BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

TÍTULO DE LA TESIS

USO DEL MTSK PARA LA DETECCIÓN DE OPORTUNIDADES FORMATIVAS: UN ESTUDIO CON PROFESORES DE CÁLCULO

TESIS
PARA OBTENER EL TÍTULO DE
MAESTRA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

PRESENTA
LIC. MARGARITA HERNÁNDEZ GONZÁLEZ

DIRECTOR DE TESIS
DR. ERIC FLORES MEDRANO
CO-DIRECTOR DE TESIS
DR. JOSÉ ANTONIO JUÁREZ LÓPEZ

PUEBLA, PUE. MARZO 2019

A Bebesauria, Gabyna y Gravita…por supuesto

Esta tesis se realizó con el apoyo financiero
otorgado mediante Beca Nacional por el Consejo
Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT)
durante el periodo enero 2017 a diciembre 2018
(CVU 818822)

Agradecimientos

En especial al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por la beca otorgada durante el periodo enero 2017 a diciembre 2018 (CVU 818822), el apoyo indispensable permitió el estudio de la Maestría en Educación Matemática y la culminación de esta tesis.

Así mismo por la Beca de Movilidad en el Extranjero (291250) que me fue asignada para realizar una estancia de investigación en la Universidad de Huelva, España, del 1º de septiembre al 31 de octubre del 2018.

Al Dr. Luis Carlos Contreras González por la invitación que amablemente me hizo para realizar la estancia académica en el Departamento de Didácticas Integradas, en la Facultad de Educación, Psicología y CC del Deporte, en la Universidad de Huelva, España. Por permitirme trabajar y aprender a su lado, así como con el grupo SIDM (Seminario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas). Esta experiencia me fortaleció de forma mayúscula en el estudio del modelo MTSK y de los avances que se han realizado, fue indispensable para la culminación de esta investigación.

Agradezco de manera muy especial al Dr. Eric Flores Medrano por creer y confiar en mí, por permitirme ser parte de su proyecto de investigación del cual surge esta tesis. Gracias por contribuir de manera determinante en mi formación y crecimiento académico, por proponerme ante CONACYT para la Beca de Movilidad en el Extranjero, por ofrecer en todo momento su apoyo incondicional, por mostrarme siempre su excelente formación académica así como su gran calidad humana.

A la Dra. Dinazar Escudero Ávila, por todas las aportaciones para esta tesis, por su apoyo siempre oportuno y por brindarme todo lo que conlleva la palabra amistad.

A la Dra. María del Mar Liñán García por las charlas que tuvimos sobre el MTSK, fueron realmente de gran ayuda todas y cada una de sus aportaciones y sugerencias.

Platicar con la Dra. Ma. De la Cinta Muñoz Catalán tópicos de metodología fueron indispensables para la realización de esta investigación, gracias por los artículos recomendados y su amable disposición.

Al Dr. Raúl Escobedo Conde por su apoyo siempre que lo necesité y lo necesito, por ser un ejemplo de lo que es ser un investigador y docente y por ser el amigo siempre incondicional.

Al Dr. José Antonio Juárez por las observaciones que amablemente hizo para la realización de esta tesis.

A la Dra. Lidia Aurora Hernández Rebollar, por las lecturas recomendadas, por las aportaciones siempre puntuales a las mismas y que contribuyeron de manera directa a mi crecimiento académico.

A los colegas y entrañables amigos que colaboraron en este proyecto: Vivaldo Cuesta, Jorge Rodríguez, Gema Ramírez, Bryam, Ángeles Ascona, Juan Carlos Flores, Danae Gómez, Vero y Toñito becario, su participación entusiasta y siempre la actitud de colaboración fueron motivantes y contribuyeron de manera sustancial para la realización del proyecto y en consecuencia de esta tesis.

A mis preciosos Alexis Ceballos, Erick Michel Meza, Jetza Aguilar, Karla Garzón y Karen Lira, por ser todas unas promesas, gracias por permitirme ser parte activa de su formación.

ÍNDICE

ÍNDICE DE FIGURAS

INTRODUCCIÓN

Es ampliamente conocido que los profesores de matemáticas de nuestros bachilleratos constituyen un cuerpo muy heterogéneo en cuanto a formación. Además, de acuerdo con la OCDE (2004), dichos profesores suelen presentar deficiencias en sus conocimientos matemáticos y didáctico-matemáticos. Los resultados que México ha obtenido en evaluaciones nacionales como PLANEA (antes ENLACE) lo posicionan en los últimos lugares. Según OCDE (2016), en la última evaluación del 2015, para el área de matemáticas, México se sitúa entre el 55º y 60º lugar, con sólo 12 países por debajo. Sabemos que los responsables de estas cifras no son sólo los maestros de matemáticas. Hay muchos otros factores que intervienen. Por ejemplo, Cervini, Dari y Quiroz (2014) nos muestran que, en un estudio realizado en distintos países de América Latina (incluido México) existe una relación estrecha entre el tipo de estructura familiar y el rendimiento académico mostrado por los estudiantes. Desde luego no podemos soslayar dentro de esta multifactorialidad el papel del profesor y las necesidades formativas que esto conlleva. Es por ello que en este trabajo nos centramos en los conocimientos potencialmente desarrollables que evidencia un grupo de profesores que participan en este proyecto de investigación, exploramos las oportunidades de desarrollo de conocimiento matemático y didáctico-matemático de los profesores de Cálculo evidenciadas al realizar tareas como son analizar una secuencia didáctica previamente diseñada, predecir el comportamiento matemático de los estudiantes ante dicha secuencia, interpretar lo que sucede en el aula una vez implementada y discutir aspectos de mejora a raíz de lo ocurrido en ésta, específicamente:

i) Analizar la secuencia didáctica del tema sólidos de revolución, revisando los prerrequisitos necesarios en el alumno para poder desarrollar el tema, proponiendo y/o reforzando actividades, sugiriendo materiales y recursos didácticos, es decir, aportando en general mejoras a la misma.

ii) Predecir el comportamiento matemático de los estudiantes ante dicha secuencia: Comentando si podrán realizar determinadas gráficas de ecuaciones o funciones, o si conocerán o no la diferencia entre estos dos conceptos.

iii) Interpretar lo que sucede en el aula una vez implementada, esto es, realizando el análisis de videos de la implementación, mencionando críticas constructivas (a favor o en contra) a la actividad de la profesora que la implementa así como el comportamiento de los alumnos ante las predicciones que ellos emitieron inicialmente, identificando si los alumnos reconocen qué tipo de gráfica son con sólo analizar la ecuación o función, o tienen clara la definición de integral como un límite de la suma de áreas, e el cómo realizan la aplicación de la integral definida al cálculo de volúmenes.

iv) Discutir aspectos de mejora a raíz de lo ocurrido en ésta: Proponiendo algunas actividades específicas e incluso comentando las experiencias personales que les ha dejado el desarrollo del presente proyecto de investigación.

Dichos profesores son destacados y con una amplia experiencia, y deseamos identificar oportunidades de desarrollo de conocimiento derivadas del trabajo realizado en las actividades diseñadas para este propósito mencionadas anteriormente.

Para enfrentar esta tarea, no evaluamos si carecen o no de algún conocimiento en el área de Cálculo o de didáctica de las matemáticas, sino que, a partir de lo que hacen y saben, analizamos lo potencialmente desarrollable.

Ante lo expuesto anteriormente surge la siguiente pregunta de investigación*:*

¿Qué conocimientos evidencian los profesores de cálculo al realizar las actividades propias de su labor docente?

¿De qué manera se pueden aprovechar éstos para detectar oportunidades formativas?

De esta manera, nos planteamos el siguiente objetivo:

Identificar cuáles son las oportunidades de formativas evidenciadas al discutir diversas actividades docentes con un grupo de profesores de Cálculo.

Para llegar a detectar estas oportunidades de desarrollo nos apoyamos en el modelo denominado *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* (MTSK, Carrillo, et al., en prensa), ya que considera un sistema de subdominios y categorías, tanto para el conocimiento matemático del profesor, como para su conocimiento didáctico del contenido, lo cual permite tener análisis finos sobre el conocimiento del profesor y así detectar dichas oportunidades de desarrollo.

Cabe mencionar que el potencial de este estudio radica precisamente en identificar, desde un punto de vista empírico, los conocimientos propicios para ser desarrollados, esto nos daría pauta para que en términos del modelo MTSK podamos diseñar programas de actualización docente, focalizados precisamente en las áreas evidenciadas. Pero también se busca aportar resultados que fortalezcan las nociones teóricas y metodológicas sobre el paso del estudio del conocimiento del profesor a la generación de propuestas de desarrollo de conocimiento, sin que esto suponga que en esta tesis se desarrollan dichas propuestas, sino más bien se construye el puente entre estos dos campos.

La teoría que enmarca nuestra investigación la presentamos en el capítulo 1, iniciando con los primeros aportes que realiza Shulman (1986) sobre el conocimiento esperado en los profesores de un área determinada, específicamente el Conocimiento del contenido para la enseñanza (CCE), (no necesariamente matemáticas), para después presentar un acercamiento a los trabajos de Ball, Thames y Phelps (2008), quienes realizan un refinamiento del CCE y proponen el Conocimiento matemático para la enseñanza (CME) del que se desprende en particular el Conocimiento didáctico del contenido (CDC). En seguida exponemos el modelo MTSK señalando puntualmente los dos grandes dominios que la componen así como los subdominios de cada uno, y así, arribamos a la categorización que realizan de manera detallada los autores y que acuñamos como instrumento para detectar las oportunidades de desarrollo de conocimiento en nuestro estudio. Finalmente en este mismo capítulo realizamos un pequeño glosario de términos que utilizaremos a lo largo de la investigación.

Explicamos la metodología utilizada en la presente investigación en el Capítulo 2, cuenta con una descripción de los informantes, aquella que consideramos es importante para los fines prácticos de nuestro estudio, así mismo detallamos el diseño de la investigación en general, desde cómo está estructurada hasta los tiempos de acción de cada una de las actividades. También justificamos la metodología utilizada en el diseño de la secuencia didáctica para el tema de sólidos de revolución con el enfoque socioformativo propuesto por Tobón, Prieto y Fraile (2010). Explicamos al final de este capítulo la manera en que se realiza la recolección de datos considerando las producciones que los profesores realizan a lo largo de las actividades diseñadas para este proyecto, así como la técnica que nos permiten detectar las oportunidades de desarrollo de conocimientos.

El relato en el Capítulo 3 nos detalla la manera en que se realiza el análisis de los datos recolectados con base en las producciones de los profesores, es decir, la detección de producciones clave y la clasificación de estas.

Las conclusiones son explicadas en el capítulo 4, y al final de este documento se anexan materiales que consideramos importantes considerar para entender mejor la investigación.

Capítulo 1

MARCO TEÓRICO

1.1. Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK)

1.1.1. Antecedentes al MTSK

Cuando Shulman (1986) se da a la tarea de investigar cuáles eran los conocimientos necesarios en pedagogía y contenido o tema a enseñar para ser un profesor se remonta a unos exámenes que realizaban los aspirantes por el año de 1875, observa que entre el noventa y el noventa y cinco por ciento de la prueba se basaba en contenidos, es decir, en el tema a enseñar, y sólo el cinco o diez por ciento sobre teoría y práctica de la enseñanza. La balanza se inclinaba a contenidos. Aunque el conocimiento de las teorías y métodos de enseñanza eran importantes, jugaba un papel decididamente secundario en las evaluaciones de un maestro.

En la década de los 80 del siglo pasado, cambió la percepción sobre lo que debían saber los profesores. Ahora se realizaban pruebas de habilidades básicas para leer, escribir, deletrear, calcular y resolver problemas aritméticos. La balanza se inclinaba más por las formas en que se enseñaba. De hecho, los responsables de políticas educativas consultaban literatura sobre investigación docente y estaba repleta de referencias directas a la instrucción, el tiempo dedicado a la tarea, el tiempo de espera y otros aspectos similares. Pero encontraban poca o ninguna referencia al contenido disciplinar. Del mismo modo, incluso en la comunidad de investigación, la importancia del contenido se había olvidado, aquellos que estudiaron la cognición de los docentes, investigaron la planificación de los docentes o la toma de decisiones interactivas con poca preocupación por la organización del conocimiento del contenido en la mente de los docentes Shulman (1986).

