BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

SECUENCIA DIDÁCTICA BASADA EN EL MODELO 3UV PARA INICIAR EL APRENDIZAJE DE LA VARIABLE ALGEBRAICA

TESIS
PARA OBTENER EL TÍTULO DE
MAESTRO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

PRESENTA
LIC. MARCO ANTONIO GÁLVEZ TORRES

DIRECTOR DE TESIS
DRA. OLGA LETICIA FUCHS GÓMEZ

CO-DIRECTOR DE TESIS
DR. JOSÉ ANTONIO JUÁREZ LÓPEZ

PUEBLA, PUE. JUNIO 2019

BUAP

DRA. LIDIA AURORA HERNÁNDEZ REBOLLAR
SECRETARIA DE INVESTIGACIÓN Y
ESTUDIOS DE POSTGRADO, FCFM-BUAP
P R E S E N T E:

Por este medio le informo que el C:

MARCO ANTONIO GALVEZ TORRES

Estudiante de la Maestría en Educación Matemática, ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 11 de diciembre de 2018, con la tesis titulada:

"Secuencia didáctica basada en el modelo 3UV para iniciar el aprendizaje de la variable algebraica"

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

A T E N T A M E N T E.
H. Puebla de Z. a 23 de mayo de 2019

DR. JOSIP SLISKO IGNJATOV
COORDINADOR DE LA MAESTRÍA
EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA.

Ccp Archivo
[illegible]

Agradecimientos

Es la primera ocasión en que recibo una beca, misma que representó una gran ayuda al cursar las materias de la maestría y poder participar en congresos nacionales e internacionales, donde tuve la oportunidad de exponer los avances del proyecto de investigación de tesis y anexarlos a mi CVU con número 815457, por lo cual agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología CONACYT, por la oportunidad brindada para realizar mis estudios de maestría en educación matemática en la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, BUAP.

De igual manera solicito que sigan apoyando a profesores que quieren seguir especializándose, para que con una mejor preparación construyamos las bases de un mejor sistema educativo desde nuestras aulas, dándole un mayor impacto a nuestra labor docente.

Dedicatorias

La presente tesis que es el culmen de la maestría en educación matemática, la dedico principalmente a mi Dios, por permitirme ser su humilde ayudante al orientarme en la vida.

A mis padres, por brindarme su apoyo incondicional, el cual lo encontré en esas palabras, acciones, miradas, que me daban las fuerzas para continuar estudiando y llevar a buen término los proyectos que emprendo.

A la Dra. Olga Leticia Fuchs Gómez por su valiosa colaboración en la dirección de nuestro trabajo de investigación, pero principalmente porque en ella encontré a un maravilloso ser humano.

A las amigas y amigos por su ayuda y maravillosas experiencias vividas juntos.

Índice

Índice de tablas

Índice de figuras

Resumen

El tema de interés en este trabajo es el desarrollo de una estrategia didáctica para pasar del pensamiento aritmético al algebraico, al comprender integralmente el concepto de variable, ya que es vital en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la escuela secundaria y es necesaria para comprender las matemáticas avanzadas (Schoenfeld y Arcavi, 1988).

El concepto de variable es fundamental porque permite poner las propiedades aritméticas de manera sintética (Sánchez, Hoyos y López, 2011), al expresar el álgebra como aritmética generalizada. Por lo tanto, comenzar el estudio del álgebra elemental estudiando la variable contribuirá a una comprensión integral de la misma, distinguiendo sus diferentes usos y mejorando el acceso al pensamiento algebraico.

En el presente trabajo de investigación se diseña una estrategia didáctica, basada en el Modelo desarrollado por Ursini, Trigueros, Escareño y Montes (2005), denominado tres usos de la variable (3UV), que tiene como objetivo desarrollar una comprensión del concepto de variable y sus diferentes usos, a partir del uso de material concreto y teniendo en cuenta los conocimientos previos que poseen los estudiantes. De esta manera, intentaremos acceder al pensamiento algebraico a partir de la aritmética y la geometría. Se aplicará a grupos de primer grado de secundaria general. Un grupo será el grupo de control y habrá dos grupos experimentales. Al final de la intervención didáctica, se aplica un test evaluativo cuyo diseño también se basa en el Modelo 3UV, para comparar los resultados obtenidos entre los grupos experimentales y el grupo control.

Los resultados del test evaluativo dan muestra de que en los grupos experimentales la mayoría de los estudiantes identifica a las letras en las fórmulas geométricas como variables con sus diferentes usos de acuerdo a la situación en la que se aplican. Mientras que en el grupo control se observa que los estudiantes entienden a las letras de las fórmulas geométricas como etiquetas y no reconocen que las letras puedan representar valores numéricos.

Con estos resultados pensamos que el modelo 3UV debe de utilizarse para comenzar el estudio del álgebra elemental, para favorecer el acceso y desarrollo del pensamiento algebraico, a partir del aritmético.

Abstract

The topic of interest in this study is the development of a didactic strategy to shift from arithmetic to algebraic thinking, integrating comprehensively the concept of variable, since is vital in the teaching and learning of mathematics in secondary school and is necessary for the meaningful use of all advanced mathematics (Schoenfeld & Arcavi, 1988).

The concept of variable is fundamental because it allows to put the arithmetic properties in a synthetic way (Sánchez, Hoyos & López, 2011), by expressing the algebra as generalized arithmetic. So to begin the study of elementary algebra by studying the variable will contribute to an integral understanding of it, by distinguishing its different uses and improving access to algebraic thinking.

In the present research work a didactic strategy is designed, based on the model developed by Ursini, Trigueros, Escareño and Montes (2005), called the three uses of the variable (3UV) Model, which aims to develop an understanding of the concept of variable and its different uses, starting from using concrete material and taking into account the previous knowledge that the students possess. In this way we will try to access algebraic thinking starting from arithmetic and geometry. It will be applied to first grade groups of general secondary school. One group will be the control group and there will be two experimental ones. At the end of the didactic intervention, an evaluation test is applied which design is also based on the 3UV Model, in order to compare the results obtained between the experimental groups and the control group.

The results of the evaluation test show that in the experimental groups most of the students identify the letters in the geometric formulas as variables, mainly in their uses as a general number and as a specific unknown, while the use as a functional relationship needs a little more of work. While in the control group it is observed that students understand letters in geometric formulas as labels and do not recognize that letters can represent numerical values.

With these results it is proposed that the 3UV Model be used to begin the study of elementary algebra, to favor access and development to algebraic thinking, starting from arithmetic.

Introducción

El estudio en la didáctica del álgebra es relativamente joven, pero el producto de las investigaciones en este campo ha permitido ir conociendo cuáles son las dificultades a las que se enfrentan los estudiantes para comprender conceptos algebraicos. Del mismo modo se han generado propuestas para mejorar su enseñanza-aprendizaje, al considerar conceptos clave para acceder a un pensamiento algebraico el cual demanda cierto grado de abstracción para desarrollarlo.

A pesar de estos avances el sistema educativo mexicano no ha podido reflejarlos en el aprovechamiento académico de los alumnos, como lo muestra la evaluación nacional conocida como PLANEA aplicada a jóvenes de secundaria y bachillerato, cuyos resultados establecen que un porcentaje mínimo alcanzan los niveles curriculares deseados.

Por lo que el presente trabajo de investigación pretende dar muestra que iniciar el estudio del álgebra elemental mediante el Modelo 3UV permitirá a los estudiantes acceder de una manera más adecuada al pensamiento algebraico, debido a que el concepto de variable es vital en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la escuela secundaria y es necesaria para comprender las matemáticas avanzadas (Schoenfeld y Arcavi, 1988).

El primer acercamiento que tienen los alumnos con las variables se presenta con el análisis de fórmulas para calcular perímetros y áreas (Kieran y Filloy, 1989), de igual manera estos autores en su marco de referencia aritmético señalan que tienen una falta de habilidad para expresar formalmente sus procesos de solución. Rosnick (1981) establece que los estudiantes representan a las letras en las ecuaciones como etiquetas. Estas ideas sirvieron de base para diseñar un test diagnóstico para conocer como los alumnos entienden y perciben a las variables, encontrando que en gran medida se siguen cumpliendo tales afirmaciones.

El diseño de la secuencia didáctica se aplica a fórmulas geométricas para calcular el perímetro de figuras conocidas por los alumnos, de acuerdo con el método de enseñanza en espiral del Modelo 3UV. Se inicia con el uso de la variable como número general, del mismo modo este se utiliza para introducir el concepto de variable, entendida como una cantidad que puede asumir un número ilimitado de valores (Osborne, 1909; citado en Philip, 1992). Enseguida se analiza la variable como incógnita específica para seguir con el uso de variables en una relación funcional. Para terminar se aplica una actividad integradora que tiene el propósito de llevar a los estudiantes a ver a la variable como un solo concepto que tiene diferentes facetas (Ursini et al., 2005).

Rosnick (1981), Schoenfeld y Arcavi (1988), Wagner (1983) (citados en Philipp, 1992) establecen que los estudiantes experimentan serias dificultades para interpretar el concepto de variable, dificultad que podría explicarse en parte porque en las matemáticas las variables tienen diferentes interpretaciones. Con el Modelo 3UV se propicia que "los estudiantes no solo deben aprender a trabajar con muchos tipos de símbolos literales en un problema…, sino que también deben aprender que un símbolo literal dado puede asumir más que un solo rol dentro de un problema dado" (Philipp, 1992, p.160).

Al finalizar se aplica un test evaluativo para analizar qué tan hábiles son los estudiantes identificando y diferenciando el uso que se le está dando a la variable. Permitiendo así, poder definir en qué medida la secuencia didáctica contribuyó a mejorar la comprensión del concepto de variable.

Capítulo 1

ANTECEDENTES TEÓRICOS

La palabra álgebra tuvo su origen en el siglo XVI y se deriva del árabe al-yabr. “En la obra principal de Abu Abdallah Muḥammad ibn Mūsā al-Jwārizm titulada Hisab al-yabr wa´l-muqqabala, que significa ciencia de la transposición y la reducción, el término al-yabr se convirtió en álgebra, sinónimo de la ciencia de las ecuaciones” (Collete, 1973, p.197). Actualmente el álgebra abarca diferentes áreas dentro de las matemáticas como pueden ser el álgebra elemental, álgebra lineal o el álgebra superior.

> El álgebra se puede definir como “parte de las matemáticas en la cual las operaciones aritméticas son generalizadas empleando números, letras y signos. Cada letra o signo representa simbólicamente un número u otra entidad matemática. Cuando alguno de los signos representa un valor desconocido se llama incógnita.” (Diccionario de la lengua española).

Existen muchas definiciones, pero en general el álgebra tiene que ver con el uso de letras para generar expresiones que generalizan las relaciones que pueden existir entre ciertos números, para explorar las propiedades de operaciones definidas por medio de reglas formales, en la solución de problemas que involucran incógnitas y en la demostración de teoremas geométricos o deductivos.

De acuerdo a estas características para iniciar el estudio del álgebra de una mejor manera y poder aplicarla de forma óptima al resolver problemas, el desarrollo del pensamiento abstracto es de vital importancia para lograrlo. Del mismo modo, implica que los jóvenes interpreten a las letras como algo más que iniciales de magnitudes o unidades de medida, sino como símbolos que pueden adquirir ciertos valores de acuerdo a la situación en que se usen, es decir, identificarlas como variables. De esta manera a la par se desarrollará el pensamiento algebraico.

1.1 Didáctica del álgebra

La investigación en didáctica de esta rama de la matemática comenzó a finales de los años setenta, con el informe de Bauersfeld y Skowronnek titulado investigación relacionada con el proceso de aprendizaje de las matemáticas, presentado en el tercer congreso internacional de matemática educativa (ICME-3), realizado en Karlsruhe, Alemania en 1976. En dicho informe Bauersfeld y Skowronek (1976) (citados en Kieran y Filloy, 1989) establecen que no se debería comenzar desde una teoría del aprendizaje matemático, sino de los procesos de aprendizaje específicos de un contenido. A partir de esto se dejaron de lado las investigaciones generales y se desencadenaron una serie de investigaciones sobre la enseñanza y aprendizaje del álgebra.

Temas de investigación como el marco de referencia aritmético; variables, expresiones y ecuaciones; resolución de ecuaciones; funciones y sus gráficas; enfoques que usan computadoras, fueron algunos con los que se comenzó el estudio de la didáctica del álgebra (Kieran y Filloy, 1989).

1.2 Pensamiento algebraico

El pensamiento algebraico considerara dos componentes, las herramientas del pensamiento matemático y las ideas algebraicas fundamentales, el primero considera habilidades de resolución de problemas, representación y razonamiento, y el segundo al álgebra como aritmética generalizada, un lenguaje y herramienta para la modelación y el estudio de funciones (Kriegler, 2000; citado en Sánchez, Hoyos y López, 2011).

> Las investigaciones en pensamiento algebraico en los últimos treinta años se han orientado en dos vertientes, que son el análisis de las características esenciales del pensamiento algebraico, sus niveles de organización y los problemas que surgen en su enseñanza y aprendizaje; y la descripción y estudio de respuestas y procesos de solución de estudiantes y profesores en tareas específicas en pensamiento algebraico. Continuando con esta clasificación, los contenidos que se abordan en las investigaciones se agrupan en tres núcleos, el primero en la transición del pensamiento numérico al algebraico, analizando los aspectos del primero que son la base para los conocimientos de la aritmética generalizada; segundo los procesos específicos del pensamiento algebraico como la sustitución formal, la generalización y la modelación y tercero la búsqueda de propuestas que mejoren la enseñanza y el aprendizaje del álgebra en la educación secundaria. (Socas, 2011, p.6).

1.3 Variable

De acuerdo al componente de las ideas algebraicas fundamentales, en el que se entiende al álgebra como aritmética generalizada o abstracta, el concepto de variable es fundamental debido a que permite expresar las propiedades aritméticas de manera sintética (Sánchez, Hoyos y López, 2011). La idea surge de centrar la atención en las expresiones algebraicas como generalizaciones de pautas o patrones aritméticos y, en las entidades como propiedades generales de las operaciones aritméticas (Kriegler, 2000; citado en Sánchez, Hoyos & López, 2011).

Por lo tanto, el concepto de variable es vital en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la escuela secundaria (Schoenfeld y Arcavi, 1988). Para otros autores como Davis (1964), Hirsch y Lappan (1989) (citados en Philipp, 1992), lo es desde la escuela primaria hasta la universidad. Esto invita a considerar a la variable como un concepto clave que proporciona la base para la transición de la aritmética al álgebra, [es decir, de lo concreto a lo abstracto] además de que es necesaria para comprender las matemáticas avanzadas (Schoenfeld y Arcavi, 1988). Por consiguiente el estudio de la variable es de especial interés, "porque es fundamental no sólo para el aprendizaje sino también para la enseñanza del álgebra" (Juárez, 2011, p.84).

La palabra variable hace referencia a variación y cambio; por lo que representa una cantidad cuyos valores cambian, esta noción fue introducida por primera vez por los inventores del cálculo infinitesimal, Gottfried Wilhelm Leibnitz (1646-1716) y Sir Isaac Newton (1643-1727) (Philipp, 1992).

Dos siglos después esta noción es retomada por Osborne (1909) (citado en Philipp, 1992) definiendo a la variable como una cantidad que puede asumir un número ilimitado de valores. A mediados del siglo XX es definida como un símbolo que puede representar cualquiera de los miembros de un conjunto especifico, llamado el conjunto o dominio de reemplazo de la variable (Dolciani et al., 1967; citado en Philipp, 1992).

Los conceptos presentados parecen muy semejantes pero atienden características particulares del concepto de variable, es decir, establecen que es una cantidad que puede tomar múltiples valores, pero esos muchos valores los adquiere considerando determinadas condiciones.

En la búsqueda de tener un concepto unificador, desde el inicio en el currículo de matemáticas el concepto de variable se enseñó en su forma más general, por lo que todos los símbolos literales se entendieron como variables (Kieran, 1989).

Esto propicio que los estudiantes experimenten serias dificultades para interpretar el concepto de variable, dificultad que Rosnick (1981), Schoenfeld y Arcavi (1988), Wagner (1983) (citados en Philipp, 1992) establecen que podría explicarse en parte porque en las matemáticas las variables tienen diferentes interpretaciones.

Capítulo 2

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El aprendizaje de las matemáticas ha sido un problema relevante para los estudiantes mexicanos. Se tiene mucha evidencia de esto en los resultados de las pruebas Enlace y PLANEA (Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes), diseñados por la secretaria de educación pública (SEP). Y aunque Planea 2017 no es perfectamente comparable con las ediciones previas, los bajos resultados en matemáticas son muy notorios. Como lo dio a conocer Campus Milenio, donde según el primer reporte, del total de estudiantes evaluados únicamente el 2.5 por ciento alcanza el nivel de competencias que deberían de lograr si se alcanzaran los propósitos curriculares de secundaria y bachillerato.

