangulación interviene el observador interno, el profesor y los alumnos (llamados elementos de la triangulación), con el propósito de obtener un registro completo de la unidad didáctica desde diferentes perspectivas.

3.5.2 Recursos didácticos

Los condicionantes materiales van a determinar una buena parte de lo que se puede hacer (Fernández et al., 2002), de tal manera que es preciso conocer las características de los materiales e instalaciones para adaptarlas a las necesidades del profesor. Entre los tipos de recursos didácticos se encuentran:

- Relacionados con las fuentes de información: Documentos, bibliografía; material audio visual (diapositivas, murales, videos, películas, programas informáticos, etc.)
- Relacionados con la dinámica de trabajo: Recursos metodológicos adaptados al tipo de intervención que se pretende favorecen en los alumnos; Materiales necesarios para la dinámica de grupo prevista; Materiales específicos para trabajos prácticos; Instrumento que se necesita para evaluar todo el proceso; Mobiliario del aula; Trabajos viables alternativos.

3.5.3 Motivación

La motivación es un aspecto sustancial para el éxito de la unidad didáctica y ésta debe permanecer despierta durante todo el proceso educativo. Una de las sugerencias de Fernández et al. (2002) es plantear buenas situaciones problemáticas para despertar el interés y la participación activa de los educandos.

3.5.4 Secuencia de actividades

Fernández et al. (2002) afirman que el concepto de actividad es muy genérico y que para ellos es cualquier acto o acción que lleva a facilitar el proceso de enseñanza-aprendizaje. No se puede considerar como un fin, sino como un medio para guiar el aprendizaje.

En ese sentido, los autores infieren que al preparar una relación de actividades se debe seguir una estructura lógica para la “resolución de problemas” planteados, y que para cada problema se suelen escoger actividades de iniciación, desarrollo, acabado y evaluación.

A la estructura de la secuencia se le pueden otorgar algunas actividades según su finalidad, por ejemplo, para las actividades de iniciación están: planteamiento del problema, cuestionario previo, observación, lectura, debate, salida de campo, audiovisuales, lluvia de ideas; en las actividades de desarrollo: búsqueda bibliográfica, discusiones, salidas, plan de trabajo, actividad experimental, explicación del profesor; en actividades de acabado: murales, resúmenes, informes, elaboración de audiovisuales, debates, memorias; y en las de evaluación: oral, trabajo escrito, pruebas, observación del trabajo en clase, encuestas, autoevaluación.

Todos los estudiantes aprenden de diferente forma por lo que su avance no será homogéneo, por lo tanto, en algunos casos se necesitarán *actividades de refuerzo*, para los que tengan dificultades en su avance, y para los que de manera rápida captan la información se deberá desarrollar *actividades de profundización*.

Los autores denotan las actividades de la siguiente manera:

AI: Actividades de Iniciación

AD: Actividades de Desarrollo

AA: Actividades de Acabado

AE: Actividades de Evaluación

AR: Actividades de Refuerzo

AP: Actividades de Profundización

3.5.5 Medidas de instrucción como guía para la Secuencia Didáctica.

Para elaborar una secuencia didáctica Fernández et al., proponen un esquema general y desde una perspectiva sistemática, la cual contribuye de manera fundamental el desarrollo de una secuencia. No obstante, es esencial tener ideas en cuanto al momento de instrucción en la clase. Para ello, se toma en consideración las medidas de instrucción que sugieren Solaz-Portolés y Lopez (2007), para complementar el diseño de la secuencia didáctica, puesto que ayudan a los maestros a desarrollar conocimientos y habilidades en sus estudiantes. Las medidas de instrucción se describen a continuación.

- Se debe obtener una comprensión conceptual del tema antes de que los estudiantes resuelvan problemas, en lugar de tratar de obtener esta comprensión mediante la resolución de problemas.

- Estimular procesos de estudio específicos y profundos (por ejemplo, explicando, relacionando y confrontando) para alentar a los estudiantes a crear conocimiento procedimental y situacional, que usualmente no es explícito en los textos instructivos.

- Desplegar prácticas de instrucción para desarrollar habilidades de razonamiento científico tales como trabajo de laboratorio, ciencia basada en la indagación, simulaciones por computadora, análisis de datos cuantitativos, construcción de explicaciones y pensamiento crítico y capacidad de toma de decisiones. La duración y la intensidad de la exposición a situaciones de razonamiento son factores importantes para el desarrollo de habilidades de razonamiento en los estudiantes.

- Fomentar la comprensión de los problemas, en lugar de dar procedimientos numéricos que pueden ser memorizados y utilizados sin comprensión, por ejemplo, usando estímulos basados en texto o en diagramas que requieren un conocimiento de conceptos subyacentes o teorías; realizar discusiones cualitativas mientras se resuelven los problemas; y también pidiendo a los estudiantes que deriven procedimientos generales en lugar de soluciones específicas.

- Proporcionar a los estudiantes experiencias diversas de resolución de problemas, continuas y prolongadas, así como fomentar en ellos el hacer conexiones y pensar evaluativamente.

• Ofrecer estrategias metacognitivas como las que se encuentran en los pasos de planificación, chequeo (monitoreo del progreso), verificación (de los resultados) e interpretación en la resolución de problemas.

• Minimizar las fallas relacionadas con la memoria en las actividades de aprendizaje mediante el uso de instrucciones que sean lo más breves y simples posibles, dividiendo las tareas en pasos separados, proporcionando memoria de apoyo, desarrollando en los estudiantes estrategias efectivas para enfrentar situaciones en las que experimentan fallas en la memoria de trabajo, etc.

3.6 Diseño de la secuencia didáctica

Considerando la aportación de Fernández et al. (2002) y las medidas de instrucción de Solaz-Portolés y Lopez (2007), se presenta a continuación el planteamiento de la unidad didáctica basada principalmente en promover la resolución de problemas de cálculo de áreas de figuras compuestas por medio de la estrategia heurística *dibujar la solución,* asistida por la plataforma de aprendizaje Blackboard y el entorno dinámico GeoGebra.

Tabla 3

Planteamiento de la unidad didáctica

Tema: Cálculo de áreas de figuras compuestas

Ideas-fuerza
-Utilización de conocimientos previos para una eficiente solución a problemas de cálculo de áreas de figuras compuestas
-Utilización de una estrategia adecuada a problemas de cálculo de áreas de figuras compuestas por medio de habilidades visuoespaciales
-Resolución de problemas como actividad primordial en clase de matemáticas
-Utilidad de la matemática en la vida real

Objetivos	Problemas	Contenidos
- Recordar los movimientos rígidos en el plano (traslación, rotación, simetría)	1° ***¿Recuerdan cuáles son las transformaciones geométricas llamadas movimientos?*** **AI. Proponer ejemplos de los movimientos en el plano. AD. Hacer entrega de actividades impresas a cada**	***Conceptuales*** a) **Movimientos en el plano (traslación, rotación, simetrías)** b) **Congruencia de figuras**

- Identificar movimientos rígidos en figuras compuestas	**estudiante para realizar ejercicios de movimientos rígidos en el plano.** **AD. Visualizar video de transformaciones geométricas en el plano a través de la plataforma de Aprendizaje Blackboard proyectado en el pizarrón.** **AA. Actividad metacognitiva.** **AP. Lectura del documento cargado en la plataforma y ejecución de ejercicios propuesto en él (tarea).** **AP. Fotos tomadas de su entorno donde se presenten las transformaciones geométricas.** 2° ***¿Hubo alguna dificultad en la ejecución de los ejercicios propuestos en el documento?*** **AI. Aclaración de dudas sobre los ejercicios de transformaciones geométricas** **AD. Proyección de las fotos en el pizarrón tomadas por los estudiantes para evidenciar las transformaciones.** **AD. Actividad impresa para identificar elementos de las transformaciones geométricas en figuras compuestas de forma grupal** **AD. Por medio de animaciones en GeoGebra mostrar movimientos en figuras compuestas (socialización y retroalimentación)**	**c) Cálculo de áreas de figuras compuestas** *Procedimentales* **a) Identificación de movimientos en el entorno y utilidad** **b) Aplicación de movimientos en el plano sobre figuras geométricas compuestas** **c) Utilización de habilidades visuoespaciales para el cálculo de áreas de figuras compuestas** **d) Aplicación de la estrategia heurística *dibujar la solución*** *Actitudinales* **a) Fomentar la importancia del uso de los conocimientos previos** **b) Promover la resolución de problemas por medio de estrategias heurísticas** **c) Potenciar las habilidades visuoespaciales** **d) Ver la relación de las matemáticas con la vida real**

- Fomentar la aplicación de los movimientos rígidos para el cálculo de áreas de figuras compuestas	**AA. Actividad metacognitiva.** **AP. Tarea de figuras compuestas que contengan movimientos en el plano.** 3° ***¿Recuerdan las fórmulas para el cálculo de área de algunos polígonos regulares?*** **AI. Uso de diapositivas y animaciones con GeoGebra para mostrar la utilidad de los movimientos en el cálculo de áreas de figuras compuestas.** **AD. Actividad impresa de forma grupal para darle solución a problemas de cálculo de área de figuras compuestas.** **AA. Socialización de la actividad y retroalimentación.** **AE. Prueba diagnóstica final de cálculo de área de figuras compuestas.**	**e) Promover el uso de la tecnología**

Secuencia didáctica

Tema: Cálculo de áreas de figuras compuestas

Objetivo general de la Secuencia didáctica: Promover el uso de habilidades visuoespaciales y la resolución de problemas de cálculo de áreas de figuras compuestas por medio de la estrategia heurística *dibujar la solución*

Aprendizajes esperados:

Aplicación de los movimientos en el plano.

Resolución de problemas de cálculo de áreas de figuras compuestas.

Sesión 1 Movimientos en el plano

Objetivo: Recordar los movimientos rígidos en el plano (traslación, rotación, simetría).

Inicio

Recuperar los siguientes aprendizajes previos en plenaria a través de preguntas:

- ✓ Transformaciones geométricas: Simetría, translación y rotaciones
- ✓ Congruencia de figuras

Desarrollo

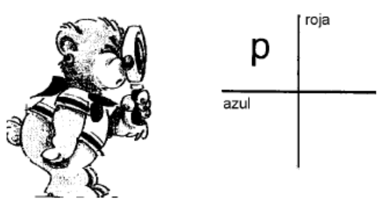
Efectuar actividades para recordar los movimientos rígidos en el plano: traslación, rotación y simetría o reflexión. Las actividades que se proponen son tomadas del documento *Matemáticas y su didáctica para maestros* por Godino, Batanero y Font (2003) que constan de tres ejercicios.

Actividad 1: En las hojas que se te han entregado realiza lo siguiente:

1) Responde las siguientes preguntas de acuerdo con tus conocimientos previos

LETRAS SIMÉTRICAS

Observa el dibujo y contesta.



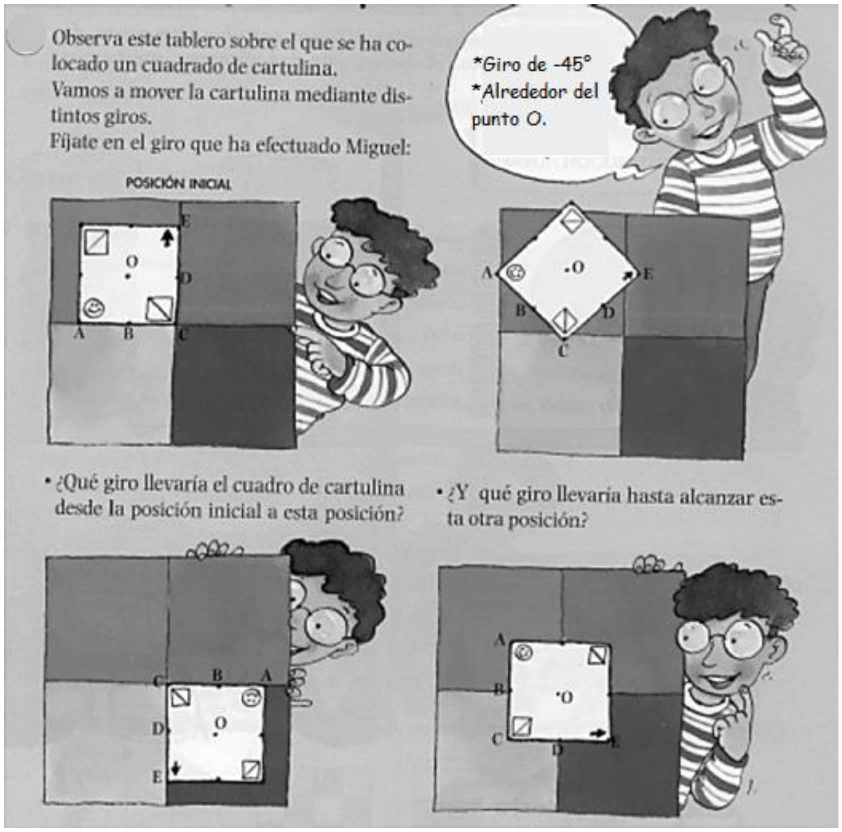
- ¿Qué letra es la simétrica de la letra **p** respecto de la recta roja?
- ¿Qué letra es la simétrica de la letra **p** respecto de la recta azul?
- ¿Qué letra es la simétrica de la letra **q** respecto de la recta roja?

2) Efectúa lo siguiente:
   a) Traza en cada una de las letras siguientes el eje de simetría

A B V T E M

   b) Escribe otras cuatro letras indicando algún eje de simetría

3)



Posterior a la actividad, se hace uso de la tecnología para dar un vistazo a un **vídeo de Youtube** relacionado con las transformaciones geométricas

(link del vídeo: https://www.youtube.com/watch?v=kLibW0rvDTs&t=39s)

Cierre

Actividad metacognitiva

Hacer cuestionamientos como los siguientes para que los estudiantes den respuesta y evalúen su conocimiento.

1. ¿Recordabas los movimientos rígidos en el plano?
2. ¿Tuviste alguna dificultad en las actividades? Si es así, menciona qué parte.
3. ¿Las actividades y el video te ayudaron a recordar los conocimientos acerca de las transformaciones geométricas?
4. ¿Qué te pareció más interesante de la clase?

Posteriormente, proponer una tarea relacionada a lo recordado y relacionado con su entorno.

Tarea: Entrar en la plataforma Blackboard y realizar las actividades de la sesión 1, que son:

1. Leer el documento de Godino y resolver los ejercicios propuestos
2. Tomar 2 imágenes de cada movimiento rígido en el plano (6 imágenes en total) de mosaicos, construcciones, esculturas, etc. de la ciudad de Puebla y cargarlas a la plataforma en el apartado indicado en la sesión 1.