Ya sea en el espíritu de la década de 1870, cuando la pedagogía fue esencialmente ignorada, o en la década de 1980, cuando el contenido brilla por su ausencia, Shulman se preguntaba, ¿ha habido siempre una división entre los dos? ¿Cuáles son los dominios y categorías del ***Conocimiento del Contenido para la Enseñanza*** (CCE) en las mentes de los profesores? ¿Cómo se relacionan, por ejemplo, el conocimiento del contenido y el conocimiento pedagógico general? ¿En qué formas están los dominios y categorías de conocimiento representados en la mente de los profesores? ¿Cuáles son las formas prometedoras de mejorar la adquisición y el desarrollo de dicho conocimiento? Ante estas interrogantes Shulman (1986) propone tres categorías para el conocimiento del contenido:

i) Conocimiento del Contenido de la materia (CCM), que como su nombre lo indica se refiere al conocimiento de la materia en sí misma, su estructura y organización disciplinar.

ii) Conocimiento Didáctico del Contenido (CDC), que va más allá del conocimiento de la materia en sí misma hasta la dimensión del conocimiento de la materia para la enseñanza, se incluyen las formas más útiles de representación de las ideas centrales de una materia, las analogías más potentes, ilustraciones, ejemplos, explicaciones y demostraciones, es decir las formas de representar y formular el tema que lo hace comprensible para los demás, eso que hace que el aprendizaje de temas específicos sea fácil o difícil: las concepciones y preconceptos que los estudiantes de diferentes edades y procedencias traen consigo al aprendizaje de los temas y lecciones.

iii) Conocimiento Curricular (CC) se refiere al conocimiento del plan de estudios que está representado por la gama completa de programas diseñados para la enseñanza de materias y temas particulares en un nivel dado, la variedad de materiales de instrucción disponibles en relación con esos programas y el conjunto de características que sirven como indicaciones y contraindicaciones para el uso de un material del programa en particular en circunstancias específicas. Este conocimiento curricular se refiere a la capacidad del maestro de relacionar el contenido de un curso o lección dado con temas que se discuten simultáneamente en otras clases así como a la familiaridad con los temas y problemas que han sido y serán enseñados en la misma materia durante los años anteriores y posteriores en la escuela, y los materiales que los incorporan.

De esta forma, un análisis conceptual del conocimiento para los profesores se basaba necesariamente en un marco para clasificar tanto los dominios y categorías del conocimiento docente, por un lado, como las formas de representar ese conocimiento por el otro, tomando en cuenta lo aprendido en cursos anteriores y preparar al estudiante para los posteriores.

Posteriormente, en Shulman (1987) se agregan más dominios al CCE, entre ellos el Conocimiento sobre los alumnos y el Conocimiento de los fines y valores educativos. Sin embargo, cabe mencionar que es una propuesta en general, no específicamente para el área de matemáticas.

Por otro lado Ball (1988) escribió que los futuros maestros no llegan a educación formal de docentes *con la cabeza vacía*, sino que traen consigo una gran cantidad de ideas y formas de pensar y sentir relacionado con las matemáticas y la enseñanza de las matemáticas, extraídas en gran medida de sus experiencias de escolarización, y se pregunta ¿dónde se encuentra la formación docente con los futuros profesores?, ¿qué significa saber matemáticas para enseñar? Los futuros profesores de matemáticas traen muchas ideas con ellos, pero ¿cuál de estas parece importante explorar en relación con el aprendizaje de la enseñanza de las matemáticas?

Surge después un grupo de investigadores en la universidad de Michigan en torno al proyecto Learning Mathematics for Teaching (LMT) quienes, basándose en el trabajo de Shulman (1986), realizan una refinación del CCE, proponiendo un modelo del conocimiento que debe tener un profesor para enseñar Matemáticas como se muestra en la Figura 1.1.

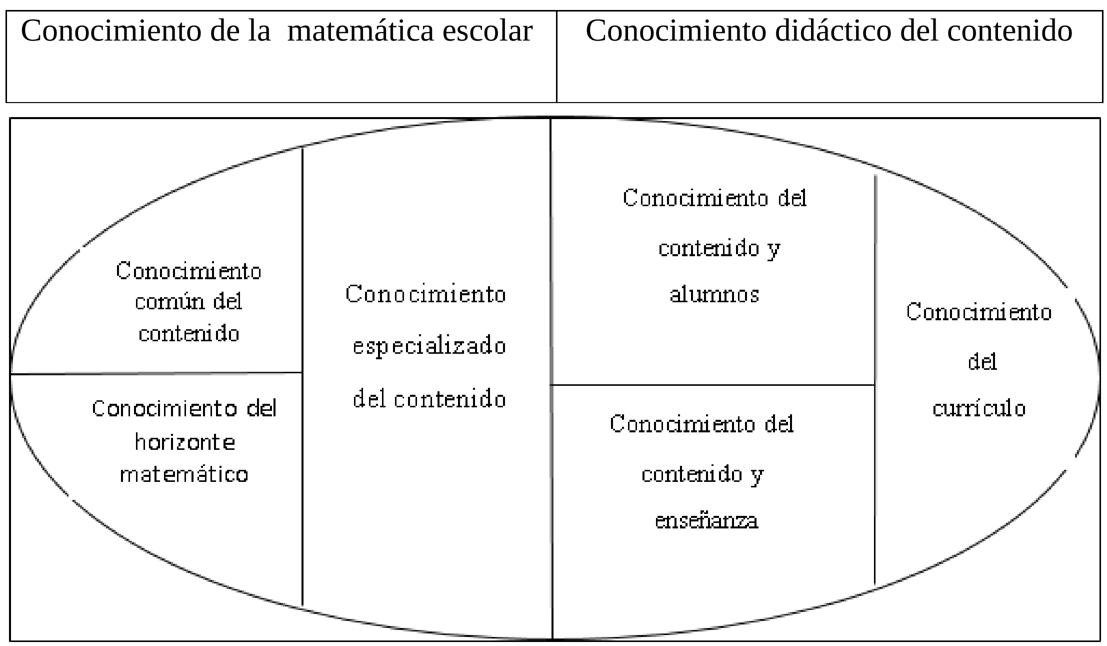


Figura. 1.1 Conocimiento matemático para la enseñanza (CME, Ball, Thames y Phelps, 2008).

Este grupo propone que el ***Conocimiento Matemático para la Enseñanza*** debe comprender dos grandes dominios, por un lado el Conocimiento de la matemática escolar (CME) y por el otro el Conocimiento Didáctico del Contenido (CDC).

El CME está constituido por tres subdominios:

i) El Conocimiento Común del contenido (CCC) se refiere al conocimiento disciplinar del área de matemáticas exclusivamente, el dominio de los contenidos matemáticos que se deben enseñar. Los maestros necesitan saber el material que ellos enseñan; deben reconocer cuando sus estudiantes dan respuestas incorrectas o cuando el libro de texto da una definición inexacta, deben usar términos y notación correcta cuando escriben en la pizarrón, deben poder hacer el trabajo que asignan a sus estudiantes. Pero algo de esto requiere conocimiento y habilidad matemática que otros también tienen, por lo tanto, no es especial para el trabajo de enseñanza. El término común no significa que todo mundo tenga este conocimiento, significa que no es exclusivo de la enseñanza.

ii) El Conocimiento del Horizonte Matemático (CHM), que aunque es disciplinar va más allá, se refiere a aquellos conocimientos de matemáticas adicionales que un profesor debe saber para comprender la estructura en donde está inserto lo que va a enseñar y pueda tener ideas que aclaren su sentido.

iii) El Conocimiento Especializado del Contenido (CEC) es el conocimiento disciplinar especializado en las necesidades de la enseñanza. Por ejemplo, disponer de variedad de representaciones de las ideas matemáticas que se han de enseñar, de definiciones precisas y correctas, de explicaciones matemáticas acerca de por qué los algoritmos usuales funcionan, de comprender procedimientos originales o poco usuales, es aquél que típicamente no se necesita para otros propósitos que no sean la enseñanza, como cuando los profesores tienen que hacer un tipo de trabajo matemático que otros no hacen.

El Conocimiento Didáctico del Contenido (CDC) también se compone de tres subdominios:

iv) Conocimiento del contenido y los alumnos (CCA) es un conocimiento que combina saberes sobre estudiantes y sobre las matemáticas. Se refiere a la forma en que los alumnos aprenden ciertos temas, sus confusiones, sus errores más frecuentes, las respuestas que tienen a tareas comunes, las representaciones que les resultan más naturales ante determinados temas o cómo proceden frente a tareas comunes, la familiaridad con errores comunes y decidir cuál de varios errores los estudiantes son más propensos a hacer son ejemplos de CCA.

v) El Conocimiento del Contenido y la enseñanza (CCE) se refiere a las teorías educativas en las que se puede apoyar el profesor para la enseñanza de contenidos específicos.

vi) Por último, el Conocimiento Curricular (CC) muy parecido a lo que comentaba Shulman (1986), se refiere a toda la estructura de contenidos de la matemáticas escolar, sus relaciones antes y después de alguna materia en cuestión en un nivel en particular.

Si observamos esta categorización del CME podemos darnos cuenta de que es efectivamente un refinamiento del CCE de Shulman pero centrado específicamente en el área de matemáticas. Los subdominios CCA y CCE coinciden con el CDC identificado por Shulman, que lo refería como "las concepciones e ideas preconcebidas que los estudiantes de diferentes edades y procedencias traen consigo al aprendizaje de los temas y lecciones más frecuentemente enseñados, así como las formas de representar y formular el tema que lo hace comprensible a otros" (Shulman, 1986, p. 9).

1.1.2. Estructura del MTSK

Carrillo et al. (2018) consideran que para que un profesor de matemáticas realice las actividades propias de su función como son planear una clase, implementarla en el aula, reflexionar lo que sucede en ella, replantear sus planeaciones y evaluar la misma, debe contar con conocimientos específicos como son definiciones, propiedades y resultados de temas específicos, las mejores formas para una mayor comprensión de ellos en el aula, el cómo se conectan estos conocimientos con otros, con otras materias y con otros niveles, entre otros conocimientos. Así, proponen un modelo centrado exclusivamente en el conocimiento específico del profesor de matemáticas, dejando fuera áreas de conocimiento profesional en común con profesores de otras especialidades o con usuarios de las matemáticas distintos a la educación. Así, este grupo presenta el modelo *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* (MTSK, Figura 1.2), Cabe señalar que este modelo estudia el conocimiento y no el desarrollo del mismo, analiza, interpreta y categoriza el conocimiento que el profesor evidencia en su quehacer docente. Es decir, el MTSK es un modelo interpretativo y descriptivo, mas no prescriptivo. A continuación, describimos cada uno de sus dominios y subdominios.

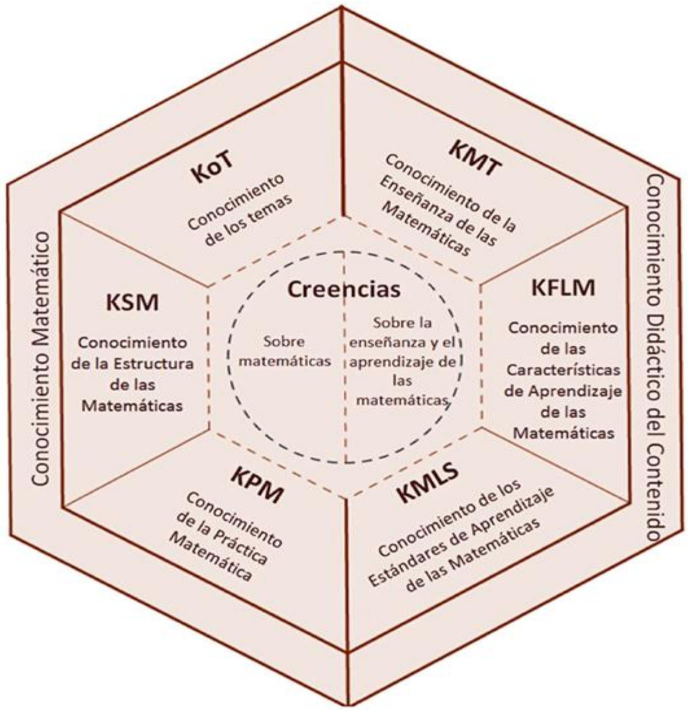


Figura 1.2. Conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK)

El MTSK está constituido por tres dominios: el dominio de conocimiento matemático, *Mathematical Knowledge* (MK), el dominio del conocimiento didáctico del contenido, *Pedagogical Content Knowledge* (PCK), y el dominio de las creencias que tiene el profesor sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje.

1.1.2.1. Mathematical Knowledge (MK)

El MK describe el conocimiento que posee un profesor de matemáticas en términos de una disciplina científica dentro de un contexto educativo, con base en la idea del conocimiento de la materia de Shulman (1986) y considerando las características de las matemáticas como una disciplina, tomando en cuenta la diferencia de la matemática por sí misma y la matemática escolar, la que se debe enseñar. MK tiene en su haber los siguientes subdominios:

i) Conocimiento de los temas, *Knowledge of Topics* (KoT). Se refiere exclusivamente a los temas del área de matemáticas. Para la labor de la enseñanza, el KoT implica un profundo conocimiento de los temas matemáticos, que reúne el conocimiento de procedimientos, definiciones y propiedades, representaciones y modelos, así como contextos, problemas y significados, y en esta medida, reconoce la complejidad de los objetos matemáticos que pueden surgir en el aula. Considera también la conexión con elementos del mismo tema (conexiones intraconceptuales) y las diferentes maneras de representar estos contenidos.

ii) Conocimiento de la estructura de las matemáticas, *Knowledge of the Structure of Mathematics* (KSM), describe el conocimiento del maestro sobre las conexiones entre elementos matemáticos, se refiere al conocimiento sobre las conexiones ya sean temporales o interconceptuales. Las primeras que responden a preguntas de secuenciación (no curriculares, sino relacionadas con las matemáticas), producen conexiones asociadas con un aumento de la complejidad o con la simplificación, y las segundas que delimitan objetos matemáticos, que producen conexiones interconceptuales.

iii) Conocimiento de la práctica matemática, *Knowledge of Practices in Mathematics* (KPM). El conocimiento del profesor de matemáticas en este subdominio incluye conocimientos sobre cómo demostrar, justificar, definir, hacer deducciones e inducciones, dar ejemplos y comprender el papel de los contraejemplos. Se refiere a cualquier actividad matemática llevada a cabo sistemáticamente, que representa un pilar de la creación matemática y que se ajusta a una base lógica a partir de la cual se pueden extraer las reglas. También incluye una comprensión de la lógica que sustenta cada una de estas prácticas.

