



# **BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA**

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS  
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

## **LA CUBICACIÓN DE MADERA COMO UN PROBLEMA GEOMÉTRICO DEL CONTEXTO REAL DISEÑADO E IMPLEMENTADO EN UN BACHILLERATO COMUNITARIO**

**TESIS**  
PARA OBTENER EL TÍTULO DE  
**MAESTRA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA**

PRESENTA  
**LIC. GLORIA MARTÍNEZ CRUZ**

DIRECTORA DE TESIS  
**DRA. ESTELA DE LOURDES JUÁREZ RUÍZ**

CO-DIRECTOR DE TESIS  
**DR. JOSÉ DIONICIO ZACARÍAS FLORES**

PUEBLA, PUE.

MAYO 2019

Esta Investigación se realizó gracias al financiamiento del  
Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT),  
De Enero de 2017 a Diciembre 2018.  
N° de CVU 817098

## **AGRADECIMIENTOS**

Agradezco a la Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrado por el apoyo otorgado para la impresión y empastado de esta tesis, a través del proyecto VIEP-2019-00655 titulado “Procesos cognitivos para el aprendizaje de conceptos y la resolución de problemas de matemáticas”

## Índice

Resumen .....	10
Abstract .....	11
INTRODUCCIÓN .....	12
Capítulo 1 .....	13
PLANTEAMIENTO DE LA INVESTIGACIÓN .....	13
1.1 Planteamiento del problema .....	13
1.1.1 Pregunta general de investigación .....	14
1.1.2 Preguntas específicas.....	15
1.2 Objetivos .....	15
1.2.1 Objetivo general .....	15
1.2.2 Objetivos específicos.....	15
1.3 Justificación.....	16
Capítulo 2 .....	17
MARCO TEÓRICO .....	17
2.1 Resolución de problemas .....	17
2.1.1 Fases en la resolución de problemas .....	18
2.1.2 Estrategias en la resolución de problemas.....	20
2.2 Contexto de un problema .....	21
2.3 Problemas reales y autenticidad .....	23
2.3.1 Teoría de las situaciones auténticas.....	25
METODOLOGÍA .....	30
3.1 Metodología .....	30
Capítulo 4 .....	32
DISEÑO Y ANÁLISIS DE LA AUTENTICIDAD DEL PROBLEMA .....	32
4.1 Diseño de la tarea matemática auténtica basada en la cubicación de la madera .....	32
4.1.1 Diagnóstico comunitario .....	32
4.1.2 Investigación documental de las técnicas básicas de cubicación de la madera.....	34
4.1.3 Entrevista a experto en el tema de la cubicación de la madera .....	40
4.1.4 Diseño de la tarea .....	42
4.2 Análisis de la autenticidad del problema.....	42
Capítulo 5 .....	48
IMPLEMENTACIÓN Y RESULTADOS .....	48
5.1 Implementación.....	48

5.2 Resultados .....	50
5.2.1 Cubicación del árbol en pie .....	51
5.2.2 Cubicación de la madera en trozas .....	72
CONCLUSIONES .....	87
Referencias .....	92
ANEXO A .....	96
ANEXO B .....	97

## Índice de tablas

Tabla 1. Aspectos de las situaciones del mundo real que se consideran importantes en su simulación .....	25
Tabla 2. Etapas del diagnóstico comunitario .....	32
Tabla 3. Factores de forma según la característica del fuste. ....	37
Tabla 4. Identificación de estrategias en la 1ª. Fase del modelo de Polya .....	51
Tabla 5. Descripción de las producciones iniciales generadas por los equipos de trabajo .....	54
Tabla 6. Identificación de estrategias en la 2ª. Fase del modelo de Polya .....	55
Tabla 7. Descripción de las producciones generadas por los equipos de trabajo.....	57
Tabla 8. Identificación de estrategias en la 3ª. Fase del modelo del Polya .....	61
Tabla 9. Descripción de las producciones generadas por los equipos de trabajo.....	62
Tabla 10. Identificación de estrategias en la 4ª Fase del modelo de Polya .....	67
Tabla 11. Descripción de las producciones generadas por los equipos de trabajo.....	69
Tabla 12. Identificación de estrategias en la 1ª Fase del modelo de Polya .....	72
Tabla 13. Identificación de estrategias en la 2ª Fase del modelo de Polya .....	74
Tabla 14. Identificación de estrategias en la 3ª Fase del modelo de Polya .....	76
Tabla 15. Descripción de las producciones generadas por los equipos de trabajo.....	77
Tabla 16. Identificación de estrategias en la 4ª Fase del modelo de Polya .....	82
Tabla 17. Descripción de las producciones generadas por los equipos de trabajo.....	84

## Índice de figuras

Figura 1. Ejes y apartados analizados en el diagnóstico comunitario .....	33
Figura 2. Productos primarios dentro de la cadena forestal .....	35
Figura 3. Tipo de terreno y características del árbol .....	36
Figura 4. Altura comercial del árbol .....	36
Figura 5. Visual del observador entre la cima y la base del árbol.....	37
Figura 6. Áreas circulares de una troza .....	38
Figura 7. Representación del equipo 1 .....	54
Figura 8. Representación del equipo 2 .....	54
Figura 9. Representación del equipo 3 .....	54
Figura 10. Expresión para obtener la medida del diámetro.....	57
Figura 11. Fórmula para calcular el volumen a partir del cono truncado .....	57
Figura 12. Descripción del uso del clinómetro.....	58
Figura 13. Variación del ángulo debido a un cambio en la distancia.....	58
Figura 14. Diseño de un problema similar .....	59
Figura 15. Uso de un ángulo como elemento adicional .....	59
Figura 16. Vía de solución a partir de un triángulo rectángulo .....	59
Figura 17. Diseño y pruebas con un clinómetro.....	59
Figura 18. Diseño de un problema similar .....	60
Figura 19. Construcción de una cinta diamétrica .....	60
Figura 20. Pruebas de medición con la cinta diamétrica.....	60
Figura 21. Medida del contorno del pino a cada 30 cm de altura .....	63
Figura 22. Medida del ángulo para determinar la altura .....	63
Figura 23. Tabla con la medida de la circunferencia para el cálculo del diámetro .....	63
Figura 24. Cálculo de la altura con razones trigonométricas .....	63
Figura 25. Gráfica de la recta que indica una mejor aproximación de la variación del diámetro respecto a la altura.....	64
Figura 26. Cálculo del volumen con la fórmula del cono truncado .....	64
Figura 27. Estimación del valor comercial del pino.....	64
Figura 28. Uso del clinómetro para medir el ángulo de elevación.....	65
Figura 29. Medida de la distancia del pino al clinómetro .....	65

Figura 30. Cálculo de la altura por razones trigonométricas.....	65
Figura 31. Cálculo del volumen con la fórmula de Smalian .....	65
Figura 32. Ubicación del espejo para calcular la altura del árbol .....	66
Figura 33. Medida de la distancia del observador al espejo.....	66
Figura 34. Medida del contorno para obtener el diámetro a la altura de pecho .....	66
Figura 35. Uso de los criterios de semejanza de triángulos .....	66
Figura 36. Cálculo de la altura del árbol .....	67
Figura 37. Cálculo del volumen del pino en pie.....	67
Figura 38. Medida del contorno para calcular el diámetro a la altura de pecho .....	69
Figura 39. Cálculo del volumen a partir de la fórmula de Smalian como comprobación.....	69
Figura 40. Uso de un clinómetro profesional .....	70
Figura 41. Medida de la altura a la cual se coloca el clinómetro .....	71
Figura 42. Uso del clinómetro para determinar el ángulo de elevación.....	71
Figura 43. Cálculo de la altura del pino a partir de las razones trigonométricas .....	71
Figura 44. Ubicación de los puntos a cada 30 cm de altura hasta los 2.57 metros .....	77
Figura 45. Medida del contorno para la estimación del volumen a cada 30 cm .....	77
Figura 46. Medida del contorno para la estimación del volumen a cada 30 cm .....	77
Figura 47. Tabulación de datos .....	78
Figura 48. Cálculo del volumen por secciones.....	78
Figura 49. Determinación del volumen final a partir de la suma de los volúmenes parciales .....	78
Figura 50. Ubicación de tiras auxiliares para la medición del diámetro .....	79
Figura 51. Colocación de tiras para medición del diámetro en la base y a los 2.57 metros.....	79
Figura 52. Cálculo del volumen de la troza considerando el diámetro de la parte inferior .....	80
Figura 53. Cálculo del volumen de la troza considerando el diámetro de la parte superior .....	80
Figura 54. Cálculo del volumen de la troza a partir del promedio de los resultados anteriores ....	80
Figura 55. Estimación del valor comercial de la troza.....	80
Figura 56. Medición del diámetro de una troza.....	81
Figura 57. Medición del contorno de la troza .....	81
Figura 58. Medición de la longitud de la troza.....	81
Figura 59. Representación de los datos obtenidos .....	81
Figura 60. Cálculo del promedio del diámetro a partir de las mediciones realizadas.....	82

Figura 61. Cálculo del volumen de la troza a partir del diámetro promedio.....	82
Figura 62. Calculo del volumen considerando la longitud de una troza comercial .....	84
Figura 63. Cálculo del diámetro a partir de la medida obtenida del contorno .....	85
Figura 64. Cálculo del volumen usando el diámetro de la cara inferior de la troza.....	85
Figura 65. Cálculo del volumen usando el diámetro de la cara superior de la troza.....	85
Figura 66. Cálculo del volumen a partir del promedio de los volúmenes obtenidos con el diámetro inferior y superior .....	85
Figura 67. Cálculo del volumen de la troza partir de los datos obtenidos en las mediciones .....	86
Figura 68. Cálculo del volumen y estimación del valor comercial de la troza partir de los datos obtenidos en las mediciones .....	86

## **Resumen**

El presente trabajo de investigación analiza las estrategias utilizadas por un grupo de estudiantes de bachillerato en una localidad de la Sierra Norte del estado de Oaxaca, ante la implementación de una tarea matemática auténtica diseñada a partir de un problema geométrico detectado en su entorno. La propuesta surge del interés y necesidad por cuantificar el volumen de madera comercial de un árbol, el pino strobus variedad chiapensis, especie forestal con relevancia económica para los habitantes de la localidad. Para el diseño de la tarea se consideraron las características de la comunidad, la información sobre cubicación forestal obtenida en fuentes documentales y la información proveniente de la investigación de campo a través de una entrevista a una persona involucrada en la situación real descrita en la tarea. El diseño de la tarea considera los aspectos y subaspectos indicados en la teoría de situaciones auténticas de Torulf Palm. En la implementación con el grupo de estudiantes se incluyen preguntas basadas en las cuatro fases descritas en el modelo de Polya, para orientar el proceso e identificar las estrategias presentes en cada fase del proceso de resolución.

## **Abstract**

This research work analyzes the strategies used by a group of high school students from a town in the Sierra Norte region in the state of Oaxaca, when they interact with an authentic mathematical task designed from a geometric problem detected in their environment. The task comes from the interest and need to quantify the volume of commercial wood of a tree, *pinus strobus chiapensis*, a forest species with economic relevance for the people of the town. In the task design were considered characteristics of the community, information about wood volume estimation from documentary research and information from field research through an interview with a person involved in the real situation described in the task. The task design considers aspects and subaspects indicated in the theory of authentic task situations of Torulf Palm. In the implementation were included questions based on the four phases described in the Polya model, to guide the process and identify the strategies present in each phase of the resolution process.

## **INTRODUCCIÓN**

El presente trabajo de tesis tiene por objetivo diseñar e implementar una tarea auténtica asociada a un contexto cercano a la cotidianidad de un grupo de estudiantes de bachillerato, considerando los aspectos de la teoría de situaciones auténticas de Palm y el análisis de las estrategias del modelo de resolución de problemas de Polya. La estructura del contenido se describe a continuación.

El Capítulo 1 incluye el planteamiento del problema, el objetivo general y los objetivos específicos de la presente investigación, así como las preguntas que se pretenden responder y la justificación de la importancia de este trabajo.

El Capítulo 2 contiene el marco teórico, el cual indica parte de la literatura que se revisó durante la realización de la presente investigación, en él se muestran tres elementos fundamentales del trabajo, la teoría de situaciones auténticas de Torulf Palm, las fases en la resolución de problemas del modelo de Polya y las estrategias que identifican cada fase del modelo.

En el Capítulo 3 se describe la metodología, las características generales del grupo con el que se implementó la tarea y la forma en que se realiza la presente investigación.

En el Capítulo 4 se describe el diseño de la tarea, iniciando con una breve descripción del diagnóstico comunitario, la revisión documental específica del área en la que se encuentra inmersa la tarea, la investigación de campo a través de una entrevista con una persona involucrada en el tema. En este capítulo se incluye el análisis de la autenticidad de la tarea descrita considerando los ocho aspectos y subaspectos contenidos en la teoría de Torulf Palm.

En el Capítulo 5 se muestra el análisis realizado a partir de las producciones de los estudiantes durante la implementación de la tarea en el bachillerato comunitario ubicado en la localidad donde se realiza el diagnóstico.

En las Conclusiones se resaltan los principales resultados obtenidos durante el desarrollo de la presente investigación.

Como parte final se da a conocer la referencia bibliográfica que ha sido de apoyo y soporte para la presente investigación y que puede servir de consulta y profundización del tema.

## Capítulo 1

### PLANTEAMIENTO DE LA INVESTIGACIÓN

#### 1.1 Planteamiento del problema

En México, en el nivel medio superior, los métodos de enseñanza se han caracterizado por priorizar la acumulación de conocimientos fragmentados, con limitada aplicabilidad, relevancia, pertinencia y vigencia en la vida cotidiana (Secretaría de Educación Pública [SEP], 2017), ocasionando que los estudiantes, desmotivados por la imperceptible vinculación o aplicación de estos conocimientos, pierdan el interés hasta el grado de llegar a la deserción escolar (Cantoral, 2013), siendo necesario generar cambios hacia una matemática inclusiva y no una matemática que sea factor de exclusión escolar.

En respuesta a esta demanda social y haciendo énfasis en la conexión entre la matemática escolar y la vida cotidiana, la propuesta curricular actual de matemáticas en el nivel medio superior reafirma la propuesta de fomentar en los estudiantes, entre otras más, la capacidad de aprender a aprender (SEP, 2017). Pozo, Pérez, Domínguez, Gómez y Postigo (1998) señalan las situaciones de resolución de problemas como una de las vías más asequibles para conseguir esta capacidad.

Como parte de esta reforma educativa, en los planes de estudio de Educación Media Superior para Matemáticas II, indican en uno de sus propósitos, que los estudiantes vinculen las matemáticas que aprenden en la escuela con el mundo en que viven (SEP, 2017). En particular, para geometría, la medición de distancias inaccesibles es uno de los contenidos curriculares en los que se hace explícito el uso de la matemática para la resolución de problemas reales (SEP, 2017; Colegio Superior para la Educación Integral Intercultural de Oaxaca [CSEIIO], 2014).

Sin embargo, Montiel y Jácome (2014) señalan que las propuestas en los textos escolares sobre medición de distancias inaccesibles reducen la actividad de medición a la sustitución de datos sobre una fórmula preestablecida, en la cual no hay necesidad real de medir, o bien utilizan en algunas de sus propuestas medidas que no son reales. Forzando así la realidad para adaptarla a la matemática escolar o evocando situaciones realistas, pero sin un vínculo significativo con la vida cotidiana (Cantoral, Montiel y Reyes-Gasperini, 2015).

### **1.1.1 Pregunta general de investigación**

Situados en el contexto escolar, en Oaxaca, estado situado al suroeste de México, como subsistema educativo en el nivel medio superior se encuentra el Modelo Educativo Integral Indígena (CSEIIO, 2014), que rige a los Bachilleratos Integrales Comunitarios. En este modelo educativo, la matemática tiene sus principios metodológicos basados en la resolución y argumentación de problemas, referenciados a la vida cotidiana del estudiante y la comunidad, considerando las particularidades de las regiones y localidades donde se ubican los planteles, por lo que es necesario diseñar tareas escolares que cumplan con los lineamientos curriculares tanto a nivel nacional como del subsistema estatal.

Desde esta perspectiva, una característica relevante a considerar en los problemas basados en la realidad es su nivel de autenticidad. Palm (2008), describe la autenticidad de una tarea escolar como el grado en que se puede transportar esa tarea a una situación real, con la condición de que los aspectos más importantes de la situación deben ser simulados con alto nivel de realismo.

Palm (2008) muestra que los alumnos que responden a tareas con alto nivel de autenticidad utilizan conocimientos reales y obtienen respuestas más exactas y consistentes con la realidad que los que alumnos que trabajan con problemas con un nivel de autenticidad menor.

El modelo de Polya (1965), que engloba las fases en la resolución de problemas y los métodos heurísticos para buscar esta solución, ha sido exportado a otras áreas por diversos autores hasta el punto en que ha quedado instituido como método general de resolución de tareas independientemente de su contenido (Pozo *et al.*, 1998).

Centrado en las condiciones descritas en los párrafos anteriores, el presente trabajo parte de la siguiente pregunta general de investigación:

¿Cómo diseñar una tarea matemática considerando los aspectos de la teoría de situaciones auténticas de Torulf Palm y el análisis de las estrategias presentes en cada fase del modelo de resolución de problemas de Polya al implementarlo en un grupo de estudiantes de bachillerato?

### **1.1.2 Preguntas específicas**

1. ¿Cómo diseñar una tarea auténtica para un grupo de estudiantes del Bachillerato Integral Comunitario 44 de Santa María Yaviche, basada en la estimación del volumen de madera contenida en árboles en pie y trozas?
2. ¿Qué aspectos de la teoría de situaciones auténticas de Palm cumple la tarea diseñada sobre la cubicación de la madera?
3. ¿Qué estrategias se pueden presentar en cada fase del modelo del Polya durante el proceso de resolución de la tarea diseñada sobre la cubicación de la madera?

## **1.2 Objetivos**

### **1.2.1 Objetivo general**

Diseñar e implementar una tarea matemática asociada a un contexto cercano a la cotidianidad de un grupo de estudiantes de bachillerato considerando los aspectos de la teoría de situaciones auténticas de Palm y el análisis de las estrategias del modelo de resolución de problemas de Polya.

### **1.2.2 Objetivos específicos**

1. Diseñar una tarea matemática auténtica proveniente del contexto cotidiano de un grupo de estudiantes de bachillerato basada en el cálculo de volúmenes de madera de árboles en pie y en trozas.
2. Analizar qué aspectos de la teoría de situaciones auténticas de Palm se cumplen en la tarea matemática diseñada sobre la cubicación de la madera.
3. Identificar qué estrategias se presentan durante el proceso de resolución de la tarea auténtica sobre la cubicación forestal, considerando el análisis a partir del modelo de Polya.

### **1.3 Justificación**

En el contexto escolar se hace énfasis en el trabajo con tareas que permitan atender los aspectos relacionados con la comprensión e interpretación de los estudiantes sobre el mundo que los rodea, lo cual, no solo se refiere a saber hacer algo afuera de la escuela, sino a mostrar un desempeño significativo en situaciones y escenarios que permitan indicar que los estudiantes han logrado comprender, solucionar o intervenir en asuntos de verdadera pertinencia y trascendencia, tanto a nivel personal como social.

Ante este panorama en el ámbito educativo, es necesario el diseño de tareas basadas en prácticas que permitan propiciar en los estudiantes un aprendizaje significativo a través de la participación activa en la búsqueda de estrategias adecuadas para encontrar y proponer respuestas a preguntas no sólo escolares, sino también que den alternativas de solución a problemas de su realidad cotidiana.

Considerando lo descrito anteriormente y aplicando los conocimientos adquiridos durante la maestría, en la presente investigación se realiza el diseño de una tarea auténtica basada en un problema geométrico presente en el contexto cotidiano de los estudiantes, el desconocimiento sobre las técnicas básicas de la cubicación forestal.

La idea original parte de una necesidad colectiva de los habitantes de la comunidad, la cual es identificada por el grupo de estudiantes a través de un diagnóstico comunitario, lo que permite diseñar una tarea en el ámbito escolar basada en una situación que se presenta en la vida cotidiana de la población, por su parte, los estudiantes con los conocimientos adquiridos durante su tránsito escolar puedan proponer alternativas de solución que coincidan con la forma en que una persona se enfrenta a tal situación en la vida real. Ante estas condiciones, para el diseño de la tarea escolar se consideró la teoría de Palm como un referente para analizar los aspectos que debe cubrir el diseño de tareas auténticas.

## Capítulo 2

### MARCO TEÓRICO

Las tareas son un elemento fundamental en la caracterización de cualquier currículo, ya que determinan en gran medida las oportunidades efectivas de aprendizaje ofrecidas a los alumnos (Ponte, 2004).

Según Díaz y Poblete (2001), una de las definiciones más comúnmente usadas de la resolución de problemas, indica que la tarea debe ser compleja si se va a referir a ella como un problema. Considerando esta definición, una tarea es un problema para un alumno cuando requiere de una solución bajo ciertas condiciones específicas, si el alumno comprende la tarea, pero no encuentra una estrategia inmediata para su solución, y finalmente, si es motivado para buscar la solución.

#### 2.1 Resolución de problemas

Una característica en la resolución de problemas, indican Díaz y Poblete (2001), es la capacidad para transformar elementos de un problema de una modalidad a otra, identificando al alumno con el nivel de comprensión del problema, solicitándoles que traduzca y transforme un enunciado verbal en expresiones matemáticas sin resolver aún el problema. Esto conlleva seguir una adecuada línea de razonamiento en la que finalmente surge el lenguaje matemático. Los mismos autores señalan que es así como la resolución de problemas aproxima la matemática a las situaciones cotidianas vinculadas a diferentes contextos.

En la literatura relacionada con el uso de heurísticas, se establece como principal referente en la resolución de problemas a Polya (1965), quien, utilizando el método introspectivo y basado en su propia experiencia, identifica cuatro etapas dentro de este proceso: comprender el problema, concebir un plan, ejecutar el plan y examinar la solución obtenida (visión retrospectiva).

Los planes, metas y submetas que se puede plantear un estudiante en el camino de búsqueda a lo largo del problema se denominan *estrategias o heurísticos de solución de problemas*. Los procedimientos de transformación de la información que requieren estos planes, metas y submetas son denominados *reglas, algoritmos y operaciones* (Pozo et al., 1998).

### **2.1.1 Fases en la resolución de problemas**

#### *Fase 1: Comprender el problema*

Más allá de entender las palabras, el lenguaje o los símbolos en los que está planteado se debe también asumir la situación como un problema y adquirir una disposición de búsqueda de una solución, se comprende el problema cuando se es capaz de reproducirlo con las propias palabras y de analizar sus elementos esenciales, por lo que es necesario que el problema contenga aspectos ya conocidos que permitan orientar la búsqueda de la solución y guiar hacia la traducción a una serie de expresiones y símbolos matemáticos (Pozo *et al.*, 1998; Santos, 1996; Polya, 1965).

La traducción exige la presencia de conocimientos matemáticos, lingüísticos, semánticos y esquemáticos que faciliten la comprensión de la tarea, permitan su representación en términos matemáticos y ayuden a elaborar un plan para su solución (Pérez y Ramírez, 2011).

En esta fase se ubican las estrategias que ayudan a representar y entender la situación y las condiciones del problema, por lo que el enunciado verbal del problema debe ser comprendido por el estudiante, identificando las principales partes del problema, diferenciando cuál es la incógnita que debe resolver, cuáles son los datos y cuál es la condición. Si en el problema se le suministran datos o si hay alguna figura relacionada al problema deberá dibujar la figura y destacar en ella la incógnita y los datos. Es necesario dar nombres a dichos elementos e introducir una notación adecuada (Polya, 1965; Pérez y Ramírez, 2011).

#### *Fase 2: Concebir un plan*

Es la parte fundamental del proceso de resolución de problemas (Polya, 1965). Al comprender la situación planteada e identificar la meta a la que se quiere llegar, a partir de ideas basadas en experiencias pasadas y en los conocimientos adquiridos previamente, se planifican las acciones que conducirán a ésta.