Esta primera sesión tuvo la intención de orientar al estudiante a utilizar sus conocimientos previos sobre movimientos en el plano para la resolución de problemas que lo requirieran, como es el caso de algunos problemas de cálculo de área de figuras compuestas. De la misma manera se desarrollaron las dos siguientes sesiones, pero enfocadas a figuras compuestas, y al cálculo de las mismas (ver Anexo).

Capítulo 4

RESULTADOS

Tras haber recolectado los resultados producidos por los estudiantes en estudio, este apartado presentará un análisis cualitativo de dichos resultados soportado por el marco de interpretación de capacidades visuoespaciales propuesto por Miragliotta y Baccaglini-Frank (2017).

Para dar un vistazo holístico del desempeño de los estudiantes en la prueba diagnóstica inicial (a) y final (b) se presenta el siguiente gráfico de porcentajes relacionados con algunas capacidades visuoespaciales consideradas esenciales en la resolución de los problemas presentados. Este gráfico brinda una idea de la pertinencia de la secuencia didáctica para desarrollar la capacidad visuoespacial de *manipulación de la imagen*.

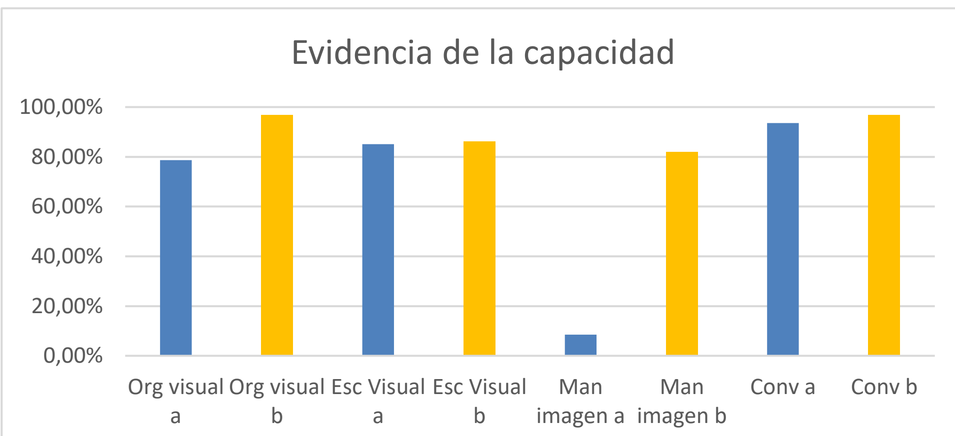


Figura 12. Desempeño general de los estudiantes antes y después de la intervención didáctica. Construcción propia.

Para comprender la información mostrada en el gráfico anterior, se presentará tanto pruebas diagnósticas, inicial y final, como actividades propuestas durante la secuencia, de tres estudiantes que mostraron un cambio positivo en la resolución de problemas de cálculo de área de figuras compuestas al utilizar la estrategia heurística *dibujar la solución*, por medio de algunas de las capacidades visuoespaciales, y en especial la capacidad de *manipulación*.

Por un lado, uno de los estudiantes en estudio (E3) mostró un buen desempeño desde la prueba inicial, contestando correctamente cada uno de los problemas propuestos, evidenciando la capacidad de organización visual y escaneo visual (ver Fig. 13 y 14), ya que pudo reconocer los conceptos figurativos y las propiedades de las figuras compuestas presentadas en cada problema, tales como sectores circulares, cuadrados y triángulos. Sin embargo, su metodología de resolución a esos problemas se basó en la estrategia heurística *dividir el problema* y en la transformación del registro figural al registro algebraico.

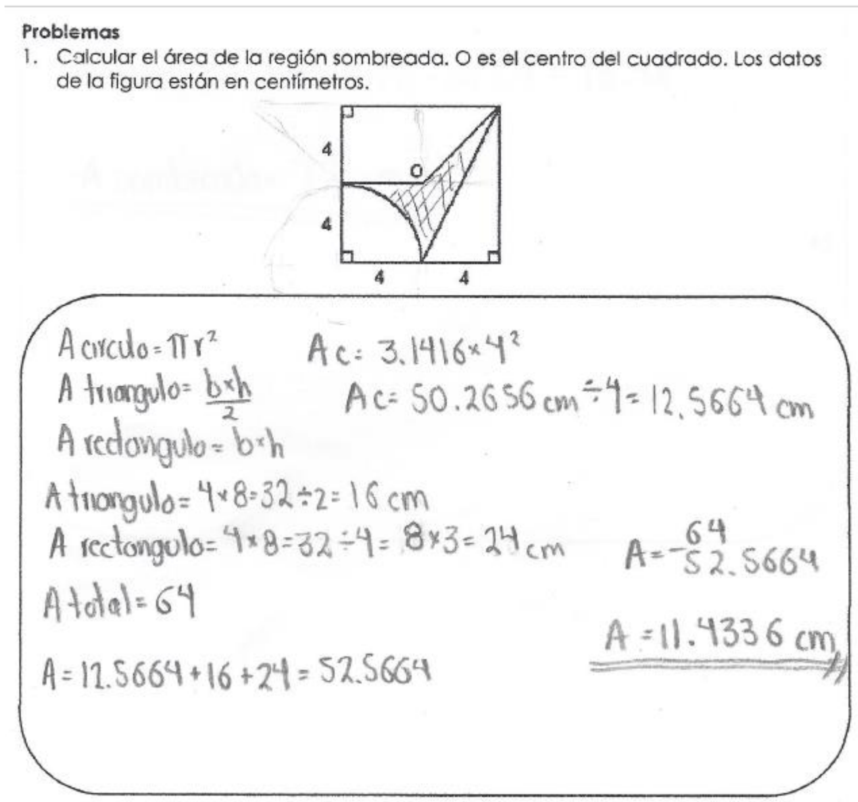


Figura 13. Solución del primer problema de la prueba diagnóstica inicial del estudiante E3.

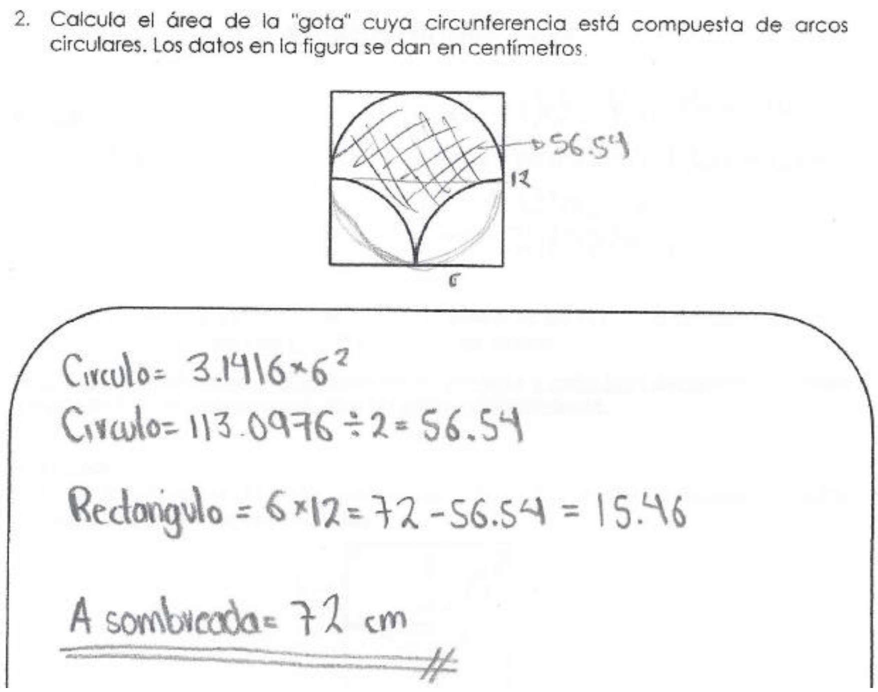


Figura 14. Solución del segundo problema de la prueba diagnóstica inicial del estudiante E3.

Seguido de la prueba diagnóstica, se aplicó la secuencia didáctica, la cual inició con la recuperación de los conocimientos previos acerca de las transformaciones en el plano y una actividad de nivel básico conformada por tres ejercicios sobre tales concepciones. El estudiante E3, en esta primera actividad, mostró un buen dominio del tema al realizar los ejercicios, respondiendo correctamente cada uno de ellos; no obstante, al finalizar la sesión se les realizaron preguntas metacognitivas a los estudiantes sobre el tema tratado en la actividad, a lo que el estudiante E3 manifestó haber tenido ciertas confusiones con algunos movimientos en el plano y dificultad en el ejercicio 3 de la actividad (ver Figura 15 y 16).

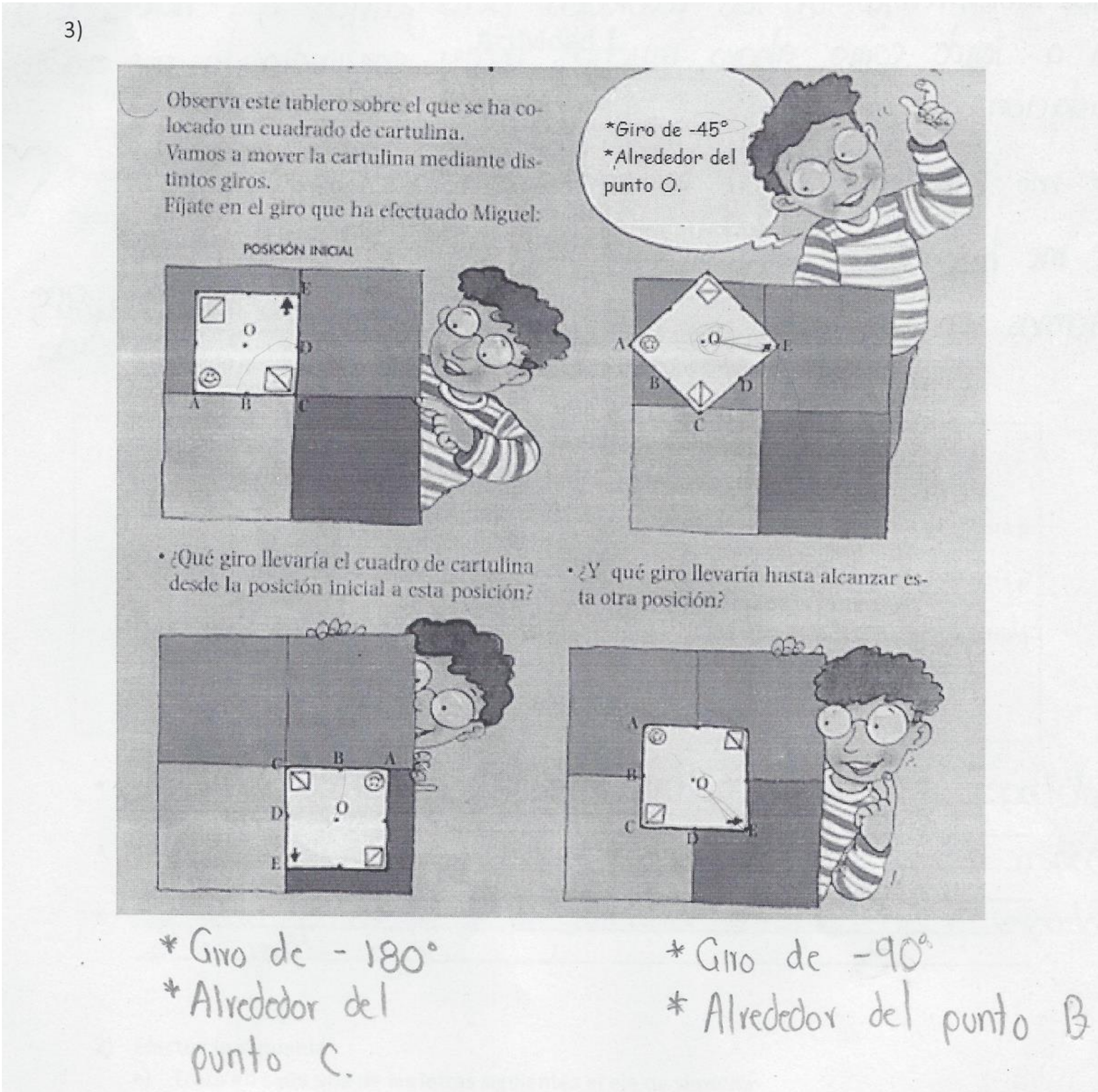


Figura 15. Solución del estudiante E3 del ejercicio 3 de la actividad 1 de la secuencia didáctica.

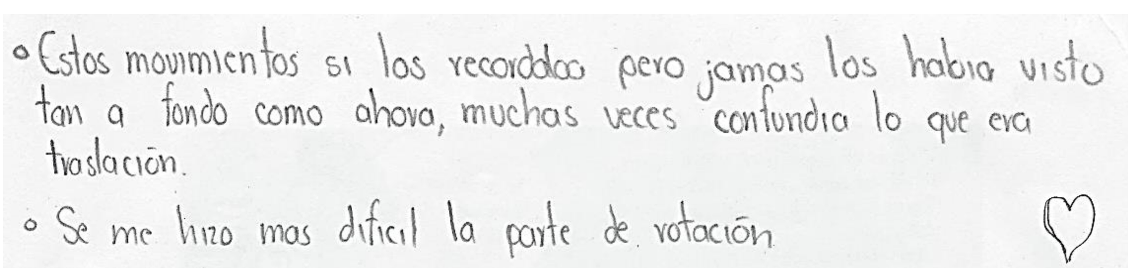

• Estos movimientos si los recordaba pero jamas los habia visto tan a fondo como ahora, muchas veces confundia lo que era traslación.
• Se me hizo mas dificil la parte de rotación

Figura 16. Respuesta del estudiante E3 a las preguntas 1 y 2 de la actividad 1.

La segunda sesión de la secuencia didáctica se basó en la identificación de simetrías, traslaciones y/o rotaciones que se pudieran aplicar en imágenes de la vida cotidiana que los mismos estudiantes debían llevar, tomadas de su entorno. Esas imágenes fueron proyectadas en el aula y discutidas. Seguido de ese primer momento, se les aplicó una segunda actividad (trabajada en parejas) que trababa de reforzar la identificación de los movimientos en el plano aterrizada a las figuras geométricas. En esta actividad, los estudiantes E3 y E4, que trabajaron en conjunto, en el primer inciso pudieron señalar solo un eje de simetría en la primera y tercera figura, aunque se presentan otros, como la recta que pasa por el segmento BF o por el segmento CF en la primera figura, por ejemplo (ver Figura 17).

