BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

CONOCIMIENTOS QUE UTILIZAN LOS PROFESORES AL PREDECIR EL POSIBLE COMPORTAMIENTO MATEMÁTICO DE ESTUDIANTES EN UNA ACTIVIDAD DE INTRODUCCIÓN A SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN

TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE

MAESTRA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

PRESENTA

LIC. DANAE GÓMEZ ARROYO

DIRECTOR DE TESIS

DR. ERIC FLORES MEDRANO

CO-DIRECTOR DE TESIS

DR. JOSÉ GABRIEL SÁNCHEZ RUÍZ

PUEBLA, PUE. MAYO 2019

A mi familia:

El tesoro más valioso de mi vida.

Este trabajo se realizó gracias al apoyo financiero otorgado por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT), en el periodo comprendido de Enero de 2017 a Diciembre de 2018.

N° de CVU: 816902

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar quiero agradecer a ese ser divino que me mantiene en este mundo lleno de aventuras. Quiero agradecer a mi familia que continúa apoyándome a cada paso que doy, pues a pesar de que no siempre tomo las mejores decisiones, ellos siempre están a mi lado, son mi mayor tesoro; gracias por todo su cariño. Gracias mami Cruz Virginia, gracias papá Domingo, gracias hermanos Flor y Arel. Los amo con todo mi corazón. También quiero agradecer a mis pedacitos de cielo: mis sobrinos, son cinco pillos que adoro con locura.

Quiero agradecer a David paloma por animarme a no esperar un año e ingresar inmediatamente a la maestría, sin duda alguna ha sido una de las mejores oportunidades y experiencias de mi vida, muchas gracias David por tu apoyo y cariño.

Quiero agradecer a mis entrañables amigos (Alex, Dul, Miri, Anahi, Yassy, Toñito, Lupita, Mina, L, Jacob, Giovanni, Migue, etc.) que aunque no nos vemos seguido continuamos unidos y los años no afectan nuestra amistad. También gracias a los amigos que hice en estos dos maravillosos años (Juan Carlos, Marquito, Rafa, etc.), compartí con ustedes una nueva e importante etapa de mi vida, jamás voy a olvidar todo lo que hemos vivido.

Quisiera agradecer a mi director de tesis el Dr. Eric Flores Medrano por dirigir este proyecto, sé que algunas veces cuestioné sus sugerencias y jamás tomó una actitud impositiva, por el contrario siempre respetó mis ideas y las consideró para el desarrollo y culminación de esta tesis. Además quiero agradecerle el apoyo para que pudiera realizar la estancia en Brasil, esa experiencia me hizo crecer muchísimo, no sólo académicamente sino como persona.

Asimismo, quiero agradecer al Dr. Miguel Ribeiro quien me recibió en Brasil y me mostró el inmenso trabajo que realiza en la UNICAMP, además de que me ayudó a conocer otras perspectivas y enfoques del MTSK, también me dio grandes sugerencias para mi pesquisa. De igual manera quiero agradecer al Dr. Carrillo el tiempo que dedicó a revisar mi trabajo y darme tan valiosas ideas, es un ser humano hermoso. Quiero agradecer a las personitas que conocí y me acogieron durante mi estancia, fue increíble conocer otra cultura, otro idioma, otras maneras de pensar, trabajar y vivir. Muito obrigada a Bia, o Marcos, a Fabi, a Alessandra, o Juscier, o Arcanjo, a Milena, a Ingrid, a Leticia, a Ernesto, a Mari, a Rosana, a Silvana e a Dr. Dario; muito obrigada pessoal por suas contribuções e também por me ensinar um pouco de portugués rsrsrs. Claro, eu não esqueço meus grandes amigos Ana y Gonzalo, mi venezolana y chileno favoritos; gracias a ustedes no extrañé tanto mi hogar, juntos hicimos y deshicimos por todo Brasil kkk. En especial quiero agradecer a Ana, quien fue mi soporte o como la bauticé, mi ángel venezolano en Brasil, te amo muito Ana minha querida e grande amiga. También quiero agradecer a Rodrigo, quien me enseñó otra faceta de Brasil y me hizo valorar las pequeñas grandes cosas de la vida.

De igual manera quiero agradecer a Aby, quien siempre nos apoyó en las cuestiones administrativas con una sonrisa cálida que nos daba ánimo.

Finalmente, quiero agradecer a mi codirector de tesis, el Dr. José Gabriel Sánchez Ruíz por las valiosas aportaciones efectuadas para la mejora continua de este trabajo y, asimismo, a mis sinodales por las contribuciones que retroalimentaron la tesis, todos son profesionales comprometidos, respetuosos, responsables y con una gran calidez humana. Gracias Dr. José Gabriel Sánchez Ruíz, Dra. Lidia Aurora Hernández Rebollar, Dra. Estela de Lourdes Juárez Ruiz, Dra. Dinazar Isabel Escudero Avila y Dra. Erika Canché Góngora.

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE FIGURAS

RESUMEN

Diversos estudios han reportado dificultades que tienen los estudiantes en Cálculo. Una alternativa que poseen los profesores para lidiar con dichas dificultades es la planificación adecuada de los temas en cuestión, y una competencia deseable es anticiparse al comportamiento y desempeño matemático de sus estudiantes frente a las actividades propuestas. Este reporte muestra una investigación que analiza el conocimiento que emplea un grupo de profesores al predecir el posible comportamiento matemático de los estudiantes en una actividad de introducción a Sólidos de Revolución.

ABSTRACT

Several studies have reported the difficulties that some students have with Calculus. An alternative that professors possess for handling those difficulties it's an adequate planning of the issued topic, and to anticipate to the behaviour and the mathematical development of their students facing the proposed activities is the wished competence. This report shows a research which analyses the knowledge that a group of teachers employs to predict the possible student's mathematical behaviour in an introductory activity of Solids of Revolution.

INTRODUCCIÓN GENERAL

Diversas investigaciones se han centrado en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, resultando de interés analizar al profesor, quien es clave fundamental en este proceso. De los aspectos que se pueden investigar con relación a éste, se encuentra su conocimiento. Diferentes autores han propuesto cómo es el conocimiento que el docente de matemáticas moviliza, dentro de estas propuestas se destaca el Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK).

El MTSK propone una clasificación de los conocimientos que el profesor de matemáticas pone en acción para llevar a cabo su profesión. Sin embargo, nos podemos cuestionar el cómo explorar dichos conocimientos. En este trabajo se da una propuesta de cómo indagar los conocimientos que pone en juego el docente dada una actividad (hipótesis sobre el posible proceder de los estudiantes) y a la vez, qué conocimientos fueron empleados por los profesores para conjeturar posibles maneras de responder de los estudiantes a la actividad, apoyándonos del modelo MTSK para posteriormente contrastar las conjeturas formuladas con lo sucedido en el aula una vez implementada la actividad de introducción a Sólidos de Revolución.

Por lo que, en los diferentes apartados de esta investigación, se encuentra en primer lugar, una breve descripción de por qué auxiliarse del modelo MTSK y no de otras teorías sobre el conocimiento del profesor de matemáticas; así como qué motivó esta investigación, la importancia de abordarla y las preguntas de interés. En el capítulo 2, se describe el modelo MTSK y las principales problemáticas que tienen los estudiantes con relación a las funciones y visualización 3D. Posteriormente, en el capítulo 3 se detalla la metodología que siguió la investigación: los informantes del estudio, los instrumentos ocupados para la recolección de la información, así como las técnicas utilizadas para este fin y, también se explica la manera en que se analizaron los datos recabados. En el capítulo 4, se muestra el análisis efectuado a los datos recolectados y, finalmente, en la siguiente sección se presentan las conclusiones de la investigación.

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

En este capítulo se contextualiza el problema de investigación. En primera instancia, se presenta una descripción relacionada a la fuerza que ha tomado investigar el conocimiento del profesor en el proceso de enseñanza-aprendizaje, así como el origen de un modelo que caracteriza la naturaleza de los conocimientos que pone en práctica el profesor de matemáticas, el cual sirvió como herramienta teórica y analítica en este trabajo; además, se muestra la potencialidad del modelo en diferentes escenarios, la motivación para indagar acerca de este tema, la importancia de abordarlo, las preguntas que se pretenden responder y los objetivos de investigación.

1.1. Planteamiento del Problema

En el campo de la educación matemática, se han realizado diversas investigaciones en relación con el proceso de enseñanza-aprendizaje de la disciplina desde perspectivas diferentes. En este proceso, el profesor es un elemento que juega un papel trascendental, ya que contribuye al desarrollo del conocimiento de los estudiantes a partir del suyo. Por esta razón, se han realizado numerosas investigaciones en donde el foco es el profesor de matemáticas (Llinares, 1998; Grajales, 2017).

Algunas de estas investigaciones se han centrado en el conocimiento del profesor, en especial, intentando determinar qué conocimiento(s) utiliza al ejecutar actividades específicas concernientes a su profesión y cuál es la naturaleza de esos conocimientos. En su tesis doctoral, Escudero (2015) presenta diferentes propuestas elaboradas hasta ese momento sobre el conocimiento del profesor de matemáticas, entre éstas se expone el trabajo de Shulman (1986), quien clasifica el conocimiento del profesor en tres categorías de conocimiento: del contenido de la materia, pedagógico del contenido y curricular; en tanto, Llinares (1996) lo divide en conocimiento del contenido y conocimiento del contenido pedagógico; Schoenfeld y Kilpatrick (2008) mencionan que para enseñar matemáticas se tienen que conocer las matemáticas de la escuela en profundidad, conocer a los alumnos como pensadores, conocer a los alumnos como aprendices, elaborar y gestionar el entorno de aprendizaje, desarrollar normas del aula y apoyar el discurso del aula como parte de la "enseñanza para la comprensión", construir relaciones que apoyen el aprendizaje y, reflexionar sobre la propia práctica; Muñoz-Catalán (2010) distingue el conocimiento matemático del contenido y el conocimiento didáctico del contenido; por su parte, Ball, Thames y Phelps (2008) proponen el modelo para la enseñanza llamado Mathematical Knowledge for Teaching o MKT, el cual incluye el conocimiento matemático y el conocimiento pedagógico del contenido.

1.1.1. Surgimiento del modelo Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK)

El modelo MKT propuesto por Ball et al. (2008) tiene por objetivo:

> "La identificación del conocimiento matemático que necesita el profesor para la enseñanza y cuyo enfoque refleja un interés por analizar el conocimiento del profesor como un conocimiento propio y específico de esa profesión, algo que sólo él puede y debe saber sobre su práctica, el cual no necesariamente está limitado al trabajo de aula" (Escudero, 2015, p.15).

Sin embargo, Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán (2013) demuestran que el modelo presenta dificultades asociadas a la delimitación del subdominio denominado conocimiento de contenido especializado (SCK) puesto que se puede confundir con el subdominio conocimiento de contenido común (CCK). Ball y Bass (2009, citado en Escudero, 2015) definen el CCK como el conocimiento que tiene cualquier persona educada según el nivel correspondiente y que, por consiguiente, no es exclusivo del profesor de matemáticas; mientras que el SCK hace referencia a un conocimiento netamente matemático y único del profesor de matemáticas. Por ello, según Escudero (2015, p.17) resulta complejo identificar que

> "un cierto tipo o forma de conocer un contenido sea propia del profesor de matemáticas y no lo sea de otra profesión puesto que no es posible analizar a cada una de las profesiones para determinarlo, además de requerir un estándar sobre el conocimiento que cualquier persona instruida debería tener a cierto nivel".

También, agrega Escudero, el modelo omite las creencias y los conocimientos relacionados con otras cuestiones que no son directamente propias de la matemática, por ejemplo la gestión de clases.

Por lo anterior, un grupo de investigación de la Universidad de Huelva en España se interesaron en comprender el conocimiento del profesor en relación con las matemáticas desde un enfoque en la enseñanza y aprendizaje. Así, diseñaron un nuevo modelo a partir del análisis del MKT; dicho modelo contempla al conocimiento especializado como un conjunto de conocimientos del profesor. El modelo fue presentado en la CERME 8 y lleva por nombre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas o MTSK por sus siglas en inglés.

1.1.2. Potencialidad del MTSK al explorar el conocimiento del profesor de matemáticas en distintos contextos

Flores, Escudero y Aguilar (2013) ejemplifican la posibilidad de explorar el conocimiento de los profesores de matemáticas en diversos contextos de su desarrollo profesional haciendo uso del modelo MTSK. El foco de su trabajo consiste en "identificar la potencialidad que ofrecen distintos escenarios al momento de indagar sobre el conocimiento del profesor de matemáticas" (p. 2). Para ello, analizan tres escenarios relacionados con la labor del profesor: la formación continua, la acción con los alumnos y la planificación de actividades para la clase. El análisis que efectuaron los autores se centró en mostrar evidencias sobre las oportunidades de estudiar un determinado subdominio del MTSK y a su vez, exhibir cómo el escenario propició esa oportunidad.

1.1.2.1. Exploración del conocimiento en un escenario de formación continua

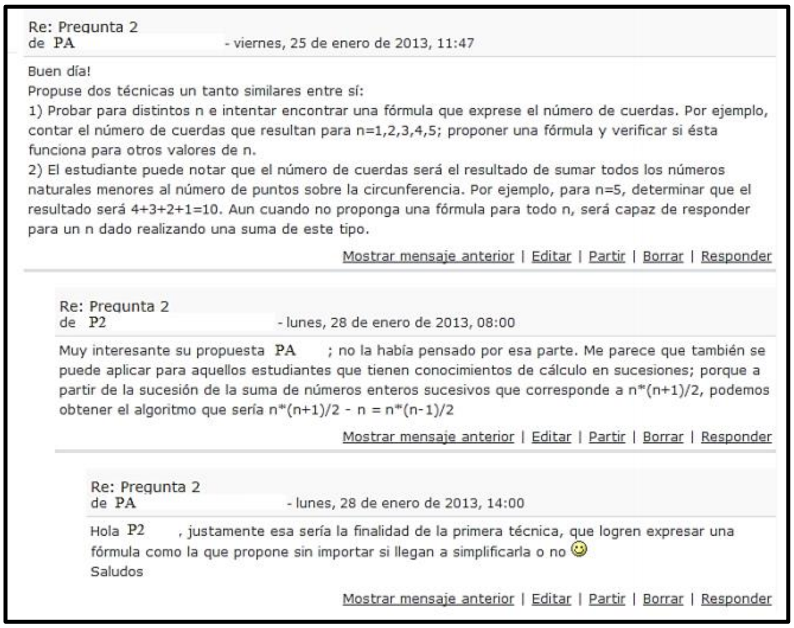
Para mostrar la potencialidad en un contexto de formación continua, los autores examinaron el conocimiento de la profesora A, quien en ese momento impartía el curso de pre cálculo a estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas y, a la vez, se encontraba cursando la maestría en Matemática Educativa. El análisis se realizó a través de sus participaciones en los foros de discusión de una asignatura perteneciente al currículo del posgrado.

El fragmento analizado (Figura 1.1) tuvo lugar entre la profesora A (PA) y un compañero de la maestría (P2). Esa discusión se dio al solicitar a los profesores resolver el siguiente problema (problema de las cuerdas): *se colocan n puntos sobre la circunferencia. ¿Es posible determinar el número de todas las cuerdas que pueden trazarse?* Además, se pedía diseñar una guía pedagógica para su implementación en el aula y compartir en el foro las diferentes maneras concebidas para solucionar el problema.

En el caso de la profesora A, los autores identificaron mediante sus afirmaciones en el foro, oportunidades para estudiar cuatro subdominios del MTSK, enseguida se muestra una de éstas cuatro declaraciones:

> "Las dos técnicas que A propone en el foro hacen énfasis en formas de pensamiento y acción que podría tener un estudiante al momento de responder el

problema. La asociación que hace A de las técnicas con los modos de proceder de sus estudiantes y con los conocimientos que pudieran poner en práctica, nos permite identificar un intento de anticipación, la cual nos brinda la oportunidad de explorar sobre el conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas (KFLM) en el que se apoya para realizar esa anticipación” (p.6).


Re: Pregunta 2
de PA - viernes, 25 de enero de 2013, 11:47

Buen día!
Propuse dos técnicas un tanto similares entre sí:
1) Probar para distintos n e intentar encontrar una fórmula que exprese el número de cuerdas. Por ejemplo, contar el número de cuerdas que resultan para n=1,2,3,4,5; proponer una fórmula y verificar si ésta funciona para otros valores de n.
2) El estudiante puede notar que el número de cuerdas será el resultado de sumar todos los números naturales menores al número de puntos sobre la circunferencia. Por ejemplo, para n=5, determinar que el resultado será 4+3+2+1=10. Aun cuando no proponga una fórmula para todo n, será capaz de responder para un n dado realizando una suma de este tipo.