En opinión de la Dra. Lidia Hernández (TEMBI 2017):

> Los estudiantes no pueden utilizar las ecuaciones para plantear un problema, ni tampoco pueden interpretar una ecuación. Solamente el 2.5 por ciento alcanza el nivel cuatro, que es donde ya utilizan realmente un pensamiento que logre transformar un problema de la vida real a una ecuación, un modelo matemático y aplicar algoritmos.

Con los resultados de Planea 2017, se puede observar que los alumnos tienen serias complicaciones para resolver problemas utilizando el planteamiento y resolución de ecuaciones. Debido a que la gran mayoría se encuentra en el nivel I (conocimiento insuficiente de los contenidos curriculares) y el nivel II (conocimiento elemental de los contenidos curriculares). Para tercer grado de secundaria estos niveles representan la capacidad de los alumnos de resolver problemas que implican comparar o realizar cálculos con números naturales (nivel I) y resolver problemas que implican sumar, restar, multiplicar y dividir con números decimales, así como expresar con letras una relación numérica sencilla que implica un valor desconocido (nivel II). Esto es evidenciado en el trabajo diario de los docentes de matemáticas en el nivel de secundaria.

Para que los estudiantes alcancen los niveles III y IV que señala Planea y del mismo modo puedan acceder a conceptos matemáticos venideros, deben de desarrollar un pensamiento algebraico, lo cual implica comprender el concepto de variable.

Comprender este concepto que es clave en el pensamiento algebraico involucra que los estudiantes se enfrenten a serias dificultades, como estar acostumbrados a trabajar en aritmética con valores concretos y pasar a una nueva parte de la matemática conocida como álgebra, donde esos valores ahora se representen mediante letras, centrando la atención en la derivación de procedimientos y relaciones, expresándolos en su forma general simplificada (Booth, 1988). Los estudiantes al ver el uso de letras en ecuaciones las representan como etiquetas que se refieren a entidades concretas [la letra m representa la unidad metro] (Rosnick, 1981). Estas dificultades podrían explicarse en parte debido a que en matemáticas las variables pueden adquirir diferentes usos (Rosnick 1981, Schoenfeld y Arcavi (1988), Wagner 1983; citados en Philipp, 1992).

Esta serie de dificultades han propiciado que el concepto de variable no se comprenda y que solo se use de un modo exagerado en los procesos netamente algorítmicos, Ursini et al. (2005) realiza una descripción muy detallada:

> Después de los seis años de primaria (en los que los alumnos han trabajado casi exclusivamente con los números), los símbolos literales aparecen, por lo general, sin mayores explicaciones. Tampoco suelen plantearse situaciones que vuelvan necesaria su introducción. Es muy común que se empiece advirtiendo a los alumnos que el álgebra, a diferencia de los que hacían en aritmética, se usan letras en lugar de números. Se aclara que las letras representan cualquier número y que mientras en primaria o al iniciar la secundaria se iniciaba con una raya, un cuadrito o un espacio vacío el número faltante en la ecuación, ahora se usará para ello una letra. No se acostumbra dar más detalles acerca del significado de los símbolos literales y el tiempo se dedica más bien a enseñar técnicas para resolver ecuaciones, practicar reglas de manipulación y plantear problemas en los que se espera que los alumnos empleen procedimientos algebraicos para encontrar una solución. (p.16)

Por tanto, la enseñanza resulta ser extremadamente mecanizada y sin ninguna orientación a resaltar el uso de la variable y por consecuencia a una comprensión nula de la misma. Basta que ellos puedan resolver una ecuación usando ciertos pasos preestablecidos respetando su orden, para pensar que están desarrollando el pensamiento algebraico mediante la comprensión del concepto de variable.

Esto propicia que el tránsito de la aritmética al álgebra se origine en condiciones totalmente desfavorables, o, en el peor de los casos, que no ocurra. De igual manera lo señala Velázquez (2003), al exponer dos factores que coinciden con lo anteriormente descrito, la especial complejidad y concisión del modelo comunicativo y del lenguaje matemático (debido a su elevado grado de conceptualización); y una experiencia aritmética previa alejada de contextos familiares o de modelización matemática.

Con tal panorama no resulta una gran sorpresa que los alumnos que continúan con sus estudios perciban a la matemática como una ciencia demasiado complicada y tengan problemas serios para comprender conceptos que se estudian en el nivel medio superior o superior.

2.1 Objetivo

Diseñar y aplicar una secuencia didáctica con base en el Modelo 3UV para iniciar la comprensión integral del concepto de variable en los distintos usos que se estudian en la escuela secundaria y analizar los resultados de su aplicación.

2.2 Justificación

Un modo de orientar a nuestros estudiantes hacia el interés por la Matemática en el inicio de su educación secundaria, es comenzar el estudio del álgebra elemental con el concepto de variable, presentándola de manera integral mediante el diseño de secuencias didácticas basadas en el Modelo 3UV, además considerando ideas y conocimientos previos de los estudiantes, para acceder al pensamiento algebraico a partir del aritmético.

Es necesario y urgente cambiar la enseñanza del álgebra en su etapa introductoria formal escolar, de tal manera que se atienda la comprensión del concepto de variable para propiciar y asegurar el desarrollo del pensamiento algebraico.

La propuesta, al igual que los resultados de muchas investigaciones en matemática educativa sobre la enseñanza y aprendizaje de temas de álgebra, dependerá del grado en que se conozcan y se adapten al contexto escolar en las diferentes regiones de nuestro país. De esta manera las estrategias educativas mejorarán los logros académicos de los estudiantes.

Para efectos prácticos la comprensión del concepto de variable, permitirá a los estudiantes asimilar contenidos matemáticos venideros de una mejor manera.

2.3 Pregunta de investigación

¿La aplicación de una secuencia didáctica basada en el Modelo 3UV mejorará la comprensión integral del concepto de variable al identificar los distintos usos que se estudian en la escuela secundaria?

2.4 Hipótesis

"Los estudiantes de primer grado de secundaria muestran una comprensión integral del concepto de variable al identificar los usos que se analizan en ese nivel educativo, cuando se les aplica una secuencia didáctica diseñada con base en el Modelo 3UV."

Variable: Secuencia didáctica diseñada con base al Modelo 3UV

Definición conceptual. La secuencia didáctica es el resultado de establecer una serie de actividades de aprendizaje que tengan un orden interno entre sí, con ello se parte de la intención docente de recuperar aquellas nociones previas que tienen los estudiantes sobre un hecho, vincularlo a situaciones problemáticas y de contextos reales con el fin de que la información a la que va acceder el estudiante en el desarrollo de la secuencia sea significativa, esto es tenga sentido y pueda abrir un proceso de aprendizaje, la secuencia demanda que el estudiante realice cosas, no ejercicios rutinarios o monótonos, sino acciones que vinculen sus conocimientos y experiencias previas, con algún interrogante que provenga de la real y con información sobre un objeto de conocimiento. (Díaz-Barriga, 2013, p.4)

Definición operacional. Las actividades de la secuencia didáctica consideran nociones previas de los estudiantes y a partir de ellas se desarrollan considerando los aspectos de los usos de la variable del Modelo 3UV.

Variable: Comprensión integral del concepto de variable al identificar sus usos

Definición conceptual. "Entendimiento y manejo de sus distintas facetas, además de la posibilidad de pasar de una a otra de manera dinámica y flexible". (Ursini et al., 2005, p.153)

Definición operacional. Test evaluativo diseñado con base en los aspectos del uso de variable como número general, incógnita específica y variables relacionadas que establece el Modelo 3UV.

2.5 Marco contextual

El estudio se llevó a cabo en una secundaria general que se encuentra ubicada en un municipio perteneciente a la región de Ciudad Serdán del estado de Puebla. En esta institución educativa aproximadamente el 60% de la población escolar proviene de las diferentes juntas auxiliares del municipio, lo cual implica que la mayoría tiene que viajar para llegar a la escuela.

La muestra de alumnos con quienes se trabajó pertenece al primer grado, de los cuales se comienza con tres grupos de 25 elementos cada uno (de esta población se obtienen los resultados del test diagnóstico), y termina con 64 estudiantes entre 12 y 14 años de edad, repartidos de la siguiente manera: en el grupo A 20 y en los grupos B y C con 22 elementos cada uno. Los grupos A y C serán los experimentales y el grupo B el de control respectivamente.

La infraestructura de la escuela consta de 9 aulas, dirección, secretaria, un taller destinado a carpintería, baños, un salón de computación, dos plazas de usos múltiples (una de ellas cuenta con domo) y un terreno lo suficientemente amplio pero que no se ocupa para fines deportivos o atléticos.

Dicha infraestructura se encuentra en condiciones regulares, es decir, el mobiliario es antiguo e incómodo, las aulas tienen dimensiones reducidas para alojar a un promedio de 25 alumnos, en la gran mayoría de las aulas se tienen pizarrones pequeños y proyectores debido a que originalmente formaban parte de las aulas telemáticas, pero los proyectores en menos de la mitad de las aulas funcionan, los baños son insuficientes y regularmente escasea el agua, el taller de carpintería ha dejado de funcionar, el aula de computación tiene servicio de internet, y aunque cuenta con computadoras de escritorio y mini laptops estas requieren servicio de mantenimiento.

Las actividades económicas a las que se dedican en el municipio son la agricultura (maíz, calabaza, manzana, col, zanahoria, haba, frijol y papa), la maquila y el comercio; en cuanto a los servicios públicos cuenta con agua potable, luz, alumbrado público, transporte público, teléfono, internet, clínica de salud; pero a pesar de contar con estos servicios, la comunidad está catalogada con un alto índice de marginación social. El municipio cuenta con las siguientes instituciones educativas: 5 preescolares, 5 primarias, 3 secundarias, 2 bachilleratos y 2 universidades. Pero a pesar de estas diferentes opciones educativas un porcentaje muy bajo de la población las aprovecha, ya que en el sector de la población de 15 años y más, únicamente el 14.8% cuenta con instrucción media superior y el 4.4% con instrucción superior, según datos de INEGI.

Capítulo 3

MARCO TEÓRICO

De acuerdo al componente de ideas algebraicas fundamentales que señala Kriegler (2000) (citado en Sánchez, Hoyos y López, 2011) para definir el pensamiento algebraico, al álgebra se le considera como aritmética generalizada; con esta postura la enseñanza-aprendizaje de esta parte de la matemática deberá partir de las nociones que el estudiante tenga de la aritmética. En el marco de referencia aritmético que de Kieran y Filloy (1989) se da muestra de alguna de las nociones que los estudiantes tienen, como lo son:

> Forma de ver el signo igual [se entiende como dar una respuesta, en lugar de equivalencia]; dificultades con la concatenación y con algunas de las convenciones de notación de álgebra [lo que es correcto en aritmética puede no serlo en álgebra]; y su falta de habilidad para expresar formalmente los métodos y los procedimientos que usan para resolver problemas. (p. 229)

Un aspecto clave de la idea de entender el álgebra como aritmética generalizada, es el concepto de variable (Sánchez, Hoyos y López, 2011), para lo cual Kieran y Filloy (1989), señalan que el primer acercamiento que tienen los niños en la primaria con letras usadas dentro de ecuaciones es en las fórmulas para el cálculo de áreas [y perímetros] y como relaciones entre unidades de medida [m para metros].

Por lo tanto, para transformar el pensamiento aritmético en algebraico, una opción puede ser considerar aspectos del segundo que se pueden concretizar en el primero, es decir, partiendo de los primeros acercamientos que tienen los estudiantes con las variables intentar desarrollar la idea del álgebra como aritmética generalizada, de esta manera el concepto de variable permitirá facilitar dicha transición.

Existen posturas que interpretan a la variable de acuerdo a ciertas características de esta, algunas de la cuales se presentan a continuación:

De acuerdo con Usiskin (1988), la variable se puede concebir de las siguientes cuatro maneras:

➢Como una generalización de la aritmética

➢Como algo desconocido en los procedimientos para resolver ciertos tipos de problemas

➢Como una relación entre cantidades

➢Como miembro de un sistema abstracto

Küchemann (1981) clasificó las interpretaciones de las letras algebraicas en dos divisiones principales:

➢La letra se ignora, se le da un valor arbitrario, o se usa como el nombre de un objeto.

➢La letra se usa como un número específico desconocido o número generalizado.

Del mismo modo concluyó que la mayoría de los niños de 13 a 15 años no pueden lidiar con letras algebraicas como números desconocidos o números generalizados.

En MacGregor y Stacey (1997) demostraron que los estudiantes frecuentemente basan sus interpretaciones de letras y expresiones algebraicas en intuición y adivinanza, en analogías con otros sistemas de símbolos que conocen, o en una base falsa creada por materiales de enseñanza engañosos.

De acuerdo a lo expuesto hay diversas maneras de clasificar a la variable y de igual modo muchas dificultades que se presentan para comprenderla, pero dichas diferencias deben considerarse para que la enseñanza-aprendizaje del álgebra, a partir de la aritmética generalizada sea mejor comprendida y aplicada por los estudiantes, como señala Philipp (1992):

> No sería productivo redefinir las variables, pero los educadores deben aceptar las diferentes formas en que se utilizan las variables en los contextos matemáticos, de modo que los estudiantes puedan tener la oportunidad de reflexionar sobre estos muchos usos diferentes. El álgebra es sintácticamente fuerte pero semánticamente débil [la manipulación algorítmica de las variables es lo importante, mientras que su significado de acuerdo a la situación donde se aplican es irrelevante]. Quizás una forma de fortalecer el rol semántico del álgebra para los estudiantes sería incluir discusiones sobre las diferentes

maneras en que se usan los símbolos literales en las matemáticas, una discusión generalmente omitida de los libros de texto de matemáticas. (p.161)

Esta discusión puede incluirse tanto para definir el concepto de variable, como para analizar las diferentes maneras en que se usan las variables.

Es complejo definir el concepto de variable, debido a sus múltiples significados de acuerdo al contexto en que se aplique (Trigueros, Reyes, Ursini y Quintero, 1996), pero al crear situaciones en las que los estudiantes tengan la oportunidad de discutir sobre sus múltiples usos se formará el concepto de variable, y a la par las características semánticas del álgebra se desarrollarán permitiendo una mejor comprensión tanto del significado como aplicación de las variables.

Son muchos los usos que se le atribuyen a la variable, por lo que consideraremos únicamente aquellos que se adquieren cuando se inicia el estudio formal del álgebra, es decir, en el álgebra escolar o álgebra elemental que reciben los estudiantes cuando ingresan a la última etapa de su educación básica que es la secundaria en cualquiera de sus diferentes modalidades.

Atendiendo a estas dificultades Ursini, Trigueros, Escareño y Montes (2005), desarrollan el Modelo 3UV, el cual se adoptará en esta tesis como el eje rector para propiciar el análisis de los diferentes usos que se le atribuyen a la variable en este nivel educativo. Sus tres usos están íntimamente relacionados entre sí, por lo que, como señala Philipp (1992), los estudiantes no solo deben aprender a trabajar con muchos tipos de símbolos literales en un problema, sino que también deben aprender que un símbolo literal puede adquirir más de un solo uso dentro de un problema.

El Modelo 3UV es un instrumento que de acuerdo a sus autoras el profesor puede utilizar como un auxiliar para planificar y estructurar el trabajo de los estudiantes en el salón de clases, como guía en el diseño se actividades para los alumnos y para el diseño de instrumentos de diagnóstico. De tal manera que permite fomentar la comprensión del concepto de variable, a través de analizar "una serie de aspectos que corresponden a distintos niveles de abstracción con que se usan las variables en los cursos de matemáticas de secundaria" (Ursini et al., 2005, p.35), es decir, que la variable es multifacética y su uso o usos se determinan de acuerdo a la situación en donde se apliquen.

Las actividades que se diseñen de acuerdo al modelo pueden partir de las que se sugieren en los libros de texto, o bien, las que el profesor presente de acuerdo a su experiencia, en ambos casos, "el Modelo 3UV permite delimitar con mayor claridad el propósito de las actividades, y formular las preguntas específicas y necesarias para ayudar a los alumnos a desarrollar la comprensión del concepto de variable" (Ursini et al., 2005, p.45).

A continuación se presentan, de manera sintética, los aspectos que caracterizan a cada uno de los tres usos de la variable que conforman el Modelo 3UV:

Para trabajar exitosamente con problemas y ejercicios que involucran la variable como incógnita es necesario:

I1. Reconocer e identificar, en una situación problemática, la presencia de algo desconocido que puede ser determinado considerando las restricciones del problema.

I2. Interpretar la variable simbólica que aparece en una ecuación, como la representación de valores específicos.

I3. Sustituir la variable por el valor o valores que hacen de la ecuación un enunciado verdadero.

I4. Determinar la cantidad desconocida que aparece en ecuaciones o problemas, realizando operaciones algebraicas, aritméticas o de ambos tipos.

