



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

DESARROLLO DE LA COMPETENCIA DOCENTE MIRAR PROFESIONALMENTE EL PENSAMIENTO MATEMÁTICO DE LOS ESTUDIANTES, A TRAVÉS DE TRAYECTORIAS HIPOTÉTICAS DE APRENDIZAJE

TESIS
PARA OBTENER EL TÍTULO DE
MAESTRO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

PRESENTA
LIC. JUAN CARLOS FLORES OSORIO

DIRECTOR DE TESIS
DR. DR. ERIC FLORES MEDRANO

CO-DIRECTOR DE TESIS
DRA. DINAZAR ISABEL ESCUDERO ÁVILA

PUEBLA, PUE.

MAYO 2019



BUAP.

DRA. LIDIA AURORA HERNÁNDEZ REBOLLAR
SECRETARIA DE INVESTIGACIÓN Y
ESTUDIOS DE POSTGRADO, FCFM-BUAP
P R E S E N T E:

Por este medio le informo que la C:

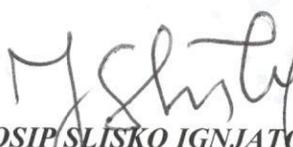
JUAN CARLOS FLORES OSORIO

Estudiante de la Maestría en Educación Matemática, ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 10 de diciembre de 2019, con la tesis titulada:

“DESARROLLO DE LA COMPETENCIA DOCENTE MIRAR
PROFESIONALMENTE EL PENSAMIENTO MATEMÁTICO DE LOS
ESTUDIANTES, A TRAVÉS DE TRAYECTORIAS HIPOTÉTICAS DE
APRENDIZAJE”

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

A T E N T A M E N T E.
H. Puebla de Z. a 22 de mayo de 2019


DR. JOSIP SLISKO IGNJATOV
COORDINADOR DE LA MAESTRÍA
EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA.



Cep. Archivo.
DR JAJL / Tagm*

Esta tesis se realizó con el apoyo financiero otorgado mediante Beca Nacional por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) durante el periodo enero 2017 a diciembre 2018 (CUV 763546)

A mi familia ...

AGRADECIMIENTOS

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencias y Tecnología (CONACyT) por la beca otorgada durante el periodo enero 2017 a diciembre 2018 (CVU 763546), el apoyo permitió hacerme un camino en la Maestría en Educación Matemática y trazar la ruta para culminar este trabajo de investigación.

Agradezco al Dr. Eric Flores Medrano por aceptar dirigir mi trabajo de tesis y permitir ser parte de su proyecto de investigación del cual se desprenden las hojas de esta tesis. Le agradezco por mostrarme que existe gente realmente ocupada en hacer del docente de matemáticas un verdadero profesional que impacte en el proceso de enseñanza aprendizaje de sus estudiantes.

De igual forma agradezco a la Dra. Dinazar Escudero Ávila, por sus observaciones, comentarios y contribuciones en este trabajo, los cuales siempre tuvieron la finalidad de mejorar esta investigación.

Agradezco a la Dra. Lidia Aurora Hernández Rebollar, a la Dra. Dra. Erika Canché y al Dr. José Antonio Juárez por sus aportaciones siempre puntuales a este trabajo de tesis.

Finalmente agradezco a mis compañeros participantes en este proyecto, Danae, Mago, Vero y Toño, su entusiasmo y compañerismo fue clave para el logro de este proyecto.

Índice

RESUMEN	IX
ABSTRACT	XV
Capítulo 1	1
INTRODUCCIÓN	1
1.1 Planteamiento del problema	2
1.1 Resumen del trabajo	5
Capítulo 2	7
MARCO TEÓRICO	7
2.1 Antecedentes	7
2.2 Competencia docente mirar profesionalmente el pensamiento matemático del estudiante	9
2.2.1 Características y niveles de la competencia	13
2.3 Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje	17
2.4 Trayectorias Hipotéticas para el desarrollo de la competencia mirar profesionalmente	19
Capítulo 3	23
METODOLOGÍA	23
3.1 Participantes y contexto	23
3.2 Diseño de la investigación	24
3.2.1 Fases de la investigación	25
3.2.2 Instrumentos para la recogida de la información	28
Capítulo 4	35
ANÁLISIS	35
4.1 Discurso de los profesores ante la actividad	35
4.2 Sobre la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje	52
4.3 Mirar profesionalmente	58
5.1 Sobre el uso de las Trayectorias Hipotéticas de Enseñanza	63
5.2 Nivel del logro de la competencia “mirar profesionalmente”	66
5.3 La selección de la tarea para el análisis del desarrollo de la competencia	67
5.4 Conclusiones generales	68
Referencias	70

ÍNDICE DE TABLAS

<i>Tabla 2. 1 Trayectoria de desarrollo de aprender a notar (van Es y Sherin, 2002).</i>	13
<i>Tabla 3. 1 Fases de trabajo con los profesores de la investigación.</i>	26
<i>Tabla 3. 2 Una caracterización de niveles de desarrollo de la competencia docente mirar profesionalmente (Llinares, Valls; 2009).</i>	27
<i>Tabla 3. 3 Discurso esperado con respecto a las hojas de trabajo realizadas por los estudiantes.</i>	30
<i>Tabla 4. 1 Respuestas a la pregunta sobre ¿Cuál es el objetivo de la actividad?</i>	36
<i>Tabla 4. 2 Respuestas de los profesores a la pregunta ¿Cómo el estudiante construye su producción y cómo lo interpretas con respecto a lo que se pide en la actividad? con respecto a la hoja de trabajo 1.</i>	38
<i>Tabla 4. 3 Respuestas a la pregunta ¿Cómo construye el estudiante las figuras con relación a las que se les pide girar? parta la hoja de trabajo 2.</i>	39
<i>Tabla 4. 4 Respuestas a la pregunta ¿Cómo construye el estudiante las figuras con relación a las que se les pide girar? parta la hoja de trabajo 3.</i>	41
<i>Tabla 4. 5 Respuestas a la pregunta ¿Cómo construye el estudiante las figuras con relación a las que se les pide girar? parta la hoja de trabajo 4.</i>	43
<i>Tabla 4. 6 Respuestas a la pregunta ¿Cómo construye el estudiante sus dibujos respecto a lo que se pide en la actividad? parta la hoja de trabajo 5.</i>	45
<i>Tabla 4. 7 Respuestas a la pregunta ¿Qué característica podemos distinguir en la producción del estudiante? para la hoja de trabajo 7.</i>	46
<i>Tabla 4. 8 Respuestas a la pregunta ¿Qué característica podemos distinguir en la producción del estudiante? parta la hoja de trabajo 8.</i>	48
<i>Tabla 4. 9. Respuestas a la pregunta ¿Qué característica podemos distinguir en la producción del estudiante? parta la hoja de trabajo 9.</i>	49
<i>Tabla 4. 10 Respuestas a la pregunta ¿Qué característica podemos distinguir en la producción del estudiante? parta la hoja de trabajo 10.</i>	51
<i>Tabla 4. 11 Cuestiones para identificar el uso de la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje.</i>	52
<i>Tabla 4. 12 Análisis de Grace en el uso de Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje.</i>	53
<i>Tabla 4. 13 Análisis de George en el uso de Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje.</i>	55
<i>Tabla 4. 14 Análisis de Bryan en el uso de Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje.</i>	56
<i>Tabla 4. 15. Análisis de Mary en el uso de Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje.</i>	57

ÍNDICE DE FIGURAS

<i>Figura 2. 1 Notar y razonar como dos componentes de la visión profesional (Seidel y Stürmer, 2014, p. 744).</i>	15
<i>Figura 2. 2 Ciclo de enseñanza de las matemáticas abreviado (Simon, 1995, p.136).</i>	17
<i>Figura 3. 1 Actividad que se pide analizar a los profesores sobre las producciones de los estudiantes.</i>	29
<i>Figura 3. 2 Muestra la figura que se pide girar en primer lugar, el contorno de un rectángulo alrededor del eje Y para formar un cilindro y después cambiar el eje de rotación al eje “X”.</i>	32
<i>Figura 3. 3 Muestra que se pide girar el contorno de un triángulo alrededor del eje Y. Después se pide cambiar el punto de rotación hacia un vértice del triángulo el eje Y sigue siendo el eje de rotación.</i>	32
<i>Figura 3. 4 Muestra cómo debería girar una parábola alrededor del eje X y después al eje Y.</i>	33
<i>Figura 3. 5 Muestra cómo debería quedar si se gira una circunferencia alrededor del eje Y.</i>	33
<i>Figura 4. 1 Muestra la hoja de trabajo 1 es la tarea realizada por un estudiante.</i>	36
<i>Figura 4. 2 Hoja de trabajo 2 realizada por un estudiante</i>	38
<i>Figura 4. 3 Hoja de trabajo 3 realizada por un estudiante</i>	40
<i>Figura 4. 4 Hoja de trabajo 4 realizada por un estudiante</i>	42
<i>Figura 4. 5 Hoja de trabajo 5 realizada por un estudiante</i>	44
<i>Figura 4. 6 Hoja de trabajo 7 producciones de algunos estudiantes cuando se les pide girar la parábola alrededor de uno de tangencia</i>	45
<i>Figura 4. 7. Hoja de trabajo 8 producciones de algunos estudiantes cuando se les pide girar la parábola alrededor de un punto de tangencia</i>	47
<i>Figura 4. 8 Hoja de trabajo 9 producciones de algunos estudiantes cuando se les pide girar el contorno del triángulo desde un vértice tangente al eje “Y”</i>	48
<i>Figura 4. 9 Hoja de trabajo 10 producciones de algunos estudiantes cuando se les pide girar el contorno del triángulo desde un vértice tangente al eje “Y”</i>	50

RESUMEN

Uno de los principales objetivos de la Matemática Educativa es la profesionalización docente, esta línea de investigación usa lo que existe en didáctica de la matemática para potenciar el desarrollo de nuevas destrezas en el profesor de matemáticas, que impacten de forma directa en la planeación de sus clases en temas específicos de matemáticas, que debido a su complejidad requieren un mayor esfuerzo al momento de presentarlos a los estudiantes.

El objetivo de esta investigación es identificar los niveles de desarrollo de la competencia docente *mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes* en un grupo de profesores de matemáticas de bachillerato. Dentro de la profesionalización docente, esta investigación explora en el desarrollo de destrezas propias de un profesor de matemáticas que contribuyan a mejorar su práctica en el aula, buscando la mejora del proceso de enseñanza aprendizaje de conceptos específicos.

Se usa el constructo de *Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje* como una herramienta que, de acuerdo con lo que se tiene en investigación en matemática educativa, potencia el desarrollo de la competencia *mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes*. Las trayectorias hipotéticas de aprendizajes generan un ciclo de enseñanza de las matemáticas, contribuyendo al análisis de tareas o actividades que se usarán para enseñar un tema en concreto de matemáticas, generando hipótesis por el profesor ante el proceder del estudiante al resolver o intervenir en la tarea o actividad.

Se introduce al grupo de informantes en dicho constructo, buscando mejorar su discurso al interpretar el proceder de un grupo de estudiantes ante una tarea específica sobre un tema concreto de la asignatura de Cálculo Integral. Mediante el análisis de la trayectoria, el docente propone sus hipótesis sobre el aprendizaje de los estudiantes, buscando identificar e interpretar lo matemáticamente relevante en las producciones hechas por los estudiantes, desarrollando la competencia por parte del docente.

La investigación da evidencia de la dificultad del desarrollo de la competencia, debido a diversos factores, donde predomina la necesidad de profundizar en temas de didáctica de la matemática para contrarrestar dificultades como, la definición de objetivos de aprendizaje para las tareas o actividades, identificar e interpretar las problemáticas de los estudiantes en el contexto del desarrollo de las tareas o actividades, visualizar cómo redirigir el proceso de enseñanza aprendizaje del concepto matemático en cuestión.

La investigación también muestra que la experiencia no es suficiente para el desarrollo de la competencia, se detecta que los informantes desarrollan niveles básicos de la competencia, de acuerdo con la caracterización que se usó en esta investigación, coincidiendo con otros trabajos de investigación en donde los alcances del desarrollo de la competencia no son los esperados.

ABSTRACT

One of the main objectives of the mathematics education is the teacher's professionalization, this investigation line uses that which exist in the mathematics didactic for potentiating the development of new skills of the mathematics professor, that impact in a direct manner in the classes planning on specific subjects of mathematics which due to its complexity requires a greater effort at the moment to present it to the students.

The objective of this research is to identify the development levels of the teaching capability *to professional noticing the mathematical thought* of a group of teachers of high school students. Into the teachers professionalism, this research explores in the development of the mathematics professor own skills that contributes to improve their practice at the classroom, looking for the enhancement of the process of teaching learning of specific concepts.

The *hypothetical learning trajectory* construct is used as a tool, which, according to the educative mathematical investigation, potentiates the development of the competence *to professional noticing the mathematical thought of the students*. The hypothetical learning trajectory generates a cycle of mathematics teaching, contributing to the analysis of homework and activities that will be used for teaching mathematics concrete topic, generating a hypothesis by the teacher to the proceed of the student on solving or intervening at the task or activity.

Its introduced to the group of informants the mention construct looking for enhancing their speech at the interpretation of the students group proceeding in front of an specific task on a concrete topic from the integral calculus subject. Through the analysis of the trajectory the teacher proposes their hypothesis on the students learning, looking to identify and interpret the mathematical relevant on the production done by the students, developing the teachers competence.

The research provides evidence of the difficulty of the competence development, due to diverse factors, where the need of Deeping in didactic topics of mathematics learning predominates for counteracting the difficulties as the definition of the learning objectives for the tasks and activities, identify and interpret the problems of the students in the context of the task and activities development, to visualize how to redirect the teaching learning of the mathematical concept in question.

The research also shows that experience in not enough for the development of competence, it has detected that informant develop basic levels according to the used characterization in this research, coinciding with other researches where the reach of the competence development are not expected.

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo de investigación busca promover, en el contexto de la profesionalización docente, en un grupo de profesores, el desarrollo de una *mirada profesional del pensamiento matemático de los estudiantes*, que ayude a direccionar el proceso de enseñanza aprendizaje, con el propósito de atender el actuar de los mismos en el aula o mediante sus producciones en la elaboración de una tarea.

Dentro de la profesionalización del trabajo docente, se busca que la investigación en matemática educativa genere propuestas que aporten a mejorar la visión de los docentes respecto al trabajo de sus estudiantes en las aulas.

Todo profesional, en cualquier dominio que se desarrolle, desea estar despierto a las posibilidades, ser sensible a las situaciones que se presentan y responder adecuadamente (Mason, 2002). En una síntesis de sus trabajos Fernández, Sánchez-Matamoros, Valls y Callejo (2018) sostienen que el significado de la competencia *mirar profesionalmente* se vincula con el uso de conocimiento en matemáticas por parte de los profesores, cuando seleccionan y diseñan tareas. Además, con el ejercicio del análisis y la interpretación del pensamiento matemático de los estudiantes para responder y guiar el discurso matemático en las interacciones en clase.

En este trabajo de investigación se pretende que el grupo de profesores con el que se trabajó encuentre en el constructo de *trayectorias hipotéticas de aprendizaje*, una guía para dar sentido al pensamiento matemático de los estudiantes mediante predicciones realizadas por los mismos profesores ante las tareas ejecutadas por los alumnos; por lo que fue necesario analizar la manera de actuar de los estudiantes y buscar alternativas para seguir con el proceso de enseñanza aprendizaje. Desde el campo de acción, esta investigación busca identificar los niveles de desarrollo de la competencia *mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes* por el grupo de profesores.

1.1 Planteamiento del problema

Un objetivo importante de la investigación en didáctica de las matemáticas es el conocimiento y destrezas que precisa el profesor de matemáticas al enfrentarse al proceso de enseñanza aprendizaje (Zapatera, 2015). El profesor de matemáticas enfrenta el reto de desarrollar destrezas que le permitan identificar el progreso de sus estudiantes en asignaturas que requieren un nivel mayor de pensamiento matemático como pueden ser las asignaturas de Cálculo.

Existe una gran variedad de trabajos de investigación que señala las dificultades que tienen los estudiantes y profesores al enfrentarse a temas de Cálculo (Tall, 1993; Hitt, 2003). El docente tiene el desafío de atender a estas dificultades de una forma profesional. Una manera de hacerlo es buscando una forma estructurada de presentar situaciones que resulten significativas para los estudiantes y que, además, le den información al docente sobre el progreso de sus estudiantes, dando sentido a las intervenciones y producciones que realicen (Ivars, Buforn y Llinares, 2016).

De acuerdo con lo mencionado, el docente tiene en sus aulas la tarea de atender las dificultades antes mencionadas, recurriendo a la investigación que existe en Matemática Educativa. En este contexto de profesionalizar la práctica docente, resulta oportuno hablar del desarrollo de competencias que contribuyan a interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes. Sánchez-Matamoros, Fernández, Valls, García y Llinares (2012) señalan que, en los últimos años investigaciones sobre el desarrollo profesional del profesor de matemáticas destacan la importancia de la competencia docente *mirar con sentido* (*professional noticing*).

Llinares (2012) analiza desde una perspectiva sociocultural, que el aprendizaje y el desarrollo profesional de los docentes puede ser entendido, en cómo participar en las prácticas matemáticas que se generan en el aula, al realizar tareas, usar instrumentos y poder justificar su uso. En este sentido, los instrumentos conceptuales, y las ideas teóricas procedentes de la didáctica de la matemática desempeñan papeles relevantes en el proceso de identificar e interpretar la enseñanza de las matemáticas (Llinares, 2012).

En su trabajo de tesis doctoral Zapatera (2015) señala que las tareas profesionales del docente en el desarrollo de la competencia mirar profesionalmente pueden concretarse en (a) planificar y organizar el contenido matemático para la enseñanza, (b) gestionar el contenido matemático en el aula y (c) analizar, interpretar y valorar las producciones de los estudiantes.

Sánchez-Matamoros *et al.* (2012) por su parte afirman que dicha competencia permite al profesor de matemáticas ver las situaciones de enseñanza aprendizaje de una manera profesional. El presente trabajo de investigación es parte de una propuesta de formación para la profesionalización docente, por lo que retomar teóricamente a Ivars, Buforn y Llinares (2016) puede ser relevante, ya que, en su trabajo de investigación, se cuestionan si el profesor de matemáticas puede ser entrenado en la competencia mirar profesionalmente, en el sentido de diseñar entornos de aprendizaje que favorezcan el desarrollo de esta.

Entre otras características, los profesores que colaboraron con esta investigación están en activo, cuentan con algunos años de experiencia impartiendo asignaturas de Cálculo, entre otras asignaturas de matemáticas en educación media superior.

Zapatera (2015) advierte que la experiencia profesional no garantiza el desarrollo de la competencia, sin embargo, los profesores tienen un papel clave en el proceso de aprendizaje, se les considera como constructores activos de sus conocimientos y, por tanto, se les invita a reflexionar sobre su práctica (Llinares y Krainer, 2006).

En el aula, el profesor de matemáticas debe dejar atrás el planteamiento dicotómico de correcto o incorrecto, como señala Ivars *et al.* (2016), debe de mirar más allá para poder analizar el comportamiento de los estudiantes ante ciertas tareas.

El refinamiento de las destrezas necesarias para el desarrollo de la *competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes* puede ser un camino complicado, así como exigir distintas estrategias como el análisis de videograbaciones y utilizar un *software*, tal es el caso van Es y Sherin (2002) quienes hacen uso de la herramienta (VAST¹) para el análisis de las clases, con la finalidad de ayudar a los profesores a desarrollar la capacidad de observar e interpretar aspectos de la práctica en el aula.

Wilson, Mojica y Confrey (2013) sugieren que las trayectorias hipotéticas de aprendizaje son una estrategia que apoyan al profesor en la creación de modelos de pensamiento del estudiante y en la reestructuración de las propias comprensiones de los profesores sobre las matemáticas y el razonamiento de los estudiantes.

¹ Son las siglas de Video Analysis Support Tool, herramienta de software diseñado para que los docentes analicen videos de lo que pasa en sus propias aulas

El presente trabajo de investigación toma la idea de utilizar el constructo de *trayectorias hipotéticas de aprendizaje*, como una forma de potencializar el desarrollo de la competencia *mirar profesionalmente*; otras investigaciones como la de Clements y Samara (2004) sugieren que las *trayectorias hipotéticas de aprendizaje* pueden utilizarse en la formación docente para describir las transiciones en el pensamiento del estudiante.

Ivars *et al.* (2016) en su trabajo de investigación, relacionan el constructo de *trayectoria hipotética de aprendizaje* con el desarrollo de la competencia *mirar profesionalmente*, advierten que mirar de manera estructurada una situación de enseñanza aprendizaje de las matemáticas para tomar decisiones, es una competencia docente que implica no solo experiencia sino también poseer el conocimiento que es pertinente movilizar en cada situación.