Mostrar mensaje anterior | Editar | Partir | Borrar | Responder

Re: Pregunta 2
de P2 - lunes, 28 de enero de 2013, 08:00

Muy interesante su propuesta PA ; no la había pensado por esa parte. Me parece que también se puede aplicar para aquellos estudiantes que tienen conocimientos de cálculo en sucesiones; porque a partir de la sucesión de la suma de números enteros sucesivos que corresponde a n*(n+1)/2, podemos obtener el algoritmo que sería n*(n+1)/2 - n = n*(n-1)/2

Mostrar mensaje anterior | Editar | Partir | Borrar | Responder

Re: Pregunta 2
de PA - lunes, 28 de enero de 2013, 14:00

Hola P2 , justamente esa sería la finalidad de la primera técnica, que logren expresar una fórmula como la que propone sin importar si llegan a simplificarla o no
Saludos

Mostrar mensaje anterior | Editar | Partir | Borrar | Responder

Figura 1.1. Estructura del análisis de la información.

Fuente: Flores, Escudero y Aguilar (2013).

1.1.2.2. Exploración del conocimiento en un escenario de acción con los alumnos

Del mismo modo, los autores analizaron el conocimiento de la profesora B para mostrar la potencialidad en un contexto de acción con los alumnos. Esta profesora imparte clases de matemáticas en quinto año de primaria. El análisis se realizó a través de las transcripciones de videograbaciones sobre la práctica de la docente concerniente al tema de geometría, cuya duración fue de dos semanas.

Para esta unidad didáctica, la profesora B discutía con los estudiantes la definición y características de los polígonos. Durante la discusión, ella pregunta cuál es el número mínimo de lados que debe tener una figura plana para que sea un polígono. A lo cual, los estudiantes responden que la figura debe tener tres lados. Así, la profesora B auxiliándose de una trama de puntos, dibuja el triángulo de la Figura 1.2. A raíz de este triángulo, un estudiante cuestiona a la profesora acerca de que se tienen que dibujar triángulos "normales", a lo cual B discute con todo el grupo.

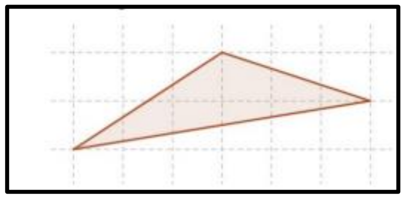


Figura 1.2. Dibujo realizado por la profesora B.

Fuente: Flores, Escudero y Aguilar (2013).

En el caso de la profesora B, los autores señalan oportunidades para estudiar dos subdominios del MTSK, a través del discurso emitido por ella:

> "Aborda la dificultad que asalta al estudiante, cuestionando las suposiciones de éste, pidiendo explicaciones, y consensua lo entendido con el grupo, lo cual nos proporciona la oportunidad de preguntarnos si ese modo de actuar es habitual y además explorar el conocimiento que pone en juego cuando decide cómo afrontar dificultades expresadas por los estudiantes y cómo aprovecha las participaciones de éstos, sobre todo las erradas, lo que consideramos en el [conocimiento de la enseñanza de las matemáticas o] KMT" (p. 6).

1.1.2.3. Exploración del conocimiento en un escenario de planificación de actividades

Asimismo, para mostrar la potencialidad en un contexto de la planificación de actividades, los autores analizaron el conocimiento del profesor C, quien imparte clases de matemáticas a un grupo de primer año de secundaria. El análisis se realizó a través de la segunda parte de la secuencia que diseñó el profesor, la cual tiene por objetivo que el estudiante sea capaz de resolver problemas que impliquen distintos tipos de ecuaciones de la forma $ax + b = 0$, cuando a y b son números reales positivos.

En la planeación, el docente afirma:

> "Una ecuación es una de las formas en que podemos representar una función, la gráfica en el plano cartesiano es otra y una forma muy común de representar funciones es de manera explícita, mediante todas la palabras que explican la relación existente entre los miembros de la igualdad" (p.5).

En el caso del profesor C, los autores identificaron, mediante su planificación, la oportunidad para estudiar el subdominio conocimiento de la estructura de las matemáticas o KMS del MTSK, puesto que:

> "La noción función matemática tiene un papel central en el episodio descrito. El profesor relaciona la ecuación con una particularidad de la función, lo cual invita a profundizar en cómo y por qué las relaciona, más aún, se detecta que en la tercera parte de la actividad asocia el término ecuación con la representación analítica de la función, lo que nos inspira la generación de mecanismos para explorar más a fondo esa conexión, y así considerar, por ejemplo, preguntarle sobre el papel de la igualdad en una ecuación y en una función" (p.7).

1.2. Problemática en Cálculo Integral

Se han reportado diversas problemáticas relacionadas con el aprendizaje y enseñanza del Cálculo (Tall, 1992; Río, 2017) en distintos niveles educativos, entre ellos, podemos encontrar al nivel medio superior. Así, los índices de reprobación elevados, falta de comprensión y actitud negativa hacia dicha asignatura son algunas de las problemáticas presentes en el nivel medio superior relacionadas al estudio del Cálculo (Salinas y Alanís, 2009).

Daza y Garza (2018) destacan la importancia que tienen las asignaturas de Cálculo diferencial e Integral en el nivel medio superior ya que los estudiantes las consideran como las más difíciles de aprobar y a la vez, las más complejas debido a su nivel de abstracción. Incluso, los autores mencionan los esfuerzos que se han hecho desde la Educación Matemática por mejorar la labor docente mediante estrategias que permitan hacer frente a las dificultades asociadas a los conceptos de Límite, Derivada e Integral.

De manera concreta, en Cálculo Integral, la conexión entre los conceptos y sus aplicaciones plantea una dificultad para los estudiantes (Milevicich y Lois, 2008). Dentro de estas aplicaciones podemos identificar el cálculo de volúmenes de sólidos de revolución. Algunos trabajos como los de Mofolo-Mbokane, Engelbrechta y Hardingb (2013) y, Ordoñez y García (2013) se han cuestionado cuáles son las dificultades que presentan los estudiantes respecto a este tópico.

Baquero (2014) menciona que el concepto de volumen por sí sólo exterioriza algunas dificultades, entre éstas se encuentra la mencionada por Godino, Batanero y Roa (2012) sobre la falta de comprensión en el significado de la altura de los cuerpos sólidos, provocando un cálculo errado para determinar su volumen. Además, algunas de las dificultades detectadas están relacionadas con la significación que los estudiantes dan a f(x), a ese salto del plano al espacio, a la visualización mental del sólido (Andrade y Montecito, 2013), así como a la graficación de funciones y rotación de las mismas ya que los estudiantes encuentran problemático dibujar el sólido de revolución que se genera (Mofolo-Mbokane et al., 2013).

1.3. Motivación

La motivación en la selección de este tema deriva de una serie de factores, entre los cuales se encuentra el interés personal que, como futura profesora ha tenido la autora respecto al papel que desempeña el docente, más allá del que había visualizado a lo largo de su vida académica, puesto que consideraba como único contexto posible a la acción con los alumnos, desconociendo y desvalorizando inclusive en este escenario, los conocimientos que el docente articula y pone en práctica para este propósito.

De igual manera, a lo largo de su formación en la maestría, fue creando conciencia de la responsabilidad que recae en el docente y el compromiso que éste admite al intentar que los estudiantes alcancen los aprendizajes esperados en las múltiples disciplinas de la matemática, donde nuevamente le parece interesante y también valioso, indagar las repercusiones que tiene el discutir actividades concretas entre profesores, cuyos contextos profesionales son distintos, pues se considera que esas reflexiones grupales cambiarán la visión inicial de cada profesor y como resultado se generará una ampliación de ésta. Por ello, quien escribe este trabajo cree que en la educación matemática no hay generalizaciones, que cada clase es un desafío que el profesor debe enfrentar y que incluso, un profesor con muchos años de experiencia puede encontrarse con algo que no tenía contemplado. Por lo que, lo ideal es que el profesor esté lo más preparado posible para contraatacar cualquier circunstancia en el aula.

El estudiar una problemática en relación al Cálculo, proviene en primer lugar de la especialización del posgrado, la cual es en el nivel medio superior. De la misma forma, a través de las experiencias compartidas por los compañeros de la autora, se tiene conocimiento de que Cálculo es una de las asignaturas en las cuales los estudiantes presentan bastantes dificultades puesto que necesitan de varios conocimientos previos. Por otro lado, se decide Cálculo Integral debido a que de acuerdo a la planificación del desarrollo de la investigación, era la asignatura que estaría en curso al momento de recolectar parte de la información necesaria para el análisis.

1.4. Justificación, Preguntas de Investigación y Objetivos

Derivado de los conflictos en torno al aprendizaje del Cálculo, Arcos (2004) exhorta a los profesores que imparten dicho curso a reflexionar acerca de su ejercicio cotidiano en las aulas y realizar las gestiones que consideren pertinentes con la finalidad de mejorar la enseñanza y el aprendizaje de la asignatura.

Siguiendo esta reflexión, pensamos que el profesor debe recurrir a distintos medios que le permitan lograr cumplir con los objetivos de la asignatura. Una alternativa que poseen los profesores para lidiar con dichas dificultades ocurre durante la etapa de planificación de los temas en cuestión, siendo una herramienta útil la predicción que los profesores formulan sobre el hipotético proceso de aprendizaje de sus estudiantes antes de impartir un tema específico (Simon y Tzur, 2004). Esta idea surge en 1995, cuando Simon elaboró un modelo denominado “El ciclo de la enseñanza de las matemáticas”, el cual busca promover que la instrucción se ajuste a la actuación de los estudiantes desde un enfoque constructivista y, a su vez, esa instrucción conserve la planeación tradicional basada en objetivos preestablecidos. Dentro de este ciclo, figuran las Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje (THA), las cuales se encuentran formadas por tres elementos; el primero consta de los objetivos de aprendizaje para el estudiante, el segundo consiste en las actividades matemáticas que generarán dichos aprendizajes y el tercer elemento se centra en las conjeturas o hipótesis acerca del aprendizaje de los estudiantes.

Es importante destacar que en este trabajo sólo nos interesa un elemento de la THA, a saber: las hipótesis acerca del posible proceso de aprendizaje de los escolares. Sin embargo, dada la potencialidad que la THA ofrece, Amador-Saelices y Montejo-Gámez (2016) señalan que la THA por sí sola no responde a la pregunta ¿cómo formular las hipótesis? (p.11). Así, la formulación de hipótesis es un proceso más profundo de reflexión, en donde consideramos que se requiere discutir con detalle el posible "comportamiento matemático", es decir, discutir en relación a una determinada tarea, los posibles errores, las maneras típicas de resolverla, los conocimientos previos necesarios, las dificultades relacionadas con los conceptos involucrados en la resolución de la tarea, las fortalezas que pueden tener los escolares, las capacidades, etcétera. Por lo que, en este trabajo, entendemos como *predicción del comportamiento matemático de los estudiantes* a la declaración por conocimiento fundado o conjetura de algo que ha de suceder (Rae, 2017) respecto a las posibles maneras de proceder de los estudiantes (procedimientos, errores, dificultades, habilidades, etc.) ante una determinada tarea matemática.

Consideramos importante elaborar predicciones puesto que éstas dotan al docente de diversos y posibles escenarios a enfrentar en el aula durante la implementación de determinadas tareas (dificultades, errores típicos, fortalezas, destrezas, conocimientos previos, etcétera). Con base en la información obtenida de este proceso, el docente tiene los elementos necesarios para ajustar cada aspecto involucrado en el aprendizaje de los escolares, así como la posibilidad de buscar las herramientas para intentar lidiar con las posibles dificultades. Por lo cual, destacamos la utilidad de su conocimiento acerca de las fortalezas y debilidades de los estudiantes frente a temas concretos, lo que permite focalizar las actividades necesarias para lograr el aprendizaje en ellos y realizar las mejoras que consideren adecuadas para dicho fin.

Por otro lado, Flores (2015) afirma que las acciones de anticipación y predicción concebidas sobre el posible proceder de los estudiantes ante una determinada tarea matemática, se encuentran sustentadas por diferentes conocimientos que posee el profesor. Así, el autor menciona la importancia de explorar el conocimiento empleado para ejecutar las acciones mencionadas anteriormente mediante el modelo MTSK.

En cuanto a los conocimientos que permiten anticiparse al comportamiento matemático de los estudiantes mediante la formulación de hipótesis o predicciones, de acuerdo con Carrillo et al. (en prensa) pueden ser de dos tipos, de naturaleza matemática y de naturaleza didáctico matemática. Por lo que, en esta investigación enfrentamos la labor de analizar el conocimiento que ponen en juego un grupo de profesores de matemáticas al momento de realizar predicciones acerca del posible quehacer matemático de estudiantes del nivel medio superior, dada una actividad introductoria al tema de Sólidos de Revolución.

Así, nos hemos planteado las siguientes preguntas de investigación:

- ¿Qué conocimientos utiliza el profesor de matemáticas para predecir el posible comportamiento matemático de los estudiantes cuando se enfrenten a una tarea matemática de introducción a Sólidos de Revolución?

- ¿Qué conocimientos utiliza el profesor de matemáticas para justificar el cumplimiento o incumplimiento de dichas predicciones acerca del posible comportamiento matemático de los estudiantes cuando se enfrenten a una tarea matemática de introducción a Sólidos de Revolución?

A su vez, se plantearon los siguientes objetivos de investigación:

- Identificar qué conocimientos usa el profesor para elaborar predicciones acerca del comportamiento matemático de los estudiantes en el tema de Sólidos de Revolución.

- A partir del análisis sobre cómo el profesor justifica el cumplimiento o no de las predicciones planteadas, identificar en qué conocimientos basa dichas justificaciones.

Capítulo 2

MARCO TEÓRICO

En este capítulo se presenta la herramienta teórica y analítica denominada MTSK, la cual servirá como foco de análisis al tipificar el conocimiento utilizado por los informantes en esta investigación. Por lo que, en líneas posteriores se exhibe cada uno de los dominios, subdominios y categorías que en conjunto integran el Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas. Asimismo, se describen algunas problemáticas que se han reportado en la literatura en torno a la graficación de funciones y la generación de sólidos de revolución ya que éstas tienen relación con la actividad trabajada en la investigación para explorar el conocimiento de los participantes del estudio.

2.1. Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas

El modelo llamado Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK), propone una caracterización del conocimiento que es propio del profesor de matemáticas (Carrillo et al, in press) y, además, sirve como herramienta analítica en la comprensión y determinación de la naturaleza del conocimiento que utilizan los profesores en su práctica mediante una organización sistemática del mismo (Escudero, 2015).

De acuerdo con Flores-Medrano, Escudero-Avila, Montes, Aguilar y Carrillo (2014), dicho conocimiento puede ser de dos tipos: uno de naturaleza matemática, el cual consiste en el conocimiento que tiene el profesor de la disciplina en sí, y otro de naturaleza didáctico-matemática, relacionado con aspectos de la matemática como objeto de enseñanza-aprendizaje. A su vez, cada dominio se encuentra constituido por tres subdominios distintos entre sí (Figura 2.1) Asimismo, podemos observar que el modelo considera la interacción entre el conocimiento del profesor y sus creencias sobre las matemáticas, así como de su enseñanza y aprendizaje (Carrillo, Contreras, et al., 2014).

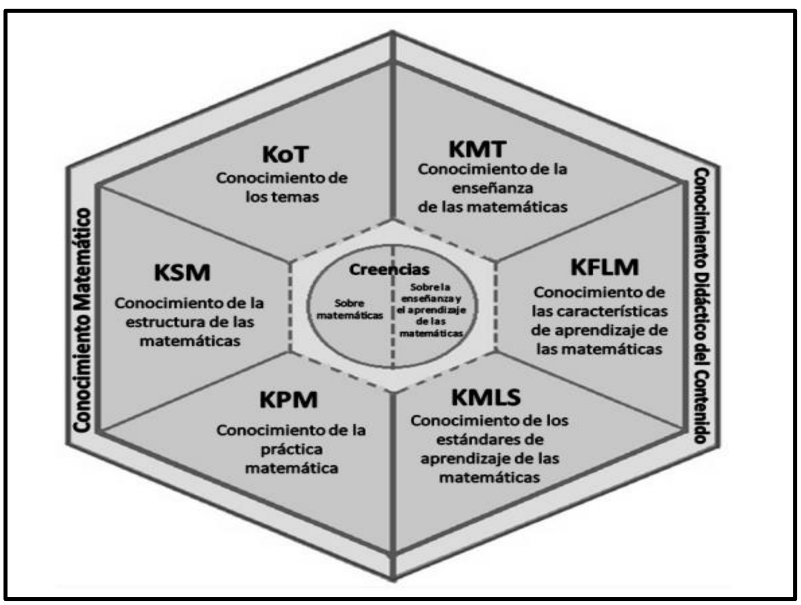


Figura 2.1. Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas.