I5. Simbolizar las cantidades desconocidas identificadas en una situación específica y utilizarlas para plantear ecuaciones.

La variable como incógnita se considera variable debido a que antes de determinar un valor específico, este se desconocía y por lo tanto podría adquirir varios valores, y después de analizar la situación de los muchos valores que podría adquirir solo uno puede satisfacer la situación.

Para trabajar exitosamente con problemas y ejercicios que involucran el número general es necesario:

G1. Reconocer patrones y percibir regla y métodos, en secuencias y en familias de problemas.

G2. Interpretar la variable simbólica como la representación de una entidad general, indeterminada, que puede asumir cualquier valor.

G3. Deducir reglas y métodos generales, en secuencias y en familias de problemas.

G4. Manipular (simplificar, desarrollar) la variable simbólica.

G5. Simbolizar enunciados, reglas o métodos generales.

Y para trabajar exitosamente con problemas y ejercicios que involucran variables en una relación funcional es necesario:

F1. Reconocer la correspondencia entre variables relacionadas, independientemente de la representación utilizada (tablas, gráficas, problemas verbales, expresiones analíticas).

F2. Determinar los valores de la variable dependiente, dados los valores de la independiente.

F3. Determinar los valores de la variable independiente, dados los valores de la dependiente.

F4. Reconocer la variación conjunta de las variables involucradas en una relación funcional, independientemente de la representación utilizada (tablas, gráficas, problemas verbales, expresiones analíticas).

F5. Determinar los intervalos de variación de una de las variables. Dado el intervalo de variación de la otra.

F6. Simbolizar una relación funcional, con base en el análisis de los datos de un problema. (Ursini et al., 2005, p.35)

Los aspectos señalados en cada uso de la variable pasan por tres momentos, reconocer e interpretar su uso; poder manipularla; y utilizarla para simbolizar alguna situación en una expresión algebraica.

Con lo expuesto es muy importante considerar lo que señala Rosnick (1981):

Es importante que nos mantengamos al tanto de las dificultades que tienen nuestros estudiantes para entender las etiquetas, variables, constantes, parámetros y todo el resto de los usos de las letras. Es igualmente importante que tomemos conciencia de todos los peligros conceptuales a los que nuestros estudiantes pueden sucumbir. Después de todo, si no podemos ayudar a nuestros alumnos a comprender las x y las y, nunca conocerán la alegría de comprender los α y β. Más importante aún, abandonarán o serán ineptos en matemáticas, una materia que se ha convertido en un requisito previo para más y más carreras en el mundo de hoy. (p.420)

Capítulo 4

MÉTODO

La metodología del trabajo de investigación consiste en un estudio cuantitativo con alcance correlacional, al analizar la diferencia en la comprensión integral del concepto de variable entre grupos, al aplicarle a uno de ellos una secuencia didáctica diseñada con base al Modelo 3UV, utilizando un diseño de investigación experimental del tipo cuasiexperimento y para evaluar la hipótesis de diferencia de grupos se utiliza la prueba no paramétrica Chi cuadrada.

A los alumnos con quienes se llevó a cabo el estudio, se les aplicó un test diagnóstico a mediados del primer bimestre en su primer año de secundaria con el fin de identificar cómo es que ellos perciben el uso de las letras y qué es lo que hacen para resolver dos problemas en donde se plantea un dato que se desconoce.

Para inicios del cuarto bimestre se aplicó la estrategia didáctica diseñada con base al Modelo 3UV para introducir el concepto de variable y analizar sus tres usos. Considerando que los jóvenes en bimestres anteriores recibieron varias clases sobre algunos de estos usos, los grupos se clasificaron en dos experimentales y uno de control.

En los grupos experimentales se llevó a cabo la estrategia didáctica, que será descrita posteriormente, para introducir el concepto de variable y se analizó el aprendizaje en cada uno de sus tres usos. Mientras que el grupo control continuó con el estudio de los contenidos programados por los profesores titulares de la materia con la metodología tradicional.

La secuencia didáctica se trabajó durante cuatro sesiones siguiendo la propuesta de una enseñanza en espiral, para “acercar gradualmente a los alumnos al trabajo con los distintos usos de la variable en situaciones cada vez más complejas” (Ursini et al., 2005, p.39). En cada sesión se analizó un solo uso de la variable exclusivamente, comenzando como número general, en donde los valores de las variables están indefinidos, es decir, pueden adquirir cualquier valor. En cada sesión se procuró la reflexión de cada aspecto del concepto. A continuación se generaron actividades relacionadas con la identificación y determinación de la variable como incógnita específica. En esta sesión la variable puede ser determinada de acuerdo al análisis de la situación en que se presenta y solo puede adquirir un valor en específico. En la tercera sesión se hicieron actividades de acuerdo a la relación funcional de las variables, las cuales están relacionadas entre ellas, esto es, que los valores de una (dependiente) cambian de acuerdo al valor que adquiera la otra variable (independiente). La cuarta y última sesión se destinó a la integración de los tres usos de la variable, es decir, con una misma actividad se discutió cómo cambia el uso de la variable de acuerdo a la situación en la que se presenta.

Para finalizar, a los tres grupos se les aplicó un test evaluativo diseñado de acuerdo al Modelo 3UV, con el fin de comparar el aprendizaje obtenido en cada grupo. El análisis de los resultados del test evaluativo se realizó mediante la prueba Chi cuadrada. La cual nos proporcionó información para comparar los grupos experimentales con el de control. Determinando en qué medida la secuencia didáctica basada en el Modelo 3UV, está relacionada con la comprensión integral del concepto de variable y sus diferentes usos en el nivel de secundaria.

A continuación se describen los instrumentos utilizados en esta secuencia didáctica.

4.1 Test diagnóstico

El test diagnóstico se diseña considerando algunas de las características del marco de referencia aritmético de Kieran y Filloy (1989). Por ejemplo en la primera y segunda actividad del test se pretende conocer cómo los alumnos identifican algunas fórmulas para el cálculo de perímetros y áreas de figuras geométricas estudiadas en la escuela primaria, y al mismo tiempo cómo interpretan el uso de las letras en las fórmulas geométricas o en expresiones algebraicas como (m) y $(2m)$.

Figura 4.1 Primera actividad del test diagnóstico

1. Para qué has usado las siguientes fórmulas o expresiones:

Fórmula o expresión	Uso
$L+L+L+L$	
$L+L+L$	
$\frac{b \times h}{2}$	
$L \times L$	
$\frac{P \times a}{2}$	

Figura 4.2 Segunda actividad del test diagnóstico

2. ¿Qué significan para ti las siguientes expresiones?

Expresión	Significado
m	
$2m$	

En la tercera y cuarta actividad se solicita que resuelvan 2 problemas: en el primero la clave se encuentra en la frase cuesta el doble y se espera que los alumnos representen esta situación; el segundo problema les pide que representen y calculen la medida que hace falta para conocer el ancho de un patio. En este apartado, según el marco de referencia aritmético, los alumnos mostrarán una falta de habilidad para expresar de manera formal cómo resolvieron cada uno de los problemas presentados.

Figura 4.3 Tercera actividad del test diagnóstico

3. Un lapicero y una goma cuestan quince pesos. Si el lapicero cuesta el doble que la goma. ¿Cuánto cuesta cada objeto?

Utiliza el siguiente espacio para realizar lo que consideres necesario para calcular el costo de cada objeto:

Figura 4.4 Cuarta actividad del test diagnóstico

4. El patio de cierta casa es de forma rectangular. De largo mide cinco metros y tiene un área de diez metros cuadrados. ¿Cómo representarías la medida que hace falta del patio y cuánto mide?

Utiliza el siguiente espacio para representar la medida faltante y calcular cuánto mide:

En la quinta parte se les pide escriban el doble de un número utilizando lo estudiado en la escuela primaria, con el fin de contrastarlo con las actividades dos, ya que en ella se expresa el doble de un número. Así se identifican parte de sus conocimientos previos.

Figura 4.5 Quinta actividad del test diagnóstico

5. Con lo que has estudiado en Primaria en la materia de Matemáticas, ¿cómo escribirías "el doble de un número"?

Usa el siguiente espacio para que escribas tu respuesta

4.2 Secuencia didáctica

La secuencia didáctica se diseñó con base al Modelo 3UV aplicado a fórmulas geométricas conocidas por los estudiantes. El modelo está asociado a una propuesta de enseñanza del álgebra, la cual consiste en:

> Una enseñanza en espiral que acerque gradualmente a los alumnos al trabajo con los distintos usos de la variable en situaciones cada vez más complejas, para, de esta manera, abordar las diversas temáticas del álgebra. Cada una de las espirales contiene dos fases fundamentales: en la primera se trabaja con actividades que involucran uno solo de los tres usos de la variable consideradas en el modelo (incógnita específica, número general, variables relacionadas); en la segunda se trabajan actividades cuyo desarrollo requiere los tres usos de la variable. El propósito de la primera fase es fortalecer en los estudiantes la comprensión de los aspectos que caracterizan a cada uno de los distintos usos de la variable. El propósito de la segunda fase es que los alumnos desarrollen la capacidad de pasar entre los distintos usos de la variable de manera flexible. Cada giro en la espiral conlleva un mayor grado de complejidad y en él se repite este mismo patrón de actividades: primero se trabaja con los distintos usos de la variable en forma diferenciada, y posteriormente en forma integrada. (Ursini et al., 2005, p.40)

En la secuencia didáctica solo se consideró una sola espiral debido al tiempo autorizado para su aplicación en los grupos experimentales. Es decir, se diseñaron las tres actividades para cada uso de la variable, su actividad integradora y el test evaluativo para comparar la comprensión del concepto de variable alcanzado por cada uno de los grupos.

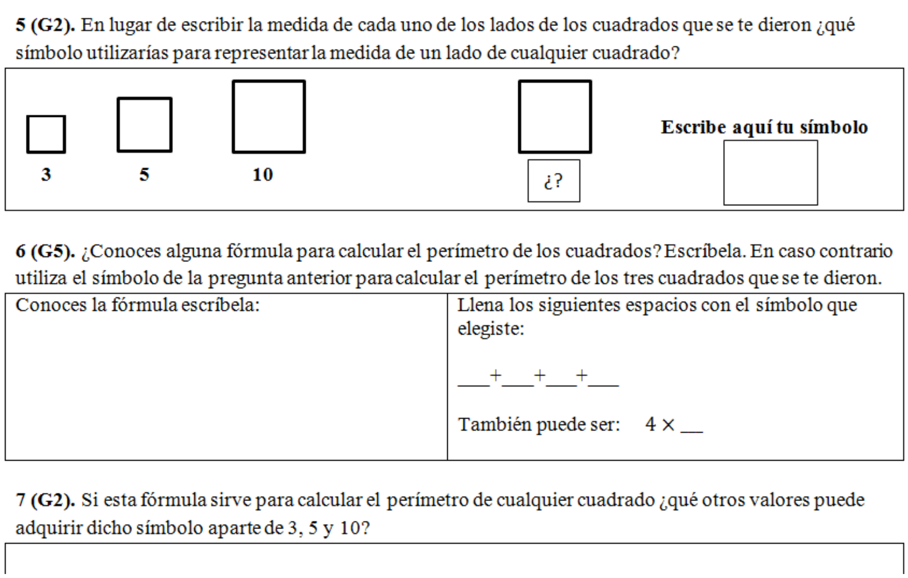
Antes de aplicar la secuencia se realizó una prueba piloto con alumnos de primer grado de Telesecundaria perteneciente a una junta auxiliar de un municipio del estado de Puebla. Esto con el fin de realizar los cambios necesarios a las preguntas de la secuencia didáctica y prever las posibles dificultades de los alumnos.

4.2.1 Actividad 1. La primera actividad tuvo dos propósitos, el primero llegar a la comprensión del concepto de variable, entendida como "un símbolo que puede representar cualquiera de los miembros de un conjunto específico, llamado el conjunto o dominio de reemplazo de la variable" (Dolciani et al., 1967; citado en Philipp, 1992). Y la segunda a analizar las características de la variable como número general indicadas en el Modelo 3UV.

Se decidió comenzar con este uso porque es la manera de comprender el concepto de variable desarrollada en los libros de texto con el uso que se le da en las fórmulas geométricas al asignarle valores generales. Y coincide con el tema: explicación del significado de fórmulas geométricas, al considerar las literales como números generales con los cuales es posible operar. Los alumnos estudiaron el uso de la variable como número general en el bloque I, específicamente en el eje sentido numérico y pensamiento algebraico, de acuerdo a lo que establece el programa de estudio vigente en 2011. Por lo tanto, la actividad 1 consiste en calcular perímetros de cuadrados debido a dos cuestiones, la primera que en sexto grado de la escuela primaria se introducen algunas fórmulas para calcular el perímetro de ciertas figuras, y la segunda que la introducción de fórmulas geométricas es el primer acercamiento que tienen los alumnos en relación a la manipulación de literales según Kieran y Filloy (1989).

Con esto se está atendiendo los conocimientos previos de los alumnos y para manipular material concreto se optó por construir tres cuadrados cuyos lados midieran 3, 5 y 10 centímetros respectivamente, los cuales se repartieron a los alumnos para que calcularan el perímetro de cada uno de ellos.

Figura 4.6 Parte de la primera actividad de la secuencia didáctica


5 (G2). En lugar de escribir la medida de cada uno de los lados de los cuadrados que se te dieron ¿qué símbolo utilizarías para representar la medida de un lado de cualquier cuadrado?

3 **5** **10** ¿? **Escribe aquí tu símbolo**

6 (G5). ¿Conoces alguna fórmula para calcular el perímetro de los cuadrados? Escríbela. En caso contrario utiliza el símbolo de la pregunta anterior para calcular el perímetro de los tres cuadrados que se te dieron.

Conoces la fórmula escríbela:	Llena los siguientes espacios con el símbolo que elegiste: ___+___+___+___ También puede ser: 4 × __

7 (G2). Si esta fórmula sirve para calcular el perímetro de cualquier cuadrado ¿qué otros valores puede adquirir dicho símbolo aparte de 3, 5 y 10?

Esta actividad les permitió analizar las semejanzas entre cada uno de los procedimientos para calcular el perímetro de cada uno de los cuadrados proporcionados, lo cual corresponde a las categorías (G1) y (G3) del Modelo 3UV. Posteriormente, la actividad los orientó a cambiar los valores de las medidas de uno de los lados del cuadrado por un símbolo (G2), es decir, una letra para representar dichas medidas y utilizarla en una fórmula geométrica (G5). De tal manera que los estudiantes concluyan que la letra que utilizaron para representar la medida de un lado del cuadrado puede adquirir muchos valores, dependiendo del cuadrado que se trate (G4).

A partir de esta actividad se orientó una discusión para que los propios estudiantes reflexionaran sobre el concepto de variable para ser mejor comprendido.

La prueba piloto nos dio indicios de que existe una confusión entre la fórmula para calcular el perímetro de un cuadrado con la fórmula para calcular su área. Es decir, aunque los alumnos identifican que el perímetro se calcula sumando la medida de cada uno de los lados de la figura, cuando se les preguntó qué fórmula geométrica conocen para representar lo que hicieron, escriben la fórmula para calcular el área del cuadrado o expresan lado por lado. Por lo tanto la actividad se modificó para que los alumnos se dieran cuenta de que al calcular el perímetro de un cuadrado se utiliza la suma de la medida de los 4 lados del cuadrado o bien, la multiplicación de 4 por el valor de la medida un solo lado.

4.2.2 Actividad 2. En esta actividad se analiza la variable como incógnita específica. Para lo cual se parte de un problema en el que los estudiantes tendrán que identificar que un dato se desconoce y tendrán que representarlo mediante un símbolo, esto corresponde a las categorías (I1) e (I5) del Modelo 3UV.

Figura 4.7 Parte de la segunda actividad de la secuencia didáctica

1 (I1). Dibujarás un rectángulo que mida de largo 10cm y tenga un perímetro de 30cm (recuerda que el perímetro es la suma de lo que miden todos los lados de la figura). ¿Qué lado desconoces?

2 (I1). A pesar del dato desconocido, ¿puedes dibujar un rectángulo con las medidas dadas? Sí o No. ¿Por qué?

3 (I5). ¿Qué símbolo utilizarías para representar el lado desconocido?

Desconozco el _______________ y lo voy a representar con el símbolo _____.

La literal que seleccionen los alumnos se utilizará para representar la situación planteada en el problema (I5) y después calcular su valor y comprobar que dicho valor sea el correcto (I4).

Durante este procedimiento se pretende que los alumnos identifiquen que el símbolo elegido también se trata de una variable, pero de los muchos valores que puede adquirir, solo uno en específico (I2) puede satisfacer la situación planteada.

El problema consiste en calcular el valor del ancho de un rectángulo cuando se ofrece la medida de su largo y su perímetro. Al plantear este problema con la fórmula geométrica para calcular el perímetro de cualquier rectángulo, se obtiene una ecuación de primer grado.