Las *trayectorias hipotéticas de aprendizaje* transmiten conocimientos esenciales sobre el desarrollo del pensamiento matemático a lo largo del tiempo y pueden garantizar una mayor coherencia para las experiencias matemáticas (Wilson *et al.*, 2013). En este contexto nuestra investigación busca responder a la pregunta:

¿Cómo el conocimiento de una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje potencia en el profesor el desarrollo de la competencia docente Mirar Profesionalmente las situaciones de enseñanza aprendizaje de las matemáticas?

El trabajo de investigación realizado busca sumar en la investigación que existe de la profesionalización docente promoviendo el desarrollo de la competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes. El objetivo del trabajo de investigación es:

Determinar el nivel del logro de la competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes, de un grupo de profesores que, utiliza el constructo de trayectorias hipotéticas de aprendizaje para, dar estructura y predecir el actuar de los estudiantes ante una tarea específica.

1.1 Estructura del trabajo

En el capítulo 1 de este trabajo se analiza el desarrollo de la competencia *mirar profesionalmente*. Según Ivars, Buforn y Llinares (2016) la manera en que los profesores actúan de forma profesional ante las situaciones de enseñanza de las matemáticas es un foco de investigación en el ámbito de la Matemática Educativa, señalan que la toma adecuada de decisiones para seguir con el progreso de enseñanza aprendizaje de conceptos matemáticos no sólo depende de la experiencia del profesor, sino que también implica el desarrollo de ciertas destrezas que permitan movilizar el conocimiento matemático del profesor.

En el capítulo 2 se presenta el marco teórico, dividido en tres partes, en la primera se muestra los principios de la visión profesional o *noticing*, así como el análisis de los diferentes autores de esta línea de investigación que dan paso a lo que últimamente se conoce dentro de la Matemática Educativa; como el desarrollo de la competencia *mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes* posteriormente, buscamos identificar las características de la competencia y la analizamos desde nuestro contexto. En la segunda parte se hizo una revisión de los trabajos realizados sobre *trayectorias hipotéticas de aprendizaje* y cómo las características de este constructo permiten el desarrollo de ciertas destrezas en la enseñanza de las matemáticas. En la última parte, nos acercamos a los trabajos que relacionan el constructo de *trayectorias de aprendizaje* con el desarrollo de la competencia *mirar profesionalmente*, identificando que hay evidencia de trabajos en donde se apoyan del constructo de trayectorias de aprendizaje para potenciar el desarrollo de la competencia .

En el capítulo 3 se describe el diseño metodológico de la investigación, adquiriendo un enfoque cualitativo para un estudio de casos, se hace la justificación del por qué basarnos en los enfoques mencionados para la investigación, se describen las características de los participantes que colaboran en este trabajo, desde sus propios perfiles y el contexto en que estos se desarrollan, pero manteniendo su confidencialidad. En una primera etapa de la investigación se muestra la forma en que se organizó el trabajo con los docentes participantes, se introduce al constructo de *trayectorias hipotéticas de aprendizaje* en donde una de las principales tareas es que los docentes hipoteticen sobre el proceder de los estudiantes ante ciertas tareas, por último, los docentes analizarán producciones escritas de un grupo de estudiantes al realizar una tarea. Para las tareas se trabajó el tema específico de sólidos de revolución que pertenece a la asignatura de cálculo integral

En el capítulo 4 se realiza el análisis de los resultados obtenidos mediante los instrumentos y se busca caracterizar el desarrollo de la competencia para cada uno de los profesores participantes en el trabajo de investigación. Se analiza el discurso emitido por los profesores en busca de la mirada profesional del pensamiento matemático de los estudiantes y dar respuesta a la pregunta de investigación de este trabajo. También se reflexiona sobre el discurso de los profesores, a partir de la técnica de entrevista, aplicada a los cuatro docentes de manera individual, pues se les presentan las mismas producciones de los estudiantes, con la finalidad de analizar sus respuestas.

En el capítulo 5 se desarrollan las conclusiones y se discuten a partir del análisis de las investigaciones de otros autores. Se presentan conclusiones generales sobre el desarrollo de la competencia por parte de los profesores, dando respuesta a la pregunta de investigación, se discute sobre las perspectivas futuras sobre esta línea de investigación ubicada en nuestro contexto.

Capítulo 2

MARCO TEÓRICO

En este trabajo de investigación se relaciona el constructo de *Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje* con la idea de *mirar profesionalmente* en el desarrollo de la competencia docente *mirar profesionalmente el desarrollo matemático de los estudiantes*.

Para iniciar este capítulo se presentan los antecedentes que hay al respecto de la competencia docente *mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes*; se analiza cómo diversos trabajos conceptualizan el desarrollo de la competencia y se revisan algunos de los estudios sobre el desarrollo de la competencia, así como los resultados de dichas investigaciones.

Además, se presentan los elementos teóricos del constructo *Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje*, se analizan los trabajos donde, su uso, potencia el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas. Con la visión de varios enfoques, las trayectorias hipotéticas de aprendizaje se pueden considerar como un antecedente útil para el desarrollo de la competencia profesional *mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes*.

2.1 Antecedentes

En los últimos treinta años, se han realizado muchos esfuerzos para explorar la conexión entre el conocimiento profesional de los profesores de matemáticas y sus prácticas de instrucción con respecto a los logros de sus estudiantes (Stahnke, Schueler, y Roesken-Winter, 2016). Además, afirman que las discusiones actuales en el campo etiquetan estas dos perspectivas sobre el conocimiento profesional de los profesores de matemáticas como cognitivas y situadas, de manera particular uno de los campos explora el papel de las habilidades específicas de la situación como mediador de lo que los maestros saben y cómo actúan.

Muchos de los trabajos que se mencionarán como parte de esta investigación parten de la idea de visión profesional de Goodwin (1994) quien, al respecto, dice que la visión profesional consiste en formas socialmente organizadas de ver y comprender los eventos que responden a los distintos intereses de un grupo social en particular, dentro de las conclusiones de su trabajo, advierte que la visión profesional no es un proceso puramente mental, sino que se logra a través del despliegue de

un complejo componente de prácticas situadas en un entorno relevante, que lleva a desarrollar la capacidad de construir e interpretar un artefacto cognitivo propio de cada profesión.

De acuerdo con lo anterior Zapatera (2015) dice que cada grupo de profesionales tiene experiencias y objetivos diferentes, que cambian según las características propias de cada profesión, por lo que cada mirada profesional tendrá sus propios patrones, de manera particular la enseñanza tendrá su propia manera de notar de forma profesional.

Para Mason (2002) cada acto de enseñanza depende de *notar*; darse cuenta de lo que sucede en el aula, cómo responden los estudiantes, evaluar lo que dicen, para considerar lo que se puede responder o hacer a continuación, no se puede elegir cómo actuar dentro del aula si no se nota una oportunidad. De la misma forma señala sobre la profesionalización docente que, cada acto de enseñanza, de cuidado, de apoyo, es también un acto de aprender sobre los estudiantes, resalta la importancia de responder profesionalmente a las situaciones que se presentan a un docente con sus estudiantes en lugar de reaccionar.

En este mismo trabajo Mason (2002), advierte que el *noticing* (por su traducción al inglés del verbo notar) es una disciplina que presenta su respectivo grado de complejidad, profundizar en nuestras sensibilidades como docentes para notar diferentes aspectos de nuestra práctica profesional, además, por otra parte, afirma que, cuanto más exploras el pensamiento de los estudiantes, más te das cuenta de cuán sofisticado y poderoso puede ser su pensamiento.

Con la consigna de responder profesionalmente, Mason (2002) distingue entre, notar para darse cuenta de lo que se percibe e interpretarlo y darse cuenta para identificar posibles respuestas que den dirección a lo que se notó e interpretó.

Sherin, Jacobs, y Philipp (en prensa) usan el término *noticing* para referirse a la acción que el docente ejerce, al hacer una advertencia sobre los procesos que abarca, mediante los cuales los profesores manejan la “confusión floreciente y susurrante de los datos sensoriales” a los que se enfrentan en el aula o cualquier otro entorno educativo. Dicho en otras palabras, por los mismos autores el docente debe de elegir dónde enfocar su atención y por cuánto tiempo, dónde no se necesita su atención y nuevamente durante cuánto tiempo.

Para van Es y Sherin (2002) *notar* implica identificar lo que es importante en una situación de enseñanza y al mismo tiempo hacer conexiones entre eventos específicos y principios más amplios

de enseñanza y aprendizaje, posteriormente concluir en el uso de lo que el docente sabe sobre su contexto para razonar acerca de la situación. En conjunto estas acciones buscan comprender qué pasó, qué piensan los estudiantes sobre un tema o cómo influyó una acción del docente en el pensamiento del estudiante.

Otros investigadores entienden que *notar*, involucra el proceso en el que los docentes desde un inicio ven o perciben diferentes aspectos de la actividad en el aula (Erickson, 2011), explorar desde este enfoque al docente, implica identificar lo que atiende y lo que decide no atender. Por lo tanto, comprender que un docente se da cuenta, también involucra comprender cómo un docente interpreta lo que percibe.

Para Pugalee (2018) refinar la práctica pedagógica del maestro de matemáticas, requiere notar las características sobresalientes de la instrucción y cómo estas características afectan la instrucción. *Notar* en la educación matemática, se enfoca en cómo los maestros interactúan con las situaciones de instrucción.

2.2 Competencia docente mirar profesionalmente el pensamiento matemático del estudiante

La competencia docente mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes, ha ido tomando sus características partiendo desde la perspectiva de visión profesional Goodwin (1994) como ya se mencionó. Posteriormente Mason (2002) asocia el concepto de visión profesional, con el hecho de *notar* (*noticing*), de lo que el docente se da cuenta y atiende en el aula de manera intencional, como parte de su quehacer profesional, además sugiere hacer de la idea de notar una disciplina entrenable, a lo que dice:

“La observación profesional es lo que hacemos cuando vemos a otra persona actuar, dar una lección, trabajar con un cliente, dirigir un taller, dar una conferencia y tomar conciencia de algo que hace, un patrón de discurso que emplea, un gesto que usa, una pregunta que hace y que pensamos que podríamos usar nosotros mismos” (Mason, 2002, p. 30)

Por otra parte, van Es y Sherin (2002) profundizan en lo que implica aprender a notar aspectos relevantes del proceso de enseñanza aprendizaje, definen desde su interpretación lo que significa notar interacciones en el aula con tres aspectos clave:

- a) Identificar lo que es importante o situaciones dignas de mención en el salón de clases.
- b) Hacer conexiones entre los detalles de las interacciones en el aula y los principios más amplios de enseñanza aprendizaje que representan.
- c) Usar lo que uno sabe sobre el contexto para razonar sobre las interacciones en el aula.

“Identificar lo que es digno de mención sobre una situación particular, implica que los profesores deben seleccionar a qué asistirán y responderán a lo largo de una lección” (van Es y Sherin, 2002, p. 573).

Entre otras investigaciones Leinhardt, Putnam, Stein y Baxter (1991) mencionan que los maestros expertos o experimentados tienen en mente “puntos de control”, que utilizan para evaluar y organizar el progreso y cómo proceder. A través de los puntos de control, los profesores pueden ser capaces de reconocer lo que es importante atender a medida que se implementa la lección (van Es, y Sherin, 2002). Sobre el aspecto clave de “hacer conexiones entre eventos específicos y principios más amplios de enseñanza aprendizaje” los autores nos dicen que, es conectar el evento que ven los profesores, a un concepto o principio sobre la enseñanza y el aprendizaje, es decir la importancia de extrapolar desde lo específico a lo general.

Para la tercera característica identifican que, *notar* interacciones en el aula es una acción ligada al contexto específico en que se enseña, y es precisamente en esa área donde debería desarrollarse la habilidad de *notar*. En otras palabras, los profesores deben utilizar el conocimiento de cada uno sobre la materia, el conocimiento de lo que piensan los estudiantes sobre el tema, así como el conocimiento de su contexto para razonar los diferentes eventos que se susciten (van Es y Sherin, 2002).

Para Jacobs, Lamb y Philipp (2010) notar es un acto común de la enseñanza, consideran que darse cuenta es una actividad más compleja y desafiante, también advierten sobre la naturaleza subjetiva de darse cuenta. Al considerar esa naturaleza encuentran que: “los patrones de notificación han evolucionado para grupos de individuos que tienen experiencias y objetivos similares como grupos sociales. En resumen, aprender a *notar* en formas particulares es parte del desarrollo de la experiencia en una profesión” (Jacobs, Lamb y Philipp, 2010, p. 170). De acuerdo con lo anterior los investigadores mencionan que, el hilo conductor que da sentido a la definición de *notar* es, cómo los individuos procesan situaciones complejas. En su trabajo de investigación los autores documentaron experiencias de un grupo de profesores con un tipo especializado de *notar*, a lo que

llamaron *notificación profesional del pensamiento matemático de los niños*, conceptualizada por tres habilidades relacionadas entre sí:

- a) Asistir a las estrategias de los niños.
- b) Interpretar el entendimiento de los niños.
- c) Decidir cómo responder sobre la base de la comprensión de los niños.

Sherin, Russ y Colestock (2011) se enfocan en *notar* como una *visión profesional*, en la cual, los maestros asisten selectivamente a los eventos que tienen lugar y luego recurren a sus conocimientos existentes para interpretar los eventos notados. Ejemplifican estas ideas argumentando que la observación del docente debe incluir no sólo que el profesor preste atención a una idea particular del estudiante, sino también que el profesor interprete esa idea en función del conocimiento del alumno y del contenido matemático.

En el trabajo de Sánchez-Matamoros, Fernández, Valls, García y Llinares (2012) sobre la competencia docente *mirar con sentido el pensamiento matemático de los estudiantes*, se caracteriza el desarrollo de esta competencia en cuanto a dominios matemáticos específicos, planteando las siguientes preguntas:

1. ¿En qué medida los profesores pueden identificar los elementos matemáticos que utilizan los estudiantes en la resolución de tareas?
2. ¿Cómo interpretan los profesores las respuestas de los estudiantes?
3. ¿De qué manera las decisiones de acción que plantean los profesores tienen en cuenta la manera en la que los estudiantes parecen comprender las matemáticas?

Sánchez-Matamoros *et al.* (2012), por su parte, se centra en caracterizar la competencia mirar con sentido el pensamiento matemático de los estudiantes en el ámbito específico de la derivada de una función en un punto, apoyándose en la existencia de síntesis de resultados de investigación acerca del aprendizaje de los estudiantes sobre las nociones matemáticas de Cálculo. En otras palabras los autores para identificar e interpretar y tomar decisiones de acción en cuanto al progreso de los estudiantes en el aprendizaje del Cálculo, de forma muy específica respecto al concepto de derivada de una función en un punto, se basan en el marco teórico que existe en la investigación de didáctica de la matemática con respecto al pensamiento abstracto y variacional, buscando atender de forma

profesional a las tres características que conceptualizan el desarrollo de la competencia docente mirar con sentido el pensamiento matemático de los estudiantes.

La competencia docente *mirar con sentido*, permite al profesor de matemáticas ver las situaciones de enseñanza-aprendizaje de una manera profesional (Llinares, 2012) al mismo tiempo afirma que el desarrollo de la competencia integra tres destrezas, 1) identificar los aspectos relevantes de la situación de enseñanza; 2) usar el conocimiento del contexto para razonar sobre las interacciones en el aula; y 3) realizar conexiones entre sucesos específicos del aula y principios e ideas más generales acerca de la enseñanza-aprendizaje.

Stahnke, Schueler, y Roesken-Winter (2016) realizan una revisión sistemática sobre investigaciones empíricas que involucran las habilidades específicas de cada profesor de matemáticas, revisando un total de sesenta artículos, se encontraron los marcos teóricos utilizados, diseños de instrumentos y métodos aplicados, así como los principales hallazgos respecto a la visión profesional de los docentes. De esta revisión resalta que, para una enseñanza efectiva de las matemáticas se debe considerar un conocimiento igualmente importante sobre el aprendizaje de los estudiantes, administrando entornos de aprendizaje adecuados y apoyados sustancialmente por los discursos en el aula. Al respecto Fernández, Sánchez-Matamoros, Valls y Callejo (2018) afirman que el conocimiento de una situación puede construirse a través de un proceso de argumentación dialógica que tiene lugar cuando los significados se examinan para llegar a un consenso.

Una de las preguntas que buscaban responder Stahnke, Schueler, y Roesken-Winter (2016) en su trabajo es ¿A qué marcos teóricos se refiere la investigación empírica sobre la situación de los profesores de matemáticas en habilidades específicas? La respuesta en sus conclusiones dice que, los estudios hacen referencia a dos marcos teóricos principales: el conocimiento profesional de los docentes y el conocimiento profesional situado de los docentes, además advierten que pocos estudios combinaron ambos marcos. Cabe aclarar que en el trabajo de investigación que se presenta, particularmente en educación media superior, se hizo una revisión documental a fin de obtener un marco teórico sobre el conocimiento profesional situado.

2.2.1 Características y niveles de la competencia

En la investigación realizada por van Es y Sherin (2002), trabajaron con profesores experimentados en desarrollar la competencia y con pasantes que no habían tenido contacto con esta forma de trabajo, tras analizar sus ensayos, consideraron un extremo del análisis de estos, para caracterizar a los profesores que hicieran una descripción literal, observaron la falta de un nivel intermedio que permitiera colocar en la categoría la relación entre docentes expertos y los docentes que aún eran pasantes; asimismo en su trabajo consideran dos niveles avanzados del análisis.

Uno de estos niveles caracteriza cómo los maestros principiantes interpretan las interacciones en el aula, identifican lo que es digno de mención y conectan eventos específicos con principios de enseñanza aprendizaje. El nivel avanzado caracteriza a los maestros que comienzan a hacer conexiones entre los eventos, conceptos y principios de enseñanza, pero además comienzan a ofrecer soluciones pedagógicas basadas en sus interpretaciones.

La Tabla 2.1 muestra la propuesta de una trayectoria de los niveles de desarrollo para aprender a observar e interpretar las interacciones en el aula. En sus resultados de la investigación se observa que los profesores experimentados tienen cierta influencia en el análisis de su práctica docente. Dentro de su análisis mencionan que el objetivo es comprender cómo responden a las ideas de los estudiantes.

	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4
Patrón dominante en la escritura	Describe y evalúa	Mezcla de describir y evaluar y completa fragmentos analíticos	Completa los fragmentos analíticos	Completa pedazos analíticos
		o	y	Conexiones entre llamadas y evidencia
		Fragmentos analíticos incompletos	Evalúa	Identificar soluciones pedagógicas

Tabla 2. 1 Trayectoria de desarrollo de aprender a notar (van Es y Sherin, 2002).

Fernández, Valls y Llinares (2011) indagan en caracterizar la competencia mirar con sentido el pensamiento matemático de los estudiantes en el ámbito específico del razonamiento proporcional. Buscan caracterizar criterios y organizar esquemas para describir dicha competencia, particularizando en el hecho de identificar e interpretar específicamente diferentes aspectos del razonamiento proporcional. Los autores mencionados logran refinar cuatro niveles como descriptores de la competencia mirar con sentido, quedando de la siguiente forma:

- Nivel 1 No discriminan.
- Nivel 2 Discriminan y describen las operaciones sin justificar la diferencia entre las situaciones.
- Nivel 3 Discriminan justificando, las operaciones, pero sin identificar los perfiles.
- Nivel 4 Discriminan justificando, describen identificando el tipo de relación entre las cantidades e identifican los perfiles.

Este análisis hizo emerger un esquema que permitió describir los rasgos característicos de la competencia mirar con sentido.

Para Seidel y Stürmer (2014) la visión profesional ha sido identificada como un elemento importante de la experiencia docente, que se puede desarrollar en la formación docente, su estudio proporciona una idea de la estructura de la visión profesional del profesor de matemáticas, conceptualizando teóricamente la visión profesional de maestros en servicio.

Para estructurar su conceptualización de *visión profesional* Seidel y Stürmer (2014) hacen referencia a dos subcomponentes de la visión profesional, el notar y el razonamiento de los docentes sobre las secuencias del aula, como un indicador del conocimiento integrado del docente. También indican que notar se enfoca en tres componentes: la claridad y orientación de los objetivos, el apoyo de los docentes en el aula, y el clima de aprendizaje. Para el razonamiento distinguen tres aspectos cualitativos: descripción, explicación y predicción. En su análisis interrelacionan estos tres aspectos de la visión profesional (descripción, explicación y predicción) y aclaran que la visión profesional puede considerarse unidimensional, de modo que los tres aspectos no pueden separarse, pero, también podría ser que los tres aspectos deben verse como distintos, aunque altamente relacionados. La Figura 2.1 muestra el esquema en el que se apoyan para enfocarse en las componentes de notar y razonar.

En su modelo Seidel y Stürmer (2014) señalan que la *descripción* se refiere a la capacidad de diferenciar claramente los aspectos relevantes de un componente de enseñanza y aprendizaje observado, el razonamiento activará el conocimiento profesional para describir la situación observada.