Fuente: Escudero (2015).

Del mismo modo, cada subdominio posee categorías que facilitan la ubicación del conocimiento dentro del modelo en los estudios, en la Tabla 2.1 podemos observar el dominio, subdominio y categorías que conforman el MTSK.

Tabla 2.1

Dominios, subdominios y categorías del MTSK.

Dominios, subdominios y categorías del MTSK			
Dominio	Subdominio	Categoría asociada al subdominio	
Conocimiento matemático	**Conocimiento de los temas**	Procedimientos	¿Cómo se hace?
			¿Cuándo puede hacerse?
			¿Por qué se hace así?
			Características del resultado
		Definiciones, propiedades y sus fundamentos	
		Registros de representación	
		Fenomenología y aplicaciones	
	Conocimiento de la estructura de las matemáticas	Conexiones de complejización	
		Conexiones de simplificación	
		Conexiones transversales	
		Conexiones auxiliares	
	Conocimiento de la práctica matemática	Jerarquización y planificación como forma de proceder en la resolución de problemas matemáticos	
		Formas de validación y demostración	
		Papel de los símbolos y uso del lenguaje formal	
		Procesos asociados a la resolución de problemas como forma de producir matemáticas	
		Prácticas particulares del quehacer matemático (por ejemplo, modelación)	
		Condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones	
Conocimiento didáctico del contenido	**Conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas**	Teorías de aprendizaje	
		Fortalezas y dificultades	
		Formas de interacción con un contenido matemático	
		Intereses y expectativas	
	Conocimiento de la enseñanza de las matemática	Teorías de enseñanza	
		Recursos materiales y virtuales	
		Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos	
	Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemática	Expectativas de aprendizaje	
		Nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado	
		Secuenciación con temas anteriores y posteriores	

Los autores sugieren que en diferentes situaciones de enseñanza-aprendizaje, entre ellas la planificación, el MTSK puede tipificar el conocimiento en el que se basa el profesor de matemáticas, de lo cual dan muestra diversas publicaciones (Flores et al., 2013). En seguida, para fines prácticos, se explican sólo los elementos (subdominios y categorías) del MTSK que surgieron del análisis de los datos obtenidos en la investigación.

2.1.1. Dominio del Conocimiento Matemático

Este dominio "responde a la evidente necesidad de que el profesor conozca en profundidad el contenido matemático que enseñará" (Escudero, 2015, p.25). Así, de acuerdo con Escudero (2015), para el dominio matemático están los subdominios: *conocimiento de los temas*, *conocimiento de la estructura de las matemáticas* y *conocimiento de la práctica matemática*. En donde, el conocimiento de los temas consiste en el conocimiento que tiene el profesor de las matemáticas, mientras que el conocimiento de la estructura matemática responde al conocimiento que posee el profesor de la estructura matemática y, el conocimiento de la práctica matemática está asociado a la forma de proceder y producir matemáticas.

2.1.1.1. Subdominio: Conocimiento de los temas (KOT)

Este subdominio hace referencia al conocimiento que el profesor tiene acerca de los contenidos escolares tradicionales, destacando la importancia de que conozca lo que enseña (qué y por qué). Lo cual implica comprender propiedades, significados, procedimientos, formas de representación y fenómenos relacionados a un determinado contenido matemático (Escudero, 2015).

Dentro de este subdominio (Tabla 2.2) se encuentra la categoría *definiciones, propiedades y sus fundamentos*, que hace referencia al conocimiento de las propiedades que definen a un objeto matemático. También se encuentra la categoría *procedimientos* que incluye el conocimiento asociado a formas de proceder ante contenidos concretos como lo son algoritmos, las condiciones que permiten ejecutar ciertas acciones de una u otra manera y, los fundamentos de dichos algoritmos, respondiendo así a las preguntas ¿cómo se hace? ¿cuándo se puede hacer? ¿por qué se puede hacer? (Escudero, 2015). Asimismo, las categorías *registros de representación* y, *fenomenología y aplicaciones* pertenecen a este subdominio.

Tabla 2.2

Categorías del subdominio KOT del MTSK.

Categorías del subdominio KOT
-Definiciones, propiedades y sus fundamentos
-Procedimientos
-Registros de representación
-Fenomenología y aplicaciones

2.1.1.1.1. Categoría: Definiciones, propiedades y sus fundamentos

Esta categoría se relaciona con el conocimiento de propiedades particulares de contenidos matemáticos, a las bases de éstas, así como al conjunto de propiedades que establecen la definición de un ente matemático (Escudero, 2015). Por ejemplo, saber que cualquiera de las diagonales de un cuadrado forma un triángulo rectángulo corresponde a conocer una propiedad de los cuadriláteros convexos. O saber que no es suficiente con definir a los números racionales como el cociente de dos enteros ya que se debe especificar que el denominador debe ser distinto de cero.

2.1.1.1.2. Categoría: Procedimientos

En esta categoría, Escudero (2015) incluye la aplicación de la matemática, por lo que el profesor debe conocer los procedimientos comunes y alternos involucrados en contenidos concretos. Por ejemplo, para dividir fracciones, se puede utilizar el famoso algoritmo de los productos cruzados, la regla del sándwich o bien cuando se tienen fracciones con denominador común, sólo dividir los numeradores; además, el profesor debe saber en qué casos es conveniente utilizar uno u otro método (Escudero, 2015).

2.1.2. Dominio del Conocimiento Didáctico del Contenido

La autora menciona que este conocimiento necesita del conocimiento matemático pero la diferencia radica en que éste se enfoca en la enseñanza del mismo, por ello es distinto y posee sus propias características. En este dominio se integran los subdominios *conocimiento de la enseñanza de las matemáticas* (contenido a enseñar), *conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas* (contenido a aprender) y *conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas* (estándares de aprendizaje que se pueden/pretenden adquirir en un determinado nivel educativo).

2.1.2.1. Subdominio: Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT)

Dentro del subdominio conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (Tabla 2.3) se encuentra la categoría *estrategias, técnicas, tareas y ejemplos*, formada de los conocimientos sobre la potencialidad matemática que pueden tener ciertas secuencias de actividades, tareas, estrategias o técnicas didácticas, así como sus limitaciones u obstáculos (Escudero, 2015). Asimismo, en este subdominio se encuentran las categorías *teorías de enseñanza* y *recursos materiales y visuales*.

Tabla 2.3.

Categorías del subdominio KMT del MTSK.

Categorías del subdominio KMT
-Estrategia, técnicas, tareas y ejemplos
-Teorías de enseñanza
-Recursos materiales y visuales

2.1.2.1.1. Categoría: Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos

Este categoría involucra lo que "el profesor necesita conocer [de] los instrumentos que tiene disponibles para abordar el contenido, sus potencialidades, sus limitaciones y las repercusiones que tendría el usarlo como medio para presentar un contenido matemático" (Escudero, 2015, p. 49). Por lo que, la autora dice que los ejemplos que el profesor escoja al presentar un contenido matemático, las metáforas que utilice, las explicaciones que otorgue y las situaciones que desarrolle forman parte de este conocimiento. Un ejemplo de ello es la metáfora que el docente ocupa al decir *pasa restando* (uso del axioma del inverso aditivo) al resolver una ecuación, puesto que el profesor debe estar consciente de las dificultades que puede generar posteriormente al usar esta metáfora como recurso didáctico, además como menciona Escudero (2015) le "permitirá al profesor prever las formas en las que los estudiantes abordarán la tarea, las preguntas que tendrán al respecto de los procedimientos o los errores que podrían cometer, ya sean los derivados del uso de la metáfora o los que provienen [del significado de] la construcción misma". (p.50)

2.1.2.2. Subdominio: Conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas (KFLM)

Dentro de este subdominio (Tabla 2.4), se encuentra la categoría *fortalezas y dificultades*, la cual de acuerdo con Escudero (2015) incluye los conocimientos acerca de los errores, obstáculos, dificultades (típicas o atípicas), potencialidades o ventajas relacionados con las características y procesos de aprendizaje. También está la categoría *formas de interacción de los estudiantes con un contenido matemático* con la cual se reconoce el conocimiento sobre los procesos y estrategias, el lenguaje formal o informal, así como las formas figurativas que utilizan los estudiantes en determinados temas matemáticos (Escudero, 2015). De igual modo las categorías *teorías de aprendizaje* y *expectativas e intereses* forman parte de este subdominio.

Tabla 2.4

Categorías del subdominio KFML del MTSK.

Categorías del subdominio KFLM
-Fortalezas y dificultades
-Formas de interacción con un contenido matemático
-Recursos materiales y visuales

2.1.2.2.1. Categoría: Fortalezas y dificultades

Como se mencionó anteriormente, esta categoría incluye el conocimiento acerca de errores, obstáculos, dificultades, potencialidades o ventajas relacionados con los procesos de aprendizaje. Un ejemplo de esta categoría es la dificultad que tienen los estudiantes al factorizar una expresión, debido a que les cuesta trabajo identificar qué caso utilizar entre los distintos posibles.

2.1.2.2.2. Categoría: Formas de interacción con un contenido matemático

De acuerdo con Escudero (2015) este conocimiento refiere a los procesos y estrategias comunes o atípicas empleadas por los estudiantes, como ejemplo, la autora menciona el conocimiento que tiene el profesor “sobre los métodos de solución típicamente usados para resolver un sistema de ecuaciones lineales, de acuerdo a la forma en la que se presenta la ecuación” (p. 45). También, la categoría está formada por el conocimiento del vocabulario formal o informal, así como las formas figurativas que utilizan los estudiantes en determinados temas matemáticos (Escudero, 2015).

2.1.2.3. Subdominio: Conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas (KMLS)

En el subdominio conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (Tabla 2.5), se encuentra la categoría *nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado*, en la cual se incluye el conocimiento del profesor acerca de la profundidad de un contenido matemático en un determinado momento escolar; también, encontramos la categoría *secuenciación con temas anteriores y posteriores* con la que se hace referencia a los conocimientos y capacidades previas que tiene un estudiante para aprender un nuevo contenido en términos de lo que los estándares señalan que se debe conocer antes de un determinado contenido así como, lo que aportará en temas posteriores (Escudero, 2015). Asimismo, la categoría *expectativas de aprendizaje* forma parte de este subdominio.

Tabla 2.5

Categorías del subdominio KFML del MTSK.

Categorías del subdominio KMLS
-Desarrollo conceptual o procedimental esperado
-Secuenciación con temas anteriores y posteriores
-Expectativas de aprendizaje

2.1.2.3.1. Categoría: Nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado

Esta categoría constituye el conocimiento acerca de qué tan profundo se enseña un contenido matemático de acuerdo a un nivel académico determinado (Escudero, 2015). La autora ejemplifica esta categoría con la multiplicación en el grado 2, donde señala se trabaja como el número de veces mientras que, en los grados 3 y 4 se estudia como una suma abreviada o reiterada.

2.1.2.3.2. Categoría: Secuenciación con temas anteriores y posteriores

Escudero (2015) señala que esta categoría hace referencia al conocimiento sobre la secuenciación entre diversos contenidos matemáticos, dentro del mismo curso o en otros cursos. La autora ejemplifica esta categoría mediante la multiplicación del caso anterior, como el "conocimiento que tiene el profesor del segundo ciclo de que los estudiantes han trabajado ya la multiplicación como el número de veces" (p. 52).

2.2. Dificultades asociadas a sólidos de revolución

Dentro de las dificultades que tienen los estudiantes, Andrade y Montecino (2011, 2013) afirman que los escolares muestran limitaciones al transitar entre los distintos significados de f(x): la función a integrar, la imagen de la función, la altura o radio de las circunferencias que forman cilindros de altura dx, la segunda coordenada de un par ordenado, la expresión algebraica de una función lo que restringe el andar entre registros. Asimismo, otra dificultad que mencionan los autores ocurre cuando el estudiante intenta generar o visualizar mentalmente el sólido, en donde el trasfondo radica en la conversión entre registros, de uno gráfico a uno algebraico y de uno algebraico a uno gráfico; ellos consideran que esto se debe a la falta del eje z en el plano cartesiano cuando se rota la función alrededor de un eje. También, estos autores encuentran problemático representar figuras tridimensionales en dos dimensiones.

Además, los autores comentan que puede llegar a ser un obstáculo la visualización espacial como auxiliar en la adquisición de nuevos conceptos, debido a que según Brousseau (1989), la noción de perspectiva no la logran interiorizar todos los estudiantes. Por lo que, la mayoría de los estudiantes no consiguen desarrollar un pensamiento tridimensional (Andrade y Montecino, 2011).

Por otro lado, Mofolo et al. (2013) señalan las habilidades que tienen que poseer los estudiantes para solucionar problemas sobre volumen de sólidos de revolución, algunas de éstas son:

- Habilidad para graficar y convertir gráficos a ecuaciones algebraicas y de ecuaciones algebraicas a gráficos, en dos y tres dimensiones.
- Habilidad para convertir un diagrama bidimensional a uno tridimensional y uno tridimensionales a bidimensional.
- Habilidades cognitivas para entender e integrar los conceptos involucrados en el volumen de sólidos de revolución (dibujar gráficos, indicar el esquema representativo y rotarlo, identificar la fórmula correcta y calcular el volumen).

Los autores observaron en su estudio que las dificultades están relacionadas a la visualización y rotación. Asimismo, Blanco y Godino (2015) identificaron, clasificaron y describieron las respuestas de futuros profesores de primaria en términos de configuraciones cognitivas, las cuales se encuentran asociadas a una tarea cuya finalidad consiste en dibujar una representación plana de un objeto tridimensional y, por consiguiente, realizar una representación clara del objeto, por ejemplo a través de la perspectiva (Figura 2.1).

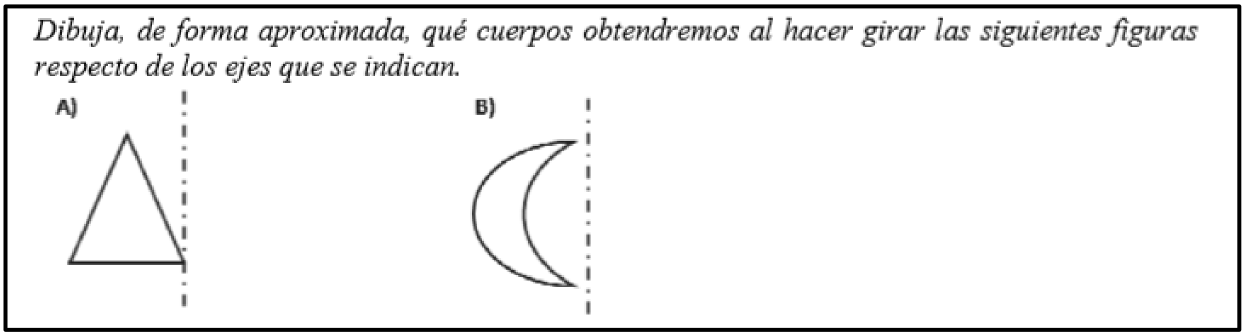


Figura 2.2. Tipo de tarea asociada a la representación plana de in objeto tridimensional.

Fuente: Blanco y Godino (2015).

En seguida, se enlista la categorización para las respuestas proporcionadas por los futuros profesores de primaria, las cuales se obtuvieron a través de la resolución de la tarea de la Figura 2.1 y se ejemplifican en la Figura 2.2.

1. Interpretación del eje de rotación como eje de simetría en donde se consideró exclusivamente el estado inicial y final.
2. Representación gráfica de los cuerpos resultantes sin el apoyo físico del eje para la construcción de los mismos.
3. Dibujar circunferencias para conceder un efecto tridimensional o de volumen.
4. Rotaciones libres en el plano.
5. Ausencia de representación gráfica, sólo se hace una descripción escrita.
6. Representación de la sección plana frontal del cuerpo tridimensional perpendicular al plano de visión.
7. Justificación gráfica aplicando un giro de 180° y una traslación.
8. Creación de un continuo de imágenes.
9. Representación gráfica de la planta y el alzado de los cuerpos resultantes.