En esta fase es necesario abordar cuestiones como para qué sirven los datos que aparecen en el enunciado, qué puede calcularse a partir de ellos, qué razonamientos o construcciones se tiene que efectuar para determinar la incógnita, qué operaciones utilizar y en qué orden se debe proceder (Polya, 1965; Díaz y Díaz, 2018).

Al diseñar un plan para la solución de un problema no siempre se sigue una secuencia lineal, debido a que durante el proceso pueden surgir otros problemas, lo cual conduce al diseño de nuevos planes. La eficiencia para llegar a la meta durante la solución de un problema no solo depende de la disposición de estrategias o habilidades generales, también de los conocimientos específicos útiles para solucionar ese problema (Pozo *et al.*, 1998; Santos, 1996; Polya, 1965).

Para la solución de un problema de matemáticas son importantes los conocimientos previamente adquiridos como, los problemas resueltos, teoremas demostrados, así como recordar algún problema ya resuelto que esté estrechamente relacionado con el problema actual y que tenga la misma incógnita o una similar. Una modificación al problema puede conducirnos a algún otro problema auxiliar apropiado (Polya, 1965).

### *Fase 3: Ejecutar el plan*

El proceso de solución exige un conocimiento heurístico o estratégico que oriente hacia el establecimiento de las metas y los medios útiles para alcanzarlas y un conocimiento operativo o algorítmico que nos permita llevar a cabo nuestras estrategias o planes. Es importante que se insista a que el alumno verifique cada paso en el proceso de resolución (Pozo *et al.*, 1998; Santos, 1996; Polya, 1965).

### *Fase 4: Examinar la solución obtenida (visión retrospectiva)*

Reconsiderando la solución, reexaminando el resultado y el camino que condujo al mismo se pueden consolidar los conocimientos y desarrollar aptitudes para resolver problemas, mejorar y comprender la solución (Polya, 1965). El examinar la solución obtenida le permite al estudiante evaluar si se ha alcanzado la meta, lo que implica revisar el procedimiento. Desde el punto de vista didáctico, le ayuda al estudiante a hacerse consciente de las estrategias y reglas empleadas, mejorando con esto su capacidad heurística (Pozo *et al.*, 1998; Santos, 1996; Polya, 1965).

Estas cuatro fases indicadas en el modelo de Polya (1965), proporcionan un esquema general, en el cual es preciso desarrollar para cada área y tipo de problema, es decir, acompañadas de un conocimiento contextual específico. Dado el estrecho vínculo entre el dominio de habilidades procedimentales y la adquisición de conocimiento conceptual (Pozo *et al.*, 1998).

Polya (1965) reconoce el papel de las preguntas que puede formular el docente en forma de reglas o procedimientos para impulsar la actividad mental en la búsqueda de la vía de solución, pueden darse como indicaciones, sugerencias o simplemente como preguntas que movilizan la actividad mental y promuevan la realización de acciones y operaciones por parte del estudiante.

De acuerdo con Fernández (2003, citado en Díaz y Díaz, 2018), la exploración de pluralidad de alternativas con coherencia lógica, la búsqueda de relaciones y el empleo de acciones mentales adecuadas para cada situación, quedan comprendidas dentro de los procesos lógicos, los heurísticos y la actividad metacognitiva, tres esferas esenciales en la resolución de problemas.

Manteniendo la esencia de la estructura de Polya en cuatro fases, los procesos lógicos, heurísticos y metacognitivos indicados por Fernández (2003, citado en, Díaz y Díaz, 2018) y Díaz y Díaz (2018) proponen un esquema basado en preguntas que nos permiten guiar al estudiante durante el proceso de resolución del problema.

### **2.1.2 Estrategias en la resolución de problemas**

La heurística se define como un conjunto de estrategias que permite al estudiante en general, resolver problemas recurriendo a la simulación, a hacer diagramas, usar analogías, al uso de materiales concretos, a preguntarse una y otra vez con respecto a los datos, incógnitas, condiciones que se presenta, a la práctica del ensayo y el error, entre otras. El uso de estos procesos le permite que razone constantemente porque está utilizando los conocimientos matemáticos adecuados a los problemas que debe resolver (Polya, 1965).

La estrategia se desarrolla para proceder de acuerdo a la situación y se acomoda según las circunstancias, por tanto, no sigue los mismos pasos siempre, sino que los adapta para obtener mejores resultados en la consecución de metas fijadas.

*Estrategias presentes durante el proceso de resolución del problema* (Pozo et al., 1998; Santos, 1996; Polya, 1965).

*Descomponer un problema en casos más simples.* Consiste en simplificar el problema, recomponer o recombinar sus elementos de un modo diferente, resolverlo con cantidades pequeñas o tratar de plantearse uno relacionado pero más sencillo o accesible.

*Dibujar alguna figura relacionada al problema y destacar en ella la incógnita y los datos.* Permite representar los datos o información que proporciona el problema, visualizar mejor la situación planteada y contribuye a que el estudiante comprenda y genera nuevas ideas de resolución.

*Nombrar elementos presentes en la figura e introducir una notación adecuada.* Una adecuada notación deber ser clara, concisa y fácil, evitar ambigüedades.

*Recordar algún problema ya resuelto que esté estrechamente relacionado con el problema actual, que tenga la misma incógnita o similar.*

*Modificar el problema de forma que nos pueda conducir a algún otro problema auxiliar apropiado.*

*Tratar de resolver primero algún problema similar.*

*Verificar cada paso del razonamiento*

*Reconsiderar la solución, reexaminar el resultado y el camino que conduce a la solución.*

*Identificar la existencia de otro medio para asegurarse de la exactitud del resultado*

*Utilizar el resultado o el método para resolver algún otro problema.*

## **2.2 Contexto de un problema**

Las posturas teóricas indican que la resolución de problemas es una experiencia didáctica que favorece la construcción del conocimiento, por lo que es importante definir qué es un problema.

Un problema, para Codina y Rivera (2001), es una tarea para la cual el individuo o grupo que se enfrenta a ella quiere o necesita encontrar una solución, no hay un procedimiento fácilmente accesible que garantice o determine completamente la solución, y el individuo o grupo debe realizar intentos para encontrar la solución.

Pozo et al. (1998), hacen referencia al término problema, como situaciones muy diferentes en función de las características de las personas que se encuentren en ellas, de sus expectativas y del

contexto en que se produce la situación. Ante esto, es posible que una misma situación constituya un problema para una persona mientras que para otra ese problema no existe, bien porque carece de interés por la situación planteada o porque posee los mecanismos para resolverla sin recursos cognitivos adicionales, con lo cual, perdería la esencia de ser un problema.

Los problemas, Santos (1996), los define como un medio para que los estudiantes discutan y defiendan sus ideas, analicen el método de solución, utilicen argumentos matemáticos o propongan contraejemplos que contradigan algún resultado, por lo que los problemas deben tener el potencial para que los estudiantes tengan la oportunidad de conectar las ideas matemáticas, así como evaluar y discutir las estrategias que aparezcan durante el proceso de resolución.

Considerando las definiciones anteriormente indicadas, una situación dada puede ser concebida como un problema en el momento en que se realiza un reconocimiento de su existencia, así como la no disposición directa o automática de procedimientos que permiten su solución inmediata, a lo cual amerita un proceso de reflexión sobre la secuencia de pasos a seguir para la solución.

En el contenido del trabajo se hace referencia a los siguientes términos, resolución de problemas y solución. La resolución de problemas como la acción o el proceso que transcurre desde que una persona se enfrenta a un problema hasta que lo soluciona y valora la respuesta que da al mismo, tiene como fin una meta que es la solución.

La solución designará el resultado o efecto de la acción de resolver, siempre y cuando verifique las condiciones supuestas en el problema, ambas definiciones son dadas en Codina y Rivera (2001). Como lo indican los mismos autores, en una instrucción basada en la resolución de problemas se debe poner más atención al proceso (la resolución) que a la solución misma.

En la literatura sobre la implementación de las ideas asociadas a la resolución de problemas en el aula, Santos (1996, 2007) identifica cuatro actividades de instrucción importantes: exposición por parte del instructor, discusión en grupos pequeños, presentaciones individuales por parte de los estudiantes y participación grupal.

El mismo autor resalta la importancia de enseñar a resolver problemas e inducir al estudiante a plantearse problemas, considerar la realidad como un problema digno de ser investigado y estudiado.

En los problemas verbales, se hace referencia a un conjunto de conocimientos relacionados con un contexto determinado. Este contexto puede ser puramente matemático, como en el problema clásico de sumar los cien primeros números naturales; puede ser un contexto real, en el sentido de que esté directamente relacionado con una situación concreta en el mundo real o puede ser un contexto imaginario.

En la literatura se indica de manera frecuente la necesidad de introducir problemas contextualizados. Según Arcavi (2002, citado en Albarracín y Gorgorió, 2013), el contexto cotidiano en los problemas puede sugerir enfoques diferentes para su resolución, así como destacar aspectos del problema que podrían pasar inadvertidos en un enunciado descontextualizado.

Según Van Den Heuvel-Panhuizen (2005) el introducir un contexto real en un problema pueda aumentar su accesibilidad y puede sugerir diversas estrategias a los estudiantes. Por su parte, Verschaffel (2002, citado en Albarracín y Gorgorió, 2013) indica que el objetivo de introducir los problemas con enunciados literales y contexto real es acercar la realidad a las aulas de matemáticas y crear oportunidades para practicar diferentes aspectos de la resolución de problemas sin los inconvenientes del contacto directo con la situación del mundo real.

Para Winter (1994, citado en Albarracín y Gorgorió, 2013), la resolución de problemas con contexto real incluye la matematización de una situación no matemática, que implica la construcción de un modelo matemático que respete la situación real y que incluya el cálculo de la solución y la transferencia del resultado obtenido a partir del modelo a la situación real y que puede estar presente en la producción de los estudiantes.

### **2.3 Problemas reales y autenticidad**

En parte de la literatura sobre resolución de problemas, no se diferencia el tipo de contexto de un problema y se tiende a utilizar la nomenclatura genérica de problemas reales. Si nos centramos en los diferentes tipos de problemas en función de su nivel de contextualización, podemos distinguir entre problemas completamente descontextualizados, problemas escolares contextualizados y problemas reales.

Martínez (2008, citado en Albarracín y Gorgorió, 2013) distingue los siguientes tipos de contexto para un problema:

*Contexto real*: se refiere a la práctica real de las matemáticas, al entorno sociocultural donde esta práctica tiene lugar.

*Contexto simulado*: tiene su origen o fuente en un contexto real, es una representación del contexto real y reproduce parte de sus características.

*Contexto evocado*: se refiere a situaciones propuestas por el profesor en el aula y que permiten imaginar la situación en la que se dan los hechos representados.

Van den Heuvel-Panhuizen (2005), citado en Palm (2006) resalta la importancia del contexto de la tarea en la matematización, de manera que los estudiantes sean capaces de imaginar la situación o evento para que puedan hacer uso de sus propias experiencias y conocimientos.

Niss (1992) citado en Palm (2006) define una situación extra-matemática auténtica como aquella que está incrustada en una práctica real existente o área temática fuera de las matemáticas, y que trata sobre objetos, fenómenos o problemas que son genuinos para esa área y reconocidos como tales por las personas que trabajan en tal situación.

Palm (2006) propone un marco para ver la concordancia entre problemas verbales de las matemáticas escolares y las situaciones del mundo real, ante el problema de la falta de realismo en las tareas matemáticas contextualizadas. Dicho marco comprende un conjunto de aspectos de las situaciones de la vida real que deben ser considerados en las simulaciones de situaciones de la vida real.

Una característica relevante a considerar en los problemas basados en la realidad es su nivel de autenticidad. Palm (2008) describe la autenticidad de una tarea escolar como el grado en que se puede transportar esa tarea a una situación real, con la condición de que los aspectos más importantes de la situación deben ser simulados con alto nivel de realismo.

En el mismo artículo, Palm presenta un estudio realizado con el objetivo de determinar la influencia de la autenticidad del enunciado de los problemas propuestos sobre las respuestas dadas por los alumnos.

En su estudio, Palm (2008) muestra que los alumnos que responden a cuestiones con un mayor nivel de autenticidad utilizan conocimientos reales presentes en su día a día y obtienen respuestas más exactas y consistentes con la realidad que los que alumnos que trabajan con problemas con un nivel de autenticidad menor.

En un artículo anterior, Palm (2006) hace una propuesta de los aspectos de la vida real que son relevantes para los problemas reales. Centra su atención en el tipo de acontecimientos en los que se enmarca el problema, en la pregunta, los datos que contiene, el tipo de enunciado, las estrategias de resolución, las circunstancias y condicionantes en el aula, los requisitos que debe cumplir la solución y el propósito del problema.

### 2.3.1 Teoría de las situaciones auténticas

En la teoría local de las situaciones de tareas auténticas, Palm (2006) da un marco para ver la concordancia entre problemas verbales de las matemáticas escolares y las situaciones del mundo real. Tal marco teórico, abarca un conjunto de aspectos y sub-aspectos que son importantes a considerar en la simulación de situaciones del mundo real que se tratan de plasmar en problemas matemáticos. Los aspectos indicados en la tabla 1.

Tabla 1. Aspectos de las situaciones del mundo real que se consideran importantes en su simulación (Palm, 2006)

<p><b>A. Evento</b></p> <p><b>B. Pregunta</b></p> <p><b>C. Información/Datos</b></p> <p>C1. Existencia</p> <p>C2. Realidad</p> <p>C3. Especificidad</p> <p><b>D. Presentación</b></p> <p>D1. Modo</p> <p>D2. Uso de lenguaje</p> <p><b>E. Estrategias de solución</b></p> <p>E1. Disponibilidad</p> <p>E2. Experiencia plausible</p>	<p><b>F. Circunstancias</b></p> <p>F1. Disponibilidad de herramientas externas</p> <p>F2. Dirección</p> <p>F3. Consulta y colaboración</p> <p>F4. Oportunidades de discusión</p> <p>F5. Tiempo</p> <p>F6. Consecuencias de la solución de éxito de la tarea (o fracaso)</p> <p><b>G. Requisitos de la solución</b></p> <p><b>H. Propósito en el contexto figurado</b></p>
--	---

**A. Evento.** Este aspecto se refiere al evento descrito en la tarea. En la simulación de una situación de la vida real es un requisito previo que el evento descrito en la tarea escolar ha tenido lugar o podría suceder en la vida real más allá de la escuela.

**B. Pregunta.** Este aspecto se refiere a la concordancia entre la asignación dada en la tarea escolar y la situación extraescolar correspondiente. La pregunta en la tarea escolar debe existir y presentarse en el evento del mundo real descrito, requisito previo para la simulación en la tarea escolar. La pregunta descrita en la tarea debe ser la que se han pedido o se puede pedir en el evento real, cuyas respuestas son de valor práctico o de interés para los demás, evitando aquellas preguntas que no se han pedido y que no se pedirían en el evento descrito en la tarea dentro del mundo real.

**C. Datos e Información.** Este aspecto se refiere a la información (incluyendo valores, modelos y condiciones dadas) en los que puede basarse la solución a un problema, incluye los tres sub-aspectos siguientes:

**C1. Existencia de información/datos.** Si este aspecto se simula con alta fidelidad, entonces el mismo tipo de información disponible en la situación de la vida real simulada también es accesible en la situación escolar. Las diferencias en la información accesible pueden surgir si la información a la que se tiene acceso en la situación simulada no se da, no está disponible, o bien, si se añade información adicional importante en la tarea escolar. La falta de información en las tareas escolares se da también cuando la descripción de la situación que se simula es tan corta en características contextuales que los estudiantes no reciben una visión conjunta clara de la situación, si se ha simplificado considerablemente o se ha hecho más difícil que en la situación simulada. Ocasionando una gran discrepancia entre las matemáticas aplicables en la situación escolar y aquellas que se utilizan fuera de la escuela.

**C2. Realismo de la información/datos.** Este sub-aspecto se refiere al realismo de los valores dados en las tareas escolares (en el sentido de idéntico o muy cerca de los números y valores dados en la situación simulada), aspecto de suma importancia en simulaciones de situaciones de la vida real.

**C3. Especificidad de la información/datos.** Se refiere a la coincidencia en la especificidad de la información disponible en la situación escolar y la situación simulada. La falta de especificidad puede producir un contexto ligeramente diferente y por lo tanto la estrategia a elegir para su solución. El texto de la tarea escolar describe una situación específica en la que los sujetos, objetos y lugares en el contexto de la tarea son específicos.

**D. Presentación.** El aspecto de la presentación de la tarea se refiere a la manera en que la tarea se transmite o se comunica a los estudiantes. Este aspecto se divide en dos sub-aspectos:

**D1. Modo.** El modo en que se transmite la tarea se refiere, por ejemplo, a que si el problema se comunica a los estudiantes verbalmente o en forma escrita y si la información se presenta en diagramas o tablas. Dado que, las competencias matemáticas requeridas para manejar representaciones gráficas no son iguales a las requeridas para manejar las representaciones verbales, la simulación de este aspecto puede influenciar las matemáticas requeridas o posibles a utilizar.

**D2. Uso del Lenguaje.** Este aspecto se refiere a la terminología, estructura de la oración y la cantidad de texto que se utiliza en la presentación de la situación en la tarea. Es importante que el lenguaje usado en la tarea escolar no sea muy diferente al de la situación en la vida real, pues el uso de términos difíciles puede afectar negativamente las posibilidades de los estudiantes para utilizar las mismas matemáticas que se habrían utilizado en la situación simulada.

**E. Estrategias de solución.** Para ser simulada, la tarea incluye el papel y el propósito de quien resuelve la tarea. Este aspecto se divide en dos sub-aspectos:

**E1. Disponibilidad.** Se refiere a la coincidencia en las estrategias de solución pertinentes disponibles para los estudiantes que resuelven la tarea escolar y las que están disponibles para las personas descritas en la simulación del problema. Si estas estrategias no coinciden, entonces los estudiantes no tienen las mismas posibilidades para utilizar las mismas matemáticas que se habrían podido utilizar en la situación simulada.

**E2. Experiencia plausible (Plausibilidad experimentada).** Se refiere a la coincidencia en las estrategias experimentadas como plausibles (aceptables, válidas o creíbles) tanto para la resolución de la tarea en la situación de la escuela como en la situación simulada.

**F. Circunstancias.** Las circunstancias o factores en el contexto social bajo las cuales la tarea debe ser solucionada se dividen en los sub-aspectos siguientes:

**F1. Disponibilidad de herramientas externas.** Este aspecto se refiere a la disponibilidad de instrumentos concretos como una calculadora, un mapa o una regla. La importancia de este aspecto puede ser visualizado en la diferencia entre las habilidades matemáticas necesarias para calcular el pago mensual de un préstamo de una casa usando un software o solo disponer de una calculadora.

**F2. Dirección.** Este sub-aspecto se refiere a la orientación en forma de consejos explícitos o implícitos. Indicios en las tareas escolares pueden causar gran diferencia en lo que se espera que los estudiantes lleven a cabo, si no se dan también en la tarea simulada.

**F3. Consulta y colaboración.** Las tareas de la vida real se resuelven individualmente, con la colaboración en grupos de trabajo o con la posibilidad de asistencia. En las simulaciones, estas circunstancias deben valorarse, dado que la participación de otras personas puede afectar las habilidades y competencias necesarias para resolver la tarea.

**F4. Oportunidades de la discusión.** Se refiere a las posibilidades de los estudiantes para preguntar y discutir el significado y la comprensión de la tarea. La falta de concordancia entre las situaciones escolares y extraescolares puede causar diferencias en las matemáticas usadas, dado que esta comunicación puede afectar al significado experimentado de la tarea y de las estrategias de soluciones aplicadas.

**F5. Tiempo.** La presión del tiempo puede impedir el éxito en la resolución de la tarea. En las simulaciones, es por lo tanto importante que las restricciones de tiempo sean tales que no causen diferencias significativas en las posibilidades de resolver las tareas escolares en comparación con las situaciones que son simuladas.

**F6. Consecuencias de la solución de éxito de la tarea (o fracaso).** Diferentes soluciones a los problemas pueden tener distintas consecuencias para quienes las resuelven. La presión y la motivación para la solución de la tarea afectan el proceso de resolución, aspecto que se debe considerar en las simulaciones, dado que las personas que se enfrentan a la tarea en la vida real a menudo se sienten motivadas para resolverla.

**G. Requisitos de la solución.** La idea de la solución debe ser interpretada en un sentido amplio, es decir, tanto el método de solución como la respuesta final a una tarea. Los juicios sobre la validez de respuestas y la discusión de los métodos de solución pueden ser requisitos para las soluciones en las tareas escolares. Estos requisitos deben ser coherentes con lo que se considera una solución adecuada en la situación simulada.

**H. Propósito en el contexto figurado.** Todo el método de solución depende del propósito de la tarea en el contexto figurativo, siempre hay un propósito más o menos explícito de la solución de situaciones de trabajo en la vida real. Este aspecto se refiere a esos fines. Por lo tanto, en las simulaciones es esencial que el propósito de la tarea en el contexto figurativo sea tan claro para los estudiantes como para el solucionador de la situación simulada.

## Capítulo 3

### METODOLOGÍA

#### 3.1 Metodología

La presente investigación es de tipo cualitativa. La población del estudio está constituida por 14 estudiantes entre 16 y 19 años inscritos en el Bachillerato Integral Comunitario No. 44, ubicado en Santa María Yaviche, Sierra Norte del estado de Oaxaca, México, localidad catalogada como zona de alta marginación y pobreza.

Este trabajo presenta una propuesta de tres fases no estrictamente secuenciales con cierto grado de retroalimentación mutua.

La primera fase parte del diagnóstico de la comunidad, elemento inicial de información para el desarrollo de esta investigación, el cual, al ser una descripción sobre la comunidad (recursos, problemas, necesidades y alternativas de solución), basada en la recolección y análisis de datos por parte del grupo de estudiantes, permite identificar y proponer alternativas de solución a problemas locales.

El problema identificado a partir del diagnóstico es un problema de medida, el desconocimiento del proceso de cubicación de la madera en sus etapas básicas dentro de la cadena forestal, del árbol en pie y en trozas. En dicho problema la inaccesibilidad matemática es de índole geométrica, ya que se deriva de la diversidad morfológica de los objetos a medir. Se sitúa en el campo de las cubicaciones, es decir, de los métodos para determinar el volumen que ocupa un conjunto de objetos de forma y tamaño distintos, por lo que requiere de los estudiantes el uso de estrategias para realizar la medición del diámetro y la altura de los árboles para calcular su volumen.

El proceso continúa con una etapa de diseño de la tarea matemática escolar, para la cual se realiza la investigación sobre el tema de cubicación forestal en fuentes documentales a través de la recopilación, análisis e interpretación de la información obtenida en fuentes impresas, digitales y audiovisuales.

De manera paralela, se lleva a cabo la investigación de campo a través de la entrevista a una persona involucrada en la actividad descrita en la situación simulada. Ambos tipos de investigación se realizan con la finalidad de verificar que la información y los datos obtenidos a partir de las dos fuentes sean reales, así como los métodos y estrategias de solución que pueda llegar a utilizar un alumno coincida con aquellas que emplean las personas involucradas en la situación planteada en la vida real.

El análisis de autenticidad de la tarea escolar diseñada se realiza considerando los aspectos y subaspectos indicadas en la Teoría de las situaciones auténticas propuestas por Torulf Palm.

La última fase corresponde a la implementación de la tarea diseñada con el grupo de estudiantes, durante 6 sesiones en un tiempo aproximado de 100 a 200 minutos cada sesión, dependiendo de las actividades a desarrollar en el aula o en campo. Para el análisis de los resultados y la identificación de las estrategias presentes durante cada fase del proceso de resolución, según el modelo de Polya, se consideraron las producciones generadas por los estudiantes organizados en equipos.