1.1.2.2. Pedagogical Content Knowledge (PCK)

El PCK alude al conocimiento específico del maestro para la enseñanza de matemáticas. Se le considera básico para la práctica en el aula y toma en cuenta los procesos de enseñanza y aprendizaje de la disciplina. Tiene para su consideración los siguientes subdominios:

iv) Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas, *Knowledge of Mathematics Teaching* (KMT). Este conocimiento generalmente se basa en teorías extraídas de la literatura de investigación en educación matemática, o en la experiencia personal de los docentes y la reflexión sobre su práctica, el subdominio se refiere a los conocimientos teóricos específicos de la enseñanza de las matemáticas, ya sea personales o institucionales. También se incluye el conocimiento de recursos y material didáctico como libros de texto, material didáctico, recursos tecnológicos, pizarras interactivas, y más. El conocimiento va más allá de la mera toma de conciencia de estos recursos y cómo se utilizan, para abarcar la evaluación crítica de cómo pueden mejorar la enseñanza de un elemento en particular, y las limitaciones involucradas.

v) Conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas, *Knowledge of Features of Learning Mathematics* (KFLM). Abarca el conocimiento asociado con características que van de la mano con el aprendizaje de las matemáticas, centrándose en el contenido matemático como objeto de aprendizaje más que en el alumno. Las principales fuentes de conocimiento de los docentes dentro de este subdominio tienden a ser su propia experiencia acumulada a lo largo del tiempo junto con los resultados de la investigación en Educación Matemática. Toma en cuenta la necesidad de que el maestro conozca el cómo los estudiantes piensan y construyen conocimiento al abordar actividades y tareas matemáticas, comprender el proceso que deben seguir los alumnos para comprender diferentes elementos de contenido y las características peculiares de cada elemento que pueden ofrecer ventajas de aprendizaje o, a la inversa, presentar dificultades. El subdominio tiene en cuenta el conocimiento del profesor sobre la manera de razonar y proceder de los alumnos en matemáticas (en particular, sus errores, áreas de dificultad y conceptos erróneos), lo que informa su interpretación de su resultado.

vi) Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas, *Knowledge of Mathematics Learning Standards* (KMLS). Refiere la importancia de que el maestro conozca las especificaciones del currículo en un nivel particular. Sin embargo, no vemos ninguna razón para limitar este conocimiento al plan de estudios. Es un área de conocimiento que permite al docente ser crítico y reflexivo al considerar qué debe aprender el alumno y qué enfoque debe tomarse, en un nivel particular o en un período de desarrollo.

1.1.2.3. Dominio de las creencias

El MTSK considera que todos los conocimientos del profesor de matemáticas están permeados por un conjunto de creencias que el profesor tiene sobre la matemática misma y la enseñanza aprendizaje de esta, misma que el profesor ha adquirido a lo largo de su formación escolar o personal y que definen la organización y el uso del conocimiento.

Aunque para el análisis de dichas creencias existen herramientas (e.g. Carrillo, 1993), en esta tesis no analizaremos dichas creencias ya que nuestro objetivo no lo requiere (no pretendemos comprender a cada profesor de manera individual sino cómo sus aportes en discusión grupal nos permiten identificar oportunidades formativas.

Para fines analíticos, el MTSK, además de dividir al conocimiento del profesor en dominios y subdominios, también emplea la noción de categoría internas a los subdominios, las cuales se incluyen en la Figura 2.3.

	Subdominios	**Categorías asociadas al subdominio** *Conocimiento sobre:*	
Conocimiento matemático	**Conocimiento de los tópicos KoT**	Procedimientos	*¿Cómo se hace?*
			¿Cuándo puede hacerse?
			¿Por qué se hace así?
			Características del resultado
		Definiciones[1], propiedades y sus fundamentos[2]	
		Registros de representación	
		Fenomenología y aplicaciones	
	Conocimiento de la estructura de las matemáticas KSM[3]	Conexiones de complejización	
		Conexiones de simplificación	
		Conexiones transversales	
		Conexiones auxiliares	
	Conocimiento de la práctica matemática KPM[4]	*Jerarquización y planificación como forma de proceder en la resolución de problemas matemáticos*	
		Formas de validación y demostración	
		Papel de los símbolos y uso del lenguaje formal	
		Procesos asociados a la resolución de problemas como forma de producir matemáticas	
		Prácticas particulares del quehacer matemático (por ejemplo, modelación)	
		Condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones	
Conocimiento Didáctico del Contenido	**Conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas KFLM**	Teorías de aprendizaje[5]	
		Fortalezas y dificultades	
		Formas de interacción con un contenido matemático	
		Intereses y expectativas	
	Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas KMT	Teorías de enseñanza[6]	
		Recursos materiales y virtuales	
		Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos	
	Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas KMLS	Expectativas de aprendizaje	
		Nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado	
		Secuenciación con temas anteriores y posteriores	

Figura 1.3. Dominios, subdominios y categorías en el MTSK (Liñán, 2017)

1.2. Glosario de términos

i) Evidencia de conocimiento: Entendida desde la perspectiva de Escudero-Ávila, Gomes, Muñoz-Catalán, Flores-Medrano, Flores, Rojas, y Aguilar (2016) como aquellos elementos que permiten afirmar que un profesor posee, o no, un determinado conocimiento.

ii) Indicio de conocimiento: Que son sospechas (propiciadas por alguna declaración o acción del profesor) de la existencia o inexistencia de un determinado conocimiento, son también una aceptación de que se requiere más información para convertirse en evidencias.

iii) Las oportunidades de investigación son de naturaleza diferente a las evidencias e indicios, ya que estas son momentos o situaciones suscitadas por el profesor o por la dinámica de clase, que sirven para explorar conocimiento de algún subdominio, aunque este no se relacione con el subdominio con el cual se identifica la declaración suscitada.

iv) Oportunidad de conocimiento: Aquellos momentos o circunstancias que surgen en el aula a través de los diferentes agentes y que permiten, como investigadores, reflexionar sobre el conocimiento especializado que evocan (Liñán, Barrera, Muñoz-Catalán y Contreras, 2017).

Capítulo 2

MÉTODO

2.1. Diseño de la investigación

Monteiro y Muñoz Catalán (2016) señalan que todo paradigma tiende a explicar de manera particular la realidad, con una perspectiva ontológica, epistemológica y metodológica. Santos (2002) menciona que para explicar la realidad nos podemos situar en dos extremos, por un lado el ontológico realista, que considera que existe una verdad objetiva, externa e independiente del hombre, y por el otro, el ontológico relativista, que considera la existencia de múltiples realidades situadas resultantes de la construcción humana, por lo tanto los resultados obtenidos por un investigador situado en este posicionamiento son una construcción personal que resulta de su interpretación a través de la cual reconstruye los significados puestos en juego durante la interacción con el fenómeno de estudio.

Carrillo y Muñoz-Catalán (2011) manifiestan que los investigadores que utilizan métodos cualitativos asumen por un lado la existencia de múltiples realidades resultado de la construcción humana, y por otro que el conocimiento supone la interpretación de los significados construidos en la interacción.

De acuerdo con los elementos teóricos anteriores asumimos nuestra investigación de índole cualitativa dentro de un paradigma interpretativo, ya que nos centramos en analizar, comprender e interpretar las manifestaciones que los diferentes informantes tienen con las participaciones, discusiones, o situaciones generadas en reuniones de trabajo diseñadas para ello y lo hacemos a partir del análisis de las cualidades de sus producciones en los diferentes registros en que fueron recogidas.

2.2 Fases de la investigación

Después de integrar un grupo organizador de este proyecto con tres alumnos de la maestría en educación matemática, la autora de esta tesis entre ellos; dos estudiantes de la licenciatura en matemáticas con interés en la educación, y una Profesora investigadora de la Maestría en Educación Matemática, liderados por el director del proyecto, Doctor en Educación Matemática y Docente Investigador de la facultad, se procede a la fase de inicio.

La primera fase de la investigación consistió en el diseño de una secuencia didáctica del tema de Solidos de revolución de la materia de cálculo integral, que se imparte en el quinto semestre de bachillerato, el diseño estuvo a cargo de este grupo organizador que trabajó con el enfoque basado en competencias como la propuesta de Tobón, Prieto y Fraile (2010) para estar en sintonía con los planes y programas de estudio vigentes hasta ahora en los bachilleratos generales estatales, que es donde se implementó. La secuencia se ciñó al conjunto de competencias genéricas y disciplinares que el mismo programa de cálculo integral marca, así mismo la implementación se llevó a cabo en el tiempo que de manera natural el curso indicaba, es decir, cuando ya se tenían los preliminares cubiertos, los temas que anteceden al trabajado. Para su consulta revisar el Anexo A.

La segunda fase consta del diseño del escenario[1] para la obtención de información. Dicho escenario consistió en el trabajo grupal entre pares para la discusión y análisis de la secuencia didáctica para el tema de cálculo de volumen de sólidos de revolución. Se proyectaron sesiones de trabajo con profesores de distintos bachilleratos (informantes). La dinámica de las sesiones consistió en el planteamiento de diversas actividades de manera que, al ser abordadas por los profesores, estos evidenciarán conocimientos o indicios de estos, los cuales pudiéramos sistematizar y encontrar oportunidades de desarrollo profesional. Las reuniones tuvieron una periodicidad mensual entre septiembre de 2017 y mayo de 2018 y su diseño fue el siguiente:

Primera sesión: Se les presenta a los informantes el proyecto así como a los participantes organizadores de éste, se les proporciona la secuencia didáctica desarrollada mencionada anteriormente, con la indicación de leerla y pensar en posibles mejoras, en las necesidades académicas de los estudiantes para emprender el tema así como las posibles situaciones de la implementación en el aula. Los profesores se presentan también y manifiestan que están colaborando por gusto así como su formación y experiencia docente, aceptan la secuencia y están de acuerdo con la lectura y en pensar propuestas de mejora.

Segunda sesión: Se les solicita a los profesores que mencionen cuáles son los prerrequisitos en los alumnos para emprender el tema de sólidos de revolución y que, dada su experiencia, comenten cuáles son los temas en los que generalmente tienen que hacer énfasis para un mejor desarrollo de

[1]Entendemos escenario en los términos de Flores, Escudero y Aguilar (2013), en el cual se describen diferentes situaciones en las cuales el profesor está realizando su práctica profesional.

la clase, quizás porque a los alumnos se les dificulte algo en particular o generalmente presente algún tipo de problemática.

Tercera sesión: Los profesores tienen que identificar el objetivo de cada una de las actividades y mencionar si éstas logran o no potenciar el desarrollo del aprendizaje esperado así como las posibles causas del por qué no sería posible, también se les pidió que mencionaran actividades o recursos que piensan que podrían mejorar la secuencia.

Cuarta sesión: Los profesores participantes predicen cuál será el posible comportamiento matemático de los estudiantes ante la tarea de graficar algunas ecuaciones que se les proporcionan, para ello se implementó una actividad que consistía en asumir roles de alumnos (alto, medio y bajo desempeño) para la realización de las gráficas. Esta actividad es parte de la secuencia didáctica y más tarde se implementaría con los alumnos. A través de su comportamiento en el desarrollo de ella los profesores asumieron los roles de los alumnos que se les asignó de manera aleatoria y realizaron predicciones al respecto.

El objetivo principal de las cuatro primeras sesiones fue que los profesores expusieran sus predicciones acerca del comportamiento matemático de los estudiantes frente a la secuencia diseñada, además de que propusieran mejoras a la secuencia.

Una vez concluidas esas cuatro sesiones se implementa la secuencia en un grupo de un bachillerato y se videograban todas las clases durante el tiempo que esta dura, a saber seis sesiones de una hora. En seguida se seleccionan extractos de los videos de la implementación con el fin de editar el material y presentarlo a los profesores para contrastar si se cumplieron o no las predicciones emitidas por ellos. El material se selecciona de forma tal que refleje los momentos en que los alumnos realizan las actividades de las cuales los profesores hicieron las predicciones ya mencionadas.

Quinta a séptima sesión: Aquí inician el análisis del video de la implementación de la secuencia en el aula con los momentos que elegimos oportunamente, los profesores reflexionan sobre si se cumplen o no sus predicciones sobre los estudiantes, sobre la dinámica que se genera en el aula y el actuar de la profesora que implementa la secuencia, es decir, se comentaron los atinos y desatinos de la puesta en escena, se comentó qué papel tuvo el actuar del profesor en el éxito de las predicciones, qué cambios efectuarían en el actuar del profesor para mejorar la clase y se propusieron algunas mejoras a la secuencia.

