BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

TÍTULO DE LA TESIS

CONOCIMIENTO DE PROFESORES SOBRE LA NOCIÓN DE LÍMITE: UN ANÁLISIS DESDE LA PERSPECTIVA DE ALGUNOS ASPECTOS DEL MODELO DEL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO-MATEMÁTICO

TESIS
PARA OBTENER EL TÍTULO DE
MAESTRO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

PRESENTA
LIC. REYNALDO IGLECIAS ANTONIO

DIRECTOR DE TESIS
DRA. LIDIA AURORA HERNÁNDEZ REBOLLAR
CO-DIRECTOR DE TESIS
DR. ERIC FLORES-MEDRANO

PUEBLA, PUE. Abril 2019

BUAP

DRA. LIDIA AURORA HERNÁNDEZ REBOLLAR
SECRETARIA DE INVESTIGACIÓN Y
ESTUDIOS DE POSTGRADO, FCFM-BUAP
P R E S E N T E:

Por este medio le informo que el C:

LIC. REYNALDO IGLECIAS ANTONIO

Estudiante de la Maestría en Educación Matemática, ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 10 de diciembre de 2018, con la tesis titulada:

"Conocimiento de profesores sobre la noción del límite: Un análisis desde la perspectiva de algunos aspectos del Modelo del conocimiento didáctico-matemático"

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

A T E N T A M E N T E.
H. Puebla de Z. a 05 de abril de 2019.

DR. JOSIP SLISKO IGNJATOV
COORDINADOR DE LA MAESTRÍA
EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA.

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA · FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS · SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y ESTUDIOS DE POSGRADO · 1578

Ccp. Archivo.
DR JSI / l'agm*

Facultad
de Ciencias
Físico Matemáticas

Av. San Claudio y 18 sur, edif. FM1
Ciudad Universitaria, Col. San
Manuel, Puebla, Pue. C.P. 72570
01 (222) 229 55 00 Ext. 7550 y 7552

Agradecimientos Institucionales

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el financiamiento otorgado, en el periodo de enero 2017 a diciembre 2018, para la realización de esta investigación.

CVU: 816734

Al cuerpo académico de Aprendizaje y Enseñanza de las Ciencias de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas (FCFM), BUAP, por el apoyo recibido para la difusión de este trabajo.

A la Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrado (VIEP) por el financiamiento para la participación y asistencia a congresos nacionales e internacionales.

A la Dirección General de Desarrollo Internacional (DGDI) por el apoyo complementado para poder realizar la de estancia de investigación en la Universidad de Los Lagos, con sede en Osorno, Chile en el mes de agosto de 2018.

Agradecimientos personales

A mis padres, Santa y Reginaldo, por todo el apoyo y comprensión durante este tiempo tanto en lo personal como en lo académico. Por la confianza puesta en mi para lograr cada una de las metas que me propuesto. A pesar de la distancia siempre han estado conmigo aportándome consejos para seguir mejorando como persona. A ellos dedico esta tesis.

A mis siete hermanos, Marco Antonio, Julio, Melisa, Erik, Rey Fernando, Natividad y Santa Isabel, quienes a pesar de no verlos todos los días son una inspiración para seguir progresando, siendo un ejemplo de personas muy trabajadoras. A mis cuñados y sobrinos que forman parte de la familia. A mi amigo J. Pablo por estar en las buenas y las malas.

A mi director de tesis, la Dra. Lidia Aurora Hernández Rebollar por todo el apoyo, la confianza y la paciencia que me brindó durante estos dos años de maestría. Por los buenos consejos y conocimientos que aportó para mi formación tanto profesional como personal.

A mi codirector de tesis, el Dr. Eric Flores-Medrano por todas las observaciones puestas en el trabajo de investigación y los consejos de cómo mejorar.

Al Dr. Luis R. Pino-Fan por haberme aceptado en una estancia de investigación para aportar su experiencia en el modelo utilizado en esta tesis. Por el conocimiento, la orientación y los consejos que me brindó.

A mis sinodales, Dra. Estela de Lourdes Juárez Ruíz, Dr. José Antonio Juárez, Dr. Eric Flores-Medrano y Dr. Luis R. Pino-Fan por aceptar formar parte del jurado y tomarse el tiempo para revisar esta tesis, además de realizar las observaciones pertinentes y sugerencias para mejorar este trabajo de investigación.

A la Lic. Abigail García Martínez por todo el apoyo durante la maestría, pero algo más valioso, la amistad durante estos dos años.

A mis amigos, en especial a Alma, Mago y Gloria Aragón, con quienes compartí varias experiencias, buenas y malas, pero que al final nunca se alejaron de mí.

Índice General

Índice de Tablas

Índice de Figuras

Resumen

En este trabajo de investigación se exploró el conocimiento sobre la noción de límite de una función que poseen un grupo de profesores de matemáticas de nivel medio superior. Se utilizó como marco teórico la *dimensión matemática* y la faceta epistémica de la *dimensión didáctica* del modelo del conocimiento didáctico matemático (CDM).

Para desarrollar esta tesis se diseñaron dos bloques de tareas las cuales se sometieron a dos tipos de validación. La primera, validación de contenido, se utilizó la configuración de objetos y procesos del enfoque Ontosemiótico. La segunda validación fue por expertos en el área de estudio.

Las tareas diseñadas se aplicaron a nueve profesores de matemáticas de nivel medio superior que pertenecen a distintos sistemas escolares y se desempeñan en un contexto rural.

El primer bloque contiene tres tareas las cuales se trabajaron de manera individual en una sesión de dos horas. El segundo bloque contiene cinco tareas que se trabajaron de forma individual y luego grupal.

Posteriormente, se analizó cada una de las producciones de los profesores utilizando el marco teórico propuesto en esta investigación.

Se reporta que la mayoría de los profesores participantes tienen un nivel básico del conocimiento común del contenido y que no suelen utilizar representaciones semióticas ni procedimientos alternativos para resolver problemas relacionados con la noción de límite de una función.

Abstract

In this research work we explored the knowledge about the notion of the limit of a function that is possessed by a group of high school mathematics teachers. It was used as a theoretical framework the mathematical dimension and the epistemic facet of the didactic dimension of the model of didactic-mathematical knowledge (DMK).

To develop this thesis, two task blocks were designed, which were subjected to two types of validation. The first, content validation, used the configuration of objects and processes of the Onto-semiotic approach. The second validation was by experts in the study area.

The designed tasks were applied to nine high school mathematics teachers who belong to different school systems and work in a rural context.

The first block contains three tasks which were worked individually in a two-hour session. The second block contains five tasks that were worked individually and group.

Subsequently, we analyzed each of the productions of teachers using the theoretical framework proposed in this research.

It is reported that most of the participating teachers have a basic level of common knowledge of the content and that they do not usually use semiotic representations or alternative procedures to solve problems related to the notion of the limit of a function.

Introducción

En el cálculo, la noción de límite juega un papel importante en la enseñanza, debido a que da pautas para el conocimiento de otros conceptos u objetos matemáticos, además, es la base del cálculo diferencial e integral (Vrancken, Gregorini, Engler, Muller, y Hecklein, 2006; Parameswaran, 2007; Elia, Gagatsis, Panaoura, Zachariades y Zoulinaki, 2009; Kim y Lim, 2017; Medina, 2017).

Debido a la complejidad de este concepto, se ha convertido en objeto de estudio y diversos trabajos han arrojado que existen grandes dificultades en su enseñanza y aprendizaje, incluso por al gran número de estás, se han llegado a establecer categorías de las mismas (Artigue, 1995; Hitt y Páez, 2005; Vrancken, et al, 2006; Moru, 2009).

Investigadores como Artigue (1995) han hecho reagrupaciones de las diversas dificultades que se han detectado a raíz de los trabajos realizados. Por ejemplo, aquellas asociadas con la complejidad de los objetos básicos del cálculo; aquellas asociadas a la conceptualización y a la formalización de la noción de límite, centro del campo del cálculo; y aquellas vinculadas con las rupturas necesarias con relación a los modos de pensamiento puramente algebraico, muy familiares y, a las especificidades del trabajo técnico en el cálculo.

De acuerdo con Hitt y Páez (2005) la historia de la matemática nos ha mostrado que, en el cálculo, el concepto de límite es complejo y, probablemente, los obstáculos que tuvieron algunos matemáticos para entenderlo y formalizarlo aparecerán en el aula de matemáticas. Además, es de suponerse que algunos profesores de matemáticas pudieran tener problemas para su compresión.

Dentro del ámbito educativo, y en particular en matemáticas, el profesor debe poseer los conocimientos necesarios para contribuir al desarrollo de los temas dentro y fuera del aula. El rol que tiene el profesor siempre ha sido esencial en la enseñanza, en especial del cálculo, por su importancia en el currículo oficial y porque necesita de diversos conocimientos, así como de estrategias para lograr un ambiente en el cual el estudiante pueda desenvolverse y desarrollar su conocimiento del tema.

En el proceso de enseñanza-aprendizaje el profesor de matemáticas representa un papel importante, debido a que es un orientador del conocimiento. Se espera que el profesor tenga un conocimiento profundo del objeto en estudio en el nivel que se desenvuelve, ya que el desarrollo del pensamiento y competencias matemáticas de los estudiantes dependen esencialmente de él (Pino-Fan, Font y Godino, 2013; Nyikahadzoyi, 2015).

Si bien es cierto, el profesor de matemáticas debe poseer cierto conocimiento de los temas del currículo que va a enseñar, desde hace algunos años la formación de profesores ha constituido un campo de investigación, siendo uno de sus objetivos el determinar y caracterizar el complejo conocimiento que poseen los profesores de matemáticas acerca de un tópico en particular (Pino, Font y Godino, 2013; Pino-Fan y Godino, 2015).

En la actualidad, existen diversos modelos que aportan pautas para retomar y proponer actividades que favorezcan la formación de profesores.

En el campo de la formación de profesores existen diversos modelos que estudian ciertos aspectos del conocimiento del profesor de matemáticas. Uno de ellos es el modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM) (Pino-Fan y Godino, 2015) que establece criterios a partir de los cuales podemos caracterizar el conocimiento del profesor de matemáticas. Dicho modelo está determinado por la dimensión matemática, la dimensión didáctica y la dimensión meta didáctico-matemática, a su vez estas categorías presentan subcategorías que permiten llevar a cabo la caracterización del conocimiento del profesor.

En este trabajo nos centramos en explorar el conocimiento que poseen un grupo de profesores respecto a la noción de límite de una función.

Pregunta de investigación

Descrito lo anterior, la pregunta de investigación que se planteó para realizar esta tesis es:

¿Qué conocimientos sobre la noción de límite de una función poseen un grupo de profesores de nivel medio superior relacionados con la dimensión matemática y la faceta epistémica de la dimensión didáctica del modelo CDM?

Objetivo

Explorar el conocimiento relativo a la dimensión matemática y la faceta epistémica del CDM de un grupo de profesores de enseñanza media superior sobre la noción de límite de una función.

Para lograr el objetivo general se propusieron los siguientes objetivos específicos (OE):

OE1: Diseñar un instrumento que permita evaluar los conocimientos de los profesores relativos a la faceta epistémica y la dimensión matemática del CDM sobre la noción de límite de una función.

OE2: Determinar las configuraciones epistémicas que se espera que movilicen los profesores.

OE3: Estudiar la fiabilidad y validez del instrumento, mediante el análisis de contenido y juicio de expertos.

OE4: Implementar el instrumento en un grupo de profesores de matemáticas de bachillerato.

OE5: Analizar el conocimiento sobre la noción de límite funcional que evidencian los profesores participantes en el estudio utilizando el CDM.

Resumen del contenido

En el primer capítulo de esta tesis se presenta el marco teórico que se utilizó para la investigación. Se describe el modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM) y la configuración de objetos y procesos el cual pertenece al Enfoque Ontosemiótico (EOS).

En el segundo capítulo se describe la metodología que se utilizó. Se mencionan los sujetos que participaron en el estudio, el cuestionario empleado y el análisis de cada una de las tareas utilizando la configuración de objetos y procesos.

En el tercer capítulo, se presenta el análisis de las producciones realizadas por los profesores, empleando el modelo CDM. En cada una de las categorías del CDM se menciona el conocimiento relativo que poseen los profesores participantes.

Finalmente, en el cuarto capítulo se presenta una reflexión final sobre este trabajo de investigación.

Capítulo 1. Marco teórico

La formación de profesores juega un papel muy importante para la enseñanza y constituye un campo esencial en la investigación en Didáctica de las Matemáticas. Desde hace algunos años uno de los problemas que más se ha estado atacando es determinar cuál es el Conocimiento Didáctico Matemático que un profesor debe tener para poder enseñar matemáticas (Pino-Fan, Font y Godino, 2013).

Un factor importante que el profesor de matemáticas debe considerar para la enseñanza, en su área de trabajo, es su propio conocimiento matemático. Tener claro dicho conocimiento puede permitirle un análisis sobre la dificultad de un estudiante, el uso hábil de diagramas o modelos, explicaciones claras, preguntas bien planteadas, selección y uso estratégico de tareas y ejemplos (Suzuka, Sleep, Ball, Bass, Lewis y Thames, 2009).

Se espera que el profesor de matemáticas sea capaz de imaginarse lo que sus estudiantes harían ante un problema matemático. Conocer todas las situaciones que pudieran ocurrir le ayudaría a generar espacios propicios de trabajo. Se trata de que conozca los temas que va a enseñar, pero no solo desde el punto de vista matemático sino también del didáctico. Los profesores deberían ser capaces también de organizar la enseñanza, diseñar tareas de aprendizaje, usar los recursos adecuados y, comprender los factores que condicionan la enseñanza y el aprendizaje (Godino, 2009).

Vásquez y Alsina (2015) mencionan que un profesor tiene que enseñar solo lo que sabe, y no lo que no sabe bien. Dentro de la matemática educativa se desarrolla una línea de investigación sobre el conocimiento del profesor de matemáticas. Esta se encarga de explorar los conocimientos propios que un docente debe tener para enseñar las matemáticas. Los modelos propuestos ayudan al investigador a establecer pautas para el diseño de los instrumentos de investigación de tal forma que le permita indagar sobre el conocimiento del profesor.

1.1 Modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM)

Uno de los modelos que da inicio a los trabajos enfocados al análisis de los conocimientos de profesores de matemáticas es el modelo del Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT por sus siglas en inglés), que en Hill, Ball y Schilling (2008) se define como "El conocimiento matemático que usan los maestros en las aulas para producir instrucción y crecimiento en el estudiante" (p. 374). El modelo anterior se divide en dos grandes grupos, el cual se puede apreciar en la Figura 1.

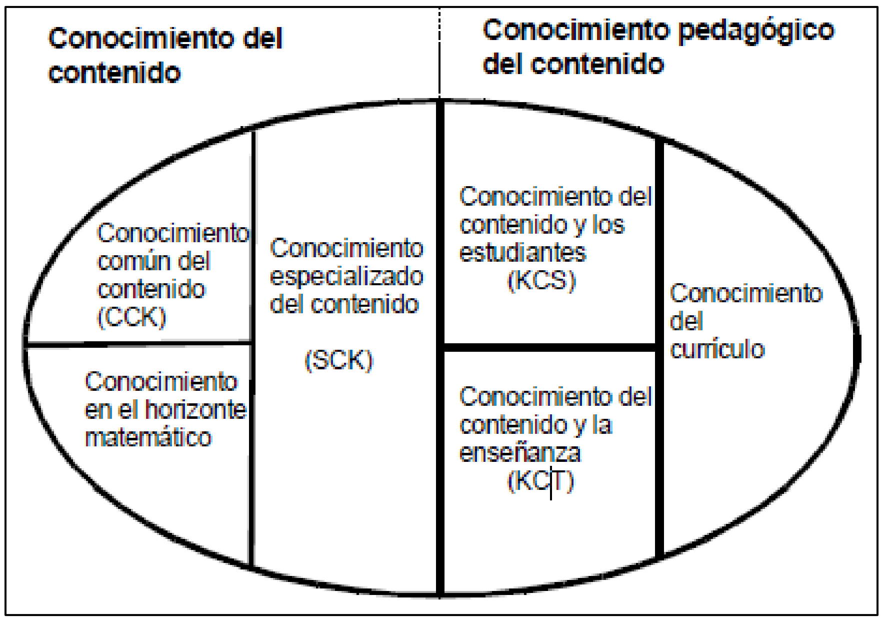


Figura 1. *Conocimiento matemático para la enseñanza (MKT) (Hill, Ball y Schilling, 2008, p.377)*

A partir del modelo anterior surgieron nuevas propuestas enfocadas al análisis del conocimiento que posee un profesor de matemáticas. Uno de ellos es el modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM), el cual responde a la necesidad de encontrar y proporcionar pautas y criterios que permitan analizar y caracterizar el conocimiento didáctico-matemático requerido por los profesores para la enseñanza de temas específicos de matemáticas (Pino, Font y Godino, 2013).

Este modelo está integrado por la dimensión matemática, dimensión didáctica y dimensión meta didáctico-matemática (Figura 2).

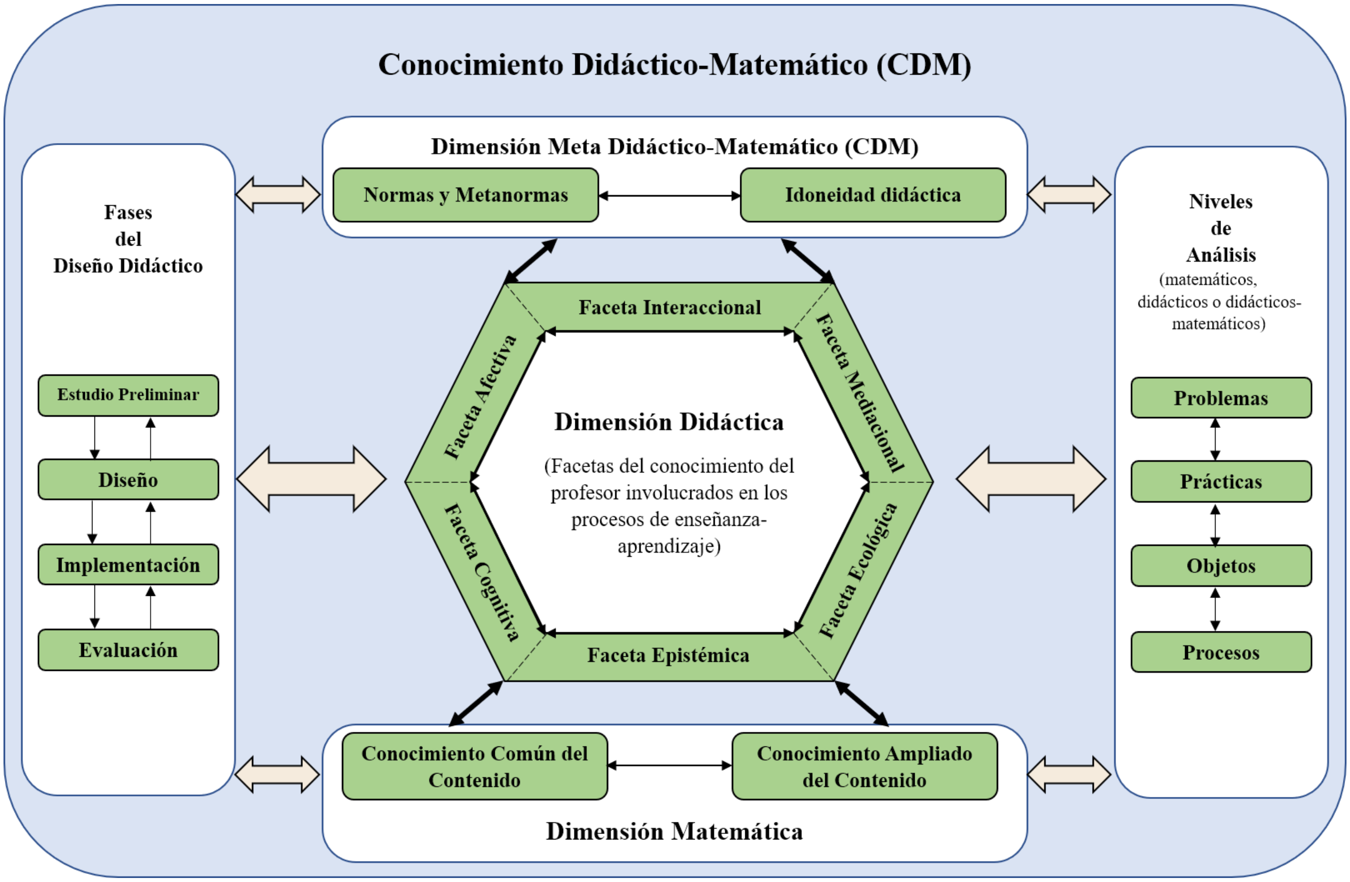


Figura 2. *Dimensiones y componentes del CDM (Pino-Fan y Godino, 2015, p. 103)*

En la figura anterior, observamos a la Dimensión Matemática, la cual se refiere al conocimiento matemático que debe poseer un profesor para resolver un problema o tarea para luego implementarlo en el aula, además de poder relacionarlo con algún otro objeto matemático. Esta dimensión se divide en dos subcategorías:

- *Conocimiento común del contenido*. Esta subcategoría trata del conocimiento de un objeto matemático en específico, que se considera suficiente para resolver problemas y tareas establecidas en el plan de estudios de matemáticas de un determinado nivel educativo; este es un conocimiento compartido entre el maestro y los estudiantes.

