# BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

## IMPLEMENTACIÓN DE UNA SECUENCIA DIDÁCTICA PARA EL CONCEPTO LÍMITE DE UNA FUNCIÓN BASADA EN LA TEORÍA APOE

**TESIS**
PARA OBTENER EL TÍTULO DE
**MAESTRO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA**

PRESENTA
**LIC. ANTONIO PÉREZ GONZÁLEZ**

DIRECTOR DE TESIS
**DRA. LIDIA AURORA HERNANDEZ REBOLLAR**

PUEBLA, PUE. JUNIO 2019

**BUAP**

**DRA. LIDIA AURORA HERNÁNDEZ REBOLLAR**
**SECRETARIA DE INVESTIGACIÓN Y**
**ESTUDIOS DE POSTGRADO, FCFM-BUAP**
**P R E S E N T E:**

Por este medio le informo que el C:

**ANTONIO PÉREZ GONZÁLEZ**

Estudiante de la Maestría en Educación Matemática, ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 13 de diciembre de 2018, con la tesis titulada:

**"Implementación de una secuencia didáctica para el concepto límite de una función basada en la teoría Apoe"**

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

A T E N T A M E N T E.
H. Puebla de Z. a 27 de mayo de 2019

Jay Slisko

**DR. JOSIP SLISKO IGNJATOV**
**COORDINADOR DE LA MAESTRÍA**
**EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA.**

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA · 1578 · FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS - SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y ESTUDIOS DE POSGRADO

Ccp Archivo.
DR JAJL / I'agm*

Facultad
de Ciencias
Físico Matemáticas

Av. San Claudio y 18 sur, edif. FM1
Ciudad Universitaria, Col. San
Manuel, Puebla, Pue. C.P. 72570
01 (222) 229 55 00 Ext. 7550 y 7552

## Agradecimientos

En primer lugar, al consejo de ciencia y Tecnología (CONACYT) por la beca recibida durante mis estudios de Maestría, lo que me permitió realizar este proyecto de investigación y crecer académicamente.

A la Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrado (VIEP) de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP) por el apoyo económico brindado para asistir a la Reunión Latinoamérica de Matemática Educativa (RELME) en su versión número 32 celebrada en la Ciudad de Medellín Colombia, lo que permitió enriquecer el trabajo por las diversas aportaciones de expertos en el área.

A la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, al Posgrado en Educación Matemática por el apoyo económico brindado que me permitió asistir a la XX Escuela de Invierno de Matemática Educativa (EIME XX) celebrada en la Universidad de Colima.

Finalmente, a la Institución de Educación Media Superior que permitió el acceso a los estudiantes para llevar acabo el presente trabajo de investigación.

**Agradecimientos Personales**

Amar es encontrar en la felicidad de otro tu propia felicidad.<br>Gottfried Leibniz

Quizá no pueda encontrar las palabras adecuadas y el tiempo suficiente para demostrar mi gratitud a todas las personas que me han acompañado a lo largo de los diferentes proyectos académicos y no académicos emprendidos, pero sin lugar a duda, sus consejos, sus puntos de vista y sus sugerencias siempre las he considerado y puesto en práctica.

En primer lugar, quiero agradecer a mis Padres Benita y Benito por los consejos que siempre me han brindado, por el apoyo en lo económico o moral en cada proyecto de vida que he iniciado, gracias por haberme enseñado diversos valores, y sobre todo, gracias por mostrarme que aun en los momentos más difíciles la unión en familia nos permite ser más fuertes y en conjunto enfrentar los problemas.

Gracias Guadalupe por acompañarme en diversos proyectos académicos y no académicos, no hace mucho tiempo hemos decidido iniciar un proyecto sumamente complejo, el de recorrer toda la vida juntos, sin lugar a dudas es el que mayor felicidad me ha traído, y en el que trabajaré día y noche para que tenga éxito.

Agradezco a mis hermanos, Alejandra, Maricarmen y Juan Carlos por la motivación para continuar con mis estudios de Posgrado.

Gracias a los compañeros de mi generación por compartir sus experiencias de vida dentro de las aulas, los cuales me permitieron ampliar mis conocimientos y partiendo de ellos intentar explorar diversas estrategias que me permitan mejorar mi labor como profesor buscando generar un aprendizaje significativo en los estudiantes.

Gracias a mi tutor de tesis la Dra. Lidia Aurora Hernández Rebollar por aceptar dirigir el presente trabajo de investigación y por las múltiples sugerencias y consideraciones durante el desarrollo de la investigación. Agradezco su valioso tiempo brindado y por las correcciones realizadas siempre pensado en la mejora del trabajo.

Gracias a los miembros del Jurado, Dra. María Araceli Juárez Ramírez, Dra. Honorina Ruiz Estrada, Dr. Eric Flores Medrano y Dr. Israel Molina Lara, por su tiempo y dedicación para corregir el manuscrito final y fungir como miembros del Jurado Evaluador.

# ÍNDICE

# ÍNDICE DE TABLAS

## ÍNDICE DE FIGURAS

# RESUMEN

En este trabajo de investigación presentamos el diseño e implementación de una secuencia didáctica, cuya finalidad es guiar a los estudiantes de nivel medio superior a la comprensión del concepto de límite de una función desde la concepción dinámica y métrica. Para tal fin, tomamos como base la descomposición genética propuesta por Cottrill, Dubinsky, Nichols, Schwingendorf, Thomas y Vidakovic (1996) y el trabajo de Pons (2014). Es importante mencionar que dichos trabajos se basan en la teoría APOE (Acciones, Procesos Objetos y Esquemas) y que la descomposición genética es un modelo que describe la construcción de conceptos de matemáticas de nivel superior, por lo que la consideramos como una alternativa para diseñar actividades para el aprendizaje de este concepto.

Los datos que se obtuvieron al finalizar la secuencia y del cuestionario final fueron analizados mediante la descomposición genética con el propósito de determinar qué estructuras mentales del concepto de límite lograron construir los estudiantes. El análisis realizado mostró conocimientos previos necesarios que no se habían considerado, además de algunas carencias en la comprensión del concepto de función y del impacto que tiene este hecho al tratar de enseñar el concepto de límite funcional.

# ABSTRACT

In this research work we present the design and implementation of a didactic sequence, in order to guide students in the upper intermediate level to the understanding of the limit of a function concept into the dynamic and metric conception. For this purpose, we take as a basis the genetic decomposition proposed by Cottrill, Dubinsky, Nichols, Schwingendorf, Thomas and Vidakovic (1996) and the work of Pons (2014). It is important to say that these works are based on the theory APOS (Actions, Processes Objects and Schemes) and that the genetic decomposition is a model that describes the construction of the higher level mathematics concepts, for that we consider as an alternative for learning this concept.

The data obtained at the end of the sequence and the questionnaire were analyzed by means of genetic decomposition with the purpose of determining which are the mental structures of the concept of limit achieved by the students. The analysis carried out showed necessary previous knowledge that had not been considered, as well as some deficiencies in the understanding of the function concept and the impact that this fact has when trying to teach the concept of functional limit.

# INTRODUCCIÓN

Si bien es cierto que el cálculo diferencial presenta conceptos matemáticos sumamente importantes, uno de los primeros con el que el estudiante se enfrenta es el de límite de una función en un punto. Varias investigaciones han reportado diversas dificultades que presentan los estudiantes en su camino a la comprensión. Por ejemplo, Hitt (2003) muestra diversos problemas de aprendizaje ligados tanto a profesores de matemáticas como a estudiantes, en los conceptos de función, límite, continuidad, derivada y de integral.

Para el concepto de función señala que los problemas que presentan los estudiantes y profesores de nivel medio superior para desarrollar un conocimiento profundo del concepto, se deben a que generalmente se restringen a una manipulación algebraica.

En cuanto al aprendizaje del concepto de límite funcional comenta que, parte de las dificultades que tendrán los estudiantes, se deben a la manera en que el profesor introduce el tema; la mayoría de los profesores reducen dicho concepto a una simple sustitución, dicha idea prevalece a lo largo de los estudios y son muy pocos los que logran sobre pasar dicha dificultad.

En el trabajo de Cottrill et al. (1996) que se presenta más adelante, señala que en la mayoría de las investigaciones reportan que los estudiantes presentan diversas dificultades para comprender los conceptos función, límite y continuidad. Además, menciona hasta esa fecha no habían encontrado algún informe de éxito para apoyar a los estudiantes a superar dichas dificultades. Incluso, algunos autores como Tall (1992), Li y Tall (1993) y Monaghan, Sun y Tall (1994) reportaron que el uso de la tecnología no ha tenido éxito.

La investigación de Vrancken, Gregorini, Engler, Muller & Hecklein (2006) se centró en detectar las dificultades y analizar los errores de los contenidos básicos de la materia de cálculo en estudiantes que cursan carreras universitarias en áreas de ciencias exactas. Para ello se plantearon el siguiente objetivo “detectar dificultades relacionadas con el concepto de límite y sus diferentes representaciones y evaluar el grado de comprensión alcanzado por los alumnos (p.13)”.

En la investigación realizada por Hitt y Páez (2004) diseñaron un grupo de actividades para que se resolvieran en un ambiente de aprendizaje cooperativo, debate científico y autorreflexión, con la intención de generar un conflicto cognitivo en los estudiantes que los llevara a un cambio de pensamiento. Con esta investigación concluyeron que se tienen dos problemas, el primero tiene que ver con la complejidad del concepto matemático en cuestión, y el segundo con los obstáculos que el mismo profesor genera entre sus estudiantes.

Blázquez, Ortega, Gatica y Benegas (2006) presentan una investigación en la que contrastan la conceptualización métrica del límite proporcionada por Weierstrass con la conceptualización como aproximación óptima, la cual fue dada por Blázquez y Ortega (2002). La finalidad fue establecer cuál de las dos es más sencilla y apropiada para la docencia-aprendizaje inicial de tal noción. Los datos obtenidos se analizaron con la teoría de Duval, dicha teoría en palabras de los autores establece que "la comprensión integral de un concepto se encuentra basada en la coordinación de al menos dos registros de representación" (p. 191).

Además, la formulación propuesta por Blázquez y Ortega (2002) permite definir el límite secuencial y funcional, evitando el formalismo, pero no el rigor. La definición que proponen es: El límite de la función $f$ en $x = a$ es $L$ si para cualquier aproximación $K$ de $L$, $K \neq L$, existe un entorno reducido de $a$, tal que las imágenes de todos sus puntos están más próximas a $L$ que a $K$.

Los autores concluyen que los alumnos comprenden mejor la conceptualización basada en la aproximación óptima que la métrica, por lo que debe ser más apta para los aprendizajes iniciales universitarios de análisis matemático.

La mayoría de las propuestas didácticas se han centrado en que los estudiantes construyan la definición formal de límite, y para ello han buscado que los estudiantes superen ciertas dificultades que se presentan durante el proceso de comprensión, no obstante, los estudiantes siguen presentando falta de comprensión y de sentido del concepto.

Son escasas las investigaciones que se centran en superar las dificultades que presentan los estudiantes para el aprendizaje de este concepto en el nivel medio superior. Por tal motivo, consideramos pertinente orientar nuestra investigación en este nivel, además, es aquí, donde el estudiante se encuentra por primera vez con la noción de límite. Lograr que el estudiante en este grado construya una comprensión reflexiva del concepto de límite le permitirá en cursos futuros comprender su definición formal dada por Weierstrass.

La presentación de nuestro trabajo lo hemos organizado en cinco capítulos que describimos a continuación:

Capítulo 1. Planteamiento del Problema. En este capítulo presentamos los dos trabajos de investigación que se han realizado empleando la teoría APOE, así como la descomposición genética del concepto de límite desde la definición formal dada por Weierstrass. De estos antecedentes nace nuestro objetivo de investigación relacionado con la construcción del concepto de límite en estudiantes de nivel medio superior desde la concepción dinámica y métrica explorada por Pons (2014). Además de una reflexión de la importancia que tiene el concepto en la construcción de otros conceptos propios del cálculo diferencial.

Capítulo 2. Marco teórico. En esta sección, presentamos los elementos principales de la teoría APOE como lo es la abstracción reflexiva, así como las estructuras y los mecanismos mentales necesarios para la comprensión de conceptos matemáticos. También presentamos el ciclo de la investigación de APOE y la descomposición genética como la herramienta principal para el diseño de estrategias de enseñanza y de diagnóstico.

Capítulo 3. Método. En este capítulo se describe a la población que participó en la investigación, el cuestionario y su relación con la descomposición genética, así como la secuencia didáctica fundamentada en la descomposición genética y en las actividades propuestas por Pons (2014). De igual forma se describe la manera en que se trabajaron dichas actividades en el aula.

Capítulo 4. Análisis de resultados. En esta sección presentamos el análisis de las respuestas de los estudiantes, describiendo las estructuras y mecanismos mentales que se presentaron, así como las dificultades para resolver la actividad. Es importante mencionar que el análisis se realizó considerando la concepción dinámica, la concepción métrica y el cuestionario final.

Capítulo 5. Conclusiones. En esta sección se presentan las conclusiones a las que llegamos una vez finalizados los análisis de los datos obtenidos de la secuencia didáctica y el cuestionario final comparando con los resultados obtenidos por Pons (2014) y Cottrill et al. (1996). También se hacen algunas sugerencias pedagógicas relacionadas con la enseñanza del concepto de límite.

# Capítulo 1

# PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

## 1.1 Antecedentes

Los antecedentes de este trabajo son las investigaciones de Cottril et al. (1996) y Pons (2014).

Cottril et al. (1996) parten de su conocimiento de las matemáticas y de la teoría APOE para el diseño de una descomposición genética del concepto de límite funcional, posteriormente, basándose en ella diseñaron e implementaron una estrategia de enseñanza.

Es importante mencionar que en su trabajo, durante la discusión de la literatura, señalan dos tipos de concepciones del límite funcional, una de ellas es la concepción dinámica o de procesos de límites y la otra es la concepción estática o formal. De la misma manera comentan que algunos autores señalan que la primera concepción parece indicar que es fácil y natural para algunos estudiantes. Según este punto de vista, la principal dificultad es que los estudiantes pasen de esta concepción dinámica a una comprensión formal del límite. Por otro lado, otras posturas consideran que dicha concepción les impide su desarrollo hacia una concepción formal.

Sin embargo, los que respaldan la primera postura afirman que el desarrollo de una concepción dinámica fuerte es necesaria para una comprensión formal, y que esta debe basarse en la concepción dinámica del estudiante. Desde este punto de vista, la dificultad surge al construir la concepción dinámica y este es el mayor obstáculo para el entendimiento del límite.

Según los autores, la dificultad más común en los estudiantes cuando construyen la noción dinámica de límite es su percepción de un límite como algo que nunca se alcanza. Además, señalan que la noción formal y dinámica de los valores de una función que se aproximan a un valor límite, cuando los valores en el dominio se aproximan a cierta cantidad, es más complicada de lo que se podría haber pensado, ya que no solo es un proceso, sino un par de procesos coordinados.

Finalmente, mencionan que, según la literatura, hay dos razones para las dificultades de los estudiantes para comprender el concepto formal (entendida en términos de $\varepsilon - \delta$). La primera de ellas se debe a que el esquema del proceso coordinado es difícil en sí mismo y no todos los estudiantes pueden construirlo de manera inmediata. En segundo lugar, es necesario que los estudiantes tengan una comprensión de la cuantificación. Desafortunadamente, diversas investigaciones reportan que la mayoría de los estudiantes no tienen una concepción de cuantificación que esté lo suficientemente desarrollada para tratar el concepto de límite de manera formal.

Como lo señalamos con anterioridad, el análisis teórico realizado les permitió diseñar una descomposición genética preliminar, en la cual se describe la manera en la que el estudiante puede construir dicho concepto en seis pasos.

1.- La acción de evaluar la función $f$ en algunos puntos, cada punto sucesivo más cercano a $a$ que el punto anterior.

2.- Interiorización de la acción del Paso 1 a un único proceso en el que $f(x)$ se aproxima a $L$ cuando $x$ se aproxima a $a$.

3.- Encapsula el proceso de 2 para que, por ejemplo, al hablar de propiedades de combinación de límites, el proceso límite se convierta en un objeto al que se le pueden aplicar acciones (por ejemplo, determinar si una determinada propiedad se mantiene).

4.- Reconstruir el proceso de 2 en términos de intervalos y desigualdades. Esto se hace mediante la introducción de estimaciones numéricas de la cercanía de aproximación, en símbolos, $0 < |x - a| < \delta$ y $|f(x) - L| < \varepsilon$.

5.- Aplique un esquema de cuantificación para conectar el proceso reconstruido del paso anterior para obtener la definición formal de límite. Como indicamos en nuestros comentarios sobre la literatura, aplicar esta definición es un proceso en el que uno imagina iterar a través de todos los números positivos y, para cada uno llamado $\varepsilon$, visitar cada número positivo, llamando $\delta$ esta vez, considerando cada valor, llamado $x$ en el intervalo apropiado y verificando las desigualdades. La implicación y la cuantificación conducen a una decisión sobre si la definición se cumple.

6.- Una concepción $\epsilon - \delta$ completa aplicada a situaciones específicas.

Basándose en la descomposición genética preliminar, diseñaron una estrategia de enseñanza, la cual fue aplicada a 25 estudiantes de un curso de cálculo. Los autores señalan que la principal contribución de dicha estrategia fue sugerir construcciones mentales específicas que se pueden desarrollar en el aprendizaje del material.

La estrategia pedagógica utilizada consistió en una combinación de actividades informáticas que se diseñaron para ayudar a los estudiantes en las construcciones mentales que se contemplan en la descomposición genética.

Para la recolección de datos usaron diversos métodos que van desde exámenes escritos a entrevistas a profundidad. El análisis de los datos obtenidos encontró que algunos estudiantes pueden interiorizar la acción de reemplazar sucesivamente $x$ por varios valores a un proceso de $x$ que se aproxima a $a$, pero en sus imágenes aún están pensando en un solo valor para $f(a)$. No logran conectar que el comportamiento del rango proviene de la aplicación de la función a lo que está sucediendo en el dominio. Para los estudiantes son procesos diferentes y aunque puedan empezar a establecer que hay una conexión entre ellos, no parecen entender que es la función y su proceso lo que hace esta conexión.
Además, reportan que muy pocos estudiantes mostraron evidencias de poseer un nivel objeto del concepto de límite, debido a que mostraron indicios de lo que podría ser un proceso de desencapsulación de acuerdo a su descomposición genética, esto se debió a que muy pocos lograron resolver problemas en los que se les pedía determinar el límite en un punto de la suma de dos funciones. Por lo que concluyen que la gran mayoría no presentaron indicios de que estuvieran pensando en los límites en un nivel objeto.

Solo pocos estudiantes presentaron algún indicio de pasar muy por encima de los primeros cuatro pasos de esta descomposición genética. Pero en general, solo tienen una idea vaga de las desigualdades que intervienen de la descripción del límite $\epsilon - \delta$.

Finalmente, reportan que no hubo estudiantes que manifestaran evidencias de haber alcanzado los últimos dos niveles descritos en su descomposición genética preliminar.

Por lo tanto, el análisis de los resultados los condujo a proponer un refinamiento de la descomposición genética, misma que será presentada en el capítulo dos, debido a que fue tomada como base para el diseño de nuestra secuencia didáctica.

Los autores difieren de algunos investigadores que creen que una concepción dinámica puede dificultar el progreso hacia el desarrollo de una comprensión formal del concepto de límite, ya que piensan que la dificultad de pasar a una concepción más formal del concepto es, al menos parcialmente, el resultado del desarrollo insuficiente de una fuerte concepción dinámica.

Las consideraciones realizadas en su investigación los llevan a pensar que el concepto formal de límite no es estático como comúnmente se cree, sino que es un esquema muy complejo con aspectos dinámicos importantes y requiere que los estudiantes hayan construido fuertes concepciones de cuantificación.

Es por ello que la investigación sobre la forma en que los estudiantes aprenden los conceptos de cuantificación, junto con los refinamientos de la descomposición genética propuesta, podría contribuir al diseño de estrategias de enseñanza que ayuden a los estudiantes a comprender dicho concepto.

Otra de las investigaciones que se ha realizado sobre el concepto de límite funcional, desde la perspectiva de la teoría APOE, es la que realizó Pons (2014). Él buscó profundizar en la comprensión que los estudiantes de enseñanza postobligatoria tienen del concepto de límite de una función después de haber concluido un curso de cálculo diferencial.

Para tal fin, Pons (2014) retoma los tres primeros pasos y hace una adaptación del cuarto apartado de la descomposición genética de Cottril et al. (1996), el cual se refiere a la concepción métrica en términos de desigualdades e introduce un nuevo apartado sobre la formalización del concepto. Es importante señalar que los tres primeros pasos constituyen lo que algunos llaman la concepción dinámica del límite.

Para el diseño de actividades, este autor incorpora unos elementos matemáticos, como producto de una segregación de los pasos de la descomposición genética, y su relación entre ellos; considera diferentes modos de representación (numérico, algebraico- numérico y gráfico) y con todo lo anterior caracteriza el esquema de límite para su investigación.

Finalmente, propone que las relaciones que se deben de considerar en el esquema de límite de una función en un punto son la coincidencia y no coincidencia de las aproximaciones laterales y la coordinación cognitiva de estos elementos matemáticos que serán presentados más adelante.

Por tanto, para Pons (2014) la caracterización general del desarrollo del esquema de límite de una función en los niveles INTER, INTRA Y TRANS deberá estar en función de los elementos matemáticos, las relaciones de coincidencia y no coincidencia establecidas entre ellos, y los diferentes modos de representación.

El esquema definido le permitió diseñar un cuestionario de diez preguntas y una entrevista, que fueron aplicados a 129 estudiantes de Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y de la Salud, durante el curso 2010-2011. De los cuales, 66 eran estudiantes de primer curso, y 63 eran estudiantes de segundo curso. Dicha población no reunía ninguna característica especial y su participación fue voluntaria. Es importante resaltar que las actividades propuestas en esa investigación sirvieron de base para las que se utilizaron en esta tesis.

Del análisis de los datos obtenidos se destacan los siguientes resultados: los estudiantes acceden al significado dinámico de límite mediante la utilización del modo de representación gráfico cuando las aproximaciones laterales coinciden, se progresa en modo numérico y se consolida en modo algebraico– numérico. Es decir, según Pons (2014) los límites presentados en modo gráfico son más fuertes que las ideas de límite mostradas en modo numérico.

Por otro lado, destaca que el concepto de función es uno de los conocimientos previos que el estudiante debe poseer si quiere construir el concepto de límite, esto debido a que cometen más errores para encontrar a qué valor tiende la variable dependiente que para determinar a qué valores se aproxima la abscisa. Además, los estudiantes tienen mayor éxito en la relación que hace referencia a la "coincidencia de las aproximaciones laterales", y la que más dificultades presenta es la "no coincidencia de las aproximaciones laterales".

Otro de sus resultados indica que los estudiantes tienen dificultades para realizar la coordinación métrica en términos de desigualdades. Solo en los niveles inter (apoyándose en la sucesión de valores de $x$ $y$ $f(x)$) y trans (haciendo uso de las diferencias$|x-a|$ y $|f(x)-f(a)|$) algunos estudiantes empiezan a establecerla.

Manifiestan dificultades para manejar adecuadamente las situaciones en las que los límites laterales no coinciden. Un aspecto que parece dificultar la construcción de los valores de la función es que las sucesiones del rango y el dominio tengan o no el mismo signo.

Presentan dificultades en manejar la coordinación de las aproximaciones en el dominio y en el rango. En este nivel o no coordinan las aproximaciones, o solamente realizan dicha coordinación en un único modo de representación cuando las aproximaciones laterales coinciden.

En general, el autor considera que dentro de los conocimientos previos que debe tener el estudiante son: saber evaluar los valores del dominio en una función definida por partes, saber realizar lectura de gráficas, saber manejar las situaciones en las que las sucesiones de los valores de la función tengan diferentes signos a la izquierda y a la derecha del valor de la variable independiente donde queremos calcular el límite, no coincidiendo dichas aproximaciones laterales, y comprender la lateralidad en el sentido de diferenciar las aproximaciones por la derecha y las aproximaciones por la izquierda. En particular, si la función tiene límites laterales no coincidentes plantea dificultades para construir la coordinación de los procesos de aproximación en el dominio y en el rango.
Finalmente, el autor comenta que 59 estudiantes se encuentran en el nivel intra, 47 en el nivel inter y 23 en el nivel trans, del nivel esquema del concepto de límite.

## 1.2 Justificación

Se ha reportado en diversas investigaciones que cuando se aborda la enseñanza y aprendizaje del concepto de límite se presentan diversas dificultades en los estudiantes (Hitt, 2003; Vrancken, Gregorini, Engler, Muller y Hecklein, 2006). Por ejemplo, Hitt y Páez (2004) enumeran once dificultades que presentan los estudiantes cuando intentan comprender el concepto de límite, de las cuales solo mencionaremos algunas.