En el Anexo A se presenta la descripción general de la implementación de la tarea auténtica considerando las características y el formato del subsistema estatal (CSEIIO, 2014) y la estructura de los criterios de instrucción identificados en Santos (2007).

## Capítulo 4

### DISEÑO Y ANÁLISIS DE LA AUTENTICIDAD DEL PROBLEMA

#### 4.1 Diseño de la tarea matemática auténtica basada en la cubicación de la madera

##### 4.1.1 Diagnóstico comunitario

El diagnóstico comunitario es un instrumento empleado por las comunidades para la edificación en colectivo de un conocimiento sobre su realidad, en el que se reconocen los problemas que las afectan, los recursos con los que cuenta y las potencialidades propias de la localidad que puedan ser aprovechadas en beneficio de todos, permite identificar, ordenar y jerarquizar los problemas comunitarios (Mori, 2008).

El diagnóstico no parte de cero, es decir, aprovecha toda la información disponible para conocer a la comunidad y sus problemas, permitiendo identificar problemas específicos particulares y concretos a partir de una participación colectiva consciente y organizada, facilitando el reconocimiento de los problemas y fortalezas que existen en la comunidad de manera que pueda generar conciencia en sus habitantes.

La Tabla 2 indican las etapas del diagnóstico comunitario, en la etapa 1 de evaluación preliminar, la autora de la investigación realizó el análisis de los datos existentes, la revisión documental para la elaboración del diagnóstico comunitario y la adecuación del instrumento. Los estudiantes realizaron las entrevistas, y en coordinación con la autora de la investigación recopilaron y analizaron la información obtenida en las entrevistas, la asamblea y el taller participativo, donde se involucraron a padres de familia, autoridades municipales, comunales y habitantes en general.

Tabla 2. Etapas del diagnóstico comunitario

<b>Diagnóstico comunitario</b>	
<b>Etapa 1: Evaluación preliminar</b>	Análisis de datos
	Revisión documental
	Adecuación de instrumento
	Aplicación de entrevistas
<b>Etapa 2: Diagnóstico participativo</b>	Asamblea
	Taller participativo

En el diagnóstico comunitario nos centramos en los ejes y apartados siguientes (Figura 1):

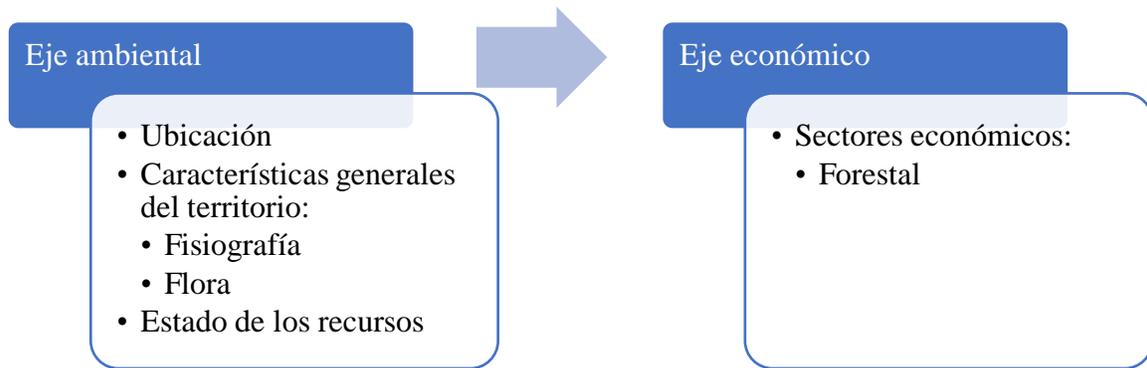


Figura 1. Ejes y apartados analizados en el diagnóstico comunitario

El diagnóstico en los apartados de eje ambiental (ubicación y estado de los recursos) y eje económico (sectores económicos) en síntesis describe lo siguiente:

La Agencia de Santa María Yaviche perteneciente al municipio de Tanetze de Zaragoza, distrito de Villa Alta, región Sierra Norte del Estado de Oaxaca, es una comunidad catalogada con alta marginación, localizada en las coordenadas 17° 24' 2.88" N, 96° 17' 40.92" W, consta con poco más de 700 habitantes, la mayoría hablantes del idioma zapoteco como lengua materna y desde hace varias décadas prohibido en las escuelas de nivel básico de la localidad.

Santa María Yaviche se caracteriza por ser una región montañosa y de pendientes pronunciadas entre altitudes que varían de 700 a 1800 m. s. n. m. La vegetación se encuentra distribuida en tres estratos, la zona alta, aproximadamente 852.28 hectáreas, se encuentra cubierta con vegetación de Pino (*pino strobus variedad Chiapensis*), especie con importancia ambiental y económica para los habitantes, pero beneficiando solo a particulares. Aproximadamente el 80% de la población extrae madera para su venta en trozas, construcción de casas y para combustible (leña), por lo que la zona se identifica por la explotación forestal.

En la asamblea y taller participativo, los habitantes de la localidad resaltaron la importancia y necesidad de conocer las técnicas básicas de cubicación de los productos forestales, principalmente en las dos etapas primarias: el árbol en pie y en trozas. Los estudiantes priorizaron esta necesidad dentro de las problemáticas locales existentes.

#### **4.1.2 Investigación documental de las técnicas básicas de cubicación de la madera**

Para profundizar en el conocimiento de las técnicas básicas de cubicación de los productos forestales primarios fue necesario investigar en libros, artículos, manuales, en formato impreso, digital y audiovisual, el proceso de cubicación de madera y los cambios que ha tenido hasta la actualidad. Los resultados obtenidos en la investigación documental describen a continuación.

Desde hace mucho tiempo se comercializa la madera, y para cuantificarla se recurre a diversos procedimientos que pueden o no tener una base matemática. Tradicionalmente, para estimar el valor de un árbol en pie se consideraba la cantidad de piezas de madera que se podían extraer de él. Para el siglo XVIII se inició la cuantificación de madera considerando el volumen del tronco.

El uso de las estimaciones en la vida cotidiana es muy común, como indica Núñez (2005), principalmente en los casos que requiere ser instantánea o supone una inversión de tiempo mayor por lo que no se puede o bien no se desea calcular. Otro aspecto importante presente en las estimaciones es la inaccesibilidad física, la cual puede ser de tipo espacial, y unida a ella, la inaccesibilidad matemática, por la presencia de valores numéricos muy elevados o debido a formas geométricas irregulares. Otro factor que se encuentra inmerso en la valoración estimativa es el constituido por el conjunto de condiciones que enmarcan la situación, por ejemplo, la accesibilidad al objeto y la disposición o no de algún tipo de instrumento de medida.

La realización de diferentes estimaciones requiere en algunos casos, además de los recursos matemáticos, la utilización de ciertas técnicas y conocimientos provenientes de áreas diversas y especializadas, en este caso específico, de la dendrometría.

En México, Villa Salas (1971) citado en Romahn de la Vega, Ramírez y Treviño (2010) indican que, la dendrometría trata de la medición, cálculo y/o estimaciones de las dimensiones de los árboles como ente individual y bosques desde un punto de vista estático.

En el proceso de *cubicación*, el cual hace referencia a la medición y cuantificación del volumen de la madera en sus principales formas y etapas en la cadena forestal, se requiere hacer mediciones principalmente de diámetro y la altura a lo largo de los árboles y trozas (troncos de árboles sin ramas y con dimensiones normalizadas) y madera aserrada, como se ilustra en la Figura 2.

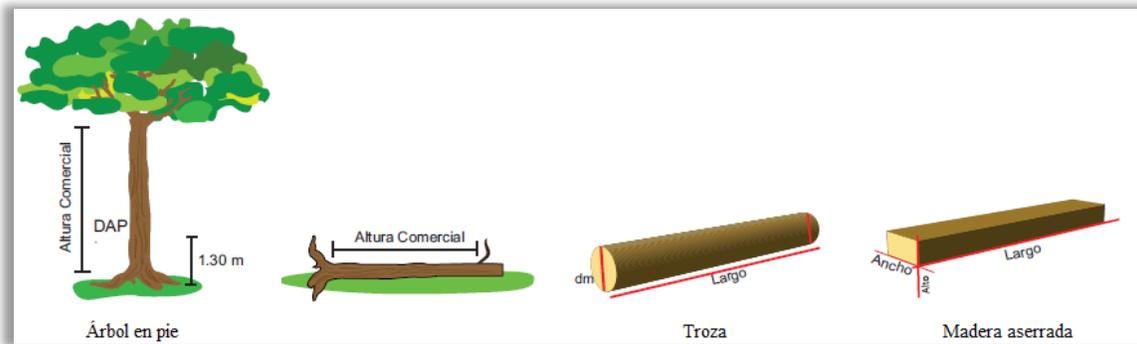


Figura 2. Productos primarios dentro de la cadena forestal (Gutiérrez, Moreno y Villota, 2013)

Frecuentemente, la estimación del volumen de madera de los árboles se basa en el uso de los métodos tradicionales de cubicación de madera que ajustan modelos matemáticos preexistentes para especies y áreas específicas, los cuales permiten estimar el volumen comercial en función de variables obtenidas mediante mediciones simples de una muestra de árboles, como su altura, forma y diámetro a la altura del pecho (Romahn de la Vega, Ramírez y Treviño, 2010; Gutiérrez, Moreno y Villota, 2013).

#### *Medición de variables de árboles en pie*

Los árboles tienen una amplia variedad de tamaños, formas y hábitos de crecimiento, considerando para fines prácticos dos parámetros básicos de medición habitual para caracterizar el tamaño del árbol: altura y diámetro a la altura del pecho.

Es necesario tener claro el tipo de volumen a cuantificar, su necesidad y requerimientos técnicos de aplicación. Se debe de realizar las siguientes medidas para poder determinar el volumen del individuo forestal:

El *diámetro normal* ( $d$ ) o *diámetro a la altura de pecho* (DAP) que se utiliza en el proceso de cubicación, es el diámetro normal medido a 1.30 metros del suelo, su medición depende del tipo de terreno y de las características propias del árbol (ver Figura 3), como la forma del fuste (parte del tronco que se comercializa, comprendida entre el tocón y el inicio de las primeras ramificaciones de la copa). Los instrumentos que se pueden utilizar son la cinta métrica o la cinta diamétrica.

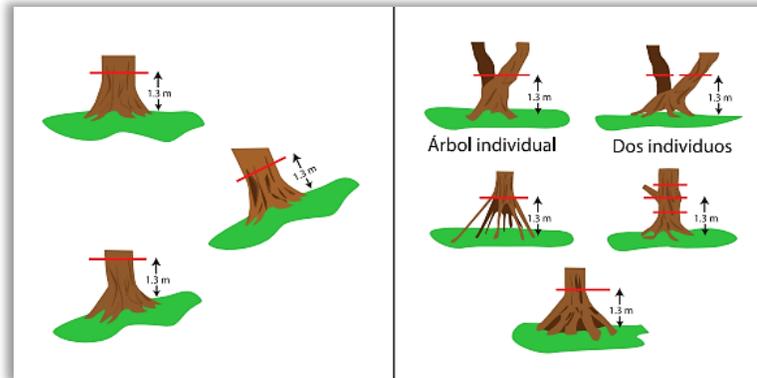


Figura 3. Tipo de terreno y características del árbol (Gutiérrez, Moreno y Villota, 2013)

La *altura total* de un árbol se define como la diferencia de nivel entre la base del árbol y el ápice. La *altura comercial*, Figura. 4, se define como la longitud del fuste que puede ser aprovechado comercialmente.

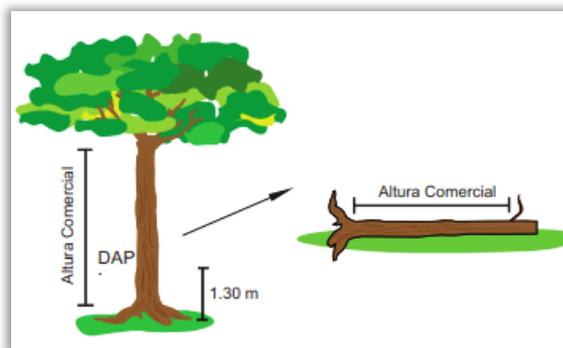


Figura 4. Altura comercial del árbol (Gutiérrez, Moreno y Villota, 2013)

Para la medición de alturas de árboles se emplean dos procedimientos básicos: directo e indirecto.

Para realizar la medición directa de la altura se escala el árbol y se efectúa la toma de longitud mediante el empleo de cintas métricas o pértigas graduadas. También cabe, en su caso, el derribo del árbol. Apeado éste, se mide la longitud de su tronco o fuste y se obtiene la altura. Este método no es muy común, casi inaplicable, dadas las condiciones del terreno y del ejemplar mismo.

Generalmente se recurre al empleo de los procedimientos indirectos para medición de la altura. Dichos procedimientos incluyen varios métodos donde se recurre a principios geométricos o trigonométricos. El método geométrico se funda en el conocimiento de relaciones de triángulos semejantes y el trigonométrico en el de los ángulos que forman con el horizonte las visuales dirigidas a la cima y al pie del árbol.

Considerando las condiciones del terreno y la posición del observador se pueden presentar tres casos: visual del observador entre la cima y la base del árbol, visual del observador por debajo de la base del árbol y visual del observador por encima del ápice del árbol. Para un ejemplo ilustrativo en la Figura 5 se muestra el primer caso, siendo este el más usual.

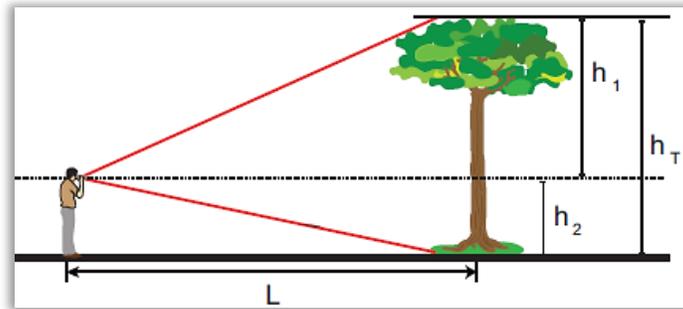


Figura 5. Visual del observador entre la cima y la base del árbol (Gutiérrez, Moreno y Villota, 2013)

#### Cálculo del volumen de árboles en pie

El *volumen total* se define como la cantidad de madera estimada en metros cúbicos a partir del tocón hasta el ápice del árbol. El *volumen comercial* no incluye las ramas, partes afectadas del individuo y segmentos delgados del fuste.

La fórmula propuesta para determinar el volumen de los árboles en pie es:

$$V_{pie} = \frac{\pi}{4} DAP^2 (h_T \text{ o } h_C) f$$

*DAP*: Diámetro a la altura de pecho

*h<sub>T</sub>* o *h<sub>C</sub>*: Altura total o altura comercial

*f*: Factor de forma (indicado en la Tabla 3).

Tabla 3. Factores de forma según la característica del fuste (Gutiérrez, Moreno y Villota, 2013).

Tipo dendrométrico del fuste	Factor de forma
Cilíndrico	$f \geq 0.75$
Paraboloide	$0.74 \geq f \geq 0.4$
Cono	$0.39 \geq f \geq 0.27$
Neiloide	$f < 0.38$

La forma común para el fuste en el pino strobus variedad chiapensis es el cilíndrico.

*Cálculo del volumen de madera en trozas*

Teniendo en cuenta que las diferentes partes del fuste de un árbol no presentan formas geométricas bien definidas tales como cilindros, conos, paraboloides o neiloides, los métodos tradicionales se basan en el principio de medir el diámetro a diferentes alturas y calculan el volumen del árbol a partir de dichas mediciones. Se asume que el fuste a cualquier altura posee una circunferencia exacta (Riaño y Lizarazo, 2017).

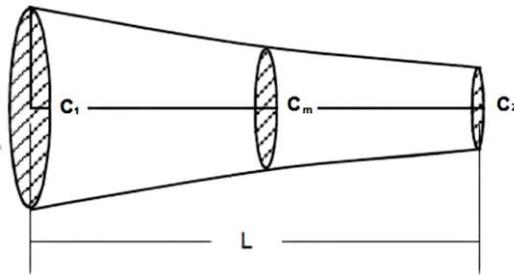


Figura 6. Áreas circulares de una troza (Riaño y Lizarazo, 2017)

*Métodos de estimación del volumen del fuste por secciones*

*Fórmula de Huber.* Considera su nombre a partir de 1837. Es la más sencilla de emplear, solo requiere determinar la circunferencia de la sección media  $C_m$  y su longitud. El volumen se estima así:

$$V = \frac{1}{4\pi} C_m^2 L = \frac{\pi}{4} D_m^2 L$$

*Fórmula de Smalian.* Aparece en 1806. Se deben evaluar las áreas de las secciones extremas  $C_1$  y  $C_2$  y su longitud. El volumen se valora mediante la expresión:

$$V = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{C_1^2 + C_2^2}{2} \right) L = \frac{\pi}{4} \left( \frac{D_1^2 + D_2^2}{2} \right) L$$

*Fórmula de Huber modificada.* Se utiliza cuando se hace difícil o imposible determinar el diámetro de la circunferencia media. Por ello, se miden los diámetros o radios de las secciones extremas  $C_1$  y  $C_2$  y se obtiene su media aritmética para estimar el volumen con la fórmula:

$$V = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{C_1 + C_2}{2} \right)^2 L = \frac{\pi}{4} \left( \frac{D_1 + D_2}{2} \right)^2 L$$

*Volumen de madera en rollo o trozas*

La *troza* se refiere a la madera seccionada del tronco de un árbol, diámetro promedio de la troza ( $D\dot{x}$ ), es igual a la suma del diámetro mayor, más el diámetro menor, dividido entre dos, las medidas deben ser en metros.

$$D\dot{x} = \frac{D_M + D_m}{2}$$

La longitud de la troza, se refiere a la distancia entre los cortes transversales de la troza, debe ser en metros.

La fórmula para calcular el volumen de la troza basada en la propuesta de Smalian, es:

$$V_{troza} = \pi \frac{(D\dot{x})^2}{4} L$$

$V_{troza}$ : Volumen de la troza (metros cúbicos)

$D\dot{x}$ : Diámetro promedio (metros)

$L$ : Longitud de la troza (metros)

El coeficiente de rendimiento de madera aserrada por cada metro cúbico de madera en troza que se utiliza a nivel nacional para las especies forestales maderables es del 52%. Fuente: SEMARNAT, CONAFOR y Colegio de Profesionales Forestales de Oaxaca, A. C. (2015). Estudio de cuenca de abasto para el desarrollo industrial forestal maderable de la región Sierra Juárez, Oaxaca.

### **4.1.3 Entrevista a experto en el tema de la cubicación de la madera**

Como parte de la investigación de campo se realiza la entrevista con un experto en la cubicación de la madera, con la finalidad de verificar que la información y los datos obtenidos a partir de la investigación documental sean reales, así como los métodos y estrategias de solución que pueda llegar a utilizar un alumno coincida con aquellas que emplean las personas involucradas en la situación planteada en la vida real.

#### *Guía de la entrevista*

##### *¿Qué es la cubicación de madera?*

Es el cálculo o la estimación del volumen o la cantidad de madera contenida en un árbol, generalmente pinos.

##### *¿Qué etapas se realizan en la cubicación de la madera en la cadena forestal?*

En las comunidades donde se extrae la madera se realiza en ocasiones la cubicación de la madera del árbol en pie, generalmente se cubican las trozas de madera. En el aserradero se cubica la madera en trozas y en tablas.

#### *Para la cubicación de madera de un árbol en pie,*

##### *¿Qué mediciones son necesarias para este tipo de cubicación?*

La medida de la altura del árbol y el diámetro a la altura de pecho.

##### *¿Cómo se realizan estas mediciones?*

Es muy raro que se hagan mediciones directas cuando se desea calcular la altura, se realizan mediciones indirectas, algunas veces utilizando fórmulas matemáticas o trigonométricas.

##### *¿Requieren de algún instrumento para realizar las mediciones?*

El flexómetro para medir la altura o el largo de la troza, la cinta diamétrica para calcular los diámetros, también se puede utilizar una cinta métrica y hacer los cálculos. Un clinómetro para realiza la medición del ángulo de elevación, puede construirse si no se dispone de alguno.

##### *¿Qué unidades de medida utilizan?*

Para medir la altura en metros, el diámetro también se tiene que convertir a metros, el ángulo en grados, el volumen en metros cúbicos.

*¿Cuál es la fórmula para cubicar?*

La fórmula que se utiliza para calcular el volumen es la de Smalian, y es:

$V_{pic} = 0.7854 (\text{Diámetro a la altura de pecho})^2 (\text{Longitud o altura total})$  Coeficiente de forma

*¿Qué fórmula matemática escolar utilizar para realizar los cálculos?*

Se ajusta la fórmula empleada para calcular el volumen del cilindro, agregando la constante del coeficiente de forma.

*¿De dónde proviene la constante que utilizan?*

De la fórmula para el cálculo del volumen de un cilindro.

*¿Cómo se determina el valor comercial en esta etapa?*

Es difícil determinarlo con exactitud, se tiene que determinar primero que cantidad de madera es aprovechable y de ésta hay que clasificar si la madera que se va a obtener es de primer o segunda, con lo cual varía el precio.

*Para la cubicación de una troza,*

*¿Qué parámetros se necesitan medir para realizar este tipo de cubicación?*

Se requieren medir los dos diámetros de cada extremo de la troza y sacar el promedio. También se puede calcular con cada uno de los diámetros. Se necesita medir también la longitud de la troza.

*¿Requieren de algún instrumento para realizar la medición?*

Solo el flexómetro, ya que la troza es el tronco del árbol ya derribado y por lo tanto las mediciones se pueden realizar de manera directa.

*¿Qué unidades de medida utilizan?*

Para la longitud los metros y el diámetro también es necesario convertir a metros. El volumen en metros cúbicos.

*¿Qué fórmula matemática escolar utilizar para realizar los cálculos?*

Es una constante que es 0.7854 por el diámetro al cuadrado por la longitud, esa es la fórmula para cubicar, eso es todo.

*¿Por qué utilizan el promedio de los diámetros?*

Por la forma que tiene el tronco, si consideramos el diámetro mayor el volumen incrementa en comparación con el volumen que se obtiene por el diámetro menor, por eso es más recomendable sacar los promedios de los dos extremos de la troza.

*¿Cómo se determina el valor comercial en esta etapa?*

Depende de la cantidad de madera aprovechable, generalmente es un 52% del volumen total del árbol. Si la madera es de primera calidad el metro cúbico tendría un valor comercial aproximado de 1200 a 1400 pesos.

*¿Qué conocimientos matemáticos escolares identifica en el desarrollo de la actividad?*

Al realizar las mediciones es importante saber las unidades de medida, conversiones, operaciones básicas, cálculo de porcentajes, fórmulas de perímetro, área y volumen, en especial la fórmula para el cálculo de volumen de un cilindro, medición de ángulos, funciones trigonométricas.

#### **4.1.4 Diseño de la tarea**

Considerando el análisis de la información obtenida a partir de la consulta en fuentes de información y de la entrevista a una persona conocedora del tema, se diseña la siguiente tarea matemática escolar

*“¿Cómo determinar la cantidad de madera comercial contenida en un pino strobus variedad chiapensis en sus etapas primarias dentro de la cadena forestal?”*

#### **4.2 Análisis de la autenticidad del problema**

##### **Teoría de las situaciones auténticas**

La tarea escolar diseñada sobre la cubicación de la madera en los productos forestales primarios se analizó considerando los aspectos y sub-aspectos, indicados en la Tabla 1, los cuales son importantes a considerar en la simulación de situaciones del mundo real propuestos por Palm (2006).

### ***A. Evento.***

*Si lo cumple.* La situación descrita en la tarea escolar se presenta de manera regular en el contexto cotidiano, estudiantes y habitantes en general llegan a enfrentar la situación de un desconocimiento al momento de realizar la cubicación de la madera para su comercialización. En el diagnóstico comunitario, la asamblea y el taller participativo, realizados en Santa María Yaviche, predomina la importancia y necesidad de conocer las técnicas básicas de cubicación de los productos forestales, en las dos etapas primarias: el árbol en pie y en trozas. Los estudiantes priorizaron esta necesidad dentro de los problemas locales existentes para proponer alternativas de solución.