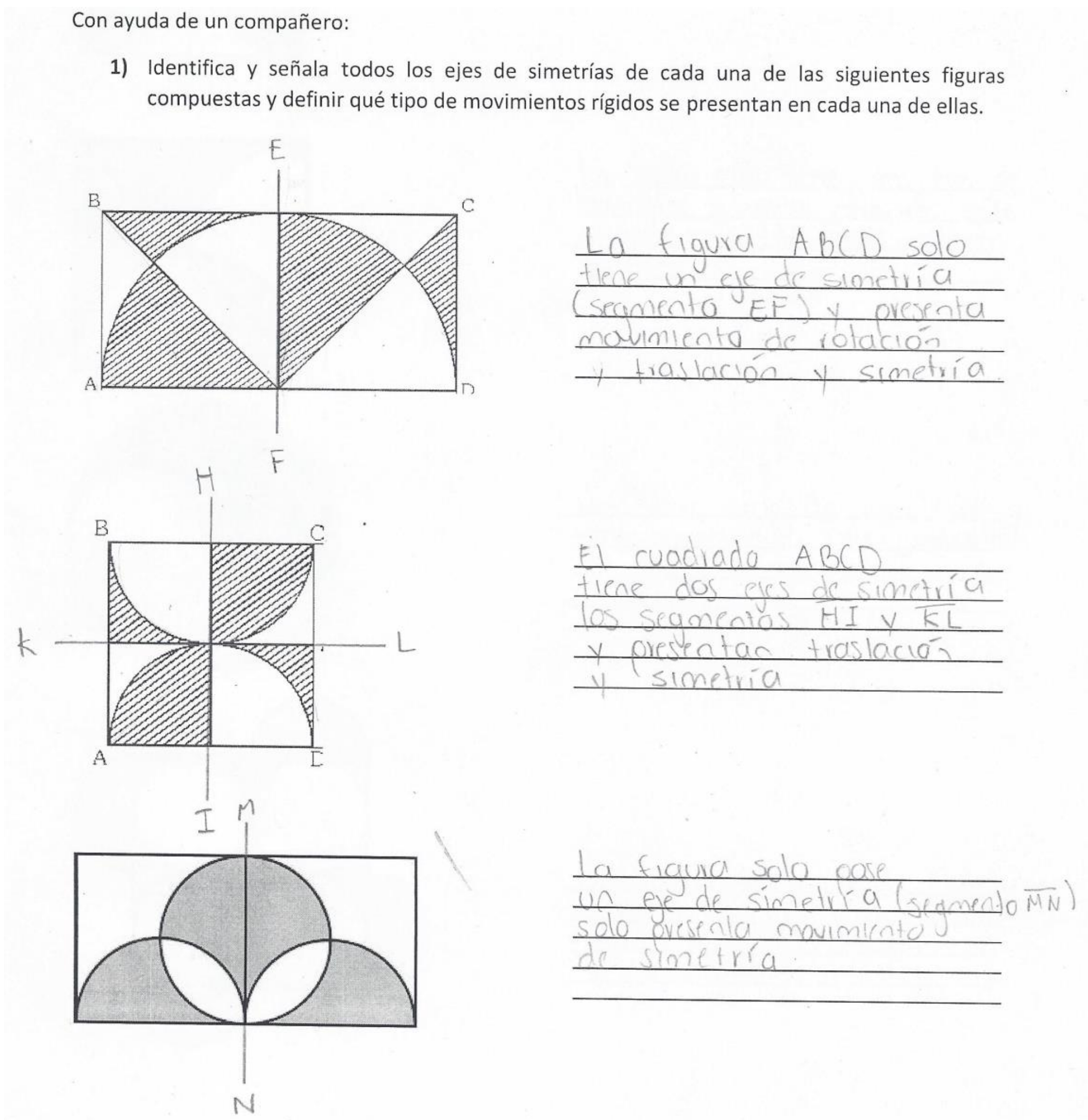


Figura 17. Respuestas de los estudiantes E3 y E4 en la actividad 2, ejercicio 1.

En el inciso 2 de la segunda actividad, los estudiantes E3 y E4 lograron identificar correctamente si existía o no ejes de simetría en las figuras presentadas; sin embargo, en el caso de la segunda figura geométrica, los estudiantes afirmaron que solo había presencia de la simetría axial, ignorando que dentro de la figura se podrían producir rotaciones en la parte sombreada en forma de pétalo para formar un triángulo o, en su defecto, tener sombrado la mitad del cuadrado.

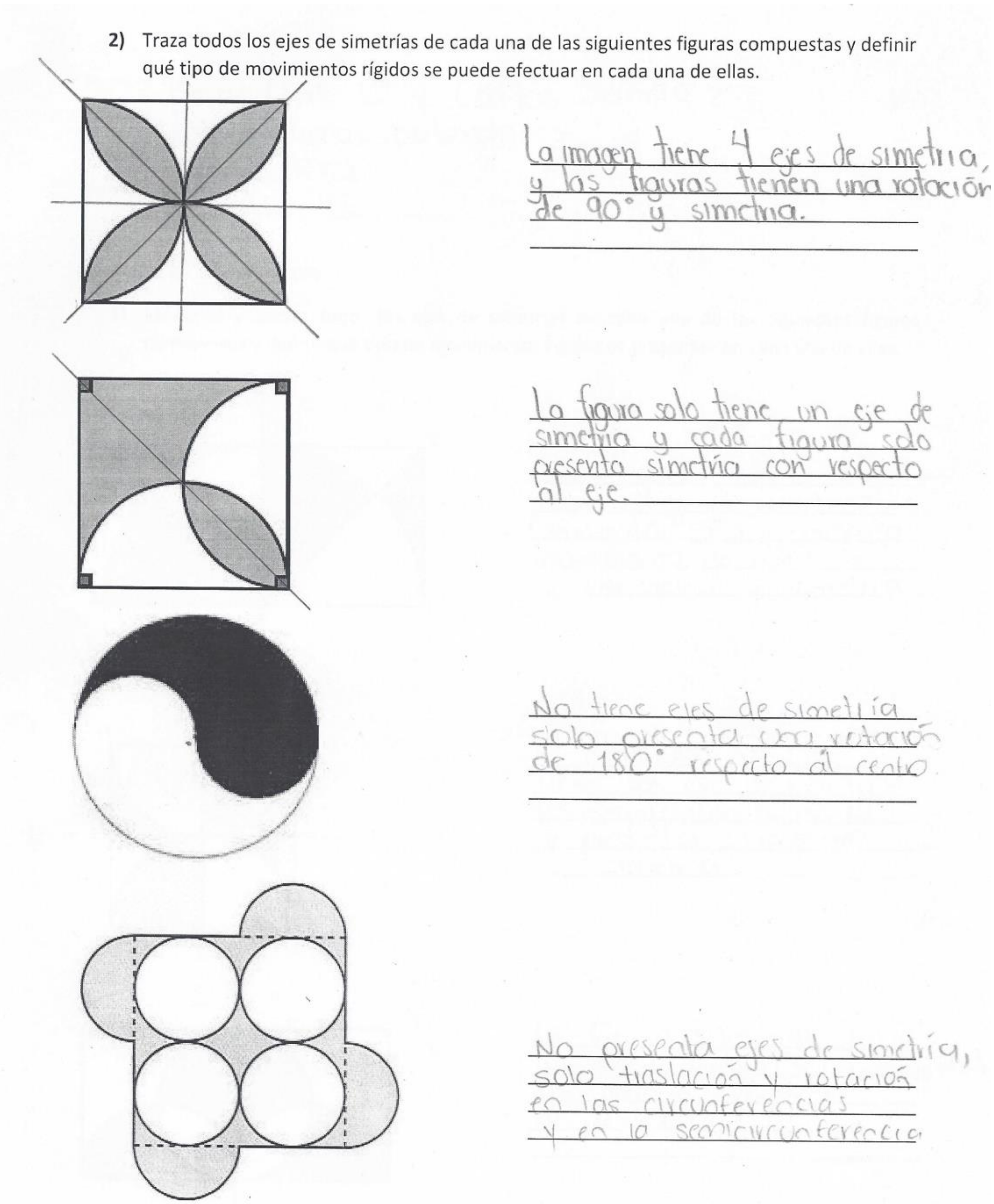
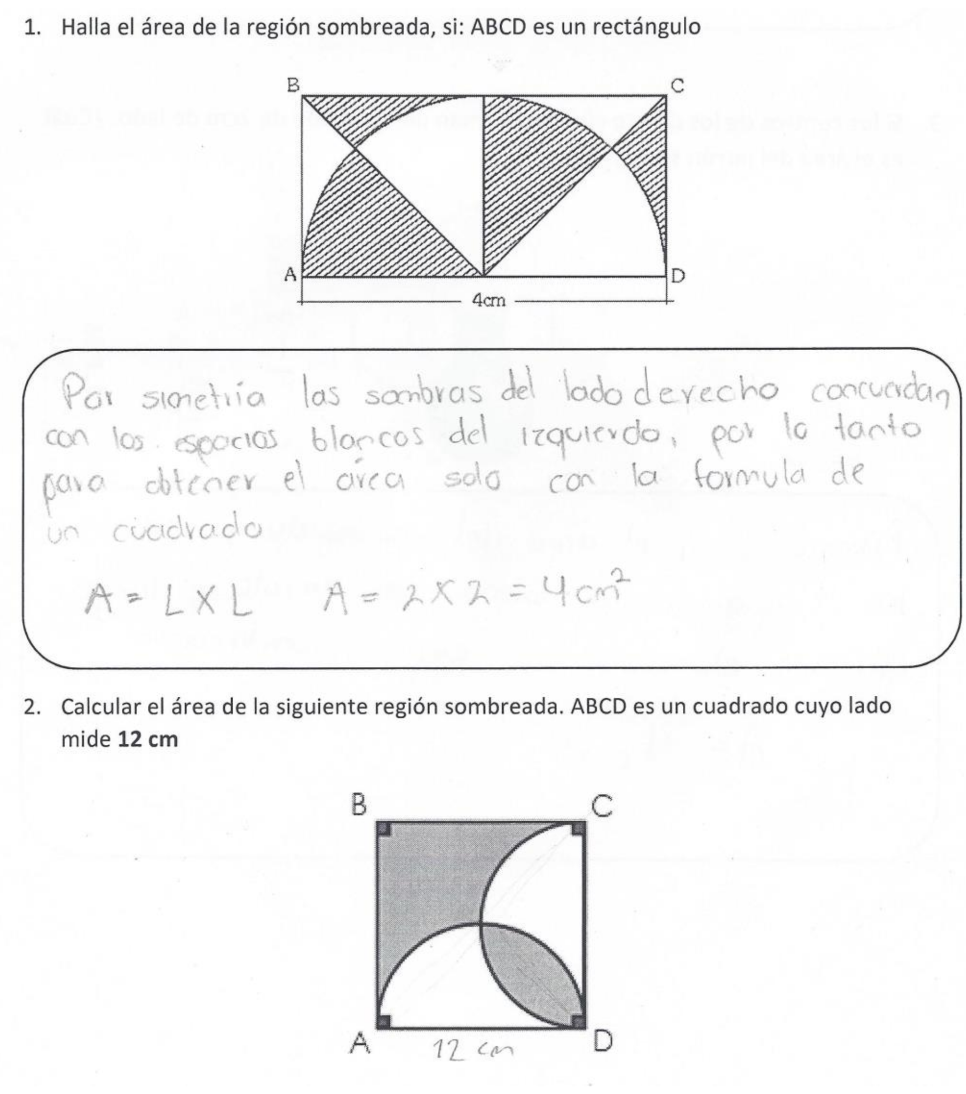


Figura 18. Respuestas de los estudiantes E3 y E4 en la actividad 2, ejercicio 2.

Durante las dos sesiones de la secuencia didáctica se les fue proporcionando a los estudiantes herramientas para desarrollar la capacidad de manipulación de la imagen. En el estudiante E3, por ejemplo, se puede notar en sus producciones que iba mostrando indicios de ir desarrollando dicha capacidad al identificar que se podían realizar movimientos en ellas, aunque las imágenes estuvieran estáticas. Ese dinamismo que les atribuía a las figuras hizo que el estudiante en la tercera actividad pudiera manipular la imagen para hallar el área de la región solicitada (ver Figuras 19 y 20).



1. Halla el área de la región sombreada, si: ABCD es un rectángulo

Por simetría las sombras del lado derecho concuerdan con los espacios blancos del izquierdo, por lo tanto para obtener el área solo con la formula de un cuadrado

$A = L \times L \quad A = 2 \times 2 = 4cm^2$

2. Calcular el área de la siguiente región sombreada. ABCD es un cuadrado cuyo lado mide **12 cm**

Figura 19. Primera parte de la solución a los problemas de la actividad 3 de los estudiantes E3 y E4.