Octava sesión: Se realiza una reflexión de manera general en todo lo que ha sido el desarrollo de la actividad, sus alcances y limitaciones, contrastándolas con sus respectivos entornos laborales y sus tipos específicos de estudiantes. Asimismo, mencionan qué es lo más significativo que les ha dejado este conjunto de actividades realizadas a lo largo del proyecto.

2.3. Sobre los informantes

Esta investigación es un estudio de caso múltiple donde los informantes son profesores que imparten clases de Cálculo en el Nivel Medio Superior.

Monteiro y Muñoz Catalán (2016) mencionan que desde la didáctica de las Matemáticas, los métodos son las técnicas utilizadas para la recolección y el análisis de datos y suponen un enfoque específico y particular, por su parte Yin (1993) menciona que una de las componentes en el diseño de una investigación es la unidad de análisis (o caso), en varias investigaciones una persona individual es el caso a ser estudiado, y el individuo es la unidad primaria de análisis, también encontramos el estudio de caso múltiple, donde se usan varios casos a la vez para estudiar y describir una realidad.

El grupo de *informantes* quedó conformado de la siguiente manera:

i) Grace es Licenciada en Arquitectura, cuenta con una Maestría en dirección de organizaciones educativas, un diplomado en inglés y el diplomado del Programa de Formación Docente en el Nivel Medio Superior. Su experiencia docente en el nivel medio superior es desde el año 1999 impartiendo materias como son álgebra, geometría y trigonometría, geometría analítica, cálculo diferencial, estadística, razonamiento matemático, modelos matemáticos y cálculo integral.

ii) Mary tiene una licenciatura en Física, con Maestría en Ciencias en física, experiencia docente en nivel medio superior y superior, ha impartido materias tanto del área de física como son física, mecánica y dinámica; y del área de matemáticas como en el caso de Grace, además de cálculo vectorial, ecuaciones diferenciales, análisis numérico, probabilidad y estadística, álgebra lineal y cálculo de varias variables en las instituciones de nivel superior en donde también labora.

iii) Bryam es ingeniero de formación con experiencia en bachillerato y las materias similares a Grace.

iv) George es ingeniero industrial de formación con maestría en educación superior, varios diplomados en educación incluyendo el del Programa de Formación Docente en el Nivel Medio Superior, al igual que Grace. tiene misma experiencia laboral en el nivel medio superior con 8 años de servicio, aunado a que cuenta con experiencia docente en el nivel superior también, en particular impartiendo los cursos de cálculo diferencial e integral, ecuaciones diferenciales y álgebra lineal en una universidad politécnica, es especialista en el manejo de software educativo.

v) Víctor tiene una licenciatura trunca en electrónica, y está por concluir una licenciatura en matemáticas enfocada a la educación, su experiencia docente en nivel medio superior es semejante a la de Grace y también tiene experiencia en secundaria y en escuela normal superior. Ha participado en el grupo que lideraba las tres últimas revisiones y actualizaciones de los planes y programas de estudio del nivel medio en el estado, incluyendo la del 2006 en la que se trabajó con el enfoque de desarrollo de competencias, culminando con la publicación de libros de texto de las materias mencionadas anteriormente en el caso de Grace. Miembro activo del grupo de entrenadores de alumnos que participan en las olimpiadas estatales de matemáticas. También ha participado en la actualización docente del estado impartiendo distintos cursos.

Este grupo de expertos profesores, a lo largo de las sesiones de trabajo, pusieron de manifiesto el conocimiento que tienen del tema de sólidos de revolución y de didáctica, del manejo de los recursos y materiales didácticos, es decir, a través de sus participaciones y discusiones en la actividades planeadas generaron una dinámica en las sesiones de trabajo en las cuales *lograron promover la explicitación de los conocimientos especializados que tienen como profesores de matemáticas, específicamente en el área de cálculo en el tema de sólidos de revolución.*

2.4. Recolección de datos

Para la recolección de datos se procedió a tomar videograbaciones de todas las sesiones de trabajo que se realizaron con los profesores de bachillerato, se colocó una cámara fija y hubo otra circulando para que grabara todas las discusiones generadas, los momentos en que hicieron sus predicciones y cuando hicieron producciones escritas, todo quedó plasmado en los videos.

También se grabaron de la misma manera todas las sesiones durante la implementación de la secuencia didáctica en el aula del bachillerato, con cámaras fijas y circulando para que plasmaran el quehacer docente a cargo de la profesora que implementó la secuencia y el comportamiento de los alumnos al momento de realizar las actividades que ella les indicaba.

Al mismo tiempo del desarrollo de las sesiones se tomó un registro de notas sobre lo que, dada nuestra sensibilidad teórica, considerábamos más relevante en términos de convertirse en oportunidades de desarrollo de conocimiento formativo. Esto recordando las palabras escritas por Strauss, Corbin y Zimmerman, (2002, p.228) "Cuando un analista encuentra algo nuevo o diferente, debe hacer un alto y formularse las siguientes preguntas: ¿Qué es esto? ¿Qué puede significar? Así, se desarrolla una sensibilidad teórica que emerge y está ligada con el muestreo teórico durante la codificación abierta".

2.5. Análisis de los datos

En esta investigación utilizamos la visión potencial según Liñán (2017, p.17) para detectar el conocimiento que se moviliza en las distintas dinámicas al interior de las sesiones de trabajo, pero nuestra labor va más allá, nosotros tratamos de detectar las posibles áreas de desarrollo de conocimiento formativo. Así, para el análisis de los datos nos apoyamos en la categorización que nos proporciona el modelo analítico MTSK para determinar qué conocimientos movilizan los profesores en sus participaciones, y de éstos, buscamos todas aquellas manifestaciones que quizás sean las posibles áreas de oportunidad de desarrollo de conocimiento formativo.

Primero, nos dimos a la tarea de observar los videos de las sesiones de trabajo con los profesores. Nos apoyamos en los registros de nota que hicimos durante las sesiones, con nuestra visión potencial y nuestra sensibilidad teórica detectamos manifestaciones que eran o muy diferentes del resto de profesores, o que se salían del comportamiento esperado por nosotros como investigadores.

El siguiente paso fue clasificar las manifestaciones anteriores de acuerdo a su tipo y el conocimiento central que las podía caracterizar. De esta forma surgía la propuesta de áreas de desarrollo de conocimiento. Es decir, después de detectar ciertos conocimientos o indicios que nos pueden llevar a ellas, las clasificamos por semejanza en los tópicos, por ejemplo, todas las que sean del conocimiento de los alumnos. A estas abstracciones por medio de las agrupaciones les denominamos áreas de oportunidad de desarrollo de conocimiento formativo.

El tercer paso fue analizar el grado de importancia de dichas oportunidades de desarrollo en función de los dominios, subdominios y categorías que tienen relación con el conocimiento central de las áreas de oportunidad. Esto constituye las oportunidades de desarrollo de conocimiento formativo que se han evidenciado en el grupo de profesores. El flujo del análisis se muestra en la figura 2.1.

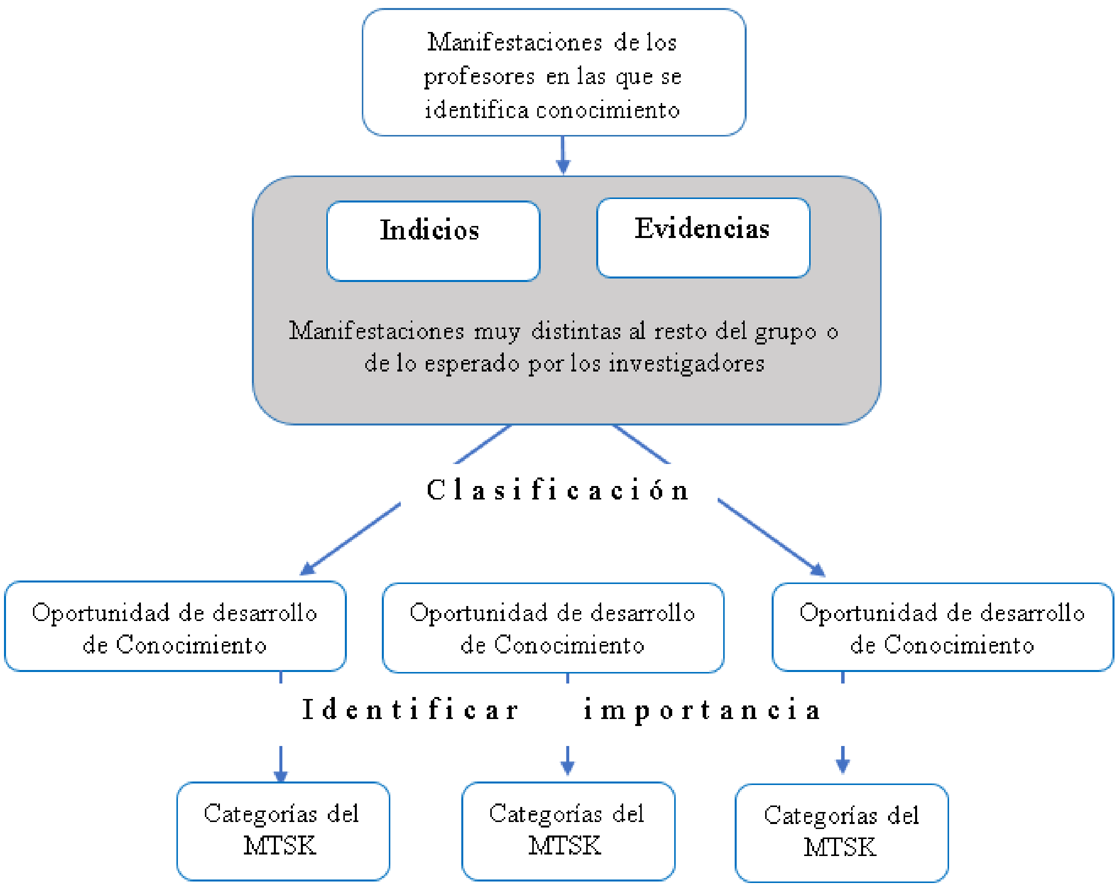


Fig. 2.1 Flujo de análisis de los datos recolectados

Capítulo 3

ANÁLISIS

3.1 Introducción

En esta sección detallamos el análisis de algunas manifestaciones que realizaron los profesores de bachillerato, lo realizamos conforme al flujo mostrado en la figura 3, analizamos algunos de los momentos que muestran evidencias o indicios de conocimientos, en seguida mostramos una clasificación, para posteriormente categorizarla con base en el modelo analítico MTSK.

Recordemos que la *evidencia,* como su nombre lo indica nos muestra de manera clara un conocimiento, sin lugar a dudas, es explícita; el *indicio* nos indica un posible conocimiento, no se tiene la seguridad de éste pero se intuye, el profesor tiene parte de la información de algún concepto. Posteriormente procedemos a una segunda abstracción que nos remita a identificar el subdominio y categoría donde se ubica la manifestación.

3.2 Comportamiento matemático esperado de los estudiantes

Presentamos algunas transcripciones de las manifestaciones de algunos profesores:

a) Situación que muestra una expectativa de conocimiento por arriba de lo habitual.

Contexto

Al grupo de profesores se les pide que realicen la gráfica de ciertas ecuaciones dadas, para después predecir cuál será el comportamiento de los alumnos ante dicha actividad. En un momento de la discusión en el grupo Maggie afirma, a diferencia de todos, que sus alumnos sí reconocerán $y = \sqrt{36 - x^2}$ como una circunferencia, pues la llevarán a la forma canónica $x^2 + y^2 = 36$ e inmediatamente identificarán que tiene centro en el origen y radio 6. Esto genera que haya discrepancia con el resto del grupo. Ante esta situación Ernest pregunta a todos lo siguiente:

Ernest	¿Los alumnos por iniciativa dicen "$y = \sqrt{36 - x^2}$ la identifico como una circunferencia"?
Mary	Si

George Yo no creo que sea así, mis alumnos de alto rendimiento ni siquiera llegarían a asociar esa [refiriéndose a la ecuación] con una circunferencia. Lo que harían sería graficar como lo hicieron ellas [señalando a Grace y Viry, quienes tabularon primero y enseguida graficaron, sin antes manifestar que se trataba de una circunferencia].

Grace Efectivamente, como dice George, mis alumnos, ni los de alto rendimiento, podrían identificar [a la función con una circunferencia], se les tiene que auxiliar para que vayan encontrando lo que son los conceptos matemáticos

Víctor No creo que se vayan por ese lado [decir cuál], el [hipotético alumno] de alto rendimiento a lo mejor se va por el protocolo de "es una [función] irracional, entonces veo el dominio, encuentro cortes [con los ejes] y ya", no haría esa parte de despejar para obtener una cónica. ¿El alumno inmediatamente se da cuenta que es una circunferencia? Si grafica la función, se iría por el protocolo de función.