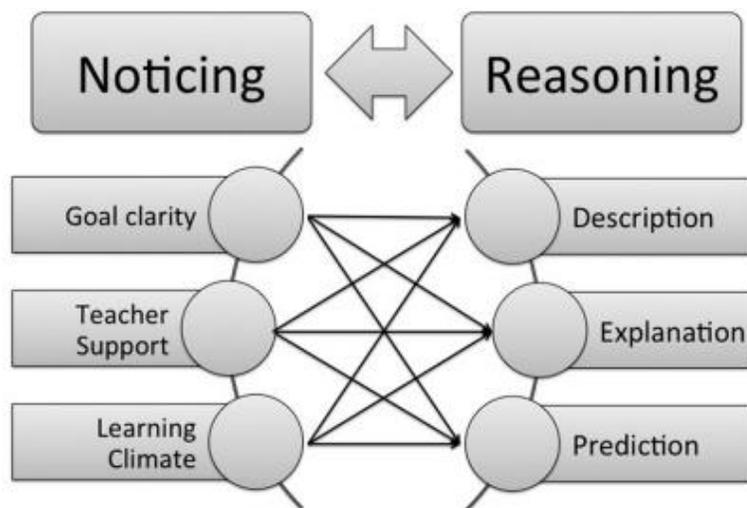


Figura 2. 1 Notar y razonar como dos componentes de la visión profesional (Seidel y Stürmer, 2014, p. 744).

La *explicación* por su parte es la capacidad de usar lo que se sabe para razonar sobre la situación, vinculando eventos del aula con el conocimiento profesional y clasificar las situaciones de acuerdo con los componentes de la enseñanza involucrados. Mientras que *predicción* se refiere a la capacidad de predecir las consecuencias de los eventos observados en términos del aprendizaje del alumno.

Para Vondrová y Žalská (2015), *notar como visión profesional* se puede analizar de varias formas, estas autoras retoman la esencia de las destrezas clave propuestas por van Es y Sherin (2002), concentrándose sólo en el primer componente, es decir lo que se atiende en el aula y es digno de mención, cómo se interpretan las interacciones en el aula, o bien, se puede analizar las repuestas previstas de los docentes de lo que se está notando. Su trabajo se centra en investigar la atención de los docentes a fenómenos del contenido específico. Consideran momentos clave en el aprendizaje de los alumnos, es decir, los tipos de tareas que se presentan por el docente y el discurso que se orquesta en el aula cuando implementan las tareas de una lección de matemáticas. Además, enfatizan el papel activo de los alumnos en el desarrollo de sus conocimientos.

Para Fortuny y Rodríguez (2012) los aspectos clave para reconocer una *visión profesional* son los que se han trabajado en otras investigaciones (Jacobs, Lamb y Philipp, 2010; Sherin y van Es, 2002). Los tres aspectos clave, según los investigadores, implican la competencia en las habilidades de identificar, interpretar y saber razonar los distintos enfoques o estrategias que el alumnado puede usar en la resolución de problemas. Asimismo, disponer de una competencia docente o visión profesional no es una descripción de actuaciones, sino la capacidad de identificar los aspectos matemáticos, las competencias matemáticas que se pueden o no producir y poder dotarlas de sentido, es decir interpretarlos desde un posicionamiento teórico determinado.

De acuerdo con Ivars, Buforn y Llinares (2017) la manera en la que los maestros dan sentido a las situaciones de enseñanza es un aspecto de la competencia docente *mirar profesionalmente*. Sostienen que las aproximaciones al desarrollo de la competencia se apoyan en el fortalecimiento de la relación entre la capacidad de discernir los detalles relevantes para el aprendizaje de las matemáticas, así como en las características de la comprensión matemática de los estudiantes, para poder derivar cursos de acción en ese contexto específico.

Los autores mencionados con antelación señalan que solo la idea de experiencia en el docente no es suficiente para el desarrollo de la competencia, pues se necesita la integración del conocimiento teórico en el análisis de las situaciones prácticas.

En su artículo caracterizan diferentes logros de la competencia, de acuerdo con su experiencia en otros trabajos realizados sobre el desarrollo de la competencia *mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes* consideran:

- El papel desempeñado por el conocimiento de matemáticas en el análisis en la práctica.
- Cómo establecen relaciones entre las evidencias y los elementos de la teoría.
- El nivel de generalidad-especificidad del discurso.
- La integración del uso de los elementos matemáticos y los relativos a la comprensión.

Con estas características del discurso articulado sobre la práctica, buscan evidenciar un desarrollo alto de la *mirada profesional* sobre las situaciones prácticas.

2.3 Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje

El constructo de *Trayectoria Hipotética de Aprendizaje* resulta de interés para varios investigadores en educación matemática, dicho constructo es introducido por Simon (1995) como propuesta de un ciclo de enseñanza de las matemáticas.

Una trayectoria hipotética de aprendizaje consiste en, objetivos para el aprendizaje de los estudiantes, tareas matemáticas para promover el aprendizaje de los estudiantes y las hipótesis acerca del proceso de aprendizaje de los estudiantes (Simon, 1995). Además, Simon y Tzur (2004) dan las principales características en las que se fundamenta el constructo:

1. La construcción de una trayectoria de aprendizaje se basa en la comprensión del conocimiento actual de los estudiantes que recibirán la instrucción.
2. Una trayectoria hipotética de aprendizaje es el vehículo para planificar el aprendizaje de conceptos matemáticos concretos.
3. Las tareas matemáticas proporcionan las herramientas para promover el aprendizaje de conceptos matemáticos y, por lo tanto, son un elemento clave del proceso de instrucción.

(p. 93)

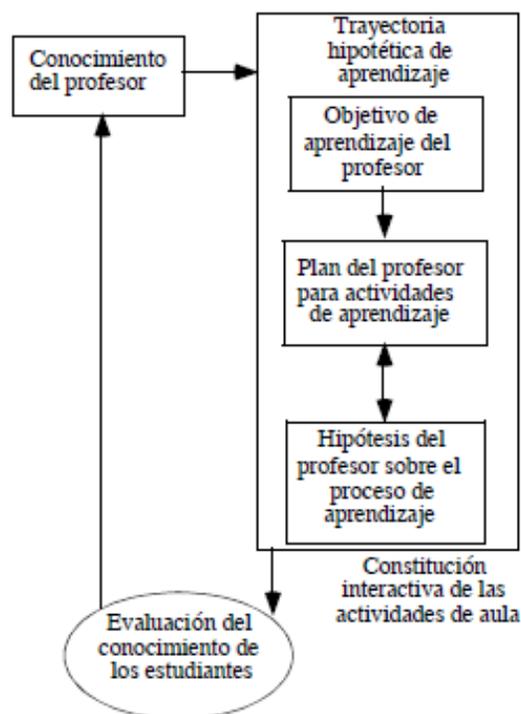


Figura 2. 2 Ciclo de enseñanza de las matemáticas abreviado (Simon, 1995, p.136).

En la Figura 2.2 se muestra el ciclo de enseñanza propuesto por Simon (1995), destacando los componentes que incluyen las trayectorias hipotéticas de aprendizaje

Por su parte Gómez y Lupiáñez (2007) dicen que el profesor debe tener en cuenta su conocimiento sobre los errores, dificultades y obstáculos de los escolares al momento de construir trayectorias hipotéticas, destacan la importancia del constructo en la actuación del profesor de matemáticas cuando diseña actividades de enseñanza aprendizaje.

Para Steffe (2004) construir trayectorias hipotéticas de aprendizaje es un problema emocionante porque se permite la construcción de la comprensión de las matemáticas de los estudiantes, además indica que una trayectoria de aprendizaje aporta una visión ante cambios observables de conceptos en una actividad matemática junto con una explicación de las interacciones matemáticas que se realizaron.

Una trayectoria de aprendizaje es una descripción detallada de la secuencia de pensamientos, formas de razonamiento y estrategias que emplea un estudiante mientras participa en el aprendizaje de un tema, incluida la especificación de cómo el estudiante se ocupa de todas las tareas de instrucción e interacciones sociales durante esta secuencia (Battista, 2011). Además, hay dos tipos de trayectorias de aprendizaje “hipotéticas y reales”. Una trayectoria hipotética, entre sus componentes, debe contar con una predicción de cómo evolucionará el pensamiento y la comprensión de los estudiantes en el contexto de la actividad de aprendizaje. Mientras que una trayectoria de aprendizaje real solo puede ser especificada durante y después de que el alumno haya progresado a través de dicha vía de aprendizaje.

Por tanto, Battista (2011) afirma que desde la perspectiva constructivista las trayectorias hipotéticas ayudan a los maestros a planificar la instrucción, entender el aprendizaje de los alumnos en cada momento y ajustar de forma apropiada y continua la instrucción para satisfacer las cambiantes necesidades de aprendizaje de los estudiantes.

Wilson, Mojica y Confrey (2013) plantean que las trayectorias de aprendizaje describen el aprendizaje de los alumnos como un continuo de comprensión creciente a lo largo del tiempo y no como una dicotomía entre lo correcto y lo incorrecto. Conceptualizan diciendo que una trayectoria es como una descripción de la red ordenada de construcciones, que el estudiante encuentra a través de las actividades, de las tareas, formas de interacción y métodos de evaluación. Dentro de su

trabajo de investigación muestran que las trayectorias de aprendizaje ofrecen una estructura conceptual y accesible para los docentes, afirman que son una herramienta para los profesores en esta dialéctica teórico-empírica al crear una sinergia que aumenta la adecuación del modelo del pensamiento matemático del estudiante.

Para Clements y Samara (2004) el nombre de trayectoria hipotética de aprendizaje refleja sus raíces en una perspectiva constructivista, afirman que hay claramente la intención de caracterizar un aspecto esencial del pensamiento pedagógico. En su investigación conceptualizan las trayectorias de aprendizaje como descripciones del pensamiento y aprendizaje de los niños en un dominio matemático específico y una ruta conjeturada relacionada a través de un conjunto de tareas diseñadas para engendrar acciones hipotéticas a fin de mover al estudiante de una progresión del desarrollo de niveles de pensamiento, con la intención del logro de objetivos específicos en el dominio matemático.

Una trayectoria completa de aprendizaje hipotético incluye tres aspectos: la meta de aprendizaje, las progresiones del desarrollo del pensamiento y el aprendizaje y la secuencia de tareas de instrucción (Clements y Samara, 2004). El enfoque completo de los investigadores es considerar los aspectos de enseñanza aprendizaje para las trayectorias hipotéticas de aprendizaje de forma inicial y luego diseñar, probar iterativamente y reconocer que las diferencias individuales, variaciones, alternativas y refinamientos adicionales no son solo un objetivo, sino un continuo requisito.

2.4 Trayectorias Hipotéticas para el desarrollo de la competencia mirar profesionalmente

De acuerdo con Ivars *et al.* (2016), los elementos que constituyen las trayectorias de aprendizaje les permitirán a los profesores articular una mirada más estructurada para inferir información sobre la comprensión de los estudiantes a fin de proponer nuevas actividades. De lo anterior dan cuenta los autores, mostrando cómo en esta misma investigación, el uso de trayectorias de aprendizaje permitió a los estudiantes para maestros identificar el razonamiento de los estudiantes centrándose en elementos matemáticos. Al mismo tiempo, el uso de las trayectorias permitió a los estudiantes para profesores reconocer diferencias en la manera en la que los niños resolvían las actividades, y comentaban que:

“las características de las trayectorias de aprendizaje se usan como un andamio cognitivo que permite superar planteamientos dicotómicos de correcto o incorrecto de manera global” (Ivars, Buforn y Llinares; 2016, p. 58)

Pese a tratarse solamente de una experiencia, el presente trabajo de investigación coincide con Ivars *et al.* (2016) en que las trayectorias aprendizaje pueden ser utilizadas en la práctica docente y son una potente herramienta para identificar e interpretar el pensamiento de los estudiantes. Por un lado, siguiendo a Zapatera (2015), sabemos que las trayectorias hipotéticas dan más coherencia a las experiencias matemáticas de los estudiantes, al articular su progreso, desde ideas informales a conceptos matemáticos sofisticados y por otra parte a diagnosticar la comprensión de los estudiantes.

Con todas estas características que nos ofrecen las trayectorias de aprendizaje, el docente podrá aprender mediante ciertas actividades de aprendizaje, a buscar elementos que les permitan hacer inferencia sobre los trabajos de sus estudiantes, de esta manera el docente irá avanzado en el desarrollo de la competencia mirar profesionalmente.

De acuerdo con el último trabajo de Fernández, Sánchez-Matamoros, Valls y Callejo (2018) donde recuperan un profundo análisis, revisando ampliamente sus investigaciones realizadas acerca del desarrollo de la competencia *mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes*, se destaca sobre que las *Trayectorias de Aprendizaje* pueden ser utilizadas por los profesores como una guía para estructurar su atención al pensamiento matemático de los estudiantes. Además, añaden que, las trayectorias hipotéticas de aprendizaje pueden ayudar a los profesores a definir objetivos de aprendizaje, anticipar e interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes, así como responder de una forma profesional en la progresión de su aprendizaje.

En este análisis Fernández *et al.*, (2018) pone de manifiesto que las trayectorias de aprendizaje son un referente para mejorar el discurso del profesor al querer interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes y promueven una mejor respuesta de acción para continuar con el progreso del aprendizaje en el estudiante.

En un reciente trabajo Sánchez-Matamoros, Moreno, Pérez y Callejo (2018) también utilizan las trayectorias de aprendizaje con el objetivo de desarrollar la mirada profesional. Según su marco teórico una trayectoria de aprendizaje es un “artefacto” que se convierte en un instrumento

conceptual, cuando el profesor lo hace suyo y lo usa para analizar las respuestas de sus alumnos, desde la perspectiva de las tres destrezas de la mirada profesional (describir, interpretar y tomar decisiones), por tanto, una trayectoria de aprendizaje favorece a consolidar estas tres destrezas interrelacionadas que configuran la mirada profesional de un docente.

Capítulo 3

METODOLOGÍA

En este capítulo se presenta el diseño de investigación, los participantes y sus contextos como profesores activos de matemáticas, el diseño de la tarea, como parte de las actividades implícitas en el análisis de una trayectoria hipotética de aprendizaje alrededor de un tema de Cálculo, específicamente nos enfocamos en concepto de sólidos de revolución, se muestran las fases del trabajo de investigación que se gestionaron para poder introducir a los profesores en el constructo de trayectorias hipotéticas de aprendizaje. Se presentan los instrumentos que se utilizaron para la recogida de información acerca del desarrollo de la competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes en los profesores, que servirá posteriormente para mostrar los resultados y su análisis.

3.1 Participantes y contexto

Como se ha mencionado el trabajo de investigación se realizó con un grupo de profesores que imparten clases de Cálculo Diferencial e Integral en distintos Bachilleratos en el estado de Puebla, México. Todos cuentan con algunos años de experiencia y a continuación describimos brevemente sus contextos.

1. Grace es licenciada en Arquitectura, cuenta con una maestría en dirección de organizaciones educativas. Desde de 1999 ha impartido las asignaturas de álgebra, geometría y trigonometría, geometría analítica, cálculo diferencial e integral, estadística, razonamiento matemático, así como modelos matemáticos.
2. Mary es licenciada en Física, con MC en Física, experiencia docente en nivel medio superior y superior. Ha impartido materias tanto del área de física, como mecánica y dinámica; y del área de matemáticas cálculo diferencial e integral, ecuaciones diferenciales, análisis numérico, probabilidad y estadística, álgebra lineal y cálculo de varias variables en las instituciones de nivel superior en donde labora.
3. Bryan es ingeniero de formación con experiencia en bachillerato. Ha impartido las materias de cálculo diferencial e integral, estadística y modelos matemáticos.

4. George es ingeniero Industrial de formación con Maestría en Educación Superior, con ocho años de servicio, y experiencia docente en el nivel superior, impartiendo los cursos de cálculo diferencial e integral, ecuaciones diferenciales y álgebra lineal en una Universidad Politécnica del estado de Puebla. Es especialista en el manejo de software educativo.

Dentro del grupo de profesores se buscó que contaran con experiencia en las asignaturas de cálculo diferencial e integral, ya que para hipotetizar sobre el proceder de los estudiantes ante cierta actividad resultó significativo haber contado con experiencias previas.

3.2 Diseño de la investigación

La investigación realizada tiene un enfoque cualitativo. De acuerdo con Sandín (2003) la investigación cualitativa participa en una gran variedad de discursos o perspectivas teóricas en diversas disciplinas, así mismo engloba numerosos métodos y estrategias de recogida de datos. Por su parte Reyes (2000) afirma que la investigación cualitativa es un método y un arte para describir un grupo o una cultura por su parte para Taylor y Bogdan (2015) señalan que la metodología cualitativa se refiere en su más amplio sentido a la investigación que produce datos descriptivos: *las propias palabras de las personas, habladas o escritas y la conducta observable*. Con estas características el presente trabajo de investigación se basa en dicho enfoque para describir el desarrollo de destrezas en un grupo de profesores en el contexto de trabajo que se creó para la investigación.

Este estudio de caso tiene un enfoque cualitativo que busca caracterizar el grado de desarrollo de la competencia docente mirando profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes, ya que como se mencionó el desarrollo de la competencia puede ser subjetiva (Jacobs, Lamb y Philipp, 2010).

En el trabajo se usó un estudio de caso, que se puede definir como estudios que utilizan los procesos de investigación cualitativa o cuantitativa o mixta para analizar profundamente una unidad holística para responder al planteamiento de alguna problemática (Hernández, Fernández y Baptista, 2014, p 164). Trabajamos con este grupo de profesores buscando analizar lo más profundo que se pueda, en cuanto a mirarlo profesionalmente como una competencia docente, propia del profesor de matemáticas.

“Un estudio de caso puede proveer, simultáneamente, información sobre las características individuales de los miembros de una colectividad” (Tarrés, 2013, p.233). En lo que concierne a la investigación educativa un estudio de caso se puede usar como recurso para el manejo de registros de información de casos, en función de facilitar el trabajo profesional (Tarrés, 2013, p.235). Por otro lado, Albert (2007) dice que el estudio de caso implica un proceso de indagación que se caracteriza por el examen detallado, comprensivo, sistemático y en profundidad, del caso de estudio. Su potencial radica en que permite centrarse en un caso concreto o situación e identificar los distintos procesos que lo conforman. En su artículo titulado el “El método del estudio de caso” Martínez (2006) concluye que el estudio de caso es una estrategia metodológica útil en la generación de resultados que posibilitan el fortalecimiento, crecimiento y desarrollo de las teorías existentes o el surgimiento de nuevos paradigmas científicos.

En este trabajo el objetivo es dotar a los profesores de herramientas basadas en la investigación que ayuden a mejorar su práctica actual. Como se ha mencionado en esta investigación se contó con la participación de cuatro docentes activos. Trabajamos con el tema de sólidos de revolución para mostrar como analizar la práctica docente desde una perspectiva documentada en varios años de investigación.

3.2.1 Fases de la investigación

Durante cinco sesiones se analizaron actividades propuestas para el tema de sólidos de revolución, en total se analizaron seis actividades plasmadas en una secuencia didáctica, en una sesión los profesores hipotetizaron sobre el posible comportamiento de sus estudiantes ante una actividad. La siguiente Tabla 3.1 muestra las fases de trabajo con los docentes para introducirlos en el análisis de las trayectorias hipotéticas de aprendizaje como alternativa para que los profesores aprecien de una forma profesional el trabajo de los estudiantes. Como lo indica la Tabla 3.1 la sexta fase fue asignada para aplicar los instrumentos para la recolección de la información.

Con este trabajo realizado y las discusiones obtenidas se esperaba que los profesores al analizar la producción de los estudiantes borren de su discurso el simple hecho de que el estudiante actuó bien o actuó mal, se espera que profundicen sobre el actuar de los estudiantes en el proceso de construcción del concepto matemático en cuestión.

Fases	Acción
1	Introducir de forma teórica al constructo de trayectorias hipotéticas de aprendizaje, que conforma una trayectoria, como ayuda dicho constructo en la práctica profesional.
2	Presentación de actividades, para definir los objetivos de aprendizaje.
3	Hipotetizar sobre el comportamiento de los estudiantes ante una tarea específica.
4	Analizar mediante video grabación si sus hipótesis se cumplen ante la aplicación de la actividad a un grupo de estudiantes.
5	Propuestas para continuar con el progreso de los estudiantes dada la actividad anterior.
6	Implementación de los instrumentos de recogida de información, respecto al desarrollo de la competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes.

Tabla 3. 1 Fases de trabajo con los profesores de la investigación.

Recurrimos a la forma de caracterizar el desarrollo de la competencia de Ivars, Burform y Llinares (2017) ya que en esta caracterización conjuntan el trabajo de varias de sus investigaciones para lograr una caracterización de los diferentes discursos sobre la práctica de los estudiantes para maestros considerando:

- El papel desempeñado por el conocimiento de matemáticas en el análisis de la práctica (Buform, y Fernández, 2014; Buform, Fernández y Llinares, 2015).
- Cómo se establecen las relaciones entre las evidencias y los elementos de la teoría (Ivars *et al.*, 2016; Llinares y Valls, 2009; 2010).
- El nivel de generalidad-especificidad del discurso (Ivars, Burform y Llinares, 2016).
- La integración del uso de elementos matemáticos y los relativos a la comprensión (Ivars, Burform y Llinares, 2016).