- *Conocimiento ampliado de contenido*. Es aquel conocimiento que debe tener el profesor sobre las nociones matemáticas que, tomando como referencia la noción matemática que se está estudiando en un momento puntual (por ejemplo, la derivada), están más adelante en el currículo del nivel educativo en cuestión, o en un nivel siguiente (por ejemplo, la integral en bachillerato, o el teorema fundamental del cálculo y ecuaciones diferenciales en universidad), (Pino-Fan y Godino, 2015, p.97).

Los autores de este modelo mencionan que la dimensión matemática del CDM que le permite al profesor resolver tareas y problemas matemáticos, no es suficiente para la práctica de enseñanza. De acuerdo a las diversas investigaciones realizadas por distintos autores, se ha llegado a la coincidencia que se necesita algo más que conocimiento matemático. En este sentido, la dimensión didáctica del CDM considera seis subcategorías o facetas (Pino-Fan y Godino, 2015; Pino-Fan, Godino y Font, 2015):

- *Faceta epistémica*. Esencialmente alude al conocimiento especializado de la dimensión matemática. Es decir, establece que el profesor además de movilizar de forma adecuada la dimensión matemática, debe poseer cierto conocimiento matemático ligado a la enseñanza. El profesor debe ser competente en movilizar representaciones de un objeto matemático, resolver una tarea a través de diferentes procedimientos, vincular el objeto matemático con otros objetos matemáticos del nivel educativo en el cual se trabaja o desde niveles anteriores o posteriores, para comprender y movilizar la diversidad de significados parciales para un mismo objeto matemático (Pino-Fan y Godino, 2015).

- *Faceta cognitiva.* Se refiere al conocimiento sobre los aspectos cognitivos de los estudiantes. Se consideran los conocimientos necesarios para "reflejar y evaluar" la proximidad o el grado de ajuste de los significados personales (conocimiento de los estudiantes) con respecto a los significados institucionales (conocimiento desde el punto de vista del centro educativo). Para ello, el docente debe ser capaz de prever (durante la etapa de planificación / diseño) e intentar (durante la etapa de implementación), las piezas de trabajo de los alumnos, o los trabajos esperados, las posibles respuestas a un problema determinado, conceptos erróneos, conflictos o errores que surgen del proceso de resolución del problema, enlaces (matemáticamente correctos o incorrectos) entre el objeto matemático que se está estudiando y otros objetos matemáticos que se requieren para resolver el problema.

- *Faceta afectiva*. Esta faceta apunta al conocimiento sobre los aspectos afectivos, emocionales y de comportamiento de los estudiantes. Se trata del conocimiento requerido para comprender y tratar los cambios de humor de los estudiantes, los aspectos que los motivan a resolver un determinado problema o no. En general, se refiere al conocimiento que ayuda a describir las experiencias y sensaciones de los estudiantes en una clase específica o con un determinado problema matemático, en un nivel educativo específico, teniendo en cuenta los aspectos que están relacionados con la faceta ecológica. Las facetas cognitivas y afectivas como las definidas por el “enfoque Ontosemiótico” (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007; Godino, 2009), juntas proporcionan una mejor aproximación y comprensión del conocimiento que los profesores de matemáticas deberían tener sobre las características y aspectos que están conectados a la forma en que los estudiantes piensan, saben, actúan y sienten en la clase mientras resuelven un problema matemático.

- *Faceta interaccional*. Se refiere al conocimiento de las interacciones que ocurren dentro de un aula. Esta subcategoría implica el conocimiento requerido para prever, implementar y evaluar secuencias de interacción, entre los agentes que participan del proceso de enseñanza y aprendizaje, orientados a la fijación y negociación de significados (aprendizaje) de los estudiantes. Estas interacciones no solo ocurren entre el maestro y los estudiantes (maestro-estudiante), sino que también pueden ocurrir entre los estudiantes (estudiante-estudiante).

- *Faceta mediacional*. Se refiere al conocimiento de los recursos y los medios que pueden fomentar el proceso de aprendizaje de los estudiantes. Se trata del conocimiento que un docente debe tener para evaluar la pertinencia del uso de materiales y recursos tecnológicos para fomentar el aprendizaje de un objeto matemático específico, y también la asignación de tiempo para las diversas acciones y procesos de aprendizaje.

- *Faceta ecológica*. Se refiere al conocimiento de los aspectos curriculares, contextuales, sociopolíticos, económicos... que influyen en la gestión del aprendizaje de los alumnos.

> En otras palabras, los profesores deben tener conocimiento del plan de estudios de matemáticas de acuerdo al nivel que considera el estudio de un objeto matemático, los vínculos que pueden existir con otros planes de estudios, las relaciones que dicho currículum tiene con los aspectos sociales, políticos y económicos que apoyan y condicionan el proceso de enseñanza y aprendizaje.

En nuestro trabajo nos enfocaremos en explorar el conocimiento común de los profesores respecto al cálculo de límite de una función, además, algunos aspectos parciales de la faceta epistémica.

1.2 Configuración de objetos y procesos (Enfoque Ontosemiótico)

Para el diseño y análisis de cada uno de los problemas nos basamos en algunos aspectos del "enfoque Ontosemiótico" (EOS) del conocimiento y la instrucción matemática (Godino, 2009; Godino, Batanero y Font, 2007). Este enfoque teórico, utilizado en la investigación en educación matemática, permite el análisis de las categorías que pueden ser usadas como herramientas para identificar y clasificar los conocimientos requeridos para la enseñanza de las matemáticas, y, por tanto, para analizar los conocimientos puestos en juego por el profesor.

Godino (2009) menciona que el EOS es un marco teórico que propone articular diferentes puntos de vista y nociones teóricas sobre el conocimiento matemático, su enseñanza y aprendizaje. Se adopta un panorama global, teniendo en cuenta las diversas dimensiones implicadas y las interacciones entre las mismas. Además, se menciona que dichas nociones teóricas que pertenecen al EOS pueden ser empleadas por los docentes para examinar su propia práctica en el aula.

En el EOS se proponen facetas (epistémica, cognitiva, afectiva, mediacional, interaccional y ecológica) y niveles para el análisis didáctico (prácticas matemáticas y didácticas, configuraciones de objetos y procesos, normas y metanormas, idoneidad), cada una de sus componentes permite un análisis del cómo interpretar categorías o componentes del conocimiento que posee un profesor.

Nuestro interés se enfoca en el nivel de las configuraciones de objetos y procesos, el cual permite la descripción de objetos y procesos matemáticos que intervienen en el desarrollo de las prácticas. El propósito de este nivel es explicar la complejidad de objetos y significados de las prácticas matemáticas y didácticas que intervienen como componente explicativo de los conflictos en el trabajo y en la progresión del aprendizaje.

En la Figura 3 se observa que los tipos de objetos primarios que se ponen en juego en la solución del problema son los siguientes: elementos lingüísticos, conceptos, procedimientos, propiedades y argumentos.

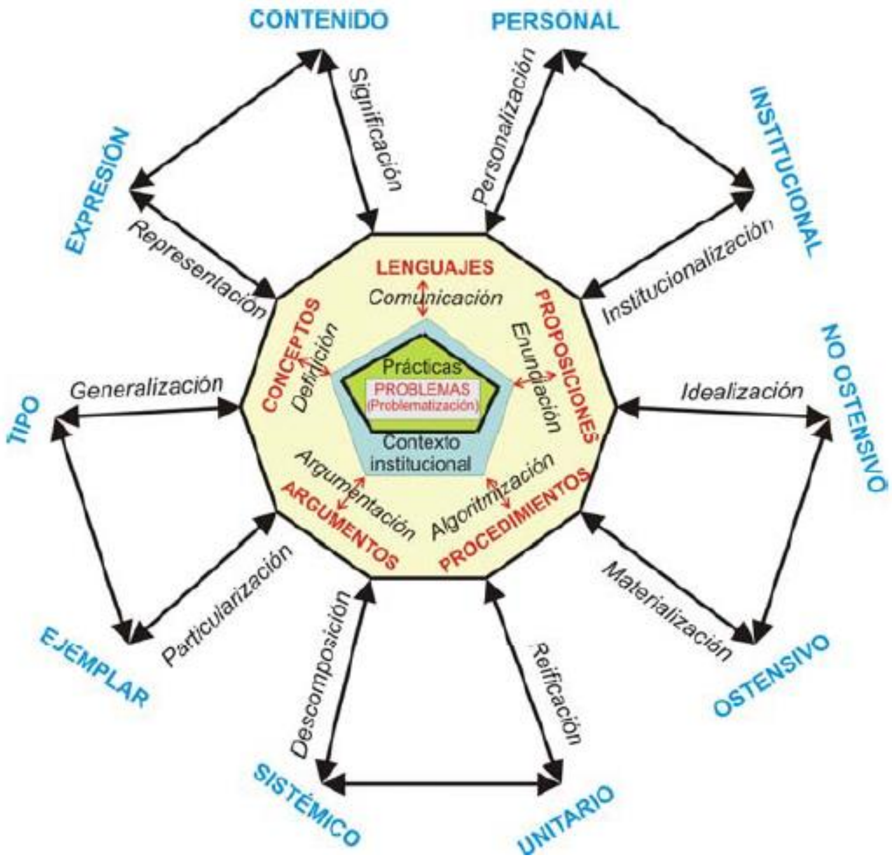


Figura 3. *Prácticas, objetos y procesos matemáticos*

Capítulo 2. Metodología

Este estudio está basado en la *dimensión matemática* y aspectos parciales de la faceta epistémica que pertenece a la *dimensión didáctica* del modelo CDM que exploran el conocimiento del profesor de matemáticas. Además, es un estudio de corte cualitativo y de tipo exploratorio.

2.1 Sujetos

El instrumento que se diseñó para realizar la investigación fue aplicado a nueve profesores en ejercicio de nivel medio superior (es decir, enseñan matemáticas a estudiantes cuyas edades oscilan entre 15 y 18 años). De estos profesores, tres de ellos estaban impartiendo la asignatura de cálculo diferencial y los otros seis no. Todos ellos imparten clases en el municipio de Tepexi de Rodríguez perteneciente al estado de Puebla por lo que se desenvuelven en un contexto rural. Además, en ocasiones, no solo imparten asignaturas relacionadas con matemáticas sino de alguna otra área, ya que pertenecen a distintos sistemas escolares (Telebachillerato Comunitario, Bachillerato digital y Bachillerato tecnológico) y no todos tienen un perfil con terminación en el área de las matemáticas.

Para los efectos de los resultados que presentamos en este estudio, se consideró necesario distinguir a los profesores por un alias, por lo que nos referimos a ellos como Profesor 1, Profesor 2, Profesor 3, Profesor 4, Profesor 5, Profesor 6, Profesor 7, Profesor 8 y Profesor 9.

2.2 Cuestionario

El diseño del instrumento se dividió en dos bloques, el primero constó de tres tareas y el segundo de cinco. La validación que se utilizó para el instrumento fue por contenido basado en las suposiciones teóricas y herramientas teórico-metodológicas del marco teórico del EOS, utilizando las prácticas, objetos y procesos matemáticos. Además, se realizó la validación por expertos.

2.2.1 Diseño y análisis de tareas (primer bloque)

A continuación, se presenta el análisis de contenido que se realizó para cada una de las tareas enfocadas a explorar el conocimiento que poseen los profesores participantes en el tema de límites. Para lo anterior se utilizaron las herramientas teóricas que se proporcionan en el EOS; los objetos matemáticos primarios, sus significados y los procesos involucrados en las prácticas matemáticas. En cada uno de los problemas se anexa el análisis del contenido y las soluciones plausibles.

2.2.1.1 Tarea 1

La intención de este problema es indagar los siguientes aspectos: para el inciso a) se desea explorar el conocimiento común de contenido del profesor acerca del cálculo del límite de una función racional cuando se indetermina en $x = 10$, utilizando la notación formal o alguna representación del tipo tabular o gráfica.

En el inciso b) se busca analizar aspectos parciales de la faceta epistémica, es decir, el profesor debería poder usar otros sistemas de representación como tablas o gráficas, y proporcionar otros procedimientos que den paso a soluciones plausibles, es decir, utilizar los diferentes registros semióticos. Según Duval (2006) en toda actividad matemática se requiere de transformaciones en los diferentes registros semióticos, haciendo conversiones y tratamientos.

En los incisos a) y b) se espera que el profesor movilice una configuración técnica o gráfica.

En el inciso c) se busca explorar aspectos relacionados con la faceta epistémica y la faceta cognitiva, el profesor debe detectar posibles dificultades que el alumno puede presentar en la tarea.

Por último, con en el inciso d) se pretende explorar aspectos de la faceta interaccional, es decir, estrategias que el profesor plantearía para solucionar las posibles dificultades del inciso c).

> Dada la función $g(x) = \frac{x^2-100}{x-10}$
>
> a) Calcule el límite de $g(x)$ cuando x tiende a 10
> b) Si conoce algún otro método para resolver el problema desarróllelo aquí.
> c) ¿Qué dificultades cree que tendrían los estudiantes para encontrar el límite de la función en el punto dado?
> d) ¿Qué estrategias didácticas utilizaría para ayudar a los estudiantes a superar las dificultades detectadas?

Las respuestas plausibles para la tarea son las siguientes:

- Método directo, utilizando factorización, llegar a una expresión equivalente a la función racional se sustituye y se obtiene: $\lim_{x\to 10} g(x) = 20$
- Representación tabular: Realizar una tabla con algunos valores infinitamente pequeños del dominio cercanos a $x = 10$, relacionándolos con sus respectivas imágenes se observa que se van aproximando a 20 tanto por la derecha e izquierda, sin embargo $g(10) \neq 20$, esto se puede ver en la Tabla 1.

Tabla 1. *Representación tabular para la función $g(x)$ de la tarea 1*

x	9.75	9.8	9.85	9.9	9.95	10	10.05	10.1	10.15	10.2	10.25
$g(x)$	19.75	19.8	19.85	19.9	19.95	Indef	20.05	20.1	20.15	20.2	20.25

- Representación gráfica: Realizar la gráfica de la función y usando flechas hay que señalar que cuando valores del dominio se aproximan a $x = 10$, las imágenes correspondientes se aproximan a $g(x) = 20$ tanto por la derecha e izquierda, ver Figura 4.

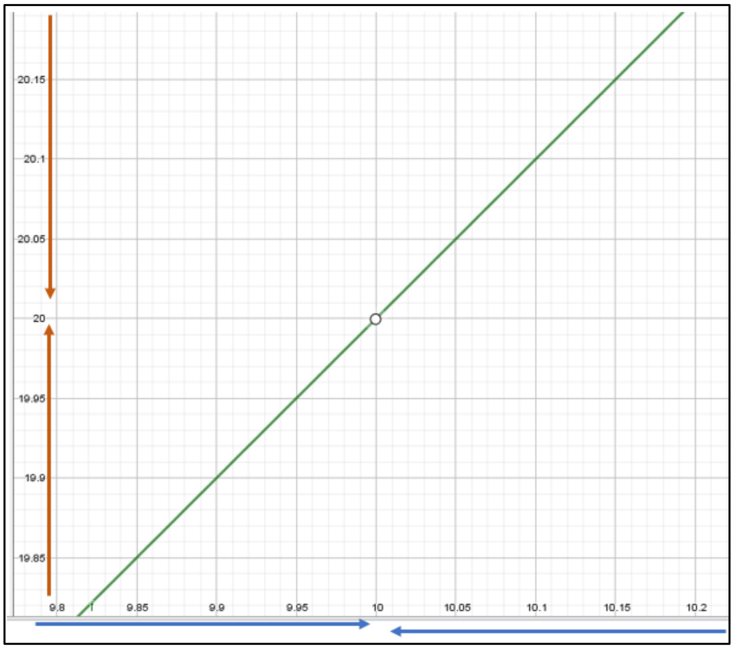


Figura 4. *Representación gráfica para la función $g(x)$ de la tarea 1*

- Usar la Regla de L'Hôpital para límites indeterminados, es decir:

$$\lim_{x\to 10} \frac{x^2-100}{x-10} = \lim_{x\to 10} \frac{(x^2-100)\prime}{(x-10)\prime} = \lim_{x\to 10} \frac{2x}{1}=20$$

Ahora se presenta el análisis de contenido considerando las posibles soluciones mediante la descripción de los objetos y procesos primarios.

Elementos lingüísticos previos

- La expresión de $g(x) = \frac{x^2-100}{x-10}$, se refiere a la representación algebraica de una función racional.
- La expresión "Calcule el límite de $g(x)$ cuando x tiende a 10 ", solicita un procedimiento para calcular el límite de la función $g(x)$ en el valor solicitado, este puede ser por el método algebraico, tabular o gráfico.
- La expresión, "Si conoce algún otro método para resolver el problema desarróllelo aquí", sentencia que solicita un procedimiento distinto al usado en el inciso a).

Elementos lingüísticos emergentes

- La notación $\lim_{x \to 10} g(x) = 20$, es una solución al problema la cual representa un método algebraico.
- La representación tabular de la función $g(x)$ muestra que para valores en el dominio próximos a 10, sus imágenes correspondientes se van aproximando a un valor, se puede determinar que es 20, además se observa que en $x = 10$ la función no está definida.
- La representación gráfica de la función $g(x)$ ilustra que cuando los valores en el dominio se aproximan a 10 (por la derecha e izquierda), sus imágenes correspondientes se aproximan a 20, además se observa que en $x = 10$ la función no está definida.
- Usar la regla de L'Hôpital para límites indeterminados, muestra otro tipo de representación simbólica para resolver el problema.

Conceptos previos

- Función racional: una función racional f es un cociente de dos funciones, $g(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ donde P y Q son polinomios. El dominio consiste de todos los valores de x tales que $Q(x)$ no sea cero.
- Dominio (variable independiente). Conjunto de todos los valores de x para los cuales la función $g(x)$ está definida.
- Imagen (variable dependiente). Conjunto de todos los valores posibles de $g(x)$ conforme x varía a través de todo el dominio.
- Límite de una función. El límite de $g(x)$, cuando x tiende a a, es igual a L ($\lim_{x \to a} g(x) = L$) si podemos hacer que los valores de $g(x)$ estén arbitrariamente cercanos a L, tomando valores de x suficientemente cerca de a, pero no iguales a a.

Proposiciones

- $\lim_{x \to a} \frac{h(x)}{f(x)}$, el cálculo del límite de una función racional en la que se obtiene una indeterminación, remite a que se recurra a otro método para encontrar la solución.

Procedimientos

- Cálculo del límite de una función racional. El procedimiento algorítmico muestra que se indetermina en $x = 10$, posteriormente, para realizar la sustitución se prosigue a una expresión equivalente de la función original obteniendo una expresión lineal.
- La representación tabular exige que se consideren valores infinitesimales próximos a 10 para que sus imágenes correspondientes se aproximen a 20. Observando la tabla se tiene que para $x = 10$ la función no tiene asignado ningún valor.
- Representación gráfica. Para realizar esta representación se puede recurrir al apoyo de la representación tabular, representando cada una de las coordenadas. Otra forma de obtener la gráfica es obtener primero una expresión lineal equivalente a la función racional, luego obtener los puntos de intersección con los ejes, señalando que en $x = 10$ la función no está definida.

Argumentos

- "La función $g(x)$ se indetermina en $x = 10$"
- "El límite de la función $g(x)$ es 20"
- "Cuando los valores en el dominio se aproximan a $x = 10$, sus imágenes correspondientes se aproximan a 20 por la derecha e izquierda"

2.2.1.2 Tarea 2

La finalidad de este problema es examinar los siguientes aspectos: para el inciso a) explorar el conocimiento común de contenido del profesor acerca del cálculo del límite de una función por partes cuando esta presenta un cambio en $x = -1$, además que no está determinada en dicho punto, utilizando la notación formal o alguna representación del tipo tabular o gráfica.

En el inciso b) nos centramos en analizar aspectos parciales de la faceta epistémica, es decir, el profesor debería poder usar otros sistemas de representación como tablas o gráficas, y proporcionar otros procedimientos que den paso a soluciones plausibles. En los incisos a) y b) se espera que el profesor movilice una configuración técnica o gráfica.

Para el inciso c) explorar aspectos relacionados con la faceta epistémica y la faceta cognitiva, el profesor debe detectar posibles dificultades que el alumno puede presentar ante el problema. Por último, con en el inciso d) se pretende explorar aspectos de la faceta interaccional, es decir, estrategias que el profesor plantearía para solucionar las posibles dificultades del inciso anterior.

Sea $k(x) = \begin{cases} x+1 & si\ x < -1 \\ (x+1)^3 & si\ x > -1 \end{cases}$

a) Calcule el límite de $k(x)$ cuando x tiende a -1

b) Si conoce algún otro método para resolver el problema desarróllelo aquí.

c) ¿Qué dificultades cree que tendrían los estudiantes para encontrar el límite de la función en el punto dado?

d) ¿Qué estrategias didácticas utilizaría para ayudar a los estudiantes a superar las dificultades detectadas?

Dentro de las respuestas plausibles para esta tarea están las siguientes

- Utilizar la proposición de límites laterales. Es decir: si $\lim\limits_{x\to -1^+} k(x) = 0$ y, por otro lado $\lim\limits_{x\to -1^-} k(x) = 0$

  Entonces, dado que los límites laterales coinciden, el límite de la función $k(x)$ cuando los valores en el dominio se aproximan a $x = -1$ es cero.