### ***B. Pregunta.***

*Si lo cumple.* Las preguntas implícitas en la tarea escolar existen y se presentan en el mundo real de los estudiantes. Las personas se cuestionan sobre la cantidad de madera contenida en un árbol en pie y en trozas, el volumen de madera aprovechable en cada etapa de la cadena forestal para poder determinar su valor comercial. Para realizar dichas estimaciones se cuestionan sobre el valor de la altura y el diámetro del árbol en pie así como de la longitud y los diámetros de las trozas. Esas mismas preguntas son las que requieren contestar las personas involucradas en la situación real para poder realizar la estimación del volumen de madera en las distintas etapas de la cadena forestal y comercializar los productos.

***C. Información/datos.*** *Se refiere a los tres sub-aspectos siguientes:*

#### ***C1. Existencia.***

*Si lo cumple.* La información y los datos necesarios para determinar el volumen de madera no se proporcionan en el problema ni en la situación en la vida real, pero existen y se obtienen a partir de mediciones directas o indirectas sobre los ejemplares, de la misma manera que se obtienen en la situación real. Se requieren hacer las mediciones del diámetro y la altura a lo largo de los árboles y trozas de árboles de los ejemplares (pinos), por lo que los estudiantes tendrán que recurrir a estrategias que les permitan obtener una estimación de aquellos datos que por su inaccesibilidad no puedan medirse directamente, lo mismo que enfrentan las personas que realizan la actividad de manera cotidiana.

## ***C2. Realismo.***

*Si lo cumple.* La información y los datos se obtienen a partir de las mediciones realizadas directamente con los ejemplares (pinos), por lo que son idénticos o muy cercanos a los valores obtenidos en la situación de la vida real, la constante que utilizan comúnmente se obtiene a partir de expresiones geométricas escolares (volumen de un cilindro) y la constante de forma se puede obtener a partir de los estándares dados por instituciones (en manuales impresos o digitales, disponibles en internet) o bien son datos conocidos y de fácil acceso entre las personas involucradas en la actividad.

## ***C3. Especificidad.***

*Si lo cumple.* Los estudiantes y personas involucradas en la actividad identifican la especie de pino que existe en la localidad y en la región así como la constante de forma que es utilizada para dicha especie, por lo que la información y datos obtenidos o proporcionados son específicos y no es posible que se genere alguna ambigüedad. Los métodos tradicionales se basan en el principio de medir el diámetro a diferentes alturas y calculan el volumen del árbol a partir de dichas mediciones. Se asume también que el fuste a cualquier altura posee una circunferencia exacta.

***D. Presentación.*** *Este aspecto se divide en dos sub-aspectos:*

### ***D1. Modo.***

*Si lo cumple.* El problema se plantea de manera oral y escrita, se presenta una tabla que muestra el factor de forma utilizado para calcular el volumen de dicha especie, el cual es conocido por las personas relacionadas con la actividad en la vida real.

### ***D2. Uso del lenguaje.***

*Si lo cumple.* El lenguaje utilizado comprende los conceptos y terminología básica utilizada para designar las diferentes partes del árbol, dicha terminología es identificada por los estudiantes al estar relacionados de manera cotidiana con la actividad, los términos y conceptos matemáticos utilizados de igual manera son accesibles para los estudiantes dado que tienen que ver con términos y fórmulas geométricas conocidas, por lo que el lenguaje usado en la tarea escolar no es muy diferente al de la situación en la vida real.

***E. Estrategias de solución.*** *Este aspecto se divide en dos sub-aspectos:*

### ***E1. Disponibilidad.***

*Si lo cumple.* Las estrategias de solución disponibles para los estudiantes coinciden con aquellas que están disponibles para las personas involucradas en la actividad descrita en la tarea, en ambos casos pueden recurrir a métodos directos o indirectos de medición, pueden acceder a las fórmulas geométricas conocidas, dado que los métodos tradicionales de cubicación de madera ajustan modelos matemáticos preexistentes.

### ***E2. Experiencia plausible.***

*Si lo cumple.* Para el cálculo de alturas inaccesibles, los libros de textos indican métodos específicos, por ejemplo, para obtener la altura de un árbol se utiliza el “método de la sombras”, método que no es posible aplicar en el contexto real, por lo que fue necesario la construcción de aparatos de medición caseros que les proporcionara la información necesaria para aplicar otros métodos y así determinar la altura del árbol.

Para el cálculo del volumen, se conocen fórmulas geométricas para cuerpos regulares, pero en el contexto real se tienen cuerpos con irregularidades por lo que fue necesario modificar las fórmulas considerando este aspecto. Estas estrategias empleadas coinciden con las que se utilizan en la situación real.

***F. Circunstancias.*** *Se dividen en los sub-aspectos siguientes:*

### ***F1. Disponibilidad de herramientas externas.***

*Si lo cumple.* Las herramientas disponibles en el contexto escolar y que utiliza una persona involucrada en la actividad son: calculadora, computadora, juego geométrico, cinta métrica y flexómetro. Es necesaria la construcción de instrumentos de medición caseros que permitan hacer mediciones similares a las que se realizan con un instrumento profesional, por ejemplo el teodolito o clinómetro y la cinta diamétrica.

Los instrumentos de medición contruidos básicamente tienen la misma función en la actividad escolar y en el contexto real, de manera que les permite obtener a los estudiantes una estimación del volumen de madera.

### ***F2. Dirección.***

*Si lo cumple.* En la situación en la vida real la orientación se da a través de consejos sobre el ejemplar a elegir, en que puntos es más recomendable realizar las mediciones, si es necesario verificar los datos o resultados obtenidos, de la misma manera en la tarea escolar se interactúa con los estudiantes dando estos indicios a través de preguntas guía que permitan orientar y a la vez fomentar la discusión en el equipo de trabajo.

### ***F3. Consulta y colaboración.***

*Si lo cumple.* En la situación real, es necesaria la colaboración para realizar la actividad, así como la verificación de las mediciones y estimaciones realizadas en cada etapa de la cadena forestal, se requiere la participación de todo un equipo para efectuar dicha labor, por lo que al realizar una simulación de esta tarea, el trabajo se ha coordinado en equipos para realizar las actividades y verificar los resultados obtenidos.

### ***F4. Oportunidades de la discusión.***

*Si cumple.* La mayor parte de las actividades que comprenden la tarea se realizan en equipos colaborativos, dado que en el evento real, la actividad se trabaja de manera similar, se discute sobre la elección del ejemplar, la forma de realizar las mediciones, los resultados obtenidos en las mediciones y finalmente la estimación del volumen y costo del ejemplar, los equipos siguieron esta misma dinámica de trabajo.

### ***F5. Tiempo.***

*Si cumple.* El tiempo dedicado a las actividades fue acorde con el tiempo empleado en la situación real, es una actividad que no puede realizarse bajo presión o con tiempo limitado, ya que se trabaja con objetos reales donde están presentes tanto la diversidad morfológica de los objetos a medir como la inaccesibilidad para realizar mediciones directas.

### ***F6. Consecuencias de la solución de éxito de la tarea (o fracaso).***

*Si cumple.* La propuesta para el diseño e implementación de esta tarea surge a partir del interés y necesidad de los estudiantes y de la población en general para estimar el volumen de madera y el valor comercial del mismo en las etapas forestales básicas, los estudiantes priorizaron este problema para proponer alternativas de solución lo más cercanas posible a la realidad.

### ***G. Requisitos de la solución.***

*Si lo cumple.* En la tarea escolar se hace énfasis en el proceso de resolución, más allá de obtener una solución, lo que permite que los estudiantes puedan verificar el resultado y reconsiderar el camino que condujo al mismo, así como su validez en el contexto real. El examinar la solución obtenida le va a permitir evaluar si ha alcanzado la meta, lo que implica revisar el procedimiento, mejorar y comprender la solución obtenida.

***H. Propósito en el contexto figurado.***

*Si cumple.* El propósito está definido para la tarea escolar y es el mismo en la situación simulada, calcular el volumen de madera de un pino (pino strobus variedad Chiapensis), en las etapas básicas de la cadena forestal (árbol en pie y trozas), lo que les permitirá determinar el valor comercial del mismo y poder llegar a una negociación más justa en su comercialización.

## Capítulo 5

### IMPLEMENTACIÓN Y RESULTADOS

#### 5.1 Implementación

##### *Características del grupo*

El grupo está conformado por 14 estudiantes, 42% hombres y 58% mujeres. La mayor parte de ellos en el rango de edad natural para cursar el nivel medio superior (17-19 años). El 71% tiene como lengua materna el zapoteco del rincón Didza Xhidza, como segunda lengua el español. El 43% de los estudiantes provienen de comunidades con alta y muy alta marginación con distancias aproximadas de 1 hasta 9 horas de camino a pie, sin transporte directo. En la época de lluvias, los caminos se vuelven intransitables, por lo que los estudiantes comúnmente se quedan incomunicados y en ocasiones sin apoyo económico de sus familiares.

En el Bachillerato Integral Comunitario No. 44 de Santa María Yaviche, existe un alto índice de eficiencia terminal, en contraste, un porcentaje muy bajo de los estudiantes que egresan continúan sus estudios de nivel superior, por lo que es importante el diseño de tareas auténticas que permitan al estudiante visualizar el carácter funcional de las matemáticas para proponer alternativas de solución a problemas presentes en su entorno.

##### *Implementación*

Durante seis sesiones semanales se implementó la tarea escolar sobre la cubicación de la madera en sus principales etapas de la cadena forestal, árbol en pie y trozas. La implementación consistió en seis sesiones de duración variable de entre 100 a 200 minutos, dependiendo del trabajo solo en aula o en aula y campo.

La organización del grupo fue en tres equipos de trabajo que permanecieron constantes durante la implementación de la tarea escolar, tanto para el trabajo en el aula y en campo, conformados de la siguiente manera (se omitieron intencionalmente sus apellidos como parte de la protección de datos personales):

Equipo 1. Sandra, Jehú, Cleotilde, Faustina y Edrei.

Equipo 2: Brenda, Ericel, Xochiquetzalli, Joaquín y Nilda.

Equipo 3: Francisco, Sunem, Dodo y Gardenia.

Para la etapa de implementación, en la primera sesión se realizó una revisión bibliográfica de los conceptos y terminología básica del tema, exponiéndola ante el grupo.

Como parte del proceso de resolución, los estudiantes organizados en equipos tuvieron la facilidad de investigar el proceso de cubicación forestal o métodos para la estimación de volúmenes. En plenaria se dio la apertura para la discusión de la base matemática de las fórmulas y modelos propuestos donde la autora participó fortaleciendo contenidos pertinentes.

Los estudiantes identificaron los métodos factibles y diseñaron los instrumentos necesarios para realizar las mediciones físicas, plantearon problemas más simples para llegar a la meta, resolvieron los problemas planteados, analizando y comprobaron las propuestas.

Durante el proceso se orientó a los estudiantes a través de preguntas para favorecer su desempeño, analizando las producciones generadas por los equipos de trabajo y en caso de ser necesario, formular otras preguntas que permitieran orientar el proceso de resolución del problema.

Las interacciones de los estudiantes con el problema se realizan en el salón de clases y la actividad práctica fuera del aula. En las sesiones se promueve el trabajo individual, en equipo y la discusión grupal.

En el proceso de resolución del problema, la autora realizó la retroalimentación de manera constante durante el desarrollo de todas las actividades planteadas. Ante la discusión en equipo, las ideas que emergieron en la interacción fueron evaluadas por los integrantes del mismo, la docente y en caso de ser una idea más general, ante todo el grupo.

Las exposiciones sobre temas relacionados con el contexto del problema, propuestas de solución y resultados, así como la realización voluntaria de un video documental con la descripción de todo el proceso de cubicación, fueron estrategias desarrolladas que les permitieron expresar de manera oral y escrita tanto sus ideas como sus resultados.

En las distintas fases de resolución del problema, los estudiantes mostraron producciones iniciales, descripciones, explicaciones y predicciones fueron progresivamente refinadas, revisadas y/o rechazadas con base en la retroalimentación y discusión de sus ideas dentro del equipo y en el grupo.

Con la finalidad de situar y describir los elementos que se consideraron prioritarios para el diseño del problema y las estrategias consideradas para la implementación del problema del contexto real se utilizó el formato de plan de clase usado en el Modelo Educativo Integral Indígena (CSEIIO, 2014), mostrado en el Anexo A.

Respecto a la estructura de la implementación en el aula se realizó considerando las cuatro actividades de instrucción importantes identificadas en Santos (2007): exposición por parte del instructor, discusión en grupos pequeños, presentaciones individuales por parte de los estudiantes y participación grupal, las actividades se encuentra descritas a detalle en el Anexo B.

## **5.2 Resultados**

Las tablas que se agregan en este apartado, muestran las producciones de cada equipo de trabajo, así como una descripción de las conclusiones aportadas por cada equipo después de la discusión que realizaron entre ellos, con base en preguntas realizadas por la docente y las sugeridas por Fernández (2003, citado en, Díaz y Díaz, 2018) y Díaz y Díaz (2018), dentro de cada una de las fases del modelo de Polya (1965), orientadas hacia el tema de la cubicación de la madera.

Es importante mencionar que las preguntas, tal como lo indica Polya (1965), fueron realizadas con el fin de motivar al estudiante en la búsqueda de la vía de solución del problema. A partir de una idea del estudiante o del equipo de trabajo, se orientaba a través de indicaciones, sugerencias o simplemente preguntas que promovieran la realización de ciertas acciones u operaciones por parte del estudiante.

## 5.2.1 Cubicación del árbol en pie

Contenido de la Tabla 4. 1ª. Fase del modelo de Polya: Comprender el problema.

Identificar los conceptos y definiciones involucradas o relacionadas con la información que brinda el problema.

*Estrategias relacionadas*

Descomponer un problema en casos más simples.

Dibujar alguna figura relacionada al problema y destacar en ella la incógnita y los datos.

Nombrar elementos presentes en la figura e introducir una notación adecuada.

Tabla 4. Identificación de estrategias en la 1ª. Fase del modelo de Polya

Indicadores	Preguntas guía de la docente	Estudiantes	Interpretación de la docente
<p><i>Procedimientos lógicos</i>  Lee detalladamente el problema.  Identifica palabras claves que expresan relaciones en el problema.  Identifica las variables que intervienen en el problema.  Expresa con sus palabras la idea fundamental del problema.  Identifica los datos necesarios y suficientes para encontrar la solución.  Reconoce las unidades de medida para expresar los datos y el resultado.</p>	<p>¿De qué trata el problema? ¿Cuál es el objeto físico involucrado? ¿En qué parte de este objeto radica el interés?</p>	<p><b>Equipo 1.</b> Se tiene que determinar el volumen del pino, por lo que se debe considerar el tronco. Tiene forma parecida al cilindro, pero no es igual, es más grueso en la base y más delgado hacia la punta.  <b>Equipo 2.</b> Tenemos que calcular la cantidad de madera que se puede obtener de todo el tronco, desde la base hasta el final.  <b>Equipo 3.</b> Vamos a calcular el volumen del tronco del pino, solo que no debe ser hasta la punta, tenemos que ver donde no tenga muchas ramas y que no sea muy delgado.</p>	<p>Identifican la terminología básica del problema y las relaciones elementales que existen en él.  Indican que para calcular el volumen de la madera es necesario dividirla en etapas.  Expresan con sus propias palabras la idea fundamental del problema, pero desconocen cómo resolverlo.  Dividen el problema principal en dos problemas simples y analizan como primer caso determinar el volumen de madera del árbol en pie.  Reconocen que el problema es sobre cálculo de volumen, específicamente del tronco del pino.  Realizan la búsqueda de información relacionada con el tema de cubicación y temas del área de matemáticas posibles a utilizar durante el proceso de resolución del problema.</p>

<p><i>Procedimientos Heurísticos</i> Identifica de qué tipo de problema se trata a partir de la información de que se dispone. Indica qué se necesita encontrar para responder a la pregunta. Reconoce en sus conocimientos previos la existencia de problemas con las mismas condiciones o similares.</p> <p><i>Procedimientos Metacognitivos</i> Analiza una posible forma de representación de lo que se pide en el problema. Identifica conocimientos propios disponibles para encontrar la solución. Reconoce los conocimientos disponibles y los necesarios para resolver el problema.</p>	¿Cuáles son tus datos?	<b>Equipo 2.</b> No tenemos ningún dato, no tenemos información numérica en el problema. Se supone que tenemos que buscar un pino para poder calcular su volumen. Entonces, ¿Podemos medir?	Reconocen que los datos no se proporcionan y que para obtenerlos deben efectuar mediciones directas.
	¿Cuál es la incógnita o las incógnitas? ¿Cuáles son los datos necesarios para encontrar la solución?	<b>Equipo 1.</b> Si queremos calcular el volumen, lo más parecido que tenemos es un cilindro, pero no sabemos la altura del pino y lo que necesitamos para completar la información de la fórmula es conocer la altura. <b>Equipo 2.</b> La altura y el diámetro también. Pero ninguno de los dos se puede medir directamente. <b>Equipo 3.</b> Se tiene que buscar la manera de medirlo. Necesitamos tomar datos reales. <b>Equipo 2.</b> Para calcular el volumen se necesita la altura, pero no se puede medir directamente. Podemos utilizar el método de sombras. No, no se puede. Por la cantidad de árboles que hay, algunos muy altos otros con muchas ramas, además de que pueden estar separados, pero también muy juntos. También depende del terreno, que tan empinado esté [haciendo referencia a la pendiente del terreno]. Entonces vamos a necesitar otras medidas.	Reconocen como una primera aproximación la fórmula del volumen de un cilindro. Identifican la medida de la altura y del diámetro como incógnitas y que su medición no se puede realizar de manera directa. Con respecto a la medición de la altura, la primera idea de un equipo a partir de su experiencia y conocimientos previos, es utilizar el método de sombras, pero inmediatamente lo desechan, indicando que no es útil en ese caso por la densidad presente en el terreno (refiriéndose a la cantidad de árboles que hay en el área). Reconocen la posibilidad de la existencia de una pendiente en el terreno. Analizan la pertinencia de utilizar algunos métodos e identifican que no es posible dado que el problema tiene más variables de las que usualmente se consideran en los libros de texto.
	¿Con qué letras se designará a la incógnita o incógnitas?	<b>Equipo 2.</b> Designamos con la letra h a la incógnita que indica la medida de la altura del árbol, la letra d para el diámetro. El volumen con la letra V, y con la indicación de que se refiere al volumen del pino en pie. <b>Equipo 1.</b> Usaremos la letra h para indicar la altura. En el caso del tronco vamos a medir el contorno, eso le llamaremos circunferencia y de ahí podemos hacer un despeje para obtener el diámetro o el radio. <b>Equipo 3.</b> La letra x para la altura y V para el volumen y D para el diámetro.	Utilizan para representar a las incógnitas las letras más usuales que observaron en los libros y en las fórmulas provenientes de las fuentes de información que consultaron.
	¿En qué unidades se debe	<b>Equipo 3.</b> El diámetro puede ser en centímetros y la altura si tiene que ser en	Los estudiantes muestran conocimientos de su contexto al tratar de responder esta

	expresar el resultado, o es adimensional?	metros. La madera en trozas se cubica en metros cúbicos, entonces el volumen se dará en metros cúbicos también.	pregunta. Identifican las unidades que son usualmente utilizadas para cada uno de los elementos a medir.
	¿Cuál es la condición que relaciona a los elementos mencionados?	<p><b>Equipo 2.</b> La altura quizá podemos calcularla por otro método, parecido al de sombras, quizá formando un triángulo.</p> <p><b>Equipo 1.</b> El diámetro se relaciona con la circunferencia. Y podemos calcular el volumen de un cilindro con la altura y el radio o algo parecido a un cilindro.</p> <p><b>Equipo 3.</b> Que el volumen va a depender del diámetro y de la altura, para calcular la altura vamos a necesitar otras medidas.</p>	Los equipos de estudiantes identifican que hay una relación posible con la fórmula de volumen de un cilindro y el posible uso como elemento auxiliar, de un triángulo, para calcular la altura.
	¿Es suficiente la condición para determinar la incógnita?	<p><b>Equipo 1.</b> Como no es un cilindro se necesitan tomar más medidas, para ver cómo va reduciendo el grosor del tronco. Entonces vamos a necesitar otra fórmula.</p> <p><b>Equipo 3.</b> Sacar los promedios o utilizar alguna otra fórmula para sacar volumen de un tipo de figura así.</p> <p><b>Equipo 3.</b> No, falta como calcular la altura.</p>	Los estudiantes reconocen que al proponer una vía de solución requieren considerar datos u operaciones adicionales como es el cálculo de un promedio, dada la irregularidad del objeto a medir.

*Contenido de la Tabla 5. Descripción de las producciones iniciales generadas por los equipos de trabajo.*

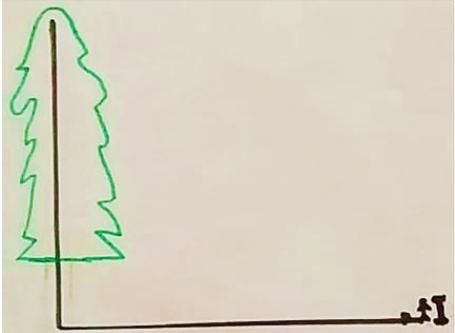
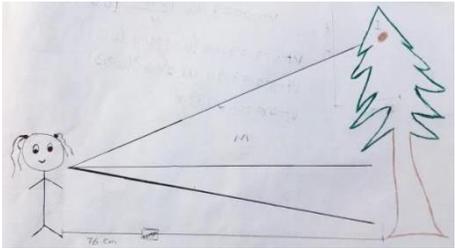
*Estrategias relacionadas*

Descomponer un problema en casos más simples.

Dibujar alguna figura relacionada al problema y destacar en ella la incógnita y los datos.

Nombrar elementos presentes en la figura e introducir una notación adecuada.

Tabla 5. Descripción de las producciones iniciales generadas por los equipos de trabajo

Descripción	Representación
<p><b>Equipo 1.</b> Identifican como primera etapa el cálculo de la cantidad de madera contenida de un árbol en pie. La representación es de tipo pictórica, con características y dimensiones de los objetos más apegadas al contexto real, sin datos numéricos. Representan la distancia del objeto físico hacia un observador y la altura de éste último sin indicar algún método específico a utilizar.</p>	 <p data-bbox="1388 623 1843 651">Figura 7. Representación del equipo 1</p>
<p><b>Equipo 2.</b> Identifican como primera etapa el cálculo de la cantidad de madera contenida en un árbol en pie. Para realizar este cálculo reconocen que es necesario calcular la altura y el diámetro del pino. Para el primer problema referente al cálculo de la altura del pino, las representaciones fueron de tipo pictóricas, con características acordes con las dimensiones de los objetos del contexto real. Identifican un elemento matemático (triángulo) y proponen un ángulo para plantear una propuesta de solución. No dan nombre a los elementos ni introducen una notación adecuada, excepto un ángulo, del cual proponen un valor sin justificación y una ubicación desde los pies del observador. Señalan la altura total del árbol sin considerar las ramificaciones y segmentos delgados del tronco que usualmente no se consideran como parte de madera útil.</p>	 <p data-bbox="1388 1045 1843 1073">Figura 8. Representación del equipo 2</p>
<p><b>Equipo 3.</b> Identifican como primera etapa el cálculo de la cantidad de madera contenida de un árbol en pie. La representación es de tipo pictórica, las dimensiones a escala no se ajustan a los objetos reales. Reconocen correctamente que no se mide la altura total del árbol por lo que identifican un punto clave a cierta altura del árbol que se debe considerar para realizar la medición. Plantean como una posible vía de solución el uso de triángulos a través del método de espejos, lo colocan a determinada distancia del observador y proponen un valor para la misma, pero no dan nombres a los elementos ni introducen una notación adecuada.</p>	 <p data-bbox="1388 1354 1843 1382">Figura 9. Representación del equipo 3</p>

*Contenido Tabla 6. 2ª Fase del modelo de Polya: Concebir un plan*

Organizar la información en tablas, esquemas u otros organizados gráficos que faciliten el descubrimiento de relaciones que no son evidentes directamente, se exploran estrategias, se realizan acciones para obtener ideas sobre la vía de solución.