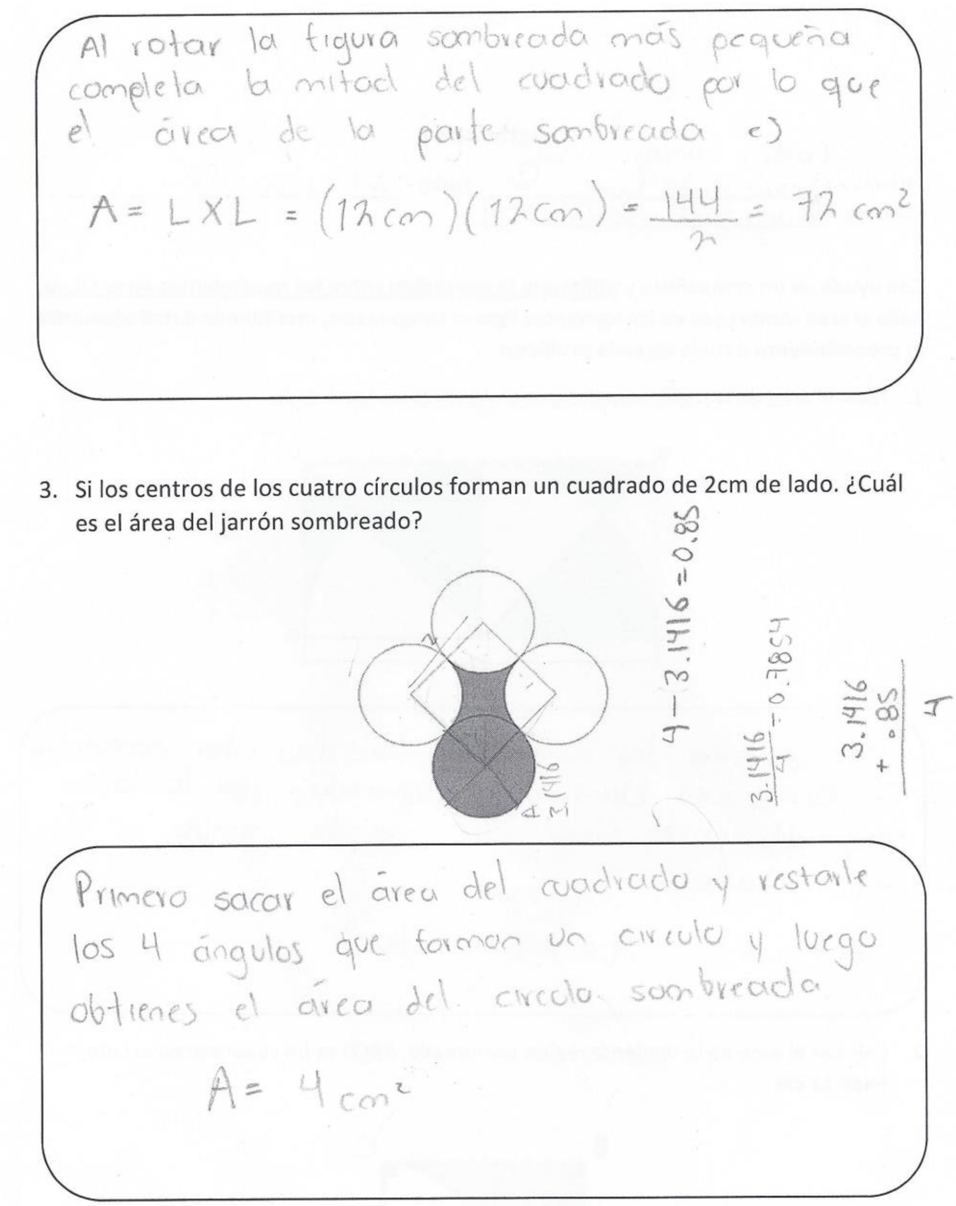
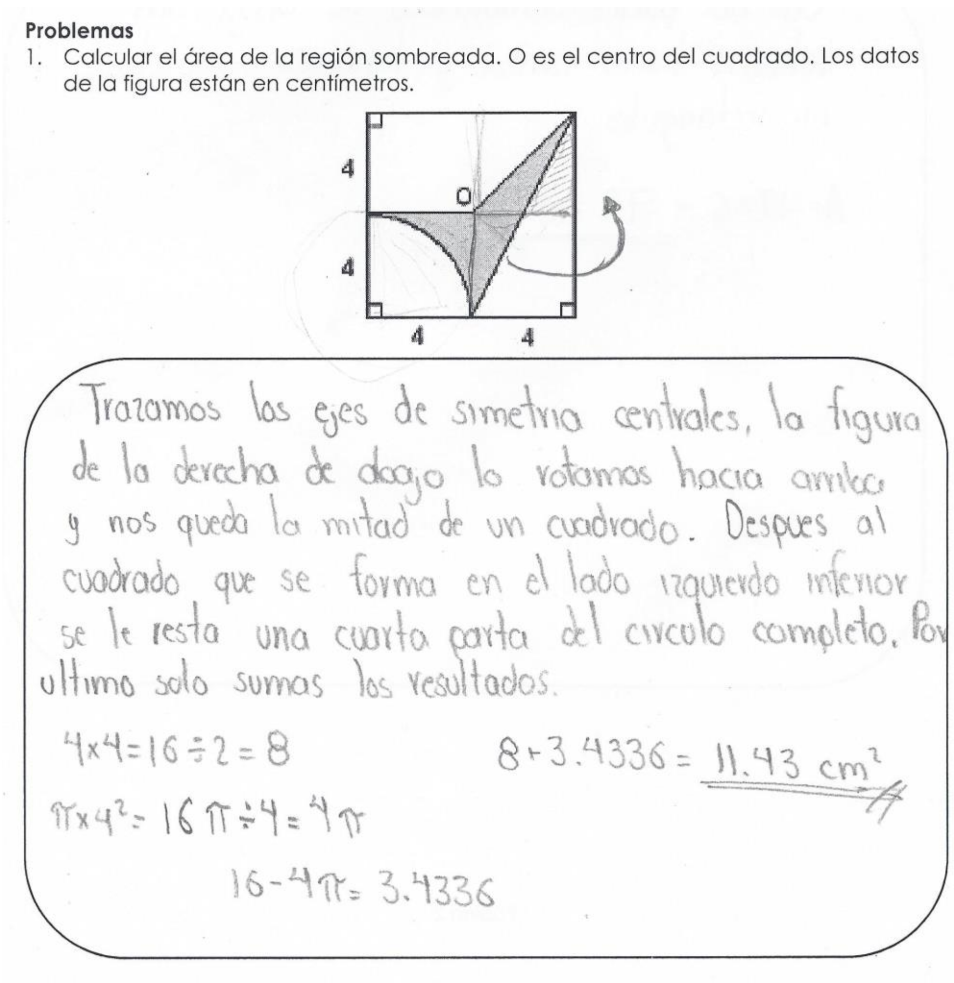


Figura 20. Segunda parte de la solución a los problemas de la actividad 3 de los estudiantes E3 y E4.

No obstante, en el tercer problema de cálculo de área de la actividad 3, los estudiantes E3 y E4 no evidenciaron manipular la imagen, pues su solución se basó en aplicar operaciones aritméticas (suma y resta de áreas), sin darse cuenta que restaban y sumaban la misma cantidad en sus operaciones, la cuál era el área del círculo. Sin embargo, es de destacar que, para los dos primeros problemas, los estudiantes E3 y E4 aplicaron propiedades de movimientos en el plano, obteniendo las respuestas deseadas. Con esta forma de resolver problemas por medio de transformaciones en el plano, mostraron el dominio conceptual que tuvieron sobre este tema y la presencia de las capacidades de organización visual, escaneo visual y manipulación de la imagen, a pesar de que en el último problema no fue tan evidente el tratamiento figural que se le podía aplicar a la figura.

Finalmente, después de algunas discusiones y correcciones de las actividades y tareas propuestas, se les aplica una prueba final con los mismos dos problemas de la prueba inicial para poder observar el avance en los estudiantes al resolver problemas de cálculo de áreas de figuras geométricas por medio de las habilidades visuoespaciales potenciadas.

La prueba final del estudiante E3 muestra que hubo un cambio en la forma de resolución a este tipo de problemas, puesto que inicialmente evidenció que para problemas con registros figurales no realizaba ningún tipo de tratamiento sobre la figura, solo se fijaba en los datos numéricos del problema y los trabajaba por medio del registro numérico. Luego de la intervención didáctica, se pudo observar que el estudiante aplicó manipulaciones sobre la imagen, modificándola para obtener su solución. A esta manera de resolver esta clase se problemas se le denomina *dibujar la solución* (ver Figuras 21 y 22).



Problemas

1. Calcular el área de la región sombreada. O es el centro del cuadrado. Los datos de la figura están en centímetros.

Trazamos los ejes de simetria centrales, la figura de la derecha de abajo lo rotamos hacia arriba y nos queda la mitad de un cuadrado. Despues al cuadrado que se forma en el lado izquierdo inferior se le resta una cuarta parte del circulo completo. Por ultimo solo sumas los resultados.

$4 \times 4 = 16 \div 2 = 8$

$\pi \times 4^2 = 16\pi \div 4 = 4\pi$

$16 - 4\pi = 3.4336$

$8 + 3.4336 = \underline{11.43 \text{ cm}^2}$

Figura 21. Solución del estudiante E3 al primer problema de la prueba diagnóstica final.

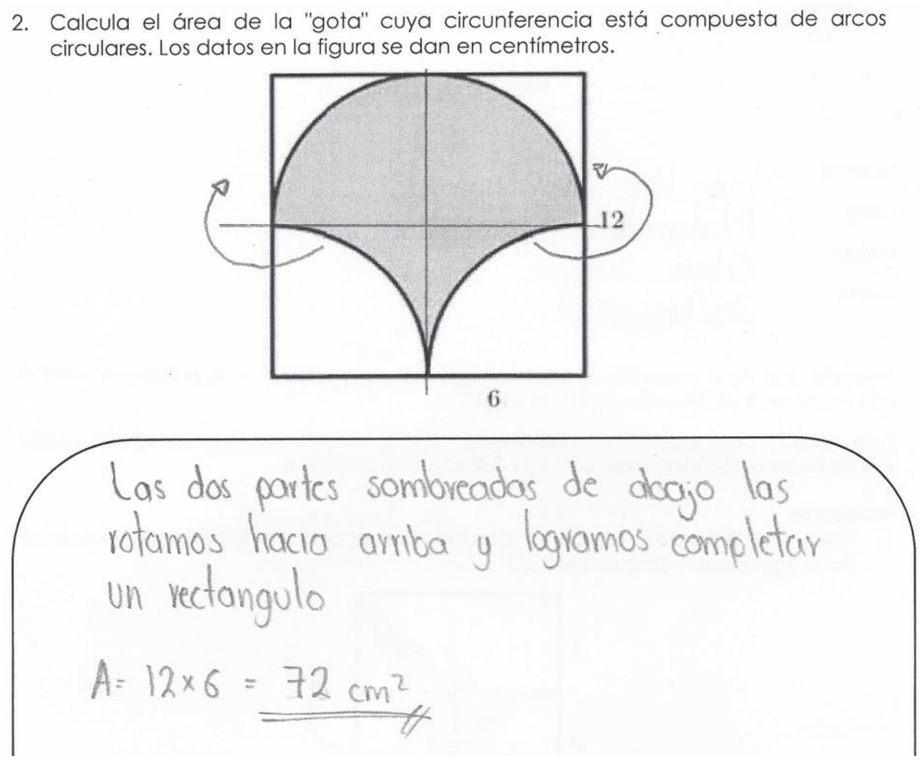


Figura 22. Solución del estudiante E3 al segundo problema de la prueba diagnóstica final.

Otro estudiante que durante la investigación mostró una mejora al resolver problemas por medio de la estrategia *dibujar la solución*, aunque ya se ha mencionado, es el estudiante E4. Este estudiante en la prueba diagnóstica inicial, al igual que el estudiante E3, su estrategia de solución se basó en *dividir el problema* y cambiar del registro figural a un registro numérico, sin embargo, para el segundo problema el estudiante E4 presentó dificultades. Este estudiante, aunque parece que *organizó la imagen*, no realizó el *escaneo visual* adecuado para darle la solución, ya que su proceso fue en quitarle las áreas de las partes no sombreadas al área del cuadrado, pero se olvida de restar el áreas de las dos pequeñas figuras no sombreadas que están en la parte superior del cuadrado, por lo que su respuesta sobrepasa el área de la región sombreada (ver Figura 23).

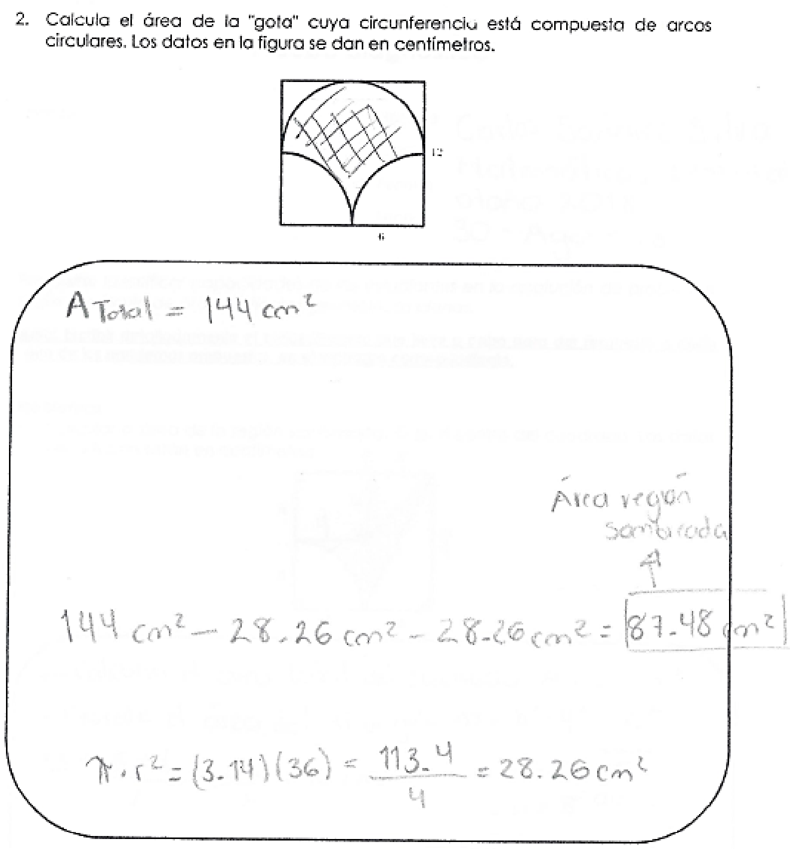


Figura 23. Solución del estudiante E4 al primer problema de la prueba diagnóstica inicial.

Para la primera actividad de la secuencia didáctica, se identificó que el estudiante E4 tuvo dificultades al realizar el tercer ejercicio de la actividad, pues no tuvo en cuenta, en la última imagen, la orientación del ángulo de rotación que se solicitaba (ver Figura 24), y esta dificultad es expresada por el estudiante cuando responde a las preguntas metacognitivas (ver Figura 25).