- Representación tabular: Realizar una tabla con valores infinitamente pequeños del dominio cercanos a $x = -1$, relacionados con sus respectivas imágenes observando que estas se van aproximando a 0, además, observar que $k(0) \neq 0$, ver Tabla 2.

Tabla 2. *Representación tabular para la función $k(x)$ de la tarea 2*

x	-1.25	-1.20	-1.15	-1.10	-1.1	-1	-0.95	-0.90	-0.85	-0.80	-0.75
$k(x)$	-0.25	-0.20	-0.15	-0.10	-0.1		0.0001	0.0010	0.0034	0.0080	0.0156

$x+1, \quad (x<-1)$ $\qquad$ $(x+1)^3, \quad (x>-1)$

- Representación gráfica: Realizar la gráfica de la función y usando flechas hay que señalar que cuando los valores del dominio se aproximan a $x = -1$, las imágenes correspondientes se aproximan a 0 tanto por la derecha e izquierda, es decir el límite de la función cuando x se aproxima a -1 es 0, sin embargo $k(x) \neq 0$, ver Figura 5.

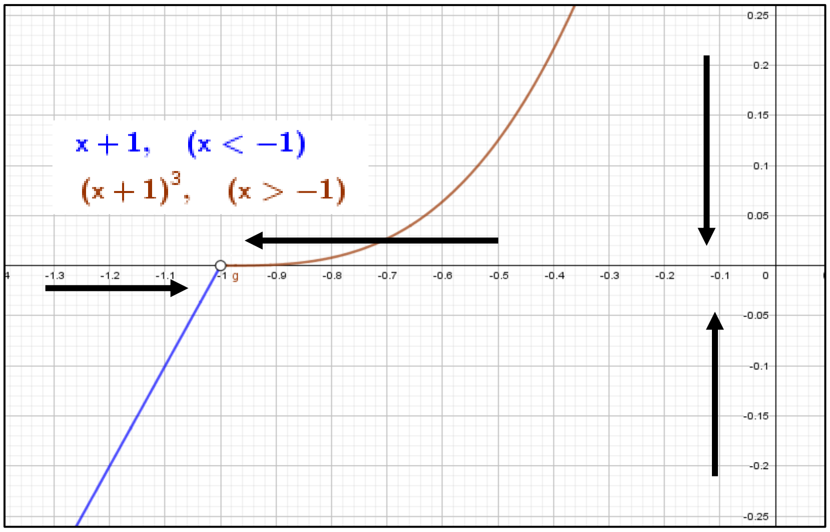


Figura 5. *Representación gráfica para la función $k(x)$ de la tarea 2*

A continuación, se presenta el análisis de contenido considerando las posibles soluciones mediante la descripción de los objetos y procesos primarios.

<u>*Elementos lingüísticos previos*</u>

- La expresión $k(x) = \begin{cases} x+1 & si\ x < -1 \\ (x+1)^3 & si\ x > -1 \end{cases}$ se refiere a la representación algebraica de una función a trozos (por partes), construida a partir de dos funciones polinomiales.
- La expresión "Calcule el límite de $k(x)$ cuando x tiende a -1 ", solicita un procedimiento para calcular el límite de la función $k(x)$ en cierto valor, este puede ser por el método algorítmico, tabular o gráfico.
- La expresión, "Si conoce algún otro método para resolver el problema desarróllelo aquí", solicita un procedimiento distinto al usado en el inciso a).

<u>*Elementos lingüísticos emergentes*</u>

- Las expresiones $\lim_{x \to -1^+} k(x) = 0$ y $\lim_{x \to -1^-} k(x) = 0$, representan a los límites laterales de la función cuando x tiende a -1.
- La representación tabular de la función $k(x)$ muestra que para valores en el dominio próximos a $x = -1$ (por la derecha e izquierda), sus imágenes correspondientes se van aproximando a un valor, se puede llegar a determinar que es 0, además, se observa que en $x = -1$ la función no está definida.
- La representación gráfica de la función $k(x)$ ilustra que cuando los valores en el dominio se aproximan a $x = -1$ (por la derecha e izquierda), sus imágenes correspondientes se aproximan a 0, además, se observa que en $x = -1$, la función no está definida.

<u>*Conceptos previos*</u>

- Función por partes: función construida a partir de dos funciones o más que están bien definidas.
- Dominio (variable independiente). Conjunto de todos los valores de x para los cuales la función $k(x)$ está definida.
- Imagen (variable dependiente). Conjunto de todos los valores posibles de $k(x)$ conforme x varía a través de todo el dominio.
- Límite lateral. $\lim_{x \to \mathrm{a}^-} k(x) = L$, el límite izquierdo de $k(x)$, cuando x tiende a a, es igual a L si podemos hacer que los valores de $k(x)$ estén arbitrariamente cercanos a L, tomando valores de x suficientemente cerca de a, pero menores a a. En el caso de $\lim_{x \to \mathrm{a}^+} k(x) = L$, tomando valores de x suficientemente cerca de a, pero mayores a a

<u>*Conceptos emergentes*</u>

- Límite funcional. Valor L al que se aproxima $k(x)$ conforme x se aproxima a un cierto valor $a \in \mathbb{R}$, en este caso $a = -1$.

Proposiciones

- Una función construida a partir de dos funciones polinomiales puede llegar a tener límite en un punto a, si los límites laterales existen aun cuando $k(a)$ no esté definido. Esta proposición es usada para reconocer que el límite de $k(x)$ cuando x tiende a a existe.

Procedimientos

- El cálculo del límite de una función por partes se obtiene del procedimiento algebraico del cálculo de límites laterales, es decir, el $\lim_{x \to -1^+} k(x) = 0$ y $\lim_{x \to -1^-} k(x) = 0$, posteriormente se decide si existe o no el límite de la función $k(x)$.
- La representación tabular exige que se consideren valores infinitesimales próximos a $x = -1$ para que sus imágenes correspondientes se aproximen a 0. Luego de realizar la tabulación se observa que en $x = -1$ no se le asigna ninguna imagen.
- Para realizar la representación gráfica se puede hacer uso de la representación tabular, representando cada una de las coordenadas.

Argumentos

- “La función $k(x)$ no está definida en $x = -1$”
- “El límite de la función $k(x)$ es 0”
- “Cuando los valores en el dominio se aproximan a $x = -1$, sus imágenes correspondientes se aproximan a 0 tanto por la derecha e izquierda”

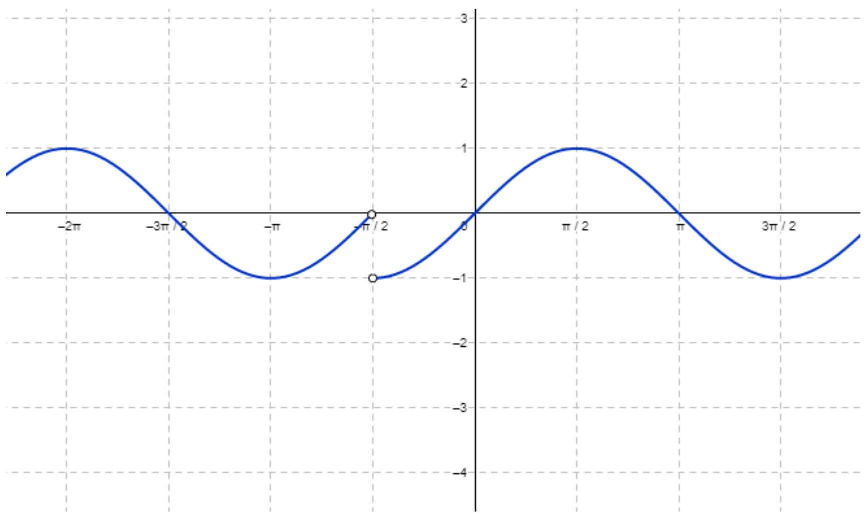
2.2.1.3 Tarea 3

El propósito de esta tarea es explorar los siguientes aspectos: En el inciso a) el conocimiento común de contenido que posee el profesor acerca del cálculo del límite de una función a partir de su gráfica, cuando valores en el dominio se aproximan a $x = \frac{\pi}{2}$. Se espera que el profesor movilice una configuración del tipo gráfico.

En el inciso b) aspectos relacionados con la faceta epistémica y la faceta cognitiva, es decir, el profesor debe detectar posibles dificultades que el alumno puede presentar ante el desarrollo de la solución.

Por último, con en el inciso c) se pretende explorar aspectos de la faceta interaccional, es decir, estrategias que el profesor plantearía para solucionar las posibles dificultades del inciso anterior.

Dada la gráfica de la función $f(x)$



a) Calcule el límite de $f(x)$ cuando x tiende a $-\frac{\pi}{2}$. Justifique su respuesta

b) ¿Qué dificultades cree que tendrían los estudiantes para encontrar el límite de la función en el punto dado?

c) ¿Qué estrategias didácticas utilizaría para ayudar a los estudiantes a superar las dificultades detectadas?

Las respuestas plausibles para la tarea son las siguientes:

- Análisis gráfico 1: Observando la gráfica de la función y utilizando la notación de límite se concluye lo siguiente:

  $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x)$ no existe debido a que los límites laterales no coinciden:

$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = -1 \text{ y } \lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^-} f(x) = 0$$

- Análisis gráfico 2: Luego de observar la gráfica, usando flechas (ver Figura 6) se puede señalar que cuando los valores en el dominio se aproximan a $x = -\frac{\pi}{2}$ por la izquierda, sus imágenes correspondientes se aproximan a cero. Por otro lado, cuando se aproximan a $x = -\frac{\pi}{2}$ por la derecha sus imágenes se aproximan a -1.

  Entonces, dado que los límites laterales no coinciden, el límite de la función $f(x)$ no existe.

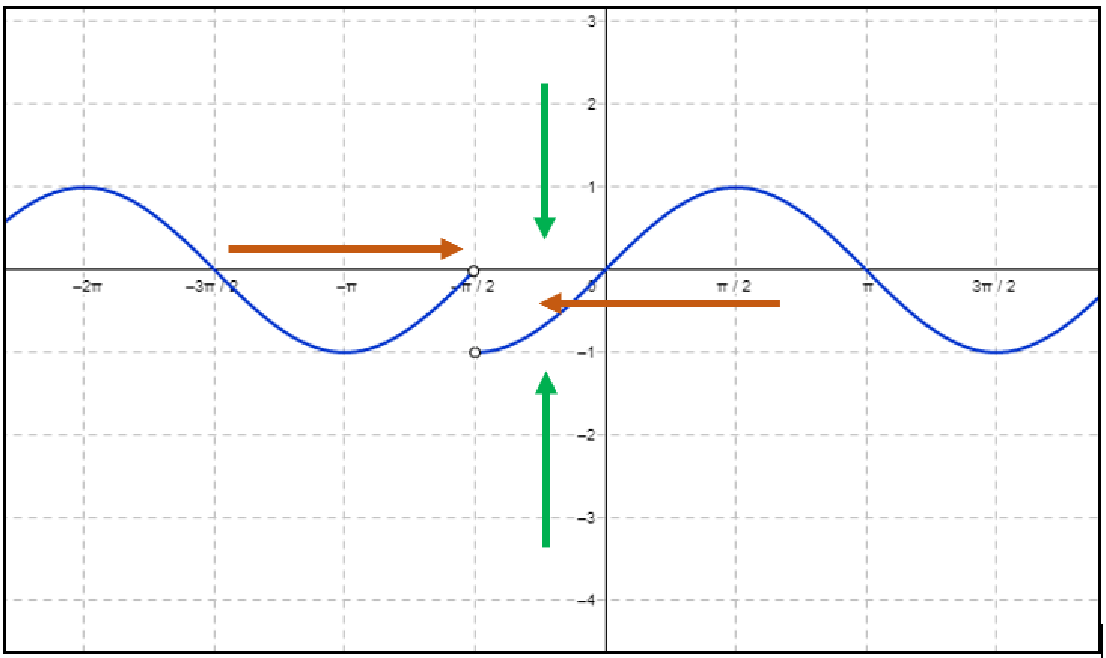


Figura 6. *Solución utilizando el método gráfico en la tarea 3*

Ahora se presenta el análisis de contenido considerando las posibles soluciones mediante la descripción de los objetos y procesos primarios.

<u>*Elementos lingüísticos previos*</u>

- La gráfica de $f(x)$ representa una función por partes, con discontinuidad en $x = -\frac{\pi}{2}$.
- La expresión "Calcule el límite de $f(x)$ cuando x tiende a $-\frac{\pi}{2}$", solicita un análisis de la gráfica en el que se debe observar que existe un cambio en $x = -\frac{\pi}{2}$.

<u>*Elementos lingüísticos emergentes*</u>

- Las expresiones $\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = -1$ y $\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^-} f(x) = 0$, representan la forma de justificar que no existe el límite de la función $f(x)$.
- La representación gráfica de la función $f(x)$ ilustra que cuando los valores en el dominio se aproximan a $-\frac{\pi}{2}$ por la izquierda y por la derecha, sus imágenes correspondientes se aproximan, por un lado, a 0 y por otro a -1, además se observa que en $x = -\frac{\pi}{2}$, la función no está definida.

<u>*Conceptos previos*</u>

- Función por partes: función construida a partir de dos o más funciones que están bien definidas.
- Dominio (variable independiente). Conjunto de todos los valores de x para los cuales la función $k(x)$ está definida.
- Imagen (variable dependiente). Conjunto de todos los valores posibles de $f(x)$ conforme x varía a través de todo el dominio.
- Límite lateral. $\lim_{x\to \mathrm{a}^-} k(x) = L$, el límite izquierdo de $k(x)$, cuando x tiende a a, es igual a L si podemos hacer que los valores de $k(x)$ estén arbitrariamente cercanos a L, tomando valores de x suficientemente cerca de a, pero menores a a. En el caso de $\lim_{x\to \mathrm{a}^+} k(x) = L$, tomando valores de x suficientemente cerca de a, pero mayores a a.

<u>*Conceptos emergentes*</u>

- Discontinuidad
- Límite indeterminado
- Límite funcional

Proposiciones

- El análisis de la gráfica de la función obliga a observar que la función presenta una discontinuidad (salto) en $x = -\frac{\pi}{2}$, por lo tanto, los límites laterales no coinciden llegando a la conclusión que el límite en $x = -\frac{\pi}{2}$ no existe.

Procedimientos

- Análisis gráfico. Observando la gráfica de la función $f(x)$, se tiene, en primer lugar, que la función no es continua en $x = -\frac{\pi}{2}$, luego, que para valores cercanos a $x = -\frac{\pi}{2}$ por la izquierda sus imágenes correspondientes se aproximan a 0 y por la derecha se aproximan a -1. Finalmente se llega a la conclusión que el límite de la función no existe.

Argumentos

- "La función $f(x)$ es discontinua en $x = -\frac{\pi}{2}$"
- "El límite de la función $f(x)$ no existe debido a que los límites laterales no coinciden"
- "Cuando los valores en el dominio se aproximan a $x = -\frac{\pi}{2}$, sus imágenes correspondientes se aproximan por la izquierda a 0 y por la derecha a -1, por lo tanto, el límite de la función no existe"

2.2.2 Diseño y análisis de tareas (segundo bloque)

2.2.2.1 Tarea 4

El objetivo en este problema es explorar los siguientes aspectos: para el inciso a) el conocimiento del profesor en el cálculo valores del dominio cercanos a $x = 20$ utilizando una expresión algebraica y colocándolos en una tabla. Se espera que movilice una configuración técnica.

En el caso del inciso b), la idea de aproximación mediante el análisis de los datos de la representación tabular. En ambos incisos, a) y b), se analiza el conocimiento común del contenido del profesor.

Para evaluar los aspectos parciales de la faceta epistémica, es decir, aspectos del conocimiento especializado del contenido, se propusieron los incisos c) y d). En el caso del inciso c) conocimientos acerca de los conceptos y procedimientos puestos en juego durante la resolución del problema. Para el inciso d) con el apoyo de la función y la representación tabular, hacer la conversión a la representación gráfica.

Sea $k(x) = 1 + 2x$,

a) complete la tabla cuando los valores de x se acercan por la izquierda y por la derecha a 20, pero nunca son 20.

x	-5	-2	0	2	4	8	16	19	20	21	24	32	36	38	39
$k(x)$	-9		1	5		17	33				49		73	77	

b) ¿Qué sucede con los valores de $k(x)$ cuando los valores de x se acercan tanto por la izquierda como por la derecha a 20?

c) ¿Qué conceptos y procedimientos matemáticos se ponen en juego en la solución de los incisos a) y b)?

d) Represente la situación anterior usando la gráfica de la función.

Las respuestas plausibles para la tarea son las siguientes:

a) Obtener las imágenes correspondientes para: $x = -2$, $x = 4$, $x = 19$, $x = 21$, $x = 32$, $x = 39$, posteriormente, ubicarlos la tabla proporcionada (ver Tabla 3).

Tabla 3. *Representación tabular para la función k(x) de la tarea 4*

x	-5	-2	0	2	4	8	16	19	20	21	24	32	36	38	39
$k(x)$	-9	-3	1	5	9	17	33	39		43	49	65	73	77	79

b) Cuando los valores en el dominio se aproximan a $x = 20$ tanto por la derecha e izquierda sus imágenes correspondientes se aproximan a 40.

c) Se pueden identificar los siguientes conceptos
   - ✓ Función lineal
   - ✓ Aproximación

d) Bosquejo de la gráfica de la función $k(x) = 1 + 2x$, (Figura 7).

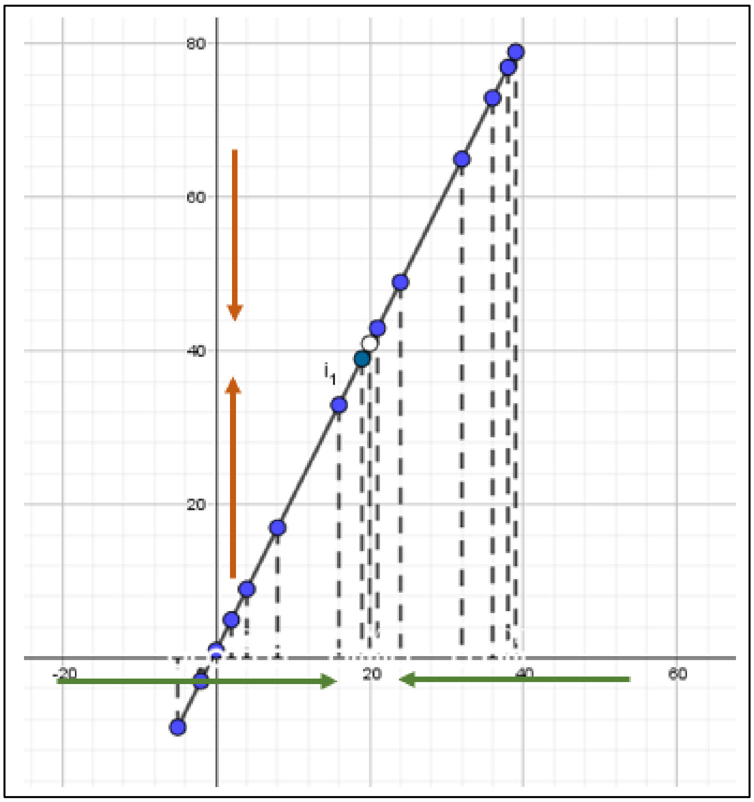


Figura 7. *Representación gráfica para la función $k(x)$ de la tarea 4*

A continuación, se presenta el análisis de contenido considerando todas las posibles soluciones mediante la descripción de los objetos y procesos primarios.

Elementos lingüísticos previos

- La expresión de $k(x) = 1 + 2x$ se refiere a la representación algebraica de una función lineal.

- La expresión "complete la tabla cuando los valores de x se acercan por la izquierda y por la derecha a 20, pero nunca son 20", solicita un procedimiento para calcular los valores faltantes y completar la tabla.
- La expresión, "¿Qué sucede con los valores de $k(x)$ cuando los valores de x se acercan tanto por la izquierda como por la derecha a 20?", da pauta a observar los datos de la tabla y dar una posible respuesta, en este caso decir que los valores de las imágenes se aproximan a 41.

Elementos lingüísticos emergentes

- La notación $k(-2) = -3$, $k(4) = 9$, $k(19) = 39$, $k(21) = 43$, $k(32) = 65$, $k(39) = 79$, representan los valores que completan la tabla.
- La representación tabular de la función $k(x)$ muestra que para valores en el dominio próximos a $x = 20$ (tanto por la izquierda y derecha), sus imágenes correspondientes se van aproximando a 41.
- El bosquejo de la representación gráfica de $k(x)$ se puede llegar a determinar a partir de la expresión algebraica o utilizando los datos de la tabla.

Conceptos previos

- Función lineal: una función lineal k es del tipo $k(x) = mx + b$ donde m representa el valor de la pendiente y b la intersección con el eje Y, además, es un polinomio de primer grado.
- Dominio (variable independiente). Conjunto de todos los valores de x para los cuales la función $k(x)$ está definida.
- Imagen (variable dependiente). Conjunto de todos los valores posibles de $k(x)$ conforme x varía a través de todo su dominio.

Proposiciones previas

- Intuitivamente la función $k(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$.