*Estrategias relacionadas*

Recordar algún problema ya resuelto relacionado con el problema actual, que tenga la misma incógnita o similar.

Modificar el problema de forma que nos pueda conducir a algún otro problema auxiliar apropiado.

Tratar de resolver primero algún problema similar.

Tabla 6. Identificación de estrategias en la 2ª. Fase del modelo de Polya

Indicadores	Preguntas guía de la docente	Estudiantes	Interpretación de la docente
<p>Procedimientos lógicos Indica la manera de organizar la información.</p> <p>Procedimientos Heurísticos Elige el método más adecuado para buscar la solución. Indica las fórmulas con las que se puede resolver el problema. Indica las repeticiones necesarias para resolver el problema. Revisa las condiciones iniciales para encontrar la solución del problema</p> <p>Procedimientos Metacognitivos Analiza los efectos que se producen al variar la distancia</p>	<p>¿De qué fórmula, expresión o modelo te puedes guiar para hallar la solución? Observa la incógnita, trata de pensar en algún problema que te sea conocido (familiar) y que tenga la misma incógnita o una similar.</p>	<p><b>Equipo 3.</b> Podemos utilizar un método parecido al de las sombras, es decir, que utilice también las distancias y las alturas. <b>Equipo 3.</b> Se van a medir las distancias y una altura para poder utilizar el método del espejo, vamos a localizar un objeto que se pueda medir directamente para comprobar el resultado, por ejemplo, el palacio municipal, por lo que primero vamos a medir las distancias y la altura de un compañero. <b>Equipo 2.</b> Para poder calcular la altura vamos a utilizar las razones trigonométricas, la tangente, necesitamos medir el ángulo y la distancia también. Vamos a comprobarlo también con el método del espejo. <b>Equipo 1.</b> Como sabemos que el pino que pretendemos calcular su volumen, tiene diferente grosor, vamos a medir los diámetros cada 30 cm, empezando a los 30 cm de altura, que tienen forma más parecida a un cono truncado, vamos a utilizar esa fórmula y observar cómo es su</p>	<p>Los estudiantes conciben un plan para resolver el problema, a través del diseño de problemas similares considerando objetos cercanos o accesibles para calcular la altura. Los métodos propuestos involucran respectivamente las distancias entre el objeto-espejo y espejo-observador, así como la distancia entre el observador y el objeto y el ángulo de elevación y la medición de secciones del tronco semejando al objeto geométrico del cono truncado. Para ambos métodos de solución –reconocer triángulos semejantes utilizando los criterios de semejanza y razones trigonométricas- los equipos proponen realizar ejemplos con objetos del entorno, los cuales deben tener la característica de ser medibles directamente, con la finalidad de poder comprobar la respuesta. El Equipo 1 investiga las fórmulas y decide efectuar las mediciones con el objeto físico.</p>

---

entre el observador y el objeto físico  
Analiza los efectos de variar el ángulo de elevación

Al encontrar un problema análogo, ¿Es posible utilizarlo? ¿Pueden introducir algún elemento que les pueda ayudar a implementar los métodos propuestos?

¿Qué pasa con el ángulo de elevación al variar algún dato, por ejemplo, la distancia entre el objeto físico y el observador?

comportamiento en 1.20 metros y 2.40 metros o hasta donde se pueda medir. Quizá construir la gráfica para ver su comportamiento.

**Equipo 1.** También se tiene que calcular la altura aproximada del pino, para esto vamos a utilizar la razón trigonométrica.

**Equipo 2.** Para poder utilizar el método que proponemos, es necesario medir el ángulo. Hay que buscar cómo hacer esta medición.

**Equipo 1.** Para utilizar la fórmula del cono truncado, necesitamos conocer la altura, que parte del centro, no podemos medirla.

**Equipo 1.** Vamos a calcular la altura a partir del teorema de Pitágoras.

**Equipo 3.** Diseñamos un problema sobre semejanza de triángulos y proporcionalidad para calcular la altura de la agencia y poder comprobar con el flexómetro.

**Equipo 2.** Investigamos la construcción de un teodolito para medir el ángulo de elevación y con la cinta métrica medir la distancia. Con estos datos vamos a utilizar la razón trigonométrica tangente para calcular la altura.

**Equipo 1.** Necesitamos medir el ángulo, para esto se va a construir un clinómetro.

**Equipo 3.** Para realizar las mediciones, los ingenieros ocupan una cinta que mide el diámetro, vamos a elaborar una para que nos de la medida directa sin hacer operaciones.

**Equipo 1 y 2.** Hicimos unos dibujos donde si nos alejamos o nos acercamos al pino, el ángulo con que lo observemos será distinto. También al modificar el ángulo de observación vemos que puede afectar la medida de la altura.

Proponen utilizar un método (razones trigonométricas) para calcular la altura del objeto físico y comprobar el resultado obtenido con otro método (semejanza de triángulos y uso de los criterios de semejanza). Uno de los equipos utilizará la fórmula del volumen de un cuerpo geométrico por lo que determinan que también es necesario calcular la altura.

Investigan los principios básicos para la construcción de instrumentos de medición: el clinómetro y la cinta diamétrica.

\*Nota: Fue necesario realizar sesiones plenarias a fin de abordar los temas mencionados para que los estudiantes distinguieran el concepto de semejanza de triángulos, así como conceptos previos como razón y proporción, segmentos proporcionales. También se recordaron los conceptos de perímetro y volumen de figuras y cuerpos geométricos.

Observan a través de una representación gráfica, la variación del ángulo al cambiar la distancia del observador al objeto y la variación de la medida de la altura al variar el ángulo de elevación.

Contenido de la Tabla 7. Descripción de las producciones iniciales generadas por los equipos de trabajo.

*Estrategias relacionadas*

Recordar algún problema ya resuelto relacionado con el problema actual, que tenga la misma incógnita o similar.

Modificar el problema de forma que nos pueda conducir a algún otro problema auxiliar apropiado.

Tratar de resolver primero algún problema similar.

Tabla 7. Descripción de las producciones generadas por los equipos de trabajo

**Equipo 1.** Investigan fórmulas para calcular el volumen de cuerpos geométricos con características similares a las del tronco del pino, indican que la fórmula para calcular el volumen del cono truncado puede ser útil para realizar una aproximación. Señalan que el contorno del tronco del pino se asemeja con una circunferencia por lo que es posible obtener la medida del diámetro a partir de la medida de dicha circunferencia (contorno). Como llegará un momento en que no podrán alcanzar a medir el diámetro, entonces es necesario calcular una altura aproximada del pino. Proponen construir un clinómetro para poder calcular el ángulo que les permita el empleo de una razón trigonométrica.

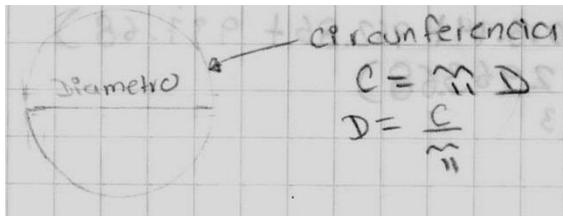


Figura 10. Expresión para obtener la medida del diámetro

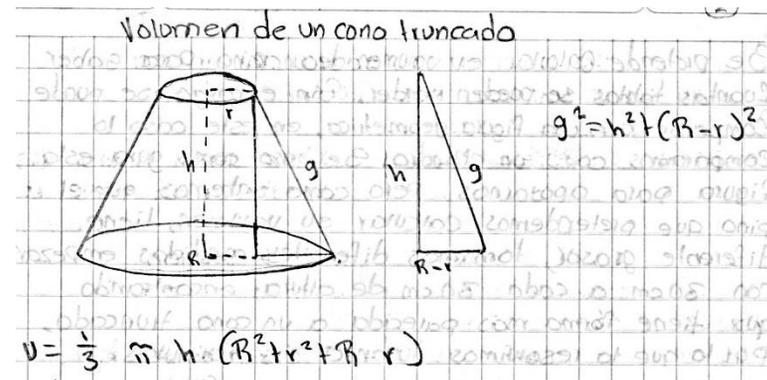


Figura 11. Fórmula para calcular el volumen a partir del cono truncado

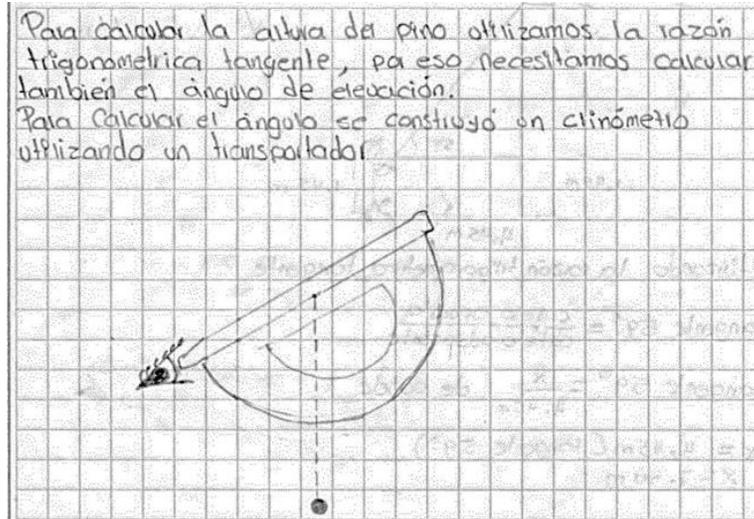


Figura 12. Descripción del uso del clinómetro

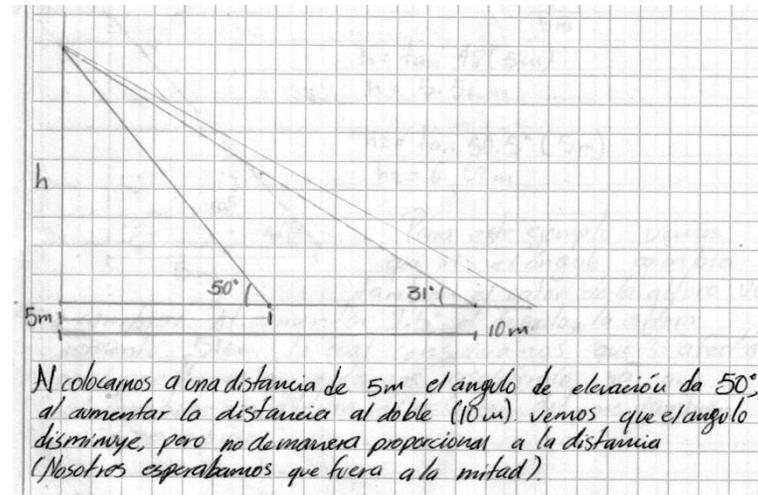


Figura 13. Variación del ángulo debido a un cambio en la distancia

**Equipo 2.** Investiga sobre los criterios de semejanza (para utilizar el método del espejo) y utiliza este método para plantear un problema con condiciones similares al problema inicial, ubica un objeto del entorno para reproducir el problema y a través de los criterios de semejanza de triángulos y proporcionalidad poder obtener la altura. Obtiene a partir de mediciones directas los datos necesarios para poder diseñar el problema. Utilizan un objeto que pueda medirse directamente para efectuar más adelante la comprobación del resultado obtenido.

El mismo equipo investiga otro método para poder calcular la altura, utilizando un clinómetro casero (construido a partir de una mirilla y un transportador) calcularon el ángulo de elevación y la distancia del árbol al observador como datos necesarios para calcular la altura del árbol, objeto seleccionado del entorno. La información obtenida la relacionaron con un objeto matemático, el triángulo rectángulo, y con los datos obtenidos poder calcular la altura del ejemplar.

Se observa el manejo de datos concretos en el segundo ejemplo, donde utilizarían razones trigonométricas.

Jehú mide 1.67m mira un espejo que se encuentra a una distancia de 1.65m y en esta refleja la punta de un árbol que se encuentra a una distancia de 10.3 m ¿Cuál es la altura del árbol?

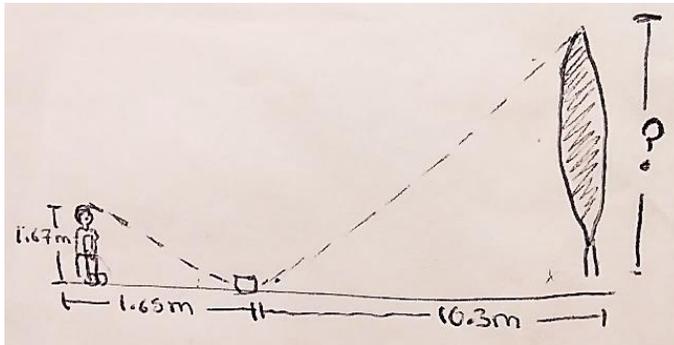


Figura 14. Diseño de un problema similar

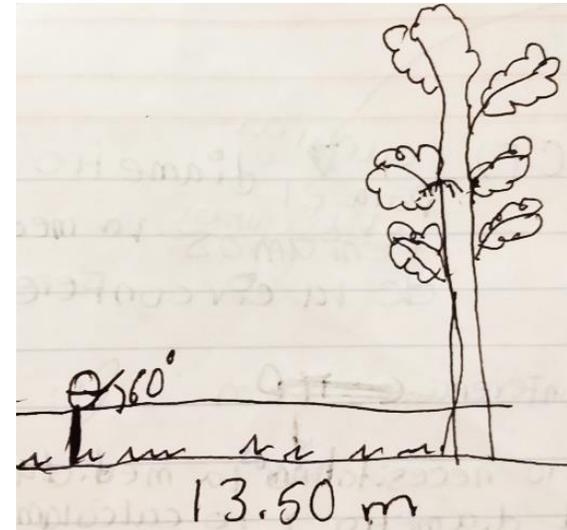


Figura 15. Uso de un ángulo como elemento adicional

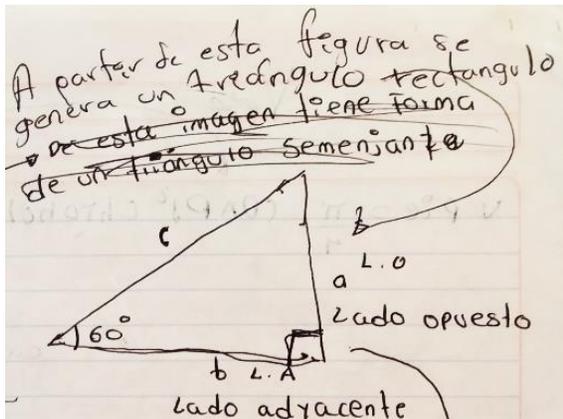


Figura 16. Vía de solución a partir de un triángulo rectángulo



Figura 17. Diseño y pruebas con un clinómetro

**Equipo 3.** Proponen el cálculo de la altura a partir del uso de los criterios de semejanza (método del espejo) y diseñan un problema

considerando los datos a partir de las mediciones realizadas y comprobando el método a partir de la posibilidad de la medición directa del objeto físico que se propuso. Construyen la cinta diamétrica para facilitar las mediciones del diámetro del pino y realizan mediciones con elementos del entorno más cercano al centro de la población. Se observan dificultades en la representación a través del dibujo, ya que los segmentos no son proporcionales a las medidas reales (indican que el edificio medirá poco más de 1.68 m).

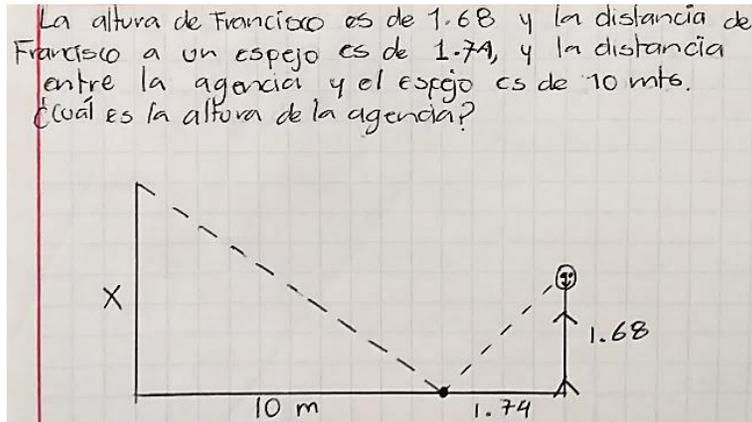


Figura 18. Diseño de un problema similar

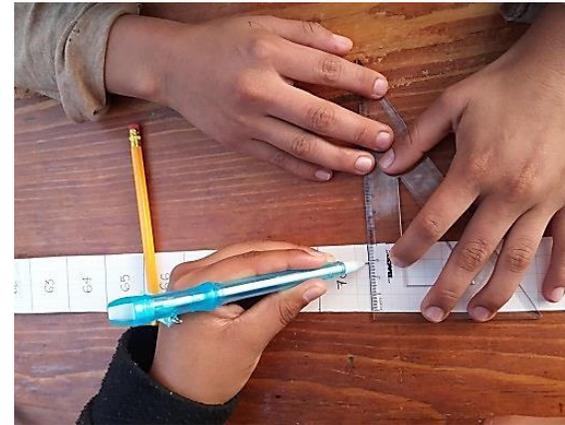


Figura 19. Construcción de una cinta diamétrica

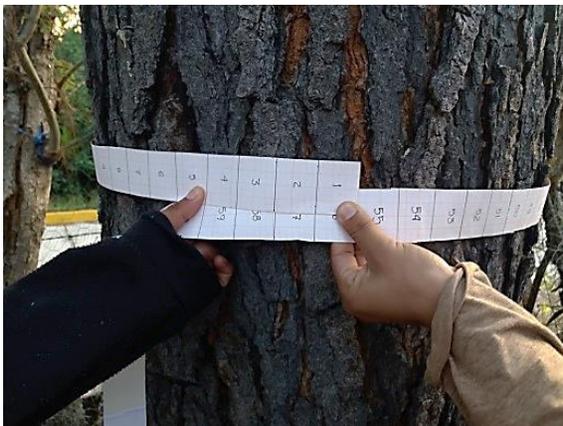


Figura 20. Pruebas de medición con la cinta diamétrica

*Contenido Tabla 8. Identificación de estrategias en la 3ª Fase del modelo de Polya: Ejecutar el plan*

Articular las deducciones y proposiciones pensadas de forma lógica y coherente, se validan las hipótesis formuladas anteriormente, entre otras acciones dirigidas a estructurar la vía de solución y satisfacer la exigencia del problema.

*Estrategia relacionada.* Verificar cada paso del razonamiento

Tabla 8. Identificación de estrategias en la 3ª. Fase del modelo del Polya

Indicadores	Preguntas guía de la docente	Estudiantes	Interpretación de la docente
<p>Procedimientos lógicos Reconoce la validez de utilizar el método y las fórmulas propuestas. Piensa en el procedimiento para resolver el problema con esas fórmulas, en caso necesario descríbelos.</p> <p>Procedimientos Heurísticos Sustituye los datos y calcula con las fórmulas. Calcula las variaciones que se sugieren.</p> <p>Procedimientos Metacognitivos Verificar que la solución responda a lo que se pide en el problema. Identificar si existe una contradicción con lo pensado inicialmente.</p>	<p>¿Pueden ver que el paso efectuado es correcto? ¿Pueden verificarlo? ¿Por qué utilizar ese método y esas fórmulas? ¿Esa solución responde a lo que se pide en el problema? ¿No hay contradicción con lo que pensaste inicialmente?</p>	<p><b>Equipo 1.</b> Con la fórmula para calcular el volumen de un cono truncado y apoyándonos en el teorema de Pitágoras para calcular la altura del cono, hallamos el volumen de ocho secciones del tronco del pino de aproximadamente 30 centímetros de altura. A partir de estos resultados se elabora una gráfica, observando que algunos puntos quedan alineados y otros quedan ligeramente fuera de la gráfica, por lo que se considera la forma de la gráfica con el mayor número de puntos alineados, haciendo la prolongación hasta llegar a la intersección con la altura del pino calculada a partir del uso de las razones trigonométricas. Esta intersección nos permite obtener información sobre el diámetro a esa altura y así poder calcular el volumen del árbol en pie. Al verificar cada paso nos dimos cuenta de que algunos resultados en el volumen se salían de los valores obtenidos en cálculos anteriores, por lo que había errores en las operaciones realizadas, revisando nuevamente el procedimiento realizado.</p> <p><b>Equipo 2.</b> Al efectuar las mediciones y tratar de utilizar el espejo para localizar un punto fijo del pino no fue posible, por lo que ya no</p>	<p>Los tres equipos revisaron cada paso del procedimiento realizado acorde al método de solución propuesto, los integrantes del Equipo 1 detectaron errores, considerando que los valores obtenidos estaban fuera del rango de respuestas posibles. El Equipo 2 descartó uno de los métodos propuestos (uso del espejo) dándose cuenta de que no era posible realizar las mediciones necesarias para aplicar dicho método. El Equipo 3 siguió el método propuesto pero consideró obtener las medidas a partir del método sugerido por el Equipo 2.</p>

---

se utilizaron los criterios de semejanza en triángulos. Se construyó un teodolito o clinómetro casero con base fija para poder medir el ángulo de elevación y utilizar la razón trigonométrica para poder calcular la altura. Se verificaron las operaciones y los pasos que se fueron realizando.

**Equipo 3.** Se calculó la altura utilizando la semejanza de triángulos y se realizó la comprobación con el método de razones trigonométricas. Al aplicar el primer método y revisar cada uno de los pasos encontramos errores al utilizar una notación para indicar los elementos presentes en la figura, lo que nos causó confusión al momento de tratar de resolver el problema, obtuvimos un resultado alejado de un valor real aproximado por lo que revisamos todo el procedimiento. Después lo comprobamos con el segundo método, los resultados obtenidos difieren.

---

*Contenido de la Tabla 9. Descripción de las producciones generadas por los equipos de trabajo.*

*Estrategia relacionada*

Verificar cada paso del razonamiento

Tabla 9. Descripción de las producciones generadas por los equipos de trabajo.

---

**Descripción de las producciones**

**Equipo 1.** Los estudiantes realizaron las mediciones del tronco cada 30 centímetros para hallar volúmenes parciales de cada sección, lo que les permitiría conocer el comportamiento de la circunferencia y diámetro en esos intervalos y poder realizar una estimación de la medida del diámetro en las alturas posteriores. Para ello, construyeron una recta que mejor se aproximara a los datos, (que es lo que matemáticamente se conoce como método de mínimos cuadrados, pero ellos lo hicieron empíricamente pues no conocían este concepto).

Construyeron un clinómetro casero para realizar la medida del ángulo de elevación y por medio de razones trigonométricas calcular la altura del pino. A partir de la medida del diámetro obtenida en la gráfica y la medida de la altura calculada a partir de la razón trigonométrica tangente, los estudiantes emplearon la fórmula para el cálculo del volumen del cono truncado. A partir de este volumen y con los estándares utilizados para la cubicación, determinaron la cantidad de madera aprovechable y el valor comercial de la misma. Manifestaron la importancia de realizar las mediciones de forma adecuada y con instrumentos más precisos.