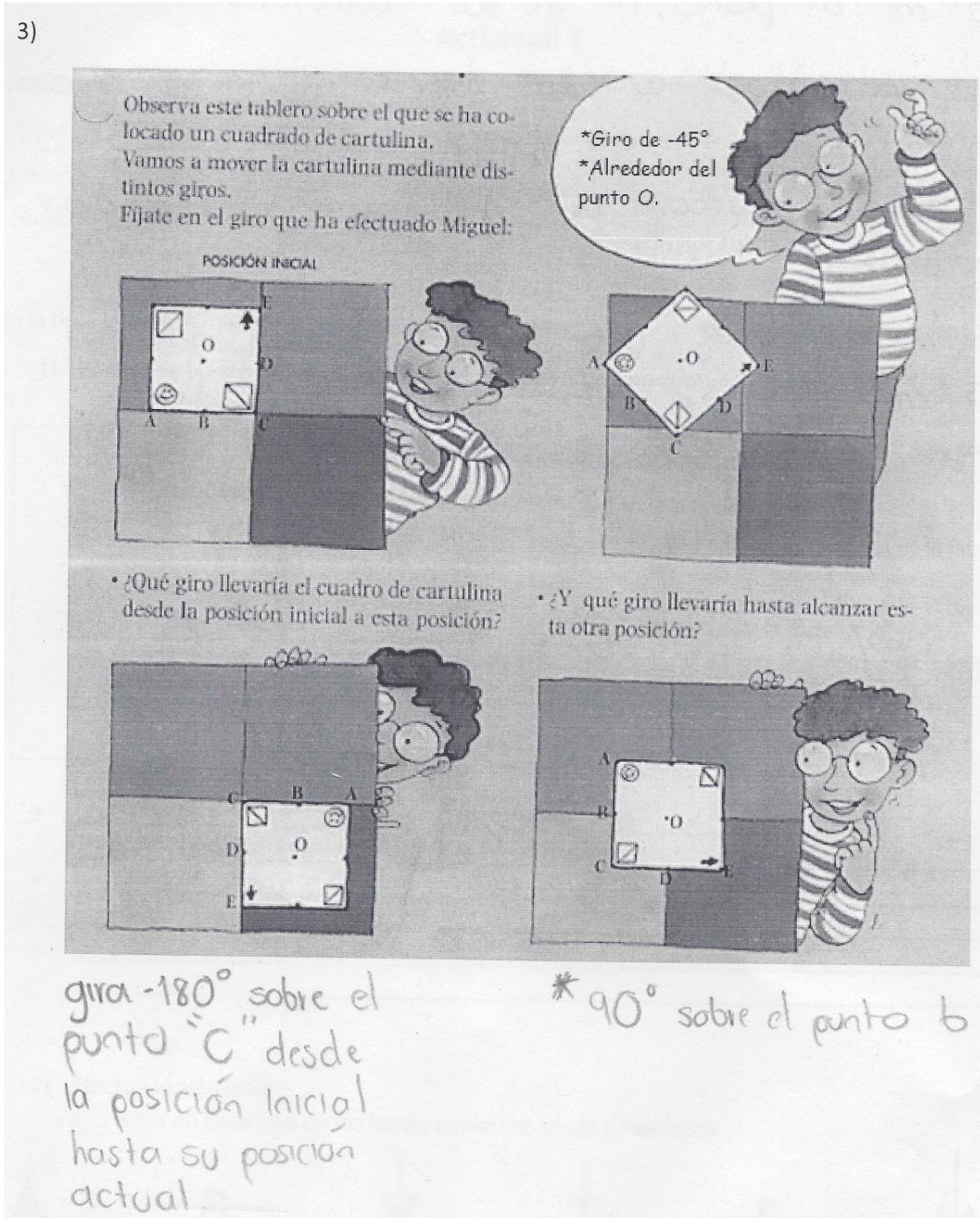


Figura 24. Solución del ejercicio 3 de la actividad 1 del estudiante E4.

Para comenzar la prueba no recordaba los conceptos de movimiento en el plano, ni de sus caracteristica.
La mayor dificultad que tuve fue en el inciso 3 con el movimiento de rotación, pero gracias al video después de finalizar la prueba puede aclarar y recordar dichos conceptos.

Figura 25. Respuesta del estudiante E4 a las preguntas metacognitivas hechas en la primera sesión.

En la segunda y tercera actividad el estudiante E4 trabajó con el estudiante E3, como se pudo observar previamente, que con ayuda del trabajo colaborativo fueron fortaleciendo sus habilidades visuoespaciales para resolver problemas de cálculo de área de figuras compuestas, y así poder emplear la estrategia heurística *dibujar la solución*. Este estudiante, en la prueba final, mostró un gran avance en la visualización de la imagen, pues como se vio en la prueba inicial, no se enfocaba en el registro figural, como muchos de sus compañeros, sino que se centraba en la conversión del registro, pasando del registro figural al numérico. En el desarrollo de la prueba final, este estudiante logró manipular la imagen de las figuras de cada problema, manteniendo sus propiedades, resolviendo idóneamente el problema como se puede observar en las Figuras 26 y 27

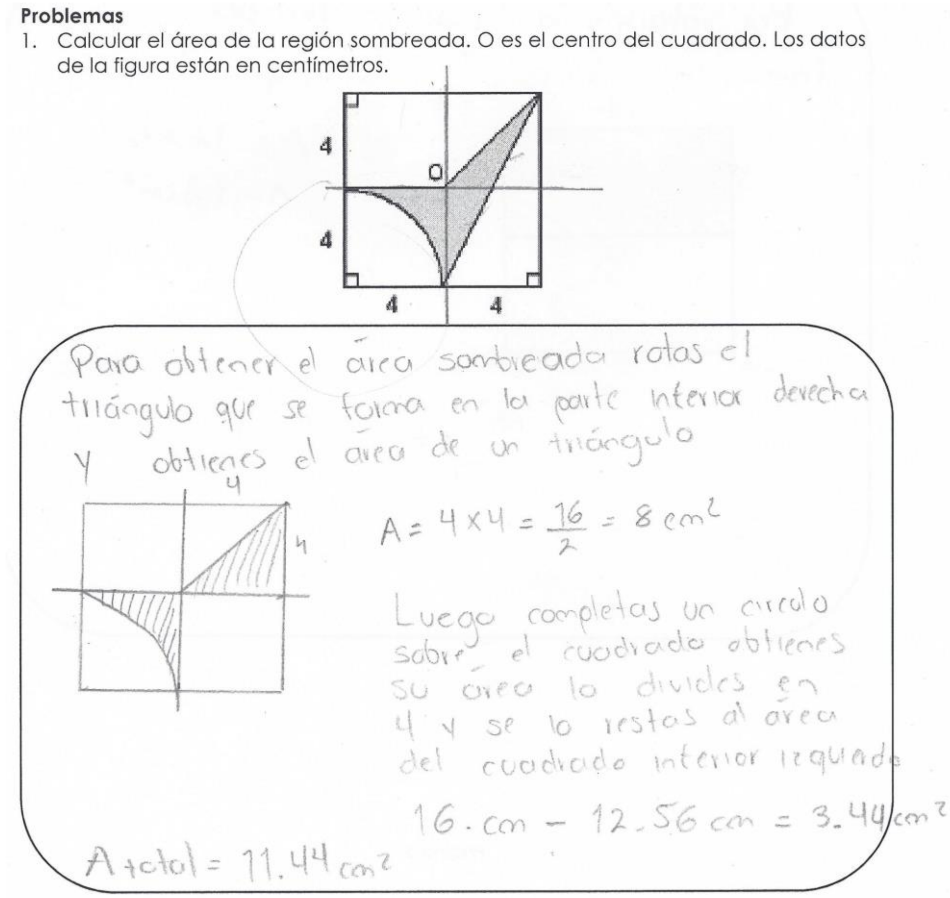


Figura 26. Solución del estudiante E4 al primer problema de la prueba diagnóstica final.

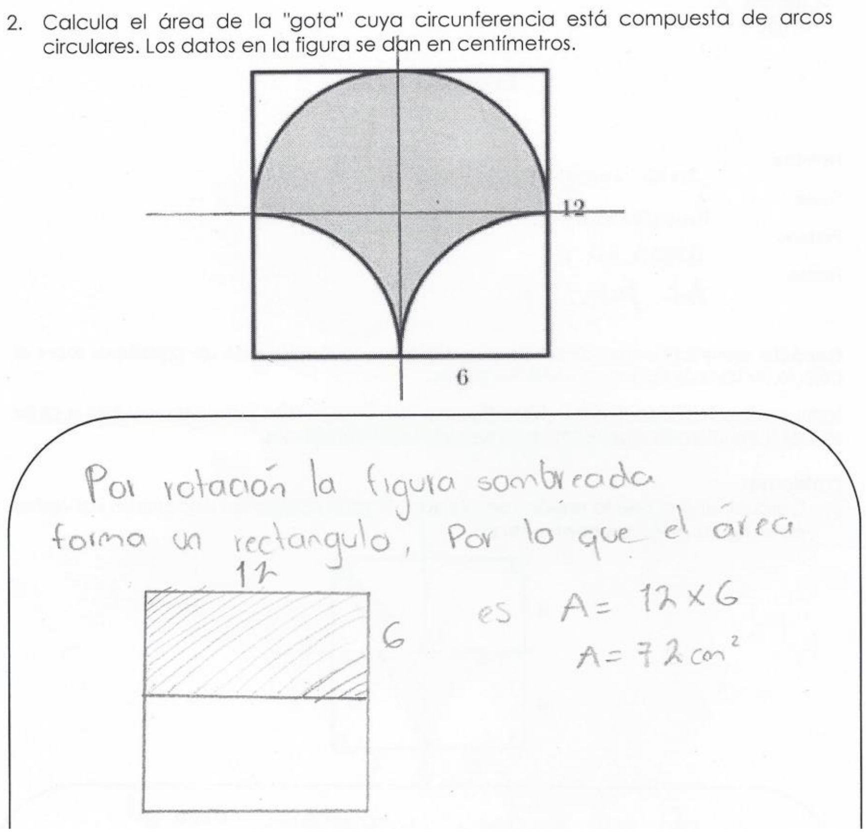


Figura 27. Solución del estudiante E4 al segundo problema de la prueba diagnóstica final.

Otro caso que se considera relevante para el estudio es la información que brinda el estudiante E11. Para intentar comprender su procedimiento se le aplica una entrevista, que seguidamente se presenta un extracto, donde "C" es el entrevistador.

C: ¿Entiendes el enunciado?

E11: (El estudiante lee el enunciado) … Pues sí, te piden calcular el área.

C: ¿Reconoces cada uno de los términos matemáticos y no matemáticos del enunciado y en la figura?

E11: Sí, por ejemplo, este ángulo vale noventa (señalando un ángulo recto del cuadrado), los centímetros de los lados.

C: Ok, además ¿qué me puedes decir acerca de la figura?

E11: Eh, pues de un principio sí lo vi como complicada. No sabía cómo resolverlo y todavía tengo duda si mi resultado está bien.

C: ¿Qué dificultades tuviste?

E11: En que… bueno, yo por lo regular trato de partir la figura, entonces… esta parte (señalando la parte sombreada cerca del cuarto de círculo) *para calcular el área sombreada estaba fácil, porque era un círculo, aunque tendrías que utilizar pi, pero ya para calcular estas dos áreas* (señalando el área del triángulo divido en dos partes, una se encuentra en el primer cuadrante y la otra en el cuarto cuadrante) *… pues de entrada no es un triángulo rectángulo como para calcularlo con la fórmula… con a cuadrado más b cuadrado… entonces partí el cuadrado en cuatro partes y después dividí un cuadrante a la mitad pero no sabía si los triángulos eran semejantes, y no sabía si el resultado me iba a dar bien.*

En la entrevista, el estudiante, en cuanto al primer problema de la prueba diagnóstica, manifestó una dificultad presente en algunos estudiantes participantes en el que utilizan el teorema de Pitágoras para calcular el área de un triángulo, por lo tanto, se interpreta que el estudiante evidencia poca capacidad de *escaneo visual*. En cuanto a la capacidad de *organización visual,* el estudiante mostró indicios que la poseerla, puesto que, durante la entrevista afirma observar conceptos figurales tal como "un cuarto de círculo" en un cuadrante de la figura (dividiendo mentalmente la figura en cuadrantes), propio de este tipo de capacidad. Sin embargo, no manifiesta a reconocer las demás figuras que no se encuentran sombreadas en los demás cuadrantes. Se interpreta que el estudiante solo se concentra en hallar el área de la región sombreada, sin tomar en cuenta las otras figuras no sombreadas, figuras que le hubieran ayudado a resolver el problema. Esto ocurre, ya que en su entrevista reveló que no logra visualizar la figura de otra forma, por lo que se interpreta que le hace falta desarrollar algunas capacidades visuoespaciales.

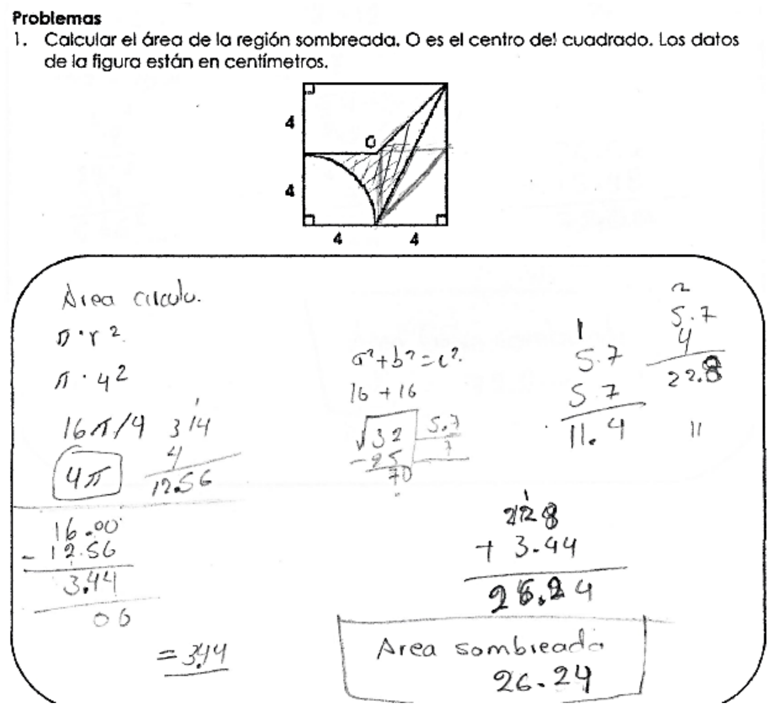


Figura 28. Solución del primer problema de la prueba diagnóstica inicial de E11.

Al igual que en el primer problema, para el segundo problema, el estudiante E11 muestra que su solución se basa en un registro algebraico, es decir que no realiza alguna manipulación de la imagen, sino que hay un cambio de registro por conversión. Evidencia que reconoce dos semicírculos tanto sombreado como no sombreado en la figura, a lo que se le atribuye la capacidad de *organización visual* en este problema. Es capaz de distinguir las figuras involucradas en el problema y sus propiedades (*escaneo visual*), pero no puede relacionar las figuras sombreadas de las no sombreadas, es decir hay una ausencia de manipulación de la imagen para darle sentido a sus procesos algebraicos (Observe en la Figura 29, la suma y la resta de la misma cantidad). Aunque llega a la solución, no se da cuenta que en su procedimiento algebraico el área pedida, no es más que la mitad del cuadrado.