Ideas primitivas del límite, la cual tiene su origen en los conocimientos previos que poseen los estudiantes en relación con la palabra límite: algo que se prohíbe alcanzar, "límites humanos".

Idea de límite como aproximación. Una de dichas ideas intuitivas que prevalece en estudiantes universitarios es la de pensar que el límite nunca es alcanzado o es alcanzado en el infinito.

Conflictos con la idea de límite como una simple sustitución. La mayoría de los profesores orientan el tema de límites a un enfoque algebraico donde solamente los estudiantes realizan sustituciones, reduciendo el concepto a un simple algoritmo operatorio. Para tal fin el profesor únicamente trabaja con funciones continuas, dejando fuera la exploración de funciones no continuas o funciones que no están definidas en ciertos puntos del dominio.

Conflictos en la lectura de gráficas con respecto al límite. Algunos estudiantes presentan una confusión entre el concepto de límite y su relación con los límites laterales. Esto es debido a que el estudiante considera que gráficamente el límite es donde está definida la función, sin considerar que la función sea o no continua. Al respecto Hitt y Páez (2004) comentan “Este suceso es el reflejo de la fuerte influencia del proceso de sustitución en el cálculo de límites” (p. 145). Conflictos con la idea de que una función discontinua no tiene límite.

Algunas de las propuestas didácticas se han centrado en que los estudiantes construyan la definición formal de límite (Weierstrass), buscando que se superen ciertas dificultades que se presentan durante su comprensión; no obstante, los estudiantes siguen presentando falta de comprensión y de sentido del concepto.

Además, son escasas las investigaciones que se centran en superar las dificultades que presentan los estudiantes en el nivel medio superior. Por tal motivo, consideramos pertinente orientar nuestra investigación en este nivel, pues es aquí donde el estudiante se encuentra por primera vez con la noción de límite.

La teoría APOE presenta un modelo que describe la construcción de conceptos de matemáticas de nivel superior, por lo que la consideramos como una alternativa para diseñar actividades para el aprendizaje del límite de una función en un punto, además, en la investigación realizada por Pons (2014) solo cubre dos etapas del ciclo de investigación de la teoría dejando abierta la posibilidad de investigar su tercera etapa “diseño e implementación de la enseñanza”, lo que en parte ha motivado la presente investigación.

## 1.3 Preguntas de investigación y Objetivo

Nuestra finalidad es guiar a los estudiantes en la comprensión del concepto de límite de una función desde la concepción dinámica y métrica. Para tal fin, tomamos como base la descomposición genética propuesta por Cottril et al. (1996) y el trabajo de Pons (2014) para el diseño e implementación de una secuencia didáctica.

Con esto en mente nos proponemos dar respuesta a las siguientes preguntas:

¿Qué actividades didácticas permiten a los estudiantes construir el concepto de límite desde la concepción dinámica?

¿Qué actividades didácticas permiten a los estudiantes desarrollar una concepción métrica del concepto de límite utilizando desigualdades?

¿Qué estructuras mentales del concepto se logran construir mediante la implementación de una secuencia didáctica basada en la teoría APOE?

**Objetivo**. Implementar y valorar una secuencia didáctica para el aprendizaje del concepto de límite de una función en un punto basada en la teoría APOE en un grupo de estudiantes del nivel medio superior.

# Capítulo 2

# MARCO TEÓRICO

## 2.1 Abstracción Reflexiva

Para conocer la teoría APOE es necesario trasladarse hasta sus inicios. La teoría nace de la reflexión de Dubinsky sobre la aplicación de la abstracción reflexiva de Piaget en las matemáticas de educación superior. Pero, ¿qué es la abstracción reflexiva?, la respuesta de Piaget consta de dos partes, la primera es sobre la reflexión en un sentido del pensamiento contemplativo y de la conciencia, al cual llamó contenido y las operaciones en dicho contenido, todo ello en un nivel cognitivo inferior. Podríamos decir que la conciencia y el pensamiento se encuentran en un estado estático. En la segunda parte nos encontramos en un ambiente dinámico, es decir, la reconstrucción y reorganización del contenido, así como las operaciones en esta etapa superior, convirtiendo al contenido en aquel que se le pueden aplicar nuevas operaciones. Esto llevó a Dubinsky a considerar que la abstracción reflexiva es una herramienta sólida para describir el desarrollo mental de los conceptos matemáticos avanzados.

Piaget no creía que la ideas más abstractas y generales provenían de extraer características comunes de un conjunto de objetos (los objetos pueden ser mentales, no necesariamente físicos), consideraba que el desarrollo del conocimiento de un objeto, requiere que el sujeto actúe sobre él y viceversa, es decir, que el objeto y sujeto no pueden estar separados.

Dichas ideas, sientan las bases de las distinciones más sutiles, como lo son las acciones materiales y operaciones interiorizadas, ambas constituyen las diferencias entre las estructuras mentales de acción y proceso, así como los mecanismos mentales como la interiorización y la encapsulación que conducen a la formación de las diferentes concepciones que constituyen la progresión Acción, Proceso, Objeto, Esquema (A→P→ O→E).

Piaget considera que la "abstracción reflexiva consiste en traducir una sucesión de acciones materiales en un sistema de operaciones interiorizadas" (Arnon, Cottrill, Dubinsky, Oktaç, Fuentes, Trigueros y Weller, 2013, p.7, traducción nuestra). Dubinsky interpreta a las "acciones materiales" como las acciones que son llevadas a cabo por el sujeto, pero que son externas a él. Dentro de la teoría APOE, las "operaciones interiorizadas" de Piaget se convirtieron en el mecanismo mental de interiorización en el cual una acción física externa se reconstruye en la mente del sujeto en un proceso, es decir, se realiza la misma acción pero completamente en la mente del sujeto. Esta noción de la abstracción reflexiva influyó en el desarrollo de la teoría APOE, de como un proceso (acción interiorizada) se transforma en un objeto (operación en la cual, en etapas superiores se le pueden realizar nuevas operaciones) a través del mecanismo mental de la encapsulación.

Pareciera que la propuesta progresiva en la teoría es de la forma A→P→ O→E. Sin embargo, aunque se presente en esta forma lineal, el desarrollo no siempre procede así, más bien, un individuo puede avanzar y retroceder dentro de las etapas.

## 2.2 Estructuras mentales y mecanismos mentales

Dubinsky considera cinco tipos de abstracción reflexiva o mecanismos mentales (Interiorización, coordinación, encapsulación, desencapsulación y la generalización) que conducen a la construcción de las estructuras mentales (acciones, procesos, objetos y esquemas). Todos ellos se presentan en el siguiente diagrama:

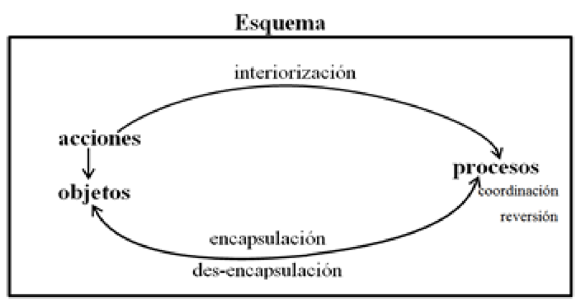



*Figura* 1. Teoría APOE (Arnon et al., 2013)

Nuevas investigaciones tienen en cuenta la posible etapa de la totalidad, sin que hasta la fecha exista investigación sólida al respecto. A continuación presentamos una descripción de los mecanismos mentales:

- ***Interiorización***: Se puede considerar como la transferencia de una actividad específica del mundo externo al mundo interno del individuo, en otras palabras el individuo pasa de tener ayudas externas para tener un control interno. El individuo posee la capacidad de imaginar la realización de los pasos sin realizarlos de manera explícita, puede saltar los pasos e incluso revertirlos.

- ***Coordinación***: Este mecanismo es descrito como la coordinación general de acciones, se refiere a todas las maneras de emplear una o más acciones para formar nuevas acciones u objetos. Dos o más procesos pueden coordinarse para formar nuevos procesos.

- ***Encapsulación***: Ocurre cuando un individuo aplica una acción a un proceso, de manera general, consiste en la conversión de un proceso (estructura dinámica) en un objeto (estructura estática). En otras palabras es la transformación mental de un proceso a un objeto cognitivo. Este objeto cognitivo puede ser considerado como un objeto (físico o mental) y a su vez ser transformado por acciones y procesos.

- ***Desencapsulación***: Una vez que un individuo ha encapsulado un proceso en un objeto, este puede ser desencapsulado para regresar al proceso que lo generó, en otras palabras, reinvertir el mecanismo que lo generó. Así, el individuo puede regresar al proceso siempre que lo desee.

- ***Generalización***: Se relaciona con la capacidad del individuo para aplicar un determinado esquema en un contexto distinto, se caracteriza por determinar los alcances de sus construcciones. En este mecanismo los esquemas no cambian, pero los objetos pueden ser asimilados por un esquema para ser contextualizados en otros contextos. Por ejemplo, cuando un estudiante utiliza el esquema de la factorización, puede generalizar dicho esquema para factorizar polinomios.

Dentro de la teoría APOE, los términos concepción y concepto, aunque están relacionados, presentan diferentes ideas. McDonald (2000) citado en Arnon et al., (2013) menciona lo siguiente:

“La distinción entre la concepción y el concepto está dada en que la primera es intrapersonal (es decir, es la idea que el individuo tiene para comprender) y la segunda es comunal (es decir, un concepto es el resultado de un acuerdo hecho por matemáticos)” (p.78).

Es por ello que cuando un estudiante construye un concepto particular se dirá que ha logrado una concepción de dicha construcción. Estamos entendiendo una concepción como la idea que un estudiante posee de un determinado concepto que puede ser cercana o no a la definición.

Enseguida presentamos una descripción específica de las construcciones mentales tomando como ejemplo el concepto de función:

- ***Acciones*****:** Diremos que un estudiante posee una *concepción acción* si realiza las transformaciones de un objeto dirigido externamente, la acción es externa debido a que cada paso de dicha transformación debe realizarse explícitamente y guiado por instrucciones externas, estableciendo una analogía se puede relacionar como cuando un individuo realiza una actividad mediante un instructivo. Por ejemplo, un estudiante con una concepción acción del concepto de función relaciona el concepto con la acción de reemplazar valores dados en una expresión para obtener otros valores, por ejemplo, la expresión $F(x) = 3x + 1$. Podemos concluir que un individuo que está limitado a una concepción acción se basa en señales externas.

- ***Procesos*****:** Es la estructura mental en la que se realiza la misma operación que la acción solo que totalmente en la mente del individuo, permitiendo que sea capaz de imaginar la realización de la trasformación sin tener que realizar cada paso de manera explícita. Puede realizar la transformación sin la necesidad de llevar a cabo cada paso. Por ejemplo, una concepción proceso del concepto de función puede llevar acabo la composición de funciones sin estar limitado por su representación. Un ejemplo, puede determinar la composición de la función $f \circ g$ donde:

  $f(x) = x^3 + 10$ y $g(x) = \begin{cases} x^2 + 10, x \leq 0; \\ 1 + \cos x\,, x > 0; \end{cases}$

- ***Objetos:*** Cuando un individuo reflexiona sobre las operaciones aplicadas a un proceso como un todo y puede identificar las transformaciones, además de construirlas (acciones o procesos) diremos que el proceso ha sido encapsulado en un objeto, por tanto, el individuo posee una concepción objeto del concepto. El mecanismo de desencapsulación es tan importante como el de encapsulación, debido a que puede regresar al proceso que generó dicho concepto. Por ejemplo, la concepción objeto del concepto de función se presenta cuando el estudiante puede tomar dos o más funciones y componerlas obteniendo así una nueva función. Podemos decir que la naturaleza del objeto depende del proceso por el cual fue encapsulado.

- ***Esquemas:*** Un esquema se construye como una colección coherente de las estructuras de acción, proceso, objeto y otros esquemas y las conexiones que se establecen entre ellas. Además, se caracterizan por su dinamismo, es decir, su reconstrucción continúa debido a la actividad matemática del individuo en situaciones específicas.

Estas construcciones son la base de las estructuras matemáticas de un individuo, las cuales fundamentan la construcción de esquemas. Los esquemas no son estructuras estáticas, más bien, son dinámicas debido a que evolucionan constantemente cada vez que un nuevo objeto matemático es agregado a sus estructuras previas, con esto podemos decir que un esquema no es una estructura terminada, sino que se encuentra constantemente en desarrollo.

Los esquemas pueden ser más o menos coherentes, lo cual está relacionado con la capacidad del individuo para determinar si un esquema le permite solucionar un determinado problema. Al respecto, Trigueros (2005) comenta lo siguiente: "Se define un esquema para una parte de la matemática como la colección de acciones, procesos, objetos y otros esquemas de un individuo que están ligadas, consciente o inconscientemente, en un marco coherente en la mente de un individuo" (p.15).

En un trabajo titulado "Psicogénesis e historia de la ciencia" se propone que los esquemas evolucionan y se pueden distinguir tres fases o etapas, los niveles intra, inter y trans, dichas etapas se caracterizan por el grado de construcción de relación entre los elementos que constituyen el esquema.

Una mejor descripción de estas etapas dentro de los esquemas se presenta en seguida:

[…] "En los trabajos publicados se asocia el nivel intra- con la construcción de relaciones entre procesos, objetos y esquemas relacionados con un mismo concepto, el nivel inter- con la existencia de relaciones entre diferentes conceptos relacionados con una misma área de las matemáticas y el nivel trans- con el hecho de que el estudiante demuestra, a lo largo de su trabajo, de utilizar una estructura coherente de relaciones entre los conceptos y de ser capaz de determinar cuándo es aplicable dicha estructura y cuándo no" (Trigueros, 2005, p.16).

## 2.3 Ciclo de Investigación de la teoría APOE

La investigación basada en la teoría APOE implica tres componentes: el análisis teórico, el diseño e implementación de enseñanza y observación, además de la verificación de datos.

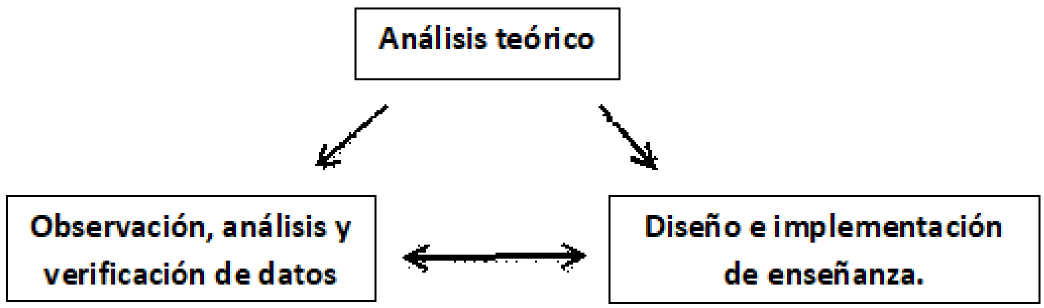



*Figura 2*. Ciclo de investigación (Arnon et al., 2013)

Este ciclo de investigación permite obtener una descripción más detallada y cercana a los conceptos matemáticos mediante su repetición. A continuación se presenta un breve desglose de cada uno de los elementos del ciclo de investigación:

- *Análisis teórico*: La investigación se inicia con un análisis teórico sobre el concepto matemático, en el cual se toma en cuenta el análisis de libros de texto y la experiencia de los investigadores para determinar un camino viable en la construcción del concepto.

“Este análisis permite mediante la descripción de las construcciones mentales modelar la epistemología y cognición del concepto matemático estudiado” (Roa y Oktaç, 2008, p.35).

Esto da lugar a una descomposición genética preliminar del concepto, que determine un camino viable para que los estudiantes construyan un concepto determinado, mediante una descripción de las construcciones mentales y mecanismos mentales que un estudiante puede realizar para la construcción de su comprensión de un concepto matemático. Cabe señalar que una descomposición genética de un concepto no es única, ya que en ella dependen los caminos de construcción del concepto y de las estructuras definidas en los estudiantes. Cada descomposición genética debe ser el resultado de la aplicación completa de los tres componentes del ciclo de la investigación lo que permite documentarla con los datos empíricos y refinarla.

- *Diseño e implementación de la enseñanza:* El análisis teórico conduce al diseño e implementación de la enseñanza, cuyas actividades están destinadas a fomentar las construcciones mentales requeridas por el análisis. Actividades y ejercicios están encaminados a ayudar a los estudiantes a construir acciones, interiorizarlas en procesos, encapsular procesos en objetos y la coordinación de dos o más procesos para la construcción de nuevos procesos. Así también, una gran variedad de estrategias pedagógicas como el aprendizaje cooperativo y la resolución de problemas en grupos pequeños entre otras. Estos diseños que fueron construidos con base en la descomposición genética, deben reflejar las construcciones expuestas en ella y los mecanismos de construcción mediante los cuales los estudiantes pueden realizar dichos conceptos.

- *Análisis y verificación de datos:* La ejecución de la enseñanza permite la oportunidad de recolectar datos y analizarlos, los resultados obtenidos mediante la aplicación de los instrumentos deben ser analizados desde la descomposición genética preliminar detectando qué elementos no han sido considerados y cuáles de las construcciones dadas hipotéticamente no se perciben, el propósito es responder a dos preguntas: ¿Los estudiantes hacen las construcciones mentales requeridas por el análisis teórico? ¿Qué tan bien los estudiantes aprenden el contenido matemático?, si la respuesta a la primera pregunta es negativa, la instrucción es reconsiderada y revisada. Ahora bien, si la respuesta a la primera pregunta es positiva y la segunda negativa, el análisis teórico es reconsiderado y revisado. En cualquiera de los casos el ciclo se repite hasta que las respuestas de ambas sean afirmativas y el instructor/investigador está convencido de que los estudiantes han aprendido los conceptos matemáticos suficientemente bien. En otras palabras, el ciclo continúa hasta que la evidencia empírica y el análisis teórico compartan las mismas construcciones mentales.

En conclusión, podemos decir que una descomposición genética refinada para esta etapa de la investigación puede ser mejorada mediante la repetición de este ciclo de investigación.

Weller et al., (2003) clasifica los estudios de investigación en tres tipos:

- *Estudios comparativos*: este estudio compara el rendimiento de los estudiantes que recibieron instrucción usando la teoría APOE y el ciclo de la enseñanza ACE (Actividades en la computadora, Discusiones en el salón de clase y Ejercicios), con los estudiantes que completaron un curso de matemáticas de manera tradicional.

- *Estudios no comparativos*: miden el rendimiento de los estudiantes que completaron un curso utilizando la teoría APOE y el ciclo de la enseñanza.

- *Estudios sobre el nivel de desarrollo cognitivo*: son aquellos en los que los estudiantes completaron un curso basado en la teoría APOE y el ciclo de la enseñanza o un curso de modelo tradicional.

*Comparaciones de las actitudes de los estudiantes a largo plazo en cursos basados en APOE y (ACE)*: el propósito es investigar el efecto de las estrategias pedagógicas basadas en la actitud de los estudiantes en comparación con los estudiantes que completaron el curso de matemáticas basado en la instrucción de manera tradicional. (p.98).

## 2.4 Descomposición genética

Antes de abordar la descomposición genética propuesta para nuestra investigación, es necesario conocer lo que se entiende por descomposición genética.

Una descomposición genética la definen Arnon et al., (2013) de la siguiente manera: "Una descomposición genética es un modelo hipotético que describe las estructuras mentales y los mecanismos que un estudiante podría necesitar construir para aprender un concepto matemático específico" (p.27). Por lo general, una descomposición genética comienza como una hipótesis basada en la experiencia de los investigadores. Una descomposición, hasta que no se prueba experimentalmente, es una hipótesis y se conoce como preliminar. Es posible que un concepto pueda constar de varias acciones diferentes, procesos y objetos, la descomposición genética puede incluir una descripción de cómo estas estructuras están relacionadas y organizadas dentro de una estructura mental más grande llamada esquema. Además, describe cómo un concepto podría construirse mentalmente, de igual manera podría incluir una descripción de las estructuras pre-requisito que un individuo necesita haber construido previamente, los cuales podrían explicar diferencias en el desarrollo de los estudiantes en el rendimiento matemático. Una descomposición genética preliminar puede guiar el desarrollo de la instrucción del concepto.

Algunas descomposiciones genéticas se han diseñado considerando las descripciones matemáticas de un concepto, junto con las experiencias de los investigadores (como estudiantes o profesores).

Otras han sido diseñadas a partir de los datos de la educación matemática, no necesariamente utilizando la teoría APOE, sino más bien, considerando las dificultades de los estudiantes en el aprendizaje de un concepto particular. Otras más, basadas en los datos obtenidos por medio de las observaciones de los estudiantes que están aprendiendo un concepto matemático. El diseño de una descomposición genética también se puede basar en el desarrollo histórico del concepto o mediante el análisis de materiales de texto.

Una descomposición genética necesita ser probada experimentalmente, con el propósito de responder la siguiente pregunta: ¿Los estudiantes hacen las construcciones mentales requeridas por el modelo teórico?, si se observan las construcciones descritas, se apoya el modelo. Si los resultados obtenidos difieren de lo que se describe en la descomposición genética, entonces se refina. Por otro lado, si las diferencias son demasiado grandes el modelo se desecha a favor de una nueva descomposición genética.

Una descomposición genética no es única, es decir, no proporciona una única forma en la que todos los estudiantes construyan un concepto matemático específico, su valor reside en que describe aquellas construcciones que se encuentran en los estudiantes y que son requeridas por la mayoría en el aprendizaje de un concepto. Una descomposición genética pude ser diseñada por diferentes investigadores, para describir el aprendizaje de un concepto particular. Si estas descomposiciones genéticas son apoyadas por los estudios empíricos en las construcciones realizadas por los estudiantes, todas ellas podrían considerarse como razonables.

Además de ser un modelo teórico para la investigación, la descomposición genética puede guiar la instrucción de un concepto. En un diseño de enseñanza basado en la teoría APOE se proponen actividades para que los estudiantes trabajen colaborativamente y cada actividad está diseñada para fomentar la interiorización de acciones en procesos, para ayudar a la coordinación y la reversión de procesos, así como apoyar la encapsulación de procesos en objetos. También se busca la construcción de relaciones entre las diferentes acciones, procesos, objetos y esquemas previamente construidos.

## 2.5 Descomposición genética del concepto límite

En esta sección presentamos la descomposición genética y el trabajo de Pons (2014) en los cuales nos basamos para diseñar e implementar una secuencia didáctica a un grupo de estudiantes del nivel medio superior. De la misma manera, serán una herramienta que nos permitirá analizar los datos empíricos que se obtendrán después de aplicar un cuestionario al finalizar la aplicación, esto con la finalidad de hallar evidencia de las construcciones y mecanismos mentales que lograron construir.

### 2.5.1 Construcciones previas necesarias

Consideramos que el estudiante debe haber construido con anterioridad el concepto de función, al menos en una concepción proceso dentro de la teoría APOE. Para nuestro caso, las actividades contemplan funciones definidas por partes, continuas y no continuas. Las cuales se presentan de manera algebraica, tabular y gráfica.

Es por ello que el estudiante debe tener la capacidad de que, dado un valor de $x$ debe hallar su respectiva imagen $f(x)$, en otras palabras, debe ser capaz de evaluar los valores del dominio y determinar sus respectivas imágenes, esto incluso para las funciones definidas por partes, más aún, debe de realizar estas mismas acciones para un conjunto de valores de $x$ que se presentan en una tabla o en una gráfica.

Lo anterior implica que un estudiante tenga la capacidad de evaluar funciones en diferentes representaciones, ya sea para un intervalo determinado, para un conjunto de valores del dominio que se presentan en una tabla o determinar una aproximación de las imágenes para ciertos valores de $x$ cuando se presenta de manera gráfica.

Es relevante que el estudiante tenga una noción elemental del infinito, debido a que debe ser capaz de realizar la evaluación de ciertos valores finitos en el dominio y posteriormente realizar esta misma acción completamente en la mente para valores infinitos del dominio.

### 2.5.2 Descomposición genética en la que se apoya nuestra investigación

En primer orden de ideas presentamos la de descomposición genética de Cottrill et al. (1996) el cual fue el resultado de un refinamiento de una descomposición genética preliminar. Es importante señalar que para el diseño de las actividades de la secuencia didáctica, nos apoyamos en el trabajo de Pons (2014) en el que se involucran los primeros tres pasos de la descomposición genética de Cottrill, et al. (1996), una adaptación del paso cuatro y un acercamiento al quinto paso.

Enseguida presentamos la descomposición genética, así como una breve descripción de cada uno de sus elementos.

1.- La acción de evaluar $f$ en un solo punto $x$ que se considera cercano o incluso igual a $a$.

2.- La acción de evaluar la función $f$ en algunos puntos, cada uno sucesivamente más cercano a $a$ que el anterior.

3.- Construcción de un esquema coordinado de la siguiente manera.

a) Interiorización de la acción del Paso 2 para construir un proceso en el dominio en el cual $x$ se aproxima a $a$.
b) Construcción de un proceso en el rango en el cual $f(x)$ se aproxima a $L$.
c) Coordinación de (a), (b), mediante $f$. Es decir, la función $f$ se aplica al proceso de $x$ aproximándose a $a$ para obtener el proceso de $f(x)$ aproximándose a $L$.