En los comentarios hay tres posicionamientos. El primero lo dan Grace y George, ellos esperan que los alumnos no reconozcan la ecuación como la de una circunferencia, de hecho, dada su experiencia docente, esperan muy poco de ellos. El segundo posicionamiento viene de Maggie y Mary quienes afirman que sí, mencionan que por la naturaleza de la ecuación, la forma que tiene inicialmente, el alumno con pasos algebraicos la llevará a la forma canónica y la identificará. Sin embargo, el tercer posicionamiento se detecta en la participación de Víctor quien espera demasiado (conceptualmente hablando) de un alumno de alto desempeño. Cabe señalar que ningún otro profesor expresó que esa sería una forma esperada de actuar de un alumno de alto desempeño, y menos de bajo desempeño. El que Víctor refiera que el alumno seguirá un protocolo basado en determinar los elementos de una función, (dominio e intersección con los ejes) para obtener la gráfica de la misma, implica que el alumno de alto rendimiento conoce diversos elementos, por ejemplo:

i) Conoce el concepto de función y distingue distintos tipos de ellas.
ii) Conoce la diferencia de función y ecuación
iii) Sabe calcular el dominio y rango de ella

iv) Integra todos los elementos anteriores para graficarla

Cabe mencionar que estos aprendizajes sí están en el programa para bachillerato, que citan textualmente:

"Resultados de aprendizaje:

- *En el nivel Atender, el alumno Identificará los diferentes elementos de las funciones, clasificación y representación gráfica y simbólica.*
- *En el nivel Entender, el alumno Conceptualizará la función, clasificación, representación gráfica y simbólica, los diferentes tipos y operaciones con funciones.*

Para su evaluación, el alumno demuestra su apropiación de:

- *Definición de función desde el enfoque tradicional y el enfoque de la teoría de conjuntos, dominio, condominio, regla de correspondencia y grafica de una función."* SEMS-SEP-Puebla (2006).

Pero aunque sí lo marque el programa, la experiencia nos muestra que el alumno no logra llegar al nivel que menciona Víctor porque, una de las causas es que es el último tema del programa de geometría analítica y funciones y generalmente no alcanza el tiempo para trabajarlo.

Así, Víctor espera que los alumnos tengan ya un nivel muy alto en el reconocimiento del tema de funciones y generalmente un alumno promedio, e incluso uno de alto desempeño no logra desarrollar conceptos a ese nivel que el profesor espera.

Además, dada la experiencia de los profesores y la propia, sabemos que un alumno de alto rendimiento generalmente no grafica las funciones de esa manera. Eso es un comportamiento más esperado en alumnos de nivel superior en un curso de cálculo, pero no es un comportamiento generalmente esperado en alumnos de bachillerato, salvo que hayan tenido una formación distinta a lo establecido en planes y programas.

Ante esta declaración, Víctor está *evidenciando* que tiene muy claro el concepto de función, la *definición, propiedades y sus fundamentos, así como sus registros de representación*. Esto también nos está evidenciando una posible área de oportunidad de desarrollo de conocimiento formativo, pero no para Víctor, si no para sus pares, es decir, Víctor puede sociabilizar sus conocimientos con sus pares. Estos conocimientos forman parte del MK y en particular del KoT.

Por otro lado, el contenido de la declaración, su disparidad con lo que otros profesores expertos saben al respecto, nos revela un área de oportunidad de desarrollo de conocimiento formativo, en particular *el comportamiento matemático que se espera de los alumnos*. Ver Figura 3.1.

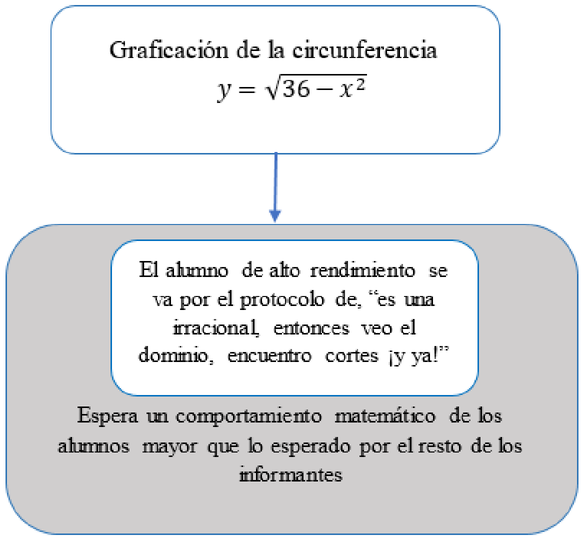


Figura 3.1 Conocimiento esperado por arriba de lo habitual

b) Situación que muestra una expectativa de conocimiento arriba de lo curricular.

Contexto

En esta ocasión los profesores refieren a que en casi todos los cursos de Geometría Analítica, el cual antecede a los cursos de Cálculo Integral, no les es suficiente el tiempo a los maestros y no terminan de ver los contenidos, por lo que en ocasiones los alumnos llegan a un curso de cálculo integral con muchas deficiencias en este tema, los profesores hacen comentarios como los que a continuación se presentan:

George — Hay alumnos que viene de cursos donde, en Geometría Analítica, no llegaron a cónicas, se quedan en formas de la línea recta, así de cierto.

Ernest ¿Tienen la misma experiencia los demás?, me refiero a quienes han dado clase en bachillerato. [Dirigiéndose a Víctor] ¿No te ha tocado que los alumnos llegan sólo con la línea recta?

Víctor No

Ernest ¿A ti Bryam?

Bryam No, lo más que es parábola, a lo mejor cuadráticas nada más, porque hasta eso cúbicas ya no.

En la declaración de Bryam nos damos cuenta que asume que en el curso de Geometría analítica está contemplado un tema de cúbicas, pero a lo más que se llega a trabajar con los alumnos que él frecuentemente recibe son cuadráticas, "cúbicas ya no", exclama. En esta acción Bryam evidencia el conocimiento de que los cursos de geometría analítica para bachillerato incluyen cúbicas, sin embargo, el último tema que contempla el programa de bachillerato de esta materia es hipérbola, no llega a trabajar con funciones cúbicas. El análisis se muestra en la figura 3.2.

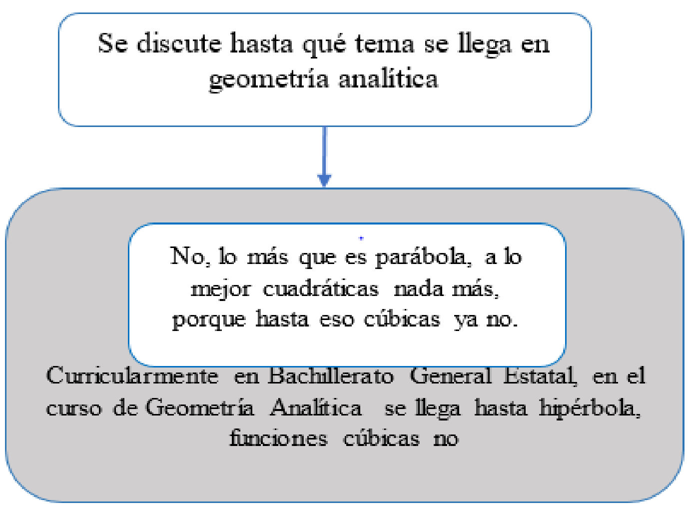


Figura 3.2 Conocimiento esperado por arriba de lo curricular

Como podemos notar, los dos ejemplos anteriores nos muestran situaciones entre si diferentes, en una se rescatan dos situaciones importantes, por un lado el profesor evidencia una fortaleza (arriba de lo esperado) en la parte conceptual (de funciones) KoT, y por el otro, una situación que nos evidencia un área de desarrollo de conocimiento formativo, que como lo mencionamos, es trabajar sobre el comportamiento matemático del alumno. En el segundo caso también el área de oportunidad es la misma, *el comportamiento matemático que se espera de los alumnos*.

La importancia de trabajar en esta oportunidad de desarrollo de conocimiento formativo radica precisamente en que desde el MTSK se estarían fortaleciendo las categorías del subdominio KMLS:

i) *Nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado.*
ii) *Expectativas de aprendizaje.*
iii) Secuenciación con temas Anteriores y posteriores.

Mencionan Tobón, Prieto y Fraile (2010) que el principio número uno para la evaluación basada en competencias es "La evaluación se lleva a cabo para tomar decisiones que mejoren y aumenten el grado de idoneidad", siempre se lleva a cabo, independientemente del fin. Así, si un profesor realiza una evaluación diagnóstica, se dará cuenta de qué adolecen los alumnos, para proyectar el curso basado en las fortaleces que detecte en el alumno. Aunado a ella, también puede cotejar con los planes y programas de estudio de las materias que anteceden a la que se vaya a trabajar, cálculo integral en este caso. Así, al conocer qué materias han cursado y los resultados de su evaluación diagnóstica por ende conocería el nivel de desarrollo conceptual o procedimental que podría esperar de sus alumnos, he aquí la importancia de atender la oportunidad "*el comportamiento matemático que se espera de los alumnos*", ya que se estarían potenciando de manera inherente el conocimiento de las categorías que señalamos anteriormente.

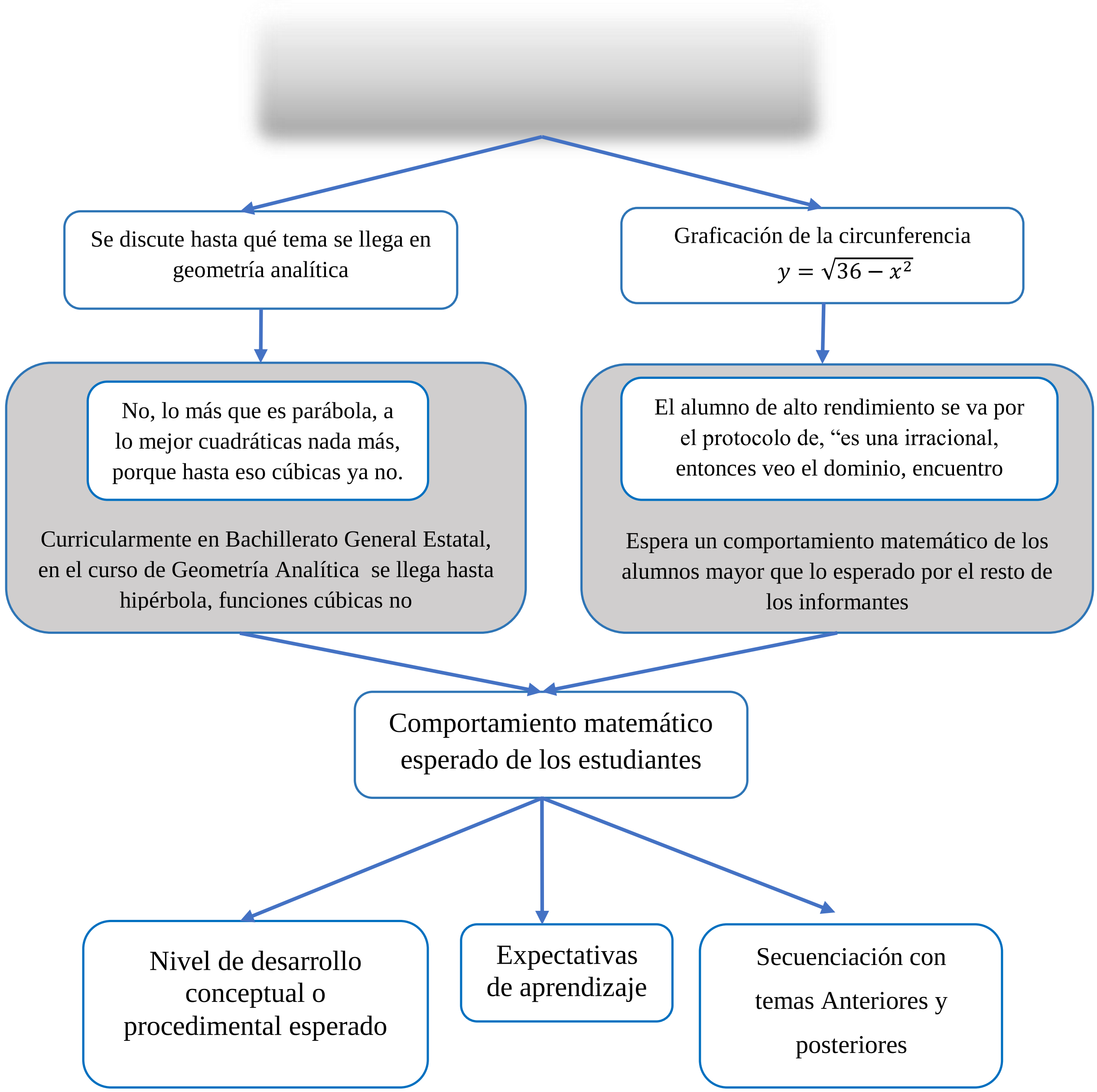


Figura 3.3 Comportamiento esperado de los alumnos

3. 3 Lenguaje matemático en el aula

c) Situación en la que aparece la noción de funciones infinitas

Contexto

Analizando el video de la implementación de la secuencia didáctica con el grupo de estudiantes nos percatamos de que, a pesar de que algunos alumnos identifican los elementos de las distintas ecuaciones (en una recta identifican que tiene pendiente 2, manifiestan incluso que hará un ángulo con el eje de las x de aproximadamente 60°, en la parábola mencionan que tiene vértice en el eje *Y*, en la circunferencia determinaron el valor del radio es seis y con centro en el origen, sin embargo al momento de graficar tabulan en todas las funciones propuestas (incluso cometiendo errores al salirse del intervalo en el que se les había indicado que lo hicieran), excepto en la circunferencia.