---



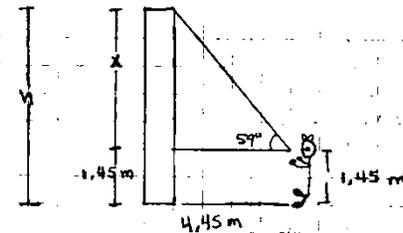
Figura 21. Medida del contorno del pino a cada 30 cm de altura



Figura 22. Medida del ángulo para determinar la altura

Altura sección	Circunferencia	Diámetro	Radio	Altura
30 cm	200	63.66 cm	31.82 cm	29.98 cm
60 cm	195	62.07 cm	31.03 cm	29.98 cm
90 cm	189	60.16 cm	30.08 cm	29.97 cm
120 cm	182	57.93 cm	28.96 cm	29.98 cm
150 cm	176	56.02 cm	28.01 cm	29.99 cm
180 cm	171	54.34 cm	27.17 cm	29.97 cm
210 cm	169	53.79 cm	26.89 cm	30 cm
240 cm	169	53.79 cm	26.89 cm	29.99 cm
257 cm	165	52.52 cm	26.26 cm	29.97 cm

Figura 23. Tabla con la medida de la circunferencia para el cálculo del diámetro



Utilizando la razón trigonométrica tangente

$$\text{tangente } 59^\circ = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

$$\text{tangente } 59^\circ = \frac{x}{4.45 \text{ m}} \text{ de donde}$$

$$x = 4.45 \text{ m} (\text{tangente } 59^\circ)$$

$$x = 7.40 \text{ m}$$

La altura del pino es de aproximadamente 7.40 metros más 1.45 m. que es la altura desde la cual se calculó el ángulo.  
 Altura total del pino es de 8.85 m.

Figura 24. Cálculo de la altura con razones trigonométricas

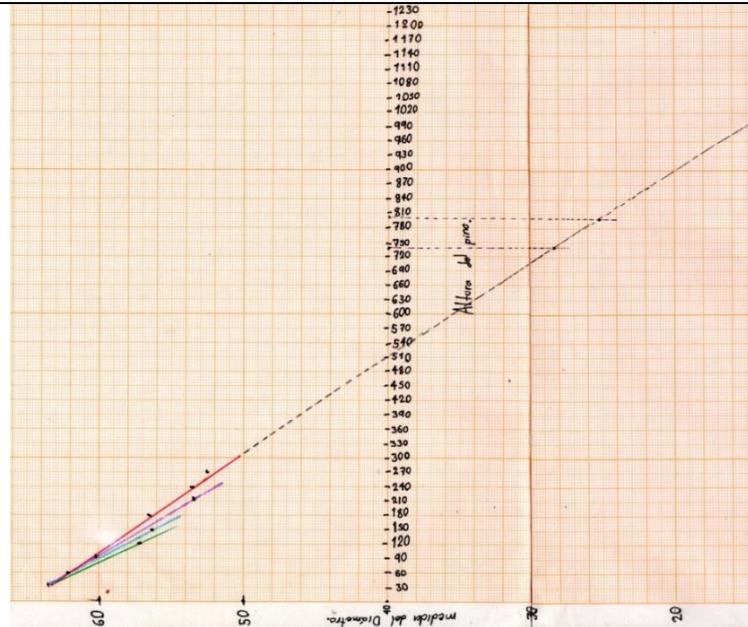


Figura 25. Gráfica de la recta que indica una mejor aproximación de la variación del diámetro respecto a la altura

Con estos datos se calcula el volumen con la fórmula del cono truncado.

$$V = \frac{1}{3} \pi h (R^2 + r^2 + R \cdot r)$$

$$V = \frac{1}{3} \pi (7.40 \text{ m}) [(3.188 \text{ m})^2 + (.148 \text{ m})^2 + (3.183 \text{ m})(.148 \text{ m})]$$

$$V = \frac{1}{3} \pi 7.40 \text{ m} (0.17 \text{ m}^2)$$

$$V = 1.32 \text{ m}^3$$

Figura 26. Cálculo del volumen con la fórmula del cono truncado

El volumen de madera del árbol en pie es de  $1.32 \text{ m}^3$  considerando que solo el 52% es aprovechable  
 $VAP = (1.32 \text{ m}^3)(0.52)$   
 $VAP = 0.686 \text{ m}^3$   
 Si la madera es de primera calidad el  $\text{m}^3$  en este lugar le pagan a  $\$ 1,400.00$  pesos, de este pino será:  
 $P = 0.686 (1,400)$   
 $P = 960$   
 Por este pino aproximadamente se pagará la cantidad de 960 pesos. Para poder sacar una buena aproximación es necesario tomar las medidas de una manera adecuada y tratar de construir los instrumentos de medición más exactos.

Figura 27. Estimación del valor comercial del pino

**Equipo 2.** Los estudiantes realizaron las mediciones del ángulo de elevación y la distancia de objeto hacia el clinómetro para calcular la altura a partir de la razón trigonométrica, posteriormente midieron el diámetro a la altura de pecho, para utilizar la fórmula de Smalian para la cubicación de la madera.



Figura 28. Uso del clinómetro para medir el ángulo de elevación



Figura 29. Medida de la distancia del pino al clinómetro

Para poder visualizar mejor el ápice del árbol se colocó a cierta altura y estos fueron los resultados.

Conociendo el ángulo de elevación podemos utilizar las razones trigonométricas.  
 $\tan L = \frac{a}{b}$  long: lado opuesto  
 long: lado adyacente

Despejamos:  
 $60^\circ = \frac{h}{13.50} (13.50)(60^\circ) = h$

Sacamos la tangente de  $60^\circ$   
 y obtuvimos 1.73 y resolvimos para obtener la altura.

$(1.73)(13.50) = h$   
 $23.355 = h$

A este resultado le sumamos la altura a la que se elevó el teodolito y pudimos obtener el ángulo.  
 $23.355 + 0.73 = 24.085$   
 la altura total en metros

Nota [Este método es el que usamos para obtener el volumen en pie. Creemos que es el más aproximado ya que cuando utilizamos los datos de la altura de un árbol calculado con un clinómetro, su altura es parecida así como sus resultados.] Otro de los datos necesarios para la cubicación de madera es el diámetro, para obtener el diámetro medimos la circunferencia a la altura de pecho que es de 1.3 m y con una fórmula obtuvimos el diámetro. ③

Figura 30. Cálculo de la altura por razones trigonométricas

Despejamos  $C = \pi d$  fórmula de la circunferencia y obtenemos  $d = \frac{C}{\pi}$  fórmula para el diámetro.  
 $d = \frac{1.63}{3.14} = 0.51$ , el diámetro en metros.

Una vez obtenidos los datos de la altura y el diámetro, procedimos a la cubicación con la fórmula correspondiente.  
 para el volumen en pie

$V_{pie} = \frac{\pi}{4} * DAP^2 * (HT + hc) * F$

DAP = Diámetro a la altura de pecho.  
 ht + hc : altura total o altura comercial.  
 F = factor de forma (coeficiente mórfoico) para el pinus chiapensis (el tipo de árbol que usamos para la cubicación) el coeficiente mórfoico es de 0.6.

Tomamos la altura comercial para el volumen en pie.

$V_{pie} = \frac{\pi}{4} * DAP^2 * (ht + hc) * F$   
 $V_{pie} = \frac{\pi}{4} * DAP^2 * (ht) * 0.6$   
 $V_{pie} = \frac{\pi}{4} (0.51m)^2 (24.085m)(0.6)$   
 $V_{pie} = (0.78)(0.51m)^2 (24.085m)(0.6)$   
 $V_{pie} = (0.78)(0.261m^2)(24.085m)(0.6)$   
 $V_{pie} = 0.20358m^2(24.085m)(0.6)$   
 $V_{pie} = (5.058963m^3)(0.6)$   
 $V_{pie} = 3.03m^3$

Figura 31. Cálculo del volumen con la fórmula de Smalian

**Equipo 3.** Los estudiantes realizaron las mediciones del observador hacia el espejo y del espejo hacia el objeto físico, así como la altura de la persona, lo cual les permitió hacer uso de los criterios de semejanza de triángulos para construir segmentos proporcionales y poder calcular la altura del pino. Posteriormente realizaron la medición del contorno del pino que les permitiría obtener la medida del diámetro a la altura de pecho (1.3 metros) y poder obtener el volumen. Realizaron las mediciones pero fue difícil para ellos ubicar el reflejo del ápice del pino en el espejo, por la densidad presente.



Figura 32. Ubicación del espejo para calcular la altura del árbol



Figura 33. Medida de la distancia del observador al espejo



Figura 34. Medida del contorno para obtener el diámetro a la altura de pecho

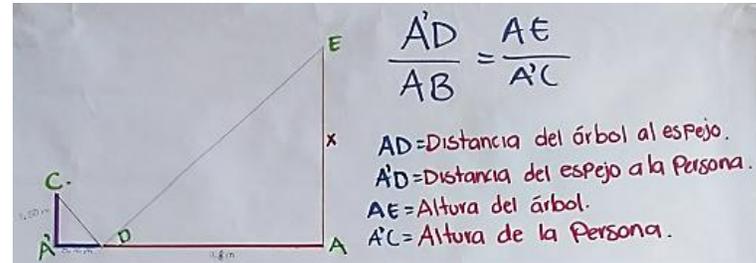


Figura 35. Uso de los criterios de semejanza de triángulos

Operación:

$$\frac{9.8 \text{ m}}{0.76 \text{ m}} = \frac{x}{1.50 \text{ m}}$$

$$\frac{(9.8 \text{ m})(1.50 \text{ m})}{0.76 \text{ m}} = x$$

$$\frac{147 \text{ m}}{0.76 \text{ m}} = x$$

$$x = 19.34 \text{ m}$$

Despejamos Para obtener la altura del árbol.

Comprobación:

$$\frac{9.8 \text{ m}}{0.76 \text{ m}} = \frac{x}{1.50 \text{ m}}$$

$$19.34 \text{ m} = x$$

$$\frac{9.8 \text{ m}}{0.76 \text{ m}} = \frac{19.34 \text{ m}}{1.50 \text{ m}}$$

$$12.8 = 12.8$$

asignar el valor de 'x'

Figura 36. Cálculo de la altura del árbol

$$V_{\text{pie}} = \frac{\pi}{4} * DAP^2 * (hT \text{ o } hC) * f$$

$$V_{\text{pie}} = (0.7854) (0.4138018899) (19.34) (0.75)$$

$$V_{\text{pie}} = 1.719125 \text{ m}^3$$

DAP: Diámetro a la Altura del pecho  
hT o hC: Altura total ó altura comercial  
f: factor de forma

Figura 37. Cálculo del volumen del pino en pie

Contenido Tabla 10. Identificación de estrategias en la 4ª Fase del modelo de Polya: Examinar la solución obtenida

Comprobar la vía de solución, si existen otras vías de solución alternativas y la posibilidad de transferirla a otros problemas.

#### Estrategias relacionadas

Reconsiderar la solución, reexaminar el resultado y el camino que conduce a la solución.

Identificar la existencia de otro medio para asegurarse de la exactitud del resultado

Utilizar el resultado o el método para resolver algún otro problema.

Tabla 10. Identificación de estrategias en la 4ª Fase del modelo de Polya

Indicadores	Preguntas guía de la docente	Estudiantes	Interpretación de la docente
Procedimientos lógicos Verifica si el resultado es correcto. Revisa si existen contradicciones con las condiciones reales. Procedimientos Heurísticos Compara la vía de solución con las de otros problemas	¿Es correcto el resultado? ¿No hay contradicciones con las condiciones reales? ¿Es correcta la vía empleada	<b>Equipo 1.</b> Se ha revisado el procedimiento empleado para obtener el volumen de madera del pino a través del uso de la fórmula de volumen del cono truncado, se encontraron algunos errores que ya fueron corregidos, el resultado lo consideramos que es correcto, aunque no exacto, queremos comprobar por otra fórmula que permite calcular el volumen del pino. Tenemos las	El Equipo 1 utilizó el método propuesto a través del uso de una fórmula geométrica para calcular el volumen, por medio de una gráfica y observando el comportamiento de las mediciones obtenidas obtuvo de manera gráfica el valor del diámetro para una altura estimada a partir del uso de razones trigonométricas, revisa el procedimiento empleado y comprueba a partir de la fórmula

<p>resueltos anteriormente.  Procedimientos  Metacognitivos  Reflexiona sobre la pertinencia de la vía empleada para resolver el problema.  Indaga sobre la existencia de una vía mejor para resolver el problema.  Revisa todos los pasos para llegar a la vía de solución</p>	<p>para resolver el problema?  ¿Se puede obtener una solución más precisa?</p>	<p>medidas. La diferencia es que en esta fórmula [se refieren a la fórmula de Smalian] utiliza el diámetro del tronco a una altura de 1.3 metros y no utiliza la aproximación que nosotros realizamos.  <b>Equipo 2.</b> Ya revisamos el procedimiento y consideramos que el método empleado es correcto, ya que es un tema que vimos en clase y lo investigamos en algunos los libros. Vamos a utilizar un clinómetro que la asesora [docente] consiguió para calcular de una manera más exacta la altura del pino y poder comprobar el resultado con el que obtuvimos.  <b>Equipo 3.</b> Con el método que empleamos [uso de los criterios de semejanza de triángulos], solo una compañera pudo observar en el espejo, el resto de nosotros no, aun así tomamos las medidas para resolver el problema, pero tomamos también medidas con el clinómetro que construyó el otro equipo para comprobar el resultado que obtuvimos por el otro método.</p>	<p>utilizada para calcular el volumen de madera. Como parte de su proceso de solución, construye un clinómetro que emplea para realizar la medición del ángulo.  El Equipo 2 decide no utilizar los criterios de semejanza de triángulos y opta por realizar la medida del ángulo para emplear razones trigonométricas, durante el proceso construye un clinómetro con una base estable para una mayor exactitud al efectuar la medición, revisa el procedimiento y comprueba la medición del ángulo con un instrumento (clinómetro) profesional, por lo que consideran otra vía de solución que les permitirá comprobar los resultados obtenidos.  El Equipo 3 revisa el procedimiento realizado a partir de los criterios de semejanza en triángulos, pero presenta dificultades al momento de realizar las mediciones, dado que observan que el ambiente no permite visualizar claramente el objeto físico, por lo que decide comprobar su respuesta a partir del uso de razones trigonométricas. Como parte de su proceso de resolución construye la cinta diamétrica, pero en la construcción se da cuenta de que presenta algunas imprecisiones al realizar las mediciones, por lo que decide realizar las mediciones con la cinta métrica.</p>
---	--	--	---

Contenido de la Tabla 11. Descripción de las producciones generadas por los equipos de trabajo

Estregias relacionadas

Reconsiderar la solución, reexaminar el resultado y el camino que conduce a la solución.

Identificar la existencia de otro medio para asegurarse de la exactitud del resultado

Utilizar el resultado o el método para resolver algún otro problema.

Tabla 11. Descripción de las producciones generadas por los equipos de trabajo

Descripción de las producciones
<p><b>Equipo 1.</b> Los estudiantes utilizaron las mediciones adicionales del contorno para obtener el diámetro a la altura de pecho y con el clinómetro obtiene la altura a partir de razones trigonométricas. Con estos datos adicionales utilizan la fórmula de Smalian utilizada para la cubicación de la madera y comprueban los resultados obtenidos a través del método geométrico propuesto. Observan que hay diferencia en el volumen que obtuvieron calculado a partir de los datos obtenidos a través de la graficación (<math>1.32\text{m}^3</math>) y el volumen obtenido utilizando la fórmula de cubicación de Smalian (<math>1.42\text{m}^3</math>) donde esta presente una constante de forma. Por lo que consideran que el método empleado puede ser utilizado con instrumentos que permitan una mayor exactitud en las medidas.</p>



Figura 38. Medida del contorno para calcular el diámetro a la altura de pecho

Comprobamos el método que utilizamos con la fórmula propuesta para determinar el volumen del árbol en pie.  
 $V_{\text{pir}} = \frac{\pi}{4} DAP^2 (hT + hC) f$   
 $V_{\text{pir}} = \frac{\pi}{4} (1.5733\text{m})^2 (1.90\text{m})(0.75)$   
 $V_{\text{pir}} = \frac{\pi}{4} (1.824\text{m}^3)$   
 $V_{\text{pir}} = 1.43\text{m}^3$   
Vemos que con esta fórmula hubo una variación de  $0.11\text{m}^3$ , lo cual puede implicar un madero aprovechable de  $0.058\text{m}^3$  en el precio del pino habría una diferencia de 82 pesos, que quizá no afecta tanto.

Figura 39. Cálculo del volumen a partir de la fórmula de Smalian como comprobación

---

**Equipo 2.** Solo utilizó un clinómetro profesional para realizar la medición de la altura del pino, como hubo poca diferencia entre el resultado obtenido con el instrumento y el que calcularon a partir del uso de razones trigonométricas, decidieron seguir con éste último.



*Figura 40.* Uso de un clinómetro profesional

**Equipo 3.** Realizaron las mediciones correspondientes y los cálculos a partir de los criterios de semejanza de los triángulos, obteniendo una altura del pino de 19.34m, al comprobar por otro método decidieron utilizar el clinómetro y emplear razones trigonométricas con lo que obtuvieron una altura de de 14.4m, al utiizar el clinómetro profesional para realizar la medición, el segundo valor obtenido era más cercano a la lectura del instrumento.

---



Figura 41. Medida de la altura a la cual se coloca el clinómetro



Figura 42. Uso del clinómetro para determinar el ángulo de elevación

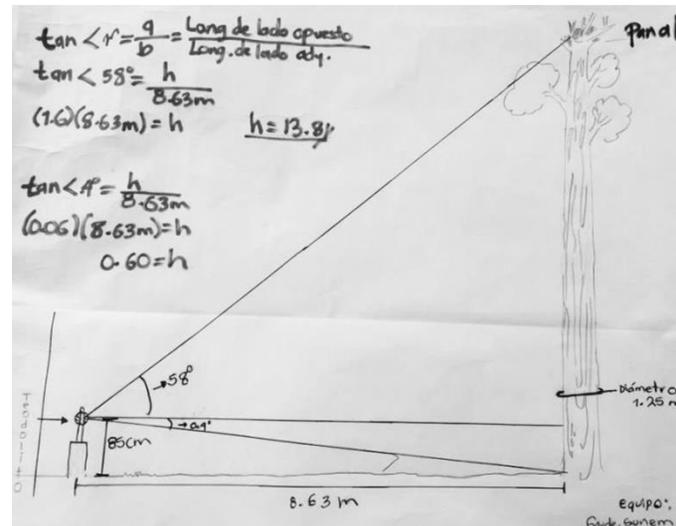


Figura 43. Cálculo de la altura del pino a partir de las razones trigonométricas

## 5.2.2 Cubicación de la madera en trozas

*Contenido Tabla 12. Identificación de estrategias en la 1ª Fase del modelo de Polya: Comprender el problema*

Identificar los conceptos y definiciones involucradas o relacionadas con la información que brinda el problema.

*Estrategia relacionada*

Descomponer un problema en casos más simples.

Dibujar alguna figura relacionada al problema y destacar en ella la incógnita y los datos.

Nombrar elementos presentes en la figura e introducir una notación adecuada.

Tabla 12. Identificación de estrategias en la 1ª Fase del modelo de Polya

Indicadores	Preguntas guía de la docente	Estudiantes	Interpretación de la docente
<p>Procedimientos lógicos</p> <p>Lee detalladamente el problema.</p> <p>Identifica palabras claves que expresan relaciones en el problema.</p> <p>Identifica las variables que intervienen en el problema.</p> <p>Expresa con sus palabras la idea fundamental del problema.</p> <p>Identifica los datos necesarios</p>	<p>¿De qué trata el problema? ¿Cuál es el objeto físico involucrado? ¿En qué parte de este objeto radica el interés?</p>	<p><b>Equipo 1.</b> Tenemos que calcular el volumen de una parte del tronco. Por lo que requerimos la altura que vamos a considerar para el largo de la troza y nuevamente la medida del diámetro o radio, pero únicamente de ese pedazo.</p> <p><b>Equipo 2.</b> Vamos a calcular volumen de una troza, es ahora una parte del tronco, tenemos que ver de qué largo será y cómo será el contorno de los extremos</p> <p><b>Equipo 3.</b> Ahora se tiene que calcular el volumen de una troza, de una parte del tronco, debe tener una longitud ya fija, no puede ser de cualquier tamaño.</p>	<p>Los estudiantes reconocen que el volumen de la troza dependerá de la longitud y el diámetro, el equipo 3 identifica que la medida del largo debe tener un valor determinado.</p>

<p>y suficientes para encontrar la solución. Reconoce las unidades de medida en que deben expresarse los datos y el resultado.</p>	<p>¿Cuáles son tus datos? ¿Cuál es la incógnita o las incógnitas? ¿Cuáles son los datos necesarios para encontrar la solución?</p>	<p><b>Equipo 1.</b> No tenemos datos, los tenemos que medir. Podemos ocupar mismos datos que utilizamos en el problema anterior, la medida del contorno y la altura, solo que ahora de la troza. <b>Equipo 2.</b> No hay datos. Se necesita medir los contornos a la altura del pino que sería de 2.57 metros, ya que esa es el largo de la troza. <b>Equipo 3.</b> No tenemos datos, necesitamos el largo de la troza y la medida del contorno del tronco para sacar el diámetro.</p>	<p>Indican que el problema no proporciona los datos, tienen que medir aquellos datos que requieran, solo el equipo 2 identifica que para calcular el volumen de la troza se debe considerar una longitud de 2.57 metros.</p>
<p>Procedimientos Heurísticos Identifica de qué tipo de problema se trata a partir de la información de que se dispone. Indica qué se necesita encontrar para responder a la pregunta. Reconoce en sus conocimientos previos la existencia de problemas con las mismas condiciones o similares.</p>	<p>¿Con qué letras se designará a la incógnita o incógnitas?  ¿En qué unidades se debe expresar el resultado?</p>	<p><b>Equipo 1.</b> Vamos a utilizar las mismas que utilizamos para calcular el volumen del pino. <b>Equipo 2.</b> Vamos a utilizar la L para el largo de la troza y una D para el diámetro. <b>Equipo 3.</b> La l para el largo de la troza y D para el diámetro. <b>Equipo 1, equipo 2 y equipo 3.</b> El volumen en metros cúbicos.</p>	<p>Identifican los datos necesarios y las incógnitas y proponen su identificación a partir de algunas letras utilizadas comúnmente en problemas similares o en fórmulas establecidas.  Reconocen las unidades para expresar el volumen. Identifican cierta relación el volumen con otros elementos a partir de la fórmula de la circunferencia y el cilindro.</p>
<p>Procedimientos Metacognitivos Analiza una posible forma de representación de lo que se pide en el problema. Identifica conocimientos propios disponibles para encontrar la solución. Reconoce los conocimientos disponibles y los necesarios para resolver el problema.</p>	<p>¿Cuál es la condición que relaciona a los elementos mencionados?  ¿Es suficiente la condición para determinar la incógnita?</p>	<p><b>Equipo 1.</b> El volumen va a depender del largo de la troza y de la medida del contorno, puede ser nuevamente con la fórmula de la circunferencia y una de volumen. <b>Equipo 2.</b> Para calcular el volumen depende de la forma que tenga la troza, ya que no es precisamente una circunferencia las caras de los extremos de la troza. <b>Equipo 3.</b> Una fórmula como la del volumen del cilindro. <b>Equipo 1.</b> Sí, porque vamos a utilizar la fórmula del cono truncado. <b>Equipo 2.</b> Necesitamos considerar que el contorno no es igual a lo largo de la troza. <b>Equipo 3.</b> Es necesario considerar las diferentes medidas que nos puedan dar las caras de la troza.</p>	<p>Reconocen en sus conocimientos previos la fórmula para calcular el volumen de un cilindro, requieren medir la longitud de la troza y obtener la medida del diámetro o del contorno de la troza.  Identifica que la medida del diámetro en los extremos de la troza no coincide, por lo que es necesario considerar los distintos valores que puedan llegar a obtener.</p>

*Contenido Tabla 13. Identificación de estrategias en la 2ª Fase del modelo de Polya: Concebir un plan*

Organizar la información en tablas, esquemas u otros organizados gráficos que faciliten el descubrimiento de relaciones que no son evidentes directamente, se exploran estrategias, se realizan acciones para obtener ideas sobre la vía de solución.