4.- Realizar acciones sobre el concepto de límite hablando, por ejemplo, sobre límites de combinaciones de funciones. De esta manera, el esquema de 3 se encapsula para convertirse en un objeto.

5.- Reconstruir los procesos de 3 (c) en términos de intervalos y desigualdades. Esto se realiza introduciendo estimaciones numéricas de la cercanía de las aproximaciones, en símbolos, $0 < |x - a| < \delta$ y $|f(x) - L| < \varepsilon$.

6.- Aplicar el esquema de los cuantificadores para reconstruir el proceso de los niveles anteriores para obtener la definición formal de límite.

7.- Una concepción completa de $\epsilon - \delta$ aplicada a situaciones específicas.

Si un estudiante desarrolla la capacidad de realizar un número finito de cálculos, de manera externa, utilizando una función algebraica o gráfica, habrá construido una concepción acción.

En otras palabras, un individuo presenta una concepción acción de límite, cuando no puede ir más allá de calcular un número finito de valores de la función en puntos cercanos a $a$, cuando una variable se aproxima a una cantidad fija.

Para Pons (2014) las actividades que permiten desarrollar este tipo de concepción en los estudiantes son en las que se les pide que realicen actividades como “completa la tabla” o “Elige un valor de la $x$, y calcula el valor de la función $f(x)$ en ese punto”. Finalmente, un estudiante desarrolla una concepción acción al realizar actividades donde se le exige realizar un cálculo simple.

Si un estudiante desarrolla la habilidad de ir más allá del cálculo de un número finito de valores aproximándose a un valor fijo, es decir, si es capaz de realizar cálculos e imaginar lo que sucede con un número infinito de pasos, entonces habrá alcanzado una concepción proceso. Por lo tanto, los estudiantes deben desarrollar una concepción proceso de las sucesiones de números en el dominio y una concepción proceso de las sucesiones de números en las imágenes de la función. En este caso, según Arnon et al. (2013) se pueden crear nuevos procesos al coordinar dos o más procesos.

Pons (2014) menciona que las tareas o actividades que les permiten a los estudiantes desarrollar una concepción proceso de las sucesiones de números, tanto en el dominio como en las imágenes, son en las que se les pide que respondan preguntas como “¿A qué número se aproxima $x$?” “¿A qué número se aproxima la función $f(x)$?”

En otras palabras, un estudiante desarrolla una concepción proceso de las sucesiones numéricas, al realizar actividades en las que se les exige hacer un cálculo que va más allá de calcular un número finito de valores de la función.

Un estudiante desarrolla una concepción proceso del límite cuando logra coordinar dos concepciones proceso de las sucesiones numéricas (la del dominio, con la de las imágenes de la función) empleando la función para coordinarlos mentalmente. En la descomposición genética se encuentra en el paso 3 denominado “esquema coordinado”.

Para Pons (2014) las tareas o actividades que les permiten a los estudiantes desarrollar una concepción proceso del límite, son en las que se les pide “Describe el comportamiento de la función $f(x)$ con relación al comportamiento de la variable $x$”.

Además, se dice que un estudiante ha construido una concepción de objeto de límite cuando logra pensar en el límite en un punto de la suma de dos funciones como objetos, forma la suma coordinado los procesos de las dos funciones y encapsula el proceso resultante para obtener el límite de la función suma.

2.6 La propuesta de Pons (2014)

La investigación desarrollada por Pons (2014) basa el desarrollo de esquema de límite de una función en tres aspectos: los elementos matemáticos, las relaciones entre ellos y los modos de representación.

Los elementos matemáticos entendidos como una disociación o una segregación en el interior del concepto y los cuales están fundamentados en los primeros 3 pasos de la descomposición genética de Cottril et al. (1996).

Pons (2014) hace una adaptación del cuarto apartado de la descomposición genética de Cottril et al. (1996) que se refiere a la concepción métrica en términos de desigualdades e introduce un nuevo apartado sobre la formalización del concepto. Esto es lo que diferencia a ambas propuestas.

Los primeros tres pasos de la descomposición genética de Cottril (y que retoma Pons) describen la construcción de lo que algunos llaman la concepción dinámica del límite funcional.

El límite como concepción dinámica.

> La concepción dinámica de límite de una función supone construir un proceso en el dominio en el cual **$\boldsymbol{x}$ se aproxima a $\boldsymbol{a}$**, construir otro proceso en el rango en el **cual $\boldsymbol{f(x)}$ se aproxima a $\boldsymbol{L}$** y utilizar **la función** para coordinarlos (Pons, 2014, p. 101).

Los elementos matemáticos que se pueden segregar de esta noción matemática son:

a) Idea de función.
b) Idea de aproximación, al ser el primer encuentro que los estudiantes tienen con el concepto de límite a través de la noción dinámica.
c) Coordinación de los dos procesos de aproximación en el dominio y en el rango.

El límite como aproximación métrica.

> Hemos considerado como concepción métrica en términos de desigualdades aquella que se deriva de la construcción de un proceso en el dominio en el cual $x - a$ en valor absoluto se aproxima a $0$, construir otro proceso en el rango en el cual $f(x) - L$ en valor absoluto se aproxima a $0$, y coordinarlos. En este caso, el elemento matemático segregado es la coordinación métrica (coordinación en términos de desigualdades) (Pons, 2014, p. 102).

En consecuencia, los elementos que se toman en cuenta en su investigación son:

- La idea de función
- La aproximación numérica
- La coordinación dinámica (coordinación de la aproximación del dominio con la aproximación en el contra dominio)
- La coordinación métrica (coordinación en términos de desigualdades)
- La manifestación formal del límite

En cuanto a las formas de representación consideró el modo gráfico, el algebraico-numérico y el numérico debido a que la noción de límite en sus elementos constituyentes presenta estas componentes. Este tipo de representaciones también fueron consideradas para nuestra investigación.

Las relaciones que consideraron los investigadores en el esquema de límite de una función son: la coincidencia y no coincidencia de las aproximaciones laterales y la coordinación cognitiva, entendida de la siguiente forma:

1.- La coincidencia en las aproximaciones laterales entendida como la relación que surgen entre los elementos matemáticos, como lo es, la aproximación numérica, la coordinación dinámica y la manifestación formal del límite. En otras palabras, es necesario que el estudiante establezca que tanto por la derecha y por la izquierda las aproximaciones laterales son las mismas.

2.- La no coincidencia de las aproximaciones laterales entendida como la relación que surge entre los elementos matemáticos, como lo es, la aproximación numérica y la coordinación dinámica. En otras palabras, es necesario que el estudiante establezca que tanto por la derecha y por la izquierda las aproximaciones laterales no son las mismas.

De lo anterior se tiene que la caracterización del desarrollo de esquema del límite de una función, deberá estar en función de los elementos matemáticos, de las relaciones de coincidencia o no coincidencia establecidas entre ellos y los diferentes modos de representación como se indica:

- Nivel INTRA: No se establecen relaciones entre los elementos.
- Nivel INTER: Se establecen relaciones entre los elementos pero con limitaciones en relación con los modelos de representación.
- Nivel TRANS: En este nivel se establecen relaciones sin que los modos de representación sea un obstáculo para ello.

(Pons, 2014, p. 103).

# Capítulo 3
# MÉTODO

## 3.1 Población

La secuencia didáctica diseñada se implementó en un grupo de 34 estudiantes que cursaban la materia de cálculo diferencial en un Bachillerato Tecnológico en el ciclo escolar 2017-2018. Dicho Bachillerato se encuentra en una comunidad del estado de Puebla.
Es importante señalar que debido a las diferentes actividades que tienen los estudiantes en la escuela, varios de ellos no estuvieron presentes en todas las sesiones en las que se implementó la secuencia didáctica, pero al menos el 80% acudió a un 85% del total de las sesiones programadas, y únicamente dos estudiantes estuvieron presentes en todas las sesiones.

Además, los estudiantes aún no iniciaban el tema de límite de una función, ya que el profesor a cargo del grupo se encontraba impartiendo el tema de funciones. Por otro lado, los estudiantes no reúnen una característica especial y su participación fue voluntaria. La estrategia implementada en el aula para la solución de las actividades fue de manera colaborativa, integrados en equipos para intercambiar opiniones y estrategias de solución.

El programa de estudios para Bachillerato Tecnológico para cuarto semestre marca la materia de Cálculo Diferencial y los temas a abordar se presentan en el siguiente orden: Pre-cálculo (Números reales, intervalos, desigualdades), Funciones (Dominio y contra dominio, clasificación, comportamiento, operaciones), Límites (Límite de una función, propiedades, continuidad de una función) y Derivada (Razón de cambio promedio de interpretación geométrica, derivación de funciones, derivadas sucesivas, comportamiento). Cabe señalar que el programa de estudios menciona “Tratamiento intuitivo: numérico, visual y algebraico de los límites” (SEP, 2017, p.13). Podemos decir que se espera que el tema de límites se aborde desde una concepción dinámica, que no considera la concepción métrica, no obstante, consideramos que si se guía a los estudiantes a la construcción del concepto de límite incluyendo la concepción métrica estarían más próximos a la comprensión de la definición formal del límite.

Durante las sesiones, a los estudiantes se les apoyó resolviendo dudas relacionadas con las actividades o conceptos involucrados que no conocían y que les impedían resolverlas. Al finalizar las primeras ocho actividades, es decir, las primeras cinco sesiones, se les presentó la definición de límite mediante aproximaciones laterales.

## 3.2 Descripción de la secuencia didáctica implementada

En esta sección se presenta la secuencia didáctica inspirada en las actividades propuestas por Pons (2014) y se describe la forma en que se espera que estas contribuyan a las construcciones y mecanismos mentales planteados en la descomposición genética (Cottrill et al, 1996).

La secuencia didáctica se compone de 12 actividades, las cuales fueron aplicadas en 8 sesiones con una duración de 50 minutos cada una.

Utilizaremos las etiquetas DG1, DG2,…. para denotar los pasos 1, 2,… que corresponden a las construcciones mentales de la descomposición genética que se pretenden desarrollar con cada una de las actividades de la secuencia didáctica.

Actividad 1

A partir de la tabla responde:

| $x$ | 2.9 | 2.99 | 2.999 | 2.9999 | ... | 3.0001 | 3.001 | 3.01 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 14.21 | 14.9201 | 14.992001 | 14.99920001 | | 15.0080001 | 15.0801 | 15.81 |

- ¿A qué número se aproxima $x$ ?
- ¿A qué número se aproximan los valores de la función $f(x)$ ?
- Describe el comportamiento de la función $f(x)$ con relación al comportamiento de la variable $x$.

Actividad 2

A partir de la tabla responde:

| $x$ | 3.99 | 3.999 | 3.9999 | 3.99999 | ... | 4.00001 | 4.0001 | 4.001 | 4.01 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 15.530 | 15.5254 | 15.5015 | 15.50001 | | 14.00003 | 14.0003 | 14.003 | 14.03 |

- ¿A qué número se aproxima $x$ ?
- ¿A qué número se aproximan los valores de la función $f(x)$ ?
- Describe el comportamiento de la función $f(x)$ con relación al comportamiento de la variable $x$.

Las actividades 1 y 2 se presentan en modo numérico y se diferencian en la coincidencia y en la no coincidencia de las aproximaciones laterales.

Las dos actividades anteriores pretenden que los estudiantes logren lo siguiente:

- Que el estudiante observe que las sucesiones numéricas en el dominio se aproximan a un número, en el caso de la actividad 1 es a 3, y en la segunda actividad es a 4. (DG3a)
- Que el estudiante asocie la aproximación en las imágenes de una sucesión numérica a un número fijo, en el caso de la actividad 1 es a 15 y para la actividad 2 se busca que observe que la sucesión numérica se aproxima a 15.5 por la izquierda y a 14 por la derecha. (DG3b)

- En la actividad 1 se pretende desarrollar la coordinación de la concepción proceso en el dominio cuando $x$ tiende a 3, con la concepción proceso en las imágenes cuando $f(x)$ tiende a 15. En la actividad 2, pretendemos que el estudiante observe que las imágenes se aproximan a dos números. (DG3c)

Actividad 3

Completa la siguiente tabla para la función $f(x) = x^2 - 1$ .

| $x$ | 1.9 | 1.99 | 1.999 | 1.9999 | 2 | 2.0001 | 2.001 | 2.01 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | | | | |

Con la información que reuniste contesta las siguientes preguntas:

- ¿A qué número se aproxima $x$ ?
- ¿A qué número se aproximan los valores de la función $f(x)$ ?
- Describe el comportamiento de la función $f(x)$ con relación al comportamiento de la variable $x$.

Actividad 4

Completa la siguiente tabla para la función $f(x) = -2$.

| $x$ | 3.9 | 3.99 | 3.999 | 4 | 4.0001 | 4.001 | 4.01 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | | | |

Con la información que reuniste contesta las siguientes preguntas:

- ¿A qué número se aproxima $x$ ?
- ¿A qué número se aproximan los valores de la función f(x)?
- Describe el comportamiento de la función $f(x)$ con relación al comportamiento de la variable $x$.

Las tareas 3, 4 y 5 se presentan en modo algebraico-numérico según los tipos de representación considerados en (Pons, 2014).

Algebraico por la forma en que se presenta la función y numérico por los datos que necesita el estudiante para lograr responder la segunda pregunta. En las actividades 3 y 5, están expresados en una tabla y se diferencian en la coincidencia o no coincidencia de las aproximaciones laterales de sus imágenes.

En la actividad 4 pretendemos que el estudiante observe que la imagen de cualquier elemento del dominio evaluado en la función siempre será constante.

Las actividades 3, 4 y 5 pretenden que los estudiantes logren lo siguiente:

- Al solicitar que completen la tabla pretendemos que el estudiante recupere de sus conocimientos previos la manera de evaluar diversos valores en una función, lo que le permitirá desarrollar

<u>Actividad 5</u>

Completa la siguiente tabla para la función $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x<0 \\ -2x-3 & x \geq 0 \end{cases}$

| $x$ | -0.1 | -0.01 | -0.001 | -0.0001 | 0 | 0.0001 | 0.001 | 0.01 | 0.1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | | | | | |

Con la información que reuniste contesta las siguientes preguntas:

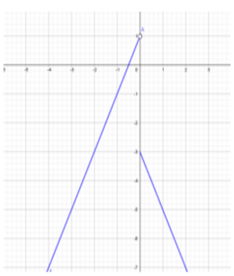
- ¿A qué número se aproxima $x$ ?
- ¿A qué número se aproximan los valores de la función $f(x)$ ?
- Describe el comportamiento de la función $f(x)$ con relación al comportamiento de la variable $x$.

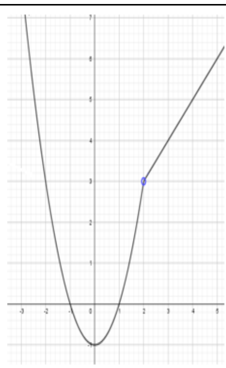
una concepción acción del concepto de límite. (DG1)

- Que el estudiante observe que las sucesiones numéricas en el dominio se aproximan a un número, en el caso de la actividad 3 es a 2, en la actividad 4 es a 4 y en la actividad 5 es a 0. (DG2) y (DG3a)

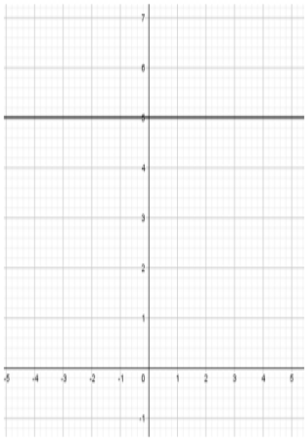
- Que el estudiante asocie la aproximación en las imágenes de una sucesión numérica a un número, en el caso de la actividad 3 es a 3 y en la actividad 4 es a -2; además esperamos que note que, en la actividad 4, las imágenes $f(x)$ son constantes. Finalmente, en la actividad 5 se busca que observe que la sucesión numérica e aproxima a 1 por la izquierda y a -3 por la derecha. (DG3b)

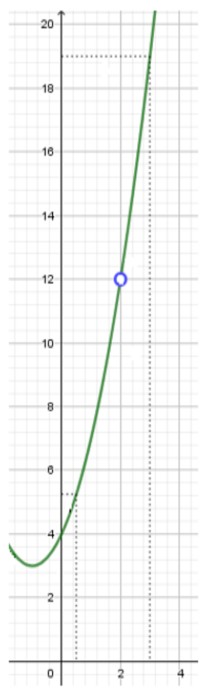
- En la actividad 3 se busca estimular la capacidad de coordinar la concepción proceso de las sucesiones de números en el dominio cuando $x$ tiende a 2, con la concepción proceso de las sucesiones de números en las imágenes cuando $f(x)$ tiende 3, empleando la sucesión numérica que previamente haya encontrado. (DG3c)

| | |
|---|---|
| | De la misma manera, en la actividad 4 pretendemos estimular la capacidad de coordinar la concepción proceso de las sucesiones numéricas en el dominio, cuando $x$ tiende a 4, con la concepción proceso de las sucesiones numéricas en las imágenes cuando $f(x)$ tiende a -2. Finalmente, en la actividad 5 se pretende estimular la capacidad de coordinar la concepción proceso de las sucesiones numéricas en el dominio, cuando $x$ tiende a 0 con la concepción proceso de las sucesiones numéricas en las imágenes $f(x)$ y note que las imágenes se aproximan a dos números. (DG3c) |
| <u>Actividad 6</u><br>A continuación se muestra la gráfica de cierta función, apóyate en ella y contesta las siguientes preguntas:<br><br>a) Elige un valor para la $x$ y calcula el valor de la función $f(x)$ en ese punto.<br>b) Cuando $x$ tome sucesivamente los valores -2, -1.5, -1, -0.5,-0.1,…, ¿a qué número se aproxima la función $f(x)$?<br>c) Cuando $x$ tome sucesivamente los valores 0.1, 0.5, 1, 1.5, 2,…., ¿a qué número se aproxima la función $f(x)$?<br>d) Describe el comportamiento de la función $f(x)$ con relación al comportamiento de la variable $x$. | Las actividades 6, 7 y 8 se presentan de manera gráfica, y se diferencian en la coincidencia (actividad 7 y 8) y no coincidencia (actividad 6) de las aproximaciones laterales.<br>La finalidad de la actividad 6 es:<br>• En el inciso a) que los estudiantes sean capaces de determinar el valor de la función en un punto dada su gráfica. (DG1) y (DG2)<br>• En el inciso b) que los estudiantes coordinen la concepción proceso de la sucesión numérica en el dominio (DG3a) cuando $x$ se aproxima a 0 por la izquierda con la concepción proceso de la sucesión |

| | |
|---|---|
| | numérica en las imágenes (DG3b) cuando $f(x)$ se aproxima a 1.<br><br>• En el inciso c) se busca estimular en los estudiantes la coordinación de la concepción proceso de la sucesión numérica en el dominio (DG3a) cuando $x$ se aproxima a 0 por la derecha con la concepción proceso de la sucesión numérica en las imágenes (DG3b) cuando $f(x)$ se aproxima a -3.<br><br>• En el inciso d) se busca estimular en los estudiantes la coordinación de la concepción proceso de la sucesión numérica en el dominio (DG3a) cuando $x$ se aproxima a 0, con la concepción proceso de la sucesión numérica en las imágenes $f(x)$ (DG3b) y note que las imágenes se aproximan a dos números diferentes. (DG3c) |
| <br>Actividad 7<br>A continuación se muestra la gráfica de cierta función, apóyate en ella y contesta las siguientes preguntas:<br>a) Elige un valor para la $x$ y calcula el valor de la función $f(x)$ en ese punto.<br>b) Cuando $x$ tome sucesivamente los valores 0.5, 1, 1.2, 1.5, 1.7, 1.9,… ¿a qué número se aproxima la función $f(x)$?<br>c) Cuando $x$ tome sucesivamente los valores 3.5, 3.2, 3, 2.7, 2.5, 2.3, 2.1,… ¿a qué número se aproxima la función $f(x)$?<br>d) Describe el comportamiento de la función $f(x)$ con relación al comportamiento de la variable $x$. | La finalidad de la actividad 7 es:<br>• En el inciso a), que los estudiantes sean capaces de determinar el valor de la función en un punto dada su representación gráfica. (DG1) y (DG2)<br><br>• En el inciso b), estimular en los estudiantes la coordinación de la concepción proceso de la sucesión numérica en el dominio (DG3a) cuando |

| | |
|---|---|
| | $x$ se aproxima a 2 por la izquierda con la concepción proceso de la sucesión numérica en las imágenes (DG3b) cuando $f(x)$ se aproxima a 3.<br><br>• En el inciso c), estimular en los estudiantes la coordinación de la concepción proceso de la sucesión numérica en el dominio (DG3a) cuando $x$ se aproxima a 2 por la derecha con la concepción proceso de la sucesión numérica en las imágenes (DG3b) cuando $f(x)$ se aproxima a 3.<br><br>• Finalmente, en el inciso d), que los estudiantes coordinen la concepción proceso de la sucesión numérica en el dominio cuando $x$ se aproxima a 2, con la concepción proceso de la sucesión numérica en las imágenes, cuando $f(x)$ se aproxima a 3. (DG3c) |

<table>
<tr>
<td><br>Actividad 8<br>A continuación se muestra la gráfica de cierta función, apóyate en ella y contesta las siguientes preguntas<br><br>a) Elige un valor para la $x$ y calcula el valor de la función $f(x)$ en ese punto.<br><br>b) Cuando $x$ tome sucesivamente los valores 0.5, 1, 1.3, 1.5, 1.7, 1.9,… ¿a qué número se aproxima la función $f(x)$?<br><br>c) Cuando $x$ tome, sucesivamente, los valores 3.5, 3, 2.7, 2.5, 2.3, 2.1,… ¿a qué número se aproxima la función $f(x)$?<br><br>d) Describe el comportamiento de la función $f(x)$ con relación al comportamiento de la variable $x$.</td>
<td>La actividad 8, al igual que la actividad 4, pretende que el estudiante observe que cualquier elemento del dominio evaluado en la función siempre va a tener una imagen constante.<br>Los objetivos de la actividad 8 son:<br>• En el inciso a), que los estudiantes sean capaces de determinar el valor de la función en un punto dada su representación gráfica. (DG1) y (DG2)<br>• En el inciso b), estimular en los estudiantes la coordinación de la concepción proceso de la sucesión numérica en el dominio (DG3a) cuando $x$ se aproxima a 2 por la izquierda con la concepción proceso de la sucesión numérica en las imágenes (DG3b) cuando $f(x)$ es igual a 5.<br><br>• En el inciso c), estimular en los estudiantes la coordinación de la concepción proceso de la sucesión numérica en el dominio (DG3a) cuando $x$ se aproxima a 2 por la derecha con la concepción proceso de la sucesión numérica en las imágenes (DG3b) cuando $f(x)$ es igual a 5.<br>• Finalmente, en el inciso d, que los estudiantes coordinen la concepción proceso de la sucesión numérica en el dominio cuando $x$ se aproxima a 2, con la concepción proceso de la sucesión</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>numérica en las imágenes, cuando $f(x)$ es igual a 5. (DG3c)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Al finalizar este primer bloque de actividades, el profesor debe conducir al estudiante hacia la definición de límite de una función en un punto mediante la coincidencia de los límites laterales. Dentro de las actividades anteriormente propuestas se encuentran funciones definidas por partes, en donde se hace evidente que las aproximaciones laterales en las imágenes son distintas. A medida que se avance en la solución de las actividades, se puede hacer explícito que la palabra aproximación puede ser sustituida por “tiende a”.</td></tr>
<tr><td>Actividad 9<br><br>La actividad 9 se presenta de manera gráfica.<br>Observa la siguiente gráfica correspondiente a cierta función $g(x)$, apóyate de los trazos y nota lo siguiente<br><br>Si $x = 0.5$, el valor de $g(x) = 5.25$<br>Si $x = 3$, el valor de $g(x) = 19$<br><br>Realiza los trazos necesarios para completar los siguientes enunciados:<br>Si $x = 1$, el valor de $g(x) =$ ______<br>Si $x = 3.2$, el valor de $g(x) =$ ______<br>Si $x = 1.5$, el valor de $g(x) =$ ______<br>Si $x = 2.5$, el valor de $g(x) =$ ______<br>Si $x = 1.75$, el valor de $g(x) =$ ______<br>Si $x = 1.25$, el valor de $g(x) =$ ______<br><br>¿Qué valor aproximadamente tomará $g(x)$, cuando $x = 1.9$ ?<br><br>¿Qué valor aproximadamente tomará $g(x)$, cuando $x = 2.1$ ?<br></td><td>La actividad 9 se presenta de manera gráfica y se busca que los estudiantes refuercen las ideas centrales de las actividades que realizaron previamente.<br><br>• Se busca que los estudiantes sean capaces de determinar el valor de la función en determinados puntos, dada su representación gráfica, mediante el apoyo de trazos de rectas, en otras palabras, se busca que el estudiante determine los valores de las imágenes de la función para ciertos valores del dominio con el apoyo de la gráfica. (DG1)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Las actividades del 10 al 12 se presentan en modo numérico y buscan favorecer la concepción métrica del límite de una función en un punto a través de las aproximaciones laterales, tanto en el dominio como en el rango, en términos de desigualdades, según la propuesta de Pons (2014).</td></tr>
</table>

Actividad 10

En la siguiente tabla te presentamos los valores que toma la función f(x) = $\begin{cases} x^2 - 1 & x < 2 \\ x + 1 & x \geq 2 \end{cases}$ para ciertos valores. Además, se han construido dos columnas más con los valores de diferenci en valor absoluto de $|x - 2|$ y $|f(x) - 3|$. Analiza detenidamente los datos presentados y contes las siguientes preguntas.

| $x$ | $f(x)$ | $\lvert x - 2\rvert$ | $\lvert f(x) - 3\rvert$ |
|---|---|---|---|
| 1,9 | 2,61 | 0,1 | 0,39 |
| 1,99 | 2,960 | 0,01 | 0,040 |
| 1,999 | 2,9960 | 0,001 | 0,004 |
| 1,9999 | 2,99960 | 0,0001 | 0,0004 |
| … | … | … | … |
| 2,0001 | 3,0001 | 0,0001 | 0,0001 |
| 2,001 | 3,001 | 0,001 | 0,001 |
| 2,01 | 3,01 | 0,01 | 0,01 |
| 2,1 | 3,1 | 0,1 | 0,1 |

¿Qué tan próximos deben de estar los valores de $x$ de 2, para que la diferencias de $f(x) - 3$ en valor absoluto sean menor que 0.004?