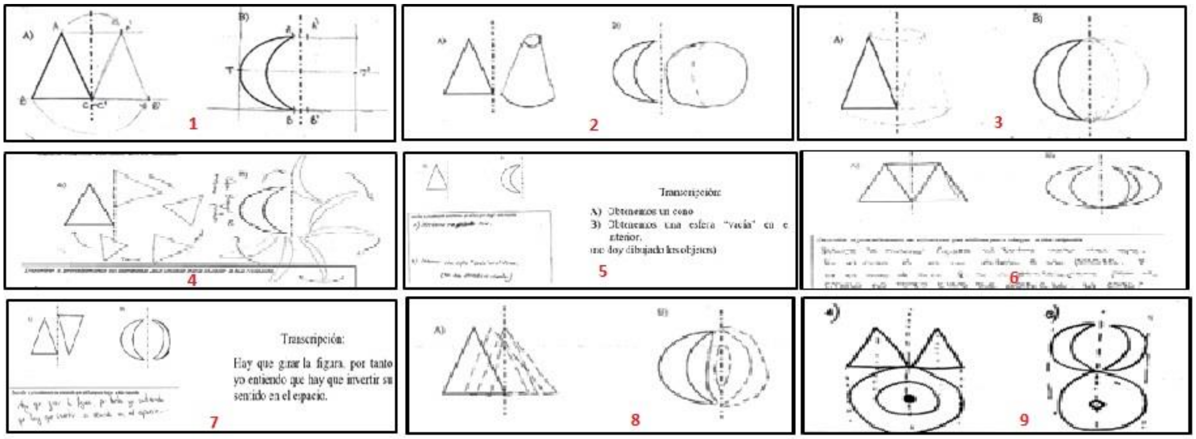


Figura 2.3. Ejemplos de respuestas para cada categoría.

Fuente: Blanco y Godino (2015).

2.3. Dificultades asociadas al concepto y graficación de funciones

Arce y Ortega (2013) detectaron algunos errores que cometen los estudiantes de bachiller al graficar funciones. Los autores reportaron que algunos de estos errores están relacionados con el concepto de función, detectando que para este caso, las representaciones hechas por los estudiantes consideraban dos o más imágenes para algunos valores del dominio; en particular cuando las funciones se encontraban definidas a trozos, esto debido a que los estudiantes no consideraban el dominio de cada parte como se ve en la Figura 2.3.

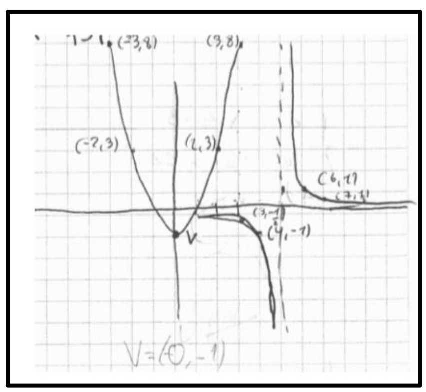


Figura 2.4. Ejemplo de una representación en donde se consideran dos o más imágenes para algunos valores del dominio.

Fuente: Arce y Ortega (2015).

De igual manera, Garijo (2014) recopila algunas de las problemáticas ya reportadas por otros autores, en relación a las funciones. Entre éstas menciona que entender la variable dependiente y la variable independiente es una enorme dificultad para muchos estudiantes

(Carlson y Oethrtman, 2005). Asimismo, mencionan que los estudiantes ven a las funciones de manera mecánica, creyendo que son valores que se obtienen a partir de otros preestablecidos (Carlson, 1998; Thompson, 1994a). De igual manera, muchos estudiantes confunden una función con una ecuación (Carlson, 1998). La autora menciona que también son comunes los errores relacionados a la graficación de funciones, entre ellos menciona asignar como parábola a funciones cuya representación gráfica es del tipo "U" (Schwarz y Hershkowitz, 1999). También, otro error sucede con las funciones constantes, ya que la autora afirma que los estudiantes suelen considerar que no son funciones debido a que no hay variación. Finalmente, la autora también incluye errores asociados a la identificación de los elementos de una función en una expresión, por ejemplo, en la función $f(x) = ax$, señalar que el paréntesis indica a la variable independiente, $f(x)$ a la variable dependiente, f es el nombre que se le da a la función y conocer que la relación entre las variables dependiente e independiente se encuentra estipulada por la relación ax.

Por otro lado, López y Sosa (2008) detectaron algunas de las principales dificultades que tienen los estudiantes con las funciones, entre ellas:

- Distinguir entre función y ecuación.
- Proporcionar la regla de correspondencia de la función.
- Dibujar la representación gráfica de una función.
- Interpretar la gráfica de una función.
- Asumir a los números reales como el dominio de la función. (Figura 2.4)
- Identificar una función sólo por la notación típica. (Figura 2.5)

Ejemplo. Dominio: *"Son todos los que se encuentran en el eje de las x"*

Observación. Este tipo de error puede ser el causante de que los alumnos no consideren a las funciones de dominio discreto como tales.

Figura 2.5. Ejemplo de la dificultad "asumir a los números reales como el dominio de la función".

Fuente: López y Sosa (2008).

Error: Identificar una expresión algebraica como una función por la notación típica o usual al representar esta última.

Ejemplo. "$3x^4 + 2x = -3$ *no es una función, porque no tiene nada que lo identifique como una función, no tiene f(x)*". "$c(m) = 2m + 1$, *es una función porque* $c(m)$ *representa una función*"

Observación. Parece ser que los alumnos han asociado el concepto función a la presencia de una notación tal como $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$, etc.

Figura 2.6. Ejemplo de la dificultad "identificar una función sólo por la notación típica".

Fuente: López y Sosa (2008).

Capítulo 3

METODOLOGÍA

En este capítulo se describen los procesos metodológicos empleados en la investigación. Se detalla el diseño de la investigación y los informantes del estudio, también se muestran los instrumentos ocupados para la recolección de la información, así como las técnicas utilizadas para este fin. Asimismo, se explica la manera en que se analizaron los datos recabados.

3.1. Enfoque y fases de la investigación

El estudio se desarrolló con un enfoque cualitativo puesto que la investigación se centra en la descripción, comprensión e interpretación de los sucesos observados (Sampieri, Fernández y Baptista, 2006). Además, el trabajo se realizó mediante estudio de caso con la finalidad de atender las necesidades contextuales que permitieran profundizar y enriquecer las discusiones en relación a las actividades de la secuencia didáctica y por consiguiente favorecer el desarrollo de la investigación.

A continuación, se describen las principales acciones que se siguieron en el desarrollo de la investigación y las mismas se resumen en la Figura 3.1.

1. En primera instancia se diseñó una secuencia didáctica para el tema de Volumen de Sólidos de Revolución. Cabe señalar que no fue motivo de análisis, en esta investigación, los fundamentos y efectos que tuvo la aplicación de dicha secuencia. Más bien, sirvió como instrumento para que los profesores realizaran sus predicciones acerca del posible comportamiento matemático de los estudiantes.

2. Una vez diseñada la secuencia, se formó un grupo con cinco profesores que habitualmente imparten los cursos de Cálculo en el nivel medio superior. Dicho grupo colaboró en un entorno de discusión en el que además participaban dos investigadores en Educación Matemática, dos estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas y tres estudiantes de la Maestría en Educación Matemática.

3. A partir de la secuencia didáctica, los participantes hicieron predicciones acerca del comportamiento y desempeño matemático de estudiantes del nivel medio superior.

4. Tomando como referencia las sesiones con los participantes, se determinó en qué conocimientos se basaron para predecir el comportamiento y desempeño matemático de los estudiantes.

5. Posteriormente, se implementó la secuencia didáctica previamente diseñada en una institución del nivel medio superior, donde labora una de las participantes.

6. De dicha implementación se obtuvo información que apoyaba o contradecía las predicciones realizadas por los profesores (al ser discusiones grupales, en ocasiones existía más de una postura, incluso tenemos ejemplos de predicciones antagónicas). Tomando como base esta evidencia se hicieron reuniones con los informantes para indagar a qué atribuían el cumplimiento o no cumplimiento de las predicciones elaboradas.

7. Por lo que, nuevamente realizamos un análisis sobre los conocimientos que emplean para esta finalidad.

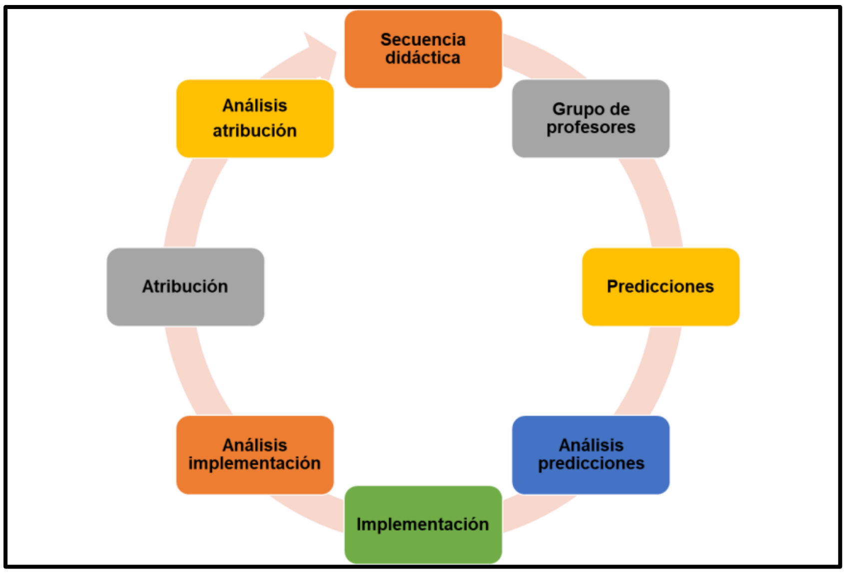


Figura 3.1. Fases de la investigación.

3.2. Técnicas e instrumentos de recolección y análisis de la información

Los datos se recogieron en dos tipos de sesiones. El primer tipo se compone de seis reuniones con los participantes para la discusión de la secuencia didáctica, así como para la discusión de lo ocurrido durante la implementación de la misma; cabe mencionar que de las seis sesiones, cuatro se utilizaron para discutir todo lo concerniente a la actividad 6 de la secuencia. El segundo tipo consiste en cinco sesiones de clases para implementar la secuencia. Las sesiones fueron mensuales, empezaron en septiembre del año 2017 y finalizaron en mayo del año 2018. Las sesiones se realizaron mensuales con base en el tiempo disponible de los informantes, quienes laboran en diferentes instituciones; pese a tener una sesión por mes, la continuidad de lo discutido no se vio repercutida puesto que las reuniones se organizaron de modo que la esencia de lo abordado no se fragmentara y, para la siguiente sesión, como introducción, se recordaba lo más importante de la sesión anterior y a su vez la dinámica de trabajo de la sesión en curso.

Las técnicas utilizadas en esta investigación para la recolección de la información fueron la observación en modo participativo para las reuniones con los participantes y la observación no participativa para la implementación de la secuencia didáctica. La observación en modo participativo consistió en discutir con el resto del grupo la actividad 6, realizar predicciones acerca del posible comportamiento matemático de los estudiantes y analizar lo ocurrido durante la implementación de la secuencia, todo lo anterior con la finalidad de que no hubiera una disociación en el grupo de trabajo ni que los informantes principales (quienes fueron invitados a colaborar) se sintieran presionados; sin embargo, al ser informantes secundarios, se cuidó que la participación más activa fuera la de los informantes principales. Cabe señalar que todas las sesiones fueron videograbadas para facilitar el análisis de las mismas, por lo que, se hicieron transcripciones de las videograbaciones y las mismas fungieron como principal fuente de información.

Los instrumentos de recolección de la información utilizados en este trabajo son la secuencia didáctica para Cálculo integral diseñada para el tema de Volumen de Sólidos de Revolución y, las vídeograbaciones para contrastar las predicciones y justificaciones argumentadas por los informantes. Es importante mencionar que el foco de análisis en este trabajo se centró en la actividad 6 de la secuencia didáctica (Figura 3.2), la cual es introductoria a Sólidos de Revolución y está enfocada al trabajo con funciones y visualización 3D. La secuencia didáctica completa está disponible en el apartado anexo. El objetivo de la actividad 6 consiste en que los estudiantes comprendan que los sólidos de revolución se generan a partir del giro de una función en un determinado intervalo sobre un eje de rotación, cuya imagen f(x) se corresponde con el radio de la circunferencia formada en el punto de corte perpendicular al eje de rotación.

6ª ACTIVIDAD "SE LES PROPORCIONA UNA FUNCIÓN"

En la siguiente actividad, el profesor debe proporcionar a los alumnos las siguientes funciones: $y = 3$ en el intervalo [1, 9], $y = 2x$ en el intervalo [0, 3], $y = \sqrt{36 - x^2}$ en el intervalo [0, 6] y $y = x^2 + 1$ en el intervalo [-2,5].

- El alumno deberá dibujar las funciones dadas y los sólidos de revolución que se generan a partir de estas, con la convención de que el eje de rotación será el eje horizontal.
- Una vez dibujado el sólido de revolución generado por cada función, que el alumno se concentre en algún punto sobre el eje de rotación y aproxime la distancia entre dicho punto y algunos otros sobre el contorno del sólido en la circunferencia que se formaría al hacer un corte perpendicular al eje a la altura de dicho punto. Luego, que compare las medidas que resulten y que repita el mismo procedimiento en algunos otros puntos sobre el eje de rotación. (Se reforzará esta parte de la actividad con un diseño en Geogebra).
- El profesor generará una discusión acerca de cómo es dicha distancia en diferentes puntos sobre el eje de rotación, y a qué se debe o de qué depende la variación.

Figura 3.2. Actividad 6 de la secuencia didáctica diseñada para el tema de Volumen de Sólidos de Revolución.

La sesión con profesores, en la cual se discutió la actividad 6 de la secuencia didáctica, se realizó mediante una dinámica de juego de rol, donde los participantes simularon ser estudiantes de rendimiento bajo, estándar y alto. En primera instancia, se formaron equipos para resolver la actividad. Debido al rol que cada informante estaba jugando (el cual no era conocido por el resto de los participantes), surgieron errores y se manifestaron dificultades. Posteriormente, se discutió la actividad, así como las predicciones principales formuladas para cada función. Además, señalamos que algunas evidencias acerca de las predicciones elaboradas se realizaron bajo el rol adquirido por los profesores participantes, mientras que otras se realizaron durante la discusión después de finalizar el rol; por lo que, para distinguir entre éstas, se pondrá un asterisco a lado del nombre del participante cuando la evidencia se encuentre bajo el rol. Por otro lado, para discutir lo ocurrido en el aula respecto a la implementación de la secuencia, se editaron videos donde se mostraba la predicción formulada por los informantes así como lo sucedido en el aula para dicha predicción.

Con respecto al análisis de la información hemos empleado el sistema de categorías del modelo MTSK. Para ello, se analizaron las transcripciones de las videograbaciones, de las cuales, se tipificó el conocimiento que utilizaron el grupo de informantes para predecir el comportamiento matemático de los estudiantes ante la actividad 6 de la secuencia didáctica y, a su vez, se ha analizado el tipo de conocimiento que utilizaron los informantes para justificar el cumplimiento de dichas predicciones después de llevar al aula la secuencia; clasificando dicho conocimiento en la categoría correspondiente de acuerdo al extracto de la transcripción correspondiente a la aportación del informante. En la figura 3.3 se muestra la estructura del análisis de la información.

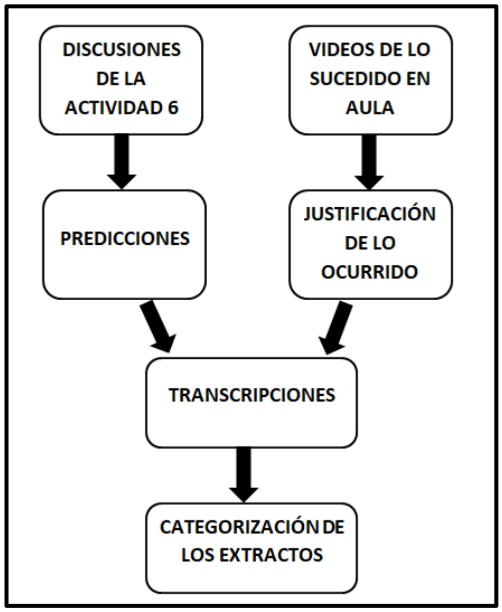


Figura 3.3. Estructura del análisis de la información.
Fuente: Elaboración propia.