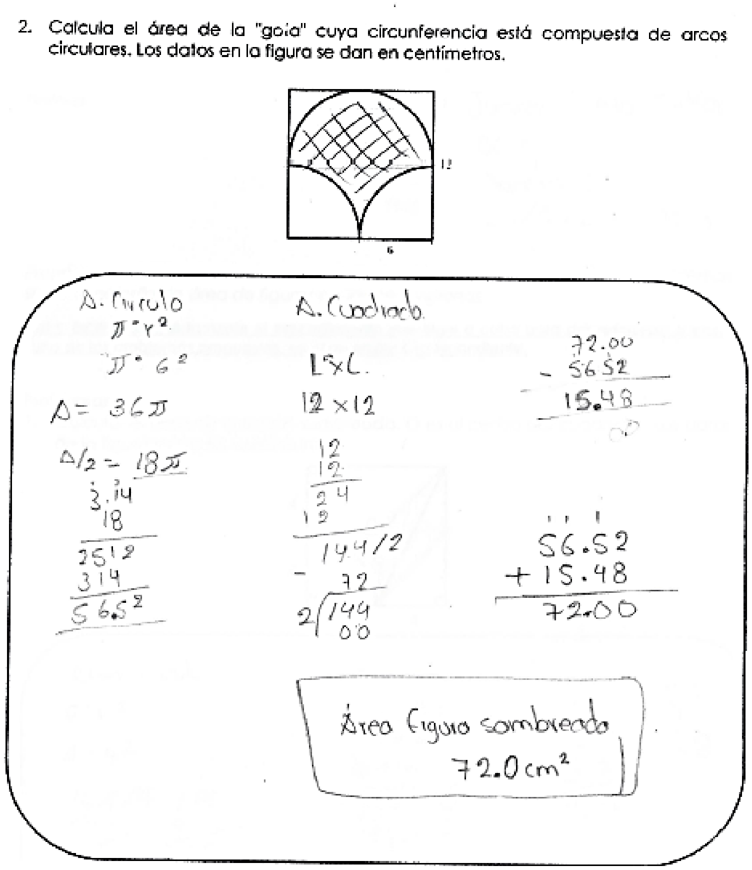


Figura 29. Solución del segundo problema de la prueba diagnóstica de E11.

Durante la secuencia didáctica, el estudiante E11 siguió evidenciando algunas deficiencias, en este caso relacionadas con las transformaciones en el plano. Como se puede notar en la Figura 30, el estudiante expone no saber cuántos grados debe rotar la primera imagen del inciso 3 para que le resulte la última imagen.

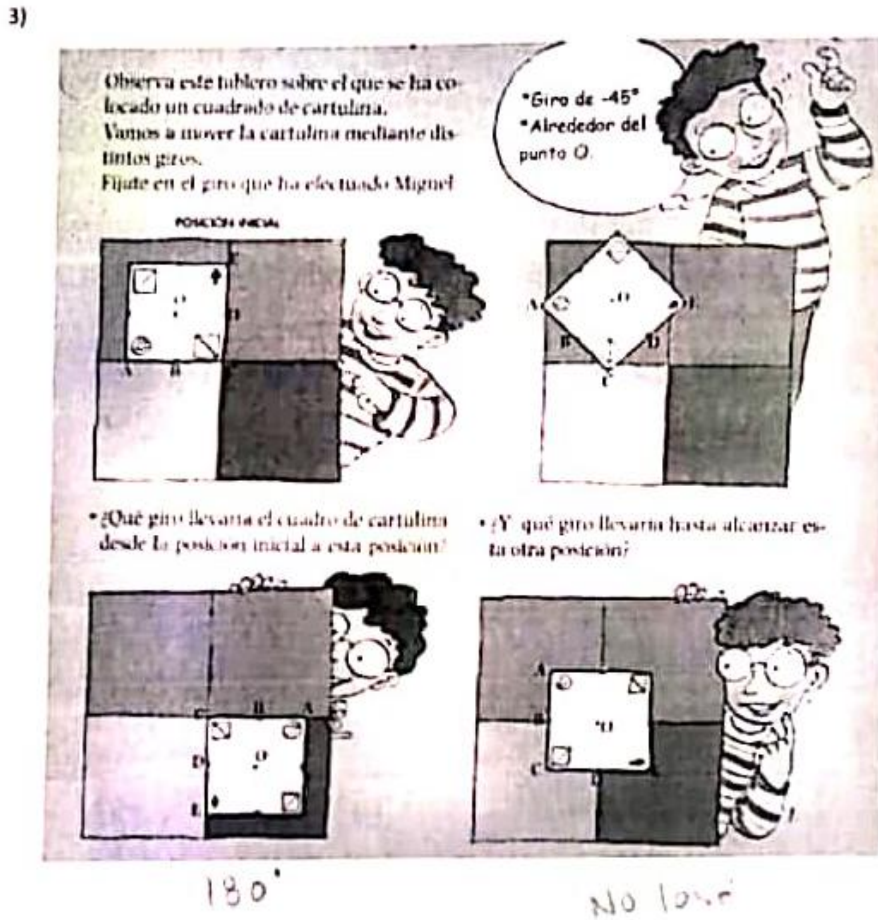


Figura 30. Respuesta del estudiante E11 al ejercicio 3 de la actividad 1.

En cada una de las sesiones se fueron haciendo retroalimentaciones que le fueron sirviendo al estudiante E11 a desarrollar un poco más las habilidades de visualización de los registros figurales y a comprender un poco sobre las transformaciones en el plano sobre tales registros.

Para la segunda actividad, el estudiante E11 logró, con ayuda de su compañero de trabajo, identificar tanto ejes de simetría como los movimientos que se pueden aplicar en las figuras del ejercicio 1 (ver Figura 31).

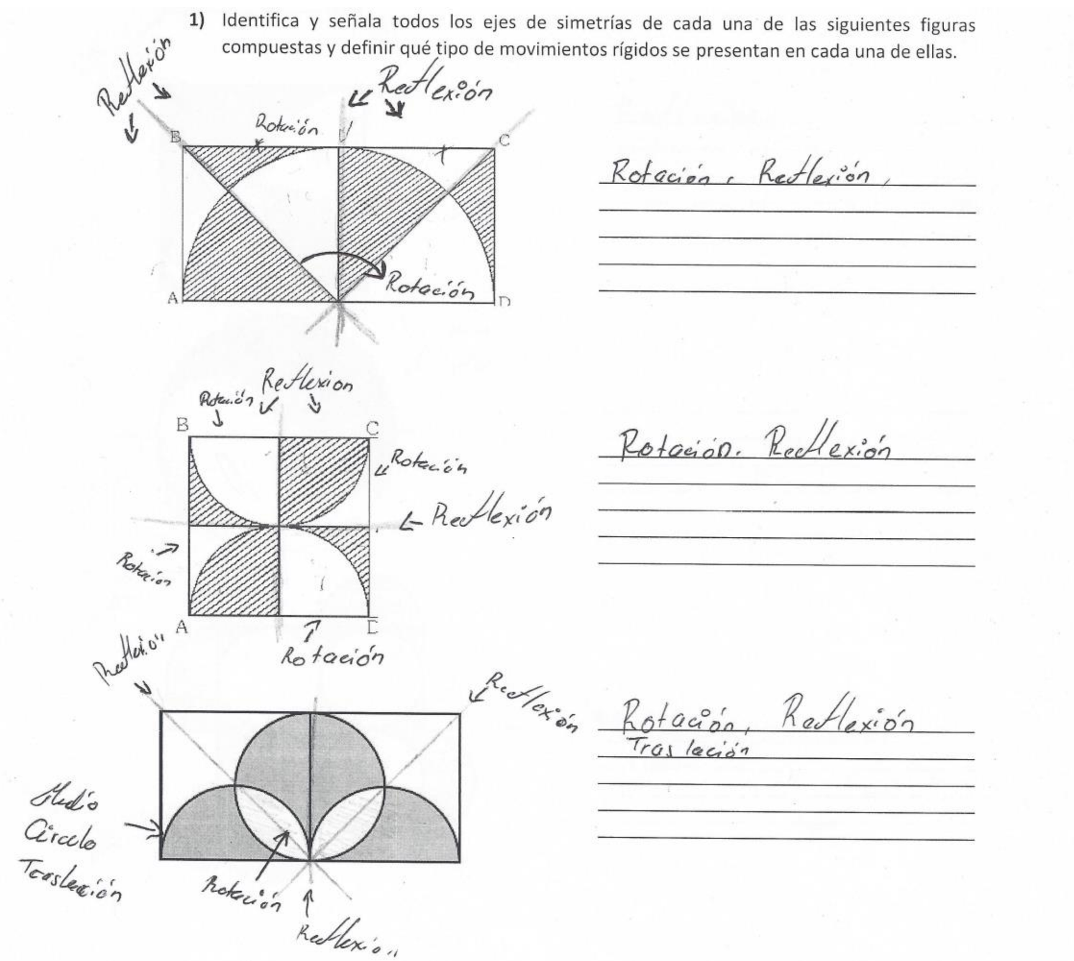
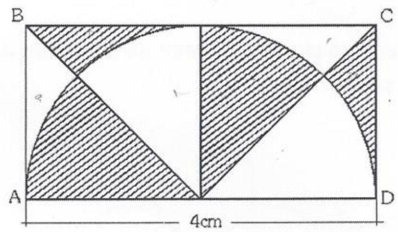


Figura 31. Respuesta del estudiante E11 al ejercicio 1 de la actividad 2.

Para la actividad 3, el estudiante E11 durante la resolución de los problemas propuestos, con ayuda de su compañero de trabajo, aplicó sus conocimientos sobre las transformaciones en el plano, logrando resolver correctamente cada uno de los problemas, y siendo lo más importante para esta investigación, se logra observar que aplica sus capacidades visuoespaciales trabajadas en la secuencia. En esta última actividad, el estudiante E11 pudo *manipular la imagen* y *dibujar la solución* de los problemas propuestos (ver Figuras 32 y 33)

1. Halla el área de la región sombreada, si: ABCD es un rectángulo



Juntando el área sombreado en una sola figura, aplicando la rotación, traslacióo y simetría. Ahora solo es un cuadrado, cuyas medidas son 2X2. Entonces el área es 4.

2. Calcular el área de la siguiente región sombreada. ABCD es un cuadrado cuyo lado mide **12 cm**

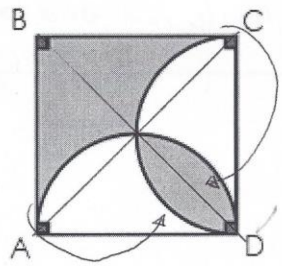
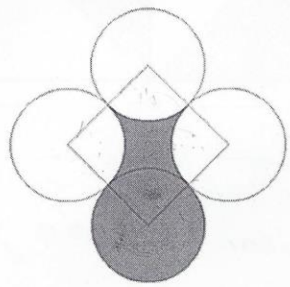


Figura 32. Primera parte de las soluciones del estudiante E11 a los problemas de la actividad 3.

Se aplica la rotación para rellenar los espacios sombreados y formar un triangulo.

3. Si los centros de los cuatro círculos forman un cuadrado de 2cm de lado. ¿Cuál es el área del jarrón sombreado?



Primero, por medio de rotación y traslación unimos un circulo en el cuadro, restamos el área del circulo al área del cuadrado, luego al resultado le sumamos el área del circulo R= 4, o cortamos en cuartos el circulo reyeno, y a traves de traslación o rotación, se llena el cuadrado

Figura 33. Segunda parte de las soluciones del estudiante E11 a los problemas de la actividad 3.

Finalmente, en la prueba diagnóstica final, donde el estudiante E11 demuestra un poco las habilidades adquiridas durante la secuencia, se pudo observar que tuvo errores de tipo operacional en el primer problema, puesto que no llega a la respuesta correcta, sin embargo, es de rescatar que *modificó la imagen* por medio de la rotación para hallar el área del triángulo con base horizontal que se formó después de esa transformación. Aun así, parece que el estudiante, aunque haya modificado la imagen, no logra hacer, en este primer problema, un *escaneo visual* apropiado para darle respuesta al problema (ver Figura 34).

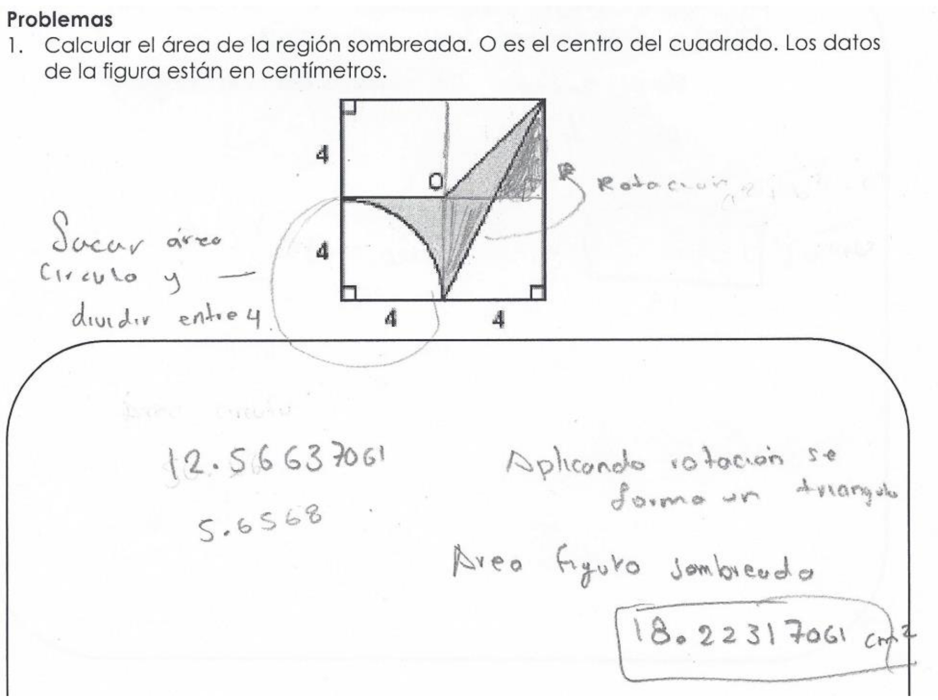


Figura 34. Solución del primer problema de la prueba diagnóstica final del estudiante E11.

En el segundo problema sucedió lo contrario, ya que, al *manipular la imagen* pudo *dibujar la solución* al problema, obteniendo así la respuesta correcta. En este problema, el estudiante E11 logró poner en juego lo aprendido durante la secuencia y mostrar sus habilidades visuoespaciales al resolver el problema por medio de otro método, diferente al utilizado en la prueba diagnóstica inicial (ver Figura 35).