Proposiciones emergentes

- $k(-2) = -3$, $k(4) = 9$, $k(19) = 39$, $k(21) = 43$, $k(32) = 65$, $k(39) = 79$, son los valores que complementan la tabla.

Procedimientos

- La representación tabular permite observar que para valores próximos a 20 sus imágenes correspondientes se aproximan a 41.
- Representación gráfica. Para realizar esta representación se puede recurrir al apoyo de la representación tabular, representando cada una de las coordenadas. Otra forma de obtener la gráfica por medio de la expresión algebraica, graficando los puntos de intersección con el eje Y y X, posteriormente se traza un rayo que pasa por dichos puntos.

Argumentos

- "La función $k(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$"
- "Cuando los valores en el dominio se aproximan a $x = 20$ tanto por la derecha e izquierda sus imágenes correspondientes se aproximan a 40."

2.2.2.2 Tarea 5

El propósito de este problema es explorar los siguientes aspectos: en el inciso a) que el profesor calcule, usando una función racional, las imágenes de algunos valores del dominio próximos a $x = 4$ utilizando una expresión algebraica y colocándolos en una tabla, además, observar que la función no está definida para $x = 4$. Se espera que él movilice una configuración técnica.

En el inciso b), explorar la idea de aproximación en $x = 4$ mediante el análisis de los datos de la representación tabular. Ambos incisos se refieren al conocimiento común del contenido del profesor.

Respecto a los aspectos parciales de la faceta epistémica, es decir, aspectos del conocimiento especializado del contenido, se propusieron los incisos c) y d). En el inciso c) se explorarán conocimientos acerca de cada uno de los conceptos y procedimientos que se ponen en juego durante el proceso de la resolución del problema.

En el inciso d), poder pasar de un registro a otro haciendo una conversión entre las representaciones algebraica, tabular y gráfica, es decir, poder identificar la gráfica que está asociada a la función proporcionada.

Y, por último, con los incisos e), f) y g), se busca explorar las dificultades que podría detectar el profesor en sus estudiantes.

Sea $f(x) = \frac{x^2-16}{x-4}$

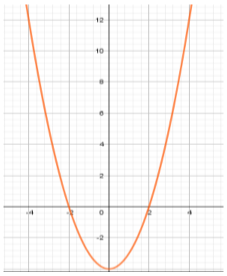
a) complete la siguiente tabla cuando los valores de x se acercan por la izquierda y por la derecha a 4, pero nunca son 4.

x	3.5	3.6	3.7	3.8	3.9	4	4.1	4.2	4.3	4.4	4.5
$f(x)$	7.5		7.7					8.2			8.5

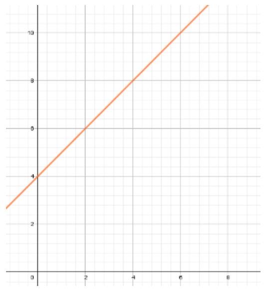
b) ¿Qué sucede con los valores de $f(x)$ cuando los valores de x se acercan por la izquierda y por la derecha a 4 pero nunca son 4?

c) ¿Qué conceptos y procedimientos matemáticos se ponen en juego en la solución de los incisos a) y b)?

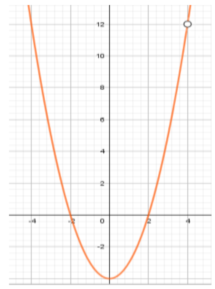
d) ¿Cuál de las siguientes graficas corresponden a la función $f(x)$? Argumente su respuesta i)



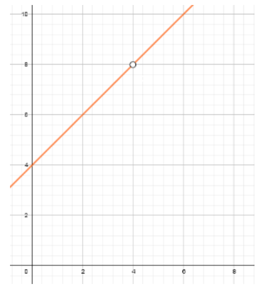
ii)



iii)



iv)



e) ¿Qué dificultades cree que tendrían los estudiantes al llenar la tabla del inciso a)?

f) ¿Qué dificultades cree que tendrían los estudiantes al responder el inciso b)?

g) ¿Qué dificultades cree que tendrían los estudiantes para identificar la gráfica de la función del inciso d)?

Las respuestas plausibles para la tarea son las siguientes:

a) Obtener las imágenes correspondientes para los valores: $x = 3.6$, $x = 3.8$, $x = 3.9$, $x = 4.1$, $x = 4.3$, $x = 4.4$
Luego ubicarlos en la tabla proporcionada, (Tabla 4).

Tabla 4. *Representación tabular para la función f(x) de la tarea 5*

x	3.5	3.6	3.7	3.8	3.9	4	4.1	4.2	4.3	4.4	4.5
$f(x)$	7.5	7.6	7.7	7.8	7.9		8.1	8.2	8.3	8.4	8.5

b) Cuando los valores en el dominio se aproximan a $x = 4$ tanto por la derecha e izquierda sus imágenes correspondientes se aproximan a 8.

c) Los conceptos que se pueden identificar son los siguientes.

- ✓ Función racional
- ✓ Discontinuidad de una función en un punto
- ✓ Aproximación

d) Gráfica IV. Para llegar a esta respuesta observemos lo siguiente: se trata de una función racional que se indefine en $x = 4$, por lo tanto, se descartan las gráficas I y II. Luego, observando los pares ordenados en la tabla, y analizando la gráfica III y IV, se tiene que las imágenes de los valores en el dominio cercanos a $x = 4$ se aproximan a 8 y no a 12, por lo tanto, se descarta la gráfica III, llegando a que la gráfica correspondiente a $f(x)$ es la IV.

Ahora se muestra el análisis de contenido considerando las posibles soluciones mediante la descripción de los objetos y procesos primarios.

Elementos lingüísticos previos

- La expresión de $f(x) = \frac{x^2-16}{x-4}$, se refiere a la representación algebraica de una función racional.
- La expresión "complete la siguiente tabla cuando los valores de x se acercan por la izquierda y por la derecha a 4, pero nunca son 4", solicita un procedimiento para calcular los valores de $g(x)$ que faltan.
- La expresión, "¿Cuál de las siguientes graficas corresponden a la función $f(x)$?", da pauta a analizar cada una de las gráficas y decidir cuál representa a la función.

Elementos lingüísticos emergentes

- La notación $f(3.6) = 7.6$, $f(3.8) = 7.9$, $f(3.9) = 7.9$, $f(4.1) = 8.1$, $f(4.3) = 8.3$, $f(4.4) = 8.4$, representan los valores que completan la tabla. Esta notación complementa la representación tabular de la función $f(x)$.
- La representación tabular muestra que para valores en el dominio próximos a $x = 4$ (por la derecha e izquierda), sus imágenes correspondientes se van aproximando a 8.
- La gráfica IV representa a la función $f(x)$, ilustra que cuando los valores en el dominio se aproximan a $x = 4$ (por la derecha e izquierda), sus imágenes correspondientes se aproximan a 8, además, se observa que en $x = 4$ la función no está definida.

Conceptos previos

- Función racional: una función racional f es un cociente de dos funciones $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ donde P y Q son polinomios. El dominio consiste en todos los valores de x tales que $Q(x) \neq 0$.
- Dominio (variable independiente). Conjunto de todos los valores de x para los cuales la función $f(x)$ está definida.
- Imagen (variable dependiente). Conjunto de todos los valores posibles de $f(x)$ conforme x varía a través de todo el dominio.

Procedimientos

- Cálculo de valores de una función racional. En primer lugar, el procedimiento algorítmico muestra que la función se indetermina en $x = 4$, posteriormente, para completar la tabla se realiza el cálculo de los valores faltantes. Se podría trabajar con una expresión equivalente, en este caso una función lineal.
- La representación tabular permite no solo calcular valores para números enteros, sino también con algunos decimales. Además, para $x = 4$ no se solicita asociar ningún valor.
- Representación gráfica. Para identificar qué gráfica representa a la función $f(x)$ se debe tener en cuenta que la función no es continua en un punto, además, haciendo algunas operaciones algebraicas se tiene una función lineal que es equivalente a la función racional, por lo tanto, la gráfica correspondiente es la IV.

Argumentos

- "La función $f(x)$ se indetermina en $x = 4$"
- "Cuando los valores en el dominio se aproximan a $x = 4$, sus imágenes correspondientes se aproximan a 8 tanto por la derecha e la izquierda"

2.2.2.3 Tarea 6

La finalidad de esta tarea es indagar los siguientes aspectos: a) el cálculo de valores empleando una función por partes para valores del dominio próximos a $x = 6$ utilizando una expresión algebraica y colocándolos en una tabla. Se espera que movilice una configuración técnica y gráfica.

Para el caso del inciso b), la idea de aproximación a $x = 6$ mediante el análisis de los datos de la representación tabular. Ambos incisos son para explorar el conocimiento común del contenido que posee el profesor.

Respecto a los aspectos parciales de la faceta epistémica, se propuso el inciso c), donde el profesor deberá determinar los conceptos y procedimientos puestos en juego durante la resolución del problema.

El inciso d) considera aspectos de la faceta cognitiva. El profesor debe ser capaz de prever posibles dificultades que pudieran surgir en los estudiantes durante la resolución del problema matemático. Por último, en el inciso e) nos enfocamos en el conocimiento del profesor relacionado con la faceta interaccional, ya que deberá proponer algunas estrategias didácticas luego de haber proporcionado algunas dificultades.

Sea $h(x) = \begin{cases} x-1 & si\ x < 6 \\ (x-7)^2 & si\ x > 6 \end{cases}$

a) complete la siguiente tabla cuando los valores de x se acercan por la izquierda y por la derecha a 6, pero nunca son 6. Además, realice la gráfica de la función $h(x)$.

x	5.5	5.6	5.7	5.8	5.9	6	6.1	6.2	6.3	6.4	6.5
$h(x)$		4.6		4.8				0.64			0.25

b) ¿Qué sucede con los valores de $h(x)$ cuando los valores de x se acercan por la izquierda y por la derecha a 6 pero nunca son 6?

c) ¿Qué conceptos y procedimientos matemáticos se ponen en juego en la solución del inciso a)?

d) ¿Qué dificultades cree que tendrían los estudiantes para responder el inciso a)?

e) ¿Qué estrategias didácticas utilizaría para ayudar a los estudiantes a superar sus dificultades detectadas en el inciso d)?

Las respuestas plausibles para el problema son las siguientes:

a) Para obtener las imágenes de los valores: $x = 5.5$, $x = 5.7$, $x = 5.9$, dado que son valores menores a 6, corresponde usar $x - 1$. Y para los valores $x = 6.1$, $x = 6.3$, $x = 6.4$ dado que son mayores a 6, corresponde usar $(x - 7)^2$
Luego ubicarlos correctamente en la tabla proporcionada, (Tabla 5).

Tabla 5. *Representación tabular para la función h(x) de la tarea 6*

x	5.5	5.6	5.7	5.8	5.9	6	6.1	6.2	6.3	6.4	6.5
$h(x)$	4.5	4.6	4.7	4.8	4.9		0.81	0.64	0.49	0.36	0.25

b) Cuando los valores en el dominio se aproximan a $x = 6$ por la derecha, sus imágenes correspondientes se aproximan a 1, y cuando se aproximan por la izquierda, sus imágenes correspondientes se aproximan a 5.

c) Algunos posibles conceptos que se involucran en el problema son:
   - ✓ Función por partes
   - ✓ Discontinuidad
   - ✓ Función lineal
   - ✓ Función cuadrática

A continuación, se presenta el análisis de contenido considerando las posibles soluciones mediante la descripción de los objetos y procesos primarios.

<u>*Elementos lingüísticos previos*</u>

- La expresión $h(x) = \begin{cases} x - 1 & si\ x < 6 \\ (x-7)^2 & si\ x > 6 \end{cases}$ se refiere a la representación algebraica de una función construida a partir de dos funciones polinomiales, una lineal y otra cuadrática.
- La expresión “complete la siguiente tabla cuando los valores de x se acercan por la izquierda y por la derecha a 6, pero nunca son 6”, indica calcular las imágenes correspondientes y ubicarlos en la tabla.

- El enunciado "además, realice la gráfica de la función $h(x)$", apunta representar un bosquejo de $h(x)$.
- La expresión "¿Qué sucede con los valores de $h(x)$ cuando los valores de x se acercan por la izquierda y por la derecha a 6 pero nunca son 6?", solicita un análisis de la función apoyándose con los datos de la tabla.

Elementos lingüísticos emergentes

- La expresión $x - 1\ si\ x < 6$, requiere usar la función lineal para el cálculo de valores estrictamente menores que 6. Por otro lado $(x - 7)^2\ si\ x > 6$, se utiliza para el cálculo de valores estrictamente mayores que 6.
- La representación tabular de la función $h(x)$, luego de haberla completado, muestra que las imágenes de valores en el dominio próximos a $x = 6$, pero menores que 6, se van aproximando a 5 y las imágenes de los valores próximos a $x = 6$ pero mayores que 6 se aproximan a 1. Además, en $x = 6$, la función no está definida.
- La representación gráfica de la función $h(x)$ ilustra que cuando los valores en el dominio se aproximan a $x = 6$ por la derecha e izquierda, sus imágenes correspondientes no convergen al mismo valor, por la derecha se aproximan a 0 y por la izquierda a 5, además, también se observa que en $x = 6$, la función no está definida.

Conceptos previos

- Función por partes: función construida a partir de dos funciones o más que están bien definidas.
- Dominio (variable independiente). Conjunto de todos los valores de x para los cuales la función $h(x)$ está definida.
- Imagen (variable dependiente). Conjunto de todos los valores posibles de $h(x)$ conforme x varía a través de todo el dominio.
- Discontinuidad de salto. La discontinuidad en un punto de una función $h(x)$ es en la cual sufre un "salto" o cambio "brusco" de valor.

Proposiciones

- Intuitivamente la función $h(x)$ no es continua en todo su intervalo, presenta una discontinuidad de salto en $x = 6$. Por lo tanto, para valores cercanos a 6, sus imágenes correspondientes por la derecha se aproximan a 1 y por la izquierda se aproximan a 5.

Procedimientos

- Para completar la tabla, dada la función $h(x)$, se debe decidir qué parte utilizar debido a la restricción para valores mayores y menores que $x = 6$. Posteriormente, realizar los cálculos necesarios.
- En la representación tabular se consideran algunos valores con decimales para hacer notar una mejor aproximación cuando los valores de x se acercan a 6 por la derecha y por la izquierda, de tal forma que se analice que sus imágenes correspondientes se aproximan a 1 por la derecha y a 5 por la izquierda. Además, en $x = 6$ no se asocia ningún valor.
- Para realizar la representación gráfica se puede hacer uso de la representación tabular, representando cada una de las coordenadas y uniendo los puntos que corresponden, de acuerdo a la naturaleza de las funciones definidas en cada intervalo.

Argumentos

- "La función $h(x)$ no está definida en $x = 6$"
- "Cuando los valores en el dominio se aproximan a $x = 6$, sus imágenes correspondientes se aproximan a 1 por la derecha y a 5 por la izquierda"

2.2.2.4 Tarea 7

El objetivo de esta tarea es indagar los siguientes aspectos: con el inciso a) centrarnos en el conocimiento común del contenido del profesor. Se proporcionan las gráficas de las funciones $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ y $k(x)$, posteriormente, se solicita que determine a qué valor se aproximan las imágenes de cada función, cuando los valores en el dominio se aproximan a $x = 1$ tanto por la derecha e izquierda. Se espera que movilice una configuración gráfica.

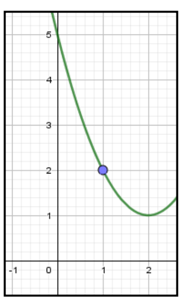
En el inciso b) y e) se busca explorar aspectos parciales de la faceta epistémica, es decir, el profesor en el b) deberá determinar las características que poseen cada una de las gráficas de las funciones, haciendo una conversión del registro gráfico al verbal, y en el inciso e) deberá realizar una conversión de la representación gráfica a la algebraica usando la notación de límite. Para el inciso b) se espera que movilice una configuración verbal y para el inciso e) una configuración técnica.

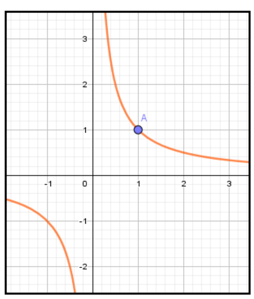
En el inciso c) se consideraron aspectos de la faceta cognitiva. El profesor debe ser capaz de prever posibles dificultades que pudieran surgir durante la resolución del problema matemático. Por último, en el inciso d) nos enfocamos en el conocimiento del profesor relacionado con la faceta interaccional, ya que deberá proponer algunas estrategias didácticas luego de haber identificado algunas dificultades.

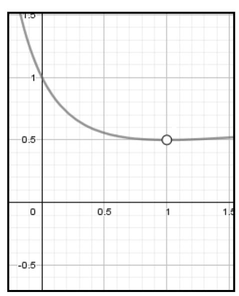
Dadas las gráficas de las funciones $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ y $k(x)$

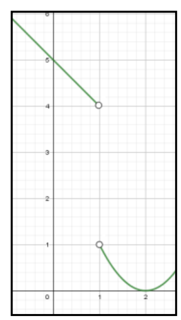
a) Determine a qué punto se acercan los valores de cada función cuando los valores de x son cercanos a 1.

$f(x)$ $g(x)$ $h(x)$ $k(x)$









b) Mencione las características de las funciones anteriores dada sus gráficas.

c) En el inciso a), ¿qué dificultades cree que tendrían los estudiantes para responder respecto a la gráfica de la función $k(x)$?

d) ¿Qué estrategias didácticas utilizaría para ayudar a los estudiantes a superar las dificultades detectadas en el inciso c)?

e) Exprese los límites de las funciones dadas en el inciso a) cuando x tiende a 1 utilizando la notación formal de límite.

Las respuestas plausibles para el problema son las siguientes:

a) Para este inciso se tienen las siguientes respuestas plausibles:
   - ✓ Gráfica de $f(x)$. Cuando los valores de x son próximos a 1 (por la derecha e izquierda) sus imágenes correspondientes se aproximan a 2.
   - ✓ Gráfica de $g(x)$. Cuando los valores de x son próximos a 1 (por la derecha e izquierda) sus imágenes correspondientes se aproximan a 1.
   - ✓ Gráfica de $h(x)$. Cuando los valores de x son próximos a 1 (por la derecha e izquierda) sus imágenes correspondientes se aproximan a 0.5
   - ✓ Gráfica de $k(x)$. Cuando los valores de x son próximos a 1 por la derecha sus imágenes correspondientes se aproximan a 1 y, por la izquierda se aproximan a 4.

b) En este inciso se tienen las siguientes respuestas plausibles:
   - ✓ Gráfica de $f(x)$. Es continua y decreciente en el intervalo $(-1, 2)$, y $f(1) = 1$.
   - ✓ Gráfica de $g(x)$. Es discontinua en $x = 0$, aunque continua de $(0, 3)$ y decreciente en ese mismo intervalo. Por último, $f(1) = 1$.
   - ✓ Gráfica de $h(x)$. Es continua casi en todo el intervalo de $(0, 1.5)$ excepto en $x = 1$, es decir, en $f(1)$ no está definido.
   - ✓ Gráfica de $k(x)$. Es una función por partes, es discontinua en $x = 1$, presenta un salto de discontinuidad. Se observa que es continua en el resto de la gráfica, también $f(1)$ no está definido.

e) Utilizando la notación de límites para cada función, tenemos lo siguiente:
   - ✓ Para la gráfica de $f(x)$. $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$
   - ✓ Para la gráfica de $g(x)$. $\lim_{x\to 1} g(x) = 1$
   - ✓ Para la gráfica de $h(x)$. $\lim_{x\to 1} h(x) = 0.5$
   - ✓ Para la gráfica de $k(x)$. $\lim_{x\to 1^-} k(x) = 4$ y $\lim_{x\to 1^+} k(x) = 1$, por lo tanto $\lim_{x\to 1} k(x)$ no existe

A continuación, se presenta el análisis de contenido considerando las posibles soluciones mediante la descripción de los objetos y procesos primarios.

Elementos lingüísticos previos

- Las gráficas de $f(x), g(x), h(x)$ y $k(x)$ se refieren a funciones de distinto tipo, cada una presenta características diferentes, por ejemplo, se visualiza continuidad o discontinuidad.
- La expresión "mencione las características de las funciones anteriores dada sus gráficas", indica analizar cada una de las gráficas y posteriormente mencionar sus cualidades.
- El enunciado "exprese los límites de las funciones… cuando x tiende a 1 utilizando la notación formal de límite", encamina a aplicar la notación de límite que se trabaja en bachillerato.

Elementos lingüísticos emergentes

- La representación gráfica de cada una de las funciones requiere de la observación y análisis de su comportamiento para determinar a qué punto se acercan los valores de cada función cuando los valores de x son cercanos a 1.
- $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$
- $\lim_{x \to 1} g(x) = 1$
- $\lim_{x \to 1} h(x) = 0.5$
- Para la gráfica de $k(x)$. $\lim_{x \to 1^-} k(x) = 4$ y $\lim_{x \to 1^+} k(x) = 1$, por lo tanto $\lim_{x \to 1} k(x)$ no existe.

Conceptos previos

- Función por partes: función construida a partir de dos funciones o más que están bien definidas.
- Dominio (variable independiente). Conjunto de todos los valores de x para los cuales la función $h(x)$ está definida.
- Imagen (variable dependiente). Conjunto de todos los valores posibles de $h(x)$ conforme x varía a través de todo el dominio.