Con la información que posees hasta ahora, ¿podrías indicar cuál es el límite de la función $f(x)$ en el punto $x = 2$? Justifica tu respuesta

La actividad 10 busca que los estudiantes reconozcan las nuevas sucesiones de valores que resultan de las diferencias en valor absoluto entre 2 y $x$ por una parte y por otra la diferencia en valor absoluto entre 3 y $f(x)$.

La finalidad de la actividad 10 es:

- En la pregunta 1 se busca que los estudiantes coordinen las aproximaciones en el dominio con las aproximaciones de las imágenes en términos de desigualdades, para que logren observar que los valores de $x$ deben estar 0.0001 de 2, o que los valores de $x$ que debe tomar deben ser mayores que 1.999 y menores que 2.0001, para que la distancia de $f(x) - 3$ en valor absoluto sea menor que 0.004 (DG5)
- La pregunta 2 busca que los estudiantes manifiesten la existencia del límite, ya sea mediante argumentación de las aproximaciones laterales coincidentes, pero que sean capaces de desarrollar un argumento más mediante la coordinación de las aproximaciones métricas en el dominio y codominio de la función, en otras palabras, se busca que los estudiantes noten que los valores de las diferencias en valor absoluto entre los valores de $x$ y 2 se aproximan a 0, cando $x$ se aproxima a 2. Una interpretación

similar puede surgir con las distancias en valor absoluto de $f(x)$ y 3, y que por lo tanto, si determinamos que tan próximos deben estar los valores de $f(x)$ a 3 en valor absoluto, esto determina que siempre es posible hallar un conjunto de valores de $x$ en términos de desigualdades en el dominio que satisfacen la condición solicitada en el codominio. Por lo tanto, en caso de que no se cumpla la restricción solicitada para ningún conjunto de valores de $x$ en términos de desigualdades, podemos decir que la función no tiene límite en el punto determinado. (DG5)

Actividad 11

En la actividad 4 calculaste los valores que toma la función $f(x) = -2$ cuando la variable $x$ toma ciertos valores, te presentamos en la siguiente tabla los valores que toma $f(x)$. Además se han construido dos columnas más de diferencias en valor absoluto, en la cuarta columna se han calculado los valores absoluto de $|f(x) + 2|$. Con ayuda de tu calculadora encuentra los valores de $|x - 4|$.

Una vez que hayas completado la tabla contesta las siguientes preguntas

| $x$ | $f(x)$ | $\|x-4\|$ | $\|f(x)+2\|$ |
|---|---|---|---|
| 3,9 | -2 | | 0 |
| 3,99 | -2 | | 0 |
| 3,999 | -2 | | 0 |
| 3,9999 | -2 | | 0 |
| … | … | … | … |
| 4,0001 | -2 | | 0 |
| 4,001 | -2 | | 0 |
| 4,01 | -2 | | 0 |
| 4,1 | -2 | | 0 |

¿Qué sucede con las distancias de $|x - 4|$cuándo $x$ toma valores cada vez más próximos a 4?
¿Qué sucede con las distancias de $|f(x) + 2|$ cuándo $f(x)$ toma valores cada vez más próximos a -2?
¿Qué tan próximos deben de estar los valores de $x$ de 4, para que la diferencias de $f(x) - (-2)$, en valor absoluto, sea menor qué 0.0001?
Con la información que posees hasta ahora, ¿podrías indicar cuál es el límite de la función $f(x)$ en el punto $x = 4$?

La actividad 11 se presenta de manera numérica debido a que se pide a los estudiantes que calculen las distancias en valor absoluto entre $x$ y 4 cuando $x$ se aproxima a 4.

La finalidad de la actividad 11 es:

- En la pregunta 1 y 2 se busca que los estudiantes reconozcan las nuevas sucesiones de valores que resultan de las diferencias en valor absoluto entre 4 y $x$ por una parte y de -2 con $f(x)$ por otra.
- La pregunta 3 busca que los estudiantes coordinen las aproximaciones en el dominio con las aproximaciones en sus imágenes en términos de desigualdades,

<table>
<tr>
<td></td>
<td>guiándolos a la reflexión de que para cualquier valor que tome $x$ en la tabla siempre se cumplirá que la distancia en valor absoluto de $f(x)$ y 4 es menor que 0.0001.
<ul><li>La pregunta 4 busca que el estudiante manifieste formalmente la existencia del límite, teniendo en cuenta que cuando los valores de las diferencias en valor absoluto entre los valores de $x$ y 4 se aproximan a 0, los valores de las diferencias en valor absoluto entre los valores de $f(x)$ y -2 son cero, por lo tanto cuando $x$ tiende a 4, el límite de la función $f(x)$ es 4. (DG5)</li></ul></td>
</tr>
<tr>
<td><u>Actividad 12</u><br>
En la actividad 1 calculaste los valores que toma la función $f(x) = x^2 - 1$ cuando la variable $x$ toma ciertos valores, te presentamos en la siguiente tabla los valores que toma $f(x)$. Además se han construido dos columnas más de diferencias en valor absoluto, en la tercera columna se han calculado los valores absoluto de $|x-2|$. Con ayuda de tu calculadora encuentra los valores de $|f(x)-3|$.<br>
Una vez que hayas completado la tabla contesta las siguientes preguntas
<table>
<tr><th>$x$</th><th>$f(x)$</th><th>$|x-2|$</th><th>$|f(x)-3|$</th></tr>
<tr><td>1,9</td><td>2,61</td><td>0,1</td><td></td></tr>
<tr><td>1,99</td><td>2,9601</td><td>0,01</td><td></td></tr>
<tr><td>1,999</td><td>2,996001</td><td>0,001</td><td></td></tr>
<tr><td>1,9999</td><td>2,99960001</td><td>0,0001</td><td></td></tr>
<tr><td>…</td><td>…</td><td>…</td><td>…</td></tr>
<tr><td>2,0001</td><td>3,00040001</td><td>0,0001</td><td></td></tr>
<tr><td>2,001</td><td>3,004001</td><td>0,001</td><td></td></tr>
<tr><td>2,01</td><td>3,0401</td><td>0,01</td><td></td></tr>
<tr><td>2,1</td><td>3,41</td><td>0,1</td><td></td></tr>
</table>
¿Qué sucede con las distancias $|x-2|$ cuando $x$ toma valores cada vez más próximos a 2?<br>
¿Qué sucede con las distancias de $|f(x)-3|$ cuando $f(x)$ toma valores cada vez más próximos a 3?<br>
¿Qué tan próximos deben de estar los valores de $x$ de 2, para que la diferencias de $f(x)-3$, en valor absoluto, sea menor qué 0.0399?<br>
Con la información que posees hasta ahora, ¿podrías indicar cuál es el límite de la función $f(x)$ en el punto $x = 2$?</td>
<td>Finalmente, la actividad 12 se presenta de manera numérica y pide a los estudiantes que calculen las distancias en valor absoluto entre $x$ y 2 cuando $x$ se aproxima a 2.<br>
La finalidad de la actividad 12 es:
<ul><li>En la pregunta 1 y 2 se busca que los estudiantes reconozcan las nuevas sucesiones de valores que resultan de las diferencias en valor absoluto entre 2 y $x$ por una parte y de 3 con $f(x)$ por otra.</li>
<li>La pregunta 3 busca que los estudiantes coordinen (o no) las aproximaciones en el dominio con las aproximaciones en sus imágenes en términos de desigualdades, afirmando que los valores de $x$ deben de estar a 0.001, o los valores de $x$ deben ser</li></ul></td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td>mayores que 1.99 y menores que 2.01, para que la diferencia en valor absoluto entre $f(x)$ y 3 sea menor que 0.0399.<br>
• La pregunta 4 busca que el estudiante manifieste formalmente la existencia del límite teniendo en cuenta, que cuando los valores de las diferencias en valor absoluto entre los valores de $x$ y 2 se aproximan a 0, los valores de las diferencias en valor absoluto entre los valores de $f(x)$ y 3 también se aproximan a 0, por lo tanto cuando $x$ tiende a 2, el límite de la función $f(x)$ es 3. (DG5)</td>
</tr>
</table>

3.3 Descripción del cuestionario final

En esta sección se presenta un análisis del cuestionario que se aplicó una semana después de finalizar la secuencia didáctica con la finalidad de determinar qué estructuras y mecanismos mentales lograron construir los estudiantes.

Es importante resaltar que los problemas del cuestionario se diseñaron considerando el tiempo que dura una sesión, la cual es de 50 minutos.

<table>
<tr>
<td>1.- A partir de la tabla responde:
<table>
<tr><td>$x$</td><td>4.9</td><td>4.99</td><td>4.999</td><td>4.9999</td><td>…</td><td>5.00001</td><td>5.0001</td><td>5.001</td><td>5.01</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>9.8</td><td>9.98</td><td>9.998</td><td>9.9998</td><td></td><td>10.00002</td><td>10.0002</td><td>10.002</td><td>10.02</td></tr>
</table>
• ¿Cuál es el límite de la función en $x = 5$? Justifica tu respuesta.</td>
<td>El primer problema se presenta en modo numérico.<br>
Para que el estudiante resuelva dicho problema es necesario que primero asocie la aproximación en el dominio de una sucesión numérica a un número fijo, en este caso 5. Por otro lado, deberá asociar la aproximación de una sucesión numérica por la derecha y por la izquierda</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td>en las imágenes a un número fijo, en este caso 10. Esto le permitirá manifestar la existencia o no existencia del límite de una función en un punto.<br>Finalmente, deberá coordinar estas dos concepciones proceso de las sucesiones numéricas tanto en el dominio como en el codominio mediante la función. Por lo tanto, si el estudiante logra resolver el problema exitosamente y muestra indicios de haber asociado ambas concepciones de sucesiones numéricas en el dominio y codominio, diremos que el estudiante muestra evidencia de poseer una concepción proceso del concepto límite de una función en un punto como concepción dinámica. (DG3c)</td>
</tr>
<tr>
<td>2.- A partir de la tabla responde:
<table>
<tr><td>$x$</td><td>1.7</td><td>1.8</td><td>1.99</td><td>1.999</td><td>…</td><td>2.001</td><td>2.01</td><td>2.2</td><td>2.3</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>3.9</td><td>4.24</td><td>4.960</td><td>4.9960</td><td></td><td>4.001</td><td>4.01</td><td>4.2</td><td>4.3</td></tr>
</table>
<ul><li>¿Cuál es el límite de la función en $x = 2$? Justifica tu respuesta.</li></ul>
</td>
<td>El segundo problema se presenta de modo numérico.<br>Nuevamente, para que el estudiante resuelva dicho problema es necesario que primero asocie la aproximación en el dominio de una sucesión numérica a un número fijo, en este caso 5. Por otro lado, deberá asociar la aproximación de una sucesión numérica por la derecha y por la izquierda en las imágenes a un número fijo, en este caso 5. Esto le permitirá manifestar la existencia o no existencia del límite de una función en un punto.</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td>Finalmente, deberá coordinar estas dos concepciones proceso de las sucesiones numéricas tanto en el dominio como en el codominio mediante la función. Por lo tanto, si el estudiante logra resolver el problema exitosamente y muestra indicios de haber asociado ambas concepciones de sucesiones numéricas en el dominio y codominio, diremos que el estudiante muestra evidencia de poseer una concepción proceso del concepto límite de una función en punto como concepción dinámica. (DG3c)</td>
</tr>
<tr>
<td>3.- Completa la siguiente tabla para la función $f(x) = 6$.<br><table><tr><td>$x$</td><td>2.9</td><td>2.99</td><td>2.999</td><td></td><td>3.0001</td><td>3.001</td><td>3.01</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>Con la información que reuniste contesta la siguiente pregunta:<br>• ¿Cuál es el límite de la función en $x = 3$? Justifica tu respuesta.</td>
<td>El tercer problema se presenta de modo algebraico-numérico.<br>Para que el estudiante resuelva el problema es necesario, en primer lugar, que pueda evaluar los valores que toma $x$ en la tabla en la función proporcionada. Si el estudiante logra realizar exitosamente este primer paso, diremos que el estudiante posee una concepción acción del concepto límite funcional.<br>Una vez que el estudiante ha localizado los valores de las imágenes en la tabla, será necesario que asocie la aproximación en el dominio de una sucesión numérica a un número fijo, en este caso 3. Por otro lado, deberá asociar la aproximación en las imágenes de una sucesión numérica a un número fijo, en este caso 6.</td>
</tr>
</table>

| | |
|---|---|
| | Finalmente, deberá coordinar estos dos procesos involucrados empleando la función, esto le permitirá manifestar formalmente la existencia o no del límite de una función en un punto. Por lo tanto, si el estudiante logra resolver el problema exitosamente y muestra indicios de haber asociado ambas concepciones de sucesiones numéricas en el dominio y codominio diremos que el estudiante muestra evidencia de poseer una concepción proceso del límite de una función en un punto como concepción dinámica. (DG3c) |
| 4.- A continuación se muestra la gráfica de cierta función, apóyate en ella y contesta las siguientes preguntas: <br>• Cuando $x$ tome sucesivamente los valores -0.5, 0, 0.3, 0.5, 0.9,..., ¿a qué número se aproxima la función $f(x)$?<br>• Cuando $x$ tome sucesivamente los valores 3, 2.5, 2, 1.5, 1.1,..., ¿a qué número se aproxima la función $f(x)$?<br>• ¿Cuál es límite de la función en $x = 1$? Justifica tu respuesta. | Finalmente, el cuarto problema se presenta de manera gráfica.<br>Para que el estudiante resuelva el problema, debe ser capaz de determinar el valor aproximado de la imagen para cada valor que toma $x$ en el dominio, apoyándose en la gráfica de la función. Por lo tanto, si el estudiante es capaz de determinar los valores aproximados de las imágenes para cada valor de $x$ en el dominio, diremos que el estudiante posee una concepción acción del concepto límite. (DG3c) |

Por otro lado, para que responda la primera y segunda pregunta es necesario que asocie el proceso de aproximación en el dominio de una sucesión numérica a un número fijo, en este caso a 1, con el proceso de aproximación en las imágenes de una sucesión numérica en $f(x)$, y con base en esto, observe que se aproxima a dos números diferentes, en este caso por la derecha a 2 y por la izquierda a 0.

Si el estudiante es capaz de responder las primeras dos preguntas diremos que el estudiante posee una concepción proceso del concepto de límite. (DG3c)

Por otro lado, si el estudiante solamente es capaz de determinar el valor al que se aproximan los valores de $x$ en el dominio o el valor al que se aproximan los valores de $f(x)$, pero de manera aislada, diremos que el estudiante posee una concepción proceso de las sucesiones numéricas en el dominio o en las imágenes (DG3a) o (DG3b).

Por último, para que el estudiante responda la tercera pregunta, deberá primero asociar la aproximación en el dominio de una sucesión numérica a un número, en este caso 1, además, deberá asociar la aproximación en las imágenes de una sucesión numérica, en este caso se aproxima a dos números, a 2 por la derecha y a 0 por la izquierda. Finalmente, deberá coordinar estos dos procesos tanto en el dominio como en el codominio, empleando la función, lo que le permitirá manifestar formalmente la existencia o no del límite de una función en un punto. Por lo tanto, si el estudiante logra resolver el problema exitosamente y muestra indicios de haber asociado ambas concepciones de sucesiones numéricas en el dominio y codominio diremos que el estudiante muestra evidencia de poseer una concepción proceso del límite de una función en un punto como concepción dinámica (DG3c).

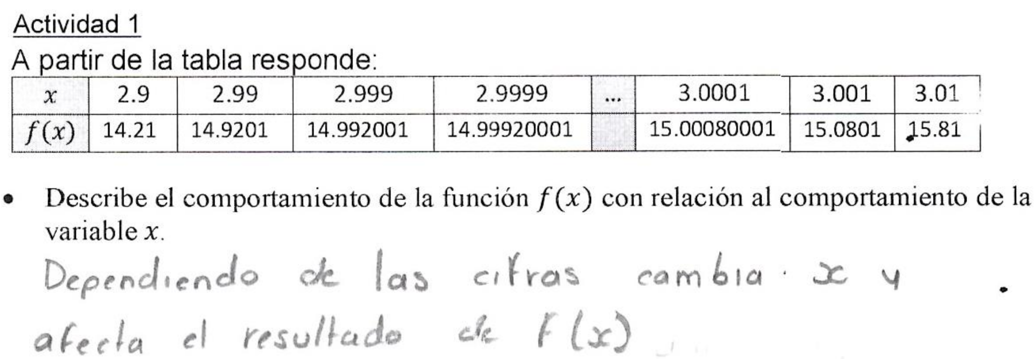
# Capítulo 4

# ANÁLISIS DE RESULTADOS

## 4.1 Actividades relacionadas con la concepción dinámica

Las actividades 1 y 2 la realizaron 31 estudiantes de los 34 que presentaron el cuestionario final. En la primera actividad 29 estudiantes respondieron, ya sea que $x$ se aproxima a 3 y $f(x)$ se aproxima a 15 o con valores muy cercanos a ellos, por lo que afirmamos que sus acciones han sido interiorizadas en los procesos descritos en los pasos DG3a y DG3b de la descomposición genética, que corresponden a un proceso en el dominio y otro en el rango de la función.

Solamente 3 de los 31 estudiantes presentaron indicios de establecer una coordinación de la concepción proceso de las sucesiones numéricas entre $x$ y $f(x)$ (DG3c).


Actividad 1

A partir de la tabla responde:

| $x$ | 2.9 | 2.99 | 2.999 | 2.9999 | ... | 3.0001 | 3.001 | 3.01 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 14.21 | 14.9201 | 14.992001 | 14.99920001 | | 15.00080001 | 15.0801 | 15.81 |

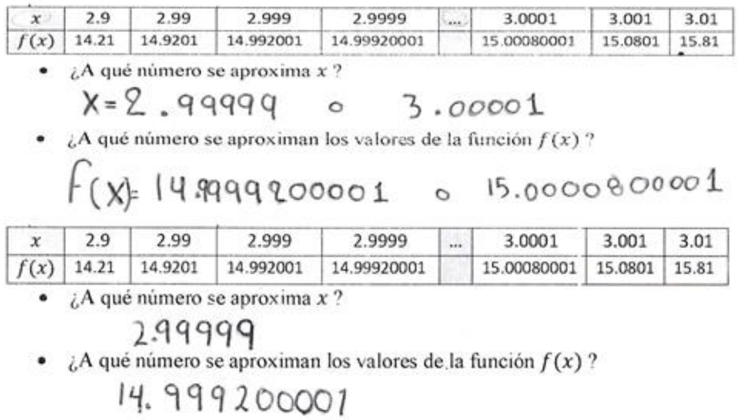
- Describe el comportamiento de la función $f(x)$ con relación al comportamiento de la variable $x$.

Dependiendo de las cifras cambia $x$ y afecta el resultado de $F(x)$

*Figura 3.* Respuesta del estudiante E12

Es decir, estos estudiantes mostraron indicios de establecer una relación de dependencia de los valores de $f(x)$ con respecto a los valores de $x$.

Otros estudiantes basaron sus respuestas en un patrón que lograron detectar en los dígitos de las sucesiones de números.



| $x$ | 2.9 | 2.99 | 2.999 | 2.9999 | ... | 3.0001 | 3.001 | 3.01 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 14.21 | 14.9201 | 14.992001 | 14.99920001 | | 15.00080001 | 15.0801 | 15.81 |

- ¿A qué número se aproxima $x$ ?

X=2.99999 o 3.00001

- ¿A qué número se aproximan los valores de la función $f(x)$ ?

F(X)= 14.9999200001 o 15.0000800001

| $x$ | 2.9 | 2.99 | 2.999 | 2.9999 | ... | 3.0001 | 3.001 | 3.01 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 14.21 | 14.9201 | 14.992001 | 14.99920001 | | 15.00080001 | 15.0801 | 15.81 |

- ¿A qué número se aproxima $x$ ?

2.99999

- ¿A qué número se aproximan los valores de la función $f(x)$ ?

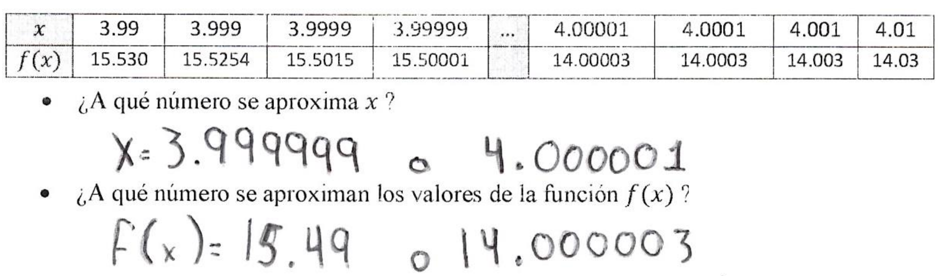
14.999200001

*Figura 4.* Ejemplo de las respuestas de los estudiantes E2 y E5

Los estudiantes observaron que en la sucesión numérica de valores de $x$, que van de izquierda a derecha, los términos difieren en un nueve, y que en la sucesión de derecha a izquierda se agrega un cero después del punto decimal. Para la sucesión de la izquierda, los estudiantes también identificaron un patrón para las imágenes.

En la segunda actividad, 23 estudiantes respondieron que $x$ se aproxima a 4, y 16 respondieron que $f(x)$ se aproxima a 14 o con valores muy cercanos.

Los que presentaron respuestas con valores cercanos se basaron en el patrón que detectaron en los dígitos.



| $x$ | 3.99 | 3.999 | 3.9999 | 3.99999 | ... | 4.00001 | 4.0001 | 4.001 | 4.01 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 15.530 | 15.5254 | 15.5015 | 15.50001 | | 14.00003 | 14.0003 | 14.003 | 14.03 |

- ¿A qué número se aproxima $x$ ?

X= 3.999999 o 4.000001

- ¿A qué número se aproximan los valores de la función $f(x)$ ?

F(x)= 15.49 o 14.000003

*Figura 5.* Ejemplo de la respuesta del estudiante E2.

Sin embargo, aunque el estudiante identifica que la función se aproxima a dos valores, realmente no está considerando una sola aproximación, es decir, está viendo dos sucesiones por separado, lo que lo lleva a concluir que sus imágenes también se aproximan a valores diferentes. No logró relacionar las acciones en un proceso de aproximación a un mismo valor del dominio.

En conclusión, los estudiantes no muestran indicios de una concepción proceso del concepto límite de una función en la noción dinámica (DG3C).

La tercera actividad fue realizada por 28 alumnos de los 34 que presentaron el cuestionario final, de los cuales, 23 evaluaron de manera correcta los valores de $x$ en la función. Esto les permitió responder que $x$ se aproxima a 2 y $f(x)$ a 3.

Podemos decir que las acciones realizadas por los estudiantes van encaminadas a la construcción de DG3a y DG3b.

Tres estudiantes presentaron problemas al evaluar los valores de $x$ mayores a 2 en la función. Además, no describieron de manera explícita a qué número se aproximan $x$ y $f(x)$.