Niveles	Caracterización
N1 Descriptivo	El profesor describe de manera “natural” lo que ve, sin utilizar los términos que dan cuenta de las ideas teóricas que son relevantes para analizar la situación
N2 Retórico	Se usan los términos que describen las ideas teóricas para construir un discurso sin establecer relaciones entre estas ideas o con las evidencias de la situación. Falta de cohesión en el discurso
N3 Identificación e inicio de uso instrumental de la información	Identifica uno o varios aspectos relevantes de la situación y los interpreta utilizando ideas teóricas
N4 Teorizar conceptualizar. Integración relacional	La información se transforma en herramienta conceptual que se relaciona e integra para analizar la situación práctica

Tabla 3. 2 Una caracterización de niveles de desarrollo de la competencia docente mirar profesionalmente (Llinares, Valls; 2009).

Estas ideas se estructuran en la Tabla 3.2, esos descriptores pretenden dar cuenta de los niveles del logro del desarrollo de la competencia mirar profesionalmente e intentan reflejar diferentes características del discurso (Ivars, Burforn y Llinares; 2017)

Según Ivars, Buforn, y Llinares (2017) la capacidad del estudiante para maestro de discernir los detalles que pueden ser juzgados como relevantes para el aprendizaje de las matemáticas, e inferir características de la comprensión matemática, las tareas seleccionadas para promover el desarrollo de la competencia mirar profesionalmente, deben tener como objetivo que los profesores identifiquen registros de su práctica. El conocimiento teórico debe ayudar a discernir los detalles relevantes de la práctica y proporcionar apoyos para dotar de sentido el discurso que se dará como respuesta.

3.2.2 Instrumentos para la recogida de la información

Como instrumentos para la recolección de información se usaron 10 hojas de trabajo que se recabaron como evidencia de la aplicación de una tarea, recordemos que uno de los tres elementos centrales de una trayectoria hipotética de aprendizaje, son las tareas y que dicho constructo lo estamos utilizando para la planificación de actividades para un tema concreto como señalan Gómez y Lupiáñez (2007) respecto a dicho constructo. Además de las hojas de trabajo, la aplicación de la tarea a un grupo de estudiantes fue video grabada, Seidel y Stürmer (2014) señalan que una medida para evaluar la visión profesional es usar secuencias de video auténticas; en otros trabajos de investigación como el de Vondrová y Žalská (2015) se auxilian de la video grabación de lecciones para llevar acabo la observación y el análisis de los momentos importantes de una clase de matemáticas. Sherin y van Es (2002) proponen que video es herramienta efectiva para ayudar a los profesores activos o estudiantes a desarrollar la competencia de mirar profesionalmente, debido a las características propias de esta herramienta (registro permanente, pausar y repetir segmentos en múltiples ocasiones con diferentes perspectivas cada vez).

La video grabación realizada captura momentos clave durante el desarrollo de la aplicación de la actividad y el momento de la tarea, dicha herramienta ayuda a contextualizar el escenario a los profesores participantes para el análisis de las hojas de trabajo.

La actividad que analizaron los profesores es parte de la secuencia didáctica que se les propuso en el análisis de las trayectorias, dicha actividad se describe en la Figura 3.1 se muestra lo que serán las instrucciones del docente y lo que se espera que realicen los estudiantes.

La actividad tiene el objetivo de introducir a los estudiantes al concepto de solidos de revolución. Presenta un video donde parte de la actividad es identificar que sólido se obtiene al girar una figura alrededor de un eje de rotación, matemáticamente este es uno de los elementos a identificar en la tarea, la necesidad de un eje de rotación; las características de la figura al rotar es otro de los elementos matemáticos a distinguir, así como el resultado del sólido que el estudiante pueda dibujar al momento de interpretar el giro.

El video que viene como parte de la actividad, guía al estudiante con las figuras que debe rotar y la posición del eje de rotación (horizontal o vertical). El estudiante intentará reproducir su

percepción del objeto obtenido tras la rotación en su cuaderno de trabajo, previamente lo discutirá por equipos y después de forma grupal, con la guía del docente.

ACTIVIDAD “PRIMER ACERCAMIENTO A SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN”

- Dividir al grupo en equipos de cuatro a cinco alumnos y proyectarles el siguiente video en dos momentos: en el intervalo de tiempo [0,0:56] y [3:15, 4:12].

Link: <https://goo.gl/7RVrEY>

- Los alumnos deberán realizar la actividad propuesta en el video (en los tiempos 3:36 a 4:20, el video se deja correr sin pausas y, al finalizar dicho intervalo de tiempo, se proyectarán las figuras del video y se añadirán dos que provengan de funciones). Por equipos dibujarán los sólidos de revolución que se forman al girar las figuras dadas sobre el eje indicado.



- Una vez terminadas las propuestas, los alumnos compararán y discutirán sus dibujos con la solución que deberá proyectar el profesor. Las reflexiones se guiarán en torno a las posibles dificultades en la identificación del sólido de revolución resultante al girar una figura o una curva.

Figura 3. 1 Actividad que se pide analizar a los profesores sobre las producciones de los estudiantes.

En siguiente Tabla 3.3 se muestra lo que se espera que el profesor identifique de las hojas seleccionadas de la evidencia recogida, así como los aspectos matemáticos relevantes que pone en juego el estudiante al realizar lo que pide la actividad. Se espera que también los profesores aporten con propuestas que ayuden a alcanzar el objetivo de aprendizaje y de esta manera se redireccione el proceso de aprendizaje del estudiante.

Hoja de trabajo (HT)	Discurso esperado
1- 4	<p>El profesor explique la relación entre los dibujos realizados por el estudiante y los que se deberían de obtener al seguir las instrucciones del video, dichos sólidos se muestran en las figuras 3.4-3.7.</p> <p>El profesor identifique e interprete la ausencia del eje de rotación en la construcción de los dibujos realizados por las estudiantes.</p> <p>El profesor identifique e interprete la dificultad de la percepción espacial y el cambio de dos dimensiones a tres dimensiones en las figuras involucradas.</p> <p>El profesor sugiera algún cambio en la actividad o proponga alguna actividad alternativa considerado la producción del estudiante.</p>
5	<p>El profesor identifique e interprete la complicación que tiene el estudiante de pasar de dos a tres dimensiones.</p> <p>El profesor identifique e interprete la figura con el cono dentro del cilindro.</p> <p>Propuestas para mejorar o continuar el proceso de enseñanza aprendizaje</p>
6	<p>El profesor identifique e interprete los dibujos realizados por el estudiante.</p> <p>Propuestas para mejorar o continuar con el proceso de enseñanza aprendizaje</p>
7-8	<p>El profesor identifique e interprete la dificultad del estudiante al girar una parábola con un punto de tangencia en el eje de rotación. Propuestas para mejorar o continuar con el proceso de enseñanza aprendizaje</p>
9-10	<p>El profesor identifique e interprete la dificultad del estudiante al hacer un cambio en la posición de la figura que se va a rotar, la pérdida del punto de tangencia, la dificultad de percepción espacial con figuras poco habituales.</p> <p>Propuestas para mejorar o continuar con el proceso de enseñanza aprendizaje.</p>

Tabla 3. 3 Discurso esperado con respecto a las hojas de trabajo realizadas por los estudiantes.

Para recabar la información se realizó una entrevista semiestructurada. al respecto cabe aclarar que en las entrevistas no estructuradas se da un grado de libertad y de profundidad (Tarrés, 2013, p.69). Este tipo de entrevistas no se apoya en una lista de preguntas establecidas, sin embargo, decimos

que es semiestructurada porque se definió un banco de preguntas que guiarán la entrevista para favorecer la profundización de las respuestas por parte del profesor, y está abierta a dar libertad dependiendo de su discurso.

Para realizar la entrevista y no perder detalle de las respuestas del profesor se echó mano de la video grabación de la entrevista, de la recuperación del audio de ésta, y se permitió a los profesores escribir y expresar sus ideas en las hojas de trabajo que se les presentó.

Las preguntas para guiar la entrevista en este trabajo fueron las siguientes:

1. ¿Cuál es el objetivo de aprendizaje de esta actividad?
2. ¿Cómo el estudiante construye su producción y cómo lo interpretas con respecto a lo que se pide en la actividad?
3. ¿Qué elementos están de más o faltan en la producción del estudiante con respecto a lo que se pide en la actividad?
4. ¿Cómo interpretamos la producción del estudiante?
5. ¿Cómo construye el estudiante sus dibujos respecto a lo que se pide en la actividad?
6. ¿Qué característica podemos distinguir en la producción del estudiante?
7. ¿Cuál es la característica con la que se relacionan estas producciones?
8. ¿Qué actividad propondrías para apoyar la progresión de los estudiantes o qué modificarías de esta actividad?

Estas preguntas se formularon con la intención de que el profesor profundizara en lo que produjo el estudiante buscando información relevante para poder continuar con el progreso del aprendizaje o reforzar con otra tarea. A continuación, se muestran en las figuras 3.2 a la 3.5 qué curva se pide rotar y el eje de rotación junto con el sólido que se obtendría.

Estas figuras se presentaron como apoyo al docente para que pudiera relacionar la actividad con la tarea solicita y las producciones de los estudiantes.

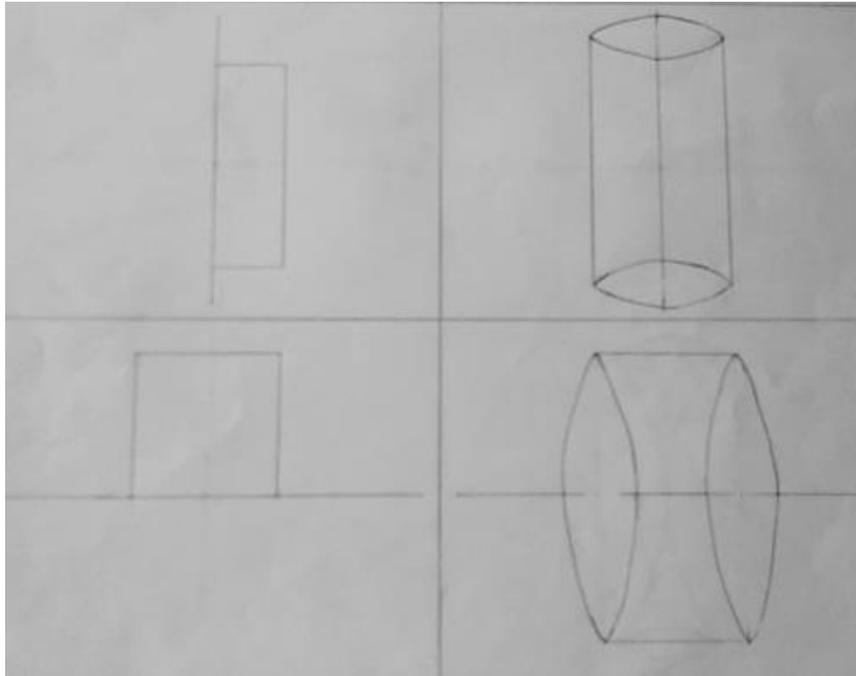


Figura 3. 2 Muestra la figura que se pide girar en primer lugar, el contorno de un rectángulo alrededor del eje Y para formar un cilindro y después cambiar el eje de rotación al eje “X”.

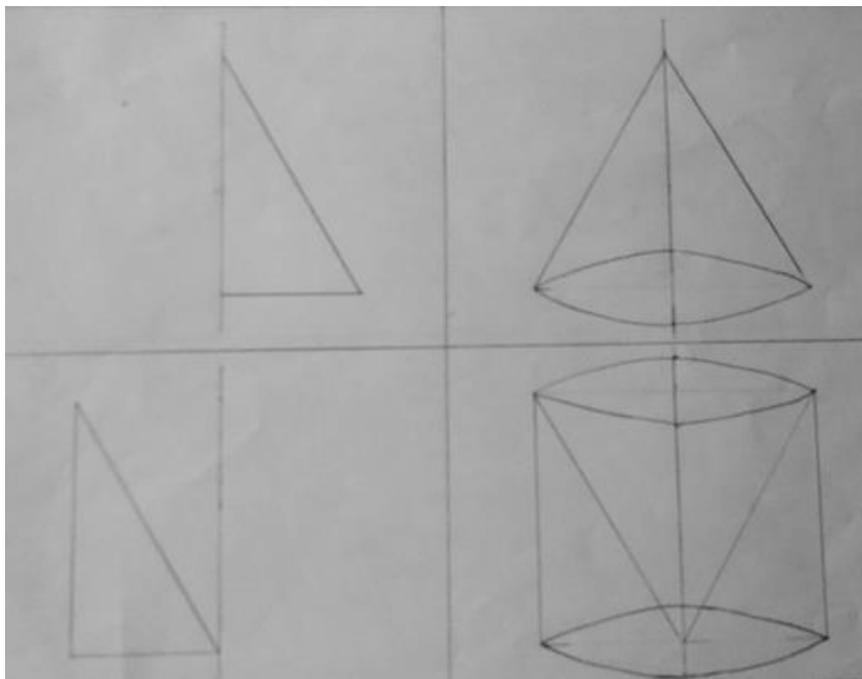


Figura 3. 3 Muestra que se pide girar el contorno de un triángulo alrededor del eje Y. Después se pide cambiar el punto de rotación hacia un vértice del triángulo el eje Y sigue siendo el eje de rotación.

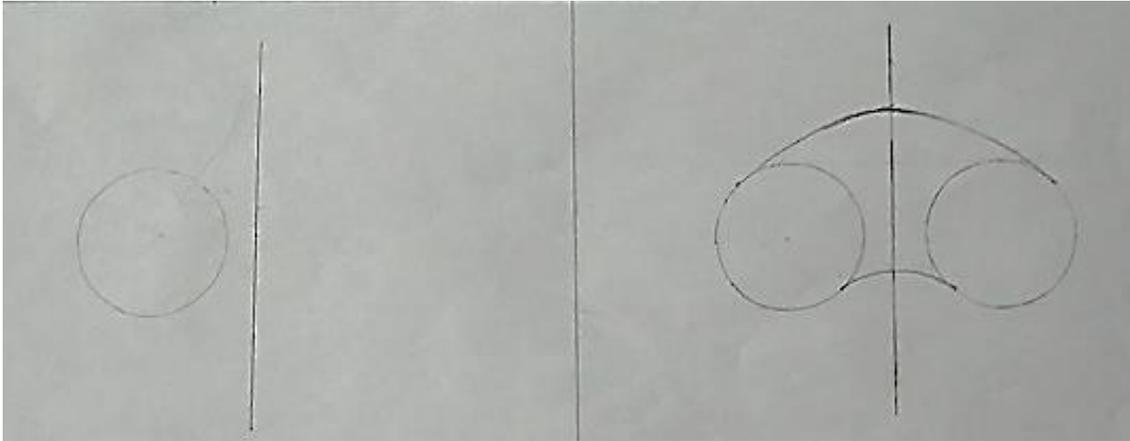


Figura 3. 4 Muestra cómo debería girar una parábola alrededor del eje X y después al eje Y.

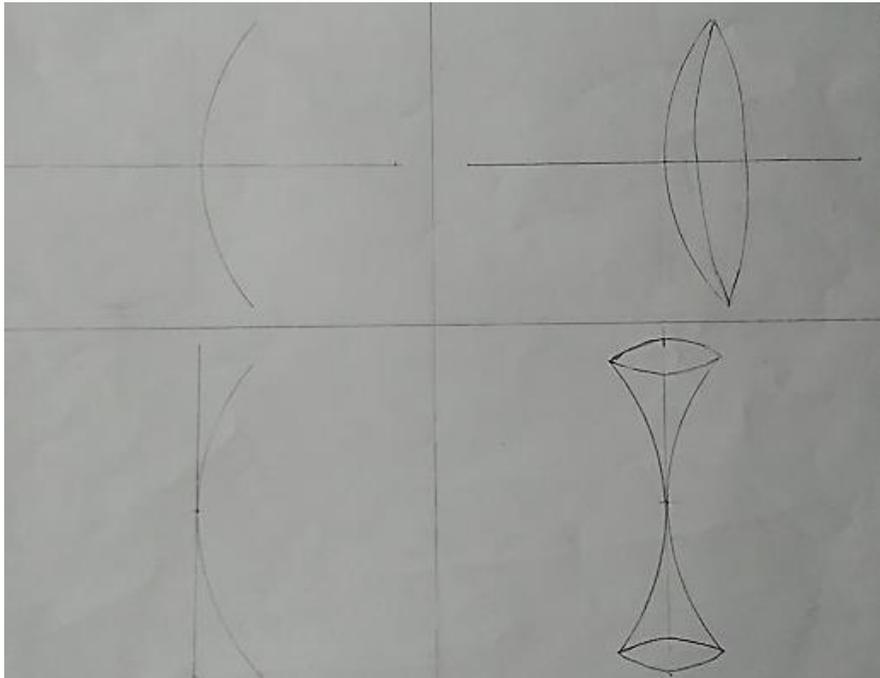


Figura 3. 5 Muestra cómo debería quedar si se gira una circunferencia alrededor del eje Y.

Capítulo 4

ANÁLISIS

En este capítulo se muestra la información recolectada tras la aplicación de los instrumentos, el desglose de los discursos que ofrecieron los profesores durante la entrevista donde el docente revisó los dibujos realizados por diez estudiantes. Se muestran las hojas de trabajo para contextualizar las flexiones de los profesores.

A modo de contextualizar a los docentes con la actividad que realizaron los estudiantes, se les proyecta un video que muestra los momentos clave de la sesión en donde se desarrolló la actividad, se observan discusiones de los estudiantes, así como las interacciones con el docente que imparte la sesión.

Posteriormente buscamos elementos en el discurso de los profesores para colocarlos en los niveles de desarrollo de la competencia que se mencionan en la Tabla 3.2 del capítulo anterior.

4.1 Discurso de los profesores ante la actividad

A continuación, se presenta un modelo descriptivo de las respuestas aportadas por los profesores ante las producciones de los estudiantes; se buscó identificar el uso de elementos matemáticos por parte de los profesores al intentar entender el proceder del estudiante en la elaboración de la tarea, como ya se describió en la Tabla 3.3.

La Figura 4.1 muestra la hoja de trabajo 1 en donde se plasma la producción de un estudiante ante la actividad descrita en la Figura 3.1 y posteriormente se muestran respuestas de los profesores sobre el proceder del estudiante.

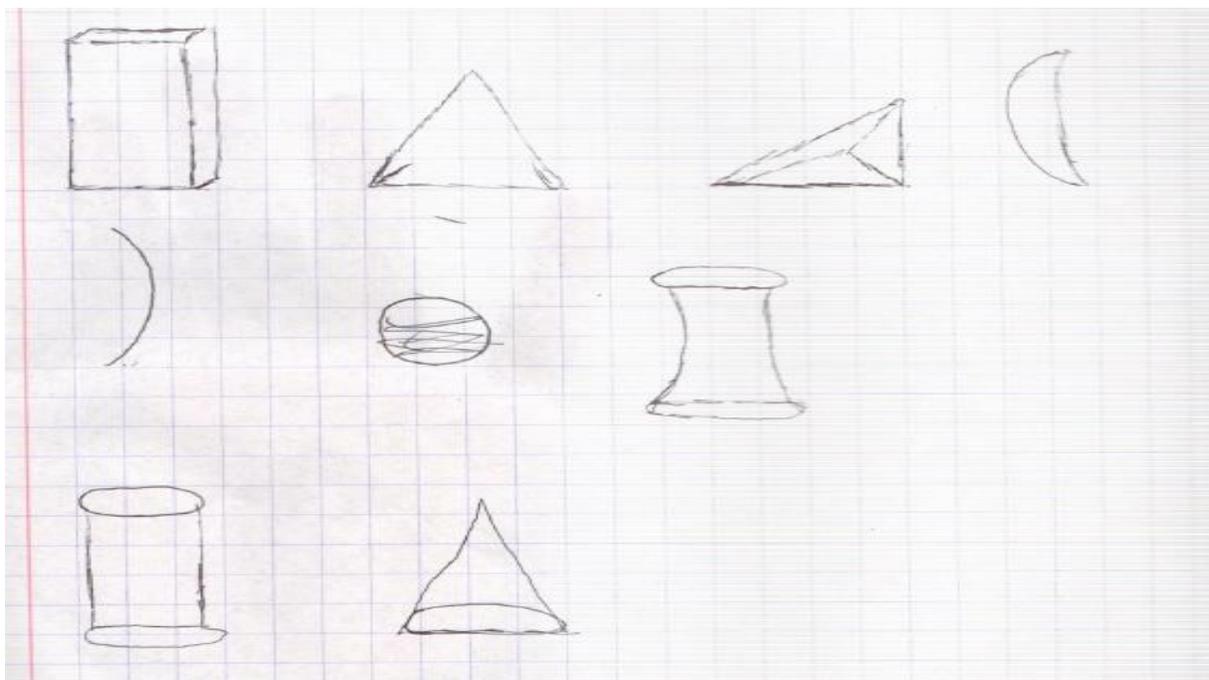


Figura 4. 1 Muestra la hoja de trabajo 1 es la tarea realizada por un estudiante.