- Continuidad de una función. Una función es continua en un número $x = a$ si $\lim_{x \to a} h(x) = h(a)$
- Discontinuidad de salto. La discontinuidad en un punto de una función $h(x)$ es en la cual sufre un "salto" o cambio "brusco" de valor.

<u>Proposiciones</u>

- Se observa que las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son continuas en el intervalo $(0,2)$ y $(0,3)$ respectivamente.
- Gráficamente las funciones $h(x)$ y $k(x)$ presentan un tipo de discontinuidad en $x = 1$.

<u>Procedimientos</u>

- Para mencionar las características de cada una de las funciones, se debe observar el comportamiento de estas en su gráfica correspondiente.
- Para expresar los límites de las funciones cuando x tiende a 1, primero se debe analizar y observar si, por ejemplo, es continua o no.

<u>Argumentos</u>

- "La función $f(x)$ es continua en el intervalo $(0,2)$ y en $f(1) = 2$".
- "Cuando los valores en el dominio de la función $f(x)$ se aproximan a $x = 1$, sus imágenes correspondientes se aproximan a 2 tanto por la derecha e izquierda".
- "La función $g(x)$ es continua en el intervalo $(0,3)$ y en $g(1) = 1$".
- "Cuando los valores en el dominio de la función $g(x)$ se aproximan a $x = 1$, sus imágenes correspondientes se aproximan a 1 tanto por la derecha e izquierda".
- "La función $h(x)$ presenta una discontinua $x = 1$".
- "Cuando los valores en el dominio de la función $h(x)$ se aproximan a $x = 1$, sus imágenes correspondientes se aproximan a 0.5 tanto por la derecha e izquierda, aunque $h(1)$ no esté definido".
- "La función $k(x)$ es discontinua en $x = 1$".

- "Cuando los valores en el dominio de la función $k(x)$ se aproximan a $x = 1$, sus imágenes correspondientes se aproximan a 4 por la derecha y a 1 por la izquierda, además, $k(1)$ no esté definido".

2.2.2.5 Tarea 8

El propósito de esta tarea es indagar los siguientes aspectos: para el inciso a) y b) se solicita que se calcule el límite correspondiente usando exclusivamente la gráfica de la función, en estos incisos nos enfocamos en el conocimiento común del contenido que posee el profesor para calcular el límite de cada una de las funciones. Se espera que movilice una configuración gráfica.

En el inciso c) nos enfocamos en aspectos parciales de la faceta epistémica, dichos aspectos se refieren a que el profesor deberá determinar los conceptos y procedimientos matemáticos que se ponen en juego en la solución del problema.

El inciso d) considera aspectos de la faceta cognitiva, es decir, debe ser capaz de prever posibles dificultades que pudieran surgir durante la resolución del problema matemático en los estudiantes. Por último, el inciso e) se enfoca en el conocimiento del profesor relacionado con la faceta interaccional, deberá considerar algunas estrategias didácticas luego de haber proporcionado algunas dificultades.

Dadas las siguientes funciones, encuentre sus respectivos límites usando la gráfica de la función.

a) $\lim_{x \to 1} \left(\frac{x^2-1}{x-1}\right) =$

b) Sea $h(x) = \begin{cases} 2x - 3 & si\ x < \frac{9}{2} \\ x^2 - 2x & si\ x > \frac{9}{2} \end{cases}$, entonces $\lim_{x \to \frac{9}{2}} h(x) =$

c) ¿Qué conceptos y procedimientos matemáticos se ponen en juego en la solución de los incisos a) y b)?

d) ¿Qué dificultades cree que tendrían los estudiantes para encontrar el límite de cada una de las funciones de los incisos a) y b)?

e) ¿Qué estrategias didácticas utilizaría para ayudar a los estudiantes a superar las dificultades detectadas en el inciso d)?

Las respuestas plausibles para la tarea son las siguientes:

a) Para resolver este inciso, se observa que la función se indetermina en $x = 1$, por lo que para ver su comportamiento se podría realizar una representación tabular con algunos valores para x, (ver Tabla 6).

Tabla 6. *Representación tabular para la función f(x) de la tarea 8*

x	-0.5	-0.25	0	0.25	0.5	0.75	1	1.25	1.5	1.75	2	2.25	2.5
$f(x)$	0.5	0.75	1	1.25	1.5	1.75	?	2.25	2.5	2.75	3	3.25	3.5

Para realizar la representación tabular se podría hacer un tratamiento a la expresión algebraica, lo cual generaría una expresión equivalente a la original. Posteriormente se procede a pasar al siguiente registro gráfico (ver Figura 8).

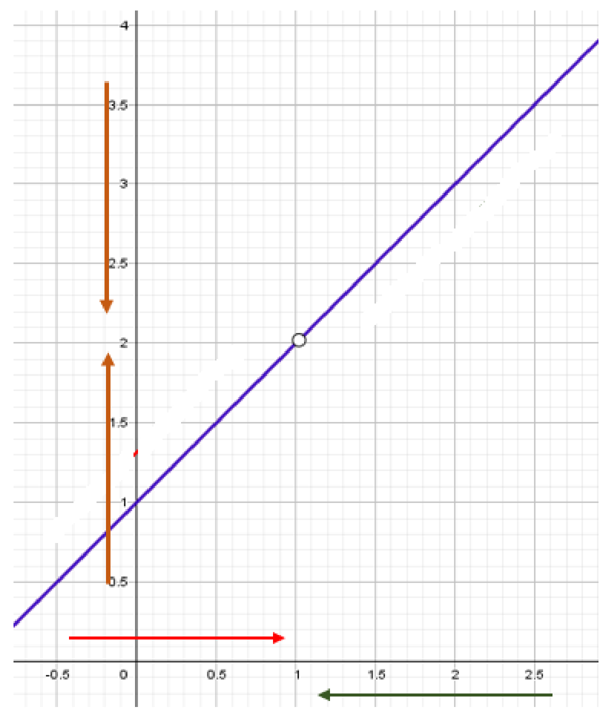


Figura 8. *Representación gráfica para la función f(x) de la tarea 8*

Gráficamente podemos observar que para valores próximos a $x = 1$, tanto por la derecha como por la izquierda, sus imágenes correspondientes se aproximan a 2. Por lo tanto, $\lim_{x \to 1} \left(\frac{x^2-1}{x-1}\right) = 2$.

a) En este inciso, se observa que se trata de una función por partes y que $h(\frac{9}{2})$ no está definido. Para visualizar su comportamiento se podría realizar el mismo proceso que en el inciso a), una representación tabular con algunos valores próximos a $x = \frac{9}{2}$.

Tabla 6. *Representación tabular para la función $h(x)$ de la tarea 8*

x	3.9	4	4.1	4.2	4.3	4.4	4.5	4.6	4.7	4.8	4.9	5	5.1
$h(x)$	4.8	5	5.2	5.4	5.6	5.8	?	12	13	13.44	14	15	16

Posteriormente, se procede a pasar al siguiente registro gráfico, ver Figura 9.

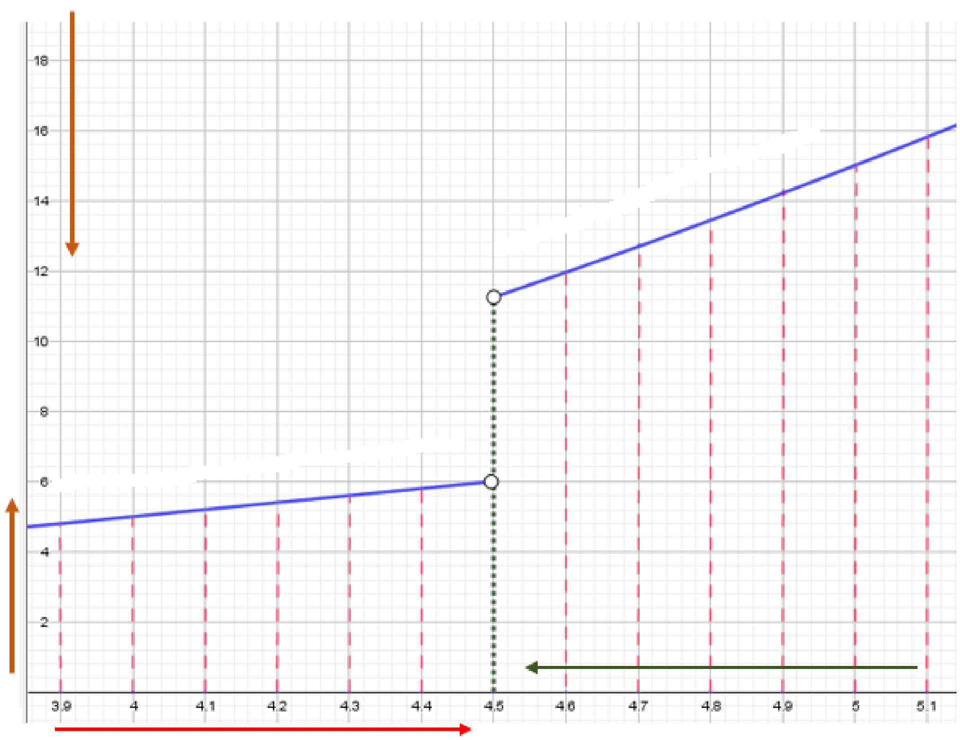


Figura 9. *Representación gráfica de la función $h(x)$ de la tarea 8*

Gráficamente podemos observar que las imágenes de valores próximos a $x = \frac{9}{2}$, por la derecha se aproximan a 11.25 y, por la izquierda se aproximan a 6. Lo anterior se podría escribir de la siguiente manera: $\lim_{x \to \frac{9}{2}^-} h(x) = 6$ y $\lim_{x \to \frac{9}{2}^+} h(x) = 11.25$, por lo tanto, dado que los límites laterales no coinciden, el $\lim_{x \to 1} k(x)$ no existe.

b) Algunos de los conceptos involucrados son los siguientes
   - ✓ Función racional
   - ✓ Función por partes
   - ✓ Límite de una función
   - ✓ Continuidad de una función
   - ✓ Discontinuidad de una función
   - ✓ Aproximación

A continuación, se presenta el análisis de contenido considerando las posibles soluciones mediante la descripción de los objetos y procesos primarios.

Elementos lingüísticos previos

- La función $\frac{x^2-1}{x-1}$, es del tipo racional construida a partir de dos funciones polinomiales.
- La expresión $\lim_{x \to 1} \left(\frac{x^2-1}{x-1}\right)$ solicita calcular el límite de la función racional en el punto dado utilizando su gráfica.
- $h(x) = \begin{cases} 2x - 3 & si\ x < \frac{9}{2} \\ x^2 - 2x & si\ x > \frac{9}{2} \end{cases}$ representa una función por partes o a trozos construida a partir de dos funciones polinomiales.
- La expresión $\lim_{x \to \frac{9}{2}} h(x)$ se refiere al cálculo del límite de la función $h(x)$ cuando x tiende a $\frac{9}{2}$ utilizando su representación gráfica.

Elementos lingüísticos emergentes

- La representación tabular de la función $f(x)$ sirve de orientación para realizar un bosquejo de su gráfica. Posteriormente con la representación gráfica se observa que conforme los valores en el dominio se aproximan a $x = 1$, sus imágenes correspondientes se aproximan a 2. Este comportamiento también se observa en la representación tabular.
- La expresión $\lim_{x \to 1} \left(\frac{x^2-1}{x-1}\right) = 2$ responde a lo solicitado en el problema.
- Realizar la representación tabular de la función $h(x)$ sirve de apoyo para representar un bosquejo de su gráfica. Posterior a ello se observa en la tabla que cuando los valores en el dominio se aproximan a $x = \frac{9}{2}$ sus imágenes correspondientes no se aproximan a un mismo valor. En su gráfica podemos observar con mayor detalle dicho comportamiento. Por último, para valores próximos a $x = \frac{9}{2}$, por la derecha e izquierda se tiene que sus imágenes correspondientes se aproximan a 11.25 y a 6 respectivamente.
- La expresión $\lim_{x \to 1} h(x)$ no existe, se justica debido a que $\lim_{x \to \frac{9}{2}^-} h(x) = 6$ y $\lim_{x \to \frac{9}{2}^+} h(x) = 11.25$, los límites laterales no coinciden.

Conceptos previos

- Función por partes: función construida a partir de dos funciones que están bien definidas.
- Función racional: una función racional h es un cociente de dos funciones, $h(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ donde P y Q son polinomios. El dominio consiste en todos los valores de x tales que $Q(x) \neq 0$.
- Dominio (variable independiente). Conjunto de todos los valores de x para los cuales la función $h(x)$ está definida.
- Imagen (variable dependiente). Conjunto de todos los valores posibles de $h(x)$ conforme x varía a través de todo el dominio.

- Límite de una función. El límite de $h(x)$, cuando x tiende a a, es igual a L ($\lim\limits_{x\to a} h(x) = L$) si podemos hacer que los valores de $h(x)$ estén arbitrariamente cercanos a L, tomando valores de x suficientemente cerca de a, pero no iguales a a.
- Límite lateral. $\lim\limits_{x\to a^-} h(x) = L$, el límite izquierdo de $h(x)$, cuando x tiende a a, es igual a L si podemos hacer que los valores de $h(x)$ estén arbitrariamente cercanos a L, tomando valores de x suficientemente cerca de a, pero menores a a. En el caso de $\lim\limits_{x\to a^+} h(x) = L$, tomando valores de x suficientemente cerca de a, pero mayores a a.

<u>*Argumentos*</u>

- "La función $\frac{x^2-1}{x-1}$ no está definida en $x = 1$".
- "$\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right) = 2$".
- "$\lim\limits_{x\to 1} h(x)$ no existe, debido a que sus límites laterales no coinciden $\lim\limits_{x\to \frac{9}{2}^-} h(x) = 6$ y $\lim\limits_{x\to \frac{9}{2}^+} h(x) = 11.25$".
- "Cuando los valores en el dominio de la función $\frac{x^2-1}{x-1}$ se aproximan a $x = 1$, sus imágenes correspondientes se aproximan a 2 tanto por la derecha como por la izquierda".
- "Cuando los valores en el dominio de la función $h(x)$ se aproximan a $x = \frac{9}{2}$, sus imágenes correspondientes se aproximan a 11.25 por la derecha y a 6 por la izquierda, además, $h(\frac{9}{2})$ no está definido".

Capítulo 3. Aplicación y Análisis

En este capítulo se presenta el análisis de las producciones realizadas por los profesores participantes en la investigación.

Como se mencionó anteriormente, se diseñaron dos bloques de tareas, su aplicación se llevó a cabo de la siguiente manera: el bloque uno se aplicó en una sesión de dos horas y el segundo en cinco sesiones (un problema por sesión) de dos horas cada una.

La participación de los profesores en el primer bloque fue responder las tres tareas para conocer el conocimiento sobre la noción de límites de una función. Para el segundo bloque, se trabajó una tarea por sesión, primero el profesor respondió individualmente y posteriormente se discutió en grupo para enriquecer o corregir sus respuestas con las aportaciones de los demás. En la sección 3.2 se analizan las producciones individuales de este bloque.

3.1 Análisis (bloque 1)

Conocimiento Común del Contenido

En el inciso a) de las tareas 1, 2 y 3, se buscó explorar este tipo de conocimiento que poseen los profesores acerca del cálculo de límite de una función (dada su representación algebraica o gráfica). A continuación, se presenta el análisis de las producciones realizadas por algunos profesores participantes.

En la **tarea 1** tenemos que cinco profesores llegaron a la respuesta esperada, en su procedimiento movilizaron una configuración técnica (algorítmica) la cual se centró en el uso y manipulación de los elementos simbólicos de los objetos matemáticos involucrados, por ejemplo, el uso de factorización, ver Figuras 10 y 11.

Respecto a la *Práctica matemática* podemos observar que la actividad desarrollada por el Profesor 7 y el Profesor 1, requiere el uso de la factorización, la cual utilizaron para representar la función $g(x)$ con una expresión equivalente. Finalmente, sustituyeron el punto al que tiende x para obtener el límite correspondiente.

En el análisis de las respuestas se observó que tres de los cinco omitieron la notación de límite, en la Figura 10 se puede ver esta omisión en la respuesta del Profesor 7. En la Figura 11 podemos apreciar la producción de uno de los profesores que sí utilizó la notación de límites.

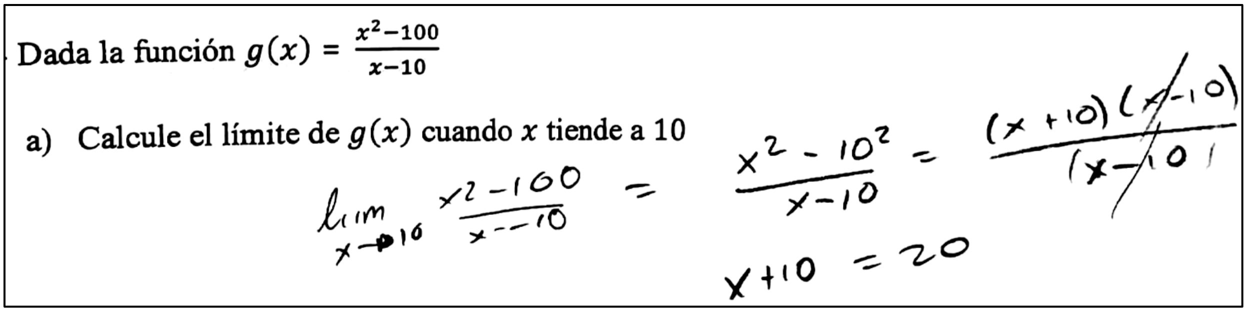


Figura 10. *Procedimiento algebraico del Profesor 7 en la tarea 1*

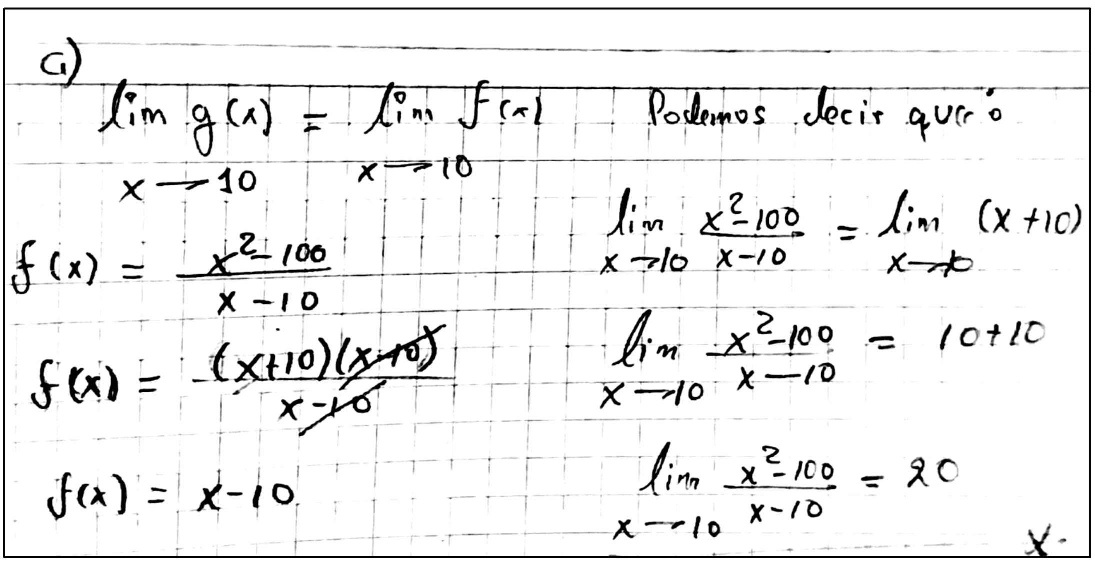


Figura 11. *Procedimiento algebraico del Profesor 1 en la tarea 1*

En cuanto a la c*onfiguración cognitiva,* se puede observar en las Figuras anteriores que en la actividad matemática desarrollada por el Profesor 7 y 1, utilizaron algunos *elementos lingüísticos simbólicos*. Se puede apreciar que uno de ellos es la expresión $\lim_{x\to 10} \frac{x^2-100}{x-10} = \lim_{x\to 10} x + 10$, la cual está relacionada con los *conceptos* de límite y de función racional.

En la **tarea 2** un profesor obtuvo la respuesta que satisfacía al inciso a), en su procedimiento movilizó una configuración algorítmica y gráfica, en la que se centró en el uso y ejecución de los elementos simbólicos de los objetos matemáticos involucrados, por ejemplo, el uso de los límites laterales. La Figura 12 muestra el procedimiento de este profesor el cual representa un ejemplo de una configuración algorítmica y gráfica para el inciso a).

En la *práctica matemática* del profesor 1, podemos observar que para el desarrollo de la actividad recurrió al cálculo de límites laterales, además, realizó la gráfica de la función $k(x)$, aunque no consideró las restricciones del dominio (Figura 12). Por último, expresó que $\lim_{x\to -1} k(x) = 0$.