Esto se relaciona con lo que los alumnos previamente han estudiado. En el programa de estudio 2011 de matemáticas en el bloque III: eje sentido numérico y pensamiento algebraico, dentro del tema patrones y ecuaciones, se encuentra el contenido: "resolución de problemas que implique el planteamiento y la resolución de ecuaciones de primer grado de la forma $x + a = b; ax = b; ax + b = c,$ utilizando las propiedades de la igualdad, con a, b y c números naturales, decimales o fraccionarios".

Como se puede observar, este contenido tiene relación con la actividad propuesta y con el cálculo de áreas y perímetros en el último grado de la primaria.

Con la información obtenida de la prueba piloto se decidió modificar la redacción del problema, es decir, se describió entre paréntesis la manera de calcular el perímetro de la figura, debido a que los alumnos confundían el valor del largo con el del perímetro. Esto se decidió porque los alumnos establecían que el dato mayor debería ser el largo y el dato menor el ancho, mientras que en el problema el dato mayor se refería al perímetro y el menor al largo. Es decir, cuando se les solicita dibujar rectángulos, las indicaciones son: dibuja un rectángulo de (dato mayor en referencia al perímetro) y (dato menor en referencia al ancho).

Otra indicación que se decidió establecer de acuerdo a los resultados de la prueba piloto, fue indicar que se debe utilizar el símbolo elegido para representar el dato desconocido y así establecer la fórmula geométrica de acuerdo a las características del problema. La razón es porque lo que los alumnos realizaban era escribir el valor del dato desconocido (calculado previamente mediante tanteo o de manera mental), de tal manera que se dejaba de lado la posibilidad de utilizar símbolos para representar cantidades desconocidas y plantear ecuaciones.

Para finalizar la actividad los alumnos dibujaron el rectángulo de acuerdo a las características ofrecidas en el problema. Y se abre la discusión para establecer las diferencias, semejanzas y qué es lo que representan los símbolos utilizados hasta el momento en ambas actividades.

4.2.3 Actividad 3. En esta actividad se analiza el uso de variable como relación funcional. Dicha actividad consiste en que los alumnos trazarán triángulos equiláteros que aumentan la longitud de sus lados un centímetro, comenzando en uno y terminando en cinco.

Con los triángulos trazados los alumnos calcularán el perímetro de cada uno de ellos ordenándolos de menor a mayor para reconocer correspondencias entre variables (F1), es decir, la relación entre la medida de los lados y el perímetro del triángulo.

De acuerdo a los resultados que obtengan los jóvenes se les realizan algunas preguntas encausadas a analizar qué ocurre con el valor del perímetro del triángulo cuando el valor de la medida de un lado de la figura cambia, es decir, a que identifiquen que ocurre con el valor de un dato cuando el otro cambia y cuál de los dos es el que determina el valor del otro (F4), así como a determinar entre que valores se encuentra el perímetro cuando se ofrecen las medidas de un lado de dos triángulos equiláteros diferentes (F5).

Figura 4.8 Parte de la tercera actividad de la secuencia didáctica

Indicaciones. Completa la información de la tabla siguiente, compáralo con lo que hayas realizado y analiza los datos para responder las siguientes preguntas en los espacios indicados.

Longitud del lado del triángulo equilátero (cm)	Perímetro del triángulo equilátero (cm)
1	$3 \times 1 = 3$
2	$3 \times 2 = 6$
3	$3 \times 3 = 9$
4	$3 \times 4 = 12$
5	$3 \times 5 = 15$
6	
7	
8	
9	
10	

6 (F6). ¿Qué dato se repite en la tabla y qué representa?

7 (F6). ¿Cuáles son los dos datos que van cambiando y con cuáles signos los representarías?

Los datos que cambian son los siguientes:

1. ____________________________ y lo representaría con el signo ______.

2. ____________________________ y lo representaría con el signo ______.

Posteriormente, tienen que completar la información presentada en una tabla, que se corresponde con lo que los alumnos realizaron para calcular el perímetro de los triángulos equiláteros. Con dicha información los alumnos se percatan de qué dato es el que se repite y cuáles son los que van cambiando, para poder representarlos utilizando símbolos y así escribir una fórmula geométrica para calcular el perímetro de cualquiera de los triángulos equiláteros trazados (F6).

Ahora se procede a aplicar la fórmula geométrica establecida, primero se establecen tres medidas distintas de un solo lado de triángulos equiláteros para que calculen el perímetro de cada uno (F2). Como segunda aplicación se plantea el perímetro de tres triángulos equiláteros distintos para que calculen la medida de un solo lado de cada triángulo (F3).

Con lo analizado hasta el momento se les pide que lo apliquen a otra figura geométrica, como lo es el caso del pentágono regular, por lo cual tendrán que escribir una fórmula geométrica para calcular su perímetro (F6).

Por último, al igual que en las actividades uno y dos, se les pregunta cuáles son las semejanzas y diferencias entre los símbolos utilizados en cada una de las tres actividades realizadas, con el fin de iniciar la discusión para aclarar dudas y fortalecer la comprensión de los tres diferentes usos de la variable analizados.

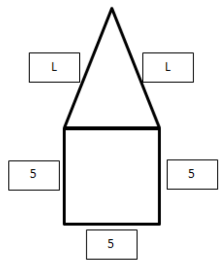
De acuerdo a la prueba piloto los cambios realizados consistieron en sustituir la palabra intervalo, por las palabras entre valores en la redacción de los reactivos. Y en la pregunta referida a representar los valores que van cambiando mediante símbolos, se determinó utilizar cierto espacio para completar por los alumnos que hiciera referencia a la variable independiente y dependiente.

4.2.4 Actividad integradora. Después de trabajar los tres usos de la variable de forma diferenciada, la actividad integradora tiene el propósito de llevar a los estudiantes a ver a la variable como un solo concepto que tiene diferentes facetas (Ursini et al., 2005).

La actividad parte de un problema referente a calcular el perímetro de la fachada de una torre. La fachada tiene la forma de una figura compuesta por un cuadrado y un triángulo (cuya base descansa sobre un lado del cuadrado). Para el caso I se hace referencia a la variable como número general, el caso II a la variable como incógnita específica y en el caso III a la variable como relación funcional.

Caso I

Figura 4.9 Fachada de la torre

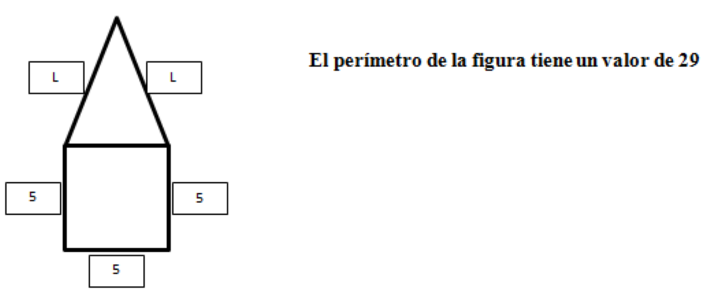


De acuerdo a la figura los estudiantes deben determinar el valor o los valores de la literal (L). Se pretende que los estudiantes identifiquen a la variable simbólica como la representación de una entidad general, indeterminada, que puede asumir cualquier valor (G2) (en el caso de la figura 1, los valores generales que puede adquirir la variable parten de un mínimo en adelante); deben describir su procedimiento para calcular el perímetro de la fachada (G3); y determinar la fórmula geométrica con los datos que se muestran en la figura 1 (G5), llegando a expresiones como: $5+5+5+L+L$ o algún tipo de simplificación.

Caso II

Se presenta la misma figura de la fachada, pero se anexa un dato que cambia por completo como es entendida la variable. El dato que se anexa es el valor del perímetro de la fachada de la torre.

Figura 4.10 Fachada de la torre modificada



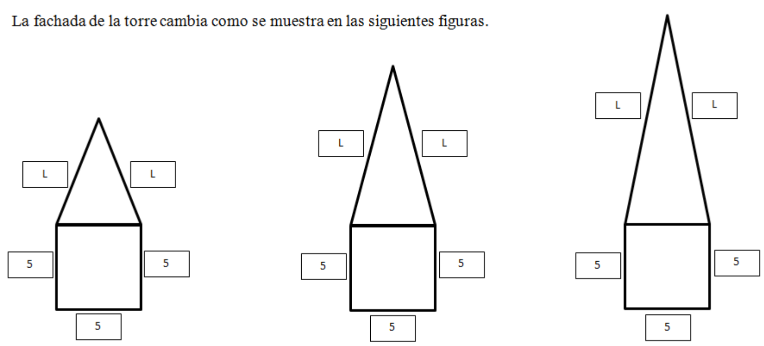
De acuerdo con esto los alumnos tienen que reinterpretar el uso que se le está dando a la variable (L), para lo cual tendrán que identificar que el valor desconocido de la variable se puede determinar, de acuerdo a las restricciones de la situación donde se plantea (I1); interpretar a la variable como la presencia de un valor en específico (I2); representen el perímetro de la fachada que ya es conocido mediante una fórmula geométrica (I5); describan detalladamente el procedimiento para calcular el valor de la variable (I4); y comprueben que el valor calculado sea el correcto (I3).

Con este cambio de uso de la variable al añadir un dato, se espera que los alumnos establezcan expresiones como: $29 = 5 + 5 + 5 + L + L$ o alguna de sus simplificaciones.

Caso III

Para este tercer caso el dibujo sufre algunos cambios, ahora se considera que la altura de la torre va cambiando, es decir, que la altura del triángulo aumenta.

Figura 4.11 Cambios en la fachada de la torre



Considerando la figura 2 se realizan preguntas acerca de cómo cambia el perímetro de la fachada de la torre (F1); cómo es la relación entre el valor de la variable (L) y el valor del perímetro (F4); y mediante las respuestas se diseña una fórmula geométrica para calcular el perímetro de las tres fachadas. (F6).

La fórmula geométrica que se establezca se utiliza para calcular el valor del perímetro de la fachada al asignarle un valor arbitrario a la variable (L) (F2) y a la inversa, se propone un valor arbitrario para el perímetro de la fachada y se calcula el valor de la variable (L) (F3); y por último para determinar el valor más grande que pueda adquirir la variable (L), cuando se determine el valor mayor que pueda tener el perímetro (F5).

Para este uso de la variable se pretende que los estudiantes lleguen a una expresión como: $P = 5 + 5 + 5 + L + L$ o alguna forma simplificada.

Como penúltima actividad los estudiantes realizarán dos cuadros comparativos. En uno de ellos se mostrarán las tres diferentes fórmulas geométricas establecidas de acuerdo al uso de la variable. Y en el segundo los posibles valores que puede adquirir la variable en cada caso. Esto para sintetizar los usos que la variable fue adquiriendo de acuerdo a la situación en la que se presentó.

Para finalizar la actividad integradora se les pregunta a los estudiantes: ¿Qué te parecieron las actividades? ¿Qué fue lo que más te gustó? ¿Qué fue lo que menos te agradó? ¿Qué te gustaría cambiar?

Con esta actividad integradora basada en un mismo problema con ciertas modificaciones, se pretende que los usos de la variable sean identificados y diferenciados, con la finalidad de fortalecer y promover la comprensión integral del concepto de variable y lo multifacética que esta puede llegar a ser.

4.3 Test evaluativo

Está conformado por 3 preguntas para cada uso de la variable. La mayoría de las preguntas al igual que las actividades fueron basadas en problemas referentes a utilizar fórmulas geométricas para calcular el perímetro de figuras conocidas por los jóvenes y para las que no, se describen cuáles fueron las características que se tomaron en cuenta.

Las preguntas 1, 5 y 9 están orientadas a identificar el uso de la variable como número general, tomando como referencia las categorías G1, G2 y G5. En la pregunta 1, se involucran las tres categorías, porque deben reconocer patrones (G1), y con esto poder simbolizar mediante enunciados o reglas (G5) dichos patrones, interpretando a la variable en su uso como número general (G2). Para las preguntas 5 y 9 la categoría que se pone de manifiesto es la G2, en la pregunta 5 las variables aparecen en una expresión de relación funcional, se pregunta por la que aparece en el segundo miembro que en cierto modo adquiere cualquier valor; en la pregunta 8, aparece una figura geométrica que hasta el momento no es nada familiar para los estudiantes, se trata del pentágono regular, pero esto no interviene para que identifiquen que la variable se usa como número general.

Las preguntas 3, 6 y 8 van referidas al uso de la variable como incógnita específica. En la pregunta 3 ya se anuncia el uso de la variable, por lo que se solicita que planteen una fórmula que describa la situación (I5), para observar cómo simbolizan la cantidad desconocida. La pregunta 6 es la única que no se basa en el perímetro, sino que hace referencia al área de la figura, pero en ella no se tiene que realizar ningún tipo de operación, solo hace referencia a las categorías (I1) e (I2). La pregunta 8 presenta una ecuación con el nombre de fórmula y se pregunta por los valores que puede tomar la variable, de tal manera que se interprete a la variable como la representación de un valor en específico (I2).

Por último las preguntas 2, 4 y 7 hacen referencia al uso de las variables en una relación funcional. Para la pregunta 2 con base en una fórmula geométrica para calcular el perímetro de un cuadrado, se pretende que los alumnos reconozcan e identifiquen la correspondencia entre variables relacionadas (F1). En la pregunta 4 se presenta una situación en que se debe de calcular algunos datos a partir de otros conocidos, por lo que en cierto momento el uso de la variable entra en el de incógnita específica, y a su vez, dentro del uso de relación funcional al determinar el intervalo de variación, dando los valores de la variable dependiente (F5 y F3).

En la pregunta 7 se presenta una fórmula para calcular el perímetro de cierto rectángulo conociendo su largo, y se ofrecen dos valores arbitrarios para el ancho, con esto se dan los valores de la variable independiente para que se calcule el valor de la variable dependiente (F2).

Con las respuestas que se obtengan de los estudiantes se pretende dar cuenta de la habilidad con la que cuentan para identificar y diferenciar el uso que se le está dando a las variables, con el fin de analizar el grado de comprensión adquirido sobre el concepto de variable y los tres usos que se le dan en la escuela secundaria de acuerdo al Modelo 3UV.

Capítulo 5

RESULTADOS, ANÁLISIS Y DISCUSIÓN

5.1 Test diagnóstico

En la primera parte del test se preguntó a los alumnos ¿para qué has usado las siguientes fórmulas o expresiones? Las fórmulas geométricas utilizadas fueron para el cálculo de perímetros y áreas de cuadrados y triángulos respectivamente, que son las que se estudian en el quinto grado de primaria. También se colocó la fórmula geométrica para el cálculo de áreas de polígonos regulares, para observar la interpretación de los jóvenes, debido a que esta expresión no se estudia en primaria, sino lo que analizan es cómo calcular su perímetro.

De acuerdo a las respuestas obtenidas se realizó la siguiente clasificación con los respectivos porcentajes alcanzados dentro de la muestra:

Tabla 5.1 Resultados de la primera pregunta del test diagnóstico

Categorías	Porcentaje de la muestra
UF1. No identifica el uso que tienen las fórmulas	$10.\bar{6}$
UF2. Asigna valores a las letras y/o simplifica expresiones	$10.\bar{6}$
UF3. Interpretación parcial de fórmulas	56
UF4. Identifica el uso de algunas fórmulas	$6.\bar{6}$
UF5. Identifica algunas figuras en las que se aplica la fórmula	$6.\bar{6}$
UF6. Identifica el uso de la fórmula y a que figura se aplica	$9.\bar{3}$

En la primera clasificación (UF1) los alumnos no pudieron identificar el uso de las cinco fórmulas geométricas presentadas, expresando que no las estudiaron, no las entienden, no las utilizan y en el peor de los casos escribieron no sé o dejaron en blanco el espacio para su respuesta.

La clasificación (UF2) encierra mezclas entre asignar valores a las letras, simplificar expresiones y describir las fórmulas, dándose casos como asignarle valores en especial a la letra (L) que es la que se utiliza para las fórmulas de perímetros. También ocurre que los alumnos escriben expresiones equivalentes como $4\ x\ L\ o\ 4L; 3\ x\ L\ o\ 3L$, con esto se puede imaginar que de algún modo están interpretando que con las letras se puede operar. Para el caso de las fórmulas para calcular áreas los alumnos las describieron, es decir, interpretaron a las letras como la inicial de una parte de la figura.

En la clasificación (UF3) los alumnos identifican de manera parcial las fórmulas, es decir, indican de manera indirecta que se trata de ellas al describirlas de acuerdo a la etiqueta de interpretación que le dan a las letras, pero no explican a qué figura geométrica se aplican, ni cuál es su uso. Se presentan dos casos en particular que hacen referencia a que las letras se utilizan para representar partes de figuras geométricas, con esto se vuelve a interpretar a las letras como etiquetas, pero con cierta identificación geométrica, esto es, que las letras van a un lado de lo que representan en la figura.