La Tabla 4.1 muestra las respuestas de los profesores después de ver la actividad en la videograbación durante la aplicación de la tarea, se les pregunta cuál es el objetivo de la actividad.

Profesor	Respuestas
Grace	Que los alumnos relacionen qué es un sólido de revolución, que entiendan el concepto de sólido de revolución
George	Si yo la pusiera para una secuencia para mí, yo la pondría para generar andamiaje, no diría que es para detonar conocimientos previos, hablamos de la generación de los sólidos y del video, bueno sí para conocimientos previos, para rescatarlos un poco pero más para generar andamiaje en cuanto los conceptos, la parte de la función, cómo se genera el sólido como una función matemática
Bryan	De toda la actividad que vimos ahí, desde mi punto de vista es que los chicos definan y conozcan los qué es un sólido de revolución
Mary	Que el alumno aprenda a distinguir, bueno que entienda bien el concepto de figura plana y después como se genera la tercera dimensión cuando elegimos un eje que sea perpendicular al plano o sea que esté en el origen o que esté trasladado

Tabla 4. 1 Respuestas a la pregunta sobre ¿Cuál es el objetivo de la actividad?

En la Tabla 4.2 se muestra cómo relacionan los dibujos hechos por el estudiante contra los correspondientes, se les muestran las hojas de respuestas (figuras 3.2 - 3.5)

Profesor	Respuestas
Grace	<p>Como tal yo diría que al joven le falta lo que es visión espacial, no sabe que es lo que está buscando o puede ser que no entienda lo que se le está solicitando o él únicamente está trazando la figura y en su mente puede que esté haciendo el giro que se le están solicitando. Nada más está colocando las figuras, ni vista en planta, ni vista en tres dimensiones</p>
George	<p>Yo quiero pensar que lo quería generar acá con esta primera figura era generar el sólido de revolución de ésta, si esto es cierto no le quedó claro, por una parte, luego, esta figura no la ubico, de manera desordenada quiere generar este sólido de revolución, parece entonces que la figura dos no está. Después se pide el del triángulo, sería éste su sólido de revolución, a lo mejor nada más está desordenado intenta darle un poquito de perspectiva, ahí a lo mejor si lo logra, después seguía éste pero cambiando el punto de rotación aquí sí de plano no lo hizo, después seguía la parábola con el eje de rotación el eje "X", lo dibuja a lo mejor le faltó cerrar acá pudiera ser lo sigue dibujando en dos dimensiones igual no queda claro el concepto de las tres dimensiones, yo quiero pensar que este es un intento por rotar éste de acá pero no lo entiende claramente se generaba lo que decían el reloj de arena a lo mejor tiene una percepción espacial deficiente y genera esto, esto no sabría decir de dónde viene o bueno de manera desordenada este sería el cilindro, la dona ni siquiera, en su falta de entendimiento dijo el círculo si lo roto sobre el eje me va a dar como una esfera y a lo mejor quiso achurar un poquito acá, lo que en realidad era una esfera en realidad es una dona.</p>
Bryan	<p>Si vamos con la primera pues éste es prácticamente un prisma entonces podrías decir que éste no es un sólido de revolución o que al girar no se asemeja a lo que se tiene, la siguiente quiero pensar que es un triángulo o una pirámide, si decimos que es un triángulo, habría que definir el eje podría estar en medio o en alguna de las esquinas, éste sería también una pirámide, no es simétrico, éste considero que le hace falta complementar, considero que le debería colocar aquí el eje, en este también tendríamos que indicarle que aquí hay un eje. En general no está definiendo bien lo que es un sólido incluso podríamos pensar que bajo sus dibujos que tiene, que haría falta es definir bien o tratar de apoyarlo para que represente bien éstas, habría que proponerle otra actividad o que él mismo lo experimente haciendo el material y entonces que él lo vaya girando.</p>
Mary	<p>Yo creo que sí logró, quizás la proyección se sale un poquito pero es correcto no alcanza a identificar el sólido de revolución que se formaría, sería éste, no alcanza, yo esperaría que sería una parábola trasladada alrededor del eje "Y" ahí se alcanzaría a formar esto,</p>

este conito está aquí que sería el triángulo que lo puso a girar y que más, no se le dio para formar una esfera, éste no ha entendido el concepto de sólido de revolución, esto no es un sólido de revolución. Aquí también quien sabe qué quiso ilustrar, porque no está la parte de la simetría de girarlo alrededor de “X” o “Y” o este no alcanza a apreciar en tercera dimensión, entonces aquí no se logra ver que el alumno no alcanza el concepto de sólido de revolución.

Tabla 4. 2 Respuestas de los profesores a la pregunta ¿Cómo el estudiante construye su producción y cómo lo interpretas con respecto a lo que se pide en la actividad? con respecto a la hoja de trabajo 1.



Figura 4. 2 Hoja de trabajo 2 realizada por un estudiante

Profesor	Respuestas
Grace	<p>Aquí yo digo que, si ya está un poquito más familiarizado con la dimensión espacial, ya tiene conceptos previos de lo que está buscando y lo está logrando familiarizar. Aquí en este primer esquema él a lo mejor trató de hacer lo mismo que este joven, dibujó su figura plana, pero simplemente aquí me da la impresión de que este joven sí trató de hacer el giro y se dio cuenta que con el giro hace la circunferencia, porque lo está dibujando sobre su propio esquema inicial, o sea tiene un trazo inicial y con éste si se está auxiliando para hacer el otro, cosa muy diferente a lo mejor con éste. Yo digo que él sí ya tiene lo que es la dimensión espacial, al mismo tiempo sabe lo que le está solicitando y aquí también se puede observar que él sí está poniendo sus ejes para guiarse de qué es lo que le están pidiendo y puede hacer también girar las figuras; entonces te digo, a lo mejor aquí si le haría falta que tenga un tipo esquema o material didáctico, para él sería muy fácil o de mucha ayuda ese tipo de solución, para él ya no, aquí está la parábola la está identificando con lo que le están indicando, aquí está el triángulo, esta zona, a lo mejor hubo un pequeño error en el giro pero de ahí en fuera.</p>
George	<p>Lo intenta hacer más elaborado que el anterior, a lo mejor sigue faltando un poquito de percepción, yo veo para este, sigo viendo una figura prismática, más allá de la figura cilíndrica que se debe de generar, al final creo que puso esto, no sé quizás porque vio a alguien más y lo quiso corregir o simplemente fue la forma en que él lo percibió, sería curioso preguntar.</p>
Bryan	<p>Pues que hay cuerpos que si los dibuja correctamente que serían éstos, éste pudiera ser, está la imagen solamente, la está igual dibujando en dos dimensiones es mi punto de vista, ésta no se alcanza a distinguir, pero parecería esta que le da una forma de prisma lo mismo que esta, y ésta que sí es un problema de dibujo y esta estaría correcta.</p>
Mary	<p>Este alumno si se ve que alcanzó a rotar la parábola alrededor del eje “X” o del eje “Y” la parábola, también ésta, está trasladado lo alcanza a hacer bien, el círculo lo pone a girar ahora sí construye totalmente su dona el corte que tiene y aquí también un puente como un reloj de arena. Esta parte es la que no me queda clara porque aquí veo como si fuera un edificio y no sé en qué perspectiva esté haciendo el corte, no está relacionado esta parte con la de aquí, quizás el ángulo la visión que tenía donde estaba sentado, lo que alcanzaba a preciar</p>

Tabla 4. 3 Respuestas a la pregunta ¿Cómo construye el estudiante las figuras con relación a las que se les pide girar? para la hoja de trabajo 2.

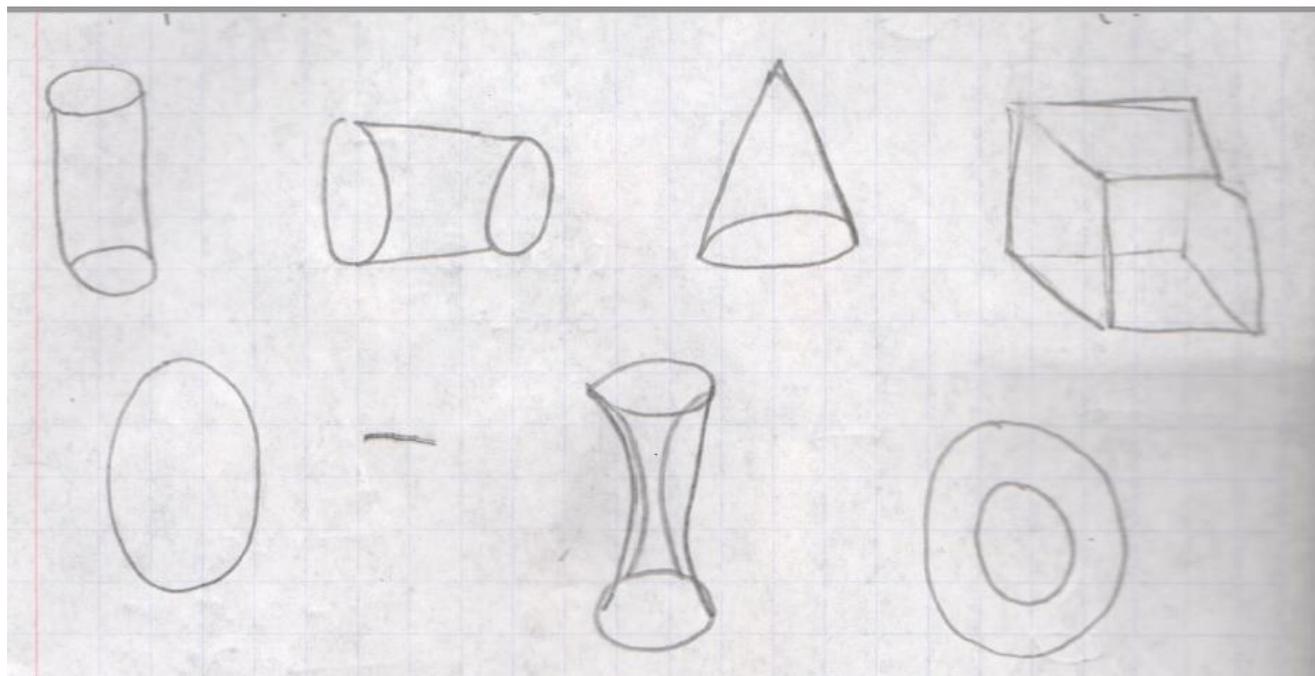


Figura 4. 3 Hoja de trabajo 3 realizada por un estudiante

Profesor	Respuestas
<p>Grace</p>	<p>Tiene la idea, pero yo digo que le falta, porque aquí le está dibujando la vista de planta. Este joven está mejor que el anterior pero todavía no logra llegar a un buen nivel, es un tipo intermedio, hay unas figuras que si las pudo representar bien. Aquí como que tiene la idea, pero le falta todavía ponerle un poco más. le falta un poco lo que es la dimensión espacial, o a lo mejor puede que él sepa dibujar, como sabe dibujar, entiende mejor lo que le están pidiendo. Muchas veces ellos no logran proyectar bien qué es lo que les están solicitando; también aquí le faltarían lo que son los ejes.</p>
<p>George</p>	<p>Carece de elementos de referencia, observo que sigue plasmando en dos dimensiones, pero por alguna razón yo percibo que, este alumno a pesar de que plasmó en dos dimensiones, creo que sí sabe que figura es la que se generó, no sé cómo responderte claramente, si tú preguntas si esto es un cilindro a un alumno de tercero de bachillerato, bueno a lo mejor es malo dibujando, pero si entendió qué es un cilindro, lo mismo que acá, al cambiar el rectángulo del eje de rotación, creo que éste nada más es malo para dibujar, pero no creo que no haya entendido, me llama un poquito la atención nada más este, por ejemplo en la dona, a lo mejor aquí él la vio desde arriba, pero el hecho de que</p>

	<p>haya generado esto, yo creo que entiende esa parte; acá también y quizás no necesariamente indique que no sabe que es una dona, simplemente que es un estudiante que le falla la visión espacial. Aquí no veo las líneas punteadas, ¿esto de dónde salió? creo que fue un intento fallido de alguna figura</p>
Bryan	<p>Que ya va teniendo un poquito más de idea en cuanto a eso, a la figura que se forma, sin embargo tiene todavía algunas dudas, insisto no sé si porque sean los más fáciles les cuesta más trabajo definirlos que estos en realidad serían más complicados pero si ya logra percibir y lo que decía hace rato en algún momento creo que si nos falta la parte estética la parte del dibujo que a veces no lo practicamos mucho o que ellos nos puedan describir acá, esto qué es, esto es un cilindro de qué forma para que ellos nos describan aquí con sus propias palabras a lo mejor en una frase muy pequeña, al momento de girarlo se forma un cilindro de forma vertical, al momento de girarlo se forma un cilindro de forma horizontal, aquí al momento de girarlo se forma un cono que a veces hasta esta imagen podríamos decir que es la misma, como sugerencia, porque hay chicos que sí logran plasmar bien el sólido, pero por ejemplo hay chicos que no, por ejemplo, yo aquí no sé cuál es el eje, aquí si le pone el eje, pero hay chicos que no, aquí a mí me hubiera gustado que le pusiera. El eje es importante</p>
Mary	<p>Si alcanza a mover alrededor de “X” y de “Y” al plano, aquí también la trianguló, pero aquí no veo que se ponga a girar, este no es un sólido de revolución, esta parte, no sé si colocó invertida la parábola y la puso a girar para que se generara esta elipse pero deja de ser función, si lo tiene en el plan, hace lo que ocurre atrás la perspectiva no le pone sombra pero yo entiendo que me está diciendo que atrás también guarda la simetría.</p>

Tabla 4. 4 Respuestas a la pregunta ¿Cómo construye el estudiante las figuras con relación a las que se les pide girar? parta la hoja de trabajo 3.

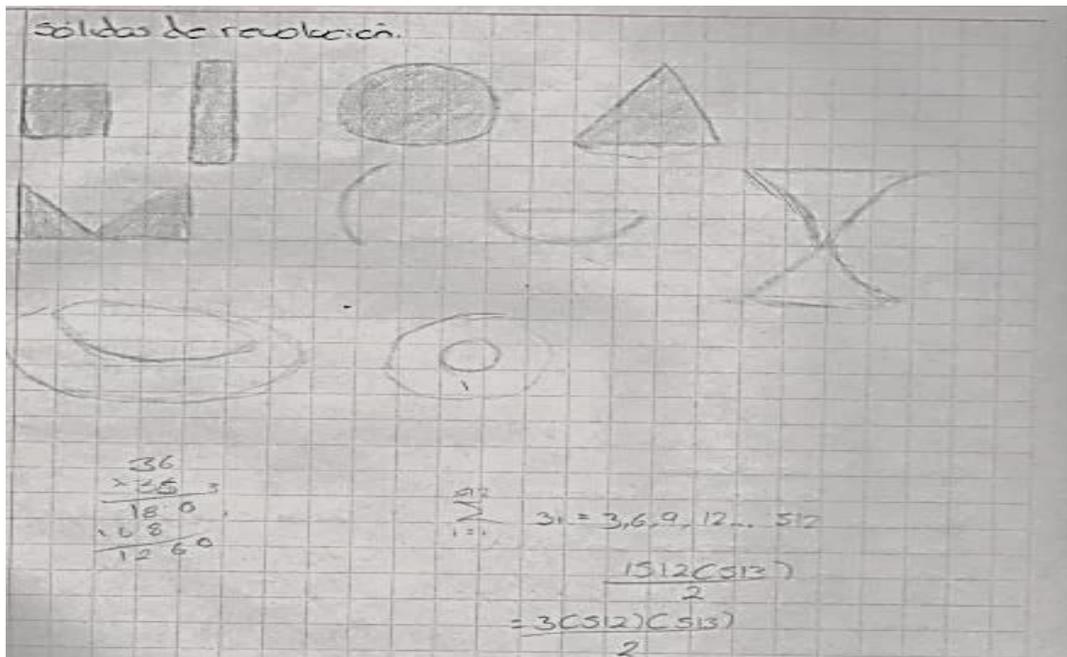


Figura 4. 4 Hoja de trabajo 4 realizada por un estudiante

Profesor	Respuestas
Grace	<p>Todas son figuras planas, creo que nada más está dibujando lo que le presentaron. Esa es la única que podría ser que está bien representada y pudiera ser que del primero está haciendo su trazo inicial para dibujar el segundo, dibujó su parábola y después le da como consecuencia lo que es un tazón, a lo mejor está colocando que dé una parábola con éste, colocado en los dos ejes, cada uno respectivo, aquí nada más está colocando lo que es el triángulo pero lo está haciendo en figura plana, lo mismo, figura plana, figura plana, está dibujando figuras planas, lo que le faltaría al joven aquí para que lo pudiera realizar tal vez también algo por el estilo, que él si se auxilia de lo que son material para que lo pudiera resolver ¿ellos nada más lo hicieron con el puro video?. También pudiera ser lo que están mencionando, los canales que tienen para el aprendizaje, él únicamente vio y escuchó, y los reprodujo bastante bien, muy diferente a este joven, lo que imaginó que no necesita ni ver ni escuchar, él necesita hacerlo, por eso está presentando mayores problemas al dibujar sus trazos.</p>
George	<p>Aquí está dividida, no podría decir muy certeramente, si sí entendió el concepto, podrían ser dos posibilidades, una: que lo entendió, pero lo está plasmando como si fuera una proyección, se genera a partir del isométrico, a lo mejor el alumno lo está viendo desde una vista frontal y sí eso es cierto, sí concuerda, si tú ves uno de éstos de frente, a lo</p>

	<p>mejor esta está un poquito más larga ¿no?. Pero sí ves eso; tú ves éste de frente y sí ves esto, digo no está muy bien dibujado, pero sí se alcanza a apreciar esto. Volvemos a lo mismo, la superficie cerrada o abierta, a lo mejor medio interpreta que esto rotó, si rotó y deja esta abertura de acá siendo igual muy estrictos, bueno eso igual debería estar todo sólido ¿no? Bueno no todo sólido, si no todo sombreado, se vería un rectángulo, a lo mejor esto fue un intento de decir: sí entiendo que así se genera un hueco, un cilindro, y entiendo que es un sólido, pero le falta un cacho, creo que entiende esta figura, quizás le falta darle perspectiva; ésta no sé por qué sale ¿Por qué habría generado esto? Bueno va a permanecer con un misterio; la dona igual le falta perspectiva. Una vez que ellos discutieron o hicieron socialización ¿pudieron hacer cambios? Respecto de éste.</p>
<p>Bryan</p>	<p>Este chico dibuja totalmente en dos dimensiones, es decir no sitúa el eje o mas bien observo que aquí tiene duda considero esta es la figura y tiene duda de si se forma un cuadrado o si se forma un rectángulo, aquí considero que él elige esta figura y se forma un círculo, aquí faltaría por la parte de la imagen este chico pues sí totalmente dibuja todos sus dibujos en dos dimensiones, no logra identificar que se forma un sólido, yo creo que es uno de los chicos que si necesitarían hacer el experimento, con el video no logra entender a veces la imaginación de ellos y lo que nosotros creemos difiere mucho, por eso yo sugeriría al inicio que ellos lo hicieran, que ellos cortaran su triangulito lo pegaran, lo giraran igual y eso los podría ayudar.</p>
<p>Mary</p>	<p>No alcanza a ver la tercera dimensión, aquí lo deja así plano, aquí yo entiendo quizás es esa parte que le falta la construcción de la tercera dimensión lo sigue viendo bidimensional, pero como que sí, los está oscureciendo, como que era la primera vez que se encontraba con este tipo de curva que al girarla le generaba esta figura y aquí lo pone en perspectiva frente al plano, es esa parte la relación que guarda en la segunda dimensión y en la tercera dimensión, siempre la ve como que la oscurece, con lo que oscurece el estudiante da la perspectiva de la tercera dimensión .</p>

Tabla 4. 5 Respuestas a la pregunta ¿Cómo construye el estudiante las figuras con relación a las que se les pide girar? para la hoja de trabajo 4.