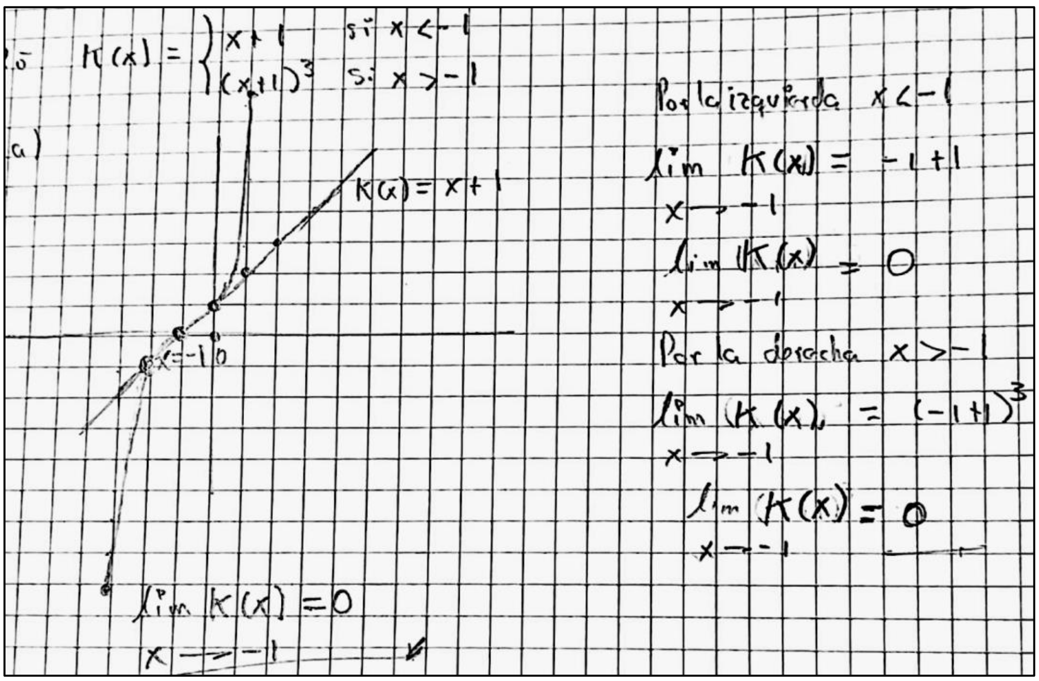
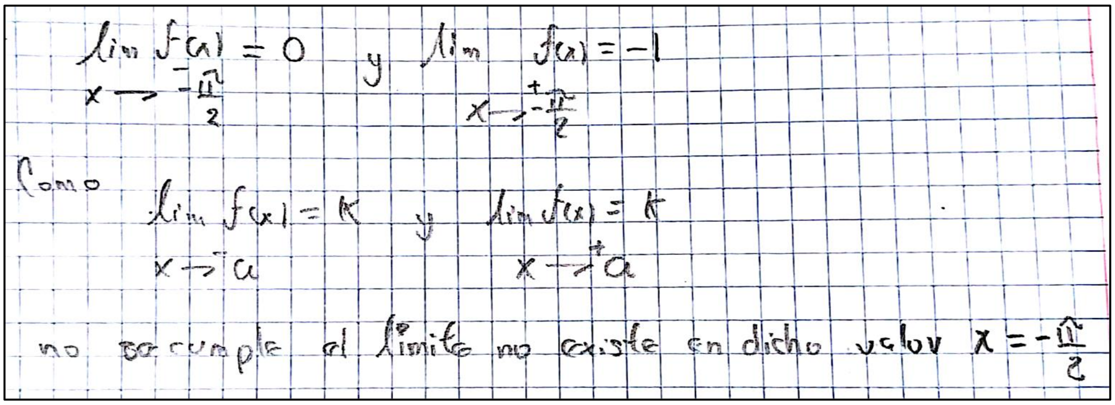


Figura 12. *Procedimiento algebraico del Profesor 1 en la tarea 2*

Respecto a la c*onfiguración cognitiva*, se puede observar en la actividad matemática del Profesor 1, el uso de algunos *elementos lingüísticos simbólicos y gráficos* en el desarrollo de su práctica. Se puede apreciar que uno de ellos es la expresión $x < -1$ ($por\ la\ izquierda$) $\lim_{x\to -1} k(x) = 0$, el cual está relacionado con los *conceptos* de límite lateral y de función por partes.

En la **tarea 3** el Profesor 1 llegó a la conclusión de que el límite de la función (dada su gráfica) no existe. En su procedimiento movilizó una configuración técnica (algorítmica) y verbal, la cual se centró en el uso y manipulación de los elementos simbólicos de los objetos matemáticos involucrados, por ejemplo, el uso de límites laterales. La Figura 13 muestra el procedimiento que utilizó en la que se observa una configuración técnica para la solución al inciso a).

En cuanto a su *práctica matemática* podemos observar que en el desarrollo de la tarea recurrió al uso del cálculo de límites laterales de una función. Finalmente, expresó que el límite por la derecha e izquierda es -1 y 0 respectivamente. Concluyó que "*no se cumple el límite no, existe en dicho valor* $x = -\frac{\pi}{2}$".



$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^-} f(x) = 0$ y $\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = -1$

Como $\lim_{x \to^- a} f(x) = K$ y $\lim_{x \to^+ a} f(x) = K$

no se cumple el límite no existe en dicho valor $x = -\frac{\pi}{2}$

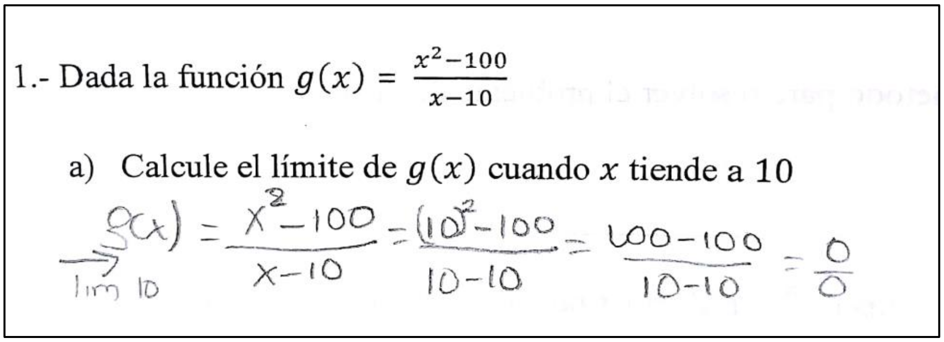
Figura 13. *Procedimiento algebraico del Profesor 1 en la tarea 3*

Configuración cognitiva, en la actividad matemática que desarrolló el Profesor 1, se puede observar el uso de *elementos lingüísticos* simbólicos tales como el manejo de $\lim_{x \to^- a} f(x) = k$ el cual está relacionado con el *concepto* de límite lateral, aunque presenta algunos detalles en la notación que deben ser corregidos. Además, su *justificación* no resulta ser tan clara al decir que no se cumple en dicho valor.

Ahora bien, de los profesores que no llegaron a la respuesta esperada en estas tareas se tiene lo siguiente:

En el procedimiento de las **tareas 1, 2 y 3,** movilizaron una configuración técnica (algorítmica) la cual consistió principalmente en sustituir el valor al que tiende x y operar.

En la Figura 14 podemos observar la *práctica matemática* realizada por el Profesor 5 en la **tarea 1**, en donde sustituyó el valor de $x = 10$ en la función $g(x)$ llegando a la expresión $\frac{0}{0}$ lo cual es incorrecto. Respecto a los *conceptos* que faltó movilizar se encuentra el de límite de una función racional.



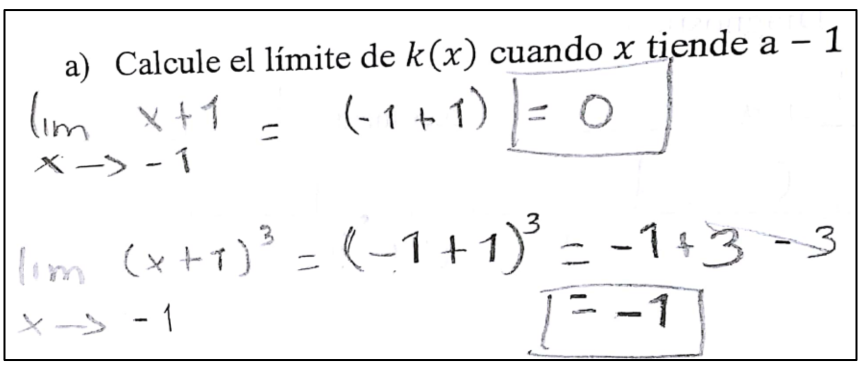
1.- Dada la función $g(x) = \frac{x^2-100}{x-10}$

a) Calcule el límite de $g(x)$ cuando x tiende a 10

$$\lim_{10} g(x) = \frac{x^2-100}{x-10} = \frac{(10)^2-100}{10-10} = \frac{100-100}{10-10} = \frac{0}{0}$$

Figura 14. *Procedimiento del Profesor 5 en la tarea 1*

En la **tarea 2**, en su procedimiento matemático, el Profesor 2 sustituyó el valor de $x = -1$ en cada una de las partes de la función, aunque en sus operaciones cometió errores algebraicos, por ejemplo, no movilizó correctamente el concepto del binomio al cubo, ver Figura 15.



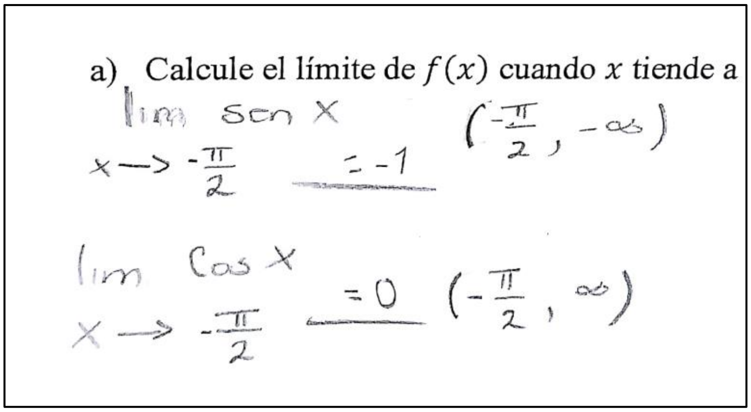
a) Calcule el límite de $k(x)$ cuando x tiende a -1

$$\lim_{x \to -1} x+1 = (-1+1) \boxed{= 0}$$

$$\lim_{x \to -1} (x+1)^3 = (-1+1)^3 = -1+3-3 \boxed{= -1}$$

Figura 15. *Procedimiento del Profesor 2 en la tarea 2*

Por último, en la **tarea 3**, algunos profesores en su *procedimiento matemático* determinaron las funciones involucradas en la gráfica que se les proporcionó, identificaron que la función a trozos o por partes estaba construida por las funciones $Seno(x)$ y $Coseno(x)$ (ver Figura 16). Y aunque uno de ellos calculó los límites por partes, no dio una conclusión.



a) Calcule el límite de $f(x)$ cuando x tiende a

$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x = -1 \quad \left(-\frac{\pi}{2}, -\infty\right)$

$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} \cos x = 0 \quad \left(-\frac{\pi}{2}, \infty\right)$

Figura 16. *Procedimiento del Profesor 2 en la tarea 3.*

De acuerdo con el *conocimiento común del contenido* del concepto de límite que se deseaba explorar con el apoyo de los incisos a) de las tareas 1, 2 y 3, se obtuvo que solo un profesor mostró evidencia de este conocimiento al responder correctamente a las tres tareas. En su *práctica matemática* movilizó algunos *elementos lingüísticos (*simbólicos y gráficos que presentan algunos detalles que deben ser corregidos*)* relacionados con *conceptos* necesarios para responder a cada una de las tareas.

Otros profesores al intentar calcular el límite de la función olvidaron ciertos *elementos lingüísticos* al escribir la notación de límite, algunos más no movilizaron *concepto*s matemáticos (factorización, límite de una función racional, entre otros) necesarios para resolver cada una de las tareas.

Faceta epistémica

En cuanto a esta faceta, en las **tareas 1 y 2** con el inciso b) se buscó explorar este tipo de conocimiento que poseen los profesores acerca del concepto de límite. A continuación, se presenta el análisis de las producciones de algunos profesores participantes.

Como se mencionó anteriormente, la faceta epistémica esencialmente alude al conocimiento especializado de la dimensión matemática. Es decir, establece que el profesor además de movilizar de forma adecuada la dimensión matemática, debe poseer cierto conocimiento matemático ligado a la enseñanza.

En el inciso b) de la **tarea 1,** el Profesor 8 expresó como *procedimiento* para calcular el límite de la función $g(x)$ lo siguiente: *"tabular la gráfica de la función sustituyendo el valor de x en* $g(x) = \frac{x^2-100}{x-10}$*"*, a pesar de ello, no la completó y señaló como podría obtener el límite a partir de la tabla, ver Figura 17.

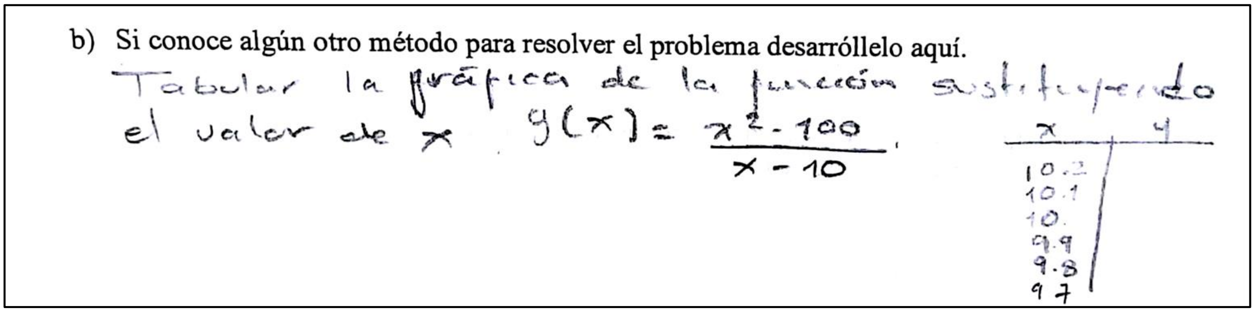


Figura 17. *Procedimiento propuesto por el Profesor 8 en la tarea 1*

Por su parte el Profesor 1, en su propuesta para calcular el límite de $g(x)$ (Figura 18) utilizó *elementos lingüísticos simbólicos*, en ella introdujo el parámetro *h*, este método representa una expresión en la que introduce el *concepto* de la derivada de una función. Sin embargo, no dio un procedimiento o argumento que justificara su propuesta.

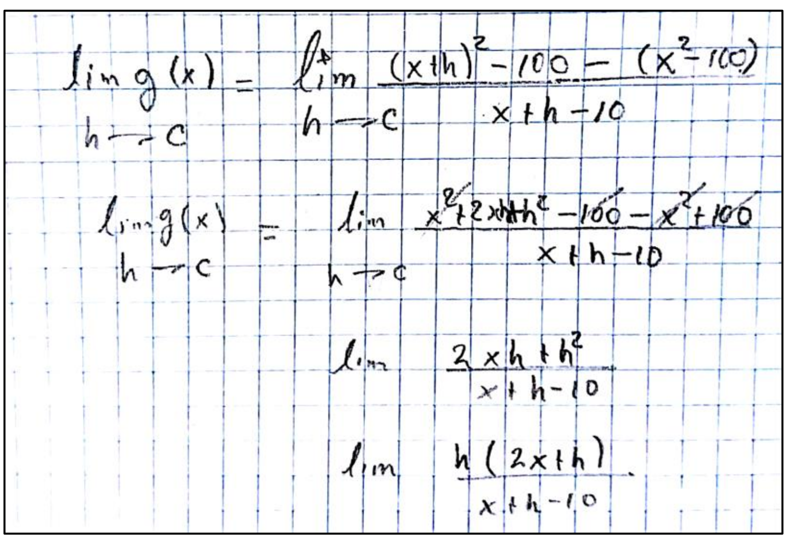


Figura 18. *Procedimiento propuesto por el Profesor 1 en la tarea 1*

En cuanto a la **tarea 2** el Profesor 8 expresó una vez más, como procedimiento, el tabular la función con valores menores y mayores a $x = -1$, cuyo decremento e incremento fue de 0.1 respectivamente. El profesor manipuló el *concepto* de dominio y de una función por partes al considerar las restricciones para cada una de las partes de $k(x)$. En cuanto a su *práctica matemática* no terminó el proceso para encontrar el límite deseado, ver Figura 19.

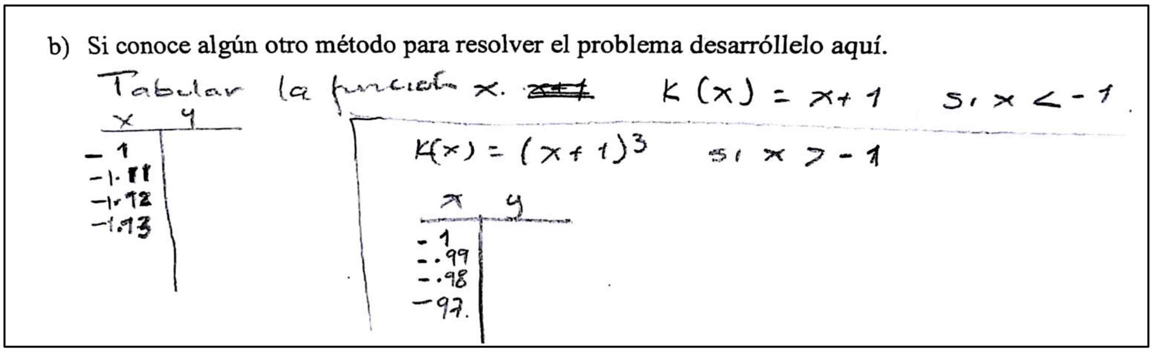


Figura 19. *Procedimiento propuesto por el Profesor 8 en la tarea 2*

En este inciso, la mayoría de los profesores no dieron algún procedimiento alterno para calcular cada uno de los límites. Hubo ausencia de *argumentos, procedimientos,* y *conceptos.* Se esperaba de los profesores que poseen un conocimiento común del contenido hubieran podido dar otro método de solución.

Aspectos de la faceta cognitiva

Hay que recordar que esta faceta se refiere al conocimiento sobre los aspectos cognitivos de los estudiantes. El profesor debe ser capaz de prever las posibles respuestas a un problema determinado, conceptos erróneos, conflictos o errores de los estudiantes en el proceso de resolución del problema.

En el último punto del instrumento se trató de explorar el conocimiento que tienen los profesores acerca del contenido en relación con los estudiantes. En las tres tareas se solicitó que mencionaran las dificultades que podrían presentar los alumnos para encontrar el límite de la función en el punto solicitado.

En la **tarea 1**, uno de los profesores escribió lo siguiente respecto al caso de la división entre cero: *"necesita conocer los casos de factorización para evitar la división entre cero"*. Otros mencionaron que la dificultad de los estudiantes sería no recordar los métodos de factorización, no conocer temas de álgebra (productos notables), incluso hubo quien escribió que el no conocer los conceptos sería una dificultad, sin embargo, no especificó cuáles.

En la **tarea 2** uno de los profesores mencionó como dificultad la siguiente pregunta, *"¿Cuál función deben considerar, ya que si* $x < -1$ $k(x) = x + 1$ y *si* $x > -1$ $k(x) = (x + 1)^3$*?"*, otro profesor mencionó: *"deben considerar que para que exista el límite ambas funciones de* $k(x)$ *debe coincidir en el mismo valor a la hora de evaluar el límite"*. En este caso la dificultad del estudiante recae en entender una función a trozos y recordar la propiedad de los límites laterales para conocer si existe o no el límite de $k(x)$.

Respecto a la **tarea 3** la dificultad que uno de los profesores detectó fue el reconocer la gráfica asociada a una función dada. Hubo quien escribió *"conocer la graficación de las funciones trigonométricas"*, su respuesta creemos se debe a que él mismo tuvo la necesidad de identificar las funciones involucradas en el problema, lo cual no era necesario.

3.2 Análisis (bloque 2)

Conocimiento Común del Contenido

En cada una de las siguientes tareas (4, 5, 6, 7 y 8) se presentan los incisos que buscaban explorar este tipo de conocimiento que poseen los profesores acerca del cálculo de límite de una función (dada su representación algebraica o gráfica).

En la **tarea 4**, en el inciso a) constó de completar la tabla dada la expresión algebraica con valores cercanos a $x = 20$, la mayoría de los profesores (8 de ellos) no presentaron dificultad alguna. En su procedimiento movilizaron una configuración algorítmica la cual se centró en la evaluación de la imagen para algunos valores de x solicitados. En la Figura 20 se muestra un ejemplo representativo del Profesor 8.

En cuanto a la *Práctica matemática* podemos observar que la actividad desarrollada por el Profesor 8, requiere del uso de la evaluación de valores en la función $k(x)$ para obtener su imagen correspondiente. En el análisis de las respuestas se observó que algunos profesores no escribieron el procedimiento para obtener la imagen correspondiente de cada valor de x, pareciera que realizaron un cálculo mental.