Durante la discusión con los profesores, respecto a este hecho, sobre el porqué los alumnos tabularon para graficar una recta con pendiente dos, una parábola con vértice en el eje *Y*, e incluso una función constante, pero no tabularon para graficar la ecuación de la circunferencia, a pesar de que ya sabían de manera general lo que representaba cada una, e incluso conocían algunos elementos, Ernest pidió una explicación a tal comportamiento.

Ernest	¿Tú tienes alguna explicación Bryam?
Bryam	Yo lo que pienso es que las otras funciones como tal, las asocian con funciones infinitas, es decir, siguen una sola línea, o sea no hay un cambio. Sin embargo, la que es totalmente diferente es la de la circunferencia, entonces ahí sí necesita tener un intervalo porque si no [lo tiene], entonces no se podrían imaginar la circunferencia. Yo siento que sería ese mi punto de vista. Asocian bien el largo del intervalo porque lo necesitan, y en las otras no tanto porque sabemos que de cierta forma son infinitas [abre los brazos para dar a entender su noción de que son infinitas].

Tratando de comprender el conocimiento que Bryam muestra podemos interpretar el "las otras las asocian con funciones infinitas" de la siguiente manera; las gráficas de la recta con pendiente dos y la recta horizontal no están acotadas en su dominio (ambas) ni rango (la primera), y la parábola, aunque este acotado su rango inferiormente, no así su dominio, completando la frase “ sin embargo la que es totalmente diferente es la de la circunferencia” interpretamos que se quiere referir a que las otras no son acotadas y la circunferencia sí. En “Asocian bien el largo del intervalo porque lo necesitan, y en las otras no tanto porque sabemos que de cierta forma son infinitas” se refiere a que en la circunferencia necesitan apegarse al intervalo que se les proporcionó, en las otras se salen del intervalo que se les indicó por el hecho de que son *infinitas*. Él imagina las gráficas infinitas porque si se trazaran en todo su dominio se extenderían infinitamente en ambos sentidos. Figura 3.4.

En esta situación, no sabemos si Bryam no encontró las palabras precisas para llamarles, o si desconoce la manera correcta de hacerlo, o simplemente no pensó en los adjetivos para tal ocasión, sin embargo este indicio nos hace pensar en un área de oportunidad de desarrollo de conocimiento formativo, en particular el *uso del lenguaje matemático en el aula.*

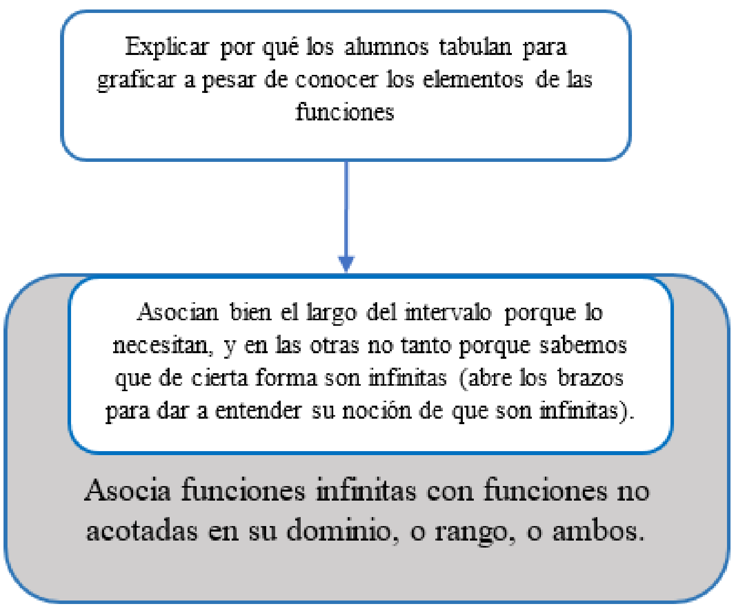


Figura 3.4 Noción de funciones infinitas

d) Situación en la que la Maestra usa muchas analogías

Contexto

Al momento de implementar la secuencia didáctica en el aula, la Maestra, en una actividad les pasa un video con figuras que tienen que girar alrededor del eje que les indiquen, horizontal o vertical, y ellos tendrán que dibujar el sólido de revolución que se genera. Posteriormente analizan con la Profesora si sus sólidos de revolución coinciden con los que muestra ella. Después, esta parte de la clase es mostrada al grupo de profesores para su análisis. A continuación, se transcribe lo que sucedió en el aula:

Profesora	Y cuando giraron esto [señalando una recta], [se obtuvo] un cono, ok. ¿Qué otra figura giramos?, ¿se acuerdan?
Alumnos	La parábola
Profesora	¿Parada [vertical] o acostada [horizontal]?
Alumnos	Parada
Profesora	¿Dónde estaba el eje [focal]?
Alumnos	En las *x's*
Profesora	: ¿Era una acostada?
Alumnos	Sí
Profesora	Déjenme checar es que no me acuerdo, ah, ok sale, ya hasta saben que eje, estaba en el eje de las “x”, era algo si, ¿sí o no?
Alumnos	Sí
Profesora	Ok, y la giraron, se supone que este [poner cuál] es el eje, la giran, ¿y qué fue lo que se les formó?
Alumnos	Un plato pozolero

Profesora	Ajá, o sea algo así, se parece más a una de esas de cocos que se ponen las hawaianas, ok. ¿Cuál otra fue?, la que era esta misma [parábola], pero cambiamos el eje, ¿se acuerdan?, entonces era algo así, que A1 me dijo ¿qué era que A1?
Alumnos	Como un reloj de arena
	Como un reloj de arena, exacto, ahora la giramos sobre este eje [Haciendo referencia al eje vertical que es tangente al vértice de la parábola], ¿sale?, y entonces, ¿si les dio algo como esto?
Alumnos	Si
Profesora	¿Cuál otra era?
A9	El círculo
Profesora	Oigan, y qué pasa si ahora, fíjense, aquí estaba el eje en esta posición [describir], después, con la misma parábola pusimos el eje acá [describir], ¿y qué pasa si ahora ponemos el eje acá? [Ubica el eje de forma vertical de manera que una los extremos de la parábola propiciados por la acotación del intervalo].
Alumnos	Una esfera
Profesora	No, ¿apoco es esfera?, ¿apoco es circunferencia?
Alumno	No
A6	Como un balón de fútbol americano
Profesora	Como un balón de fútbol americano, ¿verdad?

En esta situación se puede ver a la profesora haciendo analogías de varios objetos matemáticos como son, paraboloides o eje de la parábola paralelo al eje Y o al eje X, entre otros. Observamos que en el transcurso de la clase esta práctica se utiliza varias veces quizás con un fin didáctico haciendo referencia a elementos cotidianos que podrían relacionarse con la forma de estos objetos matemáticos.

Si bien el uso de nombres coloquiales podría tratarse de una decisión didáctica, no es objeto de esta investigación dar un posicionamiento al respecto. Sin embargo, en la discusión con los profesores sobre este extracto de la clase, ninguno de ellos comentó algo ni para apoyar su uso, ni para posicionarse en contra. Este hecho llama la atención, porque no sabemos si los profesores estén conscientes o no de las repercusiones que genera la falta del uso del lenguaje formal en clase en una situación didáctica (Brousseau, 1986), pues el uso excesivo de analogías puede ocasionar la pérdida de características matemáticas del objeto, o tampoco sabemos si desconocen los nombres. Recordemos que nuestra labor no es evaluar a los profesores, sino tratar de comprender e interpretar el conocimiento que ponen en juego al realizar su labor docente y, detectar oportunidades formativas en ellos, en este caso el *uso del lenguaje matemático en el aula* Figura 3.5.

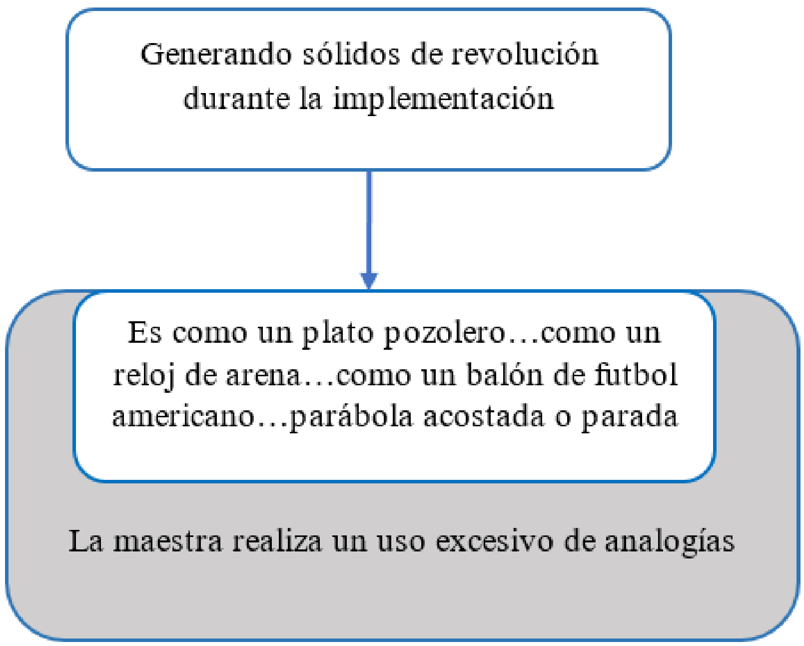


Figura 3.5 Uso excesivo de analogías

e) Situación en la que aparece la noción de punto en vez de diferencial

Contexto

Continuando con la observación de algunos videos con momentos de la implementación de la secuencia en el aula, los profesores del grupo emiten algunas críticas acerca del actuar de la profesora con la intención de proponer mejoras. En el video se observa a la maestra tratando de que los estudiantes arriben a la forma de calcular el volumen del sólido de revolución, mencionan que es la suma infinita de los volúmenes de discos de altura pequeña. Diana manifiesta lo siguiente:

Diana: Además haces mucho hincapié en que no es un cilindro, que en algún momento deja de ser un cilindro, pareciera entonces que pierde la capacidad, que pierde el volumen, y en realidad esos discos que se forman sí tienen volumen, pero es el volumen de un *punto* que se observa. Pero tú haces mucho hincapié en que ese volumen se pierde, se pierde, se pierde. Ellos tratan de decirte "pero es muy delgado, ¿no?". Pero sigue siendo muy delgado, y hay un momento en que tu intención es decir "no, no es que sea muy delgado, es que es el más delgado". Pero pareciera entonces que ya no es un cilindro, no estás aproximándote con cilindros, estás aproximándote con cosas que son totalmente planas y no es verdad, tienen un cierto volumen que debe equivaler en ese momento a *un punto*. Eso me llevó a observar en que hay momentos en los que las opiniones de los estudiantes, de alguna manera se van modificando a través de las participaciones tuyas.

Diana, al referir que en realidad el cilindro de altura muy pequeña no es plano, que sí tiene altura, menciona que la altura es un punto, y que por lo tanto sí tiene volumen, sin embargo, cuando calculamos los volúmenes de cilindros muy pequeños estos tienen una altura infinitamente pequeña, la altura es un diferencial de x o dx. Aunque no tenemos evidencia del conocimiento (o desconocimiento) de Diana respecto a esto, esta situación nos muestra otro momento relacionado nuevamente con el *uso del lenguaje matemático en el aula*. Análisis en la Figura 3.6.

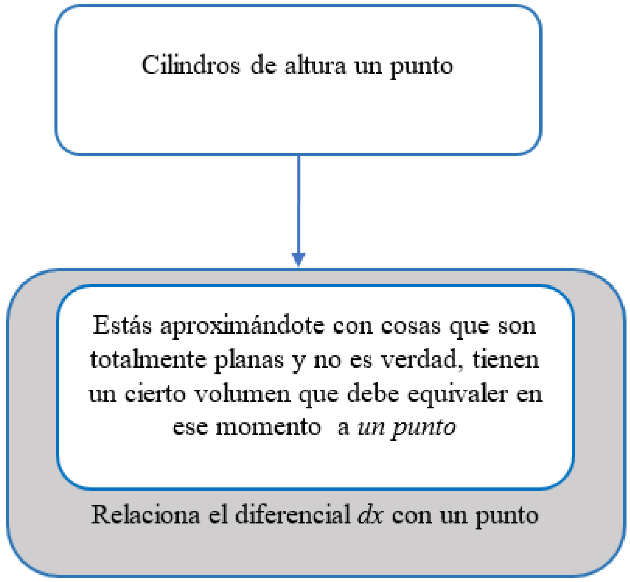


Figura 3.6 Punto en vez de diferencial

f) Situación en la que la maestra no interpreta adecuadamente lo que dice el alumno

Contexto

La profesora, al implementar la secuencia en el aula, en un determinado momento esperaba que los alumnos recordaran la diferencia entre una ecuación y una función al momento de graficar. De hecho ella esperaba que los alumnos le dijeran la definición de función. Un alumno no le dijo exactamente la definición, pero con otros elementos de la gráfica le mostró que sí tenía idea de lo que era una función y la Maestra le dijo que no. Ante esta situación la profesora Danny refiere lo siguiente:

Danny Otro comentario respecto al papel de la profesora aparte del buen trabajo que evidentemente hace la profesora [que implementó la secuencia en el aula], también tiene que ver con que a veces, bueno, como docentes, se quiere que se exprese tal cual uno lo conoce [refiriéndose al concepto de función] de manera formal. Yo creo que la Maestra esperaba que sí se dijera que a x sólo le correspondía un valor y, y aunque como dicen, tal vez el niño no puede expresar, lo dice sólo como el cuarto de circunferencia y la maestra dice que no, va por ahí pero no es exactamente.