3.3. Informantes del estudio

Los informantes del estudio se dividen en dos tipos, los principales y los secundarios. Los informantes principales es un grupo formado por cinco profesores que trabajan en el nivel medio superior, quienes poseen un perfil heterogéneo en cuanto a su formación inicial. Cuentan con una amplia experiencia impartiendo cursos de Cálculo Diferencial e Integral. En seguida, se presentan algunas características de estos informantes. Se han empleado seudónimos para cuidar el anonimato de los mismos:

i) Gemma es Licenciada en Arquitectura, con una Maestría en Dirección de Organizaciones Educativas. Tiene 19 años de experiencia docente impartiendo las materias de Álgebra, Geometría y Trigonometría, Geometría Analítica, Cálculo Diferencial, Estadística, Razonamiento Matemático, Modelos Matemáticos y Cálculo Integral. Asimismo tiene el diplomado PROFORDEMS (programa de formación docente en el nivel medio superior).

ii) Mary es Licenciada en Física, con Maestría en Ciencias en Física. Tiene 25 años de experiencia docente tanto en nivel medio superior como superior. Ha impartido materias tales como Física, Mecánica, Dinámica, Álgebra, Geometría y Trigonometría, Geometría Analítica, Cálculo Diferencial, Estadística, Razonamiento Matemático, Modelos Matemáticos, Cálculo Integral, Cálculo Vectorial, Ecuaciones Diferenciales, Análisis numérico, Probabilidad y Estadística, Álgebra Lineal y Cálculo de Varias Variables.

iii) Bryan es Ingeniero de formación, tiene 9 años de experiencia impartiendo las materias de Álgebra, Geometría y Trigonometría, Geometría Analítica, Cálculo Diferencial, Estadística, Razonamiento Matemático, Modelos Matemáticos y Cálculo Integral. Tiene diplomados en Álgebra, Aritmética, Física, Electrodinámica y Termodinámica impartidos por el INAOE. También tiene diplomado en Competencias Docentes y ha tomado cursos de Pruebas Pisa, Construyete y Empoderamiento de la enseñanza de las matemáticas.

iv) George es Ingeniero Industrial con Maestría en Educación superior, tiene 8 años de experiencia docente en el nivel medio superior y superior. Ha impartido las materias de Álgebra, Geometría y Trigonometría, Geometría Analítica, Cálculo Diferencial, Estadística, Razonamiento Matemático, Modelos Matemáticos y Cálculo Integral, Ecuaciones Diferenciales y Álgebra Lineal.

v) Víctor tiene una Licenciatura trunca en Electrónica, y está por concluir una Licenciatura en Matemáticas enfocada a la Educación. Tiene 30 años de experiencia docente en nivel medio superior y también ha sido profesor en secundaria y formador de profesores en la Escuela Normal Superior. Ha participado de las tres últimas revisiones y actualizaciones de los planes y programas de estudio en el estado de Puebla, México.

Los informantes secundarios son los dos investigadores en Educación Matemática, los dos estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas y los tres estudiantes de la Maestría en Educación Matemática.

3.4. Implementación de la secuencia didáctica

La secuencia didáctica fue implementada por Maggie, quien es una de las informantes secundarias. Ella es Licenciada en Matemáticas, tiene una maestría en matemática educativa;

cuenta con 30 años de servicio en los cuales se ha desempeñado en nivel superior, medio superior y educación para adultos, en particular tiene 25 años de servicio en la institución donde se aplicó la secuencia. En bachillerato ha impartido las asignaturas de Geometría Analítica, Cálculo Diferencial, Estadística, Probabilidad, Razonamiento Matemático, Modelos Matemáticos y Cálculo Integral. Además, realizó una especialidad en matemática ducativa y computación educativa, ha dado cursos de actualización y formación docente en su zona laboral.

Asimismo, la secuencia se implementó en el bachillerato público Héroes de Puebla, el cual tiene 25 años desde su fundación y se encuentra ubicado en la unidad habitacional Volkswagen 2. La implementación se efectuó en un grupo de tercer año con 45 estudiantes, quienes se encontraban inscritos en el área de ciencias exactas, esto debido a que en el último año escolar la escuela divide por áreas (ciencias exactas, ciencias de la salud y, sociales y humanidades) a los escolares con la intención de prepararlos de acuerdo a sus interés para ingresar a la universidad. La secuencia completa se aplicó en un total de cinco sesiones de 50 minutos cada una, en cada sesión se trabajó en equipos formados por los mismos integrantes; en total la profesora formó 8 equipos de trabajo. Todas las sesiones fueron grabadas en audio y video. Con relación al audio, se tenían disponibles cinco grabadoras, siendo la profesora quien seleccionó a 4 equipos para grabar audio y a la vez, ella tenía una para ser grabada. Respecto al video, se filmó con dos cámaras, una siempre fija en la parte posterior del salón y, otra con la cual el encargado de grabar recorría el aula equipo por equipo.

De la información grabada, tanto en audio y video, se hicieron transcripciones para facilitar el análisis de las mismas y, a su vez, se editaron videos con los sucesos más relevantes (con relación a las predicciones) que serían presentados a los informantes posteriormente.

Capítulo 4

ANÁLISIS

En este capítulo se presenta el análisis de la información obtenida, dicho análisis se efectuó a través del estudio de los extractos de las participaciones de los informantes, utilizando el sistema de categorías del modelo MTSK. Se presentan las predicciones centrales elaboradas por los participantes y se describe lo sucedido en el aula en relación al cumplimiento de las mismas. También, para cada subdominio se da una descripción general de cómo los informantes del estudio utilizaron la categoría de conocimiento correspondiente y se exhiben ejemplos.

Enseguida se presentan las nueve predicciones centrales formuladas por los participantes en la sesión donde se discutió la actividad 6 de la secuencia. Con la finalidad de contextualizar el cumplimiento de las predicciones durante la implementación de la secuencia en el aula, se presenta una síntesis de lo sucedido en el aula. Finalmente, por categoría del correspondiente subdominio del MTSK, se exhiben ejemplos donde los profesores utilizaron ese tipo de conocimiento tanto para predecir el posible actuar de los escolares como para justificar el cumplimiento o no de dichas predicciones cuando la secuencia fue implementada en una aula.

4.1. Predicciones centrales

De la discusión de la actividad 6 de la secuencia didáctica, se formularon las siguientes predicciones centrales:

P1. “Los alumnos podrán dar la definición de la función constante”.
P2. “Algunos alumnos graficarán la función mediante tabulación”.
P3. “Algunos alumnos graficarán la función mediante la identificación de la cónica”.
P4. “Algunos alumnos transformarán una función a una cónica conocida.
P5. “Los alumnos sí sabrán distinguir lo que es una función de lo que no lo es”.
P6. “Algunos alumnos dibujarán la circunferencia completa”.
P7. “La mayoría de los alumnos no comprenderán la diferencia entre función y ecuación”.
P8. “Los alumnos evaluarán, medirán con regla o contarán los cuadros de la hoja milimétrica para calcular la distancia del eje X a la imagen de la función”.
P9. “Algunos alumnos dibujarán circunferencias sin perspectiva en los cortes de los sólidos de revolución”.

4.2. Cumplimiento de las predicciones

En este apartado, mostramos el cumplimiento de las predicciones discutidas previamente, así como una breve descripción de lo sucedido en el aula.

Para la predicción **P1** “Los alumnos podrán dar la definición de la función constante”. En el material presentado a los participantes, se observó a un estudiante tabulando la función constante, después el estudiante borra la tabulación. De la discusión respecto a lo sucedido en el aula, se concluyó que la predicción **no** se cumplió.

Para la predicción **P2** “Algunos alumnos graficarán la función mediante tabulación”. En el material presentado a los participantes, se observó a un estudiante tabular la función constante; para la función $y = 2x$, destaca que un estudiante intenta unir tres puntos, se da cuenta de que no se pueden unir en una recta y después pone cuatro puntos. De la discusión respecto a lo sucedido en el aula, se concluyó que la predicción **sí** se cumplió.

Para la predicción **P3** “Algunos alumnos graficarán la función mediante la identificación de la cónica”. En el material presentado a los participantes, se observó que previo a la actividad, la profesora pregunta a los estudiantes si sabían qué representaban cada una de las funciones dadas. En el caso de la circunferencia, se observa que no hubo tabulación, con el radio y el centro grafican la función. De la discusión respecto a lo sucedido en el aula, se concluyó que la predicción **no** se cumplió, excepto para la circunferencia.

Para la predicción **P4** “Algunos alumnos transformarán una función a una cónica conocida”. En el material presentado a los participantes, al igual que mencionamos antes, se observa que previo a la actividad, la profesora pregunta a los estudiantes si sabían qué representaban cada una de las funciones dadas. Por lo que algunos estudiantes identifican la cónica correspondiente sólo con mirar la función dada. De la discusión respecto a lo sucedido en el aula, se concluyó que la predicción **sí** se cumplió.

Para la predicción **P5** “Los alumnos sí sabrán distinguir lo que es una función de lo que no lo es”. En el material presentado a los participantes, se observa a varios estudiantes caracterizar el concepto de función y sus gráficas se corresponden con la definición. Sólo se generó duda en el caso de la estudiante que había dibujado la circunferencia en primera instancia completa pero que después borra y conserva un cuarto de circunferencia para que sea función. De la discusión respecto a lo sucedido en el aula, se concluyó que la predicción **sí** se cumplió.

Para la predicción **P6** “Algunos alumnos dibujarán la circunferencia completa”. En el material presentado a los participantes, como se mencionó anteriormente, se observa a una estudiante borrando parte de la circunferencia para finalmente conservar sólo un cuarto de circunferencia y continúe siendo una función. De la discusión respecto a lo sucedido en el aula, se concluyó que la predicción **sí** se cumplió.

Para la predicción **P7** “La mayoría de los alumnos no comprenderán la diferencia entre función y ecuación”. En el material presentado a los participantes, se observa a varios estudiantes caracterizar tanto qué es una función como una ecuación. De la discusión respecto a lo sucedido en el aula, se concluyó que la predicción **no** se cumplió.

Para la predicción **P8** “Los alumnos evaluarán, medirán con regla o contarán los cuadros de la hoja milimétrica para calcular la distancia del eje X a la imagen de la función”. En el material presentado a los participantes, se observan estudiantes midiendo con regla, otros contando los cuadritos de las hojas milimétricas y a algunos otros evaluando la función para calcular la distancia del eje X a la imagen de la función. De la discusión respecto a lo sucedido en el aula, se concluyó que la predicción **sí** se cumplió para todos los casos.

Para la predicción **P9** “Algunos alumnos dibujarán circunferencias sin perspectiva en los cortes de los sólidos de revolución”. En el material presentado a los participantes, se observan algunos trazos rectos, en donde los estudiantes intentaron mostrar una circunferencia con perspectiva, ya fuera mediante una pequeña curvatura o un sombreado. De la discusión respecto a lo sucedido en el aula y al análisis de las producciones de los estudiantes, observamos que la predicción **no** se cumplió para algunos estudiantes y **sí** se cumplió para otros.

4.3. Categorización de los conocimientos que utilizaron los informantes del estudio

A continuación se presenta el análisis de los conocimientos que fueron empleados por los informantes, las predicciones que formularon mediante éstos y la justificación en torno a las coincidencias o discrepancias en relación al cumplimiento de las predicciones propuestas.

4.3.1. Análisis del KoT

En este apartado se muestran las categorías pertenecientes al subdominio del conocimiento de los temas (KoT), las cuales fueron utilizadas por los participantes del estudio para predecir el posible comportamiento matemático de los estudiantes ante la actividad 6 y para justificar lo ocurrido en el aula después de implementar la secuencia. Además, se exhibirán ejemplos para cada una de las categorías y se dará una explicación del análisis del extracto.

4.3.1.1. Conocimiento de las definiciones, propiedades y sus fundamentos

Este conocimiento fue utilizado en varias ocasiones por los informantes para predecir o justificar el comportamiento matemático de los estudiantes ante la actividad, poniendo de manifiesto sus propios conocimientos matemáticos de los objetos en cuestión. A continuación, se ejemplifican las predicciones que se lograron alcanzar con este tipo de conocimiento.

En torno a la discusión acerca de la graficación de la circunferencia, se formuló la predicción P5 “Los alumnos sí sabrán distinguir lo que es una función de lo que no lo es”, así al analizar el cumplimiento o no de dicha hipótesis, Mary argumentó:

> Mary: *Veo que* [los estudiantes] *dominan bien los elementos [que conforman una función] rango, dominio, solo faltó completar bien el concepto de función “para cada valor de x le corresponde un único valor de y”. Quizás* [la docente no hizo] *mucho énfasis en la parte geométrica de la función, el concepto de función*.

De este extracto vemos que Mary conoce los elementos que conforman una función y resalta la característica fundamental del concepto, donde a cada valor del dominio le corresponda un único valor del contradominio; además, distingue distintas maneras de representar a una función: desde el lenguaje verbal para describir los elementos que la componen, así como la representación gráfica de la función. Asimismo, ante la discusión de la implementación de la secuencia y el análisis sobre la predicción: “La mayoría de los alumnos no comprenderán la diferencia entre función y ecuación”, Tony dijo:

> Tony: *Yo creo que la mayoría de los* [estudiantes] *si sabe qué es una función, pero no saben cómo decirlo, saben que la diferencia con una ecuación es que le corresponde uno y sólo un valor (…) ya que cuando la docente les pregunta si identifican qué representa cada función, no le piden trazar [los valores negativos para la circunferencia]*.

Del extracto anterior, vemos que Tony enfatiza que la diferencia clave entre una función y ecuación radica en la relación de correspondencia entre cada valor del dominio con un único valor del codominio, lo que le permite argumentar que por ello no se grafican ambos valores de la raíz para la función $y = \sqrt{36 - x^2}$.

De manera similar, analizando la actuación del docente que implementó la secuencia con la manera de proceder de un alumno en relación a la graficación de la función $y = 2x$, George aportó lo siguiente:

> George: *Si previo a esta actividad, la docente no hubiera preguntado qué es esto, posiblemente el alumno no se hubiera dado cuenta que un punto quedaba fuera de esa recta*.

Del extracto vemos que George sabe que una condición para que dicho lugar geométrico sea una recta consiste en que todos los puntos sean colineales y por ello no puede haber un punto fuera de ella.

4.3.1.2. Conocimiento de los procedimientos

Este conocimiento fue utilizado en varias ocasiones por los informantes para predecir o justificar el comportamiento y desempeño matemático de los estudiantes ante la actividad, poniendo de manifiesto sus propios conocimientos matemáticos acerca de los posibles algoritmos que permitan desarrollar la actividad. A continuación se ejemplifican las predicciones que se lograron alcanzar con este tipo de conocimiento.

Con una predicción opuesta, Víctor reacciona a la predicción P3 “Algunos alumnos transformarán una función a una cónica conocida” de la siguiente manera:

> Víctor: *No creo que se vayan por ese lado* [por transformar la función en ecuación de cónica], *o sea el de alto rendimiento a lo mejor se va por protocolo, "ah, pues es una irracional, entonces veo el dominio, encuentro cortes y ya", no haría esa parte* [de identificar una cónica con la que se relaciona].

De este extracto podemos notar que Víctor conoce un algoritmo que le permitió predecir un posible modo de proceder de los estudiantes ante la actividad 6, el cual consiste en analizar la función irracional y encontrar su dominio.

Por otro lado, cuando se discutía acerca del rol que los informantes interpretaron para realizar la actividad 6, Daniela comentó que en un principio pensó que Mary interpretaba a un estudiante de alto rendimiento pero que, cuando debían encontrar la distancia de un punto cualquiera sobre el eje de rotación al contorno del sólido de revolución cambió de parecer puesto que:

Daniela: [Para calcular la distancia del punto a la imagen de la función] *Mary no lo hizo con la evaluación, por eso supe que no jugaba el rol de un alumno de alto rendimiento.*

Del extracto vemos que ella conoce una manera de encontrar la distancia de un punto x sobre el eje de rotación al contorno o imagen de la función, el cual consiste en evaluar x en la función dada, en este caso para $y = 2x$, en lugar de contar los cuadros de la hoja milimétrica o utilizar regla. .