Completa la siguiente tabla para la función $f(x) = x^2 - 1$ .

| $x$ | 1.9 | 1.99 | 1.999 | 1.9999 | 2 | 2.0001 | 2.001 | 2.01 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 2.61 | 2.96 | 2.99 | 2.999 | 3 | 3.04 | 3.0004 | 3.00004 |

Con la información que reuniste contesta las siguientes preguntas:

- ¿A qué número se aproxima $x$ ? a un numero entero
- ¿A qué número se aproximan los valores de la función $f(x)$ ?
  Igual a un numero entero

*Figura 6.* Ejemplo de la respuesta del estudiante E29.

Por lo anterior podemos decir que las acciones de los estudiantes aún no les permiten identificar un proceso de aproximación a un número específico, o no lo indicaron.

Ahora, para la descripción que se solicita acerca del comportamiento de las imágenes $f(x)$ con relación al comportamiento de la variable $x$, tres estudiantes intentan establecer alguna relación llegando a describir la regla de asociación entre ellas.

- Describe el comportamiento de la función $f(x)$ con relación al comportamiento de la variable $x$. fx se eleva la cantidad de x al cuadrado menos 1 para dar el resultado

*Figura 7.* Ejemplo de la respuesta del estudiante E18

A pesar de que los estudiantes logran describir la regla de correspondencia, no se cuenta con evidencias de que algún estudiante se acercara a la coordinación de las dos concepciones proceso de la sucesión de números, uno en el dominio y otro en el rango (DG3c), lo cual les hubiera permitido construir la concepción proceso del concepto límite de una función de la noción dinámica.

La actividad cuatro la realizaron 28 estudiantes de los 34 que presentaron el cuestionario final, de los cuales, trece evaluaron de manera correcta los valores de $x$ en la función $f(x) = -2$. Esto les permitió determinar que los valores en el dominio se aproximan a 4 y los valores en el codominio a -2.

El resto de los estudiantes no tuvo éxito al evaluar los valores que toma $x$ en la función, en ellos se presentaron las siguientes situaciones:

- Restaron 2 a los valores que toma $x$ en la tabla, el signo menos lo interpretaron como la operación resta. En otras palabras, la función $f(x) = -2$ la reescribieron mentalmente como $f(x) = x - 2$.

Completa la siguiente tabla para la función $f(x) = -2$.

| $x$ | 3.9 | 3.99 | 3.999 | 4 | 4.0001 | 4.001 | 4.01 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1.9 | 1.99 | 1.999 | 2 | 2.0001 | 2.001 | 2.01 |

*Figura 8.* Ejemplo de la respuesta del estudiante E22.

Esto los llevó a determinar erróneamente que los valores en el codominio se aproximan a 2.

- Otra de las modificaciones que hicieron a la regla de correspondencia fue sustituirla por $f(x) = x^2 - 2$. Para estos estudiantes el signo menos también significa la operación resta.

Completa la siguiente tabla para la función $f(x) = -2$.

| $x$ | 3.9 | 3.99 | 3.999 | 4 | 4.0001 | 4.001 | 4.01 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 13.21 | 13.92 | 13.992 | 14 | 14.0008 | 14.008 | 14.08 |

*Figura 9.* Ejemplo de la respuesta del estudiante E30.

Esto los llevó a determinar erróneamente que los valores en el codominio se aproximan a 14.

En conclusión, ninguno de los estudiantes presentó indicios de una concepción proceso de la noción dinámica (DG3c), ya que, a lo más, realizaron una descripción de la regla de correspondencia. Por ejemplo, E10 respondió: “3.9 se le restan 2 y sale el resultado, así sucesivamente 4.01 se le resta 2 va de menor a mayor y de mayor a menor”.

De los trece estudiantes que lograron evaluar correctamente los valores de $x$ en la función constante y, con base en ello, determinar las aproximaciones del dominio, así como de la imagen, podemos decir que sus acciones van encaminadas a la construcción de DG3a y DG3b.

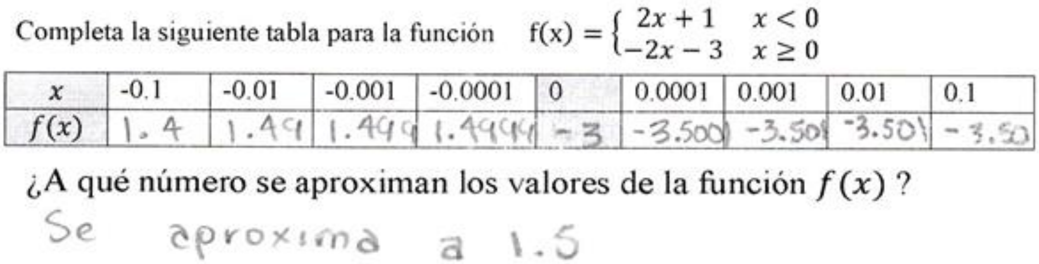
La quinta actividad la realizaron 25 alumnos de los 34 que presentaron el cuestionario final, de los cuales, el estudiante E21no la realizó y el estudiante E13 calculó los valores de las imágenes de la función de manera correcta, sin embargo, no responde las preguntas de la actividad, de los valores que presenta en la tabla conjetura que $f(x)$ se aproxima a 1. Por lo anterior, nuestro análisis se centra en las respuestas proporcionadas por 23 estudiantes.

Es importante señalar que al comienzo de la actividad a los estudiantes se les complicó realizarla, al cuestionarles el por qué, manifestaron que nunca habían trabajado con este tipo de funciones (por partes).

Por ello, el profesor tomó algunos minutos para orientarlos en la manera en que deberían trabajar con dicha función y la forma en que deberían evaluar los valores de $x$, en $f(x)$ considerando las condiciones establecidas.

La respuesta en la que el 100% de los estudiantes coinciden es en la respuesta de la primera pregunta, es decir, el total de los alumnos mencionan $x$ se aproxima a cero, sin embargo, algunos difieren en los valores en las imágenes, y esto se debe a que muchos de ellos cometieron errores al evaluar los valores de $x$ en $f(x)$ dados en la tabla.

Cuatro estudiantes (E26, E27, E29 y E30) responden que $f(x)$ se aproxima a 1.5 e incluso 2 de ellos coinciden en los valores de las imágenes, uno difiere por los signos y el otro por los valores de $f(x)$ cuando $x$ toma valores mayores e iguales a cero, un ejemplo de lo anterior lo presentan los estudiantes E27 y E30 respectivamente:

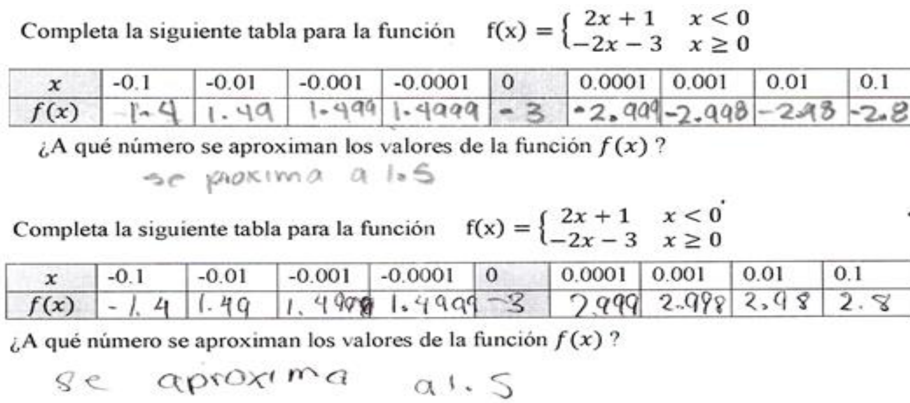

Completa la siguiente tabla para la función $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x<0 \\ -2x-3 & x \geq 0 \end{cases}$

| $x$ | -0.1 | -0.01 | -0.001 | -0.0001 | 0 | 0.0001 | 0.001 | 0.01 | 0.1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1.4 | 1.49 | 1.499 | 1.4999 | -3 | -3.500 | -3.501 | -3.501 | -3.50 |

¿A qué número se aproximan los valores de la función $f(x)$ ?

Se aproxima a 1.5

*Figura 10.* Ejemplo de la respuesta del estudiante E27.


Completa la siguiente tabla para la función $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x<0 \\ -2x-3 & x \geq 0 \end{cases}$

| $x$ | -0.1 | -0.01 | -0.001 | -0.0001 | 0 | 0.0001 | 0.001 | 0.01 | 0.1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1.4 | 1.49 | 1.499 | 1.4999 | -3 | -2.999 | -2.998 | -2.98 | -2.8 |

¿A qué número se aproximan los valores de la función $f(x)$ ?

se proxima a 1.5

Completa la siguiente tabla para la función $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x<0 \\ -2x-3 & x \geq 0 \end{cases}$

| $x$ | -0.1 | -0.01 | -0.001 | -0.0001 | 0 | 0.0001 | 0.001 | 0.01 | 0.1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | -1.4 | 1.49 | 1.499 | 1.4999 | -3 | 2.999 | 2.998 | 2.98 | 2.8 |

¿A qué número se aproximan los valores de la función $f(x)$ ?

se aproxima a 1.5

*Figura 11.* Ejemplo de la respuesta del estudiante E30.

No contamos con más información para determinar evaluaron $x$ en la función. De las respuestas que presentan es evidente que los alumnos se basaron en una sola sucesión de valores en las imágenes, en este caso de izquierda a derecha, para determinar el valor al que se aproxima la función, en otras palabras, no consideraron la otra sucesión de números en las imágenes para determinar la aproximación. Es evidente que si un estudiante presenta problemas para evaluar valores del dominio en la función esto le conducirá a conclusiones erróneas. Finalmente, dichos estudiantes no lograron establecer una dependencia entre los valores de las imágenes y del dominio.

Por otro lado, doce estudiantes conjeturan que los valores de $f(x)$ se aproximan a un único valor, por lo que algunos responden que se aproxima a 3, algunos más a -3 y otros a 1. Nuevamente, muchos de los errores cometidos se deben a que evalúan incorrectamente los valores de $x$ en la función o que únicamente consideran una sucesión de valores en algunos de los extremos de $f(x)$. Por ejemplo, los estudiantes E1, E3, E4, E5, E12, E16, E17, E18 y E33 respondieron que $f(x)$ se aproxima a -3, de los cuales, tres estudiantes (E3, E12 y E33) logran evaluar de manera correcta los valores que toma $x$ en el dominio, sin embargo, únicamente consideran la sucesión de valores de las imágenes de derecha a izquierda sin prestarle mayor importancia a los valores que toman las imágenes de izquierda a derecha.

Completa la siguiente tabla para la función $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x<0 \\ -2x-3 & x \geq 0 \end{cases}$

| $x$ | -0.1 | -0.01 | -0.001 | -0.0001 | 0 | 0.0001 | 0.001 | 0.01 | 0.1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0.8 | 0.98 | 0.998 | 0.9998 | -3 | -3.0002 | -3.002 | -3.02 | -3.2 |

¿A qué número se aproximan los valores de la función $f(x)$ ?

-3

*Figura 12.* Ejemplo de la respuesta del estudiante E12.

Además, cuatro estudiantes (E4, E16, E17 y E18) logran evaluar en $f(x)$ adecuadamente los valores particulares en el dominio proporcionado en la tabla, cuando $x \leq 0$, sin embargo, para los valores que toma $x$ mayores a cero no logran tener éxito. No contamos con información suficiente para determinar la manera en que evaluaron estos valores de $x$ en la función, pero consideramos que valoraron $x = 0$ en la condición $-2x - 3$ lo que los lleva a conjeturar que dicha sucesión se aproxima a -3, nuevamente hay evidencias de que no consideraron la sucesión de valores en las imágenes de derecha a izquierda.

Completa la siguiente tabla para la función $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x<0 \\ -2x-3 & x \geq 0 \end{cases}$

| $x$ | -0.1 | -0.01 | -0.001 | -0.0001 | 0 | 0.0001 | 0.001 | 0.01 | 0.1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0.8 | 0.98 | 0.998 | 0.9998 | -3 | 0.0002 | 0.002 | 0.02 | 0.2 |

¿A qué número se aproximan los valores de la función $f(x)$ ?

-3

*Figura 13.* Ejemplo de la respuesta del estudiante E16

De este grupo de cuatro estudiantes, solamente el E4 presenta una sucesión de valores en las imágenes de izquierda a derecha diferentes a sus otros tres compañeros, como se puede notar en los valores que presenta en la tabla:

Completa la siguiente tabla para la función $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x<0 \\ -2x-3 & x \geq 0 \end{cases}$

| $x$ | -0.1 | -0.01 | -0.001 | -0.0001 | 0 | 0.0001 | 0.001 | 0.01 | 0.1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0.8 | 0.98 | 0.998 | 0.1998 | -3 | -2.9998 | -2.998 | -2.98 | -2.8 |

¿A qué número se aproximan los valores de la función $f(x)$ ?

-3

*Figura 14.* Ejemplo de la respuesta del estudiante E4

Como se puede observar, la sucesión de valores en las imágenes que crea a la derecha del cero no corresponde con las imágenes de $x$ mayores o iguales a cero. No se tiene información sobre cómo determinó la aproximación de las imágenes a -3, sin embargo, tampoco considera la sucesión de valores de las imágenes a la izquierda del cero.

Finalmente, los estudiantes E1 y E5 presentaron problemas para evaluar los valores de $x$ en la función, sin embargo, logran responder que los valores de $f(x)$ se aproximan a -3 debido a que consideran la sucesión de valores de las imágenes que construyeron por la izquierda.

Completa la siguiente tabla para la función $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x<0 \\ -2x-3 & x \geq 0 \end{cases}$

| $x$ | -0.1 | -0.01 | -0.001 | -0.0001 | 0 | 0.0001 | 0.001 | 0.01 | 0.1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | -2.8 | -2.98 | -2.99 | 2.999 | -3 | 1.0002 | 1.002 | 1.02 | 1.2 |

¿A qué número se aproximan los valores de la función $f(x)$ ?

2

*Figura 15.* Ejemplo de la respuesta del estudiante E5.

En general este grupo de estudiantes logran determinar que ciertas sucesiones de números en las imágenes se aproximan a un valor fijo ya sea que evaluaron total o parcialmente los valores particulares del dominio en la función o que no tuvieron éxito al evaluar todos los valores del dominio en la función. Sin embargo, todos ellos presentaron indicios de realizar el proceso de aproximación en su mente de manera infinita, no obstante, no hay evidencias de que establezcan una relación de dependencia de los valores del codominio con los del dominio, ya que a lo más logran describir la manera de evaluar ciertos valores del dominio.

Describe el comportamiento de la función $f(x)$ con relación al comportamiento de la variable $x$.

Se sustituye dependiendo si x es menor mayor o igual que o 2x+1 o -2x-3 dependiente al caso si sea mayor o menor

*Figura 16.* Ejemplo de la respuesta del estudiante E1.

Es importante mencionar que el estudiante E2 responde que $f(x)$ se aproxima a 3, sin embargo, evalúa de manera correcta los valores de $x$ en la función, por lo que concluimos que simplemente falla en colocar el signo, ver la figura 17.

Completa la siguiente tabla para la función $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x<0 \\ -2x-3 & x \geq 0 \end{cases}$

| $x$ | -0.1 | -0.01 | -0.001 | -0.0001 | 0 | 0.0001 | 0.001 | 0.01 | 0.1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | .8 | .98 | .998 | .9998 | -3 | -3.0002 | -3.002 | -3.02 | -3.2 |

¿A qué número se aproximan los valores de la función $f(x)$ ?

3

*Figura 17.* Ejemplo de la respuesta del estudiante E2

Como podemos observar, el estudiante solamente determina la aproximación de la función basándose en la aproximación de la sucesión de valores en las imágenes por la derecha, restándole importancia a la sucesión de valores de la función por la izquierda.

Finalmente, solo dos estudiantes comentan que $f(x)$ se aproxima a 1. Por ejemplo, el estudiante E31 evalúa correctamente los valores que toma $x$ en la función, sin embargo, solamente considera la sucesión de valores de las imágenes por la izquierda como una fuerte razón para afirmar que se aproximan a 1, e ignora los que están a la derecha del cero, ver figura 18.

Completa la siguiente tabla para la función $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x<0 \\ -2x-3 & x \geq 0 \end{cases}$

| $x$ | -0.1 | -0.01 | -0.001 | -0.0001 | 0 | 0.0001 | 0.001 | 0.01 | 0.1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0.8 | 0,98 | 0.998 | 0.9998 | 1 | -3.0002 | -3.002 | -3.02 | -3.2 |

¿A qué número se aproximan los valores de la función $f(x)$ ?

1

*Figura 18.* Ejemplo de la respuesta del estudiante E31.

Por otro lado, el estudiante E14 presenta errores al evaluar algunos valores que toma $x$ en la función, pero la sucesión de valores en las imágenes que logra encontrar por la izquierda los considera como una fuerte razón para determinar que la sucesión se aproxima a 1. Por lo anterior, su estrategia coincide con algunos de sus compañeros al no considerar las dos sucesiones de valores en las imágenes. Ver la figura 19:

Completa la siguiente tabla para la función $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x<0 \\ -2x-3 & x \geq 0 \end{cases}$

| $x$ | -0.1 | -0.01 | -0.001 | -0.0001 | 0 | 0.0001 | 0.001 | 0.01 | 0.1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0.8 | 0.95 | 1.002 | 1.0002 | 1 | -3.0002 | -3.002 | -3.02 | -3.2 |

¿A qué número se aproximan los valores de la función $f(x)$ ?

1

*Figura 19*. Ejemplo de la respuesta del estudiante E14.

Por todo lo anterior, podemos decir que este grupo de estudiantes no tiene claro que para determinar la aproximación de la función es necesario que consideren las dos sucesiones de valores de las imágenes tanto por la izquierda como por la derecha, lo que los conduce a afirmar que la función se aproxima a un único valor, además, algunos presentan problemas para evaluar los valores de $x$ llevándoles a resultados erróneos. De este grupo, solamente cinco alumnos evaluaron de manera correcta los valores que toma $x$ en $f(x)$.

Es por ello que decimos que las acciones realizadas por los estudiantes van encaminadas a la construcción de DG3a. Por otro lado, muestran evidencias de a una concepción proceso de las sucesiones de números en el codominio pero solamente por uno de los lados, como una fuerte razón para determinar la aproximación de $f(x)$. Dicha concepción proceso aún no está completa, no han construido la etapa DG3b. Ninguno de los estudiantes muestra evidencias de establecer una relación de dependencia entre $x$ y $f(x)$, por lo que no se muestran indicios de construir la etapa DG3c.

Por último, de los 23 estudiantes que presentaron la actividad, 7 conjeturan que $f(x)$ se aproxima a dos valores, es decir, consideran las dos sucesiones de valores de las imágenes (izquierda y derecha), sin embargo, dos estudiantes (E15 y E9) afirman que $f(x)$ se aproxima a 1 por la derecha y a 3 por la izquierda, ver figura 20.

Completa la siguiente tabla para la función $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x<0 \\ -2x-3 & x \geq 0 \end{cases}$

| $x$ | -0.1 | -0.01 | -0.001 | -0.0001 | 0 | 0.0001 | 0.001 | 0.01 | 0.1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0.8 | 0.98 | 0.998 | 0.9998 | 1 | -3.0002 | -3.002 | -3.02 | -3.2 |

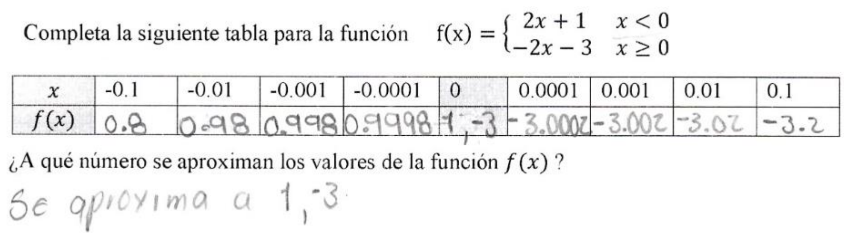
¿A qué número se aproximan los valores de la función $f(x)$ ?

1 y 3

*Figura 20.* Ejemplo de la respuesta del estudiante E25

Como podemos notar, las aproximaciones de los valores de las imágenes, tanto por la izquierda y por la derecha son correctos, por lo que consideramos que su error se encuentra no colocar el signo negativo del 3 en su respuesta.

Los cinco estudiantes restantes (E7, E22, E23, E24, E25) responden correctamente que $f(x)$ se aproxima a 1 por la derecha y a -3 por la izquierda, ver la figura 21.



Completa la siguiente tabla para la función $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x<0 \\ -2x-3 & x \geq 0 \end{cases}$

| $x$ | -0.1 | -0.01 | -0.001 | -0.0001 | 0 | 0.0001 | 0.001 | 0.01 | 0.1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0.8 | 0.98 | 0.998 | 0.9998 | 1,-3 | -3.0002 | -3.002 | -3.02 | -3.2 |

¿A qué número se aproximan los valores de la función $f(x)$ ?

Se aproxima a 1,-3

*Figura 21*. Ejemplo de la respuesta del estudiante E7.

Por todo lo anterior, decimos que las acciones de los siete estudiantes van encaminadas a la construcción de DG3a y DG3b. Además, ninguno de los estudiantes presentó indicios de haber construido el paso DG3c, debido a que no lograron establecer una relación de dependencia entre $x$ y $f(x)$, a lo más realizaron una descripción de la regla de correspondencia. Un ejemplo es la respuesta que presenta el estudiante E7 en la tercera pregunta "para poder obtener los resultados de $f(x)$ se tuvieron que utilizar dos fórmulas diferentes tanto para los menores que 0, como para los que eran mayores a 0".

Es importante señalar que al inicio de la sexta actividad algunos estudiantes se acercaron al profesor para expresar que no sabían cómo realizarla. Por ejemplo, no sabían cómo realizar la indicación del inciso a) Elige un valor para la $x$ y calcula el valor de la función $f(x)$ en ese punto.

Concretamente, no sabían cómo determinar el punto y el valor de su imagen, por lo que el profesor les comentó que una estrategia sería trazar rectas perpendiculares al eje de las abscisas y con base en ello determinar el punto de intersección con la gráfica, posteriormente, trazar una recta perpendicular del punto de intersección al eje de las ordenadas.

Es posible que los estudiantes no hayan trabajado la representación gráfica de diversas funciones, y que dada una tabla de valores unieran puntos para obtener la gráfica, pero no se trabajó que, dada una gráfica, hallaran los valores de las imágenes para ciertos valores de $x$.

La sexta actividad la realizaron 25 alumnos de los 34 que presentaron el cuestionario final, cuatro de ellos no respondieron la actividad (E5, E18, E26 y E27) y uno de ellos (E30) solamente respondió el inciso a), es decir, solamente realiza una acción en el concepto de función, por lo que no brinda mayor información sobre el concepto de límite en su concepción dinámica, por lo anterior, el análisis se centra en las respuestas proporcionadas por 20 estudiantes.

Siete estudiantes presentan problemas para determinar la imagen de $f(x)$ para un valor determinado de $x$, en la representación gráfica. Posterior a la orientación que el profesor presenta al grupo, seis de los estudiantes son capaces de determinar las imágenes para un conjunto de valores particulares de $x$, para ello emplean el trazo de líneas perpendiculares para el eje las abscisas. Ver la siguiente figura.

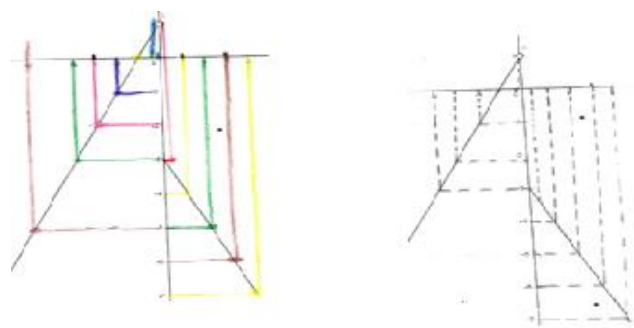


*Figura 22.* Ejemplos de las respuestas de los estudiantes E15 y E33.

De los 20 estudiantes que analizamos sus respuestas, solamente un estudiante (E17) no muestra evidencias que explícitamente haya trazado rectas para localizar las imágenes de la función.

Es importante señalar que cuatro estudiantes (E4, E7, E13, E33) presentan problemas para determinar que para $x = -0.5$, $f(x) = 0$.

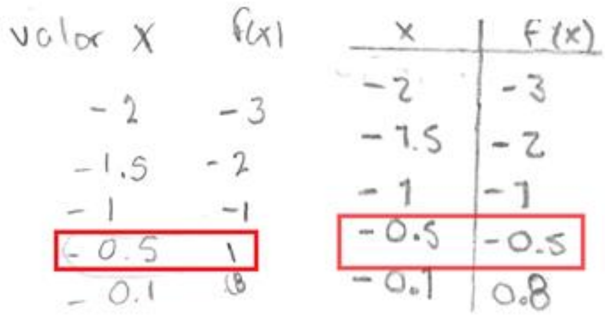



*Figura 23.* Ejemplos de las respuestas de los estudiantes E4 y E7.