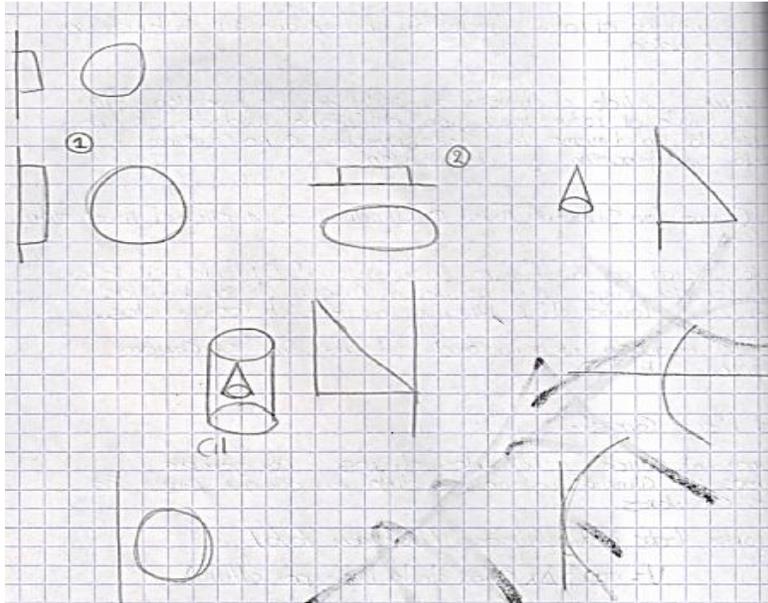


Figura 4. 5 Hoja de trabajo 5 realizada por un estudiante

Profesor	Respuestas
Grace	<p>Él está colocando un trazo inicial, el trazo inicial sobre el eje se lo están solicitando y ya que está su trazo inicial, está tratando de trazar la figura que le están solicitando, creo que aquí es donde es más visible ¿no? Hizo su trazo inicial conforme lo veía en la figura y ya que estaba en la figura, empezó a hacer su eje de rotación, al parecer trató de hacer lo mismo en los demás, también aquí es similar, en los otros se quedó inconcluso, no pudo proyectarlo. No pudo representar lo que le estaban solicitando.</p>
George	<p>Según su producción pareciera que sí, pareciera que lo único que tuvo éxito fue acá, si no estuviera esta yo diría que el alumno es de muy bajo desempeño, que pudo haber estado distraído o que definitivamente no entendió nada de lo que se está indicando ¿Qué fue esto? Pues a lo mejor copió, pudo haber sido porque yo no veo que produjera algo acá ni acá con las parábolas, pones esto y genera un cilindro con un cono adentro ¿cómo en el video que dijeron no? Ah es como un cilindro con un cono adentro, y yo escucho y bolas ahí va el cilindro con el cono adentro, no lo sé parece chusco, pero sí hay alumnos así, definitivamente y aquí el de la dona pues ni siquiera lo intentó.</p>
Bryan	<p>Lo que me dice que él relaciona que todo giro va a generar algo relacionado con un círculo, ya sea un círculo como tal o puede imaginarse que al momento de girar pues se forme un círculo, quiero pensar que es un cilindro, sin embargo no logra identificar que</p>

	<p>aquí hay un segmento que le va a ayudar a determinar que eso es cilindro, sólo se imagina el momento que está girando no se imagina el complemento, en todos los sentidos tanto acá, acá, aquí no tiene ni idea son de los chicos que lo necesitarían experimentar.</p>
Mary	<p>Como que no hay una relación, esta está más chiquita, esta está más grande, dice que si lo pone a girar esperaba que se forma un círculo, aquí espera una elipse, aquí si le queda claro, ahora invierte en una dimensión este que está más grande le lleva a un conito más pequeño, igual esto que pasa del otro lado una reflexión y lo gira alcanza a verlo que está inscrito este conito y aquí pues no alcanza a ver se queda la dona que se iba a formar, y en esta nada más cambia de eje, pero no lo gira está trasladado pero no se ve que lo gira todavía no le ha quedado claro que es el eje de giro y la tercera dimensión no lo pone en su cabecita, le cuesta trabajo.</p>

Tabla 4. 6 Respuestas a la pregunta ¿Cómo construye el estudiante sus dibujos respecto a lo que se pide en la actividad? para la hoja de trabajo 5.

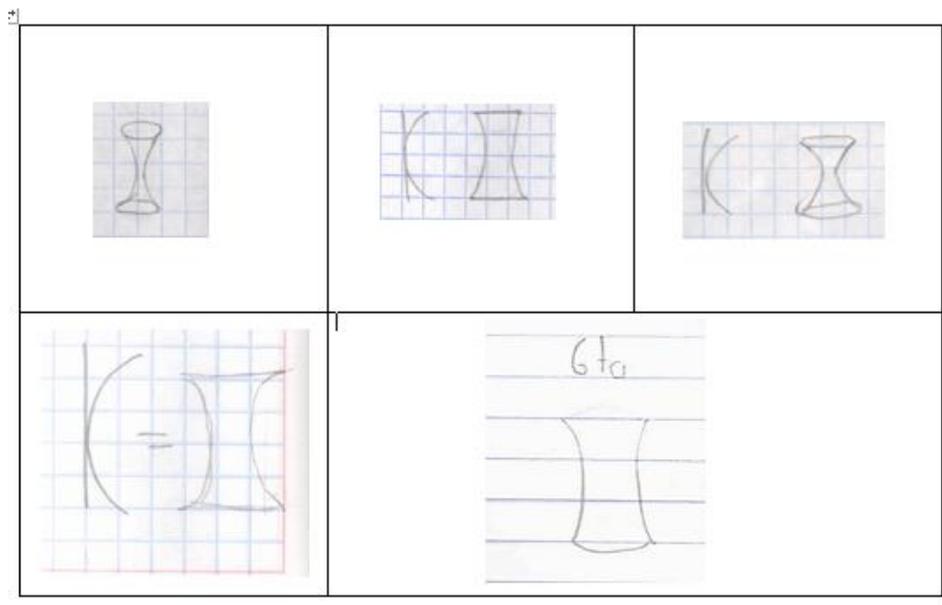


Figura 4. 6 Hoja de trabajo 7 producciones de algunos estudiantes cuando se les pide girar la parábola alrededor de uno de tangencia

Profesor	Respuestas
Grace	El espacio que tienen, en todos ellos es la misma característica que no llegan bien con lo que es el eje Y como está su figura inicial.
George	Que fallaron en entender, que hay una parte estrecha en donde a pesar de que se rota pues los puntos quedan juntos. Se alcanza a ver que hay una separación acá, lo mismo acá y lo mismo acá, se me vienen muchas posibilidades, como ideas, pero quizás en un intento de mantener la figura original, pues bueno, sí rotó; es que ésta va antes de la dona entonces no es para que se confundan por ello, acá creo que falla el entendimiento de la figura que debería de salir, quizás no es que falle el hecho de que se genera el sólido al rotar esta curva y falla el entendimiento del sólido general, quizás no el hecho de que se va a formar un sólido a partir del hecho de rotar esta alrededor de éste eje.
Bryan	Considera la función, bueno primero dibuja la función y bajo su función ya éste experimenta o se imagina ya precisamente el sólido excepto considero si fueron de varios equipos esta le faltaría agregarle acá, pero finalmente sí logra establecer que al momento de girar forma un sólido, al momento de transmitir o demostrar a los demás mira me salió esto sin embargo aún tendríamos que definirle acá algunos aspectos de lo que se forma.
Mary	La primera que su eje está aquí, entiendo que esta sería la parte que se le dio y que la pusiera a girar pero no hay simetría en la figura a partir del eje de rotación, éste sí coloca al eje otra vez no tiene que ver con esta si es en “X”, es alrededor de “Y” pero también otra vez el eje lo mueve, éste también si lo mueve alrededor de Y si lo logra aquí se ve casi simétrico, sí guarda una distancia, ese si lo veo bien, este no, cambia la dimensiones, es muy flaquito al centro y la sexta figura esta sí es, está respecto del eje, guarda la distancia del eje de giro, si eso sería.

Tabla 4. 7 Respuestas a la pregunta ¿Qué característica podemos distinguir en la producción del estudiante? para la hoja de trabajo 7.

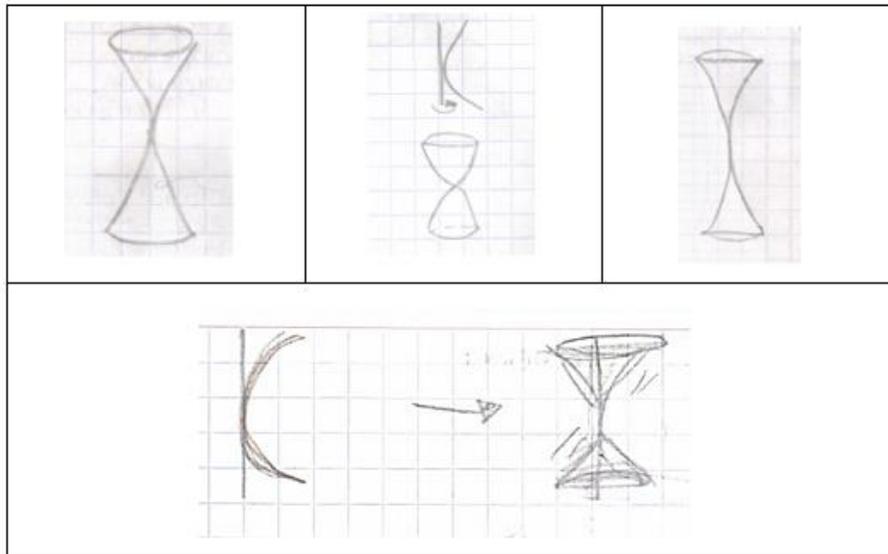


Figura 4. 7. Hoja de trabajo 8 producciones de algunos estudiantes cuando se les pide girar la parábola alrededor de un punto de tangencia

Profesor	Respuestas
Grace	<p>En este esquema también puede observarse que hizo su trazo auxiliar, y ya de su trazo hizo la figura; lo mismo, su trazo auxiliar y su figura. Porque también aquí hay varios que tiene su trazo auxiliar, pero sin embargo no han llegado a representarla; no lo sé tal vez también concepto espacial, se les está pasando el punto, aquí ya lo tiene marcado, pudiera ser.</p>
George	<p>De todas me llama la atención ésta de acá porque respeta al cien por ciento esta parábola. Bueno estas yo las veo correctas, creo que ésta fue un intento muy elaborado, creo que este sí entiende bien qué es lo que se genera, creo que aquí falla un poquito la percepción nada más, no quiere decir que no entienda al cien por ciento el hecho de que se va a generar un objeto compuesto por dos secciones, por así decirlo, dos partes que se unen en un punto, punto de tangencia, quizás falla un poquito la percepción, pero de lo demás, creo que estos estudiantes sí entendieron lo que se supone que se debería formar al rotar. No sé qué tan bueno sería para la actividad como una propuesta, generar una hoja de trabajo en donde al momento en que el alumno en el video vaya a generar estas, quizás no lo haga en su libreta, sí va a ser un poquito imponer un formato, pero la hoja de trabajo ayudaría quizás a entender que aquí hay una sucesión respecto a esta figura plana hacia un sólido y quizás sea un formato tan sencillo como de este lado vas a dibujar las figuras planas y de este lado dibujas el sólido, y que quede asociado, creo que eso ayudaría a</p>

	calificar y retroalimentar para el docente y creo que ayudaría un poquito a orientar el trabajo y ordenarlo, quizás eso ayudaría mucho, no lo sé.
Bryan	Este chico sí logra establecer bien su dibujo inclusive este otro no necesita poner el eje, estos otros tampoco entonces considero que estos chicos tienen muy bien desarrollado esta parte, obviamente como todo falta la parte de complementar el dibujo, pero yo creo que eso va modificando con el tiempo.
Mary	Aquí si él marca bien el eje de giro, aquí no se ve pero el eje de giro sigue siendo "Y" pero no es la curva original, no es la cúbica, esta es la cúbica y aquí no está la cúbica cuando la pones a girar generas esta y aquí si es esta la misma función, y ésta la puso a girar pero qué pasa con esta, está trasladada, quizás si la quiso hacer muy bien, pero las separó no correspondería a esta, al girarla no se separa, no asocia y esta no sé de dónde la obtuvo o si se equivocó, está trasladado es decir baja el punto de tangencia de la curva al eje.

Tabla 4. 8 Respuestas a la pregunta ¿Qué característica podemos distinguir en la producción del estudiante? para la hoja de trabajo 8.

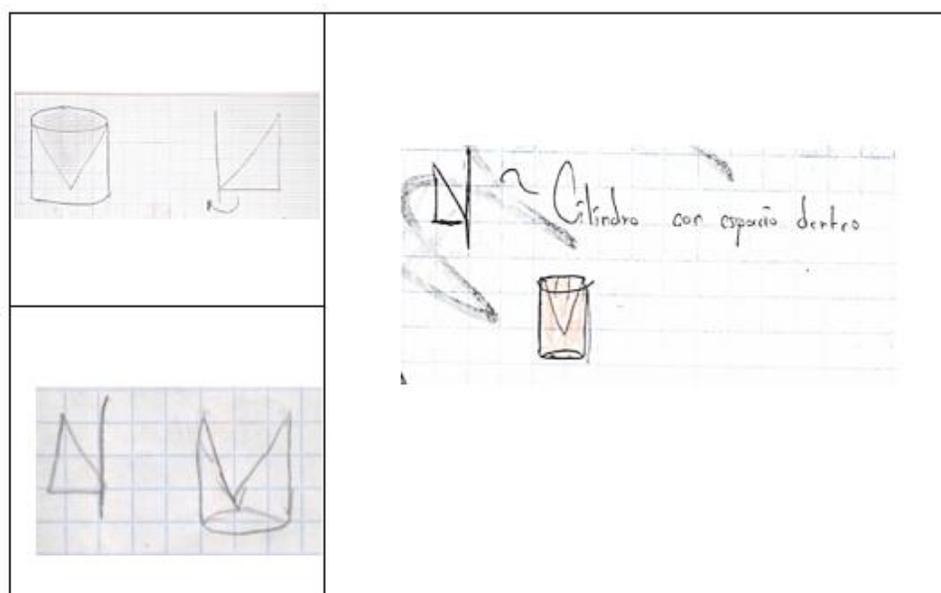


Figura 4. 8 Hoja de trabajo 9 producciones de algunos estudiantes cuando se les pide girar el contorno del triángulo desde un vértice tangente al eje "Y"

Profesor	Respuestas
Grace	Aquí como lo puso el chico: Cilindro con espacio de ancho, en las tres tienen lo mismo, inclusive hasta en el dibujo de éste se puede observar que él como tal no puso la proyección que se está manejando, él sí dejó el espacio en la parte de abajo, y ahí se lo está colocando
George	Tiene una mejor idea de lo que se supone se debe generar, no es el sólido que se va a generar directamente, fallan los tres en entender que el sólido se genera llega hasta acá y vamos aquí pueden ser nuevamente dos cosas, o le falló para dibujar, o no entendió que este vacío le llega hasta acá. El hueco que está adentro del cilindro y quién sabe, si a este lo único que le faltaba fue poner la línea punteada, simplemente porque no sabía que se debía poner una línea punteada, por ejemplo, este ya está bien, bueno en este caso no, ya puso el fondo del cilindro si estaría mal; pero esa sería mi observación para este de aquí, quizás es cuestión de perspectiva, este si no entendió qué es lo que pasa, faltó cerrar, pero sí es lo que pienso. Sería cuestión de preguntar.
Bryan	Este chico considero que lo hace bien, plasma la parte que se forma acá arriba sin embargo no sé si sea importante pero aquí deja un pequeño espacio a menos que lo represente así y diga que es la parte central yo creo que hay que ayudarlo a definir bien esa parte, este otro chico veo que define la parte de abajo mas no la parte de arriba, este otro chico, igual considera un espacio nada más le faltaría que este vértice llegue totalmente al centro, yo creo que es capacidad de imaginación es lo que hace que los chicos comentan estos pequeños detalles, como que a la vez no están acostumbrados a dibujar totalmente la función.
Mary	Como que esta parte de construir la base que es un círculo también , circunferencia la pierde, pero sí se ve que sabe observar un cono inscrito dentro de un cilindro, ahora este , cómo está, sí es correcto lo que hizo, se pone a girar, le falta igual pone una figura entre plana y aquí está la tercera dimensión pero estaría más para allá, nada más faltaría cerrarla y esta última la pone a girar efectivamente ahora está trasladada esta parte como que está mal la altura, cuándo la giras está mal esta perspectiva de la base, como que movió el vértice, pero si lo pone a girar alcanza a apreciarse esta pero trasladó el punto de tangencia

Tabla 4. 9. Respuestas a la pregunta ¿Qué característica podemos distinguir en la producción del estudiante? para la hoja de trabajo 9.

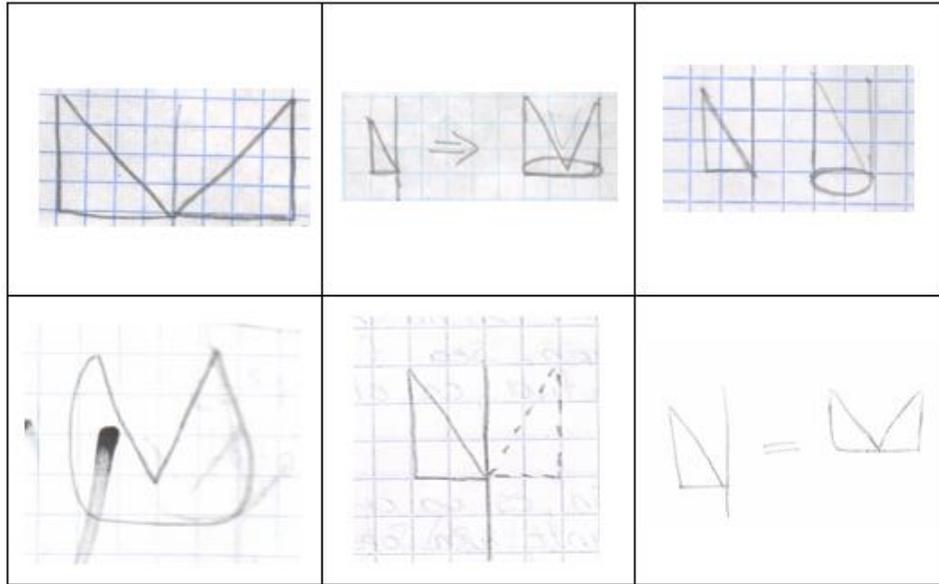


Figura 4. 9 Hoja de trabajo 10 producciones de algunos estudiantes cuando se les pide girar el contorno del triángulo desde un vértice tangente al eje “Y”

Profesor	Respuestas
Grace	<p>Ellos como tal, ni como figura plana, nada más hicieron un tipo espejo, lo que tuvieron de un lado lo pusieron de otro, también les faltó entender lo que es un sólido, ellos también lo trabajaron en figuras planas como a lo mejor muchos estaban manejando pero no lograron hacer al final lo que les estaban solicitando completamente y nada más hicieron una proyección de su figura inicial, al parecer todos, también aquí, no hicieron lo que es el giro ni una situación de espejo, porque simplemente él mediante la figura le puso lo que es la base, dejó igual su trazo auxiliar y el triángulo que les estaban pidiendo, pero lo dejó igual, nada más le puso lo que es la base a la figura, como tal este chico se ve que por completo no logró entender lo que le estaban solicitando, ni siquiera la proyección de. A lo mejor hablando también del término de AUTOCAD, el concepto de “mirror”, para poder hacer las demás figuras.</p>
George	<p>No, yo no creo que estos chicos entendieron al cien por ciento el sólido que se generara, ni siquiera sé si entendieron que se generaba un sólido, o qué tipo de sólido se podría generar, yo creo que más bien pareciera, que entendieron que lo que se genera es una superficie, por lo que veo acá y acá. Un intento muy vago, la línea de acá, la línea punteada, y lo mismo acá, creo que el hecho de que no hayan hecho esto de acá, así, es lo que me indica que no entendieron que fue un sólido, todos tienen la abertura acá, bueno este ni a eso llega; este si entiende que se va a generar un sólido, pero creo que no tiene la más remota idea de qué sólido genera, quizás lo mismo que éste; igual aquí si me</p>

	preguntas, yo veo superficies y éste un vago intento; Para mí lo que llama la atención es la ausencia de este de acá, la ausencia de la perspectiva, yo creo que estos chicos no entendieron, este ejercicio.
Bryan	Aquí solamente dibuja la parte simétrica, aquí solamente indica la parte de abajo, podemos decir que nada más está haciendo su simétrico, aquí considero que igual dibuja la parte simétrica prácticamente todos dibujan la parte simétrica sólo aquí logra identificar una circunferencia, considero que es la parte de la imaginación o sea se dice que rota, pero te dicen que se forma, considero que ellos están acostumbrados a que si doy el giro pues yo sé que se va a formar pues un rectángulo más no relacionamos que esto al girarlo se forma un círculo yo creo que aquí nos hace falta definir esa parte que al girarlo se forma un círculo
Mary	Pues éste tiene un triángulo y nada más lo refleja como que éste es un eje de simetría pero no genera el sólido de revolución, este el eje de giro es el eje “Y” lo que estoy observado es que hay que hacerles referencia de esta situación, indicar que partir de ahí están generando el sólido con ese eje de giro, es decir que donde está el eje y en qué sentido se gira, es que en la mayoría de los libros te pintan respecto de la horizontal, no te dicen respecto del eje “X” para que tu entiendas esa parte del plan y alrededor de la ordenada o en “Y” igual a cinco o en “X” igual a menos tres, bueno ellos todavía no, pero sí en la mayoría de los libros lo que hacen los autores lo que hace es colocar el plano y en el eje te ponen esa flechita que te está orientando como es que lo estás girando, este se queda el plano éste se queda en la tercera dimensión pero no lo completa para cerrar, éste sí, este se queda en la figura plana que lo está reflejando y éste también no refleja las circunferencias que se forman, estos chicos si entienden cuál es el eje de giro.