4.3.2. Análisis del KFLM

En este apartado se muestran las categorías pertenecientes al subdominio del conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas (KFLM), las cuales fueron utilizadas por los participantes del estudio para predecir el posible comportamiento matemático de los estudiantes ante la actividad 6 y para justificar lo ocurrido en el aula después de implementar la secuencia. Además, se exhibirán ejemplos para cada una de las categorías y se dará una explicación del análisis del extracto.

4.3.2.1. Conocimiento de las formas de interacción con un contenido matemático

Este conocimiento fue utilizado en varias ocasiones por los informantes para referirse a la manera de proceder de los estudiantes al resolver la actividad 6. A continuación se ejemplifican las predicciones que se lograron alcanzar con este tipo de conocimiento.

Para la graficación de cada función se discutían los posibles métodos que usarían los estudiantes para dibujar la función. Por lo que, se formuló la predicción P2 "Algunos alumnos graficarán la función mediante tabulación".

Respecto a esta predicción para la función $y = 2x$, se argumentó:

Mary: *Un alumno de bajo rendimiento verá el intervalo y comenzará a sustituir dentro de la función.*

De este extracto, observamos que Mary considera que un procedimiento que los alumnos de bajo rendimiento utilizan para graficar una función consiste en sustituir los valores del intervalo en la función.

Por otro lado, en el juego de rol, el equipo de Viry transformó la función dada a una cónica conocida de la siguiente manera:

> Viry*: *Para esta función* [circunferencia] *nos dimos cuenta que si pasábamos la raíz cuadrada del otro lado, obtendríamos "y cuadrada igual a treinta y seis menos x cuadrada" y al despejar la x, nos dimos cuenta que era una circunferencia de radio seis*.

De ese extracto, nos damos cuenta de que Viry teoriza que los alumnos de alto rendimiento harían operaciones (despejar las variables) para transformar la función en una ecuación que les permita identificar la cónica.

De igual manera y en relación al análisis del extracto anterior, durante la discusión respecto a lo sucedido en el aula durante la implementación de la secuencia didáctica, Tony justificó lo ocurrido de la siguiente manera:

> Tony: [Los estudiantes] *supieron identificar desde la función el radio y creo que una manera de hacerlo era despejando [transformando la función]*.

Del extracto de Tony, nos damos cuenta de que él justifica el cumplimiento de la predicción al considerar que un procedimiento que les permitió a los estudiantes reconocer (sin graficar) que se trataba de un cuarto de circunferencia era transformar la función a una cónica conocida.

4.3.2.2. Conocimiento de las fortalezas y dificultades

Este conocimiento fue utilizado en varias ocasiones por los informantes cuando hacían referencia a los obstáculos o potencialidades del aprendizaje de los estudiantes. Enseguida se mencionan y ejemplifican las predicciones que se lograron alcanzar con este tipo de conocimiento.

Durante la discusión de la actividad se formuló la predicción P5 "Los alumnos sí sabrán distinguir lo que es una función de lo que no lo es", al respecto Mary argumentó:

Mary: *Uno* [debe] *plantear* [a los alumnos]*: "esta es una función porque haces la prueba de la recta vertical", por eso digo que mis alumnos si pueden* [distinguir una ecuación de una función].

De este extracto se ve que Mary considera importante presentar la prueba de la recta vertical a los estudiantes, ya que les ayudará a discernir de manera gráfica cuándo se trata de una función y cuándo no, por lo que ella ve como una fortaleza tener conocimiento de esta prueba.

De igual manera, durante la discusión sobre la actividad, George argumentó la razón por la cual supo que Diana interpretaba a un alumno de bajo rendimiento y ésta, a su vez, explicó el motivo que la llevó a desarrollar su rol de esa manera; todo centrado en la perspectiva de las circunferencias en los puntos de corte de un sólido de revolución.

George*: [Porque dijo] *"no veo la circunferencia" y después dijo "ah, ya sé cómo (…), entonces la circunferencia queda aquí así [muestra una circunferencia sin perspectiva en el lugar del corte]*.

Diana: *Yo lo que pensaba era "¿cómo el estudiante puede interpretar dónde está la circunferencia?". O sea, si yo pongo el eje y pongo mi función, ¿dónde veo la circunferencia? La circunferencia en verdad no se ve* [haciendo referencia a que lo que se debería dibujar en el corte es una circunferencia con perspectiva].

Derivado de esta discusión se generó la predicción P9 “Algunos alumnos dibujarán circunferencias sin perspectiva en los cortes de los sólidos de revolución”. De lo comentado por Diana, vemos que ella piensa que el estudiante puede encontrar dificultades al intentar comprender que se forman circunferencia en los puntos de corte de un sólido de revolución, lo cual puede convertirse en un obstáculo para comprender los sólidos de revolución puesto que esta es una propiedad que poseen.

Otra discusión interesante se suscitó al intentar justificar si la predicción P6 “Algunos alumnos dibujarán la circunferencia completa”, se había o no cumplido; puesto que en el video que se analizó, se observa a un alumno dibujar la circunferencia completa para después borrar parte de ésta y colorear el pedazo en donde no se indefine la función. Al respecto, Daniela opinó:

Daniela: *En niveles* [previos] *se trabaja el círculo, por eso creo que para un estudiante es más práctico dibujar toda la circunferencia y tomar la parte que necesita* [considerando el intervalo], *por eso la borra pero colorea el cuarto de circunferencia* [para que siga siendo función].

De este extracto vemos que Daniela ve como una potencialidad el acercamiento con el círculo en niveles anteriores, manifestando que esto produce una mejor manipulación para graficar la función de la circunferencia.

De la discusión respecto al análisis de las producciones de los estudiantes en cuanto a sí tenían la perspectiva de la circunferencia en un punto de corte del sólido, Víctor apuntó:

Víctor: *Tienen cierto problema en plasmar cosas en 3D, imaginarlo y plasmarlo no es fácil. Yo creo que esos dibujos muestran algo de esa carencia, puede ser que sí identifiquen la función (...) pero creo que no han logrado entender esa parte de cómo gira y cómo se ve el sólido; no necesitas ser experto o aprender a dibujar para plasmar la perspectiva*.

Con lo dicho por Víctor, vemos que él conoce que una limitación que tienen los estudiantes está asociada a la espacialidad y su representación.

4.3.3. Análisis del KMT

En este apartado se muestran las categorías pertenecientes al subdominio del conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT), las cuales fueron utilizadas por los participantes del estudio para predecir el posible comportamiento matemático de los estudiantes ante la actividad 6 y para justificar lo ocurrido en el aula después de implementar la secuencia. Además, se exhibirán ejemplos para cada una de las categorías y se dará una explicación del análisis del extracto.

4.3.3.1. Conocimiento de las estrategias, técnicas, tareas y ejemplos

Este conocimiento fue utilizado por los informantes para mostrar el alcance que se puede lograr (limitado o no) al trabajar bajo ciertas circunstancias como tareas, o ejemplos con los estudiantes. En relación a la función $y = \sqrt{36 - x^2}$ y con base en el análisis de la predicción P7 “La mayoría de los alumnos no comprenderán la diferencia entre función y ecuación”, Mary formuló una predicción opuesta a la planteada, argumentando que la potencialidad de proporcionar ejemplos de no funciones a los estudiantes tiene un efecto positivo al trabajar con la ecuación de la circunferencia:

Mary: *Cuando comienzo a dar el concepto de función les dejo claro [a los alumnos] que una circunferencia no es una función, sino que tenemos que redefinirla en el intervalo del eje positivo, por eso digo que mis alumnos sí pueden identificarla*.

En este extracto vemos que Mary utiliza como estrategia de enseñanza mostrar a los alumnos por qué una circunferencia no es una función, lo cual les permitirá a los estudiantes no tener dudas respecto a si una circunferencia es o no es función.

Otro predicción derivada de la discusión del posible actuar de los estudiantes bajo la actividad cuando se les solicita aproximar la distancia entre un punto del eje de rotación y el contorno del sólido es la P8 “Los alumnos evaluarán, medirán con regla o contarán los cuadros de la hoja milimétrica para calcular la distancia del eje X a la imagen de la función”.

Durante la discusión de lo observado en el aula surgió una reflexión de Tony acerca de que los alumnos utilizaban la evaluación para aproximar la distancia en los puntos extremos, sin embargo, no podían hacerlo en los demás. A lo que Víctor respondió:

Víctor: *En el pedazo de video que vi, Maggie forzaba a que le contestaran lo que quería, los llevó de manera conductista a que le dijeran eso pero no los dejó, "ustedes saben, yo no sé cómo le hagan”. Posiblemente en alguna parte si forzó a que hicieran esa evaluación. Incluso con la misma regla, también ya le estás diciendo que la va a ocupar, lo estás forzando a medir*.

De este extracto vemos que Víctor señala que ciertas intervenciones de la docente así como el haber dado la regla como un recurso, fueron elementos que intervinieron para que los estudiantes no utilizaran la evaluación como método para aproximar la distancia o que la usarán sólo para los puntos extremos del intervalo.

Asimismo, durante el análisis de las producciones de los alumnos respecto a la predicción P9 “Algunos alumnos dibujarán circunferencias sin perspectiva en los cortes de los sólidos de revolución”, George argumentó:

George: *La otra cuestión que considero pudo aportar [a lograr la perspectiva] son las actividades previas de la secuencia: identificar cuáles son y cuáles no son sólidos de revolución, creo que les genera la oportunidad de "ah, cuando yo grafique sé que se le debe de dar o trazarse un sentido de profundidad"*.

De este extracto vemos que George considera que el haber trabajado ciertas actividades antes que ésta, pudo ayudar a qué el estudiante lograra (desde su punto de vista) la perspectiva del sólido.

4.3.4. Análisis del KMLS

En este apartado se muestran las categorías pertenecientes al subdominio del conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS), las cuales fueron utilizadas por los participantes del estudio para predecir el posible comportamiento matemático de los estudiantes ante la actividad 6 y para justificar lo ocurrido en el aula después de implementar la secuencia. Además, se exhibirán ejemplos para cada una de las categorías y se dará una explicación del análisis del extracto.

4.3.4.1. Conocimiento del nivel de desarrollo conceptual y procedimental esperado

Este conocimiento fue utilizado en diversas ocasiones por los profesores para referirse a capacidades o conceptos que los estudiantes deberían de conocer (desde una reflexión curricular). A continuación se mencionan y ejemplifican las predicciones y justificaciones que se lograron alcanzar con este tipo de conocimiento.

En el juego de rol, Diana propuso una definición para la función constante y Tony reaccionó de la siguiente manera:

Tony*: *Cuando vimos la función,* [Diana] *dio la definición de la función…el que dijera que a cada punto de x le iba a asignar el mismo valor, hizo que yo supiera que interpretaba a un alumno de rendimiento estándar*.

En este extracto notamos que Tony sabe que los estudiantes de rendimiento estándar en el bachillerato (nivel para el que está diseñada la secuencia) pueden dar la definición de función constante.

Por otro lado, surgió una discusión en torno a la graficación de cada función, discutiendo sobre la posibilidad de que los estudiantes relacionen ciertas expresiones matemáticas con la forma que representan, lo cual originó la predicción P3 “Algunos alumnos graficarán la función mediante la identificación de la cónica”. Para la función $x^2 + 1$, Maggie comenta lo siguiente:

Maggie: *Un veinticinco por ciento de los alumnos sí identifican una parábola de esa forma sencilla "x cuadrada más algo"*.

Aunque Maggie se refiere a un porcentaje de estudiantes que podrá realizar la identificación, para fines de análisis de conocimiento, la fidelidad de lo sucedido con dicho porcentaje no es relevante. En este caso, destacamos que ella posee un conocimiento que le permite predecir que algunos estudiantes son capaces, en ese nivel educativo, de identificar como parábola a las expresiones de la forma $x^2 + b$, lo cual incluso, generaliza la función que se les propondría a los estudiantes.

Por otro lado, de la implementación de la secuencia, se discutía sobre la acción de un estudiante que tabuló la función constante y su relación con la predicción P1 “Los alumnos podrán dar la definición de la función constante”. A esto, Johan dijo:

Johan: *Lo veo como un procedimiento mecánico que ya tiene él, se ve que ya ha hecho ejercicios, sabe que tiene que tabular*.

De este extracto notamos que Johan hace uso de un conocimiento que le permite argumentar que la manera típica en la que los estudiantes proceden al graficar una función consiste en recurrir a la tabulación, sin considerar sus características, pese a que se espera que el estudiante sea capaz de graficar esta función sin recurrir a la tabulación.

4.3.4.2. Conocimiento de la secuenciación con temas anteriores y posteriores

Este conocimiento fue utilizado por los profesores para explicar los conocimientos previos que no fueron adquiridos en cursos anteriores y que limitan la utilización de estos recursos para resolver la actividad e incluso los aprendizajes de temas posteriores puesto que de acuerdo a los estándares de aprendizaje, los estudiantes deberían conocer estos tópicos.

Durante la discusión de la predicción P3 “Algunos alumnos graficarán la función mediante la identificación de la cónica”, Johan comentó:

Johan: *Mis alumnos de Cálculo no podrían identificar que esa* [función] *es una parábola porque vienen de un curso de Geometría analítica que a lo más que vieron fue la línea recta*.

Del extracto vemos que Johan sabe que curricularmente, en Geometría analítica se debe estudiar recta, circunferencia y parábola, por lo que, no haber estudiado alguno de los lugares geométricos mencionados afecta a la resolución de actividades que impliquen hacer uso de ese conocimiento.

Por otro lado, de la reflexión de Tony acerca de que los alumnos utilizaban la evaluación para aproximar la distancia en los puntos extremos y, sin embargo, no podían hacerlo en los demás. Maggie justificó este hecho de la siguiente manera:

Maggie: *Los chicos no asocian la distancia con la evaluación de la función en ese punto, yo creo que tiene que ver con que no está sólido el concepto de función en general: su representación gráfica, etcétera*.

Con lo dicho por Maggie, vemos que ella reconoce la importancia del tema de función como predecesor del tema de Volumen de sólidos de Revolución y el cual, puede limitar el aprendizaje de éste al no estar cognitivamente sólido en los estudiantes.

4.4. Resumen de conocimientos utilizados para cada predicción

Para facilitar el panorama expuesto en las secciones anteriores, en la Tabla 4.1 se muestra un resumen de los conocimientos que utilizaron los informantes del estudio, para cada una de las predicciones centrales. En la Tabla 4.1 se utilizan palabras claves para sintetizar las predicciones, por lo cual, a continuación se enlistan completas y podrán ser identificadas en la tabla de acuerdo a su numeración.

P1. “Los alumnos podrán dar la definición de la función constante”.
P2. “Algunos alumnos graficarán la función mediante tabulación”.
P3. “Algunos alumnos graficarán la función mediante la identificación de la cónica”.
P4. “Algunos alumnos transformarán una función a una cónica conocida.
P5. “Los alumnos sí sabrán distinguir lo que es una función de lo que no lo es”.
P6. “Algunos alumnos dibujarán la circunferencia completa”.
P7. “La mayoría de los alumnos no comprenderán la diferencia entre función y ecuación”.

P8. "Los alumnos evaluarán, medirán con regla o contarán los cuadros de la hoja milimétrica para calcular la distancia del eje X a la imagen de la función".

P9. "Algunos alumnos dibujarán circunferencias sin perspectiva en los cortes de los sólidos de revolución".

Tabla 4.1

Resumen de conocimientos utilizados para cada predicción.

PREDICCIÓN	CONOCIMIENTOS			
	KOT	KFLM	KMT	KMLS
P1. Definición función constante				*-Desarrollo conceptual y procedimental esperado*
P2. Graficación mediante tabulación	*-Definiciones, propiedades y sus fundamentos* *-Procedimientos*	*-Formas de interacción con un contenido matemático*		
P3. Graficación mediante identificación de cónica				*-Desarrollo conceptual y procedimental esperado* *-Secuenciación con temas anteriores y posteriores*
P4. Función a cónica	*- Procedimientos*	*-Formas de interacción con un contenido matemático*		
P5. Función	*-Definiciones, propiedades y sus fundamentos*	*-Fortalezas y dificultades*		
P6. Circunferencia completa		*-Fortalezas y dificultades*		
P7. Diferencia entre función y ecuación	*-Definiciones, propiedades y sus fundamentos*		*-Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos*	
P8. Distancia a la imagen de la			*-Estrategias, técnicas, tareas y*	*-Secuenciación con temas anteriores y*

función			*ejemplos*	*posteriores*
P9. Circunferencias sin perspectiva		*-Fortalezas y dificultades*	*-Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos*	

Como se observa en la tabla 4.1, para la mayoría de las predicciones se encuentra más de un conocimiento asociado, lo que resulta de interés para este trabajo y quizá sirva de antecedente para futuras investigaciones.