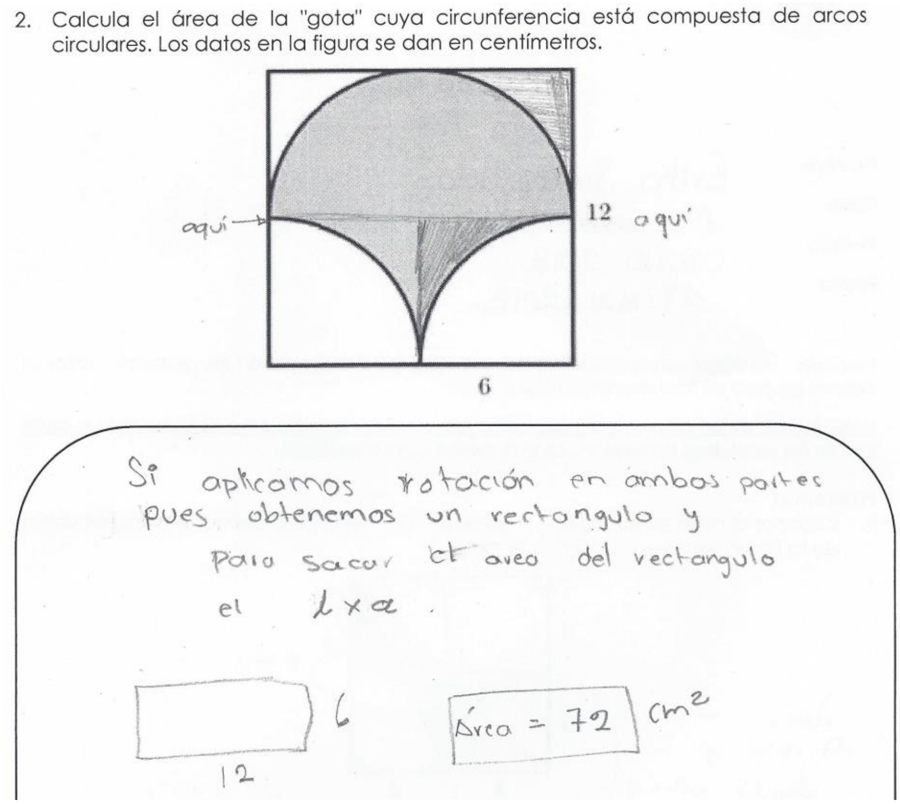


Figura 35. Solución del segundo problema de la prueba diagnóstica final del estudiante E11.

Como se pudo observar, los resultados obtenidos después de la implementación de la secuencia, ayudó a que los estudiantes pusieran en juego esas capacidades visuoespaciales que les permitieron resolver los problemas de otra forma, además, con esta estrategia de resolución los estudiantes lograron mostrar discursivamente su respuesta, no solo pasando del registro figural al número, sino transformándolo a un registro verbal.

A continuación, se muestra un gráfico que describe de manera general el cambio significativo que hubo entre el antes y el después de la intervención didáctica en cuanto a la habilidad de manipulación de la imagen, donde 0 representa la presencia de esta habilidad y 1 la ausencia de la misma. El desarrollo de esta habilidad y su puesta en marcha para resolver problemas de cálculo de áreas de figuras compuestas se identificó como un recurso importante para dar respuestas acertadas, ya que manipular la imagen le permite al estudiante buscar en sus conocimientos previos los recursos necesarios para transformar o reconfigurar la imagen en una nueva manteniendo sus propiedades; propiedades que se ven reflejados a la hora de escanear la imagen, y previo a ello se debe organizar la imagen. Es por ello que se han tomado estas tres habilidades como fundamentales para llegar a la estrategia heurística *dibujar la solución*.

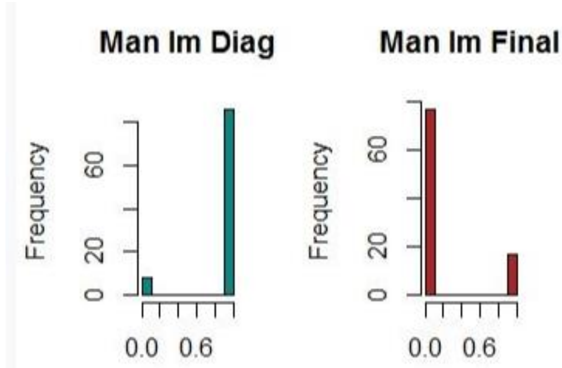


Figura 36. Gráfica de frecuencia de la ausencia y presencia de la Manipulación de la imagen en la prueba inicial y la prueba final de los estudiantes

En la interpretación de los datos se puede dar cuenta que, mientras que en la primera prueba la mayor parte de los estudiantes no manifiestan la capacidad visuoespacial de *manipulación de la imagen*, aunque algunos sí reflejen las habilidades de organización y escaneo visual, en la segunda prueba la mayoría alcanza a utilizarla en su proceso de solución, como resultado de la intervención didáctica. Al poner en práctica estas habilidades los estudiantes demostraron desarrollar el tipo de estrategia heurística clave para resolver problemas de cálculo de áreas de figuras compuestas, *dibujar la solución*.

En los dos problemas propuestos, los estudiantes en su mayoría utilizaron la estrategia de *dividir el problema*, fraccionando la figura en subfiguras, algunos centrándose en el área de las figuras no sombreadas para hallar el área de las figuras sombreadas y otros solo enfocándose en las partes de las figuras sombreadas sin tener en cuenta las figuras que no eran de interés. Además, para llevar a cabo la estrategia de solución, se logra identificar ciertas capacidades visuoespaciales que el estudiante puso en juego en la resolución de problemas que contienen registros figurales.

Los estudiantes resolvieron la evaluación final solo con lápiz y papel sin utilizar ningún medio tecnológico o software, por lo que los procesos realizados requirieron una demanda cognitiva mayor, ya que tenían que realizar manipulaciones de las figuras mentalmente.

Además, se realizó dos cuadros comparativos, uno para el primer problema de la prueba y el otro para el segundo en la prueba inicial y la prueba final, contrastando la presencia de las capacidades visuoespaciales destacadas para problemas de cálculo de áreas de figuras compuestas. En estos cuadros se muestra, por medio de porcentajes que representan el uso de las capacidades visuoespaciales en cada uno de los dos problemas propuestos, el cambio significativo que hubo en la segunda prueba con respecto a la primera, indicando que hubo un aumento en el manejo de estas capacidades durante la resolución de los problemas, lo cual se vio reflejado en la exploración heurística de los estudiantes para darles respuesta a los problemas, por lo que finalmente se evidencia la estrategia heurística que se buscaba desarrollar en los estudiantes, *dibujar la solución*.

Tabla 4.

Cuadro comparativo del cambio en las habilidades visuoespaciales en el problema 2 de las pruebas diagnóstica inicial y final

	Problema 1- Inicial	Problema 1- Final
Organización visual	**82.35%**	**96.00%**
Escaneo Visual	**84.31%**	**87.75%**
Manipulación de la imagen	**0.00%**	**71.42%**

Tabla 5.

Cuadro comparativo del cambio en las habilidades visuoespaciales en el problema 2 de las pruebas diagnóstica inicial y final

	Problema 2- Inicial	Problema 2- Final
Organización visual	**78.43%**	**100.00%**
Escaneo Visual	**80.39&**	**96.00%**
Manipulación de la imagen	**5.88%**	**96.00%**

Es importante precisar que el primer problema de la prueba diagnóstica se propuso sin la intención de que se manipulara la figura que representaba el problema, pues no requería de una reconfiguración para su solución, sin embargo, como podemos notar en la tabla, los estudiantes realizaron este tratamiento para transformar el triángulo original que se encuentra inclinado en la parte derecha de la figura a un triángulo con la base horizontal. Se piensa que para el estudiante es más fácil calcular el área de un triángulo cuando su base es completamente horizontal y su altura fácil de observar a simple vista.

Como no había la necesidad de realizar algún tipo de manipulación de la imagen en el primer problema, en la prueba final no todos los estudiantes evidenciaron esta habilidad, sin embargo, se presenció un cambio significativo con respecto a la primera prueba, pasando de un 0% a un 71% de estudiantes que manifestaron esta habilidad.

CONCLUSIONES

Esta investigación ha corroborado que la visualización y la representación constituyen una herramienta poderosa para la resolución de problemas geométricos. Como lo menciona Castiblanco, Urquina, Camargo y Acosta (2004), el proceso de visualización se considera un soporte de la actividad cognitiva en geometría, haciendo que el sujeto evolucione en la percepción de los objetos e identifique su potencial heurístico en la resolución de problemas.

De la misma manera, se constata lo mencionado por Duval (1999), que tanto la representación semiótica que el estudiante propone para resolver el problema, como las capacidades visoespaciales expuestas en la resolución, son consideradas fundamentales para reconocer el estado de compresión de éste. Por lo tanto, se identificó que en los estudiantes predominaba el cambio de registro de representación del problema geométrico a uno algebraico; es decir, que en los estudiantes prevalecía la transformación de los registros por conversión que por tratamiento. Lo anterior, exhibe que existe una inclinación de pasar del registro figural al registro algebraico, sin realizar un previo tratamiento sobre la figura, lo cual hacía notar la carencia de un proceso de visualización más profundo en el registro figural.

En miras de potenciar las capacidades visoespaciales y ponerlas en práctica en la resolución de problemas de cálculo de áreas de figuras compuestas, se propuso una secuencia didáctica, con el apoyo de GeoGebra, en función de la visualización y la resolución de problemas de este tipo. La secuencia estuvo dirigida a la aplicación de propiedades de simetría y congruencia de figuras geométricas planas, visualizadas por medio del software de geometría dinámico.

Los resultados obtenidos en la prueba diagnóstica mostraron la necesidad de potenciar la visualización al interpretar las estrategias y capacidades visoespaciales utilizadas por los estudiantes, de este modo, la intervención en el aula, asistida por GeoGebra, ayudó a propiciar tanto el desarrollo de la visualización como la promoción de una de las heurísticas importantes en la resolución de problemas con registros figurales, *dibujar la solución*; consiguiendo luego, resultados satisfactorios.

Los estudiantes, al finalizar la propuesta didáctica, evidenciaron un cambio positivo en la percepción de estos problemas, logrando resolverlos de una manera más eficiente al manipular la imagen (capacidad importante en la visualización de los registros figurales), a través de los movimientos en el plano, en los que se requería un fuerte control conceptual y una alta demanda cognitiva.

Se interpreta también que, gracias a la inserción de la tecnología a la secuencia, considerada como una herramienta poderosa en la representación dinámica de configuraciones geométricas, se logró promover la capacidad visoespacial de manipulación de la imagen, importante en la resolución de problemas geométricos y fundamental en el uso del heurístico dibujar la solución.

Referencias bibliográficas

Araya, R. G., y Alfaro, E. B. (2009). Algunas reflexiones sobre la didáctica de la geometría. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*, *5*, 113-136.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52(3), 215–241.

Carrillo, J. (1998). La resolución de problemas en la enseñanza secundaria. Ejemplificaciones del para qué. *Épsilon*, *40*, 15-16.

Carrillo, J., y Muñoz-Catalán, M.C. (2011). Análisis metodológico de las actas de la SEIEM (1997-2010) desde la perspectiva de los métodos cualitativos. Reflexión en torno a un caso. En M. Marín, G. Fernández, L. Blanco, & M. Palarea (Eds.), Investigación en Educación Matemática. XV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (pp. 99-116). Ciudad Real, España: SEIEM.

Castiblanco, A., Urquina, H., Camargo, L. y Acosta, M. (2004). *Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales.* Colombia: Ministerio de Educación Nacional, Enlace Editores Ltda.

Duval, R. (1995). Geometrical Pictures: kinds of representation and specific processing. En R. Sutherland and J. Mason (Eds). *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education*. *138*, (pp. 142–156).

Duval, R. (1999). Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning. En *Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. (p.25). México: Eric. Recuperado de https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED466379.pdf

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational studies in mathematics, 61*(1-2), 103-131.

Escudero, D. (2015). *Una caracterización del conocimiento didáctico del contenido como parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas de secundaria* (Tesis Doctoral). Huelva: Universidad de Huelva

Fan, L., y Zhu, Y. (2007) Representation of Problem-Solving Procedures: A Comparative Look at China, Singapore, and US mathematics textbooks. *Educational Studies in Mathematics, 66*(1), 61-75.

Fernández González, J., Elortegui, N., Rodríguez, J., y Moreno, T. (2002). *¿Cómo hacer unidades didácticas innovadoras?* España: Díada Editora.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational studies in mathematics, 24(*2), 139–162.

Frederiksen, N. (1984). Implications of cognitive theory for instruction in problem solving. *Review of Educational Research,* 54, 363-407.

Galvis Pérez, J. F. (2017). *Identificación de las formas de aprehensión, desde la visualización de los registros figurales, el caso teorema de Pitágoras* (Tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Palmira.

Godino, J. (1993). Paradigmas, problemas y metodologías de investigación en didáctica de la matemática (pp. 1-10). *Revista Quadrante*. Universidad de Granada, España.

Godino, J., Batanero, C., y Font, V. (2003). Matemáticas y su didáctica para maestros. Granada: ReproDigital.

Gómez, C. (2015). *Proceso de visualización de cuadriláteros: Un estudio con profesores de nivel secundario* (Tesis de maestría). Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú.

Gravina, M. A. (2008). Drawing in movement and insights for the proof process. *International Journal of Continuing Engineering Education and Life Long Learning*, 18(5-6), 564-574.

Halmos, P. R. (1980). The heart of mathematics. *The American Mathematical Monthly*, *87*(7), 519-524.

Kleiner, I. (1986). Famous problems in mathematics: An outline of a course. *For the learning of mathematics*, *6*(1), 31-38.

Kosslyn, S. M. (1983). *Ghosts in the Mind's Machine. Creating and Using Images in the Brain*. New York: W. Norton & Company.

Leung, A., y Bolite-Frant, J. (2015). Designing mathematical tasks: The role of tools. En A. Watson y M. Ohtani (Eds.), *Task design in mathematics education*, (pp. 191–225). New York: Springer.

Liljedahl, P., Santos-Trigo, M., Malaspina, U., & Bruder, R. (2016). Problem solving in the mathematics education. En Gabriele Kaiser (Ed.), *Problem Solving in Mathematics Education* (pp. 1-39). Hamburgo, Alemania: Springer.

Marmolejo, G., y Vega, M. (2005). Geometría desde una perspectiva semiótica: visualización, figuras y áreas. *XV Encuentro de Geometría y sus aplicaciones*, Bogotá, Colombia.

Marmolejo, G. A. (2007). *Algunos Tópicos a tener en cuenta en el aprendizaje del registro semiótico de las figuras geométricas: Procesos de visualización y factores de visibilidad* (Tesis de maestría). Universidad del Valle, Colombia.

Maláč, J. y Kurfürst, J. (1981) *Zajímavé úlohy z učiva matematiky ZŠ*, Praha: SPN.