*Estrategias relacionadas*

Recordar algún problema ya resuelto que esté relacionado con el problema actual, que tenga la misma incógnita o similar.

Modificar el problema de forma que nos pueda conducir a algún otro problema auxiliar apropiado.

Tratar de resolver primero algún problema similar.

Tabla 13. Identificación de estrategias en la 2ª Fase del modelo de Polya

Indicadores	Preguntas guía de la docente	Estudiantes	Interpretación de la docente
<p>Procedimientos lógicos Indica la manera de organizar la información.</p> <p>Procedimientos Heurísticos Elige el método más adecuado para buscar la solución. Indica las fórmulas con las que se puede resolver el problema. Indica las repeticiones necesarias para resolver el problema. Revisa las condiciones iniciales para encontrar la solución del problema</p> <p>Procedimientos Metacognitivos Analiza los efectos que se producen al variar la distancia entre el observador y el objeto físico</p>	<p>¿De qué fórmula, expresión o modelo te puedes guiar para hallar la solución? Observa la incógnita, trata de pensar en algún problema que te sea conocido (familiar) y que tenga la misma incógnita o una similar.</p>	<p><b>Equipo 1.</b> Vamos a utilizar la misma fórmula, la del cono truncado, vamos a utilizar la medida que se va a hacer del contorno a los 30 centímetros y de ahí, también vamos a incluir la medida del contorno hasta llegar a los 2.57 metros, y así sacar el volumen.</p> <p><b>Equipo 2.</b> Vamos a utilizar la fórmula del cilindro solo que vamos a medir a los diámetros del tronco al inicio y al final, considerando la longitud de la troza. Y de ahí sacar el volumen.</p> <p><b>Equipo 3.</b> Vamos calcular el volumen utilizando la fórmula del cilindro, primero vamos a hacer unas pruebas con trozas pequeñas midiendo los diámetros y ver que tanto afecta al sacar el volumen. Para calcular el volumen vamos a utilizar una troza que ya este cortada, para poder medir el diámetro de cada una de sus caras y considerar la longitud que utilizan comúnmente.</p>	<p>El equipo 1 considera la opción de utilizar la fórmula de volumen del cono truncado y calcular volúmenes parciales de la troza hasta alcanzar la longitud total. El equipo 2 y 3 proponen como opción la fórmula de volumen del cilindro, indicando la forma en que obtienen el diámetro y cómo consideran dicho valor dado que las caras de los extremos de la troza no es de forma regular o simétrica.</p>

<p>Analiza los efectos de variar el ángulo de elevación</p>	<p>Al encontrar un problema análogo, ¿Es posible utilizarlo? ¿Pueden introducir algún elemento que les pueda ayudar a implementar los métodos propuestos? ¿Qué pasará con el volumen al modificar la longitud de la troza? ¿Cómo cambia el volumen cambiar la medida del diámetro?</p>	<p><b>Equipo 1.</b> Si es posible utilizar la fórmula del cono truncando, porque podemos tomar las medidas que necesitamos y calcular las que nos hagan falta.</p> <p><b>Equipo 2.</b> Podemos medir el diámetro pequeño y sacar su volumen y después con el diámetro más grande sacar el otro volumen y de ahí su diferencia. Esto solo nos sirve para ver el tanto de volumen que se pierde al tomar el diámetro más pequeño, pero tampoco será un valor real cuando se tome el diámetro mayor para sacar el volumen, va a ser mayor. Por eso necesitamos un valor intermedio, como un promedio o algo así.</p> <p><b>Equipo 3.</b> Vamos a calcular el diámetro mayor y luego el diámetro menor porque generalmente son más alargadas en sus caras hacia un extremo, por lo que necesitamos un valor medio de cada una de sus caras y finalmente el valor medio de las dos caras, y con este valor finalmente calcular el volumen.</p>	<p>Considera que a partir de las propuestas de las fórmulas de cono truncado y cilindro es posible obtener un valor aproximado para el volumen de la troza, considerando que la medida del diámetro producirá ciertos cambios en el volumen final.</p>
---	--	---	--

*Contenido Tabla 14. Identificación de estrategias en la 3ª Fase del modelo de Polya: Ejecutar un plan*

Articular las deducciones y proposiciones pensadas de forma lógica y coherente, se validan las hipótesis formuladas anteriormente, entre otras acciones dirigidas a estructurar la vía de solución y satisfacer la exigencia del problema.

*Estrategia relacionada*

Verificar cada paso del razonamiento

Tabla 14. Identificación de estrategias en la 3ª Fase del modelo de Polya

Indicadores	Preguntas guía de la docente	Estudiantes	Interpretación de la docente
<p>Procedimientos lógicos Reconoce la validez de utilizar el método y las fórmulas propuestas. Piensa en el procedimiento para resolver el problema con esas fórmulas, en caso necesario descríbelos.</p> <p>Procedimientos Heurísticos Sustituye los datos y calcula con las fórmulas. Calcula las variaciones que se sugieren.</p> <p>Procedimientos Metacognitivos Verificar que la solución responda a lo que se pide en el problema. Identificar si existe una contradicción con lo pensado inicialmente.</p>	<p>¿Pueden ver que el paso efectuado es correcto? ¿Pueden verificarlo? ¿Por qué utilizar ese método y esas fórmulas? ¿Esa solución responde a lo que se pide en el problema? ¿No hay contradicción con lo que pensaste inicialmente?</p>	<p><b>Equipo 1.</b> Por medio de la fórmula del cono truncado se sacan los volúmenes de cada parte del tronco cada 30 cm, hasta llegar a cubrir los 2.57 metros, que es el largo de la troza, se utilizar porque no es el tronco del árbol es exactamente un cilindro, es un poco más grueso el tronco en la parte de abajo que la parte de arriba, por lo que tendría diámetros diferentes. Para calcular el volumen total de la troza se suman los volúmenes parciales obtenidos de cada porción del tronco, estos resultados están expresados en centímetros cúbicos, hay que convertir a metros cúbicos. Un error que detectamos es que inicialmente no estábamos considerando los 30 cm que hay desde el suelo y la troza era de menor longitud por lo que realizamos una medición adicional para obtener los 2.57 metros.</p> <p><b>Equipo 2.</b> Medimos directamente del tronco los diámetros considerando los extremos de la troza, vamos a utilizar la fórmula de volumen de un cilindro, pero como la forma de las caras no son circulares vamos a calcular el volumen de la troza con el diámetro mayor y después con menor y sacar un valor intermedio del volumen a partir de estos resultados.</p> <p><b>Equipo 3.</b> Consideramos una troza ya cortada, para saber la longitud a la cual la cortan, medimos los dos diámetros para obtener un promedio del diámetro de cada cara y después un promedio de la medida del diámetro de las dos caras para entonces calcular el volumen con este último dato.</p>	<p>Los equipos inicialmente consideran fórmulas de cuerpos geométricos, cilindro principalmente y el equipo 1 el cono truncado, en los tres equipos se analiza las características del tronco que indican una diferencia en los valores de las medidas de los diámetros que puedan obtener, por lo que el equipo 2 y el equipo 3 optan por utilizar un promedio.</p>

Contenido de la Tabla 15. Descripción de las producciones generadas por los equipos de trabajo

Estregia relacionada

Verificar cada paso del razonamiento

Tabla 15. Descripción de las producciones generadas por los equipos de trabajo

**Descripción de las producciones**

**Equipo 1.** El equipo realiza las mediciones del contorno del pino a aproximadamente a cada 30 cm de altura, hasta llegar a los 2.57 metros, que es la medida estándar de la longitud de una troza que se podría obtener de ese ejemplar, posteriormente miden el contorno en estos mismo intervalos, para obtener el diámetro a partir de la fórmula de la circunferencia. Para obtener el volumen de la troza suman los volúmenes individuales obtenidos.



Figura 44. Ubicación de los puntos a cada 30 cm de altura hasta los 2.57 metros



Figura 45. Medida del contorno para la estimación del volumen a cada 30 cm



Figura 46. Medida del contorno para la estimación del volumen a cada 30 cm

Altura sección	Circunferencia	Diámetro	Radio	Altura
30 cm	200	63.66 cm	31.83 cm	29.98 cm
60 cm	195	62.07 cm	31.03 cm	29.98 cm
90 cm	189	60.16 cm	30.08 cm	29.97 cm
120 cm	182	57.93 cm	28.96 cm	29.98 cm
150 cm	176	56.02 cm	28.01 cm	29.99 cm
180 cm	171	54.34 cm	27.17 cm	29.97 cm
210 cm	169	53.79 cm	26.89 cm	30 cm
240 cm	169	53.79 cm	26.89 cm	29.99 cm
257 cm	165	52.52 cm	26.26 cm	29.97 cm

Figura 47. Tabulación de datos

Con los datos anteriores ya podemos calcular el volumen de cada pedazo del tronco

$$V = \frac{1}{3} \pi h (R^2 + r^2 + Rr)$$

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot 29.98 (31.83^2 + 31.05^2 + 31.83 \cdot 31.03)$$

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot 29.98 (1013.14 + 962.86 + 987.68)$$

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot 29.98 (2963.68)$$

$$V = 93045.14 \text{ cm}^3$$

Figura 48. Cálculo del volumen por secciones

Altura sección	Volumen	Volumen total hasta los
30 cm	-	12.57 m será igual a
60 cm	93045.14 cm <sup>3</sup>	la suma de los volúmenes
90 cm	83938.90 cm <sup>3</sup>	de cada sección
120 cm	85058.09 cm <sup>3</sup>	619633.65 cm <sup>3</sup>
150 cm	76428.30 cm <sup>3</sup>	
180 cm	74341.44 cm <sup>3</sup>	Un metro cúbico tiene
210 cm	71371.90 cm <sup>3</sup>	(100)(100)(100) cm <sup>3</sup>
240 cm	68300.25 cm <sup>3</sup>	1 m <sup>3</sup> = 1,000,000 cm <sup>3</sup>
257 cm	67149.63 cm <sup>3</sup>	
30-257 cm	637645.65 cm <sup>3</sup>	Esta parte del tronco tendrá
		0.619 m <sup>3</sup>

Figura 49. Determinación del volumen final a partir de la suma de los volúmenes parciales

**Equipo 2.** Colocan bordes fijos en el contorno del tronco del pino, de manera que puedan obtener dos diámetros de la cara inferior de la troza y dos diámetros de la cara superior de la troza. Con cada diámetro calculan el volumen de la troza, finalmente obtienen el valor del volumen a partir del promedio



*Figura 50.* Ubicación de tiras auxiliares para la medición del diámetro



*Figura 51.* Colocación de tiras para medición del diámetro en la base y a los 2.57 metros

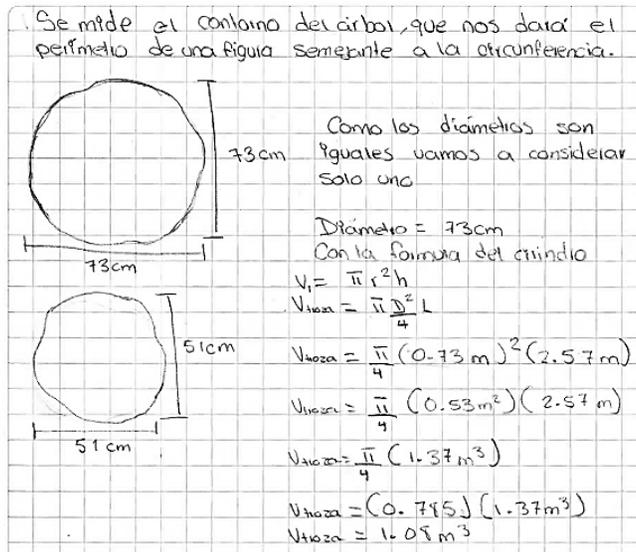


Figura 52. Cálculo del volumen de la troza considerando el diámetro de la parte inferior

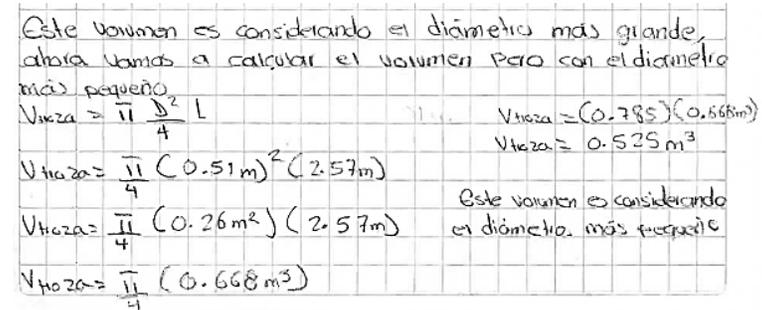


Figura 53. Cálculo del volumen de la troza considerando el diámetro de la parte superior

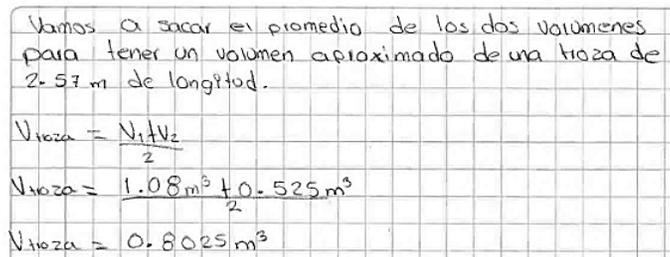


Figura 54. Cálculo del volumen de la troza a partir del promedio de los resultados anteriores

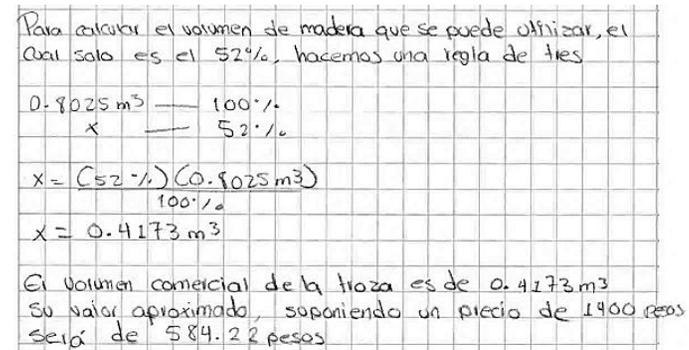


Figura 55. Estimación del valor comercial de la troza

Equipo 3. El equipo se organizó para tomar datos de trozas que anteriormente había sido cortadas, el equipo estaba interesado en obtener datos e información sobre las condiciones reales y de una manera similar a como la realizaban los técnicos. Midieron y corroboraron la longitud de la troza, identificaron



Figura 56. Medición del diámetro de una troza



Figura 57. Medición del contorno de la troza



Figura 58. Medición de la longitud de la troza

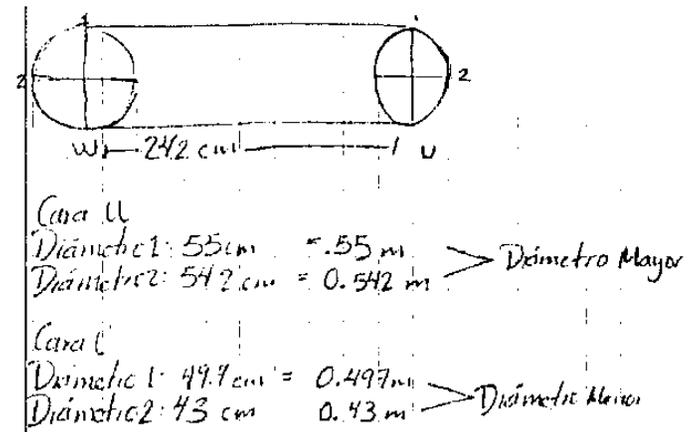


Figura 59. Representación de los datos obtenidos

$$DM = \frac{D1 + D2}{2} = \frac{0.55 + 0.542}{2} = 0.546 \text{ m}$$

$$Dm = \frac{D1 + D2}{2} = \frac{0.497 + 0.43}{2} = 0.464 \text{ m}$$

Diámetro promedio de las dos ranas de la troza

$$Dx = \frac{Dm + DM}{2}$$

$$Dx = \frac{0.464 + 0.546}{2} = 0.505 \text{ m}$$

Figura 60. Cálculo del promedio de la medida del diámetro a partir de las mediciones realizadas

La fórmula quedaría  $V = \pi \left(\frac{Dx}{2}\right)^2 L$   
 Simplificando  $V = \pi \frac{Dx^2}{4} L$

Por lo que el volumen lo vamos a calcular con esta expresión

$$V = \frac{\pi}{4} Dx^2 L$$

Para esta troza el volumen será  $V = \frac{\pi}{4} (0.505 \text{ m})^2 (2.42 \text{ m})$

$$V = \frac{\pi}{4} (0.255 \text{ m}^2) (2.42 \text{ m})$$

$$V = \frac{\pi}{4} (0.617 \text{ m}^3)$$

$$V = (0.785) (0.617 \text{ m}^3)$$

$$V = 0.485 \text{ m}^3$$

Figura 61. Cálculo del volumen de la troza a partir del diámetro promedio

Contenido Tabla 16. Identificación de estrategias en la 4ª Fase del modelo de Polya: Examinar la solución obtenida

Comprobar la vía de solución, si existen otras vías de solución alternativas y la posibilidad de transferirla a otros problemas.

*Estrategias relacionadas*

Reconsiderar la solución, reexaminar el resultado y el camino que conduce a la solución.

Identificar la existencia de otro medio para asegurarse de la exactitud del resultado

Utilizar el resultado o el método para resolver algún otro problema.

Tabla 16. Identificación de estrategias en la 4ª Fase del modelo de Polya

Indicadores	Preguntas guía	Estudiantes	Interpretación de la docente
Procedimientos lógicos	¿Es correcto el	<b>Equipo 1.</b> Verificamos cada parte del	El equipo 1 y el equipo 2 comprueban sus

<p>Verifica si el resultado es correcto.</p> <p>Revisa si existen contradicciones con las condiciones reales.</p> <p>Procedimientos Heurísticos</p> <p>Compara la vía de solución con las de otros problemas resueltos anteriormente.</p> <p>Procedimientos Metacognitivos</p> <p>Reflexiona sobre la pertinencia de la vía empleada para resolver el problema.</p> <p>Indaga sobre la existencia de una vía mejor para resolver el problema.</p> <p>Revisa todos los pasos para llegar a la vía de solución</p>	<p>resultado?</p> <p>¿No hay contradicciones con las condiciones reales?</p> <p>¿Es correcta la vía empleada para resolver el problema?</p> <p>¿Se puede obtener una solución más precisa?</p>	<p>procedimiento y comprobamos obteniendo el volumen de la troza considerando la longitud total de 2.57 metros, es decir, sacando el diámetro mayor desde la base a los 30 cm y el diámetro menor considerando los 2.87 metros. El volumen obtenido ya convirtiéndolo a metros cúbicos es de <math>0.637m^3</math>, con el método anterior obtuvimos <math>0.619m^3</math>, lo que nos da una diferencia de aproximadamente del 3%. Por lo que consideramos que el método que empleamos nos puede ayudar en obtener una estimación muy cercana a la cantidad de madera que se puede obtener.</p> <p><b>Equipo 2.</b> Revisamos el procedimiento del primer método de solución. Ahora vamos a comprobar midiendo el contorno, considerando una circunferencia podemos obtener la medida del diámetro de cada una de sus caras y poder calcular el volumen con el diámetro mayor y posteriormente calcular el volumen con el diámetro menor, a partir de los resultados obtenidos sacar un volumen promedio de la troza.</p> <p><b>Equipo 3.</b> Verificamos que nuestro procedimiento estuviera correcto, revisamos las operaciones. Utilizamos este mismo método para realizar la cubicación de otras trozas que están ya cortadas.</p>	<p>respuestas a través del uso de otro método de solución o una modificación al primer método empleado, el equipo 3 no comprueba, solo aplica el mismo método a otras trozas para obtener cierta práctica en el cálculo del volumen.</p>
--	--	---	--

*Contenido de la Tabla 17. Descripción de las producciones generadas por los equipos de trabajo*

*Estregias relacionadas*

Reconsiderar la solución, reexaminar el resultado y el camino que conduce a la solución.

Identificar la existencia de otro medio para asegurarse de la exactitud del resultado

Utilizar el resultado o el método para resolver algún otro problema.

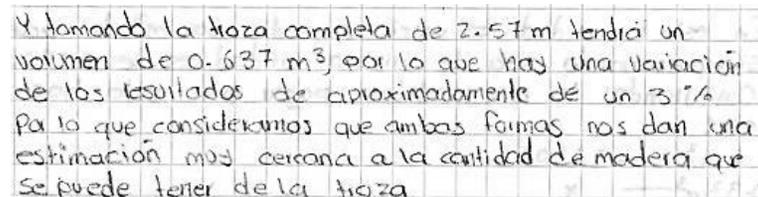
Tabla 17. Descripción de las producciones generadas por los equipos de trabajo

---

**Descripción de las producciones**

---

**Equipo 1.** Como otra vía de solución, el equipo realiza las mediciones del contorno a partir del tocón (la parte inferior del pino) hasta llegar a la altura de 2.57 metros, con esta medida obtienen el diámetro, lo cual les permite determinar a partir de la fórmula geométrica del cono truncado el volumen total de la troza.



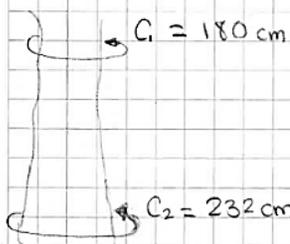
Y tomando la troza completa de 2.57 m tendrá un volumen de  $0.637 \text{ m}^3$ , por lo que hay una variación de los resultados de aproximadamente de un 3%. Por lo que consideramos que ambas formas nos dan una estimación más cercana a la cantidad de madera que se puede tener de la troza.

Figura 62. Cálculo del volumen considerando la longitud de una troza comercial

**Equipo 2.** Como forma de comprobar el resultado obtenido por el primer método, el equipo comprueba midiendo el contorno de manera directa, lo cual les permitirá obtener una medida aproximada del diámetro, una medida para la cara inferior de la troza y otra medida para la cara superior, a partir de estas medidas calcula el volumen considerando el diámetro mayor y el volumen considerando el diámetro menor, obteniendo a partir de éstos un promedio del volumen y una estimación del valor comercial de la troza.

---

Para comprobar medimos el contorno, el cual podemos considerar como una circunferencia y a partir de esta medida calcular el volumen.



Para calcular el diámetro

$$C = \pi D$$

$$D_1 = \frac{C}{\pi}$$

$$D_1 = \frac{180 \text{ cm}}{3.1416}$$

$$D_1 = 57.29 \text{ cm} = 0.5729 \text{ m}$$

$$D_2 = \frac{C}{\pi}$$

$$D_2 = \frac{232 \text{ cm}}{3.1416}$$

$$D_2 = 73.85 \text{ cm} = 0.7385 \text{ m}$$

Figura 63. Cálculo del diámetro a partir de la medida obtenida del contorno

Con el diámetro mayor

$$V_2 = \frac{\pi}{4} D^2 L$$

$$V_2 = \frac{\pi}{4} (0.7385 \text{ m})^2 (2.57 \text{ m})$$

$$V_2 = \frac{\pi}{4} (1.402 \text{ m}^3)$$

$$V_2 = 1.10 \text{ m}^3$$

Este es el volumen de la troza con el diámetro mayor sacamos un promedio de los dos volúmenes

Figura 65. Cálculo del volumen usando el diámetro de la cara superior de la troza

Vemos una variación en el diámetro más pequeño que en la medida que tomamos en el primer método de solución

Se calcula el volumen con la fórmula del cilindro

$$V = \frac{\pi}{4} D^2 L$$

$$V_1 = (0.785)(0.847 \text{ m}^3)$$

$$V_1 = 0.662 \text{ m}^3$$

Con el diámetro menor

$$V_1 = \frac{\pi}{4} (0.5729 \text{ m})^2 (2.57 \text{ m})$$

Este es el volumen de la troza considerando el diámetro menor.

$$V_1 = \frac{\pi}{4} (0.328 \text{ m}^2) (2.57 \text{ m})$$

Figura 64. Cálculo del volumen usando el diámetro de la cara inferior de la troza

$$V_{\text{troza}} = \frac{V_1 + V_2}{2}$$

$$V_{\text{troza}} = \frac{0.662 \text{ m}^3 + 1.10 \text{ m}^3}{2}$$

$$V_{\text{troza}} = 0.881 \text{ m}^3$$

Para tener un resultado más exacto podemos sacar un promedio de los volúmenes que obtuvimos por cada método

$$V_{\text{final}} = \frac{V_{\text{troza}} + V_{\text{troza}}}{2}$$

$$V_{\text{final}} = \frac{0.881 \text{ m}^3 + 0.8625 \text{ m}^3}{2}$$

$$V_{\text{final}} = \frac{1.6835 \text{ m}^3}{2}$$

$$V_{\text{final}} = 0.842 \text{ m}^3$$

El volumen que podemos considerar para esta troza es de 0.842 m<sup>3</sup>

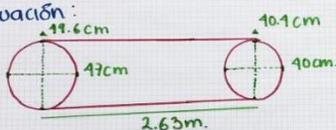
Figura 66. Cálculo del volumen a partir del promedio de los volúmenes obtenidos con el diámetro inferior y superior

Equipo 3. El equipo decide realizar la medición de algunas otras trozas que se encuentran ya derribadas. El proceso de cubicación del pino en

pie y de las trozas fue para este equipo interesante y deciden mostrarlo mediante un material audiovisual.