En la categoría (UF4) los jóvenes identifican algunos de los usos de las fórmulas, casi en el mismo porcentaje identifican cuando se usan para calcular perímetros como para áreas; y cuando se equivocan establecen que el uso es para calcular perímetros, lo cual hace referencia a que los alumnos están más familiarizados con el cálculo de perímetros.

Para la categoría (UF5) sucede lo contrario a la clasificación anterior, los jóvenes identifican que la fórmula se aplica a ciertas figuras geométricas pero no señalan el uso que tiene la fórmula y las figuras que identifican son las que corresponden al cálculo de perímetros.

En la última categoría (UF6) los estudiantes identifican el uso de la fórmula y a qué figura geométrica se aplica. Para la quinta fórmula geométrica solo una señorita estableció que la utiliza para obtener el área de figuras como el hexágono, pentágono, etcétera. En la clasificación anterior de igual manera solo un joven identificó la fórmula al indicar que la letra “a” representa la apotema de la figura, y con esto da muestra que puede identificar a qué figura se aplica la fórmula.

La segunda pregunta del test de igual manera va referida a cómo los estudiantes interpretan algunas expresiones, solo que estas no tienen ninguna relación con fórmulas geométricas, sino que los alumnos pueden encontrar alguna interpretación con el uso de unidades de medida. Las respuestas a esta pregunta se clasificaron y los porcentajes alcanzados se presentan en la tabla 5.2.

Tabla 5.2 Resultados de la segunda pregunta del test diagnóstico

Categoría	Porcentaje de la muestra
SL.1 Sin significado	$9.\overline{3}$
SL.2 Metro y 2 metros	$37.\overline{3}$
SL.3 Metro y metro cuadrado	$38.\overline{6}$
SL4. Significa una cantidad y el doble de una cantidad	$1.\overline{3}$
SL5. Otras	$13.\overline{3}$

Para la primera categoría dejaron en blanco el espacio de respuesta.

Entre las categorías (SL2) y (SL3) se encuentra poco más del 75% de la población, lo que indica que la mayoría de los alumnos interpretan a la letra como una etiqueta que representa la unidad metro; además los jóvenes de la categoría (SL3) confundieron al coeficiente con el exponente, al expresar que se trata de metros y metros cuadrados.

La clasificación (SL4) fue inesperada totalmente, pero hubo un alumno que interpretó las expresiones como una cantidad para la letra (m), y el doble de una cantidad para (2m), lo cual indica que la literal está siendo interpretada como algo que puede adquirir algún valor numérico, es decir, que sin darse cuenta el estudiante está interpretando a la letra como una variable.

En la categoría (SL5) se reunieron respuestas que tienen que ver con interpretar a la literal como acciones, es decir, realizar una suma, hacer mediciones, usarla para dar respuestas o que significa múltiplo. Las respuestas que llaman la atención fueron tres, una de ellas explica que la expresión (2m) es porque se suma $m + m$; la segunda que representan las medidas de alguna figura geométrica y la tercera que (m) significa mediatriz y (2m) expresa una sucesión y se le aumentan cinco unidades, escribiéndola como $2m + 5$.

La pregunta 3 plantea una situación en donde un artículo de papelería cuesta el doble que el otro y por ellos se paga cierta cantidad y de las respuestas obtenidas se realiza la siguiente clasificación (el primer dígito que aparece en la categoría indica el número de pregunta):

Tabla 5.3 Resultados de la tercera pregunta del test diagnóstico

Categoría	Porcentaje de la muestra
3RP1. Respuesta correcta	52
3RP2. Respuesta incorrecta	$26.\overline{6}$
3RP3. Comprensión parcial	16
3RP4. Sin respuesta	$5.\overline{3}$

En la primera categoría los estudiantes comprenden la situación que plantea el problema, esto es, que un objeto cuesta el doble que el otro y cuál es su costo total, pero no explican cómo obtuvieron los precios de los objetos en su proceso de solución, indicando que los obtuvieron por tanteo.

Para la segunda categoría (3RP2) los jóvenes contestaron incorrectamente, ya que comprendieron parcialmente el problema, porque aun cuando identificaron que uno de los artículos cuesta el doble del otro, omitieron el precio que se pagó por ambos artículos.

En (RP3) los jóvenes realizan muchas operaciones, en su mayoría parten del costo total de la compra y a esta cantidad le aplican el doble, y de ningún modo dan detalle que es uno de los objetos el que cuesta el doble que el otro, lo cual indica que el problema no se comprendió adecuadamente.

En la última categoría se obtuvo el porcentaje más bajo, que corresponde a los alumnos que no contestaron la pregunta, lo cual implica que en definitiva no comprendieron la situación problemática presentada.

La siguiente situación problemática plantea que los alumnos representen y calculen el lado que se desconoce de un terreno de forma rectangular, para lo cual se proporciona la medida del largo y área del terreno. Las respuestas obtenidas se clasificaron del siguiente modo:

Tabla 5.4 Resultados de la cuarta pregunta del test diagnóstico

Categoría	Porcentaje de la muestra
4RP1. Dibujo sin representación	$14.\overline{6}$
4RP2. Dibujo	$17.\overline{3}$
4RP3. Sin identificar	28
4RP4. Operaciones	$25.\overline{3}$
4RP5. Sin respuesta	$14.\overline{6}$

En la primera categoría los alumnos dan muestra de que comprenden la situación que se les plantea, ellos dibujan un rectángulo que es la figura que representa la forma del terreno, pero no utilizan algún símbolo o utilizan otra manera para representar la medida que se desconoce, pero si identifican que se trata del ancho del terreno y pueden calcular su valor. Como en el problema anterior no dan muestra de su proceso de solución, lo cual indica que por tanteo o mentalmente llegan a calcular el valor del ancho del terreno.

En la categoría (4RP2) los jóvenes solo dibujan la forma del terreno con los datos proporcionados sin utilizar adecuadamente las unidades que se proporcionan y no calculan el valor del lado desconocido.

En la siguiente clasificación los alumnos no identifican cuales son las medidas proporcionadas del terreno, ya que confunden el largo con el área y el largo con el ancho, esto indica que omiten las unidades que se les proporciona en el problema. En (4RP4) además de que no identifican las medidas que les proporciona el problema tratan de resolverlo al multiplicar los valores dados, obteniendo una respuesta incorrecta.

La última categoría indica que no se comprendió el problema, ya que no lo respondieron. Al comparar los porcentajes de respuestas en blanco entre ambos problemas, el segundo resultó más complicado de comprender para los jóvenes.

Para la última pregunta del test de diagnóstico, referente a analizar cómo los estudiantes escriben el doble de un número, se obtuvo la siguiente clasificación de respuestas con su respectivo porcentaje:

Tabla 5.5 Resultados de la quinta pregunta del test diagnóstico

Categoría	Porcentaje de la muestra
DN1. Multiplicar o sumar	$6.\overline{6}$
DN2. Multiplicar	$29.\overline{3}$
DN3. Sumar	24
DN4. Operaciones	$25.\overline{3}$
DN5. Sin respuesta	$14.\overline{6}$

En (DN1) lo que resulta relevante es que los alumnos indicaron que multiplicar por dos o sumar dos veces "algún número", y este algún, da indicios de que los alumnos consideran no un número en específico, sino cualquier, dando pauta a introducir el uso de literales, es decir, que hay un modo de poder escribir el doble de un número y que ese número puede ser cualquier número.

En las categorías (DN2 y DN3) escriben el doble de un número específico, ya sea al multiplicarlo por dos o sumarlo dos veces, esto también se puede usar para llegar a la categoría anterior y después a la expresión matemática.

En (DN4) los alumnos expresan un número que es el doble de otro, o utilizan la división entre dos para indicar cual ese número, en otros casos redactan que calculando ese número o solo indican hacer alguna operación.

La última categoría indica que la pregunta no tuvo respuesta, lo cual hace referencia a que los alumnos no comprendieron la pregunta.

Con estos resultados se pueden concluir dos cuestiones, la primera que los alumnos continúan identificando a las variables en su primer acercamiento al álgebra como etiquetas, es decir, que las letras o literales usadas en las fórmulas geométricas significan la inicial de la palabra que representan, como lo señaló Rosnick (1981). Y la segunda cuestión es que los estudiantes no pudieron justificar sus respuestas al explicar su procedimiento de solución de manera detallada, como lo expresan en su marco de referencia aritmético de Kieran y Filloy (1989).

Pero a pesar de encontrar que se sigue repitiendo lo identificado desde que se inició la investigación en la didáctica del álgebra, algunas de las respuestas de los estudiantes dan pauta a considerar que el pensamiento algebraico tiene una muy buena oportunidad de desarrollarse, considerando aspectos concretos que permitan acceder a lo abstracto, es decir, desarrollar el pensamiento algebraico a partir de las generalizaciones de la aritmética.

5.2 Secuencia didáctica

5.2.1 Actividad 1. En esta primera actividad de la secuencia didáctica se pretende introducir el concepto de variable analizando su uso como número general, a partir de los conocimientos previos de los alumnos, para lo cual se les proporciono a cada uno tres figuras de cuadrados de diferente tamaño, de 3, 5 y 10 cm por lado respectivamente para que calculen su perímetro siguiendo una serie de preguntas diseñadas con base al Modelo 3UV, de los cuales se obtuvieron los siguientes resultados que se muestras en la siguiente tabla.

Tabla 5.6 Procedimientos para calcular el perímetro de los cuadrados proporcionados

Categoría	Porcentaje de la muestra
PS. Perímetro suma	19
PM. Perímetro multiplicación	67
PSM. Perímetro suma y multiplicación	7
PI. Perímetro incompleto	7

En la categoría (PS) los jóvenes midieron cada uno de los lados de las figuras que se les repartió para después sumarlas y conocer el perímetro de las tres figuras.

En la clasificación (PM) donde se encuentra la gran mayoría de los alumnos, ellos argumentan que al medir los lados de las figuras se dieron cuenta que se trata de un cuadrado y por lo tanto, para conocer su perímetro la medida de uno de sus lados se multiplica por cuatro.

Para la categoría (PMS) los alumnos realizan ambas operaciones (sumar y multiplicar) para calcular el perímetro de los tres cuadrados, en un solo caso utilizo la suma para el primer y tercer cuadrado y la multiplicación para el segundo; y en la mayoría de las explicaciones del procedimiento utilizado mencionan que hicieron uso de la multiplicación y en los demás casos que solo midieron los lados del cuadrado.

En la última categoría (PI) dejaron inconclusa la actividad, dejando muestra que intentaron sumar la medida de los lados de los cuadrados y en un caso escribieron la expresión lxl pero no explican cómo usarla, sino se presenta como alguna fórmula que recordaron.

Con esta primera parte de la actividad al analizar las semejanzas entre cada uno de los procedimientos para calcular el perímetro de cada uno de los cuadrados proporcionado, se atiende a las categorías (G1) y (G3) del Modelo 3UV, poniéndose de manifiesto en las respuestas de las preguntas 3 y 4, cuando explican que el procedimiento fue el mismo y solo cambio la medida del cuadrado.

Posteriormente la actividad los orienta a que en lugar de usar los valores de las medidas de uno de los lados del cuadrado utilicen un símbolo (G2), es decir, una letra para representar dichas medidas y utilizarla en una fórmula geométrica (G5). De tal manera que los estudiantes concluyan que la letra que utilizaron para representar la medida de un lado del cuadrado puede adquirir muchos valores, dependiendo del cuadrado que se trate (G4).

Para las categorías (G2 y G5) se obtuvo la siguiente clasificación:

Tabla 5.7 Resultados de acuerdo a los aspectos G2 y G5 del Modelo 3UV

Categoría		**Porcentaje de la muestra**
PS. Perímetro suma	PS-S	17
	PS-SF	2
PM. Perímetro multiplicación	PM-S	50
	PM-SF	17
PSM. Perímetro suma y multiplicación	PSM-S	2
	PSM-SF	5

En todas las categorías los estudiantes hicieron uso de algún símbolo para representar la medida de un lado del cuadrado, el cual fue una letra del abecedario; la diferencia en esta clasificación radica en que algunos jóvenes solamente escribieron el símbolo (-S) mientras que otros además de expresar un símbolo hicieron referencia a que conocían una fórmula para calcular el perímetro de cualquier cuadrado (-SF). En el caso de (PSM-SF) y (PM-SF) los alumnos expresaron fórmulas como $(l + l + l + l)\ o\ (4\ x\ L)$, lo que indica que recordaban como calcular el perímetro del cuadrado.

En la penúltima pregunta se pide a los estudiantes dar un nombre al símbolo utilizado, con el fin de analizar sus características, la respuesta se obtuvo en plenaria con orientación del profesor, y las características del símbolo se centraban a que su valor está variando, es variante, tiene variación, y con esos nombres llegaron a la palabra variable, relacionándola con un símbolo cuyos valores están variando. Con esta conclusión la pregunta 7 se puede contestar estableciendo que el símbolo elegido puede adquirir muchos valores.

Lo último que se les pregunto a los alumnos fue ¿qué te pareció la actividad? Y a todos les gusto la actividad, aun a quienes no la terminaron porque la percibieron difícil, y para quienes la terminaron expresaron que aunque esto ya lo habían visto les sirvió para recordarlo y aprehender algo nuevo, como el nombre que reciben las letras en la fórmulas y su uso.

Con la actividad 1 se cumple parte de la primera espiral del método de enseñanza, iniciando con la introducción del concepto de variable mediante el análisis de su uso como número general.

5.2.2 Actividad 2. En esta actividad se analiza la variable como incógnita específica. Para lo cual se parte de un problema en el cual los estudiantes tendrán que identificar que un dato se desconoce y tendrán que representarlo mediante un símbolo, esto corresponde a las categorías (I1) e (I5) del Modelo 3UV.

Las respuestas obtenidas se clasificaron de la siguiente manera, utilizando la categoría (I1) del Modelo 3UV:

Tabla 5.8 Resultados de acuerdo al aspecto I1 del Modelo 3UV

Categoría	Porcentaje de la muestra
I1-S	87
I1-N	13

Se utiliza (-S) para señalar que los alumnos identifican que un dato se desconoce y (-N) para los que no identifican que dato se desconoce. La gran mayoría de los estudiantes pudieron identificar el dato desconocido, que en la situación planteada se trata del ancho del rectángulo, pero algunos alumnos lo señalaron como el lado más corto y posteriormente lo llamaron ancho.

Todos los jóvenes incluso quienes no identificaron cual es el lado que se desconoce, hasta que en la pregunta número 3 se les orienta a identificarlo, utilizaron un símbolo para representarlo, las literales utilizadas fueron variadas, que no tenían que ver con la inicial de la palabra ancho. Con este símbolo escribieron una expresión para representar la situación planteada (I5), quedando por ejemplo $30 = 10 + U + 10 + U$.

Para las respuestas de las preguntas 5 y 6 se identificó cierta relación, la cual se puede analizar mediante la siguiente tabla:

Tabla 5.9 Resultados de las preguntas 5 y 6 de acuerdo al aspecto I2 del Modelo 3UV

Categoría	**Porcentaje de la muestra**
I1-S/I2-S	76
I1-S/I2-N	11
I1-N/I2-S	4
I1-N/I2-N	9

La tabla vuelve a mostrar los alumnos que si identificaron que algo se desconoce y los que no, pero se introduce otra categoría, que tiene que ver con que los estudiantes interpreten al símbolo elegido como una variable que representa un valor en específico (I2), (/I2-S) para los que sí interpretan que es un valor específico y (/I2-N) para los que no.

Pero la primera interpretación que realizaron los jóvenes fue la de número general (pregunta 6), es decir, se quedaron con el uso analizado en la actividad anterior; hasta que en ambos grupos experimentales un alumno respondió: que puede tener cualquier valor posible, pero en este caso se habla específicamente de un valor de 5. Este comentario se utilizó para cuestionar al resto de la clase la respuesta obtenida en la pregunta anterior (pregunta 5), propiciando que cambiaran su respuesta a interpretar a la variable como de los muchos valores que puede adquirir solo uno se utiliza para resolver la situación planteada.

Y con este cambio en la interpretación de la variable se identifica la siguiente relación, los estudiantes que identifican que algo se desconoce e interpretan a la variable en su uso como número específico, explican de una mejor manera el procedimiento de solución y pueden comprobar su resultado, mientras los que no aun identificando el dato desconocido no interpretaron el uso de la variable que adquiere en esta situación su procedimiento de solución es confuso y en la comprobación no usan el resultado que previamente calcularon.

En esta segunda actividad referida al uso de la variable que más difusión se le da, en primera instancia pareciera que los alumnos se quedaron con la interpretación de la variable en su uso como número general. Pero gracias a que un joven identificó que de cualquier valor que puede adquirir la variable, para la situación en que se está usando solo uno es el que ayuda a resolver la situación planteada en la actividad. Con esta participación se pudo orientar a los alumnos para que en plenaria se identificara el uso de la variable como número específico y así alcanzar el objetivo de esta segunda parte de la espiral. Para terminar la actividad se les solicita a los alumnos que escriban la diferencia entre el uso de los símbolos utilizados hasta el momento, obteniendo los resultados que muestra la tabla anterior.