Además el 33% de los estudiantes (E9, E12, E13, E15, E16, E17 y E33) presentan errores en la notación de los valores de las imágenes debido a que emplean incorrectamente el signo $(=)$.

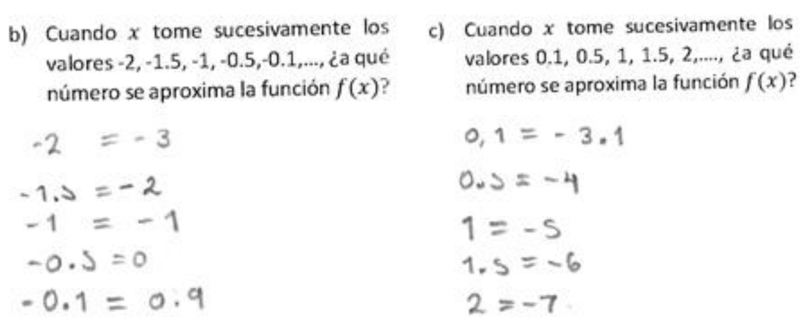



*Figura 24.* Ejemplo de la respuesta del estudiante E12.

Como podemos observar, dichos estudiantes no tienen clara la notación de función, lo que los conduce a establecer igualdades que carecen de sentido.

Es importante señalar la respuesta que presenta el estudiante E17, en la que propone una representación analítica del comportamiento de ciertos valores de $x$ en la gráfica, además, logra localizar las imágenes de la función para ciertos valores del dominio sin que recurra al trazo de líneas en el gráfico. De la propuesta analítica realizada tiene errores en una condición para los valores de $x \geq 0$, finalmente, como lo mencionamos con anterioridad tiene problemas con la notación de función.

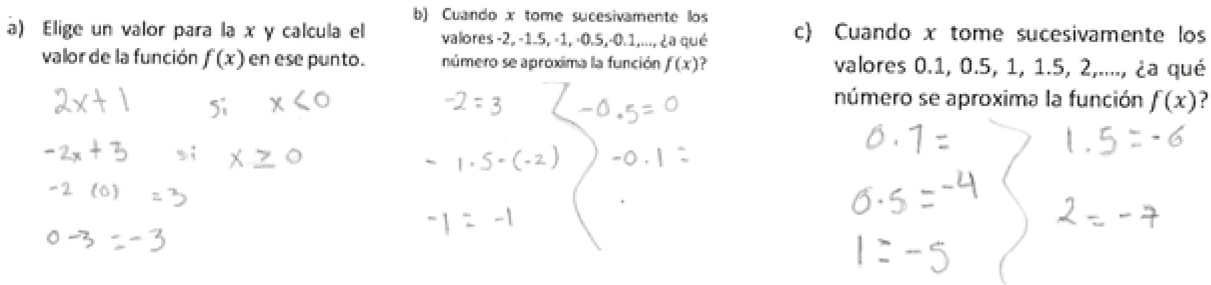



*Figura 25.* Ejemplo de la respuesta del estudiante E17.

A pesar de que el estudiante logra proponer una expresión analítica que describe parcialmente el comportamiento de los valores de $f(x)$ en la gráfica, no logra responder a qué valores se aproximan las sucesiones de números del dominio y del codominio, es decir, no logra realizar este proceso de manera infinita en su mente y tampoco logra establecer un valor de dependencia entre $x$ y $f(x)$. En otras palabras, las acciones que realiza quedan dentro del concepto de función.

A manera de conclusión general podemos decir que la mayoría de los estudiantes presentan diversos problemas cuando trabajan en una representación gráfica de una función, uno de ellos es la dificultad que tienen para hallar el valor aproximado de las imágenes para ciertos valores del dominio de la función, otros presentan problemas para determinar que para algún valor de $x$, $f(x) = 0$, además, algunos más presentan dificultad para asignar el signo (-) a la imagen según corresponda.

Algunos de los estudiantes logran localizar los valores de $f(x)$ para un número finito de valores de $x$, sin embargo, no son capaces de imaginar este proceso infinitamente para seguir hallando los valores de las imágenes y con base a esto determinar a qué cantidad se aproximan las sucesiones de números para el dominio y el codominio. Además de que no logran establecer una relación de dependencia entre los valores de $f(x)$ y $x$.

Por todo lo anterior, podemos decir que los estudiantes muestran haber construido acciones del concepto de función encaminadas a la construcción de la concepción acción del concepto de límite en su concepción dinámica presente en su representación gráfica.

Es importante resaltar que únicamente dos de los estudiantes lograron establecer que los valores de la sucesión de las imágenes se aproximaban a 1 y -3 cuando $x$ se aproxima a 0, uno de ellos es el estudiante E2, el cual responde en el inciso d) "Que por un lado se aproximan a 1 y por el otro a -

3”. Por otro lado, el estudiante E22 responde “cuando la función 0.1 se aproxima al número -3.1 y cuando la función es -0.1 se aproxima al 1, por lo tanto, las diferentes funciones se aproximan a diferente número”. Es importante destacar que la respuesta que proporciona este último estudiante pareciera que las sucesiones de números presentes en las imágenes las está llamando funciones, lo que evidentemente es un error, por lo que muestra evidencias de que no tiene claro el concepto de función. Además, ambos estudiantes no logran establecer una dependencia de los valores de $f(x)$ respecto de $x$.

Por todo lo anterior, podemos decir que estos dos estudiantes muestran indicios de comenzar a construir la etapa DG1, las cuales están en caminadas a desarrollar una concepción proceso de las sucesiones de números en el rango donde $f(x)$ se aproxima a un número.

La séptima actividad la presentaron 31 estudiantes de los 34 que presentaron el cuestionario final, de los cuales solamente un estudiante no respondió (E17). Por lo que nuestro análisis se centra en las respuestas de 30 estudiantes. Cuatro de ellos (E8, E9, E26 y E33) presentan complicaciones para responder la actividad. Dos de estos (E8 y E26) presentan problemas para hallar las imágenes de la función en su representación gráfica, aunque emplean el trazo de las líneas verticales y horizontales. Por ejemplo, el estudiante E26 responde que la función es constante ($f(x) = 3$) sin que proporcione más información para justificar su respuesta y el estudiante E8 presenta problemas con la notación de función, además de presentar algunos problemas para hallar las imágenes de $x$ cuando se aproxima 2 por la izquierda.

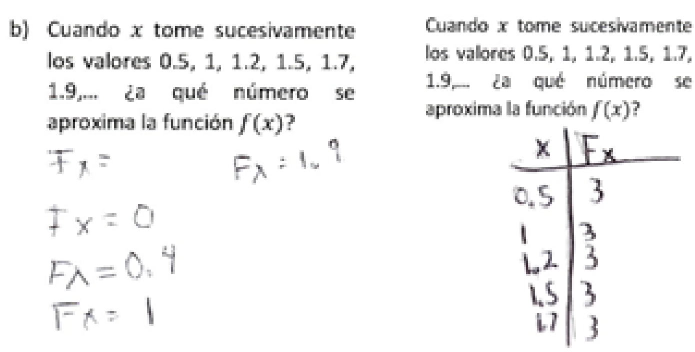



*Figura 26.* Ejemplos de las respuestas de los estudiantes E4 y E7.

Los estudiantes E9 y E33 se limitan únicamente a hallar las imágenes de la función para un número finito de valores de $x$, además, el estudiante E9 presenta problemas en el empleo de la notación de función y solamente se limita hallar valores de $f(x)$, cuando $x$ se aproxima 2 por la izquierda.

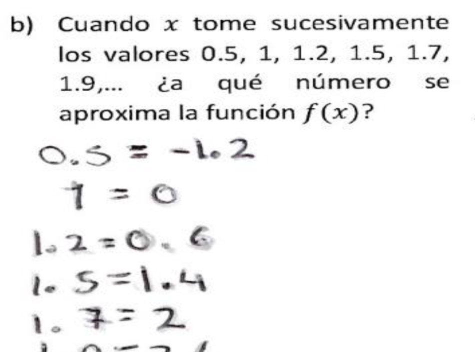



*Figura 27.* Ejemplo de la respuesta del estudiante E9.

Por todo lo anterior, podemos decir que muestran haber construido acciones del concepto de función encaminadas a la construcción de la concepción acción del concepto de límite en su concepción dinámica presente en su representación gráfica.

Dos estudiantes, E15 y E30, presentan problemas con la notación de función, pero a pesar de ello son capaces de hallar los valores de $f(x)$ para un número finito de valores de $x$, lo que les permite identificar que las imágenes se aproximan a ciertos valores. Es importante mencionar que ambos estudiantes presentan problemas para identificar que $f(x) = 0$ para $x = 1$ en la representación gráfica, lo anterior se puede observar en la respuesta del estudiante E15.

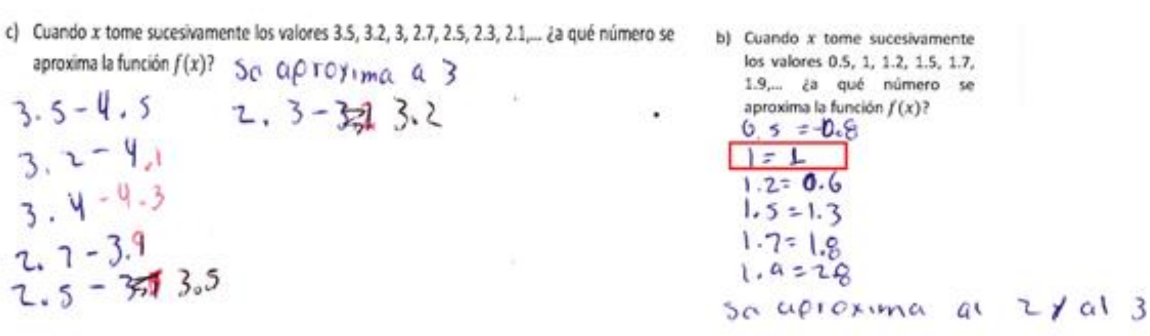



*Figura 28.* Ejemplo de la respuesta del estudiante E15.

Por otro lado, el estudiante E30 presenta problemas para identificar las imágenes de la función. Lo anterior lo conduce a afirmar que la función se aproxima a dos valores diferentes, por la izquierda a 2 y por la derecha al 3.

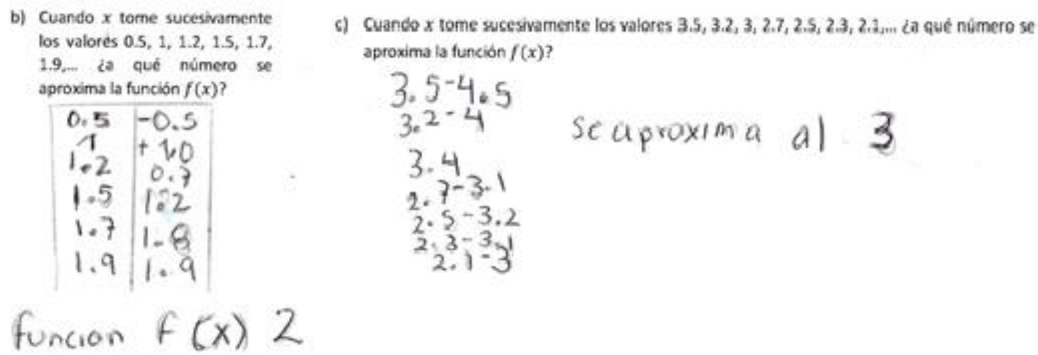



*Figura 29.* Ejemplo de la respuesta del estudiante E30.

Por todo lo anterior, podemos decir que estos dos estudiantes muestran indicios de comenzar a construir la etapa DG3b.

Nueve estudiantes presentan problemas con la notación de función (E5, E10, E13, E18, E19, E20, E21, E27, E28 y E29), debido a que algunos emplean " $=$ " para señalar el valor de $f(x)$ para un valor particular del dominio, solo el estudiante E19 presenta problemas para identificar que $f(x) = 0$ para $x = 1$. De este grupo de estudiantes, cinco de ellos (E10, E13, E19, E28, E20 y E21) solamente se limitan a proporcionar el valor de las imágenes para los valores dados de $x$, pero no son capaces de seguir realizando este proceso en la mente de manera infinita ya que no responden a qué valor o valores se aproxima $f(x)$. Un ejemplo de lo anterior es la respuesta proporcionada por el estudiante E19:

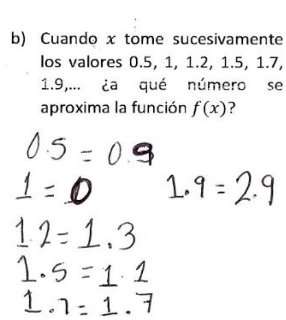



*Figura 30.* Ejemplo de la respuesta del estudiante E15.

Por todo lo anterior, podemos decir que los estudiantes muestran haber construido acciones del concepto de función encaminadas a la construcción de la concepción acción del concepto de límite en su concepción dinámica presente en su representación gráfica

Por otro, lado los estudiantes E5, E18, E27 y E29, aunque presentan problemas con la notación de función, son capaces de proponer que los valores de las imágenes se aproximan a ciertos valores de acuerdo con lo que observan en la sucesión de valores de $f(x)$. Es importante mencionar que el estudiante E29 realiza una lectura de la sucesión de valores de izquierda a derecha para valores de $x > 2$ en el dominio llevándole a afirmar que se aproxima a 4.

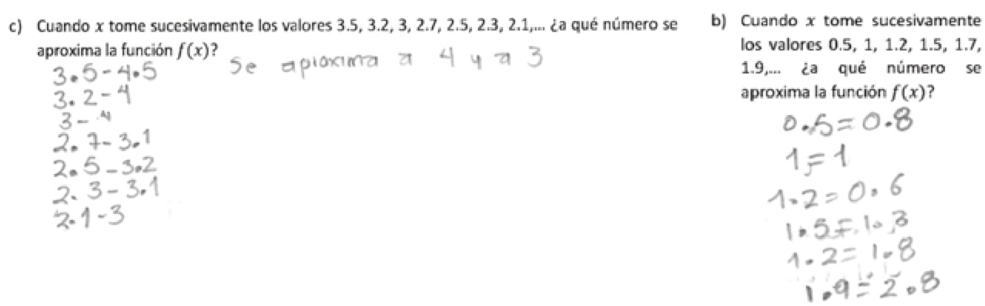



*Figura 31.* Ejemplo de las respuestas de los estudiantes E29 y E27.

Por lo anterior, podemos decir que estos estudiantes muestran indicios de comenzar a construir la etapa DG1, las cuales están encaminadas a desarrollar una concepción proceso de las sucesiones de números en el rango.

Es importante mencionar la respuesta que proporciona el estudiante E3, ya que muestra indicios de establecer una relación de dependencia entre $x$ y $f(x)$, sin que tenga claro quien depende de quién, si $x$ depende de $f(x)$ o $f(x)$ depende de $x$.

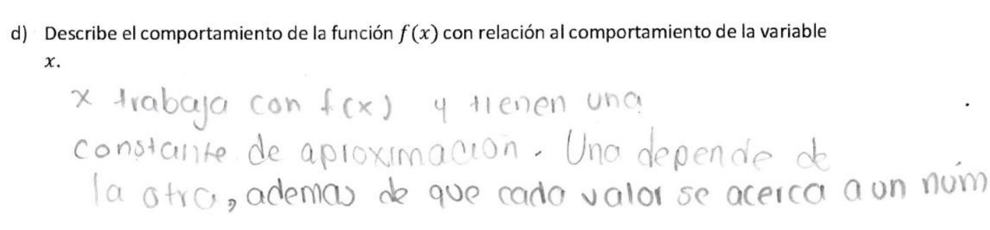



*Figura 32.* Ejemplo de la respuesta del estudiante E3.

Sin embargo, en la notación que emplea para presentar los valores de $f(x)$ respecto de los valores dados en el dominio no es la apropiada, además, no responde a qué cantidad se aproximan los valores de las sucesiones de las imágenes, por lo tanto, podemos decir que el estudiante muestra indicios de comenzar a construir la etapa DG1.

Otros estudiantes (E1, E4, E7, E14, E22, E34 y E31) no presentan problemas al emplear una notación apropiada para mostrar los valores de $f(x)$ respecto a los valores particulares de $x$. Del presente grupo de estudiantes, cinco de ellos (E7, E14, E34 y E31) solamente se limitan a proporcionar el valor de las imágenes para los valores dados de $x$, pero no son capaces de seguir realizando este proceso en la mente de manera infinita, debido a que no responden a qué valor o valores se aproxima $f(x)$, un ejemplo de lo anterior es la siguiente respuesta:

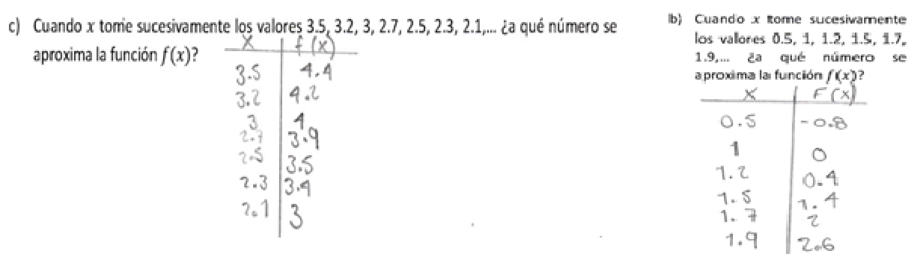



*Figura 33.* Ejemplo de la respuesta E7.

Por otro lado, los estudiantes E4 y E22 presentaron problemas para determinar que $f(x)$=0 cuando $x = 1$, mientras que el estudiante E1 no presentó ese problema, los tres estudiantes intentaron realizar los cálculos de manera infinita de las sucesiones de números en las imágenes para determinar a qué cantidad se aproximaban, pero los dos primeros conjeturan erróneamente que $f(x)$ se aproxima a dos cantidades 3 y 4. Por otro lado, para el dominio mencionan que $x$ se aproxima a 2.

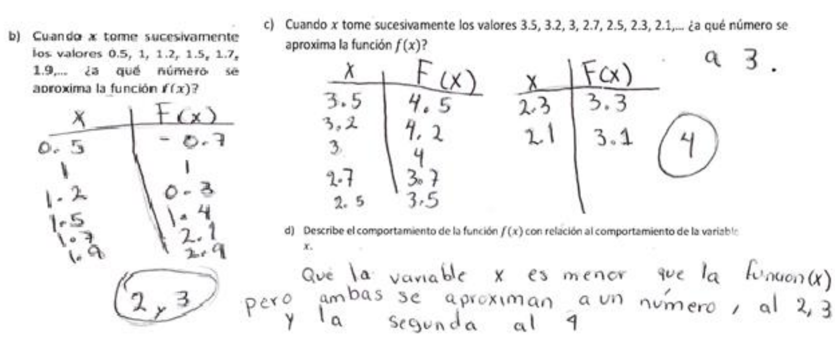



*Figura 34.* Ejemplo de la respuesta E22.

Sin embargo, no hay más información que nos permita justificar por qué afirman que las sucesiones de las imágenes se aproximan a 3 y 4, especialmente en 4. Finalmente, el estudiante E1 concluye que las sucesiones de las imágenes se aproximan a 3, pero presenta problemas para presentar adecuadamente su respuesta.

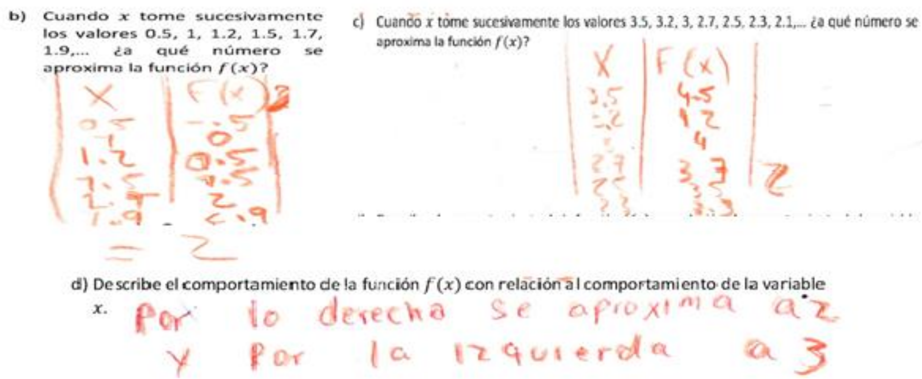



*Figura 35.* Ejemplo de la respuesta del estudiante E1.

Lo anterior nos dice que los estudiantes muestran indicios de comenzar a construir la etapa DG1, las cuales están en caminadas a desarrollar una concepción proceso de las sucesiones de números en el rango.

Finalmente, los estudiantes E12, E16, E23, E24 y E25 presentan mejor desempeño en la actividad que el resto de los estudiantes. Únicamente tres de ellos presentan problemas para determinar que $f(x) = 0$ para $x = 1$. Es decir, tienen problemas para identificar que las imágenes de una función pueden ser cero, ya que responden que $f(1) = 1$, sin embargo, no presentan problemas para hallar el resto de los valores del dominio. Además, aproximan los valores de las imágenes en un proceso infinito lo que los lleva a determinar que $x$ se aproxima a 2 y que $f(x)$ se aproxima a 3. Es importante mencionar que solamente dos estudiantes E12 y E16 presentan problemas con la notación de función, como lo muestra la siguiente imagen:

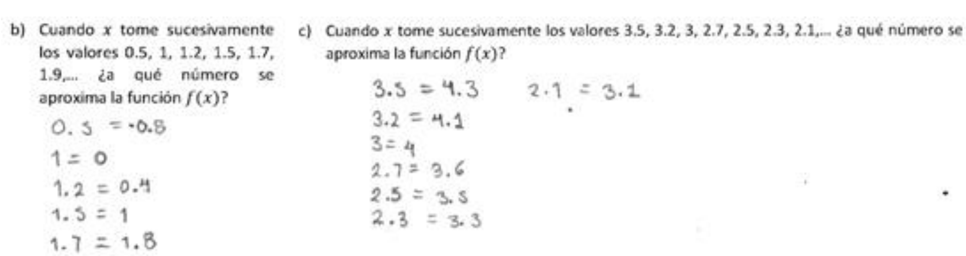
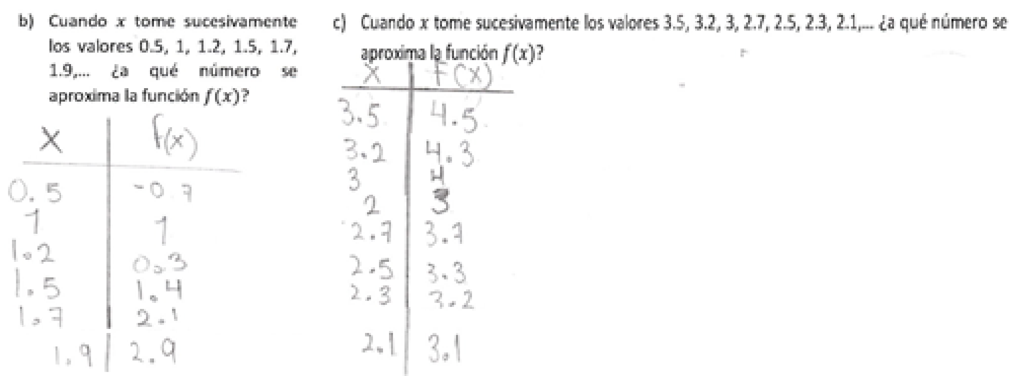



*Figura 36.* Respuesta del estudiante E12.

Como podemos notar, emplea el signo igual erróneamente, sin embargo, logra observar de manera acertada las aproximaciones en el dominio y en el codominio, lo anterior se pone en evidencia cuando describe el comportamiento de la función $f(x)$ con relación al comportamiento de la variable $x$, ya que responde: “En que los 2 se aproximan a un número igual al 2 pero en $x$ se aproxima al 2 y $f(x)$ al 3”.

Un razonamiento similar presenta el estudiante E24, solo que emplea una mejor notación de función para presentar sus resultados como podemos observar:



b) Cuando $x$ tome sucesivamente los valores 0.5, 1, 1.2, 1.5, 1.7, 1.9,... ¿a qué número se aproxima la función $f(x)$?

| X | f(x) |
|---|---|
| 0.5 | -0.7 |
| 1 | 1 |
| 1.2 | 0.3 |
| 1.5 | 1.4 |
| 1.7 | 2.1 |
| 1.9 | 2.9 |

c) Cuando $x$ tome sucesivamente los valores 3.5, 3.2, 3, 2.7, 2.5, 2.3, 2.1,... ¿a qué número se aproxima la función $f(x)$?