Profesora Sí, la regué ahí con ese chico.

Ante esta situación, por un lado es claro que la Maestra conoce la definición de función, no adolece de los conocimientos del dominio MK para este tema, ella espera que el alumno le diga la definición, el alumno tiene idea de lo que es una función, porque lo evidencia al momento de graficar sólo una cuarta parte de la circunferencia, la grafica como una función respetando el intervalo dado, pero no logran comunicarse entre los dos.

Una parte sustancial del MTSK es saber interpretar el lenguaje que utilizan los estudiantes, el cual a veces no coincide con el que espera el profesor, pero sí se relaciona con el contenido matemático. En contextos reales de clase, este tipo de lenguaje propicia contingencias entendidas como la dimensión que se centra en las acciones del profesor en momentos imprevistos e inesperados (Rowland et al., 2005) las cuales son difíciles de resolver in situ. Sin embargo, vemos una oportunidad para promover esta parte relacionada también con el *uso del lenguaje matemático en el aula*. Análisis en Figura 3.7.

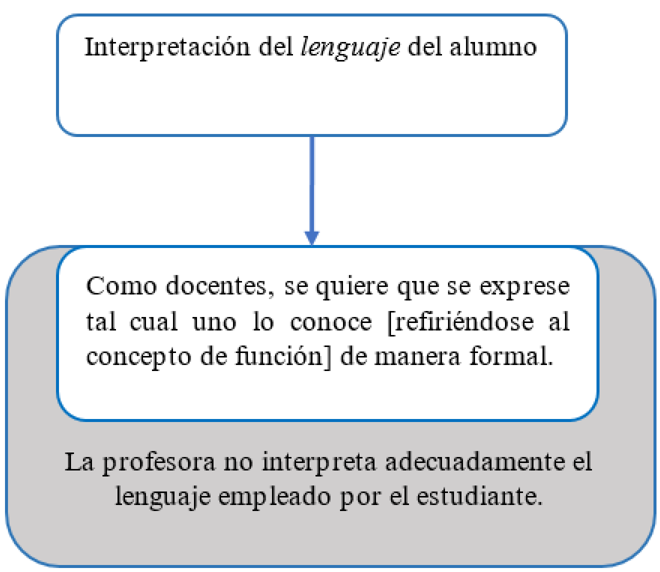


Figura 3.7 La maestra no interpreta lo que dice el alumno

En los cuatro análisis anteriores tenemos una situación sobre el *uso del lenguaje matemático en el aula*, las tres primeras relacionadas con el lenguaje que utiliza el maestro, la última con el lenguaje del alumno para comunicar sus ideas o concepciones que del objeto matemático tiene; a saber, el de función.

Atendiendo esta oportunidad de desarrollo de conocimiento formativo se potenciaría el fortalecimiento del MTSK en las categorías dentro del dominio MK:

i) Del subdominio KoT, la categoría asociada a *definiciones, propiedades y sus fundamentos*.

ii) Del subdominio KPM la asociada a el *papel de los símbolos y el uso del lenguaje formal*;

Así mismo en el dominio PCK:

iii) En el subdominio KFLM podemos observar la categoría asociada a las *formas de interacción con un contenido matemático.*

iv) Así como *fortalezas y dificultades* que presenta el alumno al tratar de comunicar sus concepciones o ideas de objetos matemáticos. Podemos ver el análisis en la figura 3.8.

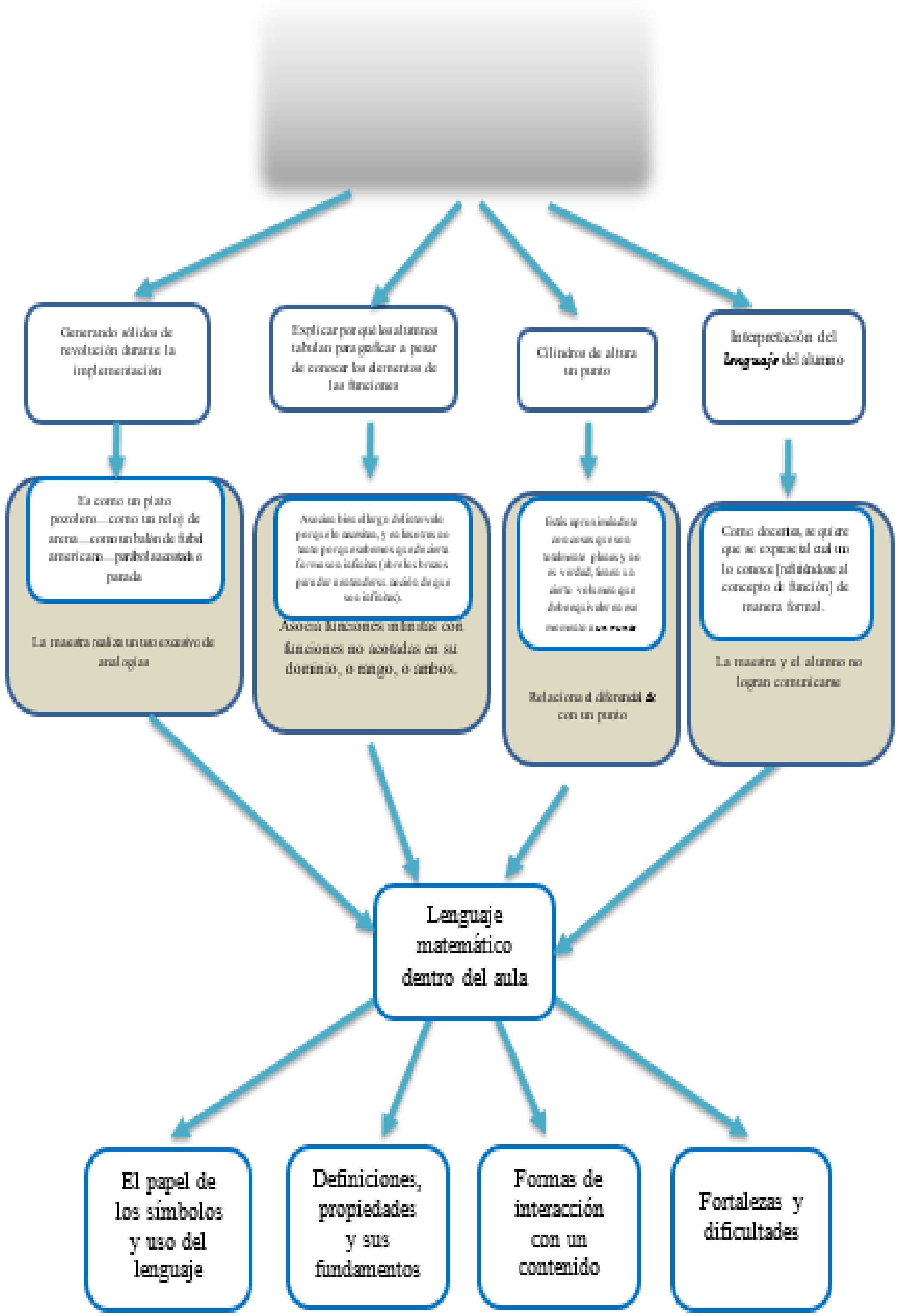


Figura 3.8 Uso del lenguaje matemático en el aula

Capítulo 4

CONCLUSIONES

Para la realización de la investigación nos enfrentamos, entre otras cosas, a la forma en la que se ha utilizado el modelo MTSK, pues como hemos dicho anteriormente es una herramienta para analizar el conocimiento que el profesor muestra, declara o posee en su quehacer docente, delimita el conocimiento especializado para enseñar matemáticas (Carrillo et al,2013). No se trata de un modelo que estudie cómo desarrollar conocimiento. En nuestro caso, al plantearnos por objetivo la detección de oportunidades formativas establecimos un puente entre el estudio de conocimiento y la potencial generación de propuestas de desarrollo profesional (Cabe señalar que en esta tesis no realizamos la propuestas de desarrollo). Este mismo objetivo nos generó algunas dudas sobre cómo manejar los elementos metodológicos. Al ser el MTSK un modelo interpretativo y no prescriptivo, nos enfrentamos con la dificultad de decidir cómo interpretar aquellos conocimientos que nos sugirieran una posible oportunidad formativa. Nosotros estamos mostrando evidencia empírica de las áreas de oportunidad que, al ser atendidas, pueden desarrollar conocimiento.

De igual manera, Carrillo et al (2013) señalan la inexistencia de implicaciones directas entre propuestas de conocimiento y propuestas formativas, "pero, por otra parte, es evidente que un mejor detalle del conocimiento proporciona ideas y sugerencias para la conformación de propuestas formativas, tanto en formación inicial, como en formación continua" (Carrillo et l, 2013, p.6), que sería en una siguiente fase.

Si bien en nuestro estudio, el MTSK fue utilizado en su totalidad (excepto el dominio de las creencias) para identificar elementos de conocimiento y posibles vías de potenciación de estos, con los datos empíricos sólo pudimos detectar oportunidades formativas en los subdominios KoT, KPM, KFLM y KMLS

Las oportunidades se pueden atender en otros grupos, no necesariamente en el mismo grupo de profesores de nuestro proyecto, porque como sabemos, el modelo MTSK no es evaluativo, entonces no nos situamos en la posición de corregir lo que hicieron o dijeron mal, más bien, tratamos de hacer una abstracción hacia elementos que se relacionan con las producciones de estos, pero que pueden tornarse más generales y aplicables incluso a otras ramas de las matemáticas que no sean cálculo.

En nuestro caso, después de la revisión de las videograbaciones de las reuniones con el grupo de profesores, observamos que el tipo de acciones en las que más incidieron nuestros informantes fueron las relacionadas con el *uso del lenguaje matemático en el aula* y con *el comportamiento matemático esperado del alumno*.

Tratamos de encontrar alguna relación entre el lenguaje matemático utilizado en el aula y la formación académica de los profesores, pensando que quizás los de menor preparación incidieran más en este hecho, sin embargo no fue así, el nivel académico del profesor no determina si el profesor utiliza o no un lenguaje matemático adecuado en su quehacer docente.

De la misma manera con relación al comportamiento matemático esperado tampoco hay algo que nos muestre algún tipo de correlación.

Referencias

Aguilar-González, Á., Escudero, D. I., & Flores-Medrano, E., (2013). Oportunidades que brindan algunos escenarios para mostrar evidencias del MTSK.

Aguilar, A., Carreño, E., Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L., Escudero, D.,... & Rojas, N. (2013). El conocimiento especializado del profesor de Matemáticas: MTSK. Actas de las VII CIBEM, 5063-5069.

Brousseau, G. (1986). Fundamentos y métodos de la Didáctica de la Matemática. Recherches en didactique des mathematiques, 7(2), 33-115.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L.C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D.,…Muñoz-Catalán, M.C, (en prensa). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., Escudero-Ávila, D. I., Flores-Medrano, E, y Montes, M. (2015). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas detectado en la resolución del problema de las cuerdas. *PNA*, 10(1), 53-77. [http://hdl.handle.net/10481/37190]

Cervini, R., Dari, N., & Quiroz, S. (2014). Estructura familiar y rendimiento académico en países de América Latina: Los datos del Segundo Estudio Regional Comparativo y Explicativo. *Revista mexicana de investigación educativa*, 19(61), 569-597.

Carrillo, J. & Muñoz-Catalán, M.C. (2011). Análisis metodológico de las actas de la SEIEM (1997-2010) desde la perspectiva de los métodos cualitativos. Reflexión no torno a un caso. In M. Marín et al, Investigação em Educação Matemática XV (pp. 77-98). Ciudad Real: SEIEM.

Liñán García, M. D. M. (2017) Conocimiento Especializado en Geometría en un aula de 5º de Primaria (Doctoral dissertation, Universidad de Huelva).

Liñán, M.M., Barrera, V.J., Muñoz-Catalán, M.C. y Contreras, L.C. (2017). El conocimiento especializado que la oportunidad evoca al investigador: los ángulos en los símbolos indo-arábigos. En J. Carrillo y L.C. Contreras (Eds.), Avances, utilidades y retos del modelo

MTSK. Actas de las III Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva (pp. 114-118). Huelva: CGSE.