5.2.3 Actividad 3. En esta actividad se analiza el uso de variable como relación funcional. Dicha actividad consiste en trazar triángulos equiláteros que aumentan la longitud de sus lados un centímetro, comenzando en uno y terminando en cinco, para después calcular su perímetro ordenar los resultados de menor a mayor, para reconocer correspondencias entre variables (F1), es decir, la relación entre la medida de los lados y el perímetro del triángulo.

Las preguntas 3 y 4 están encauzadas a identificar que ocurre con el valor de un dato cuando el otro cambia y cuál de los dos es el que determina el valor del otro (F4), obteniendo los siguientes resultados:

Tabla 5.10 Resultados de las preguntas 3 y 4 de acuerdo al aspecto F4 del Modelo 3UV

Categoría	Porcentaje de la muestra
F4-S	88
F4-N	12

La clasificación realizada con respecto a (F4), significa que cuando va acompañada de (-S) los estudiantes sí pudieron identificar que el valor del perímetro aumenta cuando la longitud de cada lado del triángulo equilátero también lo hace, además de que las medidas de los lados del triángulo determinar el valor de su perímetro; mientras que la terminación (-N) se refiere a quienes no identificaron dicha relación. La gran mayoría de los alumnos advierten la variación conjunta del perímetro en relación con la longitud de sus lados, además de establecer que es la longitud de los lados la que determina el valor del perímetro. En este punto de la actividad se orientó a los jóvenes a que mediante una analogía identificaran la relación entre longitud de los lados con el valor del perímetro. La analogía consistió en comparar la relación antes mencionada con la que tienen ellos con sus padres, es decir, los alumnos dependen de sus padres, ellos tienen que obedecerlos, y en los triángulos equiláteros presentados el perímetro depende del valor de la longitud, por lo tanto el perímetro es como si fueran los alumnos y la longitud de los lados los padres. Con esto se estableció que la variable dependiente son los alumnos y la variable independiente los padres, es decir, variable independiente la longitud y variable dependiente el perímetro, o como lo establecieron los jóvenes que una variable manda y la otra obedece.

Posteriormente los alumnos en la tabla que tienen que completar sintetizan lo que realizaron para calcular el perímetro de cada triángulo equilátero, para que se percaten cual es el dato que se repite y cuáles son los que van cambiando, de tal manera que mediante símbolos los representen y con ellos escriban una fórmula geométrica para calcular el perímetro de cualquiera de los triángulos equiláteros trazados (F6). Esto lo realizan de la pregunta 6 a 8, de las cuales se obtuvieron los siguientes resultados:

Tabla 5.11 Resultados de las preguntas 6 a 8 de acuerdo al aspecto F6 del Modelo 3UV

Categoría	Porcentaje de la muestra
F6-SSS	9.5
F6-SCS	78.5
F6-N	12

En (F6-SSS) se refiere a que los alumnos sí pudieron simbolizar la relación funcional, pero los símbolos que propusieron no los tomaron en cuenta, sino que utilizaron la (P) para perímetro y la (L) para longitud del lado. Mientras que en la categoría (F6-SCS), que es donde se encuentra la mayoría de la muestra, los jóvenes utilizaron los símbolos que propusieron para establecer la fórmula geométrica, esto es, si para representar la medida de un lado propusieron el símbolo (K) y para el perímetro (J), entonces su fórmula quedó expresada de la siguiente manera: $k\ x\ 3 = J$. Para la última categoría (F6-N) los símbolos que propusieron no les funcionó para establecer una fórmula o no los relacionaron adecuadamente, sino describieron lo que se tiene que realizar para calcular el perímetro.

En las preguntas 9 y 10 se solicita a los alumnos que aplique la fórmula geométrica que establecieron, primero para calcular el perímetro de tres triángulos equiláteros (F2) y después para calcular la medida de un solo lado del triángulo equilátero a partir de conocer su perímetro (F3). Las respuestas encontradas se muestran a continuación:

Tabla 5.12 Resultados de las preguntas 9 y 10 de acuerdo al aspecto F3 del Modelo 3UV

Categoría	Porcentaje de la muestra
F2-S/F3-S	60
F2-S/F3-N	33
F2-N/F3-N	7

La categoría (F2-S/F3-S) hace referencia a que los estudiantes sí pudieron aplicar la fórmula propuesta para calcular valores dependientes a partir de los valores independientes y a la inversa, calcular valores independientes a partir de los dependientes. En la segunda categoría (F2-

S/F3-N) únicamente calcularon el primer caso. Y en (F2-N/F3-N) no pudieron aplicar la fórmula para ningún caso.

En esta tercera parte de la espiral en que el uso de la variable se presenta como relación funcional, aunque la gran mayoría de los alumnos identificaron que entre la medida de los lados de los triángulos equiláteros y el cálculo de su perímetro existe cierta relación, muy pocos jóvenes expresaron en qué consiste este uso y la diferencia que tiene con respecto a los anteriores.

5.2.4 Actividad integradora. En esta actividad con un mismo problema con ciertas modificaciones se pretende que los estudiantes identifiquen lo multifacético de la variable, es decir, cómo la variable cambia de uso de acuerdo a las características de la situación en que se presente. Por lo tanto las categorías a analizar del Modelo 3UV son: (G2) para la variable como número general, (I2) como número específico y (F1) como relación funcional. Los resultados se muestran en la siguiente tabla:

Tabla 5.13 Tabla de resultados de la actividad integradora

Categoría	Porcentaje de la muestra
G2	90
I2	67
F1	69

Estos resultados muestran que la mayoría de los jóvenes identifican a la variable como número general, uso que se utilizó para iniciar la secuencia e introducir el concepto de variable e iniciar una comprensión integral sobre la misma, entendiéndose como una cantidad que puede asumir varios valores.

Como incógnita específica los alumnos se percataron de que un dato se desconoce, después lo determinaron y de esta manera identificaron el uso de la variable.

En el caso de relación funcional, observaron las tres diferentes figuras para darse cuenta de que el valor del perímetro tiene correspondencia con la longitud de los lados del triángulo, mientras más largos los lados del triángulo más grande será el perímetro.

Con esta primera espiral los resultados reflejan que hasta el momento el objetivo se está cumpliendo al iniciar la comprensión integral del concepto de variable e identificar los tres usos de la misma que se estudian en el nivel de secundaria.

5.3 Test evaluativo

El test consta de 9 reactivos, tres para cada uso de la variable, los cuales se encuentran alternados. Los resultados se presentan de acuerdo al orden en que los usos de la variable fueron analizados durante la aplicación de la secuencia didáctica. Y para determinar si hay una relación entre el diseño de la secuencia didáctica basada en el Modelo 3UV y la comprensión del concepto de variable y sus diferentes usos, a los resultados obtenidos del test evaluativo, se aplica la prueba de Chi cuadrada a cada uno de los aspectos del Modelo que se consideran en cada reactivo con un nivel de significancia del 1%, por lo que 6.635 es el valor crítico considerado.

5.3.1 Variable como número general. Las preguntas referidas a este uso son la número 1, 5 y 9, que se describen a continuación:

Pregunta 1. ¿Qué es lo que harías para calcular el perímetro de estos triángulos equiláteros?

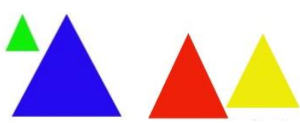


Tabla 5.14 Resultados de la pregunta 1 del test evaluativo

Aspectos	Porcentaje de grupos		
	Experimental 1°"A"	Control 1°"B"	Experimental 1°"C"
G1	95	27	59
G3	80	18	45
G5	5	4	4

En los grupos experimentales, "A" y "C" se obtuvo un mejor resultado en reconocer patrones y deducir reglas y métodos generales para resolver el problema (G1, G3). En lo concerniente a llegar a simbolizar sus reglas o métodos generales (G5) únicamente un alumno de cada grupo pudo llegar a una expresión algebraica como L+L+L o bien 3xL para calcular el perímetro de los triángulos equiláteros presentados. El estudiante del grupo de control (1°"B") escribió 3 x L explicando que los lados se deben sumar y después multiplicar por 3, lo cual indica que se le dificulta interpretar la fórmula geométrica propuesta, aunque esta sea correcta. En los grupos experimentales explicaron que se suman los lados o se mide uno y se multiplica por 3, coincidiendo con la fórmula geométrica que propusieron.

En esta pregunta al aplicar la prueba de Chi cuadrada para cada uno de los tres aspectos que se consideran del uso de la variable como número general, se establece la hipótesis nula (H_0) y la hipótesis alternativa (H_1) de la siguiente manera:

H_0: Desarrollar en los alumnos el aspecto a considerar del uso de la variable como número general, es independiente a la aplicación de la secuencia didáctica basada en el Modelo 3UV

H_1: Desarrollar en los alumnos el aspecto a considerar del uso de la variable como número general, no es independiente a la aplicación de la secuencia didáctica basada en el Modelo 3UV

Los valores calculados al aplicar la prueba de Chi cuadrada se muestran a continuación:

Tabla 5.15 Resultados de la prueba Chi cuadrada para la pregunta 1 del test evaluativo

Aspectos	**Valor calculado de x^2**
G1	14.3228
G3	11.0838
G5	0.0015

De acuerdo a los valores se rechazan las hipótesis nulas y se aceptan las hipótesis alternativas en los aspectos G1 y G3, pero para el aspecto G5 se acepta la hipótesis nula.

Pregunta 5. ¿Cuántos valores puede tomar la letra D en la fórmula $P = 4D$?

Tabla 5.16 Resultados de la pregunta 5 del test evaluativo

Aspecto	**Porcentaje de grupos**		
	Experimental	Control	Experimental
	1°"A"	1°"B"	1°"C"
G2	60	4	59

Esta pregunta tiene la intención que los alumnos identifiquen a la variable D como la representación de una entidad general, indeterminada, que puede asumir cualquier valor (G2), mediante una expresión analítica. En los grupos experimentales poco más de la mitad de los alumnos identificó esta característica de la variable D, con expresiones como "muchos valores" "cualquier valor" "infinidad de valores". Mientras que en el grupo de control la gran mayoría de los alumnos se refirieron a "no reconocer valores en las letras" y "determinar el número de valores" y, un sólo estudiante identifica que la variable puede tener cualquier valor.

Pregunta 9. La siguiente imagen representa cualquier pentágono regular ¿cuáles son los valores posibles de la letra L?

Tabla 5.17 Resultados de la pregunta 9 del test evaluativo

Aspecto	**Porcentaje de grupos**		
	Experimental	Control	Experimental
	1°"A"	1°"B"	1°"C"
G2	80	0	18

Esta pregunta, al igual que la anterior, refiere a identificar que la variable puede asumir cualquier valor (G2) pero de manera gráfica. En los grupos experimentales se dio el caso que en uno de ellos aumenta un poco el número de alumnos que se percatan de esto, pero en el otro disminuye considerablemente, expresando que la variable L tiene determinados valores o que significa lados. En el grupo de control ningún alumno identifica que la variable puede tener cualquier valor, sino que la interpretan como lado y no reconocen valores en las letras.

Para las preguntas 5 y 9 como están referidas al aspecto G2 del uso de la variable como número general, compartirán las hipótesis quedando de la siguiente manera:

H_0: Desarrollar en los alumnos el aspecto G2 del uso de la variable como número general, es independiente a la aplicación de la secuencia didáctica basada en el Modelo 3UV

H_1: Desarrollar en los alumnos el aspecto G2 del uso de la variable como número general, no es independiente a la aplicación de la secuencia didáctica basada en el Modelo 3UV

Los valores calculados de la prueba Chi cuadrada para cada pregunta se muestra en la tabla siguiente:

Tabla 5.18 Resultados de la prueba Chi cuadrada para las preguntas 5 y 6 del test evaluativo

Aspectos	**Número de pregunta**	**Valor calculado de x^2**
G2	5	18.0916
G2	9	15.2505

Y por lo tanto se acepta la hipótesis alternativa para cada pregunta, aceptando que la secuencia didáctica basada en el Modelo 3UV facilita la interpretación de la variable simbólica como la representación de una entidad general (G2).

5.3.2 Variable como incógnita específica. Se refiere a los reactivos 3, 6 y 8.

Pregunta 3. Escribe una fórmula que represente que el perímetro de un rectángulo es 29 con un largo de 7 y un ancho que no se conoce.

Tabla 5.19 Resultados de la pregunta 3 del test evaluativo

Aspecto	**Porcentaje de grupos**		
	Experimental 1°"A"	Control 1°"B"	Experimental 1°"C"
I5	35	0	40

Para esta pregunta la variable se presenta como incógnita específica, pidiendo a los alumnos que simbolicen la cantidad desconocida y la utilicen para plantear una ecuación (I5). En los grupos experimentales menos de la mitad de los jóvenes pudieron establecer la ecuación, en un caso faltó escribir el signo positivo y en otros sustituir el valor del perímetro, lo cual evidencia dificultad para transferir datos conocidos y desconocidos en forma de ecuación, pero en el grupo de control no se estableció la ecuación, los jóvenes confundieron el perímetro con el largo, indicaron operaciones con los valores dados, expresaron calcular áreas de triángulos, lo más cercano fue la expresión $P = A + 7$.

En esta pregunta las hipótesis se establecen del siguiente modo:

H_0: Desarrollar en los alumnos el aspecto I5 del uso de la variable como incógnita específica, es independiente a la aplicación de la secuencia didáctica basada en el Modelo 3UV

H_1: Desarrollar en los alumnos el aspecto I5 del uso de la variable como incógnita específica, no es independiente a la aplicación de la secuencia didáctica basada en el Modelo 3UV

El resultado de la prueba Chi cuadrada fue el siguiente:

Tabla 5.20 Resultados de la prueba Chi cuadrada para la pregunta 3 del test evaluativo

Aspecto	**Valor calculado de x^2**
I5	11.1746

De lo cual se rechaza la hipótesis nula y se acepta la alternativa.

Pregunta 6. El patio de cierta casa tiene forma rectangular con un área de $10m^2$ y con un largo de 5m ¿qué símbolo utilizarías para representar la medida desconocida y cuántos valores puede tener?

Los resultados obtenidos se muestran a continuación:

Tabla 5.21 Resultados de la pregunta 6 del test evaluativo

Aspectos	Porcentaje de grupos		
	Experimental	Control	Experimental
	1°"A"	1°"B"	1°"C"
I1	70	0	63
I2	10	0	63

En esta pregunta a diferencia de las demás que hacen referencia al perímetro esta lo hace al área, pero no pide calcular nada, sino reconocer e identificar, en una situación problemática, la presencia de algo desconocido (I1) e interpretar la variable simbólica como la presencia de valores específicos (I2). En el grupo de control no identifican el dato desconocido e intentan operar con los valores dados, confundiendo el área con el largo. En un grupo experimental 14 alumnos identificaron la presencia de algo desconocido y lo simbolizan con una variable, pero solo dos de ellos reconocieron que dicha variable solo tiene un valor específico, en el grupo C el 40 % de los alumnos (9 alumnos) identificaron que hay un dato desconocido y que solo puede tener un valor específico.

En esta pregunta que considera dos aspectos del uso de la variable como incógnita específica, se establece la hipótesis nula (H_0) y la hipótesis alternativa (H_1) de la siguiente manera:

H_0: Desarrollar en los alumnos el aspecto a considerar del uso de la variable como incógnita específica, es independiente a la aplicación de la secuencia didáctica basada en el Modelo 3UV

H_1: Desarrollar en los alumnos el aspecto a considerar del uso de la variable como incógnita específica, no es independiente a la aplicación de la secuencia didáctica basada en el Modelo 3UV

Los valores calculados de la prueba de Chi cuadrada son:

Tabla 5.22 Resultados de la prueba Chi cuadrada para la pregunta 6 del test evaluativo

Aspectos	**Valor calculado de x^2**
I1	26.0740
I2	11.1746

De acuerdo a los valores calculados se rechazan las hipótesis nulas y se aceptan las hipótesis alternativas.

Pregunta 8. ¿Cuántos valores puede tomar la letra A en la fórmula 28=4A?

Tabla 5.23 Resultados de la pregunta 8 del test evaluativo

Aspecto	**Porcentaje de grupos**		
	Experimental 1°"A"	Control 1°"B"	Experimental 1°"C"
I2	45	0	50

Se expresa una ecuación y se espera que los estudiantes, interpreten la variable simbólica que aparece en la ecuación como la presencia de valores específicos. Lo cual en los dos grupos experimentales prácticamente la mitad de los estudiantes puede interpretar que la variable A únicamente puede tener un solo valor es específico, con expresiones como, un solo valor, uno, de todos los posibles solo uno puede tener. Y en el grupo de control la variable la denotan como ancho, área, lado, realizan operaciones con los valores dados, no reconoce valores en las letras.