1.- Sea $k(x) = 1 + 2x$,

a) complete la tabla cuando los valores de x se acercan por la izquierda y por la derecha a 20, pero nunca son 20.

aumenta → ← disminuye

x	-5	-2	0	2	4	8	16	19	20	21	24	32	36	38	39
$k(x)$	-9	-3	1	5	9	17	33	39	41	43	49	65	73	77	79

$f(x) = 1 + 2x$

$K(-2) = 1 + 2(-2)$
$K(-2) = 1 + (-4)$
$K(-2) = 1 - 4$
$K(-2) = -3$

Figura 20. *Práctica matemática desarrollada por el Profesor 8 en la tarea 4*

Respecto a la c*onfiguración cognitiva*, se puede observar en la figura anterior que en la actividad matemática desarrollada por el Profesor 8, entre los *elementos lingüísticos simbólicos* que utilizó se encuentran la expresión analítica de la función $k(x) = 1 + 2x$ y la representación tabular (representa un símbolo codificado), los cuales se encuentran relacionados con el *concepto* de imagen de una función.

Ahora bien, en el inciso b) se presentaron algunos *elementos lingüísticos verbales.* Cinco profesores *argumentaron* que cuando los valores de x se acercan tanto por la izquierda como por la derecha a 20, los valores de $k(x)$ aumentan por la izquierda y disminuyen por la derecha, lo cual se vincula con el *concepto* relación funcional. La actividad como tal solicitaba que el profesor evocara el concepto de aproximación.

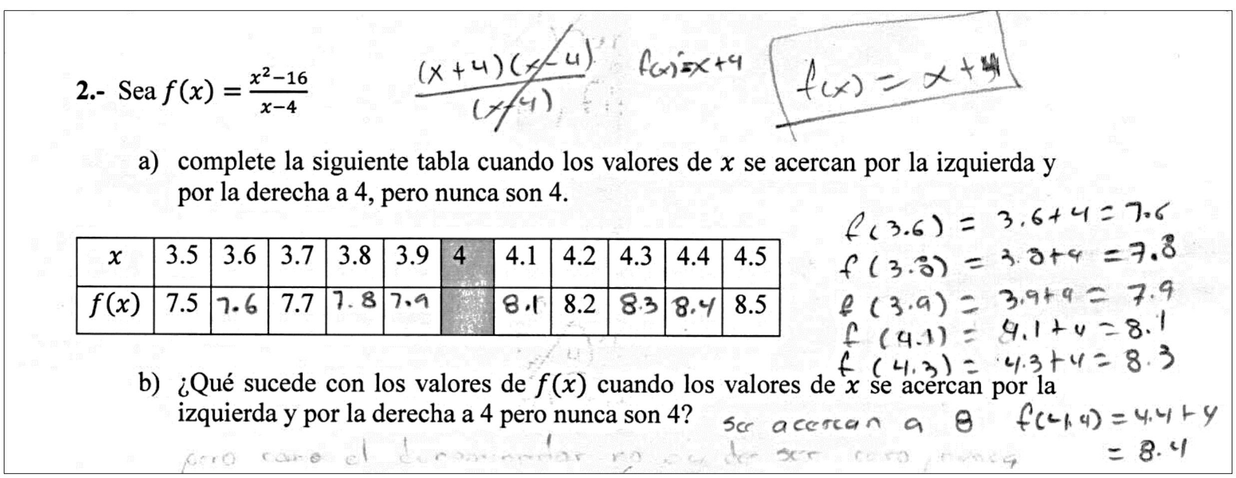
En comparación con el argumento anterior, el Profesor 1 *argumentó* lo siguiente *"la función $f(x)$ se aproxima a un valor $\mathbb{R}$ comprendido en el intervalo (39,43)"*, el profesor cambió la notación de la función $k(x)$ a $f(x)$, luego, aunque su respuesta no es muy clara y no menciona a qué valor se aproximan los valores de $k(x)$, tiene la idea de que se trata de un valor real y este se encuentra en el intervalo (39,43). Este profesor sí movilizó el *concepto* de aproximación, además, de los conceptos de función e intervalo.

En la **tarea 5**, en el inciso a), se solicitó completar la tabla con valores de x cercanos a 4, sin tomar dicho valor, usando la función $f(x)$. La mayoría de los profesores, nuevamente en este inciso, no mostraron problema alguno para completar la representación tabular con los valores cercanos a $x = 4$. En su procedimiento movilizaron una configuración algorítmica la cual se centró en la evaluación de la imagen para algunos valores de x solicitados. En la Figura 21 se muestra un ejemplo representativo del Profesor 9.

x	3.5	3.6	3.7	3.8	3.9	4	4.1	4.2	4.3	4.4	4.5
$f(x)$	7.5	5.[illegible]	7.7	7.8	7.9	0	7.9	8.2	8.[illegible]	8.[illegible]	8.5

Figura 21. *Tabla completada por el Profesor 9 en la tarea 5*

Respecto a la *práctica matemática,* algunos profesores utilizaron la factorización y luego evaluaron cada punto de x en la función para obtener su imagen correspondiente. En la Figura 22 podemos observar el procedimiento matemático que desarrolló el Profesor 7.



2.- Sea $f(x) = \frac{x^2-16}{x-4}$ $\qquad \frac{(x+4)\cancel{(x-4)}}{\cancel{(x-4)}}$ $\quad f(x) = x+4$ $\quad \boxed{f(x) = x+4}$

a) complete la siguiente tabla cuando los valores de x se acercan por la izquierda y por la derecha a 4, pero nunca son 4.

x	3.5	3.6	3.7	3.8	3.9	4	4.1	4.2	4.3	4.4	4.5
$f(x)$	7.5	7.6	7.7	7.8	7.9		8.1	8.2	8.3	8.4	8.5

$f(3.6) = 3.6+4 = 7.6$
$f(3.8) = 3.8+4 = 7.8$
$f(3.9) = 3.9+4 = 7.9$
$f(4.1) = 4.1+4 = 8.1$
$f(4.3) = 4.3+4 = 8.3$
$f(4.4) = 4.4+4 = 8.4$

b) ¿Qué sucede con los valores de $f(x)$ cuando los valores de x se acercan por la izquierda y por la derecha a 4 pero nunca son 4?

se acercan a 8

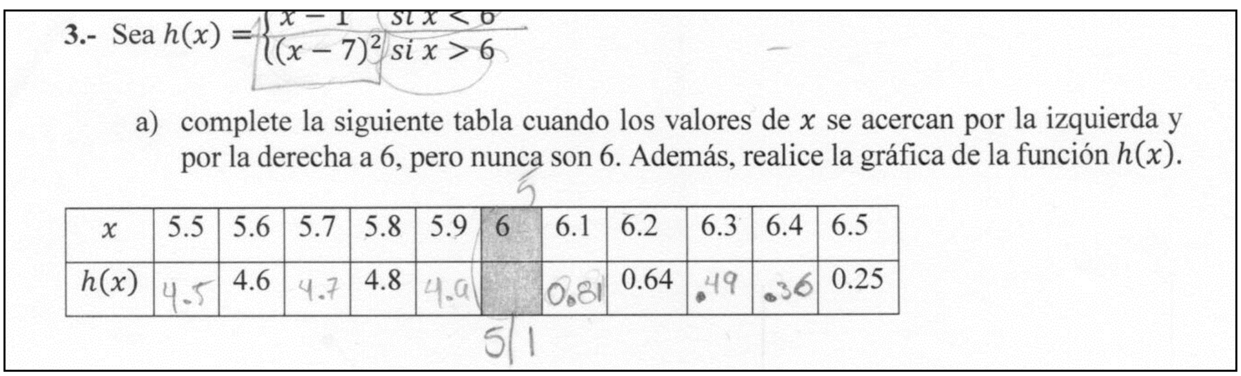
Figura 22. *Procedimiento desarrollado por el profesor 7 en la tarea 5*

Respecto a la c*onfiguración cognitiva*, se puede observar en la Figura anterior que en la actividad matemática desarrollada por el Profesor 7 los *elementos lingüísticos simbólicos* que movilizó son la expresión analítica de la función $f(x) = \frac{x^2-16}{x-4}$ y la representación tabular, ambos están relacionados con el *concepto* de imagen de una función racional.

Ahora bien, en el inciso b) de esta tarea la mayoría de los profesores respondieron de la misma forma que en la tarea 4, en la que se manifestó el *concepto* de relación funcional. Dos profesores proporcionaron una respuesta diferente, manifestando que los valores de las imágenes se aproximan a 8. Uno más agregó que los valores se acercan a un valor $\mathbb{R}$ comprendido en el intervalo $[7.9, 8.1]$. Estos últimos están relacionados con el *concepto* de aproximación e intervalo.

En la **tarea 6**, en el inciso a) todos los profesores completaron la tabla sin presentar problema alguno. En su procedimiento movilizaron una *configuración algorítmica* la cual se centró en la evaluación de la imagen para algunos valores de x solicitados. En la Figura 23 se muestra un ejemplo representativo del profesor 4.

En su p*ráctica matemática* el concepto que movilizó es la evaluación de algunos valores del dominio en una función por partes.



3.- Sea $h(x) = \begin{cases} x-1 & si\ x < 6 \\ (x-7)^2 & si\ x > 6 \end{cases}$

a) complete la siguiente tabla cuando los valores de x se acercan por la izquierda y por la derecha a 6, pero nunca son 6. Además, realice la gráfica de la función $h(x)$.

x	5.5	5.6	5.7	5.8	5.9	6	6.1	6.2	6.3	6.4	6.5
$h(x)$	4.5	4.6	4.7	4.8	4.9		0.81	0.64	.49	.36	0.25

Figura 23. *Tabla completada por el profesor 4 en la tarea 6*

Ahora bien, en el inciso b) de esta tarea la mayoría de los profesores respondieron de la misma forma que en la tarea 4, en la que se manifestó el *concepto* de relación funcional (variación conjunta). En esta tarea además el concepto de aproximación lateral.

En la **tarea 7** en el inciso a), dada las gráficas de cuatro funciones ($\boldsymbol{f(x)}, \boldsymbol{g(x)}, \boldsymbol{h(x)}\ \boldsymbol{k(x)}$) los profesores tuvieron que determinar a qué punto se acercan los valores de las imágenes de cada función cuando los valores de x se acercan a 1. En su procedimiento movilizaron una *configuración gráfico-verbal*, algunos profesores además de expresar el punto, dieron algunos argumentos para justificar su respuesta. En la Figura 24 se muestra un ejemplo representativo del Profesor 6.

Respecto a la *Práctica matemática* podemos observar que la actividad desarrollada por los profesores requiere de una conversión del registro gráfico al registro analítico o verbal, así como del uso de la notación de límites para expresar el punto al que se acercan los valores de la función. En las Figuras 24 y 25 se muestran ejemplos representativos de dos profesores.

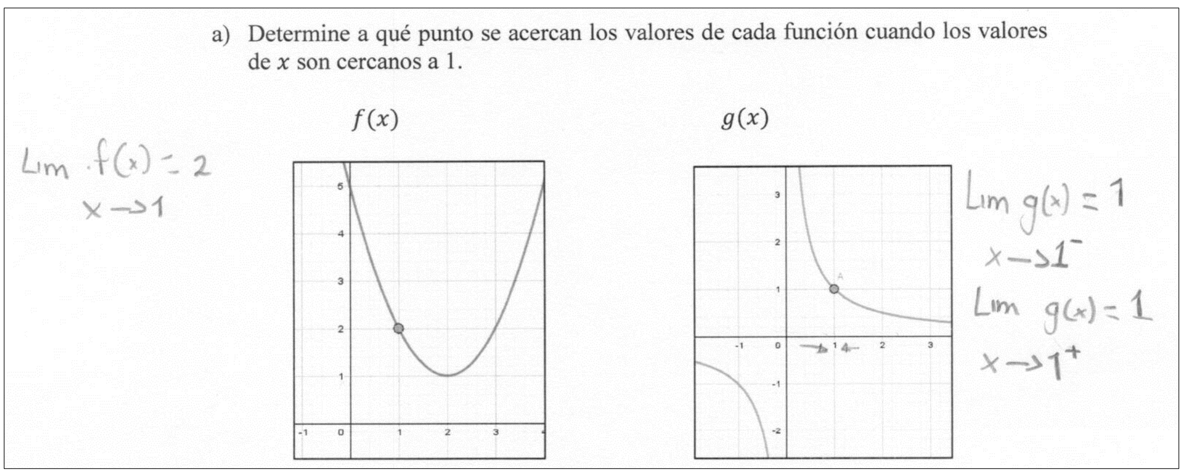


Figura 24. *Práctica matemática desarrollada por el Profesor 6 en la tarea 7*

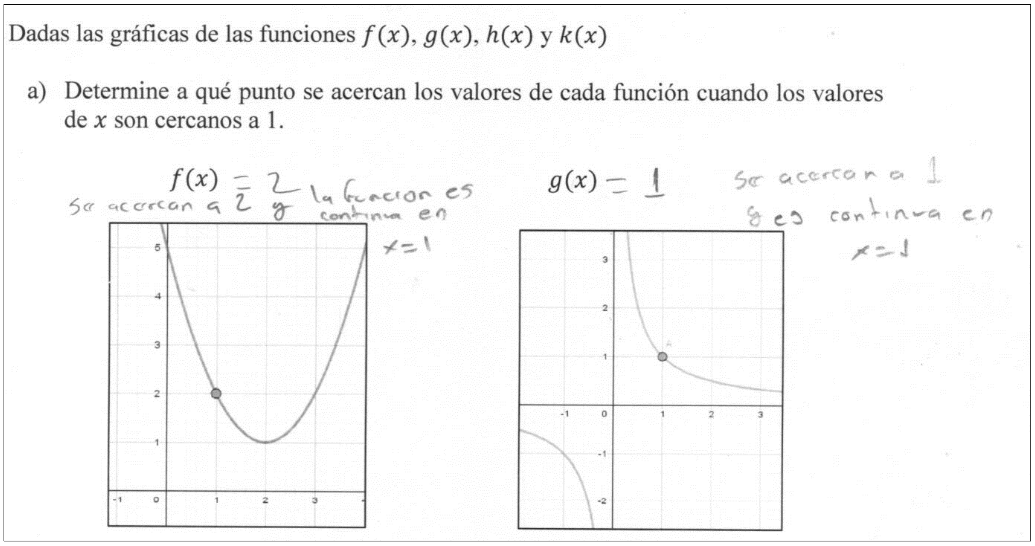


Figura 25. *Práctica matemática desarrollada por el Profesor 3 en la tarea 7*

En cuanto a la c*onfiguración cognitiva,* en la Figura 24 podemos observar que, en la actividad matemática desarrollada por el Profesor 6, entre los *elementos lingüísticos simbólicos* que utilizó se encuentran la expresión analítica del límite de una función, por ejemplo, $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$ y la representación gráfica, los cuales se encuentran relacionados con el *concepto* de límite de una función y el de aproximación.

En esta **tarea 8,** en general, la configuración movilizada por los profesores es del tipo algorítmico-gráfico. En su procedimiento ellos realizaron una conversión del registro analítico al gráfico. En la Figura 26 presentamos un ejemplo representativo de la producción realizada por el Profesor 2.

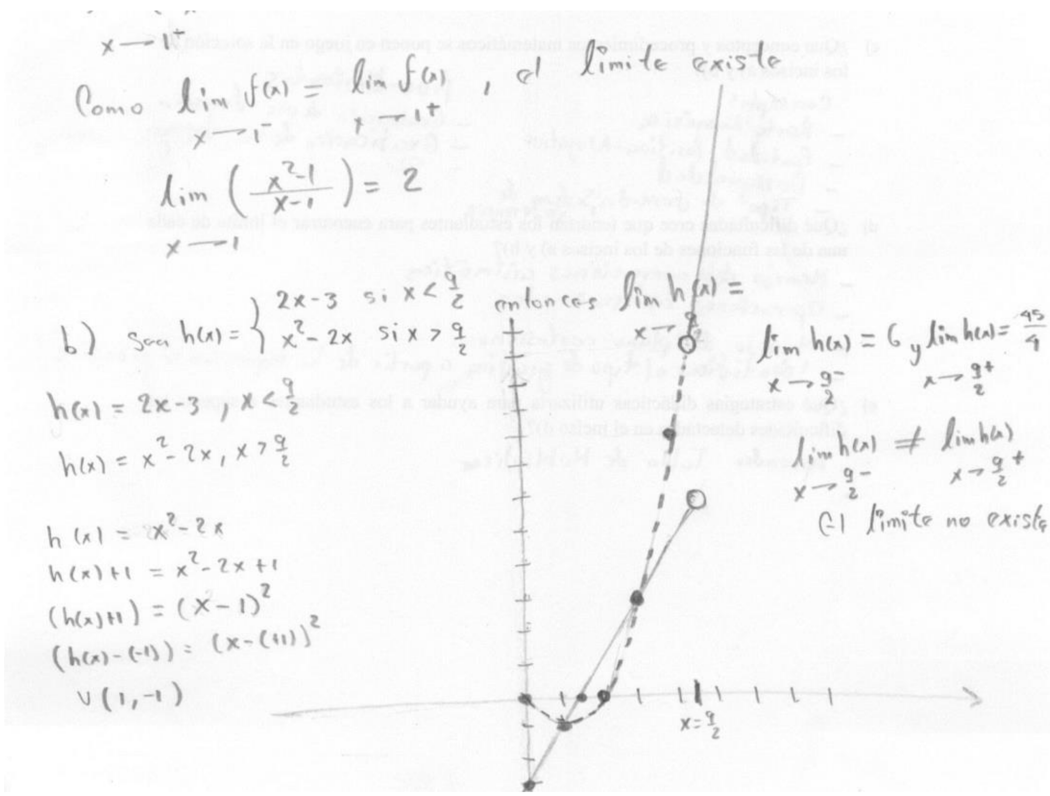


Figura 26. *Práctica matemática desarrollada por el Profesor 2 en la tarea 8 (inciso b)*

En cuanto a la *Práctica matemática* podemos observar que en la actividad desarrollada por el Profesor 2 (inciso b), requiere del uso de diversos conceptos para realizar la conversión de un registro a otro. En el registro analítico podemos observar que en el tratamiento utilizó diversos conceptos como el de función por partes, función lineal, límites laterales, dominio. En el registro gráfico entre los conceptos que se observa que movilizó se encuentran el de discontinuidad, función lineal, dominio, codominio y variación conjunta.

En el análisis de las respuestas se observó que los profesores no realizaron la gráfica para calcular el límite de la función, como se solicitó en este inciso, sino que recurrieron a un procedimiento algebraico.

Respecto a la c*onfiguración cognitiva,* se puede observar en la Figura anterior que en la actividad matemática desarrollada por el Profesor 2, entre los *elementos lingüísticos simbólicos* que utilizó están los siguientes:

$$\lim_{x\to\frac{9}{2}^-} h(x) \neq \lim_{x\to\frac{9}{2}^+} h(x),\ h(x) = 2x - 3\ para\ x < \frac{9}{2}, h(x) = x^2 - 2x\ para\ x > \frac{9}{2},$$

Los cuales están relacionados con los *conceptos* de límites laterales (teorema de los límites laterales), de función por partes y dominio, respectivamente.

Faceta epistémica

En las **tareas 4, 5, 6 y 8** se buscaba explorar este tipo de conocimiento con el inciso c), es decir, el profesor debía de identificar los conceptos y procedimientos puestos en juego para la solución. De los pocos profesores que respondieron a este inciso, en cada una de las tareas identificaron que uno de los *conceptos* que siempre estuvo presente fue el de función, en algunos casos especificaron que se trataba de una lineal, cuadrática o racional. En la **tarea 8** cuatro profesores mencionaron además el *concepto* de límite de una función.

Ahora, en el caso de los *procedimientos*, mencionaron con mayor frecuencia la sustitución de valores de x en la función para obtener su imagen correspondiente.

En las Figuras 27 y 28 podemos observar algunas de las respuestas representativas de dos profesores.

c) ¿Qué conceptos y procedimientos matemáticos se ponen en juego en la solución de los incisos a) y b)? aritmética . y algebra.
a) Función, variable procedimiento Sustitucione del valor de x en la función
b) Observación de datos,

Figura 27. *Conceptos y procedimientos mencionados por el Profesor 5 en la tarea 1*

c) ¿Qué conceptos y procedimientos matemáticos se ponen en juego en la solución del inciso a)? Conceptos Procedimientos
— Operaciones básicas — Evaluación de la función
— Función por partes
—

Figura 28. *Conceptos y procedimientos mencionados por el Profesor 1 en la tarea 3*

Ahora, seis profesores que respondieron el inciso d) de la **tarea 4**, representaron la gráfica de la función (registro gráfico) utilizando la expresión algebraica (registro analítico). Primero realizaron algunos tratamientos en el registro analítico encontrando en la mayoría de los casos los puntos de intersección con el eje y y x, luego hicieron la conversión al registro gráfico ubicando los puntos y trazando un segmento de recta que presentara a la función $k(x)$, ver Figura 29.