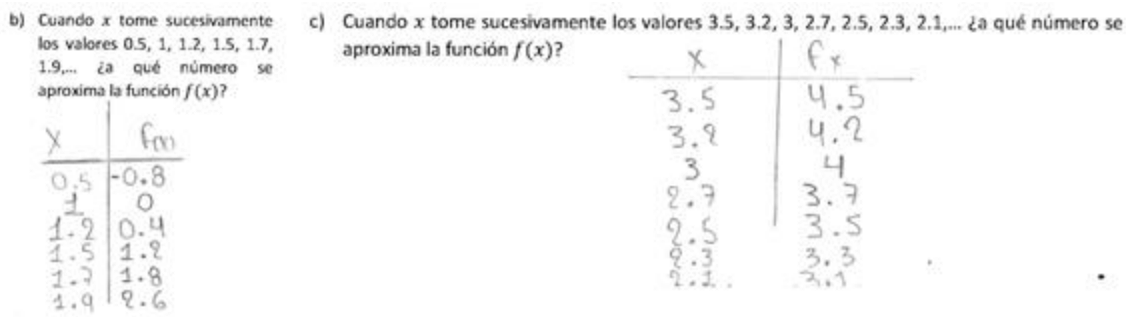
| X | f(x) |
|---|---|
| 3.5 | 4.5 |
| 3.2 | 4.3 |
| 3 | 4 |
| 2 | 3 |
| 2.7 | 3.7 |
| 2.5 | 3.3 |
| 2.3 | 3.2 |
| 2.1 | 3.1 |

*Figura 37.* Ejemplo de la respuesta del estudiante E24.

Cuando se le pide que describa el comportamiento de la función $f(x)$ con relación al comportamiento de la variable $x$ responde: “La variable $x$ se aproxima al 2 y la función $f(x)$ se aproxima a 3”.

Por lo anterior, podemos decir que los dos estudiantes muestran indicios de comenzar a construir los pasos DG3a y DG3b.

Solamente un estudiante (E2) presenta indicios de construir un esquema coordinado, debido a que muestra evidencias de poseer una concepción proceso del concepto de límite en su concepción dinámica, lo anterior debido a que en la última pregunta responde lo siguiente: “En los valores; mientras que $x$ se aproxima al 2, $f_x$ se aproxima al 3”. Es decir, logra establecer una dependencia de $f(x)$ respecto a $x$, más aún, muestra un avance en la notación de sus resultados.



b) Cuando $x$ tome sucesivamente los valores 0.5, 1, 1.2, 1.5, 1.7, 1.9,... ¿a qué número se aproxima la función $f(x)$?

| x | f(x) |
|---|---|
| 0.5 | -0.8 |
| 1 | 0 |
| 1.2 | 0.4 |
| 1.5 | 1.2 |
| 1.7 | 1.8 |
| 1.9 | 2.6 |

c) Cuando $x$ tome sucesivamente los valores 3.5, 3.2, 3, 2.7, 2.5, 2.3, 2.1,... ¿a qué número se aproxima la función $f(x)$?

| x | fx |
|---|---|
| 3.5 | 4.5 |
| 3.2 | 4.2 |
| 3 | 4 |
| 2.7 | 3.7 |
| 2.5 | 3.5 |
| 2.3 | 3.3 |
| 2.1 | 3.1 |

*Figura 38.* Respuesta del estudiante E2.

En conclusión, un estudiante muestra indicios de haber construido la etapa DG3c, el resto de los estudiantes presentan problemas para establecer un proceso de aproximación de las sucesiones de valores en las imágenes lo que los lleva únicamente a hallar las imágenes para ciertos valores de $x$, algunos más intentan este proceso infinito, sin embargo, solamente realizan afirmaciones en las que $f(x)$ se aproxima a dos valores.

Por otro lado, algunos de los estudiantes presentan problemas con la notación de función, debido a que no presentan de manera adecuada sus resultados, algunos incluso emplean mal el signo igual, por lo que afirmamos que la gran mayoría muestran indicios de comenzar a construir la etapa DG1, las cuales están encaminadas a desarrollar una concepción proceso de las sucesiones de números en el rango en el cual $f(x)$ se aproxima a ciertos valores.

La octava actividad la presentaron 31 estudiantes de los 34 que presentaron el cuestionario final, de los cuales tres estudiantes (E4, E8 y E29) no respondieron la actividad. Por lo anterior, nuestro análisis se centra en las respuestas de 28 de ellos.

De los 28 estudiantes, dos de ellos presentaron problemas para hallar las imágenes de la función debido a que consideran que $f(x)$ toma diferentes valores e incluso siguen presentando problemas con la notación de función ya que siguen implementado el signo igual para presentar que cierto valor de $x$ le corresponde un valor $f(x)$. Únicamente el estudiante E27 intenta responder a qué valores se aproximan las sucesiones de números, pero solamente se centra en el dominio como se puede observar en la siguiente figura.

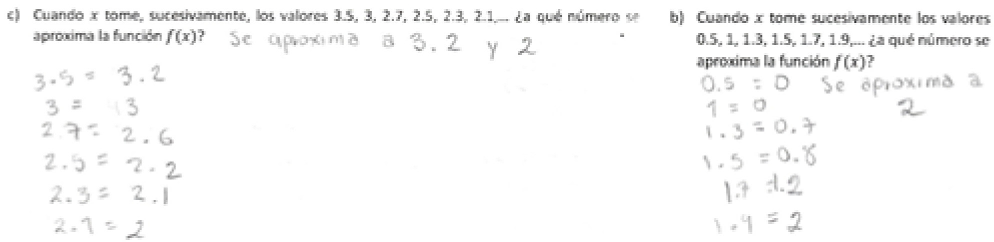



*Figura 39.* Ejemplo de la respuesta del estudiante E27

No obstante, no hay información suficiente para conocer por qué los estudiantes están considerando que las imágenes toman diferentes valores.

Por otro lado, trece estudiantes presentaron problemas con la notación de función, es decir, no presentaron de manera correcta los valores que toman las imágenes para determinado valor de $x$. Cinco de ellos (E9, E17, E15, E28 y E33) únicamente se limitaron a hallar las imágenes de los valores particulares en el dominio, pero no fueron capaces de realizar mentalmente este proceso de manera infinita, lo anterior debido a que no responden a qué valor se aproximan las imágenes, como se puede observar en la siguiente figura.

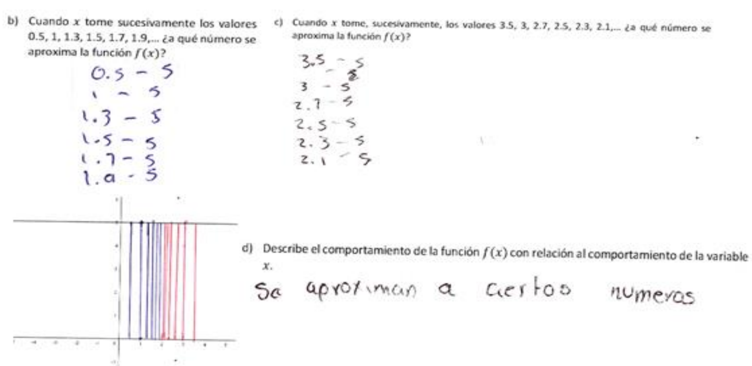



*Figura 40.* Ejemplo de la respuesta del estudiante E15.

Por lo anterior, podemos decir que los estudiantes muestran haber construido acciones del concepto de función encaminadas a la construcción de la concepción acción del concepto de límite en su concepción dinámica presente en su representación gráfica.

El resto de los ocho estudiantes logran proponer a qué número se aproximan las imágenes, algunos de ellos como E10, E18, E19 y E20. Por las respuestas que presentan muestran indicios de conjeturar que las imágenes siempre se aproximan a 5, sin embargo, este hecho aún es muy ambiguo debido a que no tienen claro quién es el dominio y el rango, lo anterior se aprecia en las respuestas que presentan los estudiantes E10 y E18, ya que en el inciso b, respectivamente responden: “La variable $x$ siempre se aproxima a 5”, “Todos los números te manda al 5”. Algunos otros (E13 y E30) proporcionan una respuesta que se podría interpretar que tanto la sucesión de valores del dominio y el codominio se aproximan a un mismo valor, esto por la manera en que responden: “Que se aproximan al mismo número”, “Que ambas se aproximan al mismo número”.

Finalmente, dos estudiantes proporcionan respuestas un poco más claras, debido a que especifican qué variables están considerando. Por ejemplo, el estudiante E16 responde “Los números se aproximan a un solo valor que es dos” es evidente que solo está observando la sucesión de números en el dominio. Por otro lado, el estudiante E12, responde que “comparten el mismo número de aproximación en la que $x$ es el número 2, mientras que en la $f(x)$ no cambia” es evidente que está considerando las dos sucesiones de valores tanto en el dominio y el codominio.

Por lo anterior, decimos que estos dos estudiantes muestran indicios de comenzar a construir la etapa DG1, las cuales están encaminadas a desarrollar la etapa DG3b donde $f(x)$ se aproxima a un número.

De los 28 que respondieron la prueba, 13 estudiantes (E2, E24, E25, E23, E7, E14, E34, E31,E26,E21, E1, E3 y E28) no presentan problemas con la notación de función, es decir, presentan sus respuestas de una manera apropiada, más aún, no tienen dificultad para hallar los valores de las imágenes, lo que les permite llegar a observar que las imágenes de la función siempre serán una constante (incluso algunos de ellos mencionan que es 5), y que los valores que cambian o varían son los del dominio, pero solo tres de ellos consideran que la sucesión de valores en el dominio se aproxima a 2, el resto de ellos solo centran su atención en la sucesión de valores del rango.

De estos estudiantes que solo centran su atención en la sucesión de valores en el dominio podemos decir que las acciones que realizaron van encaminadas a la construcción del paso DG3a.

Finalmente, del grupo de los trece estudiantes, solamente tres de ellos presentaron un mejor desempeño en la actividad, ya que a diferencia de algunos de sus compañeros también centraron su atención en la sucesión de valores en el dominio, es decir, observan que $x$ se aproxima a 2 y que $f(x)$ es constante, como se puede observar en la siguiente respuesta.

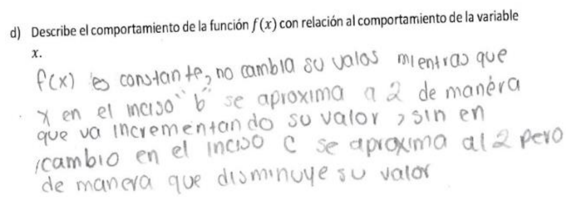



*Figura 41.* Ejemplo de la respuesta del estudiante E3.

Sin embargo, no muestran evidencias de establecer una dependencia entre $x$ y $f(x)$, por lo anterior decimos que las acciones de tres estudiantes van encaminadas a la construcción del paso DG3a y DG3b.

La novena actividad la realizaron 24 estudiantes de los 34 que presentaron el cuestionario final, de los cuales dos (E5, E18) no realizan la actividad. Por lo anterior el análisis se centra en las respuestas de 22 de ellos.

De los estudiantes que responden la actividad, siete de ellos (E2, E15, E21, E29, E3, E9 y E33) encuentran las imágenes para ciertos valores del dominio, pero no para los valores. Uno de ellos presenta problemas para identificar ciertos valores de las imágenes, esto posiblemente se debe a que no realiza un trazo adecuado de las rectas horizontales y verticales para apoyarse.

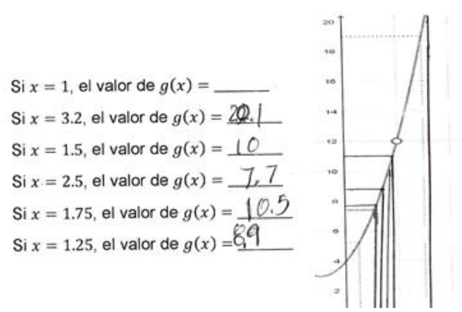



*Figura 42.* Respuesta del estudiante E33.

El resto de los 6 estudiantes presentan mejor desempeño en localizar las imágenes de la función en su representación gráfica, algunos de ellos siguen apoyándose con el trazo de rectas horizontales y verticales como se puede observar en la siguiente imagen.

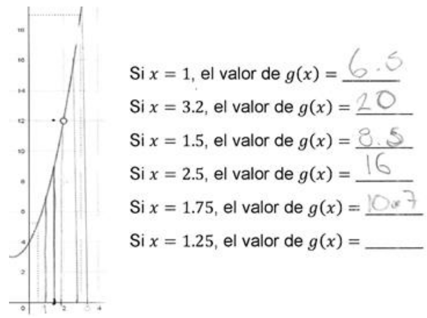



*Figura 43.* Respuesta del estudiante E9.

Finalmente, consideramos que la curva que presenta en la actividad crece muy rápido, es decir, sus pendientes cada vez más son verticales, posiblemente podría ser un motivo que lleve a los estudiantes a establecer las imágenes de la función de manera equivocada. Esto se refleja en que no hay una mejor aproximación de los valores en las imágenes como se puede observar en la siguiente imagen.

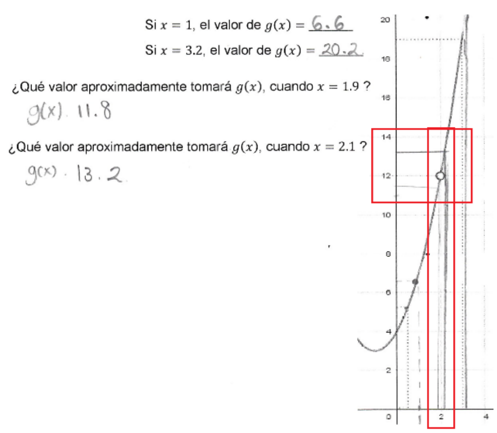



*Figura 44.* Respuesta del estudiante E3.

Por todo lo anterior podemos decir que los estudiantes muestran evidencias de haber construido acciones del concepto de función encaminadas a la construcción de la concepción acción del concepto de límite en su concepción dinámica presente en su representación gráfica.

Por último, quince estudiantes intentan hallar todas las imágenes de los valores dados en el dominio, de los cuales un estudiante (E10) presenta problemas para hallar ciertos valores de las imágenes, es decir, está muy lejos de ser una buena aproximación de las imágenes. Por otro lado, diez estudiantes (E14, E30, E19, E1, E17, E13, E16, E27, E31 y E34) presentan errores al proporcionar las imágenes para los valores dados en el dominio, sin embargo, presentan una mejor aproximación, como se puede observar en la siguiente imagen.

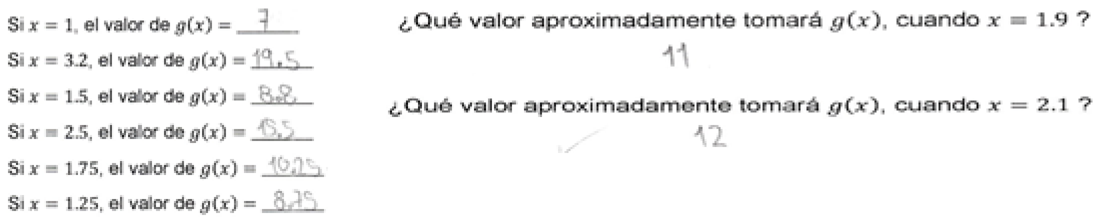



*Figura 45.* Respuesta del estudiante E34.

Finalmente, cuatro estudiantes (E7, E12, E20 y E29) presentan una mejor aproximación en los valores de las imágenes, como se puede observar en la siguiente respuesta.

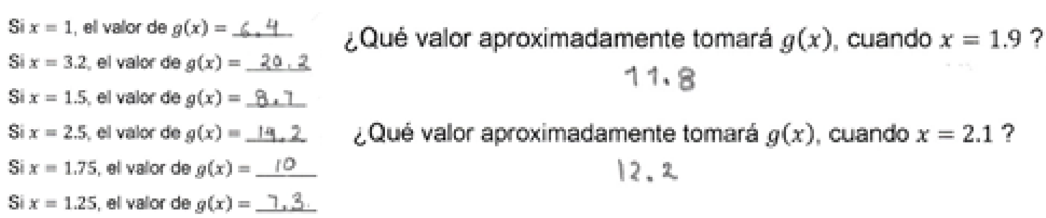



*Figura 46.* Respuesta del estudiante E12.

Por todo lo anterior podemos decir que estos dos estudiantes muestran indicios de comenzar a construir la etapa DG1 en la representación gráfica.

En conclusión, respecto a la actividad 9, la mayoría de los estudiantes siguen empleando el trazo de líneas verticales y horizontales como una estrategia para hallar las imágenes de los valores en el dominio, algunos de ellos presentan una mejor aproximación de dichas imágenes, otros más presentan un mejor margen de aproximación pero no adecuado y unos pocos presentaron respuestas con mayor desfase. Por lo que consideramos que las respuestas de algunos estudiantes se encuentran influenciados por la curva que presenta la función, debido a que crece muy rápido. Es por ello que si el trazo de la línea de apoyo no es lo suficientemente delgada los valores serán desfasados.

## 4.2 Actividades relacionadas con la concepción métrica

En esta sección presentamos el análisis de las respuestas de los estudiantes de las actividades 10, 11 y 12. Las cuales fueron diseñadas para desarrollar la concepción métrica en los estudiantes.

Es importante mencionar que antes de que los estudiantes resolvieran la décima actividad se les había presentado la definición de límite mediante las aproximaciones laterales. Sin embargo, es importante recalcar que el propósito de esta actividad fue desarrollar la concepción métrica del límite propuesto por Pons (2014) en los estudiantes.

En esta actividad los estudiantes presentaron varias dificultades para responder, por ejemplo, una de ellas fue que no comprendían la primera pregunta, esto debido posiblemente a que no lograron establecer la condición $|f(x) - 3| < 0.004$.

Se detectó que algunos presentaron problemas para comparar cantidades con decimales, por ejemplo, algunos de ellos no podían determinar quién era mayor 0.001 o 0.004, por lo que el profesor sugirió que construyeran una recta y ubicaran los puntos en ellas, esto les permitió que algunos de ellos lograran identificar el menor y el mayor.

La décima actividad la presentaron 27 estudiantes de los 34 que presentaron el cuestionario final, de los cuales dos (E19, E27) de ellos no responden las preguntas, sin embargo, en las tablas intentan establecer a qué valores se aproximan las sucesiones de valores en las cuatro columnas, uno de ellos, observa que la sucesión de valores en el dominio se aproxima a 2, las imágenes a 3, las distancias en valor absoluto de los valores de $x$ a 2 se aproxima a cero, lo mismo que las diferencias en valor absoluto de $f(x)$ al 3. Es importante mencionar que uno de los dos responde conforme algún patrón encontrado, en las sucesiones de valores como se puede observar en la siguiente imagen.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1.999 | 2.9960 | 0.001 | 0.004 |
| 1.9999 | 2.99960 | 0.0001 | 0.0004 |
| 2..0000 | 2..9990 | 0.0001 | 0.0009 |
| 2.0001 | 3.0001 | 0.0001 | 0.0001 |
| 2.001 | 3.001 | 0.001 | 0.001 |

*Figura 47.* Respuesta del estudiante E19.

Cinco estudiantes (E14, E7, E28, E30, E10) no presentan evidencias de haber comprendido las dos preguntas, ya que sus respuestas carecen de sentido, solo dos de ellos muestran evidencias de establecer alguna relación de las actividades anteriores con la sucesión de valores que se presentan en las cuatro columnas de valores proporcionados ya que escriben en la tabla valores a los que consideran que se aproximan, por ejemplo, el estudiante E14, considera que la sucesión de valores en el dominio se aproxima a 2, las imágenes a 3, las distancias en valor absoluto de los valores de $x$ a 2 se aproxima a 0.2 y que la sucesión de valores de las diferencias en valor absoluto de $f(x)$ al 3 se aproxima a 0.3, sin embargo, con esta información de las sucesiones de valores del dominio y el codominio no lo consideraron suficiente para determinar el límite.

Por lo anterior podemos decir que estos estudiantes muestran haber construido acciones del concepto de función encaminadas a la construcción de la concepción acción del concepto de límite en su concepción dinámica presente en su representación algebraico-numérica.

Por otro lado, cinco estudiantes (E8, E9, E15, E33 y E34) no responden quien es el límite, sin embargo, realizan un intento por responder la primera pregunta considerando la orientación del profesor, muestran indicios de haber comprendido parcialmente la pregunta, ya que se pueden leer respuestas como "que $x - 2$ se aproxima a 0.0001 para que se cumpla el valor de $f(x) - 3$" un estudiante más presenta una respuesta directa, ya que solamente escribe "0.0001", sin embargo, escribe en la tabla que la sucesión de valores en el dominio se aproxima a 2, las imágenes a 3, las distancias en valor absoluto de los valores de $x$ a 2 se aproxima a cero, lo mismo que las diferencias en valor absoluto de $f(x)$ al 3 pero esta información no la considera suficiente para determinar el límite.

Por todo lo anterior, decimos que las acciones de los cinco estudiantes van encaminadas a desarrollar el paso DG5.

Es importante mencionar la respuesta que presenta el estudiante E26 debido a que a la primera pregunta responde que "0.0001", sin embargo, en la segunda pregunta responde que "No hay límite" sin que proporcione más argumentos para su respuesta, solamente se limita a presentar la siguiente expresión: $|x - 2| = 0.001$ $|f(x) - 3| < 0.004$, consideramos que muestra indicios de haber comprendido parcialmente la pregunta 1, pero no asocia de qué manera esta información le permite determinar el límite, más aún no es capaz de considerar la sucesión de valores de las imágenes y del dominio para determinar la existencia del límite.

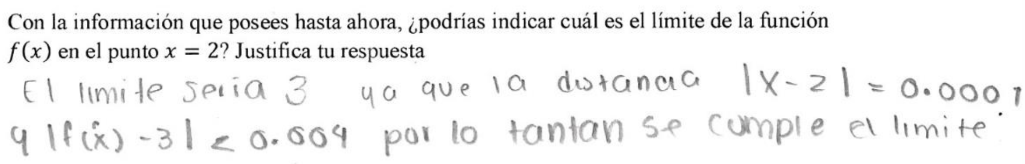
Dos estudiantes (E20 y E31) centran su atención en la sucesión de valores en una aproximación lateral ya que responden que "$f(x) = 2.9960$ es una aproximación $(x) = 1.999$ en el número que sigue" es decir, considera que cuando $x$ se aproxima a una cantidad por la derecha $f(x)$ se aproxima a otra. Sin embargo, no son capaces de determinar quién sería el límite de la función, es importante resaltar que en la sucesión de valores presentes en la tabla detectan algún patrón en la sucesión debido a que consideran que la sucesión de valores en el dominio se aproxima a 1.9999, las imágenes a 2.9960, las distancias en valor absoluto de los valores de $x$ a 2 se aproxima a 0.001 y que la sucesión de valores de las diferencias en valor absoluto de $f(x)$ al 3 se aproxima a 0.004, en otras palabras, solo considera la sucesión de valores por la derecha.

Podemos decir que estos estudiantes muestran haber realizado acciones encaminadas a desarrollar el paso DG5, presente en su representación algebraica-numérica.

Además, doce estudiantes (E13, E12, E4, E17, E5, E16, E18, E22, E25, E1, E23 y E24) responden las dos preguntas, donde la respuesta a la primera pregunta consideran que la diferencia en valor absoluto de $x - 2$ debe ser 0.0001 para que $|f(x) - 3| < 0.004$, sin embargo, este hecho no lo asocian con el límite, debido a que responden que el límite es 3, aunque lo hacen considerando las sucesiones de valores en los laterales de las imágenes. Esto se refuerza con lo que algunos estudiantes responden: "El límite seria 3 porque de los laterales se están aproximando a un número que es el 3", "El límite seria 3 ya que en la tabla se están aproximando al 3", "El límite sería 3", "El límite sería 3 ya que en la tabla se muestra su aproximación". Por todo lo anterior podemos decir que las acciones realizadas por los estudiantes van encaminadas a desarrollar una concepción métrica en términos de desigualdades, en nuestra descomposición genética marcada en el paso 5 de la noción métrica del concepto límite de una función

Solo dos (E23 y E24) de los doce estudiantes presentan evidencias de haber construido una concepción proceso del límite ya que logran coordinar dos concepciones proceso de las sucesiones numéricas (la del dominio, con la del codominio) como se muestra en las respuestas que presentan: "el 3 por que la variable $x$ se aproxima al 2 mientras que la función $f(x)$ al 3", "el 3 por que la variable $x$ se aproxima al 2"

Por otro lado, solo un estudiante (E3) muestra indicios de establecer una relación de la respuesta a la primera pregunta con el límite, pero no considera las aproximaciones laterales. Como se puede observar en la siguiente imagen.


Con la información que posees hasta ahora, ¿podrías indicar cuál es el límite de la función $f(x)$ en el punto $x = 2$? Justifica tu respuesta

El limite seria 3 ya que la distanaia $|x-2| = 0.0001$ y $|f(x)-3| < 0.009$ por lo tantan se cumple el limite.

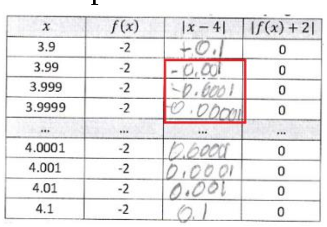
*Figura 48.* Respuesta del estudiante E3.