Loewenberg Ball, D., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special?. *Journal of teacher education*, 59(5), 389-407.

(OECD) (2016). PISA 2015 Results Excellence and Equity in Education I. Recuperado de http://www.oecd.org/pisa/pisa-2015-results-volume-ii-9789264267510-en.htm

Monteiro, R., & Muñoz Catalán, M. C. (2016). Afrontando la controversia: Discusión sobre la naturaleza de los elementos metodológicos en la investigación en Educación. Omnia, 4, 23-30.

PISA, O. (2004). Aprender para el mundo de mañana. Resumen de resultados PISA 2003. *Organization for Economic Co-operation and Development (OECD), Paris.*

Rowland, T., Huckstep, P., & Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: the knowledge quartet and the case of Naomi. Journal of Mathematics Teacher Education (8), 255-281.

Santos, L. (2002). A investigação e os seus implícitos: contributos para uma discussão. In J. Murillo, P.M. Arnal, R. Escolano & J.M.Gairín (Eds.). Actas del VI Simposio de la SEIEM (pp. 157-170). Logroño: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

SEP. SEMS. Puebla. Plan de estudios 2006. Planes y programas de estudio. Geometría analítica y funciones. Recuperado de http://sems.gob.mx/work/models/sems/Resource/12615/5/images/3_Geometr%C3%ADa%20anal%C3%ADtica.pdf.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational researcher*, 15(2), 4-14.

Strauss, A. L., Corbin, J., & Zimmerman, E. (2002). Bases de la investigación cualitativa: técnicas y procedimientos para desarrollar la teoría fundamentada. Medellín: Universidad de Antioquia.

Tobón, S.T., Prieto, J. H. P., & Fraile, J. A. G. (2010). *Secuencias didácticas: aprendizaje y evaluación de competencias.* México: Pearson educación.

Yin Robert, K. (1993). Caso de Estudio de Investigación: Diseño y Métodos–Aplicación Investigación Social de la Serie Métodos. Beverly Hill.

Anexo 1

PLAN DE CLASE

Puebla, México 24 de mayo de 2018

- **ASIGNATURA: CÁLCULO INTEGRAL**
- **CAMPO DISCIPLINAR: MATEMÁTICAS**
- **UNIDAD: 3**
- **NOMBRE DE LA UNIDAD: ÁREA ENTRE CURVAS Y SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN**
- **PERIODO QUE ABARCA:**
- **NÚMERO DE SESIONES: 6 SESIONES**

APRENDIZAJES ESPERADOS

- **EL ESTUDIANTE COMPRENDERÁ LOS MÉTODOS PARA CALCULAR EL ÁREA FORMADA ENTRE CURVAS Y EL VOLUMEN DE UN SÓLIDO DE REVOLUCIÓN.**

- **DEDUCIRÁ QUE EL CÁLCULO DE ÁREA ENTRE CURVAS Y EL VOLUMEN DE UN SÓLIDO DE REVOLUCIÓN SE REALIZA A TRAVÉS DE UNA INTEGRAL.**

- **APLICARÁ LOS MÉTODOS DE INTEGRACIÓN PARA EL CÁLCULO DE ÁREA ENTRE CURVAS Y EL VOLUMEN DE UN SÓLIDO DE REVOLUCIÓN. DETERMINARÁ LA IMPORTANCIA DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO EN LA OBTENCIÓN DE ÁREA ENTRE CURVAS Y VOLUMEN DE UN SÓLIDO DE REVOLUCIÓN.**

- **CALCULARÁ ÁREA ENTRE CURVAS Y VOLUMEN DE UN SÓLIDO DE**

COMPETENCIAS A DESARROLLAR

GENÉRICAS

COMPETENCIA:	ATRIBUTOS:
4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.	4.1. Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas. 4.3. Identifica las ideas clave en un texto o discurso oral e infiere conclusiones a partir de ellas. 4.5. Maneja las tecnologías de la información y la comunicación para obtener información y expresar ideas.
5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.	5.1. Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo. 5.2. Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones. 5.5. Sintetiza evidencias obtenidas mediante la experimentación para producir conclusiones y formular nuevas preguntas.
8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.	8.1. Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos. 8.2. Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva. 8.3. Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.

DISCIPLINARES:

ACTIVIDADES DE ENSEÑANZA APRENDIZAJE

1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.

4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal y matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.

6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.

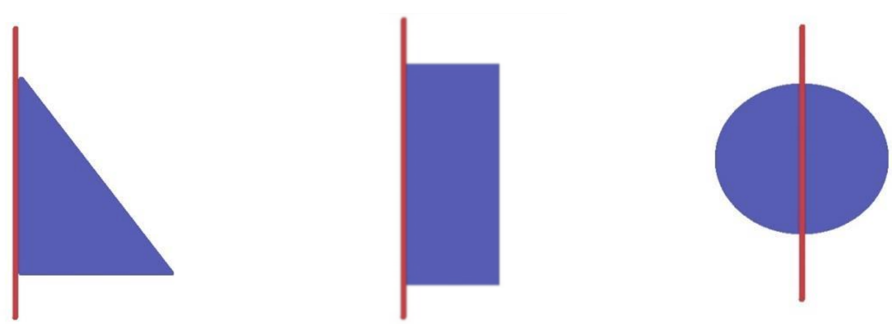
INICIO

1ª ACTIVIDAD "PRIMER ACERCAMIENTO A SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN"

- Dividir al grupo en equipos de cuatro a cinco alumnos y proyectarles el siguiente video en dos momentos: en el intervalo de tiempo [0,0:56] y [3:15, 4:12].

Link: https://goo.gl/7RVrEY

- Los alumnos deberán realizar la actividad propuesta en el video (en los tiempos 3:36 a 4:20, el vídeo se deja correr sin pausas y, al finalizar dicho intervalo de tiempo, se proyectarán las figuras del vídeo y se añadirán dos que provengan de funciones). Por equipos dibujarán los sólidos de revolución que se forman al girar las figuras dadas sobre el eje indicado.



- Una vez terminadas las propuestas, los alumnos compararán y discutirán sus dibujos con la solución que deberá proyectar el profesor. Las reflexiones se guiarán en torno a las posibles dificultades en la identificación del sólido de revolución resultante al girar una figura o una curva.

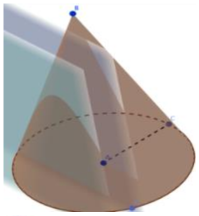
2ª ACTIVIDAD “CLASIFICA SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN”

Para la siguiente actividad se les entregará a los alumnos algunos objetos que sean sólidos de revolución y otros que no lo sean (como los que se observan en las siguientes imágenes), además del material necesario para que puedan verificar sus respuestas simulando ejes de rotación. Con estos objetos los estudiantes deberán:

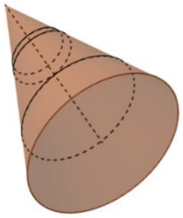
- Explorarlos y clasificarlos en dos grupos, los que sean sólidos de revolución y los que no.
- Para los que sí lo sean, identificar el eje de rotación para que dicho objeto cumpla las características de ser sólido de revolución. Una vez identificado, indicar la figura que lo genera. Comprobar sus respuestas manipulando los objetos con los materiales que se les proporcionará.
- Para los que no lo sean, dar las razones que los llevan a esa conclusión
- Con base en sus observaciones, se les se les pedirá que discutan sobre las características comunes que encuentren en los objetos que sí son sólidos de revolución y cuáles describen a los que no lo son.

DESARROLLO

3ª ACTIVIDAD “MANIPULA SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN CON CORTES”



Para la siguiente actividad, el profesor les proporcionará a los alumnos material didáctico (sólidos de revolución con cortes como el esquema que se muestra a continuación).



- El alumno explora y manipula el material didáctico comparando las figuras que se forman en los diferentes cortes. Una vez hecho esto, deberá medir y comparar los radios de las circunferencias que se forman en los cortes perpendiculares al eje de giro.

4ª ACTIVIDAD “REGRESANDO A LOS SÓLIDOS CLASIFICADOS”

- Regresando a los objetos que clasificaron en la actividad anterior, los alumnos decidirán a qué objetos hacer (o simular) los cortes perpendiculares al eje de rotación, observar cómo son dichos cortes y comprobar si los objetos que consideraron como sólidos de revolución, realmente lo son. Para los que sí sean sólidos de revolución, aproximar el radio de las circunferencias que se forman en los cortes.

5ª ACTIVIDAD "CON HOJAS DE PAPEL MILIMÉTRICO"

El profesor entregará a los alumnos hojas milimétricas.

- Ahora, únicamente con los objetos clasificados como sólidos de revolución, el alumno dibujará en las hojas milimétricas el contorno del objeto, de forma que el eje de rotación coincida con el eje horizontal de la hoja milimétrica, tratando de imaginar el giro de la figura que dibujaron y cómo se forma el sólido de revolución a partir de dicho giro.

- Una vez hecho esto, se discutirá la posibilidad de borrar de su dibujo las líneas paralelas al eje vertical (excepto si tienen curvatura) y todo lo que se encuentre por debajo de eje horizontal, e imaginarse qué figura se forma ahora, si se gira nuevamente alrededor del eje de rotación.

6ª ACTIVIDAD "SE LES PROPORCIONA UNA FUNCIÓN"

En la siguiente actividad, el profesor debe proporcionar a los alumnos las siguientes funciones: $y = 3$ en el intervalo [1, 9], $y = 2x$ en el intervalo [0, 3], $y = \sqrt{36 - x^2}$ en el intervalo [0, 6] y $y = x^2 + 1$ en el intervalo [-2,5].

- El alumno deberá dibujar las funciones dadas y los sólidos de revolución que se generan a partir de estas, con la convención de que el eje de rotación será el eje horizontal.

- Una vez dibujado el sólido de revolución generado por cada función, que el alumno se concentre en algún punto sobre el eje de rotación y aproxime la distancia entre dicho punto y algunos otros sobre el contorno del sólido en la circunferencia que se formaría al hacer un corte perpendicular al eje a la altura de dicho punto. Luego, que compare las medidas que resulten y que repita el mismo procedimiento en algunos otros puntos sobre el eje de rotación. (Se reforzará esta parte de la actividad con un diseño en Geogebra).

- El profesor generará una discusión acerca de cómo es dicha distancia en diferentes puntos sobre el eje de rotación, y a qué se debe o de qué depende la variación.

7ª ACTIVIDAD "VIDEO DEL CÁLCULO DE VOLUMEN DE SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN"

- El profesor generará una discusión acerca de cómo es dicha distancia en diferentes puntos sobre el eje de rotación, y a qué se debe o de qué depende la variación.
- Proyectar el video basado en la lectura guiada que se encuentra en el enlace:

Link: https://goo.gl/bDwcu1

- El profesor deberá discutir con el grupo sobre la potencialidad de la integral como herramienta para el cálculo de volúmenes de sólidos de revolución, el barrido como estrategia para llegar a la integral, qué es lo que se integra y la similitud de este proceso con el cálculo de área bajo la curva.

8ª ACTIVIDAD "APLICA LO DEL VIDEO"

Los alumnos deberán realizar el siguiente ejercicio de forma individual:

Dibujar la función $y = \sqrt{x}$ en el intervalo [0,10] y el sólido de revolución que genera; luego, calcular su volumen por el método de la integral.

- El profesor deberá realizar una generalización a través de una lluvia de ideas.

CIERRE

9ª ACTIVIDAD "CALCULAR EL VOLUMEN DE OBJETOS"

Al inicio de esta actividad, el profesor proporcionará a los alumnos objetos que sean sólidos de revolución (por ejemplo, un plato, un vaso, un cilindro, una esfera), uno por equipo, con los cuales el alumno deberá:

- Determinar el eje de rotación.
- Proponer la función que genera el sólido de revolución y sobre qué intervalo queda definida dicha función. (Para esto pueden recurrir a la medición de los objetos, para lo cual el profesor debe facilitarle el material necesario)
- Calcular el volumen del objeto, con al menos dos métodos, de forma que uno de
- Por equipos, exponer su resultado al grupo.
-

10ª ACTIVIDAD "RESUMEN DEL TEMA"

- Para finalizar, los alumnos harán un resumen de la práctica realizada para este tema rescatando la importancia de la integral para el cálculo de los volúmenes de sólidos de revolución (un resumen por equipo).

RECURSOS DIDÁCTICOS: ESPECIFICOS TOMADOS DE LA SECUENCIA

- **Material impreso de la lectura guiada y la evaluación**
- **Cañón, computadora y pantalla**
- **Libreta de cuadrícula preferentemente**
- **Lápices**
- **Pizarrón y plumones**
- **Envases que correspondan a sólidos de revolución**
- **Vaso graduado**

FUENTES DE INFORMACIÓN: ESPECIFICOS TOMADOS DE LA SECUENCIA

https://goo.gl/7RVrEY

Lerra, De Miguel, De la Rosa, (2011). *Cálculo integral*. México: Limusa.