CONCLUSIONES

En este apartado se presentan reflexiones acerca del aprendizaje y enseñanza de la asignatura de Cálculo en el nivel medio superior, asimismo, las reflexiones finales están basadas en el análisis de la información obtenida. Además, se sustentan cada una de las conclusiones formuladas.

El Cálculo es una de las asignaturas que han reportado más problemáticas en el nivel medio superior (Salinas y Alanís, 2009). Por ello, es importante que los profesores o futuros profesores conozcan las diversas situaciones a las cuales se pueden enfrentar al impartir un tema específico concerniente a esta asignatura o como fue el caso en este trabajo, con relación a temas previos al Cálculo, los cuales fungirán de cimientos.

Asimismo, es crucial que los profesores cuenten con herramientas que les permitan minimizar algunas de las problemáticas expuestas en esta tesis y por ende, mejorar el aprendizaje de la asignatura. Así, el análisis, reflexión y discusión previa de las actividades diseñadas es de utilidad para el profesor puesto que durante este proceso puede formular predicciones sobre el posible comportamiento matemático de los estudiantes e ir modificando las actividades considerando una gama más extensa de posibilidades respecto a la manera de proceder de los estudiantes y, a la vez, de cómo potencializar estas hipotéticas maneras de resolución. Por lo tanto, los profesores puedan planificar de manera eficaz su instrucción y lograr los objetivos establecidos.

En ese sentido, es pertinente señalar la contribución de esta tesis al campo de la educación matemática, la cual consiste en brindar a los docentes una herramienta metodológica que les permite hacer frente respecto al actuar de los estudiantes ante una actividad, así como ampliar los escenarios posibles para atacar las dificultades o potencializar las fortalezas en ellos; dicha herramienta no requiere más que de situarse en el lugar del estudiante (alto, promedio y bajo rendimiento) a través de la formulación de posibles maneras de proceder dada una actividad; después de formular conjeturas, el docente puede hacer una reflexión sobre cómo guiar esos posibles escenarios (errores, dudas, dificultades, aciertos) para impulsar y enriquecer el conocimiento de los estudiantes. A su vez, le servirá a él para ampliar y fortalecer su propio conocimiento *especializado* como profesor de matemáticas, ya que para dar respuesta a los caminos conjeturados, se verá en la necesidad de recorrer los dominios y por ende, subdominios y categorías propuestas por el MTSK (conocimientos matemáticos sobre la disciplina: conceptos, procedimientos, conexiones, etc. y conocimientos sobre la didáctica de la matemática: estrategias, ejemplos, manera en que los estudiantes suelen responder, currículo etc.).

Por otro lado, en concordancia con Garijo (2014) los resultados mostraron que la mayoría de los estudiantes ven a las funciones de manera mecánica, puesto que en funciones sencillas como la función constante, recurrieron a la tabulación para graficarla. Asimismo, como señalan López y

Sosa (2008) los estudiantes mostraron asumir a los reales como dominio de la función, ya que en algunos casos al graficar la función no respetaron los intervalos dados. Otro aspecto importante discutido y el cual tiene relación con las investigaciones realizadas por otros autores (López y Sosa, 2008) consiste en si los estudiantes se percatan de la diferencia entre función y ecuación, puesto que durante la implementación de la secuencia, para la función del cuarto de circunferencia, se aprecia que la dibujan completa y después borran para dejar el cuarto de circunferencia; durante la argumentación de este hecho, se tenían dos posibilidades latentes, la primera que el estudiante por trabajo previo le resultara más sencillo apoyarse de la circunferencia completa en un principio y dado que sabe va a graficar una función, borra y deja la parte con la cual no se indefine la función y, la otra posibilidad discutida hacía referencia a que se percató del trabajo de otros compañeros y no a su propia reflexión.

De igual manera, en concordancia con Andrade y Montecino (2011, 2013), los resultados mostraron que algunos escolares muestran limitaciones al transitar entre los distintos significados de f(x), en particular para distinguir a f(x) como la altura o radio de las circunferencias que forman cilindros de altura dx. Además, algunas producciones de los estudiantes mostraron lo descrito por Blanco y Godino (2015), ya que dibujaron circunferencias para conceder un efecto tridimensional o de volumen a los sólidos que generaron, poniendo en duda si habían logrado visualizar el sólido. Al respecto, se discutió la necesidad de dar una instrucción precisa donde se pida realizar el dibujo en tres dimensiones, esto coincide con lo expuesto por Andrade y Montecino (2013), quienes mencionan que la ausencia del eje z en el plano cartesiano cuando se rota la función alrededor de un eje incide en la limitación que presentan los escolares para generar o visualizar mentalmente el sólido y, al mismo tiempo, mencionan lo complejo que es para los estudiantes representar figuras tridimensionales en dos dimensiones.

También es trascendental mencionar las fortalezas y limitaciones del trabajo, al respecto, las fortalezas han sido crear sensibilidad y conciencia en los docentes que fueron informantes de este proyecto con relación a las capacidades y conocimientos que posee un estudiante, ya que les resultaba complicado deslindarse de su experiencia y por ello, abrirse ante nuevas opciones de posible comportamiento matemático de un grupo hipotético, ya fuera esperar más o menos de los estudiantes. Otra fortaleza consiste en el autoanálisis que como profesores es conveniente realizar en diferentes momentos, con relación al conocimiento (desde el MTSK) que la profesión demanda y continuar retroalimentando las áreas de oportunidad detectadas. Dentro de las limitaciones del trabajo, se destaca las pocas sesiones de discusión que fueron posibles organizar (una mensual), lo anterior debido a la agenda de los informantes, lo que desencadenó en no poder profundizar más en otros aspectos de interés con los informantes y sólo considerar algunos para la investigación. También respecto a las limitaciones, encontramos la dificultad de los informantes para realizar conjeturas acerca del comportamiento matemático dada la actividad, pues las discusiones se desviaban y en un principio, no fue posible efectuar hipótesis; por lo que, nos vimos en la necesidad de buscar un método alternativo para lograr la formulación de las hipótesis. Dicho método consistió en simular ser estudiantes de distintos perfiles y resolver la actividad.

Por otro lado es importante decir que el perfil heterogéneo de los informantes contribuyó a tener un panorama más extenso, pues todos desde su práctica como docentes y experiencia como estudiantes aportaron argumentos valiosos para la formulación de conjeturas y a encontrar una justificación del por qué ocurrió lo sucedido al aplicar la secuencia en el aula.

Con base en los resultados obtenidos, nos hemos dado cuenta de que:

- *El profesor de matemáticas utiliza un conocimiento característico de su profesión para realizar predicciones*.

Esta es una afirmación que la teoría del MTSK menciona, sin embargo, nosotros la apoyamos puesto que cada informante utilizó diferentes conocimientos para formular predicciones con relación a la actividad. Como ejemplo, veamos los siguientes conocimientos que utilizó un mismo informante (se puede revisar en el capítulo anterior).

> “Veo que [los estudiantes] dominan bien los elementos [que conforman una función] rango, dominio, solo faltó completar bien el concepto de función “Para cada valor de x le corresponde un único valor de y”. **(KoT)**
> Un alumno de bajo rendimiento verá el intervalo y comenzará a sustituir dentro de la función.” **(KFLM)**
> “Cuando comienzo a dar el concepto de función les dejo claro [a los alumnos] que una circunferencia no es una función, sino que tenemos que

redefinirla en el intervalo del eje positivo, por eso digo que mis alumnos sí pueden identificarla.” **(KMT)**

- *La experiencia juega un papel fundamental al momento de elaborar predicciones*.

Al respecto de este punto, nos percatamos de que los informantes predecían con base en la experiencia que han tenido, lo cual causó que al discutir la actividad, éstos apoyaran o no las predicciones centrales. Por ejemplo, al discutir la predicción P3 “Algunos alumnos graficarán la función mediante la identificación de la cónica”, para la función $y = \sqrt{36 - x^2}$, un informante dijo “a mí siempre me ha pasado, [que los alumnos] curricularmente nunca llegaron ni a circunferencia, curricularmente va primero recta y luego seguiría circunferencia. A ellos les resultaría realmente complicado, incluso a alumnos destacados ver que ahí [refiriéndose a la función] hay una circunferencia” mientras que otra informante argumentó “mis alumnos de alto rendimiento eso de identificar [la gráfica que se asocia a la ecuación de la circunferencia] sí, porque hemos hecho muchas gráficas”.

- *Para una misma predicción puede haber más de un conocimiento involucrado*.

Los resultados apoyan esta afirmación como se ve en la Tabla 4.1, como ejemplo veamos los diferentes conocimientos asociados ala predicción P2 “Algunos alumnos graficarán la función mediante tabulación”, para dicha predicción son tres los conocimientos identificados, éstos conocimientos son las formas de interacción con un contenido matemático (KFLM); definiciones, propiedades y sus fundamentos (KoT) y, procedimientos (KoT).

- *El contexto académico de los estudiantes es relevante para predecir posibles escenarios ante una actividad específica*.

Para ejemplificar esta afirmación, resulta oportuno mencionar que cuando se discutió la actividad, en particular la graficación de la función $y = 3$, dada la experiencia de los informantes, algunos consideraron que los estudiantes no tabularían para graficar la función mientras que otros consideraban que sí lo harían. Durante la implementación se observó a un chico que tabula y cuando se da cuenta que no es necesario, borra la tabla; ante la discusión de lo ocurrido, una de las informantes argumentó “se me hace que los alumnos tienen muy buen nivel, situados en su contexto, para la docente no era necesario que los alumnos tabularan puesto que ya tienen un nivel, en mi caso los alumnos no llegan a ese nivel, por lo tanto ellos en primera instancia van a tratar de tabular”.

- *Compartir y discutir ideas sobre el comportamiento matemático de los estudiantes con otros profesores, fortalece el propio conocimiento que se tiene como docente, permitiendo ampliarlo a otros panoramas educativos*.

Esta conclusión surge a raíz de las reflexiones generales y personales que compartieron los informantes, en las cuales hicieron mención de que a través de la experiencia de otros, han conocido escenarios diferentes al suyo. Inclusive, mencionaron que ya tienen nuevas ideas para trabajar este tema con sus estudiantes.

- *Anticiparse al comportamiento y desempeño matemático de los estudiantes para después contrastarlo con lo sucedido en el aula, permite reflexionar sobre la propia práctica docente, las fortalezas y debilidades*.

Durante el desarrollo de la actividad, la docente pregunta a los estudiantes por qué para la función $y = \sqrt{36 - x^2}$ no se grafican ambos valores de la raíz cuadrada, a lo que uno de los estudiantes responde “porque la función solamente da media circunferencia y el intervalo pide un cuarto de la circunferencia”.

Después de analizar este comentario efectuado por el estudiante, los informantes concluyeron que él sí sabía qué es una función pero no lo expresa con el lenguaje esperado por la docente en ese momento. A lo que, después de la reflexión sobre su práctica, la docente dice “como ayudan los vídeos, cuando yo estaba con esa actividad, cuando les estoy preguntando, no me había quedado claro que el estudiante sí sabía. Después de que veo el vídeo, [noté] que dice es un cuarto de circunferencia…sí sabe qué es una función pero no sabe cómo expresarlo”.

- *Comparar lo hipotético con lo sucedido ayuda a identificar las limitaciones, fortalezas, dificultades, que se tienen y así modificar las futuras tareas, explicaciones, maneras de abordar el tema y lograr cumplir el objetivo de aprendizaje*.

Para ejemplificar este punto, mencionaremos que durante la discusión de la actividad con los informantes, la mayoría apoyaba que los estudiantes sí tendrían la perspectiva de los sólidos de revolución con relación a las circunferencias en los puntos de corte pese a que la predicción formulada decía lo opuesto. Sin embargo, al discutir las producciones que los estudiantes hicieron para la actividad, en donde se pedía rotar la función y realizar el dibujo del sólido resultante, los informantes tuvieron distintas opiniones en cuanto al cumplimiento de la predicción. Por lo que, se argumentaron muchas cosas para justificar las producciones, hubo quien dijo que tenían la perspectiva pero que “simplemente no pudieron plasmarlo por las deficiencias [técnicas del dibujo]”; también un informante dijo que “…desde el principio de la actividad [se debió dar la instrucción] de graficar el producto en tres dimensiones”, además se comentó que “ quizás hubo transferencia de conocimiento en el momento, si los elementos del equipo interactuaron, en ese momento pudieron haberse corregido, comentado, logrando la perspectiva” y también se argumentó que “… pudo aportar [a lograr la perspectiva] las actividades previas de la secuencia: identificar cuáles son y cuáles no son sólidos de revolución, creo que les genera la oportunidad de "ah, cuando yo grafique sé que se le debe de dar o trazarse un sentido de profundidad".”. De esta manera, se manifestó que el dibujo puede ser una limitación para que el estudiante no otorgue una perspectiva o que la precisión de la instrucción influye en lo que realizan los estudiantes y, asimismo que el trabajo en equipo puede estar relacionado con el logro de la perspectiva al igual que realizar actividades previas.

- *Los informantes recurrieron más al conocimiento de las definiciones, propiedades y sus fundamentos, el conocimiento de las fortalezas y dificultades y, el conocimiento de las estrategias, técnicas, tareas y ejemplos para predecir y justificar el cumplimiento de las predicciones. Por lo que, se puede considerar que estos son los conocimientos en los cuales se basaron para predecir y justificar lo ocurrido en el aula*.

Esta información se puede contrastar en la Tabla 4.1, en donde se nota una mayor incidencia al utilizar dichos conocimientos del modelo MTSK. Además, una posible explicación de un uso más frecuente de éstos, se asocia en un principio a que el profesor posee un conocimiento matemático (conocimiento de las definiciones, propiedades y sus fundamentos) para ejercer su profesión, en donde considera cómo aprenden sus estudiantes y por lo tanto, de qué manera puede enseñar; articulando otros conocimientos que contribuyen a su desarrollo y práctica profesional.

Finalmente, también creemos valioso que los formadores de profesores consideren los conocimientos que utilizan los docentes para el diseño de tareas que les permitan desarrollar cada uno de los conocimientos que el modelo MTSK propone, con la finalidad de que los futuros profesores estén lo mejor preparados y, también que, quienes ya ejercen la profesión continúen fortaleciendo sus conocimientos.

Impacto del trabajo

Por otro lado y para cerrar esta sección, consideramos importante mencionar que como parte del desarrollo del trabajo, éste se presentó en distintos momentos de la investigación y en diferentes eventos académicos con la finalidad de retroalimentar y fortalecerlo. Entre estos eventos destacan:

- ❖ La XX Escuela de Invierno en Matemática Educativa bajo la modalidad cartel con el título: Predicciones que realizan los profesores acerca del comportamiento y desempeño matemático de estudiantes de Cálculo.
- ❖ La XXXII Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa bajo la modalidad comunicación breve con el título: Usos de las predicciones que realizan los profesores acerca del comportamiento y desempeño matemático de estudiantes de Cálculo.

Además, se realizó una estancia en la Universidad Estatal de Campinas, Brasil bajo la supervisión del Dr. Miguel Ribeiro, quien es especialista en el Modelo MTSK. Durante la estancia se colaboró con el grupo de investigación CIEspMat (Conocimiento Interpretativo y Especializado del Profesor de Matemáticas) dirigido por el Dr. Ribeiro. De igual manera, la investigación se presentó en un congreso de esa ciudad bajo la modalidad ponencia con el título: Conocimientos que utilizan los profesores al discutir una actividad diseñada para el tema de volumen de sólidos de revolución.

Fruto de las diversas presentaciones de la investigación así como de la estancia, se evidenció un gran interés de la audiencia por el tema y a su vez, se pudo contrastar con el trabajo que otros investigadores y colegas realizan sobre el MTSK.

Referencias Bibliográficas

Amador-Saelices, V., y Montejo-Gámez, J. (2016). Una trayectoria hipotética de aprendizaje para las expresiones algebraicas basada en análisis de errores. *Épsilon*, *33*(2), 7-30.

Andrade, M., y Montecino, A. (2011). La problemática de la tridimensionalidad y su representación en el plano. *Actas del XIII CIAEM-IACME*. Recuperado el 30 de agosto de 2017 de https://www.researchgate.net/publication/283684064_La_problematica_de_la_tridimensionalidad_y_su_representacion_en_el_plano.