Para esta última pregunta referida al aspecto I2 del uso de la variable como incógnita específica, las hipótesis se establecen del siguiente modo:

H_0: Desarrollar en los alumnos el aspecto I2 del uso de la variable como incógnita específica, es independiente a la aplicación de la secuencia didáctica basada en el Modelo 3UV

H_1: Desarrollar en los alumnos el aspecto I2 del uso de la variable como incógnita específica, no es independiente a la aplicación de la secuencia didáctica basada en el Modelo 3UV

El resultado de la prueba Chi cuadrada se muestra a continuación:

Tabla 5.24 Resultados de la prueba Chi cuadrada para la pregunta 8 del test evaluativo

Aspectos	**Valor calculado de x^2**
I1	26.0740
I2	11.1746

5.3.3 Variables en una relación funcional. Para este último uso se destinaron las preguntas 2, 4 y 7.

Pregunta 2. En la fórmula P=4L ¿Cuál es la relación entre los valores posibles de las letras P y L?

Tabla 5.25 Resultados de la pregunta 2 del test evaluativo

Aspecto	**Porcentaje de grupos**		
	Experimental 1°"A"	Control 1°"B"	Experimental 1°"C"
F1	35	0	13

Se pretende que los estudiantes reconozcan la correspondencia entre variables relacionadas, independientemente de la representación utilizada (F1), en este caso la representación utilizada fue una expresión analítica. En este uso de la variable los alumnos de los grupos experimentales menos de la mitad o una cuarta parte de ellos pudieron expresar la relación entre las variables, con expresiones una es la que manda y la otra obedece, una es la independiente y la otra dependiente, o especificando, L manda y P obedece, P dependiente de L. Y en el grupo control identificaron a las variables como etiquetas, es decir, P para perímetro y L para lado.

Para esta pregunta referida al uso de las variables en una relación funcional, las hipótesis se establecen del siguiente modo:

H_0: Desarrollar en los alumnos el aspecto F1 del uso de las variables en una relación funcional, es independiente a la aplicación de la secuencia didáctica basada en el Modelo 3UV

H_1: Desarrollar en los alumnos el aspecto F1 del uso de las variables en una relación funcional, no es independiente a la aplicación de la secuencia didáctica basada en el Modelo 3UV

Al aplicar la prueba de Chi cuadrada se obtuvo el valor que se muestra en la tabla siguiente:

Tabla 5.26 Resultados de la prueba Chi cuadrada para la pregunta 2 del test evaluativo

Aspecto	**Valor calculado de x^2**
F1	6.2081

De lo cual se acepta la hipótesis nula y se rechaza la alternativa.

Pregunta 4. Una máquina puede cortar losetas de forma cuadrada. Si se programa para que las losetas tengan un perímetro entre 80 y 200 cm entonces, ¿entre qué medidas se encuentran los lados de las posibles losetas que se pueden formar?

Tabla 5.27 Resultados de la pregunta 4 del test evaluativo

Aspectos	**Porcentaje de grupos**		
	Experimental 1°"A"	Control 1°"B"	Experimental 1°"C"
F3	55	22	13
F5	10	4	0

Con esta pregunta se pretende que los alumnos, determinen los valores de la variable independiente, dados los valores de la variable dependiente (F3) y que determinen los intervalos de variación de una de las variables, dado el intervalo de variación de la otra (F5). Con la misma respuesta se identifica cada aspecto del uso de la variable, es decir, si la respuesta del estudiante es, sus valores son 20 cm y 50 cm se toma en cuenta solo para F3, pero si su respuesta es, sus valores están entre 20 y 50 cm se toma en cuenta para ambos aspectos F3 y F5. En esta pregunta en el grupo control en relación con un grupo experimental un poco más de alumnos cumplen con el aspecto F3 y uno cumple con ambos, una explicación de esto es que la pregunta se presenta como un problema verbal y con esto no se presentan variables o se pide escribir una fórmula geométrica, sino solo trabajar con los datos ofrecidos; el grupo experimental se confundió representando el perímetro y lados de las posibles figuras en una sola. Mientras que en el otro grupo experimental poco más de la mitad cumple con el aspecto F3 y solo dos con ambos.

Esta pregunta considera dos aspectos del uso de las variables como relación funcional, para lo cual se utilizaran las mismas hipótesis solo cambiando el aspecto al que se refieren, quedando del siguiente modo:

H_0: Desarrollar en los alumnos el aspecto a considerar del uso de las variables como relación funcional, es independiente a la aplicación de la secuencia didáctica basada en el Modelo 3UV

H_1: Desarrollar en los alumnos el aspecto a considerar del uso de las variables como relación funcional, no es independiente a la aplicación de la secuencia didáctica basada en el Modelo 3UV

Los valores calculados en la prueba de Chi cuadrada son:

Tabla 5.28 Resultados de la prueba Chi cuadrada para la pregunta 4 del test evaluativo

Aspecto	**Valor calculado de x^2**
F3	0.778025
F5	0.001512

De acuerdo a los valores calculados se aceptan las hipótesis nulas.

Pregunta 7. El perímetro de un rectángulo está representado por la fórmula $P = N + 8$ ¿Cuánto mide el perímetro del rectángulo cuando los valores de N sean 3 y 5?

Tabla 5.29 Resultados de la pregunta 7 del test evaluativo

Aspecto	**Porcentaje de grupos**		
	Experimental 1°"A"	Control 1°"B"	Experimental 1°"C"
F2	55	4	36

La pregunta ofrece valores de la variable independiente para calcular los valores de la variable dependiente, en este caso, el perímetro del rectángulo (F2). En uno de los grupos experimentales poco más de la mitad consiguió calcular los valores del perímetro, al sustituir el valor de N en la fórmula. Mientras que en el otro grupo experimental menos de la mitad de los estudiantes lograron calcular el perímetro. Esto hace referencia a que prácticamente la mitad de los alumnos pertenecientes a los grupos experimentales, no identifican la relación entre las variables y aún tienen problemas muy similares a los alumnos del grupo control.

El grupo control no identifica cuales son los valores de N, no le asigna valores a las letras, suma los valores de N, asigna alguna magnitud a los valores de N.

Para la última pregunta del uso de las variables como relación funcional, las hipótesis se establecen como se muestran a continuación:

H_0: Desarrollar en los alumnos el aspecto F2 del uso de las variables en una relación funcional, es independiente a la aplicación de la secuencia didáctica basada en el Modelo 3UV

H_1: Desarrollar en los alumnos el aspecto F2 del uso de las variables en una relación funcional, no es independiente a la aplicación de la secuencia didáctica basada en el Modelo 3UV

Los valores calculados en la prueba Chi cuadrada se muestran en la siguiente tabla:

Tabla 5.30 Resultados de la prueba Chi cuadrada para la pregunta 7 del test evaluativo

Aspecto	**Valor calculado de x^2**
F2	7.2516

De lo cual se rechaza la hipótesis nula y se acepta la hipótesis alternativa, mostrando que si existe relación entre la secuencia didáctica diseñada con base al Modelo UV y el desarrollo del aspecto F2 del uso de las variables en una relación funcional.

De acuerdo al análisis de los resultados del test evaluativo mediante la prueba de Chi cuadrada, en términos generales, la aplicación del modelo 3UV influyó significativamente en la comprensión del concepto de variable para dos de sus usos en los grupos experimentales. Estos usos corresponden a la variable como número general y como incógnita específica, mientras que el de relación funcional obtuvo menor relación con la secuencia didáctica aplicada. Este resultado se puede observar desde el porcentaje de aciertos obtenidos en el test evaluativo al comparar el grupo control con los experimentales. En el grupo de control solo seis alumnos identificaron patrones en el uso de la variable como número general en la pregunta 1; asimismo solo 5 alumnos calcularon el valor de la variable independiente dado el valor de la dependiente en el uso de la variable como relación funcional; y en las preguntas referidas al uso de la variable como incógnita específica ningún alumno identificó sus características.

Capítulo 6

CONCLUSIONES

A pesar de que los grupos de primer grado con quienes se llevó a cabo la investigación han estudiado contenidos algebraicos que involucran a la variable como número general (sucesiones de números y figuras, significado de fórmulas geométricas) y como incógnita específica (ecuaciones de primer grado), en el primer y tercer bimestre respectivamente de acuerdo al plan de estudios 2011.

Los jóvenes no dieron muestra de ello al aplicarles la secuencia didáctica, sino que conforme realizaban las actividades, manifestaban que era la primera vez que estudiaban este contenido matemático. Lo cual indica que el concepto de variable fue analizado de manera algorítmica, poniendo énfasis en su manipulación directa sin detenerse en explorar su significado y sus múltiples usos.

Al contrastar los resultados de los grupos experimentales con el de control, mediante la prueba de Chi cuadrada empleando un nivel de significancia del 1%, se puede contestar a la pregunta de investigación y a la aceptación de la hipótesis planteada, al determinar que la secuencia didáctica diseñada con base al Modelo 3UV si se encuentra estrechamente relacionada con la comprensión integral del concepto de variable al identificar los usos que se estudian en la escuela secundaria.

De acuerdo a dicha prueba, la comprensión del uso de la variable como número general y como incógnita específica, mostraron mayor relación con la secuencia didáctica aplicada que las variables en una relación funcional, en este tercer uso solo se encontró relación con la secuencia en el aspecto F2, que establece determinar los valores de la variable dependiente, dados los valores de la independiente.

La secuencia didáctica permitió a los estudiantes de los grupos experimentales se inicien en la comprensión integral del concepto de variable, como establece Ursini et. al. (2005), entendiendo y manejando adecuadamente sus distintas facetas y dando la posibilidad de pasar de una a otra de manera dinámica y flexible. Mientras que los jóvenes del grupo control mostraron dificultades como por ejemplo: interpretar a la variable como una etiqueta, no reconocer que las letras representan valores numéricos, confundir magnitudes y fórmulas geométricas. Lo cual hace referencia a que la enseñanza tradicional de estos contenidos no es para nada eficiente ni recomendable.

Es importante observar que a pesar de la mejora que se observa al aplicar la secuencia didáctica diseñada a partir del Modelo 3UV, esta es perfectible. Debido a que uno de los resultados obtenidos muestra que cuatro sesiones no son suficientes para llevar a los estudiantes a la comprensión del uso de las variables en una relación funcional. Este uso es más complejo y requiere de un trabajo más intenso y el tiempo permitido para trabajar con los grupos fue limitado, por lo cual, su comprensión fue parcial.

Por lo tanto se le debe dar continuidad a las espirales, es decir, seguir aplicando el modelo a otros contenidos matemáticos. Considerando los conocimientos previos de los estudiantes y situaciones concretas, por ejemplo la relación con fórmulas geométricas para calcular áreas o problemas referentes al contexto de los jóvenes. Esto contribuirá a fomentar y mejorar el tránsito del pensamiento aritmético al algebraico, contribuyendo al aprendizaje significativo de los estudiantes.

Del mismo modo los resultados de la secuencia didáctica ofrecen la oportunidad de mejorar las espirales futuras que se diseñen. Considerando lo siguiente:

En el uso como número general de la variable, quedó establecido que los valores que puede adquirir son cualquiera, tiene muchos o es un valor infinito. Pero esta manera de entenderla puede ocasionar que los alumnos se confundan al analizar otro tipo de situaciones posteriores, ya que los valores cualquiera pueden ser muchos, pero estar dentro de un intervalo, y ocupar la palabra infinito sería muy aventurado. Por lo tanto, en espirales posteriores se puede orientar a los alumnos a que cambien esta interpretación del uso como número general a que la variable esta indeterminada.

Para el uso como incógnita específica los procedimientos de solución de algunos alumnos los explicaron de manera retórica, mientras otros además escribían algunas operaciones a partir de la fórmula establecida, como $30 = 10 + U + 10 + U$ y después realizar las operaciones $10 + 10 = 20$ y $U + U = 10$ y por último $U = 5$; este modo de representar su solución, se puede utilizar para analizar la manipulación que se le puede dar a la variable, para comenzar con la solución de ecuaciones aritméticas para llegar a las algebraicas. Pero lo más relevante es que se parte de algo que los alumnos proponen al comenzar a interpretar, simbolizar y manipular a las variables.

Y en las variables en una relación funcional, la ventaja que se puede obtener es que al calcular los valores de la variable independiente a partir de la dependiente (F3), los estudiantes pueden ser orientados a utilizar los símbolos elegidos para realizar las operaciones que les permita calcular el dato que se desconoce. Además de que calcular los valores de la variable dependiente a partir de la independiente (F2), junto con el aspecto anterior puede ayudar para orientar a los estudiantes a que analicen la relación entre las variables, para poder interpretarlas como variables en una relación funcional.

Se concluye, que el Modelo 3UV mejora considerablemente los resultados de la enseñanza tradicional del álgebra que hasta el momento habían tenido los estudiantes. Llevándolos a comprender el concepto de variable de una mejor manera, al identificar sus diferentes usos a partir de aplicarlo a fórmulas geométricas para calcular el perímetro de figuras conocidas para los alumnos.

Por lo tanto, conviene utilizarlo al iniciar el estudio del álgebra elemental, aplicándolo a temas con los cuales los estudiantes estén familiarizados. De esta manera, se les ofrecerá mejores oportunidades de acceder y desarrollar un pensamiento algebraico, asegurando un aprendizaje significativo que les permita comprender contenidos matemáticos más complejos.

Para cambiar el pensamiento de los estudiantes que han llevado un aprendizaje memorístico a un pensamiento algebraico, se requiere de tiempo y de un gran cambio en la manera en cómo se definen la clases en estos niveles, sin embargo, el resultado de este trabajo de investigación ha demostrado que es posible comenzar a realizarlo.

Referencias

Booth, L. R. (1988). Children’s difficulties in beginning algebra. *The ideas of algebra, K-12,* 19, 20-32.

Campus Milenio. (21 de septiembre de 2017). *Educación Futura.* Recuperado de http://www.educacionfutura.org/planea-2017-primeros-resultados

Collette, J. P. (1973). *Historia de las matemáticas I.* México: Siglo XXI editores.

Cooper, T. J., Boulton-Lewis, G. M., Atweh, B., Pillay, H., Wilss, L., & Mutch, S. (1997, July). The transition from arithmetic to algebra: initial understanding of equals, operations and variable. In *PME conference* (Vol. 2, pp. 2-89). The program committee of the 18th PME conference.

Díaz-Barriga, Á. (2013). Guía para la elaboración de una secuencia didáctica. *UNAM, México.*

Diccionario de la lengua española. Recuperado de: http://dle.rae.es/?id=1nMBfgm fecha: 23/08/18

Juárez, J. A. (2011). Dificultades en la interpretación del concepto de variable en profesores de matemáticas de secundaria: un análisis mediante el modelo 3UV. *Números. Revista de didáctica de las matemáticas*, 76, 83-103.

Kieran, C. (1989). The early learning of algebra: A structural perspective. *Research issues in the learning and teaching of algebra,* 4, 33-56.

Kieran, C., y Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, 7*(3), 229-240.

Küchemann, D. E. (1981). Algebra. In K. M. Hart (Ed.), *Children's understanding of mathematics*: 11-16, 102-119. London: Murray.

MacGregor, M., & Stacey, K. (1997). Students' understanding of algebraic notation: 11–15. *Educational studies in mathematics, 33*(1), 1-19.

Philipp, R. A. (1992). The many uses of algebraic variables. *The Mathematics Teacher, 85*(7), 557-561.

Rosnick, P. (1981). Some misconceptions concerning the concept of variable. *The Mathematics Teacher,* 74 (6), 418-420.

Sánchez, E., Hoyos, V., & López, G. (2011). Sentido numérico y pensamiento algebraico. *Aprendizaje y enseñanza de las Matemáticas Escolares: Casos y Perspectivas*, 37-48.

Schoenfeld, A. H., & Arcavi, A. (1988). On the meaning of variable. *The mathematics teacher, 81*(6), 420-427.

SEP (2011). Programas de estudio 2011. Guía para el maestro. Educación básica secundaria. Matemáticas. Ciudad de México: Secretaría de Educación Pública.

Socas, M. (2011). La enseñanza del álgebra en la educación obligatoria. Aportaciones de la investigación. *Números. Revista de didáctica de las matemáticas*, 77, 5-34.

TEMBI 2017. (13 de noviembre de 2017). *Diario Puntual*. Recuperado de http://www.diariopuntual.com/universitarios/2017/11/13/66627

Trigueros, M., Reyes, A., Ursini, S., & Quintero, R. (1996). Diseño de un cuestionario de diagnóstico acerca del manejo del concepto de variable en el álgebra. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, 14*(3), 351-363.