Para la Cubicación de dichas trozas se utilizo la formula:

$V_{troza} = \pi \frac{(Dx)^2}{4} L$  Pero antes, como los trozos de un árbol no son cilindricas se trata de asemejarlo con este cuerpo, por esa razón se calcula el promedio a partir de la suma de los dos diámetros (el M y m) y posteriormente se divide entre dos como se representa a continuación:



$Dx = \frac{Dm + Dm}{2}$   
 $Dx = \frac{0.496m + 0.47m}{2}$   
 $Dx = 0.885m$   
 $Dx = 0.4425m$

Convertir a metros  
 $\frac{49.6cm + 47cm}{2} = \frac{0.496m + 0.47}{2} = 0.983m$  Diámetro

$\frac{40.4cm + 40cm}{2} = \frac{0.404m + 0.4m}{2} = 0.902m$  Diámetro

Una vez que se obtiene el promedio del diámetro se utiliza la formula mencionada anteriormente.

$V_{troza} = \pi \frac{(Dx)^2}{4} L$

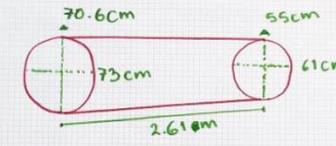
$V_{troza} = 3.1416 \frac{(0.4425m)^2}{4} (2.63m)$   $V_{troza} = 0.4044577816 m^3$

$V_{troza} = 3.1416 \frac{(0.19880625m^2)}{4} (2.63m)$

$V_{troza} = 3.1416 (0.01489515625m^2) (2.63m)$

$V_{troza} = 3.1416 (0.1287926094m^3)$

Figura 67. Cálculo del volumen de la troza partir de los datos obtenidos en las mediciones



$Dx = \frac{Dm + Dm}{2}$   
 $Dx = \frac{0.718m + 0.58m}{2}$   
 $Dx = 1.298m$   
 $Dx = 0.649m$

$\frac{70.6cm + 73cm}{2} = \frac{0.706m + 0.73m}{2} = 0.718m$

$\frac{55cm + 61cm}{2} = \frac{0.55m + 0.61m}{2} = 0.58m$

Una vez que se obtiene el promedio del diámetro se utiliza la formula:

$V_{troza} = \pi \frac{(Dx)^2}{4} L$

$V_{troza} = 3.1416 \frac{(0.649m)^2}{4} (2.61m)$

$V_{troza} = 3.1416 \frac{(0.1421201m^2)}{4} (2.61m)$   $V_{troza} = 0.863417402m^3$

$V_{troza} = 3.1416 (0.10530025m^2) (2.61m)$

$V_{troza} = 3.1416 (0.274833652m^3)$

De igual manera se realizó el coeficiente de rendimiento del Volumen de la troza, es decir, la cantidad de madera que se utiliza para darle un valor comercial y los resultados fueron los siguientes:

$\frac{(0.86)}{100} (52)$   $0.4472 \times 1400 = 626.08$

$(0.0086)(52) = 0.4472$

Figura 68. Cálculo del volumen y estimación del valor comercial de la troza partir de los datos obtenidos en las mediciones

## CONCLUSIONES

Se considera que se ha alcanzado el objetivo general de la investigación que es diseñar e implementar un problema del contexto real de un grupo de estudiantes de bachillerato considerando los aspectos de la teoría de situaciones auténticas de Palm y el análisis de las estrategias del modelo de resolución de problemas de Polya durante el proceso de resolución.

Respecto al diseño del problema se destaca la importancia de considerar el contexto cotidiano de los estudiantes, para esta investigación, la fuente inicial de información es a partir de los resultados generados por el diagnóstico de la comunidad, donde se plasman las principales características y necesidades, manteniendo también, la correspondiente alineación a los contenidos curriculares y características propias del modelo educativo.

En el análisis de la autenticidad de la tarea matemática diseñada a partir de los aspectos a considerar para el diseño de situaciones auténticas en la teoría de Torulf Palm, se establece que cumple la totalidad de los aspectos y subaspectos indicados en dicha teoría. Sin embargo, durante la etapa de implementación (específicamente en la ejecución y verificación del resultado), los estudiantes indicaron que era importante el uso de instrumentos con mayor precisión para realizar las mediciones para poder determinar la aproximación del método empleado al que utilizaban los expertos, por lo que el *subaspecto F1. Disponibilidad de herramientas externas correspondientes al aspecto F. Circunstancias*, el cual se refiere a las herramientas externas disponibles en la situación de trabajo no se cumple, dado que los estudiantes construyeron un instrumento para la medición de ángulos, cuya impresión en la lectura puede generar resultados diferentes al calcular la altura del objeto físico.

Observamos que los criterios establecidos en la Teoría de Palm (2006) pueden limitar en algún momento la exploración de problemas que emergen del contexto de los estudiantes, quienes al no poseer, por ejemplo, herramientas o instrumentos profesionales, limitan su creatividad para explorar otros métodos de solución o para diseñar o construir instrumentos que les permitan un acercamiento hacia la obtención de información. Es posible también que en los estudiantes surjan dudas o preguntas diferentes a los que comúnmente realiza el experto, adicionando cuestiones no sólo técnicas sino también de otras áreas, por ejemplo, en el caso abordado en la investigación,

surgieron preguntas en los estudiantes sobre cómo determinar la edad de la especie, qué altura máxima pueden alcanzar, cómo es el ritmo de crecimiento, entre otras.

En la implementación del problema se observó que inicialmente los estudiantes no conocían las fases del modelo de Polya en la resolución de problemas, sin embargo, siguieron éstas fases no precisamente de manera lineal y consecutiva, pero se orientaron a partir de las preguntas guía. Las fases iniciales (*comprender el problema y concebir un plan*) fueron más difíciles de guiar dado que los estudiantes están acostumbrados a una revisión rápida del problema e ir directamente a la ejecución de un algoritmo, pero el diseño de este problema no permitía una vía de solución rápida, por lo que fue necesario para ellos detenerse a comprender el problema, plantear alguna propuesta de solución y analizar dicha propuesta antes de ejecutarla.

Al tratar de concebir un plan para obtener la altura de un objeto físico cuya medición no se puede realizar directamente, es decir, es inaccesible, algunos de los estudiantes dentro de sus conocimientos previos y tratando de relacionar el problema con otro similar o conocido previamente, identificaron el “método de sombras” como primera opción, que involucra el conocimiento del concepto y los criterios de semejanza de triángulos. Situándose en el contexto referido en el problema, de forma casi inmediata reconocieron que el método no era factible, pues dadas las condiciones del terreno, no era posible medir las sombras que generaban los objetos, por lo que analizaron que este método no era posible aplicarlo en el contexto real.

En la *ejecución del plan*, los estudiantes realizaron las mediciones de objetos físicos o partes de los mismos, lo que les permitió observar que algunos datos o resultados que proporcionaban los libros que utilizaron como fuentes de consulta no eran acordes a la situación planteada en su contexto. Por ejemplo, en los libros indicaban alturas de árboles superiores a los 36 metros. También observaron que los textos no proporcionaban sugerencias de cómo realizar las mediciones o qué instrumentos pueden utilizar para poder comprobar los datos o resultados. Identificaron que al resolver este tipo de problemas no solo se deben limitar al tema visto, sino que hay que identificar qué herramientas matemáticas deben aplicar y qué criterios deben considerar para poder utilizar dichas herramientas.

Las estrategias presentes durante el proceso de resolución del problema fueron las siguientes: Descomponer un problema en casos más simples; dibujar alguna figura relacionada al problema y

destacar en ella la incógnita y los datos; nombrar elementos presentes en la figura e introducir una notación adecuada; recordar algún problema ya resuelto estrechamente relacionado con el problema actual, que tenga la misma incógnita o similar; modificar el problema de forma que nos pueda conducir a algún otro problema auxiliar apropiado; tratar de resolver primero algún problema similar; verificar cada paso del razonamiento; reconsiderar la solución reexaminar el resultado y el camino que conduce a la solución; identificar la existencia de otro medio para asegurarse de la exactitud del resultado y utilizar el resultado o el método para resolver algún otro problema. Por ello podemos afirmar que la resolución de este problema real del contexto de los estudiantes puso en marcha la utilización de diversas estrategias, en un proceso dinámico y fluido, no necesariamente unidireccional.

Tal como afirma Van Den Heuvel-Panhuizen (2005, citado en Albarracín y Gorgorió, 2013), en que los problemas con contexto real pueden permitir que los alumnos utilicen métodos o estrategias que utilizan en su vida cotidiana. Sin embargo, si la situación descrita tiene un nivel de complejidad considerable o no se aporta suficiente información, hemos podido observar que algunos de los alumnos pueden mostrar ciertas dificultades para elaborar propuestas para la resolución.

El resolver el problema con objetos reales permitió a los estudiantes explorar vías de solución, que probablemente no pondrían en marcha con un problema ajeno a su contexto y limitado al uso de procesos algorítmicos. Desde el hecho de buscar cómo obtener los datos, cómo representarlos, qué conceptos y qué herramientas matemáticas son necesarias. La importancia de cuestionarse sobre el efecto de ciertas variables al cambiar algún dato, la necesidad de construir o usar instrumentos específicos de medición, el ser un propio crítico y evaluador de sus procesos y resultados, así como el no limitarse al empleo de un solo método de solución, y proyectar esta solución a otros problemas similares o relacionados, les permitió promover el carácter funcional del conocimiento matemático escolar.

La solución de este problema permitió a los estudiante obtener una *estimación* sobre el volumen de madera comercial del pino y del valor comercial del mismo, situación que es necesario y de interés para los pobladores, además les da la apertura para explorar situaciones de su contexto que están relacionadas con la estimación del volumen de objetos físicos que geoméricamente no tienen formas definidas o cuyas dimensiones no permiten una medición directa, por ejemplo en la

construcción y revestimiento de caminos y carreteras, la construcción de casas, movimiento de materiales en carros de carga, estimar la cantidad de material a utilizar, entre otras, son situaciones que están presentes en este contexto.

El diseño de este tipo de problemas, además de cumplir con los lineamientos que propone el modelo educativo intercultural, nos permite como docentes explorar otras áreas de conocimiento, promover situaciones interdisciplinarias que permitan al estudiante reconocer que las matemáticas no están aisladas y que desde tiempos remotos han permitido solucionar problemas que surgen de necesidades colectivas.

De manera complementaria a lo descrito en los párrafos anteriores, es importante mencionar el aprendizaje generado derivado más allá de la funcionalidad de los contenidos matemáticos, los estudiantes cuestionaron sobre interrogantes generadas a partir de la estimación del valor comercial del pino y de la troza, que llevaron a la discusión sobre aspectos como la importancia de la preservación de esta especie forestal y el uso racional del recurso forestal, dado que es realmente mínimo el recurso económico recibido por los habitantes en comparación con el que puede quedar en manos de quienes lo explotan y saquean, mientras que las repercusiones ambientales quedan en la comunidad y en sus habitantes.

La experiencia de este trabajo de investigación resultó ser enriquecedora, no solo para los estudiantes, sino para la autora de este trabajo, ya que permitió observar no solo el desempeño de los estudiantes durante el proceso, sino la interacción en el trabajo colaborativo, la motivación y el interés por parte de los estudiantes por resolver un problema prioritario para su comunidad y observar cómo pusieron en marcha los conocimientos que ya poseían o la necesidad de reforzar otros más que necesitaban. Además, vivir la verdadera función del docente como facilitador o guía del aprendizaje.

Los estudiantes reconocieron y valoraron la utilidad de las matemáticas a partir de la experiencia fuera del aula, el poder establecer propuestas de solución a una problemática que les parecía lejana a su actividad escolar y compleja para su nivel escolar, quizá solo accesible para aquellos con experiencia o estudios en el área forestal, ante esta situación reconocieron el potencial de los recursos matemáticos y no matemáticos con los que cuenta para resolver problemas de su comunidad.

En el diseño de los instrumentos para poder realizar las mediciones, los estudiantes recurrieron a la comprobación a partir del cálculo de distancias conocidas o accesibles, por lo que analizaron que estando ante una situación real en el campo es difícil repetir las mediciones.

Al realizar la revisión de la literatura y materiales audiovisuales sobre el tema en estudio, los estudiantes observaron que no existe un material audiovisual sobre el tema, que lo explicara de una manera clara y accesible para un ciudadano común, y sobre todo para la especie de pino que existe en la comunidad, por lo que por iniciativa propia, decidieron producir un material completo que describe todo el proceso realizado.

## Referencias

- Albarracín, L. y Gorgorió, N. (2013). Problemas de estimación de grandes cantidades: modelización e influencia del contexto. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 16(3), 289-315.
- Alsina, Á. (2009). El aprendizaje realista: una contribución de la investigación en Educación Matemática a la formación del profesorado. En M. González, M. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII*, 119-127. Santander: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.
- Bressan, A., Zolkower, B. y Gallego, F. (2004). Los principios de la educación matemática realista. En H. Alagia (Comp.) *Reflexiones teóricas para la educación matemática*. Buenos Aires: Editorial Libros del Zorzal.
- Colegio Superior para la Educación Integral Intercultural de Oaxaca (2014). *Modelo Educativo Integral Indígena. Planes y programas de estudio 2014*. Oaxaca: CSEIIO.
- Cantoral, R. (2013). *Teoría socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. Barcelona: Gedisa.
- Cantoral, R., Montiel, G. y Reyes-Gasperini, D. (2015). Análisis del discurso matemático escolar en los libros de texto, una mirada desde la Teoría Socioepistemológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 8, 9-28.
- Codina, A. y Rivera, A. (2001). Hacia una instrucción basada en la resolución de problemas: los términos problema, solución y resolución. *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática*, 125-135.
- Díaz, J. y Díaz, R. (2018). Los métodos de resolución de problemas y el desarrollo del pensamiento matemático. *Boletim de Educação Matemática*, 32(60), 57-74.
- Díaz, V. y Poblete, A. (2001). Contextualizando tipos de problemas matemáticos en el aula. *Números. Revista de didáctica de las matemáticas* 45, 33-41.
- Estudio de cuenca de abasto para el desarrollo industrial forestal maderable de la región Sierra Juárez, Oaxaca. (2015). Recuperado de <http://www.conafor.gob.mx:8080/documentos/docs/22/6398Sierra%20Norte%20de%20Oaxaca.pdf>
- Font, V. (2006). Problemas en un contexto cotidiano. *Cuadernos de pedagogía*, 355, 52-54.

- García, S. (2011). *Las contextualizaciones artificiales de las mediciones indirectas en los libros de texto de matemáticas de secundaria*. Tesis de licenciatura no publicada, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. México.
- Garrido, M. (2015). *Matemáticas II*. México: Secretaría de Educación Pública.
- Gravemeijer, K. y Doorman, M. (1999). Context problems in realistic mathematics education: A calculus course as an example. *Educational studies in mathematics*, 39(1-3), 111-129.
- Gutiérrez, R., Moreno, O. y Villota, E. (2013). *Guía de cubicación de madera*. Recuperado de [http://www.minambiente.gov.co/images/BosquesBiodiversidadyServiciosEcosistemicos/pdf/Gobernanza\\_forestal\\_2/10.\\_Gu%C3%ADa\\_de\\_Cubicaci%C3%B3n\\_de\\_Madera.pdf](http://www.minambiente.gov.co/images/BosquesBiodiversidadyServiciosEcosistemicos/pdf/Gobernanza_forestal_2/10._Gu%C3%ADa_de_Cubicaci%C3%B3n_de_Madera.pdf)
- Kilpatrick, J. (1969). Problem Solving in Mathematics. *Review of Educational Research*, 39(4), 523-534
- Lopes, B. y Costa, N. (1996). Modelo de enseñanza – aprendizaje centrado en la resolución de problemas: Fundamentación, presentación e implicaciones educativas. *Revista de investigación y experiencias didácticas*, 14(1), 45-61.
- Martínez, M. (2008). Contextualización y enseñanza de las matemáticas en la educación primaria. En R. Cantoral, O. Covián, R. M. Farfán, J. Lezama y A. Romo (Eds.). *Investigaciones sobre Enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas* (pp. 613-641). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Monereo, F. (2009). La enseñanza de tareas de autorregulación a través de tareas auténticas. En P. Díez Arcos (Coord). *Nuevas funciones de la evaluación* (pp. 73-93). Madrid: Ministerio de Educación.
- Montiel, G. y Jácome, G. (2014). Significado trigonométrico en el profesor. *Boletim de Educação Matemática*, 28(50), 1193-1216.
- Mori, M. (2008). Una propuesta metodológica para la intervención comunitaria. *Liberabit*, 14(14), 81-90.
- Muñoz, L., Londoño, S., Jaramillo, C. y Villa-Ochoa, J. (2014). Contextos auténticos y la producción de modelos matemáticos escolares. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, 42(1), 48-67.
- National Council of Teachers of Mathematics (1990). *Sugerencias para resolver problemas*. México: Trillas.

- Núñez, J. (2005). Sobre la estimación en la enseñanza de las matemáticas y la cubicación de maderas como situación didáctica. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 62, 65-80.
- Palm, T. (2006). Word problems simulations of real-world situations: A proposed framework. *For the Learning of Mathematics*, 26(1), 42-47.
- Palm, T. (2008). Impact of authenticity on sense making in word problems solving. *Educational Studies in Mathematics*, 67(1), 37-58.
- Palm, T. (2009). Theory of Authentic Task Situations. En: L. Verschaffel, B. Greer, W. Van Dooren y S. Mukhopadhyay (Eds.) *Words and Worlds: Modelling Verbal Descriptions of Situations* (pp. 3-19). Netherlands: Sense Publishers.
- Parra, H. (2015). El necesario pero difícil diálogo entre la matemática escolar y la realidad de los estudiantes. En R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, Vol. 28, 137-144. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Poggioli, L. (1999). *Estrategias de resolución de problemas*. Caracas: Fundación Polar.
- Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.
- Ponte, J. (2004). Problemas e investigaciones en la actividad matemática de los alumnos. En J. Giménez, L. Santos y J. Ponte (Eds.), *La actividad matemática en el aula* (pp. 25-34). Barcelona: Graó.
- Pérez, Y. y Ramírez, R. (2011). Estrategias de enseñanza de la resolución de problemas matemáticos. Fundamentos teóricos y metodológicos. *Revista de Investigación*, 35(73), 169-193.
- Pozo, J., Pérez, M., Domínguez, J., Gómez, M. y Postigo, Y. (1998). *La solución de problemas*. México: Santillana.
- Riaño, O. y Lizarazo, I. (2017). Estimación del volumen de madera en árboles mediante polinomio único de ahusamiento. *Colombia Forestal*, 20(1), 52-62.
- Romahn de la Vega, C., Ramírez, H. y Treviño, J. (1994). *Dendrometría*. México: Universidad Autónoma Chapingo.
- Santos, M. (1996). *Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Santos, M. (2007). *La resolución de problemas matemáticos. Fundamentos cognitivos*. México: Trillas.

Secretaría de Educación Pública (2017). *Planes de estudio de referencia del componente básico del marco curricular común de la educación media superior*. México: SEP. Recuperado de <http://sems.gob.mx/work/models/sems/Resource/12491/4/images/libro.pdf>

Van Den Heuvel-Panhuizen, M. (2005). The role of contexts in assessment problems in mathematics. *For the learning of mathematics*, 25(2), 2-23.

Waldegg, G. (1998). Principios constructivistas para la educación matemática. *Revista Ema*, 4(1), 15-31.

Zulkardi, Z. (1999). *How to design mathematics lessons based on the realistic approach*. Recuperado de <http://eprints.unsri.ac.id/692/1/rme.html>

## ANEXO A

### DISEÑO DE LAS ACTIVIDADES

A continuación se presenta la estructura de las actividades en el aula considerando los criterios de instrucción identificados en Santos (2007).

Actividades de enseñanza	Actividades de aprendizaje
<p>Orienta el análisis del contexto a partir de la presentación de los resultados obtenidos del diagnóstico comunitario en los apartados del eje ambiental (ubicación y estado de los recursos) y el eje económico (sectores económicos) así como los resultados generados en la asamblea y el taller participativo</p> <p>Priorización de problemas cuyas alternativas de solución sean accesibles al grupo de estudiantes.</p> <p>Exposición de la tarea auténtica proveniente del contexto y análisis del mismo: “¿Cómo determinar la cantidad de madera comercial contenida en un pino strobus variedad chiapensis en sus etapas primarias dentro de la cadena forestal?”</p> <p>Expone los conceptos y terminología básica del tema y considerando los saberes locales, la experiencia de los estudiantes y los resultados obtenidos a partir de la investigación documental y de campo.</p> <p>Organiza a los estudiantes en equipos y orienta a los integrantes para la generación de propuestas para la resolución del problema a través de preguntas guías acordes a las fases del modelo de Polya.</p> <p>Coordina la exposición de las propuestas para la solución del problema y retroalimenta la participación de los estudiantes.</p> <p>Expone los contenidos matemáticos pertinentes detectados a partir de la exposición de posibles soluciones al problema involucrando a los estudiantes durante la exposición.</p> <p>Guía a los estudiantes en las actividades en el aula como parte del proceso de resolución del problema.</p>	<p>Participación individual y análisis en equipos de trabajo sobre los puntos presentados del diagnóstico comunitario y discusión sobre los resultados generados en la asamblea y taller participativo.</p> <p>Selección de problemas de interés cuyas alternativas de solución sean accesibles al grupo de estudiantes.</p> <p>Trabajo en equipo para realizar el análisis inicial del contenido de la tarea escolar, generación de propuestas iniciales. Participación individual.</p> <p>Participación a través de una lluvia de ideas previo análisis del tema expuesto y discusión en equipo para incorporar los saberes locales acerca de la terminología básica.</p> <p>Participación individual e integración al trabajo colaborativo para la generación de propuestas que permitan un acercamiento a la solución del problema.</p> <p>Explica y argumenta las propuestas de solución generadas por el equipo de trabajo. Socializa las propuestas generadas.</p> <p>Participación a partir de lluvia de ideas.</p> <p>Participación individual e integración al trabajo en equipo en el aula. Análisis en equipo de las propuestas planteadas.</p>

## ANEXO B

### Galería Fotográfica

#### Diagnóstico Comunitario



Santa María Yaviche, Municipio de Tanetze de Zaragoza, Distrito de Villa Alta, Oaxaca, México.  
Agencia de policía



Entrevista en la localidad



Entrevista en la localidad



Entrevistas en la localidad



Entrevistas en la localidad



Taller participativo



Entrevista a experto



Entrevista a experto