Tabla 4. 10 Respuestas a la pregunta ¿Qué característica podemos distinguir en la producción del estudiante? para la hoja de trabajo 10.

4.2 Sobre la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje

Para analizar el uso de la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje como apoyo para el desarrollo de la competencia docente mirar profesionalmente las situaciones de enseñanza aprendizaje nos basamos en las siguientes cuestiones como sugiere Bernabeu y Llinares (2016), la Tabla 4.11 muestra las cuestiones que mediante el uso de la trayectoria hipotética de aprendizaje organizan el análisis por parte de los profesores en su discurso durante la actividad que se les expuso.

Cuestiones	
Sobre la tarea	¿Cuáles son los objetivos de aprendizaje que subyacen en el uso de la actividad? o ¿Qué es lo que se pretende que el alumno aprenda al usar esta actividad?
Sobre el aprendizaje	Identifica las características del desarrollo de la comprensión de clasificar, puesta de manifiesto por la respuesta de los alumnos. Describe los elementos matemáticos que justificarían la forma de proceder de los estudiantes.
Sobre la enseñanza	¿Qué actividad propondrías para apoyar la progresión de los estudiantes?

Tabla 4. 11 Cuestiones para identificar el uso de la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje.

Las cuestiones mencionadas en la Tabla 4.11 están contenidas en la entrevista que se hizo a los profesores.

Recordemos que a los profesores se les introdujo en el constructo de Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje como lo indica la Tabla 3.1, en la fase 2 se les pide a los profesores definir el objetivo de aprendizaje para cierta actividad, en esta fase los profesores se enfocaron en criticar la actividad mas no en definir un objetivo de aprendizaje a dicha actividad.

Por otra parte, *sobre el aprendizaje*, los profesores en la fase 3 hipotetizan sobre el comportamiento de los estudiantes ante una tarea específica y justifican su hipótesis sobre el proceder de los estudiantes ante dicha tarea, recurriendo a los conceptos previos de los estudiantes o a experiencias previas con esos conceptos matemáticos. En cuanto a la *enseñanza*, en la fase 5 los profesores aportaron propuestas para continuar con el progreso de los estudiantes en un concepto matemático específico, dan propuestas de varias actividades o tareas que reforzarían los contenidos tratados.

De acuerdo con lo anterior analicemos las respuestas propias de cada uno de los profesores dentro del discurso de su análisis en la actividad que se les presentó.

PROFESOR	SOBRE LA TAREA (OBJETIVO)	SOBRE LA APRENDIZAJE	SOBRE LA ENSEÑANZA
Grace	Que los alumnos relacionen qué es un sólido de revolución, que entiendan el concepto de sólido de revolución	A lo mejor también pudiera ser que él hizo inicialmente esto y después vio el trabajo de sus compañeros y trató de irlo relacionando e ir modificando lo que son sus conceptos (H1) Aquí yo digo que, si ya está un poquito más familiarizado con la dimensión espacial, ya tiene conceptos previos de lo que está buscando y lo está logrando familiarizar (H2)	Con reguiletos, esa es la cuestión, yo digo que sí ayudarían a todos para entender mejor el concepto nada más de sólido de revolución, Pudiera ser que a lo mejor ellos pudieran hacer actividades manuales para que pudieran entender lo de su sólido. Cuando colocamos los planos superpuestos, que se pudiera colocar esa forma de los planos superpuestos y al momento de que lo están haciendo se le pueda dar el giro, es más fácil que puedan observar las figuras a que si nada más ponen un rectángulo o que si nada más ponen lo que es una parábola, cosa que sí hacen sus producciones de varios, y al momento que hacen el giro es más fácil que ellos puedan visualizar la figura que se les está generando, en sí sería laborioso, desde mi punto de vista sería la forma en que estos chicos ya lo entenderían.

Tabla 4. 12 Análisis de Grace en el uso de Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje.

Grace propone un objetivo que no está de acuerdo con la actividad, propone que con esta actividad se alcanzará el concepto de sólidos de revolución, usa los verbos relacionar y entender, sin

embargo, la actividad es introductoria al concepto de sólidos de revolución. En este caso Grace no discute la actividad, propone un objetivo, pero no corresponde a la tarea. En cuanto a hipotetizar sobre el aprendizaje utiliza las frases “a lo mejor”, “yo digo que”, “pudiera ser” y realiza suposiciones, pero no lo hace de forma concreta sobre conceptos matemáticos involucrados en el contexto de la tarea. Por otra parte, en cuanto a la *enseñanza* si hace propuestas para introducir a los estudiantes de una mejor manera en el concepto de sólidos de revolución, propone al menos dos actividades para ayudar a los estudiantes a reforzar esta introducción al tema de sólidos de revolución, pero no son muy claras.

De manera general Grace identifica las principales características de la noción de trayectoria hipotética de aprendizaje, que consisten en los objetivos para el aprendizaje del alumno, las tareas matemáticas que se usan para promover el aprendizaje y las hipótesis acerca del proceso de aprendizaje de los alumnos (Simon, 1995)

En la Tabla 4.13 se muestra el análisis de George en relación con el uso de las trayectorias hipotéticas de aprendizaje. En cuanto al objetivo, George dice que, lo utilizaría para dar andamiaje refiriéndose a la recolección de conocimientos previos y dar estructura a los conceptos implicados en el tema de sólidos de revolución, como el concepto de función, reflexiona sobre la actividad en cuanto a que es una tarea introductoria al tema mencionado. Sobre el *aprendizaje*, George utiliza frases como, “quiero pensar”, “posiblemente”, para dar alguna explicación a la producción de algún alumno, pero buscando un sentido matemático a su justificación. Para la cuestión de la *enseñanza*, George hace una sugerencia en cuanto a la actividad, en este caso no hizo falta durante la entrevista hacerle la pregunta correspondiente, él se anticipó y da una propuesta para mejorar la actividad de tal manera que se avance con el progreso del estudiante, su propuesta es para que el estudiante pueda hacer la diferencia entre una figura en el plano y una figura en tres dimensiones, como lo indica la Tabla 4.13.

PROFESOR	SOBRE LA TAREA (OBJETIVO)	SOBRE LA APRENDIZAJE	SOBRE LA ENSEÑANZA
George	Si no supiera yo nada más, o si yo la pusiera para una secuencia para mí, yo la pondría para generar andamiaje, para mí ese sería el objetivo de la actividad, sí para conocimientos previos para rescatarlos un poco, pero más para generar andamiaje, la parte de la función y como se genera como una función matemática, todo eso	Yo quiero pensar que este es un intento por rotar este de aquí, esa es mi impresión, pero no lo entiende adecuadamente, se generaba lo que decimos “reloj de arena” aquí genera una figura, no le queda muy claro a lo mejor tiene una percepción espacial deficiente y genera esto (H1) algunas figuras están cerradas otras figuras están abiertas; posiblemente esa percepción generó un poquito de ruido respecto de bueno, sí yo giro una línea quizás no genere un sólido o más bien genera una superficie, pero si yo giro una superficie igual y sí se genera el sólido, esto no quiere decir que esta de acá no genera un sólido (H2)	No sé qué tan bueno sería para la actividad como una propuesta, generar una hoja de trabajo en donde al momento en que el alumno en el video vaya a generar estas, quizás no lo haga en su libreta, sí va a ser un poquito imponer un formato, pero la hoja de trabajo ayudaría quizás a entender que aquí hay una sucesión respecto a esta figura plana hacia un sólido y quizás sea un formato tan sencillo como de este lado vas a dibujar las figuras planas y de este lado dibujas el sólido, y que quede asociado, creo que eso ayudaría a calificar y retroalimentar para el docente y creo que ayudaría un poquito a orientar el trabajo y ordenarlo, quizás eso ayudaría mucho, no lo sé.

Tabla 4. 13 Análisis de George en el uso de Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje.

PROFESOR	SOBRE LA TAREA (OBJETIVO)	SOBRE LA APRENDIZAJE	SOBRE LA ENSEÑANZA
Bryan	Desde mi punto de vista es que los chicos definan y conozcan los qué es un sólido de revolución	Quiero pensar que es un triángulo o una pirámide, si consideramos que es un triángulo, habrá que definir el eje, es decir si el eje va a estar aquí en medio o puede estar en alguna de estas esquinas o el eje esta acá (H1) Aquí considero que igual dibuja la parte simétrica prácticamente todos dibujan la parte simétrica sólo aquí logra identificar una circunferencia (H11)	Habría que proponerle alguna otra actividad o que él mismo lo experimente, haciendo el material y que él mismo lo vaya girando para que lo vaya ayudando a darle una mejor representación. (H1) A veces la imaginación de ellos y lo que nosotros creemos difiere mucho, por eso yo sugeriría al inicio que ellos lo hicieran, que ellos cortaran su triangulito lo pegaran lo pegaran lo giraran igual y eso los podría ayudar (H4)

Tabla 4. 14 Análisis de Bryan en el uso de Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje.

Bryan en su discurso usa los verbos definan y conozcan, los usa para referirse a que el objetivo de la actividad es introducir a los alumnos al tema de sólidos de revolución, para el *aprendizaje*, Bryan indaga más sobre la producción del estudiante, en cuanto a los contenidos matemáticos y los conceptos, como simetría, eje, circunferencia, sus hipótesis van más hacia los conceptos. Bryan al igual que George no necesita de la pregunta sobre el apoyo en la progresión del estudiante, él busca la oportunidad y da propuestas para hacer otra actividad o hacer algunas modificaciones en la actividad que se trabajó como se muestra en la Tabla 4.14.

Para Mary, el objetivo de la actividad es distinguir entre una figura plana y una en tres dimensiones y cómo a partir de dicha figura plana se puede generar el sólido ver Tabla 4.15, el objetivo propuesto por Mary va de acuerdo con el contenido de la actividad, para el *aprendizaje*, Mary identifica una problemática en la producción del estudiante, dice que el estudiante tiene problemas al momento de identificar el eje de rotación. *Para la enseñanza*, Mary necesitó que se le hiciera la pregunta acerca de qué modificar o qué actividad proponer para seguir con el progreso del

estudiante, nos habla de usar otros videos distintos al que viene propuesto en la actividad (Figura 3.1), también de usar un motor para hacer girar recortes de figuras.

PROFESOR	SOBRE LA TAREA (OBJETIVO)	SOBRE LA APRENDIZAJE	SOBRE LA ENSEÑANZA
Mary	Que el alumno aprenda a distinguir, bueno que entienda bien el concepto de figura plana y después como se genera la tercera dimensión	Yo creo que sí logró quizás la proyección se sale un poquito, pero es correcto (H1) Aquí yo entiendo quizás es esa parte que le falta la construcción de la tercera dimensión lo sigue viendo bidimensional (H4) Aquí pues no alcanza a ver, se queda la dona que se iba a formar, y en esta nada más cambia de eje, pero no lo gira está trasladado, pero no se ve que lo gira todavía no le ha quedado claro que es el eje de giro y la tercera dimensión no lo pone en su cabecita le cuesta trabajo. (H5)	Utilizando contornos como banderitas para que pudieran girarla, crearles algo así como un juego, o hay otros videos donde construyen un motor y lo pone a girar, luego los chicos se interesan por repetir ese experimento, sería bueno tener esos motorcitos y ponerlos a recortar figuras planas y ponerlos a girar, tendrían más ejercicios donde pueden obsérvalo un poco más cerca para construir ese concepto de sólido de revolución.

Tabla 4. 15. Análisis de Mary en el uso de Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje.

De manera general los cuatro participantes, consideran las características mencionadas en una trayectoria hipotética de aprendizaje, sin embargo, sus reflexiones sobre la trayectoria difieren en algunos casos como el de Grace, en este caso no relaciona de manera correcta el objetivo con la actividad, según Gómez y Lupiáñez (2007) las características centrales de la trayectoria hipotética de aprendizaje tienen que ver con un carácter reflexivo, que es el trasfondo de los juicios y decisiones que pueden modificar la trayectoria, en el caso de Grace faltó el carácter reflexivo para definir el objetivo de la actividad, de manera general hace falta enfatizar en cuanto a la justificación

matemática en su proceder durante la actividad. Sin embargo, todos de acuerdo con su visión profesional buscan una alternativa para apoyar la progresión de los estudiantes en el tópico de sólidos de revolución.

4.3 Mirar profesionalmente

De acuerdo con los niveles que se muestran en la Tabla 3.2 que dan cuenta del logro de competencia mirar profesional el pensamiento matemático de los alumnos, analicemos el discurso articulado por los profesores en la revisión de las hojas de trabajo. Dentro del discurso emitido por los profesores los niveles dan cuenta del desarrollo de las destrezas de identificar elementos matemáticos e interpretar la comprensión del tema de sólidos de revolución y proponer tareas para favorecer el aprendizaje del tema de sólidos revolución de acuerdo con progresión del aprendizaje observado.

Grace encaja entre los niveles 1 y 2, describe de manera natural lo que ve, en algunos momentos usa términos que teóricos, pero no precisamente elementos matemáticos, no está definida una relación entre las ideas matemáticas y las evidencias de la situación.

Grace: **Aquí en este primer *esquema* él a lo mejor trató de hacer lo mismo que este joven, dibujó su figura plana porque lo está dibujando sobre su propio *esquema inicial*, ósea tiene un *trazo inicial* y con este si se está *auxiliando* para hacer el otro**

En su discurso emitido para la HT-2 usa palabras como trazo, esquema en lugar de elementos matemáticos como gráfica, eje de rotación, curva, gráfica de la función, su discurso en general se basa más en su formación profesional (Arquitecto) y no en la de un maestro de matemáticas en este contexto Grace se preocupa más por percepción espacial de los estudiantes.

Grace: **Ellos como tal, ni como figura plana, nada más hicieron un *tipo espejo*, lo que tuvieron de un lado lo pusieron de otro, también les faltó entender lo que es un sólido, ellos también lo trabajaron en figuras planas como a lo mejor muchos estaban manejando pero no lograron hacer al final lo que les estaban solicitando completamente y nada más hicieron una *proyección de su figura inicial*, al parecer todos, también aquí, no hicieron lo que es el giro ni una *situación de***

espejo, porque simplemente él mediante la figura le puso lo que es la base, dejó igual su trazo auxiliar y el triángulo que les estaban pidiendo, pero lo dejó igual, nada más le puso lo que es la base a la figura, como tal este chico se ve que por completo no logró entender lo que le estaban solicitando, ni siquiera la proyección de. A lo mejor hablando también del término de AUTOCAD, el concepto de “mirror”, para poder hacer las demás figuras.

En este discurso sobre la HT-10 Grace vuelve a utilizar términos que no corresponden al lenguaje de un maestro de matemáticas, repite el uso de términos referentes a su profesión, incluso habla de un software y una herramienta propia de la profesión de un arquitecto. Si bien resulta cierto que puede existir alguna relación entre los conceptos de los que habla Grace y los conceptos matemáticos, la mirada profesional va enfocada hacia los aspectos y términos matemáticos que se deben movilizar en la práctica profesional de un docente de matemáticas.

Al analizar una de sus propuestas para favorecer el progreso de los estudiantes que aporta Grace, se hace referencia a un reguilete, sin embargo, no especifica de qué manera sería, puede ser que lo esté relacionado con el giro para generar el sólido de revolución, habla de hacer actividades manuales, pero no alguna actividad en concreto.

Grace: ***Con reguiletes, esa es la cuestión, yo digo que sí ayudarían a todos para entender mejor el concepto nada más de sólido de revolución, pudiera ser que a lo mejor ellos pudieran hacer actividades manuales para que pudieran entender lo de su sólido.***

En general, Grace evalúa las producciones de los estudiantes sin justificar lo que piensan matemáticamente, describe de manera natural lo que ve, usa términos teóricos para articular su discurso, pero no lo hace con términos matemáticos concretos, falta la unión entre los conceptos matemáticos que se ponen en juego y la producción del estudiante, su propuesta necesita de mayor reflexión para favorecer los conceptos matemáticos como eje de rotación, curva, gráfica de una función, la posición del eje de rotación, definición del eje de rotación por mencionar alguno.

Para el caso de George su discurso encaja entre los niveles 2 y 3 usa los términos que describen ideas teóricas de la actividad, identifica varios aspectos relevantes de la situación y lo utiliza para

dar una propuesta en donde se consideren elementos teóricos que, de acuerdo con su discurso se deben respetar.

George

Que fallaron en entender, que hay una parte estrecha en donde a pesar de que se rota pues los puntos quedan juntos. Se alcanza a ver que hay una separación acá, lo mismo acá y lo mismo acá, se me vienen muchas posibilidades, como ideas, pero quizás en un intento de mantener la figura original, pues bueno, *si rotó*; es que está va antes de la dona entonces no es para que se confundan por ello, acá creo que falla el entendimiento de la figura que debería de salir, quizás no es que falle el hecho de que se genera el sólido al rotar esta *curva* y falla el entendimiento del *sólido general*, quizás no el hecho de que se va a formar un sólido a partir del hecho de *rotar* esta alrededor de éste *eje*.

pero la hoja de trabajo ayudaría quizás a entender que aquí hay una *sucesión respecto a esta figura plana hacia un sólido* y quizás sea un *formato tan sencillo como de este lado vas a dibujar las figuras planas y de este lado dibujas el sólido*, y que quede asociado, creo que eso ayudaría a calificar y retroalimentar para el docente

Bryan encaja dentro de los niveles 2 y 3 de acuerdo con su discurso identifica elementos matemáticos y se esfuerza en comprender más lo que hizo el estudiante, solicita relacionar el dibujo de los estudiantes con un discurso emitido por los alumnos, en dónde ellos describan porqué dibujaron esa figura

Bryan

Aquí solamente dibuja la parte simétrica, aquí solamente indica la parte de abajo, podemos decir que nada más está haciendo su *simétrico*, aquí considero que igual dibuja la parte *simétrica* prácticamente todos dibujan la parte simétrica sólo aquí logra identificar una *circunferencia*, considero que es la parte de la imaginación ósea se dice que rota, pero te dicen que se forma, considero que ellos están acostumbrados a que si doy el giro pues yo sé que se va a formar pues un *rectángulo* más no relacionamos que esto al girarlo se forma un *círculo* yo creo que aquí nos hace falta definir esa parte que al girarlo se forma un *círculo*

En el discurso de Mary ella identifica conceptos teóricos matemáticos, trata de relacionar su interpretación con las ideas teóricas, sin embargo, a en su discurso Mary no caracteriza a los estudiantes, para poder proponer otras actividades que favorezcan el aprendizaje del estudiante; Mary también encaja entre los niveles 2 y 3

Mary

Aquí sí él marca bien el *eje de giro*, aquí no se ve pero el *eje de giro* sigue siendo Y pero no es la curva original, *¿no es la cúbica?*, esta es *la cúbica* y *aquí no está la cúbica* cuando la pones a girar generas ésta y aquí sí es esta la misma *función*, y ésta la puso a girar pero qué pasa con esta, está trasladada, quizás sí la quiso hacer muy bien, pero las separó no correspondería a esta, al girarla no se separada, no asocia y esta no sé de dónde la obtuvo o si se equivocó, está trasladado es decir baja *el punto de tangencia* de la curva al eje.

Capítulo 5

Conclusiones

En este capítulo se analizaron los discursos emitidos por los informantes en el capítulo anterior, con la finalidad de presentar las conclusiones que aporta este trabajo de investigación alrededor del uso del constructo de las trayectorias hipotéticas de aprendizaje, como una herramienta para el desarrollo de la competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes por parte de los docentes informantes.

Se analiza el uso de la trayectoria hipotética de aprendizaje asimismo se presentan las reflexiones generadas por los niveles alcanzados del desarrollo de la competencia por los informantes.

Se indaga en la tarea escogida para el trabajo de investigación ante la información recogida durante la entrevista que se diseñó en este trabajo de investigación.

Finalmente, se contrastan los resultados obtenidos en este trabajo con los trabajos de otras investigaciones para generar las conclusiones generales para esta investigación.

5.1 Sobre el uso de las Trayectorias Hipotéticas de Enseñanza

En el contexto descrito durante el desarrollo de esta investigación, se buscó dar respuesta al planteamiento de la pregunta sobre la manera en que las trayectorias hipotéticas de aprendizaje potencian el desarrollo de la competencia denominada mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes, así mismo determinar el nivel descrito de la competencia por los informantes que colaboraron en la investigación.