Miragliotta, E., y Baccaglini-Frank, A. (2017). Visuo-spatial abilities and geometry: A first proposal of a theoretical framework for interpreting processes of visualization. En Dooley, T., y Gueudet, G. (Eds.). *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 3952-3959). Dublin, Ireland: DCU Institute of Education and ERME .

Miragliotta, E., Baccaglini-Frank, A., y Tomasi, L. (2017). Apprendimento della geometria e abilità visuo-spaziali: un possibile quadro teorico e un'esperienza didattica. *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, *40B*(3), 339-361.

Moreno-Armella, L., y Santos-Trigo, M. (2016). The use of digital technologies in mathematical practices: Reconciling traditional and emerging approaches. En L. English y D. Kirshner

(Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (3rd ed.), (pp. 595–616). New York: Taylor and Francis Group.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: The Council.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (1995). *Professional standards for teaching mathematics.* Reston, VA: The Council.

Novotná, J., Eisenmann, P., Přibyl, J., Ondrušová, J., y Břehovský, J. (2014). Problem solving in school mathematics based on heuristic strategies. *Journal on Efficiency and Responsibility in Education and Science*, *7*(1), 1-6.

Polya, G. (1945) *How to Solve It*. Princeton: Princeton University.

Quesada, R. (2001). *Cómo planear la enseñanza estratégica*. México: Limusa.

Sampieri, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación*. México D.F, México: McGRAW-HILL

Santos, L. M. (2007). *La resolución de problemas matemáticos: fundamentos cognitivos*. México: Trillas.

Santos, L. M. (2008). La resolución de problemas matemáticos: avances y perspectivas en la construcción de una agenda de investigación y práctica. En *Investigación en educación matemática XII* (p. 8). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. California: Academic Press.

Simon, H. A. (1977). *The structure of ill-structured problems*. En Models of discovery (pp. 304-325). Springer, Dordrecht.

Solaz-Portolés, J. J., y Lopez, V. S. (2007). Representations in problem solving in science: Directions for practice. En *Asia-Pacific Forum on Science Learning and Teaching* (Vol. 8, No. 2, pp. 1-17). The Education University of Hong Kong, Department of Science and Environmental Studies.

Stacey, K. (1991). The effects on student's problem solving behavior of long-term teaching through a problem solving approach. *Proceedings of the 15th conference of the international group for the psychology of mathematics education*, *3*, 278–285.

Thorndike, E. L. (1924). Mental discipline in high school studies. *Journal of Educational Psychology*, 25, 1-22. http://dx.doi.org/10.1037/h0075386

Anexo

Segunda y tercera sesión de la secuencia didáctica

Sesión 2

Objetivo: Identificar movimientos rígidos en figuras compuestas

Inicio

Revisar algunas imágenes cargadas en la plataforma y que los estudiantes visualicen los movimientos rígidos

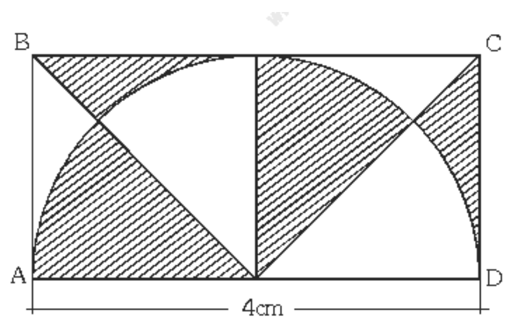
Aclarar ideas sobre cada uno de los movimientos en el plano.

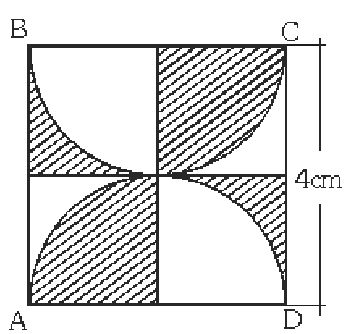
Desarrollo

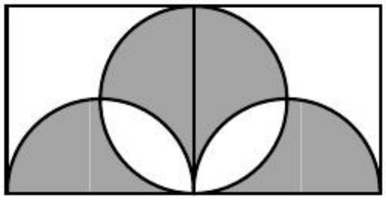
Proporcionar a los estudiantes en hojas la siguiente actividad a trabajar en parejas:

Actividad 2: Con ayuda de tu compañero:

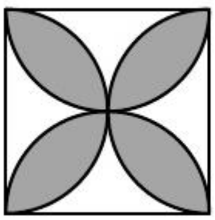
1) Identifica todos los ejes de simetrías de cada una de las siguientes figuras compuestas y definir qué tipo de movimientos rígidos se puede efectuar en cada una de ellas.

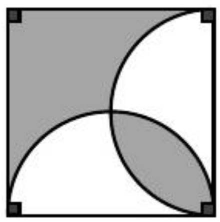


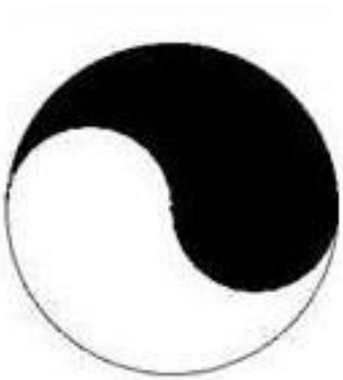


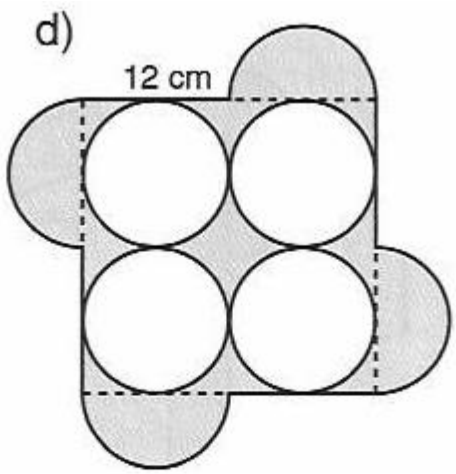


2) Traza todos los ejes de simetrías de cada una de las siguientes figuras compuestas y definir qué tipo de movimientos rígidos se puede efectuar en cada una de ellas.









El facilitador comprobará usando GeoGebra las simetrías de algunas figuras.

Cierre

Actividad metacognitiva:

Con tu compañero, responde las siguientes preguntas:

¿Qué es lo que más les gustó de la clase?

¿Comprendieron lo explicado?

¿Qué se les complicó en la actividad?

¿La lectura les ayudó a recordar con profundidad sobre los movimientos en el plano?

Tarea: Para la próxima clase, traer figuras compuestas con simetrías (Cargarlas a la plataforma)

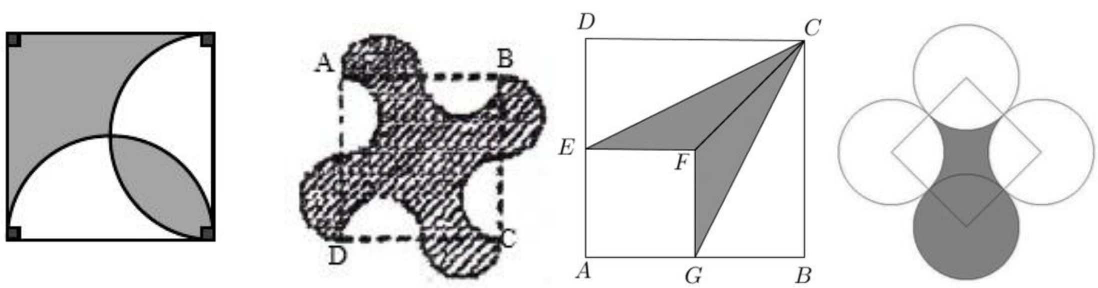
Sesión 3 (Cálculo de áreas de figuras compuestas)

Objetivo: Fomentar la aplicación de los movimientos rígidos para el cálculo de áreas de figuras compuestas.

Recuperar los siguientes aprendizajes previos en plenaria a través de preguntas:

- ✓ Fórmulas de áreas (cuadriláteros, triangulo, circulo)

El facilitador mostrará por medio de GeoGebra con animaciones los movimientos rígidos aplicados para hallar el área de las regiones sombreadas de las siguientes figuras:



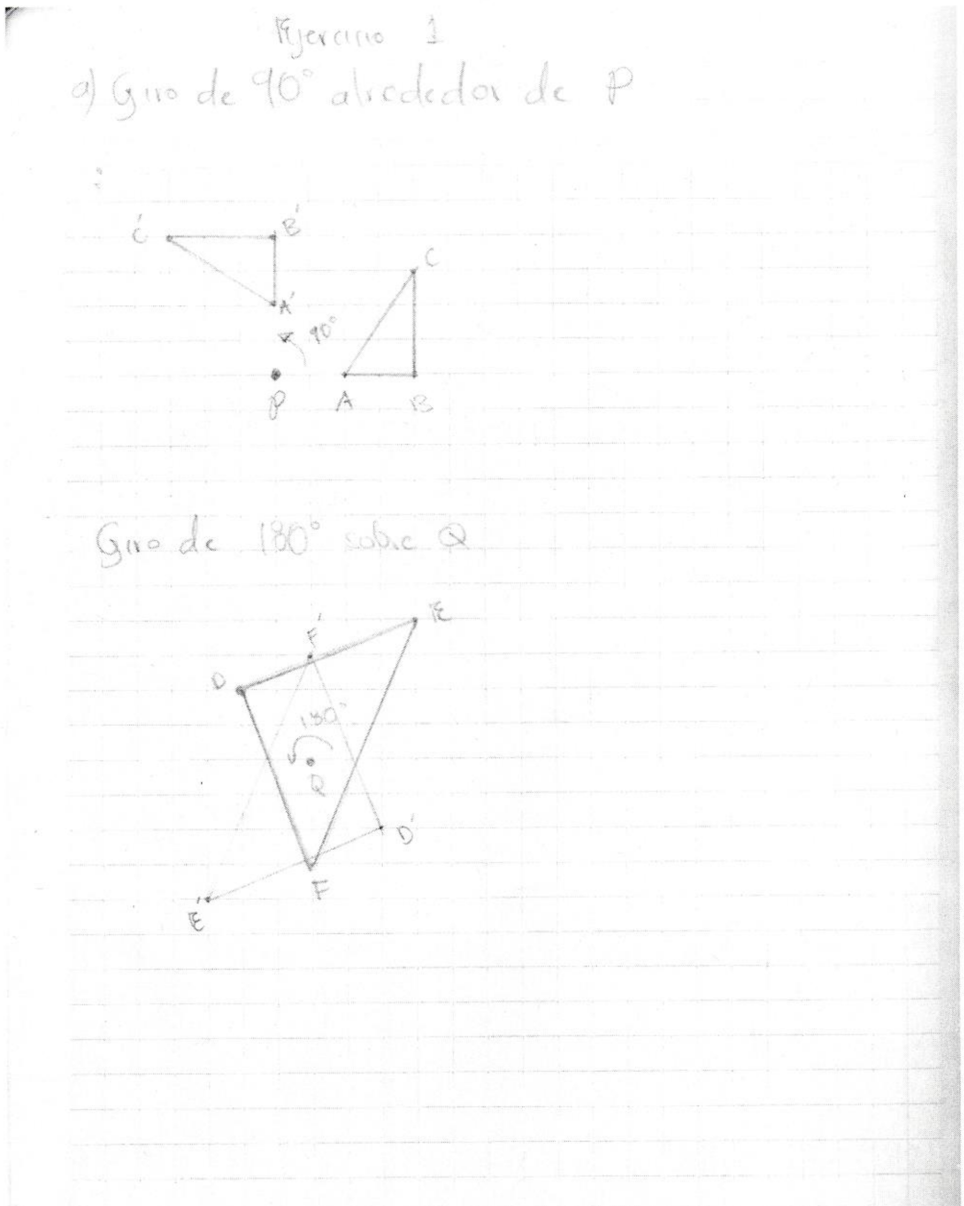
Actividad: De acuerdo con las figuras de la actividad 2, calcular el área de las regiones sombreadas.

Cierre

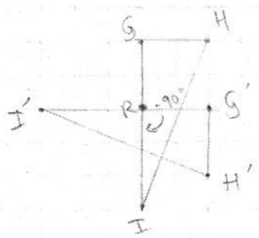
- Verificar que los estudiantes para calcular las áreas sombreadas de las figuras de la act 3 utilizaron propiedades de simetría.
- Aplicar una prueba sobre el cálculo de áreas de figuras compuestas para identificar las estrategias heurísticas utilizadas por los estudiantes.

Apéndice

Tareas resueltas por los estudiantes, cargadas a la plataforma Blackboard



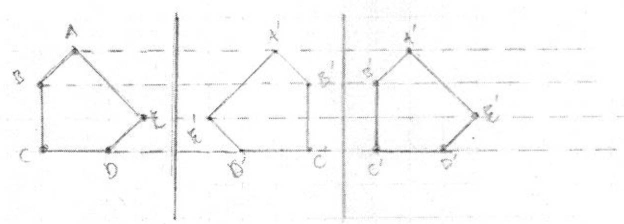
Giro de $-90°$ sobre R

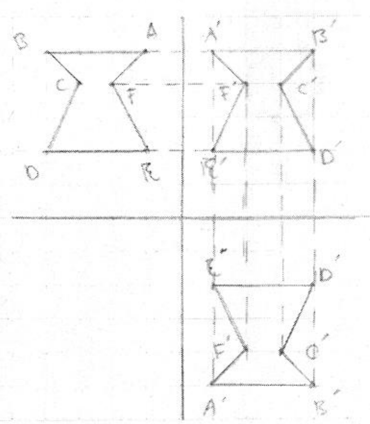


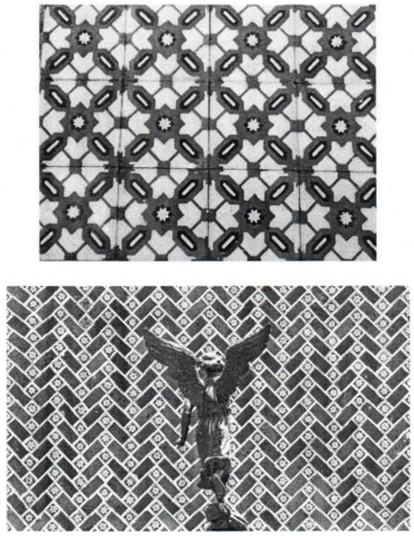
Ejercicio 2

Comprobar y demostrar las siguientes proposiciones.

a)







Mosaicos de talavera (rotación y reflexión)

Talavera (simetría puntual)

FIGURAS COMPUESTAS CON TRANSFORMACIONES GEOMETRICAS

Carrera: Ing. en Sistemas Automotrices
Alumno: Uribe Ruiz Brian Francisco