Andrade, M., y Montecino, A. (2013). Conversión de registros en el cálculo integral: la problemática de los sólidos de revolución. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 26* (pp. 473-479), DF: CLAME.

Arce, M., y Ortega, T. (2013). Deficiencias en el trazado de gráficas de funciones en estudiantes de bachillerato. *PNA*, *8*(2), 61-73.

Arcos, J. (2004). Rigor o entendimiento, un viejo dilema en la enseñanza de las matemáticas: el caso del cálculo infinitesimal. *Tiempo de educar*, *5*(10), 77–110.

Baquero, C. (2014). *Una propuesta didáctica para la enseñanza del concepto de volumen dirigida a estudiantes de grado octavo* (Tesis de maestría). Bogotá, Colombia: Universidad Nacional de Colombia

Blanco, T., y Godino, J. (2015). Generando sólidos de revolución en la formación inical de maestros. *Actas del XIII CIAEM-IACME* 2015. Recuperado el 14 de Julio de 2018 de http://xiv.ciaem-redumate.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/185/116.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C., y Muñoz-Catalán, M.C. (2013). Determining specialised knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, C. Haser, Y M. Mariotti (Eds.). *Proceedings of the CERME 8* (pp. 2985-2994). Antalya, Turquía: ERME.

Daza, G., y Garza, B. (2008). Actitudes hacia el Cálculo Diferencial e Integral: Caracterización de Estudiantes Mexicanos del Nivel Medio Superior. *Bolema*, *32*(60), 279 – 302.

Escudero, D. (2015). *Una caracterización del conocimiento didáctico del contenido como parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas de secundaria* (Tesis de doctorado).Huelva, España: Universidad de Huelva

Flores, E., Escudero, D., y Aguilar, A. (2013). Oportunidades que brindan algunos escenarios para mostrar evidencias del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 275-282). Bilbao: SEIEM.

Flores-Medrano, E., Escudero-Avila, D., Montes, M., Aguilar, A., y Carrillo, J. (2014). Nuestra modelación del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, el MTSK. En J. Carrillo, L.C. Contreras, N. Climent, D. Escudero-Avila, E. Flores-Medrano, y M. Montes (Eds.). *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas* (pp. 57-72). Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

Flores, E. (2015). *Una profundización en la conceptualización de elementos del modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK)* (Tesis de doctorado). Huelva, España: Universidad de Huelva

Garijo, L. (2014). *Enseñanza de funciones y gráficas en 1° de Bachillerato basado en el uso de GeoGebra* (Tesis de maestría). Barcelona, España: Universidad Internacional de la Rioja

Grajales, D. (2017). *El proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática en maestros en formación, proyectado a estudiantes de primaria de la escuela Normal Superior de la presentación de Pensilvania* (Tesis de maestría). Manizales, Colombia: Universidad Nacional de Colombia.

Llinares, S. (1998). La investigación «sobre» el profesor de matemáticas: aprendizaje del profesor y práctica profesional. *Aula*, *10*, 153-179.

López, J., y Sosa, L. (2008). Dificultades conceptuales y procedimentales en el aprendizaje de funciones en estudiantes de bachillerato. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 21* (pp. 308-318), DF: CLAME.

Milevicich L., y Lois A. (2008). La enseñanza y aprendizaje del cálculo integral mediante el uso de ordenador. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 21* (pp. 973-982). DF, CLAME.

Mofolo-Mbokane, B., Engelbrechta, J., y Hardingb, A. (2013). *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *44*(7), 1065–1080.

Ordoñez, J., y García, M. (2013). *Nivel de dominio necesarios para el aprendizaje del contenido" volumen de un sólido de revolución" en estudiantes de ingeniería*. Recuperado el 15 de septiembre de 2018 de http://www.riuc.bc.uc.edu.ve/handle/123456789/1879.

Real Academia Española (2017). Diccionario de la lengua española (23.a ed.). Consultado el 30 de septiembre de 2018 en http://dle.rae.es/srv/search?m=30&w=predecir.

Río, L. (2017). Enseñar y aprender cálculo con ayuda de la vista gráfica 3D de GeoGebra. Revista digital Matemática, *Educación e Internet*, *17*(1), 1-13.

Salinas, P., y Alanís, J. (2009). Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del cálculo dentro de una institución educativa. *Revista Lationoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *12*(3), 355-382.

Simon, M., y Tzur, R. (2004). Explicating the Role of Mathematical Tasks in Conceptual Learning: An Elaboration of the Hypothetical Learning Trajectory. *Mathematical thinking and learning*, *6*(2), 91–104.

Tall, D. (1992).*Students' Difficulties in Calculus*. Plenary presentation in Working Group 3, ICME. Québec. Canada. Recuperado el 28 de abril de 2019 de https://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1993k-calculus-wg3-icme.pdf.

Sampieri, R., Férnández, C., y Baptista, P. (2006). *Metodología de la investigación*. D. F., México: McGrawHill.

ANEXO

A continuación, se presenta la secuencia didáctica completa diseñada para el tema de Volumen de Sólidos de Revolución.

PLAN DE CLASE

Puebla, México 24 de mayo de 2018

- **ASIGNATURA: CÁLCULO INTEGRAL**
- **CAMPO DISCIPLINAR: MATEMÁTICAS**
- **UNIDAD: 3**
- **NOMBRE DE LA UNIDAD: ÁREA ENTRE CURVAS Y SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN**
- **PERIODO QUE ABARCA:**
- **NÚMERO DE SESIONES: 6 SESIONES**

APRENDIZAJES ESPERADOS

- EL ESTUDIANTE COMPRENDERÁ LOS MÉTODOS PARA CALCULAR EL ÁREA FORMADA ENTRE CURVAS Y EL VOLUMEN DE UN SÓLIDO DE REVOLUCIÓN.

- DEDUCIRÁ QUE EL CÁLCULO DE ÁREA ENTRE CURVAS Y EL VOLUMEN DE UN SÓLIDO DE REVOLUCIÓN SE REALIZA A TRAVÉS DE UNA INTEGRAL.

- APLICARÁ LOS MÉTODOS DE INTEGRACIÓN PARA EL CÁLCULO DE ÁREA ENTRE CURVAS Y EL VOLUMEN DE UN SÓLIDO DE REVOLUCIÓN. DETERMINARÁ LA IMPORTANCIA DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO EN LA OBTENCIÓN DE ÁREA ENTRE CURVAS Y VOLUMEN DE UN SÓLIDO DE REVOLUCIÓN.

- CALCULARÁ ÁREA ENTRE CURVAS Y VOLUMEN DE UN SÓLIDO DE REVOLUCIÓN, PARA CASOS CONCRETOS EN SU ENTORNO.

COMPETENCIAS A DESARROLLAR

GENÉRICAS

COMPETENCIA:	ATRIBUTOS:
4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.	4.1. Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas. 4.3. Identifica las ideas clave en un texto o discurso oral e infiere conclusiones a partir de ellas. 4.5. Maneja las tecnologías de la información y la comunicación para obtener información y expresar ideas.
5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.	5.1. Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo. 5.2. Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones. 5.5. Sintetiza evidencias obtenidas mediante la experimentación para producir conclusiones y formular nuevas preguntas.
8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.	8.1. Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos. 8.2. Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva. 8.3. Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.

DISCIPLINARES:

1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.

4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal y matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.

6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del

espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.

ACTIVIDADES DE ENSEÑANZA APRENDIZAJE

TEMA: SÓLIDOS Y SUPERFICIES DE REVOLUCIÓN

SUBTEMA: SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN

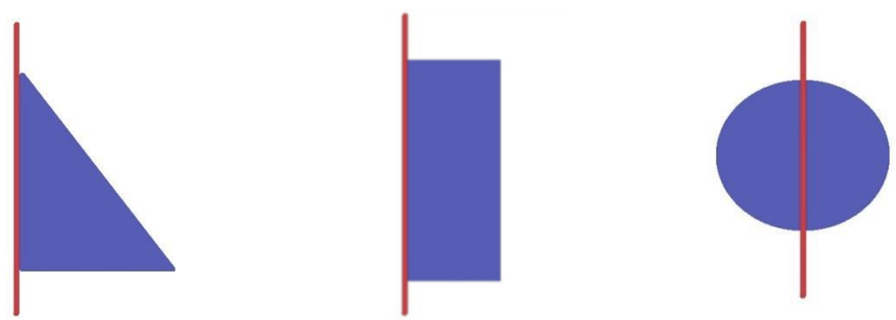
INICIO

1ª ACTIVIDAD "PRIMER ACERCAMIENTO A SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN"

- Dividir al grupo en equipos de cuatro a cinco alumnos y proyectarles el siguiente video en dos momentos: en el intervalo de tiempo [0,0:56] y [3:15, 4:12].

Link: ***https://goo.gl/7RVrEY***

- Los alumnos deberán realizar la actividad propuesta en el video (en los tiempos 3:36 al 4:20, el vídeo se deja correr sin pausas y, al finalizar dicho intervalo de tiempo, se proyectarán las figuras del vídeo y se añadirán dos que provengan de funciones). Por equipos dibujarán los sólidos de revolución que se forman al girar las figuras dadas sobre el eje indicado.



- Una vez terminadas las propuestas, los alumnos compararán y discutirán sus dibujos con la solución que deberá proyectar el profesor. Las reflexiones se guiarán en torno a las posibles dificultades en la identificación del sólido de revolución resultante al girar una figura o una curva.

2ª ACTIVIDAD "CLASIFICA SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN"

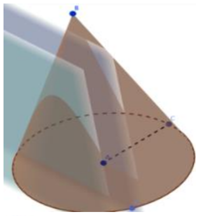
Para la siguiente actividad se les entregará a los alumnos algunos objetos que sean sólidos de revolución y otros que no lo sean (como los

que se observan en las siguientes imágenes), además del material necesario para que puedan verificar sus respuestas simulando ejes de rotación.
Con estos objetos los estudiantes deberán:

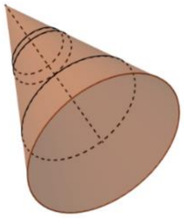
- Explorarlos y clasificarlos en dos grupos, los que sean sólidos de revolución y los que no.
- Para los que sí lo sean, identificar el eje de rotación para que dicho objeto cumpla las características de ser sólido de revolución. Una vez identificado, indicar la figura que lo genera. Comprobar sus respuestas manipulando los objetos con los materiales que se les proporcionará.
- Para los que no lo sean, dar las razones que los llevan a esa conclusión
- Con base en sus observaciones, se les se les pedirá que discutan sobre las características comunes que encuentren en los objetos que sí son sólidos de revolución y cuáles describen a los que no lo son.

DESARROLLO

3ª ACTIVIDAD "MANIPULA SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN CON CORTES"



Para la siguiente actividad, el profesor les proporcionará a los alumnos material didáctico (sólidos de revolución con cortes como el esquema que se muestra a continuación).



- El alumno explora y manipula el material didáctico comparando las figuras que se forman en los diferentes cortes. Una vez hecho esto, deberá medir y comparar los radios de las circunferencias que se forman en los cortes perpendiculares al eje de giro.

4ª ACTIVIDAD "REGRESANDO A LOS SÓLIDOS CLASIFICADOS"

- Regresando a los objetos que clasificaron en la actividad anterior, los alumnos decidirán a qué objetos hacer (o simular) los cortes perpendiculares al eje de rotación, observar cómo son dichos cortes y comprobar si los objetos que consideraron como sólidos de revolución, realmente lo son. Para los que sí sean sólidos de revolución, aproximar el radio de las circunferencias que se forman en los cortes.

5ª ACTIVIDAD "CON HOJAS DE PAPEL MILIMÉTRICO"

El profesor entregará a los alumnos hojas milimétricas.

- Ahora, únicamente con los objetos clasificados como sólidos de revolución, el alumno dibujará en las hojas milimétricas el contorno del objeto, de forma que el eje de rotación coincida con el eje horizontal de la hoja milimétrica, tratando de imaginar el giro de la figura que dibujaron y cómo se forma el sólido de revolución a partir de dicho giro.

- Una vez hecho esto, se discutirá la posibilidad de borrar de su dibujo las líneas paralelas al eje vertical (excepto si tienen curvatura) y todo lo que se encuentre por debajo de eje horizontal, e imaginarse qué figura se forma ahora, si se gira nuevamente alrededor del eje de rotación.

6ª ACTIVIDAD "SE LES PROPORCIONA UNA FUNCIÓN"

En la siguiente actividad, el profesor debe proporcionar a los alumnos las siguientes funciones: $y = 3$ en el intervalo [1, 9], $y = 2x$ en el intervalo [0, 3], $y = \sqrt{36 - x^2}$ en el intervalo [0, 6] y $y = x^2 + 1$ en el intervalo [-2,5].

- El alumno deberá dibujar las funciones dadas y los sólidos de revolución que se generan a partir de estas, con la convención de que el eje de rotación será el eje horizontal.

- Una vez dibujado el sólido de revolución generado por cada función, que el alumno se concentre en algún punto sobre el eje de rotación y aproxime la distancia entre dicho punto y algunos otros sobre el contorno del sólido en la circunferencia que se formaría al hacer un corte perpendicular al eje a la altura de dicho punto. Luego, que compare las medidas que resulten y que repita el mismo procedimiento en algunos otros puntos sobre el eje de rotación. (Se reforzará esta parte de la actividad con un diseño en Geogebra).

- El profesor generará una discusión acerca de cómo es dicha distancia en diferentes puntos sobre el eje de rotación, y a qué se debe o de qué depende la variación.

7ª ACTIVIDAD "VIDEO DEL CÁLCULO DE VOLUMEN DE SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN"

- El profesor generará una discusión acerca de cómo es dicha distancia en diferentes puntos sobre el eje de rotación, y a qué se debe o de qué depende la variación.

- Proyectar el video basado en la lectura guiada que se encuentra en el enlace:

Link: ***https://goo.gl/bDwcu1***

- El profesor deberá discutir con el grupo sobre la potencialidad de la integral como herramienta para el cálculo de volúmenes de sólidos de revolución, el barrido como estrategia para llegar a la integral, qué es lo que se integra y la similitud de este proceso con el cálculo de área bajo la curva002E

8ª ACTIVIDAD "APLICA LO DEL VIDEO"

Los alumnos deberán realizar el siguiente ejercicio de forma individual:

Dibujar la función $y = \sqrt{x}$ en el intervalo [0,10] y el sólido de revolución que genera; luego, calcular su volumen por el método de la integral.

- El profesor deberá realizar una generalización a través de una lluvia de ideas.

CIERRE

9ª ACTIVIDAD "CALCULAR EL VOLUMEN DE OBJETOS"

Al inicio de esta actividad, el profesor proporcionará a los alumnos objetos que sean sólidos de revolución (por ejemplo, un plato, un vaso, un cilindro, una esfera), uno por equipo, con los cuales el alumno deberá:

- Determinar el eje de rotación.
- Proponer la función que genera el sólido de revolución y sobre qué intervalo queda definida dicha función. (Para esto pueden recurrir a la medición de los objetos, para lo cual el profesor debe facilitarle el material necesario)
- Calcular el volumen del objeto, con al menos dos métodos, de forma que uno de ellos sea utilizando la integral como herramienta y comparar los resultados.
- Por equipos, exponer su resultado al grupo.

10ª ACTIVIDAD "RESUMEN DEL TEMA"

- Para finalizar, los alumnos harán un resumen de la práctica realizada para este tema rescatando la importancia de la integral para el cálculo de los volúmenes de sólidos de revolución (un resumen por equipo).

RECURSOS DIDÁCTICOS: ESPECIFICOS TOMADOS DE LA SECUENCIA

- **Material impreso de la lectura guiada y la evaluación**
- **Cañón, computadora y pantalla**
- **Libreta de cuadrícula preferentemente**
- **Lápices**
- **Pizarrón y plumones**
- **Envases que correspondan a sólidos de revolución**
- **Vaso graduado**

FUENTES DE INFORMACIÓN: ESPECIFICOS TOMADOS DE LA SECUENCIA

https://goo.gl/7RVrEY

Lerra, De Miguel, De la Rosa, (2011). ***Cálculo integral*****. México: Limusa.**

ESTRETEGIA DE EVALUACIÓN

TIPOS	**MOMENTOS**	**PONDERACIÓN**
Diagnostica	Periodo ordinario	40% Conocimiento
Formadora	**1ro, 2do y 3er** momento	30% Procesos y productos
Sumativa	**SEGÚN EL MOMENTO**	30% Desempeño actitudinal