Una de las aportaciones de esta investigación es mostrar el constructo de trayectorias hipotéticas de aprendizaje dentro de la matemática educativa, como un referente que puede ser utilizado por los docentes de matemáticas para el desarrollo de competencias que favorecen la creación de mejores ambientes en el aula, dando dirección a los procesos de enseñanza aprendizaje en temas concretos de matemáticas.

Como lo señala la Figura 2.2 al trabajar con una trayectoria hipotética de aprendizaje en primer lugar se debe definir el objetivo de aprendizaje por el docente, en torno a los conceptos matemáticos

que se involucran en la elaboración de la tarea propuesta. En esta investigación la tarea se compartió con los informantes de forma escrita y se hizo una recopilación videograbada de la aplicación y del desarrollo de la tarea en cuestión, por un grupo de estudiantes de educación media superior, con el propósito de que el docente identifique los elementos matemáticos involucrados y se pueda definir un objetivo de aprendizaje para dicha tarea.

En la definición del objetivo de la tarea, los profesores proponen objetivos muy generales como lo muestra las respuestas de las tablas 4.12 a la 4.15 sólo George puntualiza en conceptos particulares, e identificar conceptos previos, como el de función matemática. Considerar los conocimientos previos para la aplicación de una tarea es una de las características principales en las que se fundamenta el constructo de trayectorias hipotéticas como lo menciona Simon y Tzur (2004)

Por lo anterior podemos decir que, los resultados muestran que los profesores no concretaron el objetivo de la actividad alrededor de los conceptos matemáticos que se relacionan con la misma. Para dar estructura al pensamiento matemático de los estudiantes resulta relevante identificar de forma concreta el objetivo matemático de la actividad en cuestión, como lo marca el ciclo de la trayectoria hipotética de aprendizaje, el desarrollo de la competencia necesita de esa estructura para poder identificar e interpretar el proceder del estudiante.

Durante el trabajo de investigación los docentes propusieron hipótesis sobre el proceso de aprendizaje, ante las actividades realizadas por estudiantes de bachillerato para el tema concreto de sólidos de revolución. Las hipótesis sobre el proceso de aprendizaje que realizan los docentes es uno de los elementos centrales de la trayectoria hipotética de aprendizaje como lo señalan Gómez y Lupiáñez (2007). Sin embargo, como se muestra en la entrevista realizada, falta concretar esas hipótesis por los docentes entorno a los conceptos matemáticos que se identifican en el proceder del estudiante, para encausar las hipótesis a la mejora del proceso de enseñanza aprendizaje. Los resultados muestran que, no todos los docentes participantes en el trabajo de investigación sacaron provecho de sus hipótesis para redirigir al estudiante en el proceso de enseñanza aprendizaje y se lograra el objetivo de la actividad.

La investigación da evidencia de la dificultad que tienen los profesores para hipotetizar en torno a los elementos matemáticos que se relacionan con la tarea, las hipótesis hechas por los profesores no contribuyeron de forma relevante a identificar, interpretar y relacionar el trabajo realizado por

el estudiante con respecto a los elementos matemáticos involucrados en la tarea como, función, eje de rotación, curva, sólido, figura geométrica entre otros.

Investigaciones similares como la de Bernabeu y Llinares (2016) contrastan con los resultados de nuestra investigación, debido a que en la investigación mencionada los informantes son estudiantes para profesores de matemáticas, en donde el uso de trayectorias hipotéticas de aprendizaje es parte de una metodología que tiene como objetivo promover buenas prácticas en las aulas desde una perspectiva teórica, aplicando los resultados con los que ya se cuentan en didáctica de las matemáticas.

De lo anterior se puede afirmar de acuerdo con los resultados generados por los informantes que, no se apropian del constructo de trayectorias hipotéticas desde una perspectiva de la didáctica de la matemática. La coordinación de sus argumentos aún resulta limitante para generar el ciclo completo de enseñanza de las matemáticas que propone Simon (1995).

Sin embargo, de acuerdo con los resultados obtenidos en esta investigación se puede decir que la noción de trayectorias hipotéticas de aprendizaje puede dotar de estructura al análisis del docente, al revisar una tarea realizada por un estudiante, ya que como lo señala Gómez y Lupiáñez (2007) existe una relación entre la actividad diaria de un profesor de matemáticas y la noción de trayectoria hipotética de aprendizaje por su carácter reflexivo, esta investigación da cuenta de que dicho enfoque se respalda en los años de experiencia de nuestros informantes y no en didáctica de las matemáticas.

Otra aportación que se muestra en los resultados es el uso de las hipótesis hechas por el docente, para tratar de relacionar los elementos matemáticos que debería poner en juego el estudiante al momento de resolver la tarea, lo cual coadyuva a cambiar la idea dicotómica de correcto e incorrecto al evaluar la producción de un alumno. En los discursos de los profesores se leen frases como “él sí pudo” o “él sí lo logró, él no lo logró” pero se busca justificar el procedimiento que realizó el estudiante en la resolución de la tarea.

5.2 Nivel del logro de la competencia “mirar profesionalmente”

La Tabla 3.2 describe los niveles usados en esta investigación que caracterizan el logro de la competencia mirar profesionalmente. Los cuatro participantes alcanzan el nivel 1 o descriptivo; con la información obtenida se puede concluir que los docentes describen con lenguaje natural o propio de la profesión que estudiaron antes de ser docentes de matemáticas, el proceder del estudiante en la resolución de la tarea, en fragmentos de su discurso se cuenta con suficiente evidencia para decir que parte del discurso de los docentes encaja en un nivel descriptivo.

Con los resultados obtenidos podemos decir que, los docentes George, Bryan y Mary logran alcanzar en algunas partes de su discurso el nivel 2 o retórico, ya que usan elementos matemáticos para justificar el proceder del estudiantes, Grace se mantiene por lo general en un nivel descriptivo, sin embargo, George, Bryan y Mary no relacionan los elementos matemáticos de forma congruente con las evidencias mostradas, el uso de los supuestos hechos en la trayectoria hipotética no vincula los elementos matemáticos con el objetivo de aprendizaje.

Los niveles 3 y 4 son difícilmente alcanzados por los participantes de la investigación ya que para los niveles 3 y 4 se necesita de ciertos conocimientos de didáctica de la matemática; interpretar el uso de los elementos matemáticos requiere ideas teóricas propias de la didáctica de la matemática, no obstante debido al uso de la noción de trayectorias hipotéticas de aprendizaje participantes como George y Bryan buscan proponer de forma natural, el uso de otra actividad para lograr el objetivo de aprendizaje de la actividad inicial y justifican que en el proceder del estudiante hay conceptos matemáticos que no han quedado claros.

Para Bernabeu y Llinares (2016) el logro de la competencia mirar profesionalmente significa, ser maestro desde la perspectiva de la didáctica de la matemática, la manera en la que el maestro usa su conocimiento de matemáticas y de didáctica de las matemáticas en sus actividades diarias en el aula. De lo anterior podemos afirmar que el conocimiento en didáctica de las matemáticas juega un papel clave en el desarrollo de la competencia. Los informantes de esta investigación no cuentan con bases sólidas en dicha ciencia, lo que dificulta avanzar en los niveles propuestos en este trabajo para caracterizar el logro de la competencia.

Esta investigación da cuenta de que se alcanzan niveles medios del desarrollo de la competencia (nivel descriptivo y retórico) por los informantes, no obstante que se ha trabajado con profesores

experimentados, pero como ya se señaló, son profesores que no cuentan con una formación en didáctica de las matemáticas, lo cual implica que los profesores no necesariamente cuentan con el conocimiento sobre los errores, dificultades y obstáculos escolares en los temas específicos, lo cual es un criterio valorado al momento de usar el constructo de trayectorias hipotéticas de aprendizaje como lo señalan Gómez y Lupiáñez (2007).

5.3 La selección de la tarea para el análisis del desarrollo de la competencia

La actividad seleccionada para el análisis de los profesores puede parecer sencilla por ser introductoria para el concepto de sólidos de revolución, sin embargo, engloba varias dificultades y conceptos matemáticos como; el cambio de registros, geometría plana, volumen, geometría analítica, el concepto de función, gráfica de una función. El video con el que se trabaja en la actividad para que los estudiantes generen los sólidos de revolución, tiene algunos puntos cuestionables, dicho video está contenido en la video grabación que se hizo para los profesores con la finalidad de contextualizar a los docentes en el análisis de la actividad.

Los profesores no identifican los aspectos cuestionables, ningún participante profundiza en el diseño de la actividad propuesta, el ambiente que genera y cómo se refleja en las producciones de los estudiantes.

Con lo anterior se puede decir que los docentes no están acostumbrados a analizar registros de la práctica docente, ya que, durante la entrevista, la video grabación es sólo usada una vez y no en repetidas ocasiones como se les sugiere a los docentes para profundizar en la actividad y poder emitir un mejor discurso, con respecto a las producciones de los estudiantes. Esto se confirma al no hacer cuestionamientos a la actividad mencionada, respecto a conceptos matemáticos que se pondrán en juego en el momento que los estudiantes realicen la actividad.

La trayectoria presentada a los profesores los aparta de su zona de confort, dotando de herramientas con las que no están acostumbrados a trabajar, por ejemplo, otro resultado que se obtiene de la investigación es que, los docentes no están acostumbrados a usar el video como apoyo en el análisis de práctica docente, lo que contrasta con otras investigaciones donde se persigue también el desarrollo de la competencia, como la de Sherin y van Es (2002) en donde la video grabación es su herramienta principal para que los docentes desarrollen destrezas como las que requiere la competencia mirar profesionalmente. Con respecto a lo anterior, nos percatamos que dentro la

formación docente y como herramienta para el desarrollo de la competencia mirar profesionalmente es necesario trabajar más con el uso de registros de la práctica en formato de video como lo señala Llinares (2013), dichos registros deberán contener, respuestas de alumnos, secuencias de actividades o tareas, interacciones entre alumnos ante ciertos problemas.

De la misma forma, afirmamos que los profesores no están acostumbrados a emitir un discurso para justificar la comprensión de los estudiantes, asimismo no están acostumbrados a analizar los discursos emitidos por los alumnos y lo que ello implica, por esta razón Llinares (2013) también sugiere la redacción de informes con la finalidad de refinar y justificar las interpretaciones de los registros obtenidos durante la ejecución de una tarea.

5.4 Conclusiones generales

El principal contraste que tiene nuestro trabajo de investigación con otros similares es el contacto de los informantes con la didáctica de las matemáticas, en esta investigación los profesores sólo cuentan con su conocimiento matemático y años de experiencia, lo cual dificulta el aprovechamiento de la noción de trayectoria hipotética de aprendizaje para el desarrollo de la competencia mirar profesionalmente.

Sin embargo, con los resultados obtenidos se puede afirmar como lo reporta Jacobs *et al* (2010), que los profesores pueden aprender a desarrollar la competencia mirar profesionalmente, pero lleva tiempo. También los resultados muestran que dotar de estructuras conceptuales útiles y accesibles a los profesores como la noción de trayectorias hipotéticas de aprendizaje contribuyen comprender el complejo acto de la enseñanza de las matemáticas.

Existe una gran cantidad de trabajos de investigación alrededor de la competencia mirar profesionalmente y el constructo de trayectorias hipotéticas de aprendizaje, como lo señalan Stahnke, Schueler, y Roesken-Winter (2016) en la revisión de trabajos que hacen alrededor de este tema, seguirá siendo un campo de investigación para los formadores de profesores lo que también implicará trabajar en varios dominios matemáticos como lo que ya se tiene en álgebra, geometría y cálculo.

Desde otro punto de vista, el objetivo de este trabajo de investigación es generar espacios propicios que contribuyan a la formación de profesores de matemáticas, dotando de sentido la práctica del

profesor de matemáticas. Llinares (2013) propone actividades concretas para el desarrollo de la competencia mirar profesionalmente:

- Usar el registro de la práctica docente en formato de video.
- Leer documentos de información teórica relativa a la tarea de análisis que dote de instrumentos que afinen la interpretación de los registros de los estudiantes.
- Generar contextos de interacción entre profesores que ayuden a reflexionar sobre la práctica, en línea o presenciales.
- Sintetizar las interpretaciones de los registros y sus justificaciones en reporte o informes

Finalmente podemos concluir que el uso de trayectorias hipotéticas de aprendizaje para el desarrollo de la competencia mirar profesionalmente se puede generar en los docentes que no cuentan con una formación en didáctica de la matemática si se generan los ambientes propicios para dicho efecto.

La dificultad principal que tienen los docentes para desarrollar la competencia mirar profesionalmente es relacionar las tres destrezas que implican el logro de la competencia, también esa dificultad se presenta en profesores en formación como lo señala el trabajo de Fernández, Valls y Llinares (2011), en donde los profesores en formación no diferenciaron algunas características del proceder de los estudiantes en relación con la estructura aditiva y multiplicativa.

La competencia mirar profesionalmente es entrenable pero necesita de constructos que ayuden cubrir las características de dicha competencia, diseñando tareas-actividades que den cuenta del progresión en el aprendizaje de los estudiantes ante temas concretos de matemáticas.

Si queremos docentes de matemáticas que logren desarrollar la competencia mirar profesionalmente, será necesario continuar generando los ambientes propicios para el desarrollo de esta.

Referencias

- Albert, M. (2007). *La investigación educativa, claves teóricas*. México: McGraw-Hill
- Battista, M. (2011). Conceptualizations and Issues Related to Learning Progressions, Learning Trajectories, and Levels of Sophistication. *The Mathematics Enthusiast* 8(3): 507–569.
- Bernabeu, M. y Llinares, S. (2016). El desarrollo de una “mirada profesional”: La idea de trayectoria de aprendizaje del pensamiento geométrico. *XIV Jornadas de Redes de Investigación en Docencia Universitaria*. Universidad de Alicante.
- Clements, D. y Sarama, J. (2004). Learning trajectories in mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 81-89.
- Erickson, F. (2011). On noticing teacher noticing. In M. Sherin, V. Jacobs, & R. Philipp (Eds.), *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes* (pp. 17-34). New York, NY: Routledge.
- Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G., Valls, J. y Callejo, M. L. (2018). Noticing students' mathematical thinking: Characterization, development and contexts. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, nº 13, 39 - 61.
- Fernández, C., Valls, J., y Llinares, S. (2011). El desarrollo de un esquema para caracterizar la competencia docente mirar con sentido el pensamiento matemático de los estudiantes. En M. Marín *et al* (Eds.) *Investigación en Educación Matemática XV*, (pp. 351-360). SEIEM: Ciudad Real, España
- Fortuny, J., y Rodríguez, R. (2012). Aprender a mirar con sentido: facilitar la interpretación de las interacciones en el aula. AIEM. *Avances de Investigación en Educación matemática*, 1, 23-37.
- Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, M., (2014). *Metodología de la investigación*, DF México, McGRAW-HILL
- Hitt, F. (2003), Dificultades en el aprendizaje del cálculo, XI Meeting of Middle-Higher Level Mathematics Teachers, Michoacan University San Nicolás de Hidalgo, Morelia (Mexico).
- Sherin, M., Russ, R. y Colestock, A. (2011). Accessing mathematics teachers' in the-moment noticing. En Gamoran Sherin, Victoria R. Jacobs and Randolph A. Philipp. *Mathematics*

teacher noticing: Seeing through teachers' eyes (pp. 79-94). New York, NY: Routledge Taylor & Francis Group.

Sherin, M., Jacobs, V., y Philipp, R. (Eds.). (in press). *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes*. New York: Routledge

Gómez, P. y Lupiáñez, J. (2007). Trayectorias hipotéticas de aprendizaje en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *PNA*, 1(2), 79-98.

Goodwin, C. (1994). Professional vision. *American Anthropologist*, 96, 606-633.

Gupta, D., Soto, M., Dick, L., Broderick, S. y Appelgate, M. (2018). Noticing and deciding the next steps for teaching: A cross-university study with elementary pre-service teachers. En G. Stylianides y K. Hino (Eds.), *Research Advances in the Mathematical Education of Pre-service Elementary Teachers* (pp. 261-275). Springer, Cham.

Ivars, P., Buforn, A., y Llinares, S. (2016). Características del aprendizaje de estudiantes para maestro de una trayectoria de aprendizaje sobre las fracciones para apoyar el desarrollo de la competencia “mirar profesionalmente”. *Acta Scientiae*, 18(4), 48-66

Ivars, P., Buforn, A., y Llinares, S. (2017). Diseño de tareas y desarrollo de una mirada profesional sobre la enseñanza de las matemáticas de estudiantes para maestro. En A. Salcedo (Comp.), *Alternativas pedagógicas para la Educación matemática del siglo XXI* (pp. 65-87). Caracas: Centro de Investigaciones Educativas, Escuela de Educación. Universidad Central de Venezuela

Jacobs, V., Lamb, L., y Philipp, R. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, 41(2), 169–202.

Leinhardt, G., Putnam, R., Stein, M., y Baxter, J. (1991). Where subject knowledge matters. In P. Peterson, E. Fennema, & T. Carpenter (Eds.), *Advances in research on teaching* (pp. 87-113). Greenwich, CT: JAI Press

Llinares, S. y Krainer, K. (2006). Mathematics (student) Teachers and Teachers Educators as Learners. En A. Gutierrez y P. Boero (eds). *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education. Past, Present and Future*. Rottetdam/Taipei: Sense Publishers.

- Llinares, S., y Valls, J. (2009). The building of pre-service primary teachers' knowledge of mathematics teaching: interaction and online video case studies. *Instructional Science*, 37(3), 247-271.
- Llinares, S. (2012). Formación de profesores de matemáticas. Caracterización y desarrollo de competencias docentes. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 10, 53-62.
- Llinares, S. (2013). El desarrollo de la competencia “mirar profesionalmente” la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. *Educación en Revista*, 50, 117-133.
- Martínez, P. (2006). “El método de estudio de caso. Estrategia metodológica de la investigación científica”. *Pensamiento y Gestión*, nº 20, pp.165-193.
- Mason, J. (2002). *Researching your own practice. The discipline of noticing*. London: Routledge Falmer
- Pugalee, D. (2018). Perspectives on Noticing in the Preparation of Elementary Mathematics Teachers (pp. 293-301). In Stylianides G., Hino K. (Eds.) *Research Advances in the Mathematical Education of Pre-service Elementary Teachers*. Cham, Switzerland: Springer.
- Reyes, T. (2 000). Métodos cualitativos de investigación: los grupos focales y el estudio de caso. *Fórum Empresarial* 4.2 75-87.
- Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C., Valls, J., García, M., y Llinares, S. (2012). Cómo estudiantes para profesor interpretan el pensamiento matemático de los estudiantes de bachillerato. La derivada de una función en un punto. En A. Estepa et al. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 497-508). Jaén: SEIEM.
- Sánchez-Matamoros, G., Moreno, M., Pérez, P. y Callejo, M.L. (2018). Trayectoria de aprendizaje de la longitud y su medida como instrumento conceptual usado por futuros profesores. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 21 (2), 203-228.
- Sandín, M. P. (2003). *Investigación cualitativa en educación. Fundamentos y tradición*. Madrid: McGraw-Hill
- Seidel, T., y Stürmer, K. (2014). Modeling and measuring the structure of professional visión in preservice teachers. *American Educational Research Journal* 51(4), 739-771

- Sherin, M., y van Es E. (2002). Learning to notice: Scaffolding new teachers' interpretations of classroom interactions. *Journal of Technology and Teacher Education*, 10(4), 571–596.
- Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(2), 114-145.
- Simon, M. y Tzur, R. (2004). Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: an elaboration of the hypothetical learning trajectory. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 91-104.
- Stahnke, R., Schueler, S. y Roesken-Winter, B. (2016). Teachers' perception, interpretation, and decisionmaking: a systematic review of empirical mathematics education research. *ZDM. Mathematics Education*, 48(1-2), 1-27.
- Steffe, L. (2004). On the construction of learning trajectories of children: The case of commensurable fractions. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 129-162.
- Tall, D. (1993). Students' difficulties in calculus. proceeding of working group 3 on students' difficulties in calculus (pp. 13-28). *ICME-7*, Quebec, Canada.
- Tarrés, M. L. (2013). *Observar, escuchar comprender. Sobre la tradición cualitativa en la investigación social*. México: Colmex, FLACSO, Porrúa.
- Taylor, S. y Bogdan, R., (2015). *Introducción a los métodos cualitativos de la investigación*. España, Paidós
- Wilson, P., Mojica, G. y Confrey, J. (2013). Learning trajectories in teacher education: Supporting understandings of students' mathematical thinking. *Journal of Mathematical Behavior*, 32, 103–121
- Vondrová, N., y Žalská, J. (2005). Ability to notice mathematics specific phenomena: What exactly do student teachers attend to? *Orbis scholae* 9(2), 77-101.
- Zapatera, A. (2015). *La competencia mirar con sentido de estudiantes para maestros (EPM) analizando el proceso de generalización en alumnos de educación primaria*. (Tesis doctoral) Universidad de Alicante. España