Ursini, S., Trigueros, M., Escareño, F., y Montes, D. (2005). *Enseñanza del álgebra elemental. Una propuesta alternativa.* México: Trillas.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. *The ideas of algebra, K-12,* 8, 19.

Velázquez, F. (2003). *Una propuesta de transito gradual de la aritmética al álgebra.* XJAEN. Ponencia P74, 669-688.

Anexos

Test diagnóstico

Nombre del alumno: ____

Edad: ____________

Sexo: ____________

Fecha de aplicación: _____/_____/_____

Te invitamos a que contestes el presente test de manera honesta y sincera, es decir, evita copiar la respuesta de tus compañeros y escribe lo que te imagines que sea lo correcto, tomando en consideración lo que has estudiado en el curso de Matemáticas en tu Primaria, ya que los resultados que se obtengan nos serán de gran valor para mejorar las clases de Matemáticas que se te impartirán.

INSTRUCCIONES. Contesta lo que se te pide (se muy detallado)

1. Para qué has usado las siguientes fórmulas o expresiones:

Fórmula o expresión	Uso
$L+L+L+L$	
$L+L+L$	
$\frac{b\times h}{2}$	
$L\times L$	
$\frac{P\times a}{2}$	

2. ¿Qué significan para ti las siguientes expresiones?

Expresión	Significado
m	
$2m$	

3. Un lapicero y una goma cuestan quince pesos. Si el lapicero cuesta el doble que la goma. ¿Cuánto cuesta cada objeto?

Utiliza el siguiente espacio para realizar lo que consideres necesario para calcular el costo de cada objeto:

4. El patio de cierta casa es de forma rectangular. De largo mide cinco metros y tiene un área de diez metros cuadrados. ¿Cómo representarías la medida que hace falta del patio y cuánto mide?

Utiliza el siguiente espacio para representar la medida faltante y calcular cuánto mide:

5. Con lo que has estudiado en Primaria en la materia de Matemáticas, ¿cómo escribirías “el doble de un número”?

Usa el siguiente espacio para que escribas tu respuesta

¡Gracias!

Secuencia didáctica

"Que tengas éxito"

Actividad 1
Indicaciones: Contesta detalladamente lo que se te pide utilizando los espacios correspondientes.

1 (G1). Calcula el perímetro de las tres figuras que te dieron (no olvides escribir todas las operaciones que vayas a realizar).

Figura 1.
Figura 2.
Figura 3.

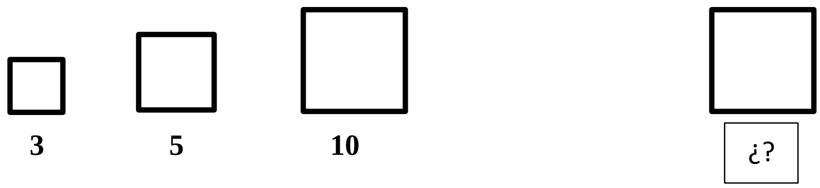
2 (G3). Describe detalladamente cada uno de los pasos que fuiste haciendo para calcular el perímetro de las figuras.

Figura 1.
Figura 2.
Figura 3.

3 (G1). Lo que hiciste para obtener el perímetro de cada figura ¿en qué se parece?

4 (G1). En lo que hiciste para calcular el perímetro de cada figura ¿qué es lo único que cambio?

5 (G2). En lugar de escribir la medida de cada uno de los lados de los cuadrados que se te dieron ¿qué símbolo utilizarías para representar la medida de un lado de cualquier cuadrado?



Escribe aquí tu símbolo

6 (G5). ¿Conoces alguna fórmula para calcular el perímetro de los cuadrados? Escríbela. En caso contrario utiliza el símbolo de la pregunta anterior para calcular el perímetro de los tres cuadrados que se te dieron.

Conoces la fórmula escríbela:	Llena los siguientes espacios con el símbolo que elegiste: ___+___+___+___ También puede ser: $4 \times$ __

7 (G2). Si esta fórmula sirve para calcular el perímetro de cualquier cuadrado ¿qué otros valores puede adquirir dicho símbolo aparte de 3, 5 y 10?

De acuerdo a tus respuestas ¿Qué nombre le darías a ese símbolo que representa la medida de un lado de cualquier cuadrado y por qué?

¿Qué te pareció la actividad?

Actividad 2

Indicaciones: contesta detalladamente lo que se te pide utilizando los espacios correspondientes.

1 (I1). Dibujarás un rectángulo que mida de largo 10cm y tenga un perímetro de 30cm (recuerda que el perímetro es la suma de lo que miden todos los lados de la figura). ¿Qué lado desconoces?

2 (I1). A pesar del dato desconocido, ¿puedes dibujar un rectángulo con las medidas dadas? Sí o No. ¿Por qué?

3 (I5). ¿Qué símbolo utilizarías para representar el lado desconocido?

Desconozco el _______________ y lo voy a representar con el símbolo _____.

4 (I5). Sabes que el perímetro es igual a la suma de todos los lados de la figura. Representa esto utilizando los datos que te dieron y usa el símbolo que elegiste en la pregunta anterior (recuerda usar el símbolo no su posible valor).

Perímetro es igual a la suma de los lados $\mathbf{30 =}$

5 (I4). Lo que escribiste en la pregunta 4 es una fórmula, utilízala para calcular el valor del lado desconocido (escribe todas las operaciones que creas necesarias para calcular el valor del lado desconocido).

6 (I2). De acuerdo a tu respuesta de la pregunta anterior, el símbolo que elegiste para representar el lado desconocido ¿cuántos valores posibles puede tener y por qué?

7 (I3). En la fórmula de la pregunta 4, en lugar de escribir el símbolo del lado desconocido escribe su valor calculado para verificar si la igualdad se cumple.

Perímetro es igual a la suma de los lados

$\mathbf{30 =}$

¿La igualdad se cumple? Sí o No ¿Por qué?

8. Utiliza el siguiente espacio para dibujar el rectángulo.

9. Con lo realizado en esta actividad y la anterior ¿en qué se diferencian los símbolos utilizados?

Actividad 3
Indicaciones: contesta detalladamente lo que se te pide utilizando los espacios correspondientes.

1. Tendrás que dibujar un triángulo equilátero que mida 1cm por lado. Posteriormente dibujarás otro triángulo equilátero que mida 1cm más por lado que el anterior, así sucesivamente hasta que tengas un triángulo equilátero de 5cm por lado (recuerda que los triángulos equiláteros son aquellos que sus lados miden lo mismo).

2 (F1). Calcula el perímetro de cada triangulo dibujado y ordénalos de menor a mayor valor (recuerda escribir todas las operaciones que utilices).

Triangulo 1:
Triángulo 2:
Triángulo 3:
Triángulo 4:
Triángulo 5:

3 (F4). ¿Qué le pasa al valor del perímetro, cuando la longitud del lado de cada triángulo equilátero aumenta?

4 (F4). Por lo tanto, ¿cuál es el dato que determina el valor del otro, es decir, que dato produce que el otro cambie?

5 (F5). ¿Cuáles son los posibles valores del perímetro entre los triángulos 2 al 3?

Los valores del perímetro entre los triángulos 2 al 3 se encuentran entre _______ y _______.

Indicaciones. Completa la información de la tabla siguiente, compáralo con lo que hayas realizado y analiza los datos para responder las siguientes preguntas en los espacios indicados.

Longitud del lado del triángulo equilátero (cm)	Perímetro del triángulo equilátero (cm)
1	$3 \times 1 = 3$
2	$3 \times 2 = 6$
3	$3 \times 3 = 9$
4	$3 \times 4 = 12$
5	$3 \times 5 = 15$
6	
7	
8	
9	
10	

6 (F6). ¿Qué dato se repite en la tabla y qué representa?

7 (F6). ¿Cuáles son los dos datos que van cambiando y con cuáles signos los representarías?

Los datos que cambian son los siguientes:

1. **_______________________________ y lo representaría con el signo ______.**

2. **_______________________________ y lo representaría con el signo ______.**

8 (F6). De acuerdo a tus respuestas de las dos preguntas anteriores, escribe una fórmula geométrica para calcular el perímetro de los triángulos equiláteros.

9 (F2). Utiliza la fórmula geométrica para calcular el perímetro de los siguientes triángulos equiláteros, cuando sus lados midan 15, 16 y 17 cm (no olvides escribir todas las operaciones que realices).

$Lado = 15cm$

$Lado = 16cm$

$Lado = 17cm$

10 (F3). Ahora utiliza la fórmula para calcular la longitud de un solo lado de los siguientes triángulos equiláteros a partir de los siguientes perímetros 54, 57 y 60cm (no olvides escribir todas las operaciones que realices).

$Perímetro = 54cm$
$Perímetro = 57cm$
$Perímetro = 60cm$

11 (F6). Con lo que has realizado, escribe una fórmula geométrica para calcular el perímetro de un pentágono regular (recuerda que un pentágono regular es un polígono cuyos lados miden lo mismo).

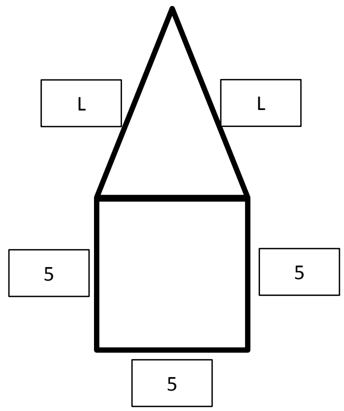
12. ¿Qué semejanzas y diferencias encuentras en el uso de los símbolos utilizados en cada una de las tres actividades?

Actividad integradora

Indicaciones: contesta detalladamente lo que se te pide utilizando los espacios correspondientes.

Caso I.

El siguiente dibujo solo muestra las medidas de la fachada de una torre (el dibujo no está hecho a ninguna escala y tampoco especifica las unidades de medida).



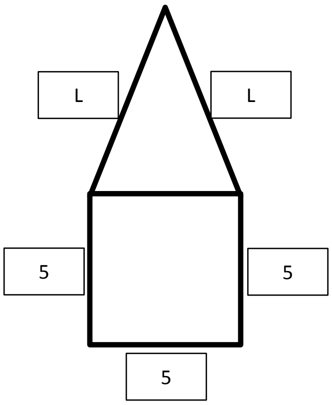
1 (G2). ¿Qué representa la letra L y qué valor o valores puede tener?

2 (G3). ¿Qué es lo que tienes que hacer para calcular el perímetro de la fachada de la torre representada en esta figura? (explica con detalle tu procedimiento).

3 (G5). Escribe la fórmula geométrica para calcular el perímetro de la fachada de la torre (utiliza los datos que se muestran en la figura).

Caso II.

Con respecto a la figura de la fachada de la torre se agrega el siguiente dato:



El perímetro de la figura tiene un valor de 29

4 (I1). De acuerdo a la figura con el valor del perímetro ya definido ¿qué interpretación le das a la letra L?

5 (I2). ¿Cuántos valores posibles tiene la letra L?

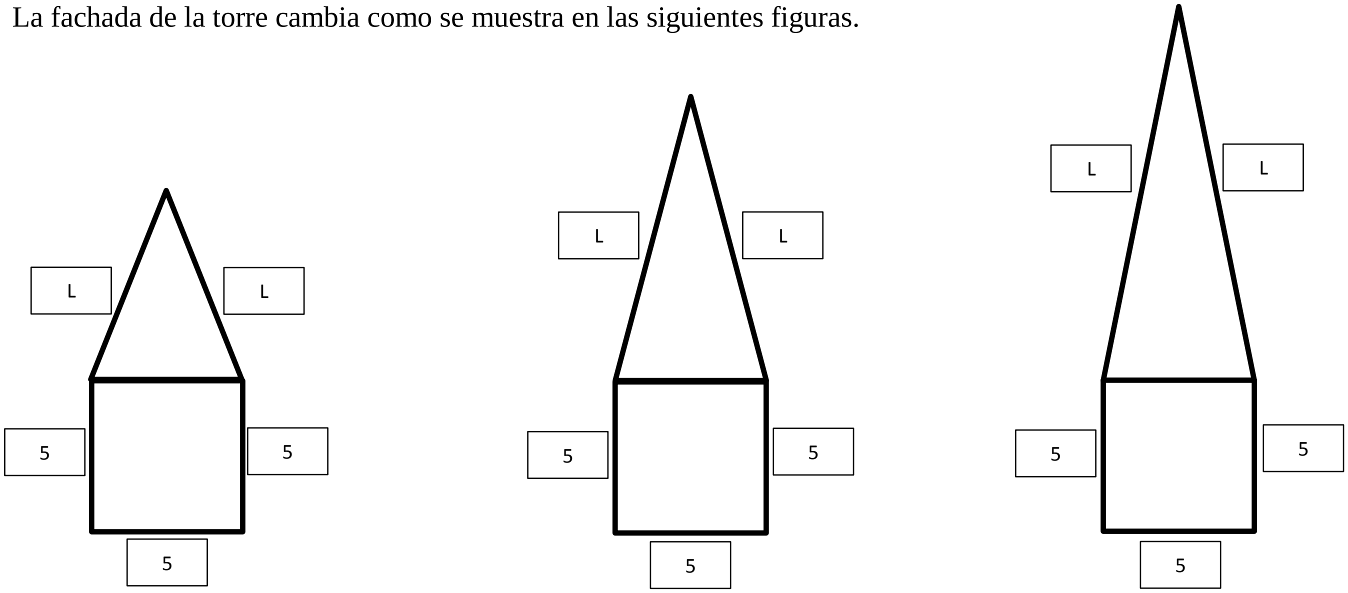
6 (I5). Representa mediante una fórmula geométrica que el perímetro de la fachada de la torre tiene un valor de 29:

7 (I4). ¿Qué tendrías que realizar para conocer el valor de L? (describe detalladamente tu procedimiento)

8 (I3). Comprueba que el valor de L que calculaste en la pregunta anterior es el correcto.

Caso III.

La fachada de la torre cambia como se muestra en las siguientes figuras.



9 (F1). ¿El valor del perímetro será igual en los tres dibujos de la fachada de la torre? ¿De qué depende su valor?

10 (F4). Si el valor de L va cambiando en los tres dibujos, entonces ¿qué ocurre con el valor del perímetro?

11 (F6). Escribe la fórmula geométrica para calcular el perímetro de la fachada de la torre en los tres diferentes dibujos.

$\boldsymbol{P} =$

12 (F2). Si el valor de L es 7, entonces ¿cuánto mide el perímetro de la fachada de la torre? (utiliza la fórmula que propusiste en la pregunta anterior).

13 (F3). Ahora, si el perímetro tiene un valor de 35, entonces ¿cuál es el valor de L? (escribe detalladamente tu solución).

14 (F5). Si el valor más grande del perímetro de la fachada de la torre es de 55, entonces ¿cuál es el valor más grande que puede adquirir L? ¿Por qué?

15. Escribe las tres fórmulas geométricas que utilizaste para calcular el valor del perímetro en los tres diferentes casos presentados:

Caso I.	**Caso II.**	**Caso III.**

16. ¿Qué valores puede tener la variable en cada caso?

Caso I.	**Caso II.**	**Caso III.**

17. ¿Qué te parecieron las actividades? ¿Qué fue lo que más te gusto? ¿Qué fue lo que menos te agrado? ¿Qué te gustaría cambiar?

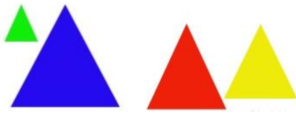
¡Muchas gracias!

“Que tengas éxito”

Test evaluativo

Indicaciones: contesta detalladamente lo que se te pide utilizando los espacios correspondientes.

1. ¿Qué es lo que harías para calcular el perímetro de estos triángulos equiláteros?



2. En la fórmula $\boldsymbol{P = 4L}$ ¿Cuál es la relación entre los valores posibles de las letras P y L?

3. Escribe una fórmula que represente que el perímetro de un rectángulo es 29 con un largo de 7 y un ancho que no se conoce.

4. Una máquina puede cortar losetas de forma cuadrada. Si se programa para que las losetas tengan un perímetro entre 80 y 200cm entonces, ¿entre qué medidas se encuentran los lados de las posibles losetas que se pueden formar?

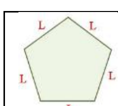
5. ¿Cuántos valores puede tomar la letra D en la fórmula $\boldsymbol{P = 4D}$?

6. El patio de cierta casa tiene forma rectangular con un área de $10m^2$ y con un largo de 5m ¿qué símbolo utilizarías para representar la medida desconocida y cuántos valores puede tener?

7. El perímetro de un rectángulo está representado por la fórmula $\boldsymbol{P = 2(N + 8)}$ ¿Cuánto mide el perímetro del rectángulo cuando los valores de N sean 3 y 5?

8. ¿Cuántos valores puede tomar la letra A en la fórmula $\boldsymbol{28 = 4A}$?

9. La siguiente imagen representa cualquier pentágono regular ¿cuáles son los valores posibles de la letra L?



¡Gracias!