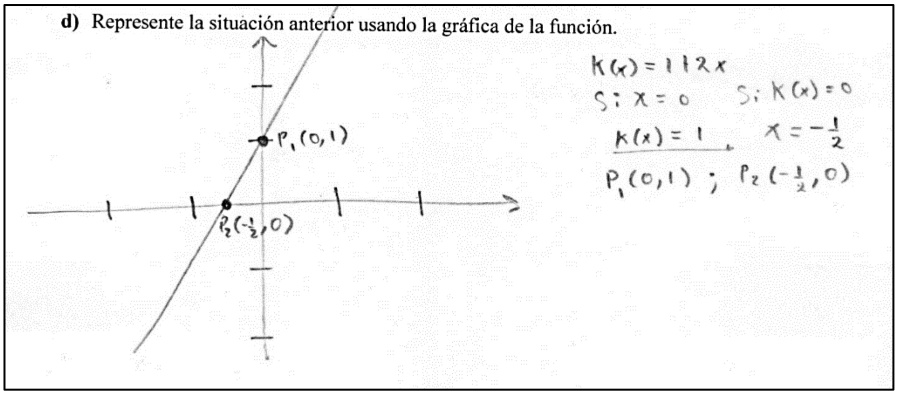


Figura 29. *Gráfica de la función $k(x)$ realizada por el Profesor 1 en la tarea 4*

En comparación con lo anterior, en la Figura 30 podemos observar que el Profesor 2 ubicó algunas parejas ordenadas tomadas de la representación tabular y posterior a ello unió los puntos para trazar un segmento de recta. En otras palabras, el profesor hizo una conversión del registro tabular al gráfico, que era como se esperaba.

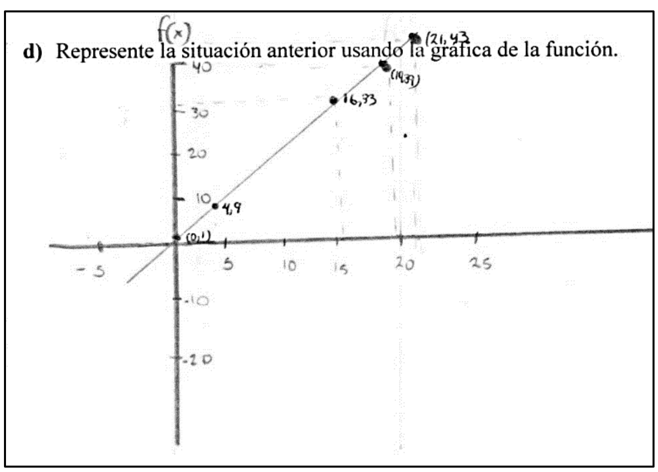


Figura 30. *Gráfica de la función $k(x)$ realizada por el Profesor 7 en la tarea 4*

En la **tarea 5**, además del inciso c), otro inciso relacionado con este tipo de conocimiento es el d). Respecto a este inciso, cinco profesores seleccionaron la gráfica que corresponde a la función $f(x)$. En los elementos lingüísticos verbales de sus *argumentos* aparecen los *conceptos* de función lineal, aproximación e indeterminación de una función, en las Figuras 31 y 32 se muestra el ejemplo de dos profesores.

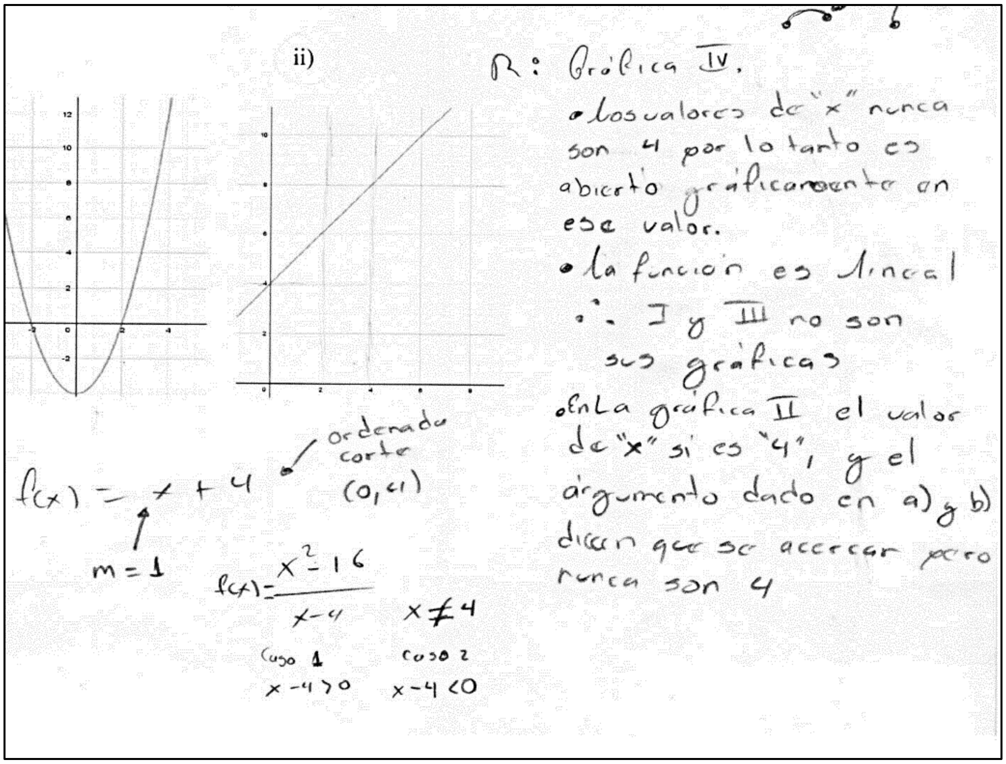


Figura 31. *Argumento del Profesor 7 en la tarea 5*

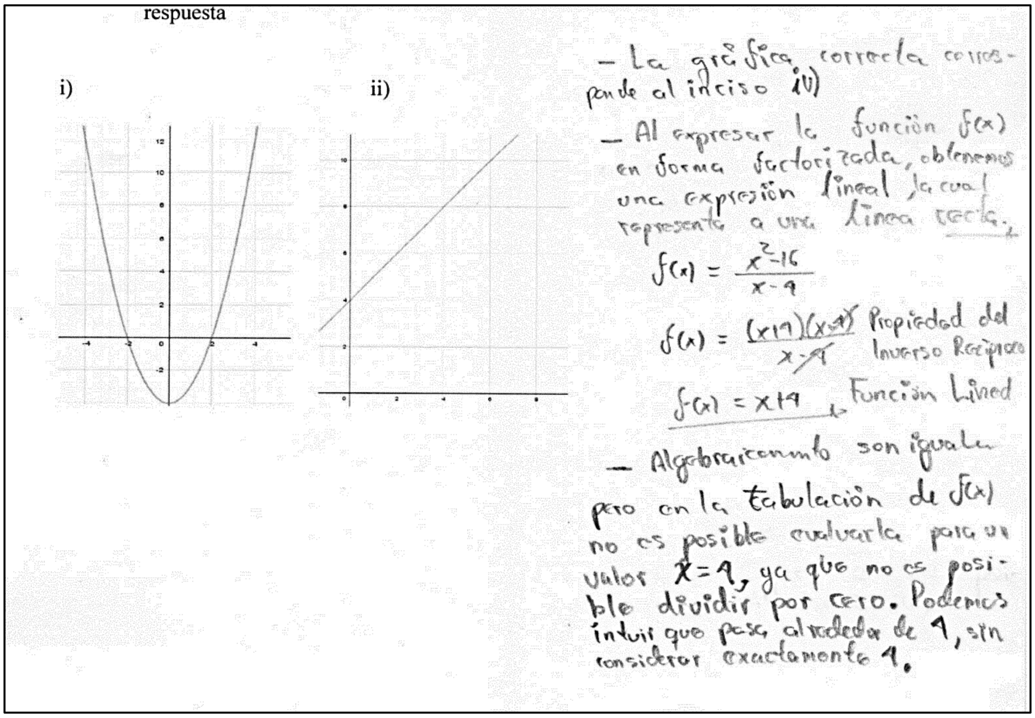


Figura 32. *Argumento del Profesor 1 en la tarea 5*

Para seleccionar la gráfica correspondiente a la función algunos profesores tuvieron que hacer una conversión del registro algebraico al gráfico y otros del tabular al gráfico. Para justificar su respuesta hicieron la conversión del registro gráfico al verbal.

También, en las figuras anteriores se puede observar que los profesores hicieron un análisis en cada una de las gráficas proporcionadas, descartando las que no correspondían a la función dada. Los cuatro profesores restantes no respondieron este inciso.

En la tarea 7, con los incisos b) y e) se buscó explorar este tipo de conocimiento. En el inciso b) las respuestas de los profesores son del tipo *verbal*, mencionaron algunas características de las funciones proporcionadas. Respecto a los *elementos lingüísticos* observamos que movilizan *conceptos* como el de función cuadrática, función racional, función por partes, continuidad, discontinuidad en un punto, entre otras, ver Figuras 33 y 34, a través de una conversión del registro gráfico al verbal.

b) Mencione las características de las funciones anteriores dada sus gráficas.

a) Función cuadratica continua dominio en $\mathbb{R}$

b) función continua hiperbólica o racional

c) función que se acerca a 1/2 cuando x se aproxima a el valor 1 por la derecha e izquierda

d) funcion por partes, la primera lineal con valores menores a 1

Figura 33. *Elementos proporcionados por el Profesor 3 para las funciones en la tarea 7*

b) Mencione las características de las funciones anteriores dada sus gráficas.

$f(x)$: Cuadrática, continua vertical, abre hacia arriba

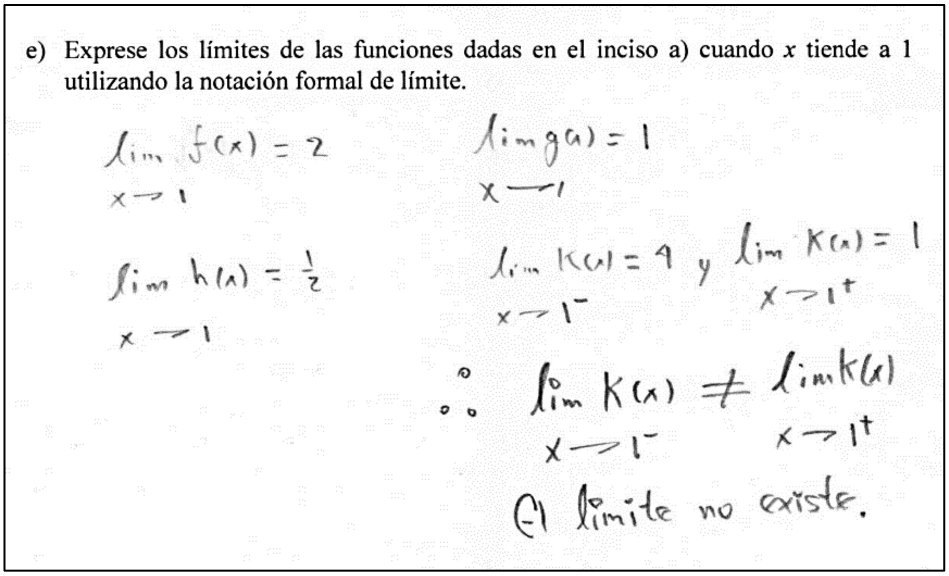
$g(x)$: Funcion racional, continua con asintota en $x=0$

$h(x)$: Funcion racional, discontinua en $x=1$

$k(x)$: Función por partes, discontinua en $x=1$,

Figura 34. *Elementos proporcionados por el Profesor 1 para las funciones en la tarea 7*

En el inciso e) tenemos que 6 profesores dieron una respuesta a este inciso. Para ello realizaron una conversión del registro gráfico al analítico utilizando *elementos lingüísticos simbólicos* como los siguientes: $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$, $\lim_{x\to 1^-} (x) \neq \lim_{x\to 1^+} k(x)$, los cuales están relacionados con el *concepto* de límite de una función y límites laterales, ver Figura 35.



e) Exprese los límites de las funciones dadas en el inciso a) cuando x tiende a 1 utilizando la notación formal de límite.

$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$ $\qquad$ $\lim_{x \to 1} g(x) = 1$

$\lim_{x \to 1} h(x) = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\lim_{x \to 1^-} K(x) = 4$ y $\lim_{x \to 1^+} K(x) = 1$

$\therefore \lim_{x \to 1^-} K(x) \neq \lim_{x \to 1^+} K(x)$

El límite no existe.

Figura 35. *Representación analítica del Profesor 1 en la tarea 7*

Faceta cognitiva

En las **tareas 5, 6, 7 y 8** se plantearon consignas dirigidas a explorar este tipo de conocimiento que poseen los profesores en cuanto a las posibles dificultades que podrían presentar los estudiantes y estrategias didácticas que podrían aplicar para superarlas.

En general, las principales dificultades mencionadas por los profesores son: la sustitución de valores, el análisis de los datos, identificar el tipo de función (lineal, cuadrática, por partes), manipulación de *conceptos* como el de factorización, límite de una función, por mencionar algunos. Además, identificar el tipo de función a través del método gráfico, así como realizar la gráfica dada la expresión analítica.

En cuanto a las posibles estrategias que proporcionaron se encuentran: repasar algunos conceptos en clase, realizar ejercicios de factorización, de tabulación y de funciones.

Respecto a esta faceta se observó que fueron pocos los profesores que mencionaron dificultades y estrategias didácticas en cada una de las tareas, la mayoría de los profesores no respondieron.

Capítulo 4. Reflexiones finales

En esta investigación se realizó un análisis del conocimiento relacionado con el concepto de límite de una función de un grupo de profesores del nivel medio superior. Para ello se utilizó, como marco teórico, al modelo del Conocimiento Didáctico Matemático (CDM) (Pino-Fan y Godino, 2015), en lo que se refiere a la *dimensión matemática* y algunos aspectos de la *faceta epistémica*.

La investigación se dividió en dos bloques. En el primero se diseñaron tres tareas y en el segundo cinco. Se realizaron dos tipos de validación, el primero mediante el análisis de contenido utilizando la configuración de objetos y procesos del EOS; el segundo mediante el juicio de expertos.

Posteriormente se aplicó ambos bloques a nueve profesores que trabajaron de manera individual, y en el segundo bloque, además, se fomentó la discusión grupal.

Los resultados obtenidos en el primer bloque mostraron que la mayoría de los profesores tienen ausencia de ***conocimiento común del contenido y de algunos aspectos involucrados en la faceta epistémica***. Lo anterior se evidenció en el escaso número de respuestas correctas, en el uso inapropiado de la notación y en la falta de procedimientos y de registros semióticos alternativos.

Con respecto a la dimensión matemática, se reportó que la mayoría de los profesores dejaron en blanco las preguntas en las que se les solicitaron posibles dificultades de los estudiantes ante la tarea propuesta y posibles estrategias didácticas para superarlas.

En el segundo bloque de tareas se evaluaron los mismos elementos del modelo CDM a través de tareas muy similares a las del primer bloque. En cuanto al ***conocimiento común del contenido***, se observó que, en su práctica matemática, los profesores movilizaron *conceptos* necesarios para lograr un *procedimiento* que los llevara, en la mayoría de los casos, a la solución, (por ejemplo, en las tareas 4 y 8 movilizaron el concepto de factorización).

También, en este tipo de conocimiento, evidenciaron el uso de transformaciones en los diferentes registros semióticos, por ejemplo, hicieron conversiones del registro analítico al tabular, como en el inciso a) de las tareas 4, 5 y 6 o del gráfico al verbal.

Por otra parte, hubo conceptos que no movilizaron los profesores al momento de trabajar de forma individual. Por ejemplo, en el inciso b) de las tareas 4, 5 y 6 respondieron que los valores de la función aumentaban o disminuían según fuera el caso, pero se esperaba que se manifestara el concepto de aproximación.

También se observó que los profesores prefirieron trabajar en el registro analítico más que en el gráfico, como fue el caso de la tarea 8 (incisos a y b) en el que se solicitó encontrar el límite de la función por medio del método gráfico. En este caso, los profesores recurrieron a realizar tratamientos en el registro analítico y posteriormente pasaron al registro gráfico.

Respecto a la ***faceta epistémica***, se contempló que los profesores mencionaran y movilizaran conceptos necesarios para la solución de las tareas, además, en su procedimiento se esperaba que movilizaran algunas transformaciones en los diferentes registros semióticos.

En particular, el inciso c) solicitaba proporcionar directamente conceptos y procedimientos puestos en juego en la solución de las tareas 4, 5, 6 y 8, en la mayoría de los casos mencionaron el concepto de función y como procedimiento sustituir o evaluar.

Asimismo, en los otros incisos dirigidos a explorar este tipo de conocimiento, tareas 4 d), 5 d) y 7 b) y e), se observó que algunos profesores movilizaron distintos conceptos (por ejemplo, discontinuidad, los diferentes tipos de función, límite de una función, aproximación, entre otras) y emplearon transformaciones en los diferentes registros semióticos, por ejemplo, pasar del registro analítico al gráfico. Sin embargo, la mayoría de este grupo dejó en blanco estos incisos.

Por otro lado, a pesar de que algunos profesores movilizaron algunos conceptos en los distintos registros semióticos, se observó, una vez más, que eligieron trabajar en el registro analítico. Tal fue el caso del inciso d) de la tarea 4, en el que se esperaba que representaran la idea de aproximación en el registro gráfico. Sin embargo, los profesores realizaron la gráfica de la función sin representar la situación solicitada.

En este trabajo de investigación se evidenció que los conocimientos explorados sobre la noción de límite de una función, en este grupo de profesores, son básicos de acuerdo con el nivel en el que se desempeñan y no están acostumbrados a trabajar este concepto en diferentes registros semióticos. Además, no tienen presentes dificultades que podrían tener los estudiantes al enfrentar estas tareas ni estrategias que podrían implementar para ayudarlos. En el segundo bloque de tareas se buscó que los profesores participantes reflexionaran sobre estos aspectos.

Como continuación del trabajo realizado se podrían analizar las producciones de los profesores con la finalidad de determinar el efecto que produjo la forma de trabajar las tareas en el segundo bloque, la cual consistió en lo siguiente: Después de responder las tareas de manera individual se discutían las respuestas grupalmente, se resolvían dudas y se compartían los diferentes procedimientos implementados. La hipótesis de esta investigación futura sería que, los profesores participantes, lograron un desarrollo, en los distintos tipos de conocimiento que se pusieron en juego en las tareas, debido a la discusión grupal. Lo anterior coincidiría con lo reportado por Gómez, Batanero y Contreras (2014).

Referencia bibliográfica

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática (un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (pp. 97-140). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, *9*(1), 143-168.

Elia, I., Gagatsis, A., Panaoura, A., Zachariades, T., y Zoulinaki, F. (2009). Geometric and algebraic approaches in the concept of "limit" and the impact of the "didactic contract". *International Journal of Science and Mathematics Education*, *7*(4), 765-790.

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 20,* 13-31.

Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM*, *39*(1-2), 127-135.

Gómez, E., Batanero, C. y Contreras, J.M. (2014). Conocimiento matemático de futuros profesores para la enseñanza de la probabilidad desde el enfoque frecuencial. *Bolema*, 28(48), pp. 209-229.

Hill, H. C., Ball, D. L., y Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for research in mathematics education*, 372-400.

Hitt, F., y Páez, R. (2005). Dificultades en el aprendizaje del concepto de límite y actividades de enseñanza. En Cortés C. y Hitt F. (Eds), *Reflexiones sobre el aprendizaje del cálculo y su enseñanza* (pp. 133-156). México D.F.: Morevallado Editores.

Kim, D. J., y Lim, W. (2017). The Relative Interdependency of Colloquial and Mathematical Discourses Regarding the Notion and Calculations of Limit: an Evidence-Based Cross-Cultural Study. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 1-19.

Medina, A. C. (2017). Concepciones históricas asociadas al concepto de límite e implicaciones didácticas. *TED: Tecné, Episteme y Didaxis*, (9).

Moru, E. K. (2009). Epistemological obstacles in coming to understand the limit of a function at undergraduate level: A case from the National University of Lesotho. *International journal of science and mathematics education*, *7*(3), 431-454.

Nyikahadzoyi, M. R. (2015). TEACHERS'KNOWLEDGE OF THE CONCEPT OF A FUNCTION: A THEORETICAL FRAMEWORK. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *13*(2), 261-283.

Parameswaran, R. (2007). On understanding the notion of limits and infinitesimal quantities. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *5*(2), 193-216.

Pino-Fan, L., Font, V., y Godino, J.D. (2013). El conocimiento didáctico-matemático de los profesores: pautas y criterios para su evaluación y desarrollo. En C. Dolores, M. García, J. Hernández y L. Sosa (Eds.), *Matemática Educativa: La formación de profesores* (pp. 137 – 151). México, D. F.: Ediciones D. D. S. y Universidad Autónoma de Guerrero.

Pino-Fan, L. R., y Godino, J. D. (2015). Perpectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *Paradigma*, *36*(1), 87-109.

Pino-Fan, L. R., Godino, J. D., y Font, V. (2015). Una propuesta para el análisis de las prácticas matemáticas de futuros profesores sobre derivadas. *Bolema*, *29*(51), 60-89.

Suzuka, K., Sleep, L., Ball, D. L., Bass, H., Lewis, J., y Thames, M. (2009). Designing and Using Tasks to Teach Mathematical Knowledge for Teaching. In D. S Mewborn & H.S. (Eds.) *AMTE Monograph Series, 6. Scholarly Practices and Inquiry in the Preparation of Mathematics Teachers*, 7-24. San Diego, California: Association of Mathematics Teacher Education.

Vásquez, C., y Alsina, Á. (2015). El conocimiento del profesorado para enseñar probabilidad: Un análisis global desde el modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *7*, 27-48.

Vrancken, S., Gregorini, M. I., Engler, A., Muller, D., y Hecklein, M. (2006). Dificultades relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite. *Revista Premisa*, *8* (29), 9-19.