Podemos concluir que el estudiante muestra haber construido acciones del concepto de función encaminadas a la construcción de la concepción acción del concepto de límite en su concepción métrica.

Finalmente el resto de los estudiantes no realizan acciones dentro de la concepción métrica, pero si dentro de la concepción dinámica.

Por otro lado, los estudiantes presentan mayor dificultad para resolverla la actividad once, esto se puede notar debido a que hay una menor participación en la solución de la actividad, dentro de las dificultades que se encontraron fue que varios de ellos no estaban familiarizados con el valor absoluto, dificultad para comprender la tercera pregunta de la actividad y dificultad para comparar cantidades decimales. Otros, sin embargo, presentan errores en sus cálculos para hallar las distancias.

La actividad once la realizaron 28 estudiantes de los 34 que presentaron el cuestionario final, de los cuales once (E17, E16, E26, E8, E9, E15, E28, E30, E27, E31 y E33) de ellos no responden las preguntas, no obstante, solo dos (E31 y E33) intentan calcular las distancias entre $x$ y 4, aunque presentan errores en sus cálculos, como se puede observar en la siguiente imagen.



| $x$ | $f(x)$ | $\|x-4\|$ | $\|f(x)+2\|$ |
|---|---|---|---|
| 3.9 | -2 | +0.1 | 0 |
| 3.99 | -2 | -0.001 | 0 |
| 3.999 | -2 | -0.0001 | 0 |
| 3.9999 | -2 | -0.00001 | 0 |
| ... | ... | ... | ... |
| 4.0001 | -2 | 0.0001 | 0 |
| 4.001 | -2 | 0,0001 | 0 |
| 4.01 | -2 | 0.001 | 0 |
| 4.1 | -2 | 0.1 | 0 |

*Figura 49.* Respuesta del estudiante E33.

Como podemos observar no tienen claro el concepto de valor absoluto, lo anterior debido a que en algunos de sus cálculos aparecen distancias negativas.

Dos estudiantes (E10 y E20) presentan respuestas que carecen de sentido, mostrando evidencia de no haber comprendido la pregunta, más aún, presentan errores al calcular las distancias cuando $x$ se aproxima a 4. Además, dos estudiantes (E7 y E14) presentan evidencia de tener poca claridad sobre el concepto de valor absoluto debido a que nuevamente algunas de las distancias son negativas, no obstante, son capaces de notar que las distancias de $x$ a 4 disminuyen cada vez más, además de que la distancia de $f(x)$ a -2 siempre es constante, pero, con todo lo anterior no son capaces de deducir si la sucesión de valores se aproxima a un valor particular.

Los estudiantes E19 y E34 responden en la primera pregunta que las distancias $x$ a 4 van disminuyendo sin que determinen alguna aproximación particular, en cuanto a la segunda pregunta solo responden que las distancias de $f(x)$ a -2 son constantes, lo anterior se pone de manifiesto en sus respuestas: "se mantiene el valor" esto les permite responder que el límite de la función es -2. Consideramos que para determinar el límite emplean las aproximaciones laterales, pero no logran establecer una relación entre la sucesión de valores de las distancias tanto de $x$ a 4 como de $f(x)$ a -2 con el límite de la función.

Por otro lado, dos estudiantes (E5 y E18) responden que el límite de la función es cero, sin embargo, no proporcionan más información del por qué consideraron dicha respuesta. Posiblemente contemplaron la distancia $|f(x) - 2|$ como la sucesión de valores de $f(x)$, lo que los llevaría a dicha respuesta. Ambos presentan de manera única una respuesta adecuada para la segunda pregunta donde describen que $|f(x) - 2| = 0$, sin embargo, para el resto de las preguntas de la actividad presentan problemas para responder, e incluso anexan valores que no se encuentran establecidos en la tabla. Un ejemplo de lo anterior es la respuesta que proporcionan a la primera pregunta "se realiza una ecuación con la fórmula e indica que se hace una resta y 4-4=0 (cero)" sin que haya más evidencia del por qué resta 4, no obstante, los valores que calcularon en la tabla no se justifican con esta operación. Nuevamente se presentan problemas con el concepto de valor absoluto debido a que presentan distancias negativas como se puede observar en la siguiente imagen.

| $x$ | $f(x)$ | $\lvert x-4 \rvert$ | $\lvert f(x)+2 \rvert$ |
|---|---|---|---|
| 3.9 | -2 | -0.1 | 0 |
| 3.99 | -2 | -0.01 | 0 |
| 3.999 | -2 | -0.001 | 0 |
| 3.9999 | -2 | -0.0001 | 0 |
| 4 | -2 | 1 | 0 |
| 4.0001 | -2 | 0.0001 | 0 |
| 4.001 | -2 | 0.001 | 0 |
| 4.01 | -2 | 0.01 | 0 |
| 4.1 | -2 | 0.1 | 0 |

*Figura 50.* Cálculos realizados por el estudiante E5 y presentados en la tabla.

Por otro lado, cuatro estudiantes (E22, E23, E24 y E25) determinan que el límite de la función es 5, sin que proporcionen mayor información del porqué de su respuesta. En cuanto a la primera pregunta responden que $|x-4|$ se aproxima a 1, debido a que erróneamente deducen que la sucesión de valores en las distancias se aproximan a 1.

Lo anterior muestra evidencias de problemas para comparar cantidades decimales, más aún, siguen presentándose problemas sobre el concepto de valor absoluto debido a que se siguen presentando distancias negativas.

Por otro lado, la respuesta que proporcionan en la segunda pregunta muestra evidencia de haber notado que la distancia en valor absoluto de $f(x)$ a -2 siempre será constante, en este caso cero, lo anterior se refuerza con las respuestas que proporcionan algunos estudiantes. Por ejemplo, el estudiante E23 responde: "las distancias $|f(x)+2|$ siguen constantes no cambia", o la respuesta del estudiante E25 "$|f(x)+2|$ no cambia". En cuanto a la tercera pregunta pudieron elegir cualquier distancia debido a que siempre sucederá que $|f(x)+2| < 0.0001$ para cualquier valor que tome $x$ en el dominio, sin embargo, se limitaron a contemplar una aproximación de 0.001, pero no hay evidencia contundente de que exista verdadera comprensión de la situación.

Dos estudiantes (E12 y E13) determinan que el límite de la función planteada es -2, incluso a la tercera pregunta pudieron elegir cualquier distancia debido a que siempre sucederá que $|f(x)+2| < 0.0001$ para cualquier valor que tome $x$ en el dominio. En cuanto a la segunda pregunta responden que la sucesión de valores de $|f(x)+2|$ no cambia, sin embargo, presentan una conjetura errónea como respuesta en la primera pregunta: "cuando la variable de $x$ se va aproximando a $|x-4|$ va aumentando" es decir, las distancias aumentan conforme $x$ se aproxima a 4, lo anterior puede estar influenciado en los valores que localizaron en la tabla, además de que presentan errores de cálculo, como se muestra en la siguiente imagen.

| $x$ | $f(x)$ | $\lvert x-4\rvert$ | $\lvert f(x)+2\rvert$ |
|---|---|---|---|
| 3.9 | -2 | +0.1 | 0 |
| 3.99 | -2 | 0.01 | 0 |
| 3.999 | -2 | 1 | 0 |
| 3.9999 | -2 | 1 | 0 |
| 4 | −2 | 0 | 0 |
| 4.0001 | -2 | 1 | 0 |
| 4.001 | -2 | 1 | 0 |
| 4.01 | -2 | 0.01 | 0 |
| 4.1 | -2 | 0.1 | 0 |

*Figura 51.* Respuesta del estudiante E13

Es importante destacar algunas de las respuestas que se hicieron presentes, por ejemplo, el estudiante E4 no responde las primeras tres preguntas, únicamente responde que el límite de la función es -2, por lo que consideramos que centra su atención en la sucesión de valores en las imágenes, al notar que los valores son constantes lo lleva a deducir el límite mediante aproximaciones laterales, además no presenta errores en los cálculos al hallar las distancias cuando $x$ se aproxima a 4.

Por otro lado, el estudiante E1 acertadamente responde que el límite de la función es – 2, más aún, responde que las distancias en valor absoluto de $f(x)$ a 2 es siempre constante, no presenta respuesta a la tercera pregunta y en relación a la primera pregunta responde que no tiene límite, lo anterior contradice su respuesta en la cuarta pregunta, ya que escribe: “no tiene límite porque tanto por la derecha y por la izquierda se aproximan a diferentes números”, en otras palabras, está asociando la sucesión de valores de las distancias en valor absoluto cuando $x$ se aproxima a 4. Sin embargo, su conjetura es errónea debido a que presenta errores en sus cálculos de las distancias, lo anterior se puede notar en la siguiente imagen.

| $x$ | $f(x)$ | $\lvert x-4\rvert$ | $\lvert f(x)+2\rvert$ |
|---|---|---|---|
| 3.9 | -2 | 0.1 | 0 |
| 3.99 | -2 | 0.01 | 0 |
| 3.999 | -2 | 0.001 | 0 |
| 3.9999 | -2 | 0.0001 | 0 |
| 4. | -2 | 0.0001 2 | 0 |
| 4.0001 | -2 | 2.0001 | 0 |
| 4.001 | -2 | 2.001 | 0 |
| 4.01 | -2 | 2.01 | 0 |
| 4.1 | -2 | 2.1 | 0 |

*Figura 52.* Respuesta del estudiante E1.

Más aún, asocia el límite con la sucesión de valores tanto de $f(x)$ como de las distancias de $|x-4|$.

Por último, el estudiante E3 presenta errores conceptuales del valor absoluto, esto debido a que proporciona distancias negativas en la tabla, además comenta erróneamente que la sucesión de valores de las distancias de $|x-4|$ se aproximan a 1, sin que proporcione más argumentos de su respuesta, en cuanto a la segunda pregunta responde acertadamente que la distancia de $|f(x)+2|$ es constante. Sin embargo, no hay respuestas al resto de preguntas.

Por todo lo anterior, solo 6 estudiantes de los que presentaron la actividad concluyeron que el límite es -2, pero es evidente que para proporcionar dicha respuesta emplearon acciones dentro de la noción dinámica, es decir, emplearon su concepción proceso de las sucesiones numéricas en el dominio y el codominio (DG3a y DG3b). Sin embargo, solamente nueve estudiantes realizan acciones encaminadas a la construcción de una concepción proceso de las sucesiones numéricas en las distancias en valor absoluto tanto cuando $x$ se aproxima a 4 y $f(x)$ se aproxima a -2 en la concepción métrica (DG5).

Dos estudiantes determinan erróneamente el valor al que se aproximan las sucesiones de valores de las métricas involucradas, diversos factores son lo que influyeron, uno de ellos fue haber realizado erróneamente el cálculo de las distancias, no tener claridad sobre el concepto de valor absoluto, fallar al comparar números decimales, en general, no haber comprendido la segunda pregunta, por lo que no logran establecer la condición planteada.

Por todo lo anterior, podemos decir que los estudiantes muestran haber realizado acciones encaminadas a la construcción de la etapa DG5.

La actividad doce la presentaron 27 estudiantes de los de los 34 que presentaron el cuestionario final, de los cuales dos estudiantes (E2 y E12) no responden las preguntas planteadas, por lo que el análisis se centra en las respuestas de 25 de ellos. Es importante señalar que a diferencia de la actividad anterior los cálculos que realizaron son de las distancias en valor absoluto de $f(x)$ a 3.

El estudiante E26 realiza los cálculos de las distancias de manera correcta, más aún, identifica que la sucesión de valores de las distancias tanto $|x-2|$ y $|f(x)-3|$ se aproximan a cero, sin embargo, aún no son capaces asociar dichas sucesiones con el límite, ya que en la tercera pregunta presenta una respuesta que carece de sentido: “pues sea diferente”, lo anterior nos informa que no hay una comprensión clara de la pregunta y mucho menos ha logrado establecer la condición solicitada. Sin embargo, afirma que el límite de la función es cero, lo que nos dice que no es capaz de asociar las sucesiones laterales de valores en las imágenes con el límite.

En conclusión dichas acciones van encaminadas a desarrollar la etapa DG5.

Siete estudiantes (E8, E9, E20, E29, E30, E17 y E33) no presentan respuesta sobre el límite de la función, uno de ellos (E33) presenta errores al realizar los cálculos de las distancias, sin embargo, a pesar de ello, logra identificar que la sucesión de valores en las distancias en valor absoluto tanto de $x$ a 2 y $f(x)$ a 3 se aproximan a cero.

| $x$ | $f(x)$ | $\|x-2\|$ | $\|f(x)-3\|$ |
|---|---|---|---|
| 1.9 | 2.61 | 0.1 | 0,34 |
| 1.99 | 2.9601 | 0.01 | 1.01 |
| 1.999 | 2.996001 | 0.001 | 0.0394 |
| 1.9999 | 2.99960001 | 0.0001 | 0.99960001 |
| ... | ... | ... | ... |
| 2.0001 | 3.00040001 | 0.0001 | 4.0004 |
| 2.001 | 3.004001 | 0.001 | 4.001 |
| 2.01 | 3.0401 | 0.01 | 0.0401 |
| 2.1 | 3.41 | 0.1 | 0,41 |

*Figura 53.* Respuesta del estudiante E33.

Del mismo grupo, el estudiante E17 no presenta problemas para realizar los cálculos de las distancias, también logra identificar que la sucesión de valores de la distancia de $|f(x) - 3|$ se aproxima a cero, sin embargo, no sucede lo mismo para a distancia $|x - 2|$ debido a que responde: "cuando $x$ se aproxima a 2 el otro se aproxima a otro", como podemos notar la respuesta queda muy general e incluso pareciera que detecta una relación respecto a otra cantidad, pero no hay más información al respecto debido a que no responde las demás preguntas.

De este mismo grupo dos (E17 y E29) estudiantes presentan razonamientos similares, por ejemplo, el estudiante E17 responde que la distancia de $|x - 2|$ se aproxima a cero, pero en relación a la distancia $|f(x) - 3|$ su respuesta es muy general ya que escribe "se aproximan sucesivamente" sin que mencione a qué valor o valores se aproximan.

Por otro lado, el estudiante E29 deduce que tanto las distancias de $|x - 2|$ y $|f(x) - 3|$ se aproximan a cero.

Finalmente, para el resto de las preguntas ambos presentan respuestas muy generales o carentes de sentido, lo que nos indica que no hay una comprensión total de ellas. Un caso particular de esta situación se encuentra en la tercera pregunta ya que presentan las siguientes respuestas: "En que procede que se aproximan a un solo valor" "si por que se aproximara" en la primera respuesta no especifica de que sucesión de valores está considerando, por lo que desde nuestro análisis a un no ha logrado identificar que la sucesión de valores en las imágenes y del dominio le permiten determinar el límite en la noción dinámica y respecto a la segunda respuesta no se encontró relación con la pregunta.

El resto de los estudiantes (E8, E9 y E29) de este grupo solo se limitan a realizar los cálculos de las distancias, lo que los lleva a identificar que tanto las distancia de $|x-2|$ y $|f(x)-3|$ se aproximan a cero, pero no presentan respuestas para el resto de las preguntas.

Por otro lado, cinco estudiantes responden que el límite de la función es 2, consideramos que su respuesta se basa en la sucesión de valores del dominio, más no del codominio. Es importante destacar que no presentan errores en los cálculos de las distancias de $|f(x)-3|$, No obstante, una vez que obtienen los valores de las distancias, mencionan que las sucesiones de valores se aproximan a dos cantidades diferentes como se muestra su respuesta: “se acercan a 2 números distintos que sería el 3 y el 4” dicha respuesta no se debe a una carencia para comparar ciertos números decimales, esto se puede observar en los valores que presenta en la tabla.

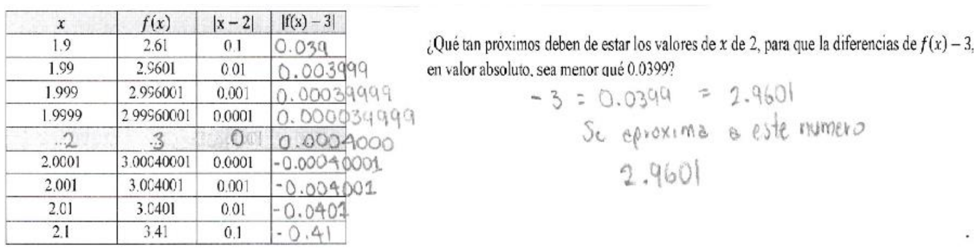
| $x$ | $f(x)$ | $\lvert x-2\rvert$ | $\lvert f(x)-3\rvert$ |
|---|---|---|---|
| 1.9 | 2.61 | 0.1 | 0.39 |
| 1.99 | 2.9601 | 0.01 | 0.0399 |
| 1.999 | 2.996001 | 0.001 | 0.003999 |
| 1.9999 | 2.99960001 | 0.0001 | 0.00039999 |
| 2.. | 3.. | 0.. | 0.. |
| 2.0001 | 3.00040001 | 0.0001 | 0.00040001 |
| 2.001 | 3.004001 | 0.001 | 0.004001 |
| 2.01 | 3.0401 | 0.01 | 0.0401 |
| 2.1 | 3.41 | 0.1 | 0.41 |

*Figura 54.* Respuesta del estudiante E18.

Esta situación no se repite para la distancia de $|x-2|$debido a que responden que la sucesión de valores se aproxima a cero.

Finalmente, no hay evidencia contundente de una comprensión adecuada de la tercera pregunta debido a que sus respuestas no tienen relación con ella, por ejemplo, responden: “que $x$ debe aproximarse a 1.2 y $f(x)$ a 3.09”, como podemos notar no están considerando la condición establecida.

Otro grupo de doce estudiantes (E13, E7, E14, E15, E22, E23, E24, E25, E27, E31, E21 y E34) responden que el límite de la función es 3, de los cuales cinco estudiantes siguen presentado problemas con el concepto de valor absoluto, debido a que presentan distancias negativas. Uno de ellos es el estudiante E27, no obstante, lograr deducir que la sucesión de valores de la distancia $|x-2|$ se aproxima a cero, sin embargo para la distancia de $|f(x)-3|$ no es así, debido a que responde que la sucesión de valores se aproxima a 1 sin que proporcione más argumentos del porqué de su respuesta. Finalmente, en la tercera pregunta intenta establecer la condición solicitad mostrando indicios de contemplar el resto de las variables, por ejemplo, centra su atención en los valores $f(x)$ aunque la notación que emplea no es adecuada como se puede notar en la siguiente figura.



| $x$ | $f(x)$ | $\lvert x-2\rvert$ | $\lvert f(x)-3\rvert$ |
|---|---|---|---|
| 1.9 | 2.61 | 0.1 | 0.039 |
| 1.99 | 2.9601 | 0.01 | 0.003999 |
| 1.999 | 2.996001 | 0.001 | 0.00039999 |
| 1.9999 | 2.99960001 | 0.0001 | 0.000034999 |
| 2 | 3 | 0 | 0.0004000 |
| 2.0001 | 3.00040001 | 0.0001 | -0.00040001 |
| 2.001 | 3.004001 | 0.001 | -0.004001 |
| 2.01 | 3.0401 | 0.01 | -0.0401 |
| 2.1 | 3.41 | 0.1 | -0.41 |

¿Qué tan próximos deben de estar los valores de $x$ de 2, para que la diferencias de $f(x)-3$, en valor absoluto, sea menor qué 0.0399?

$-3 = 0.0399 = 2.9601$

Se aproxima a este numero

2.9601

*Figura 55.* Respuesta del estudiante E27.

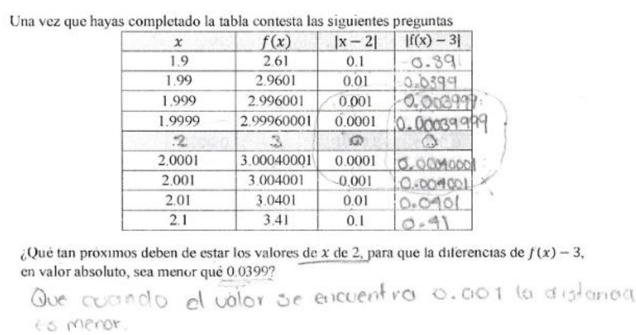
Finalmente, decimos que el límite que propone lo determina considerando la sucesión de valores de las imágenes.

Del mismo grupo, el estudiante E31 muestra evidencias de no comprender sobre quien recaen las preguntas ya que en la primera pregunta responde lo siguiente: “Se aproxima, cuando $x$ se aproxima a 2” es decir, está considerando la sucesión de valores en el dominio, más no la de las distancias de $|f(x)-3|$, una situación similar ocurre con la métrica de $|f(x)-3|$ debido a que en la segunda pregunta responde “cuando $f(x)$ se aproxima a 3 $f(x)$ se aproxima a 3”, en otras palabras, centra su atención en la sucesión de valores en las imágenes. Finamente no responde la tercera pregunta, por lo que decimos que el límite 3 que propone lo determina considerando la sucesión de valores de las imágenes.

Dos estudiantes (E21 y E34) presentan un razonamiento similar para responder la segunda pregunta, ya que comentan que la sucesión de valores de $|f(x)-3|$ disminuye a 0.000400, es decir, responden conforme al patrón detectado en la sucesión, la cual es una estrategia similar a lo que muchos estudiantes empleaban en la actividad 1, es importante destacar que no presentan errores en los cálculos de la distancia, además, acertadamente deducen que las distancias de $|x-2|$ se aproximan a cero, finalmente no responden la tercera pregunta, por lo que consideramos que el límite 3 que propone lo determina considerando la sucesión de valores de las imágenes.

Por último, ocho estudiantes (E7, E13, E14, E15, E22, E23, E24 y E25) presentan un mejor desempeño debido a que no presentan errores al calcular las distancias, solo algunos presentan distancias negativas. Resaltamos que logran deducir que la sucesión de valores de las distancias de $|x-2|$ y $|f(x)-3|$ se aproximan a cero, más aún, realizan un intento de responder la tercera pregunta, sin embargo, uno (E15) de ellos está considerando valores que no permiten que se cumpla la condición solicitada, ya que responden que los valores de $x$ deben estar próximos en un 0.1 pero esto no cumple que $|f(x)-3| < 0.0399$. Por otro lado, cinco de los estudiantes están considerando la distancia de $|f(x)-3|$ más no de $|x-2|$ lo que muestran evidencias de no haber comprendido la pregunta.

Destacamos las respuestas de los estudiantes E7 y E13 debido a que muestran evidencias de haber comprendido la tercera pregunta, ya que presentan las siguientes respuestas: “que cuando el valor se encuentra 0.001 la distancia es menor” aunque no es tan explícita consideramos que mentalmente está considerando la situación que cuando $|x-2| = 0.001$ se cumple que $|f(x)-3| < 0.0399$, una situación similar considera el estudiante E13 ya que responde “seria 0.001 y 0.0001”, lo anterior se puede observar en la siguiente imagen.


Una vez que hayas completado la tabla contesta las siguientes preguntas

| $x$ | $f(x)$ | $\|x-2\|$ | $\|f(x)-3\|$ |
|---|---|---|---|
| 1.9 | 2.61 | 0.1 | -0.39 |
| 1.99 | 2.9601 | 0.01 | -0.0399 |
| 1.999 | 2.996001 | 0.001 | -0.003999 |
| 1.9999 | 2.99960001 | 0.0001 | 0.00039999 |
| 2 | 3 | 0 | 0 |
| 2.0001 | 3.00040001 | 0.0001 | 0.00040001 |
| 2.001 | 3.004001 | 0.001 | 0.004001 |
| 2.01 | 3.0401 | 0.01 | 0.0401 |
| 2.1 | 3.41 | 0.1 | 0.41 |

¿Qué tan próximos deben de estar los valores de $x$ de 2, para que la diferencias de $f(x)-3$, en valor absoluto, sea menor qué 0.0399?

Que cuando el valor se encuentra 0.001 la distanca es menor.

*Figura 56.* Respuesta del estudiante E7.

Por último, decimos que el límite 3 que proponen lo determinan considerando la sucesión de valores de las imágenes, esto se refuerza con la respuesta que presenta el estudiante E23: “como se aproxima por arriba y abajo al 3 el límite es 3”.

Por todo lo anterior podemos decir que los estudiantes muestran haber realizado acciones encaminadas a la construcción de la etapa DG5.

## 4.3 Análisis del cuestionario final

En esta sección se presenta el análisis del cuestionario final para determinar qué estructuras y mecanismos mentales lograron construir los estudiantes una vez finalizada la secuencia didáctica. Es relevante mencionar que el cuestionario final se diseñó para explorar la concepción dinámica debido a que en las actividades de la concepción métrica los estudiantes presentaron diversas dificultades, por lo que consideramos pertinente determinar si las actividades lograron que el estudiante haya construido la noción dinámica de límite.

### 4.3.1 Análisis representación numérica

Las preguntas 1 y 2 del cuestionario final se presentan en una representación numérica y se diferencian en que las sucesiones de números de las imágenes en la pregunta 1 se aproximan a un valor y en la pregunta 2 se aproxima a 2 valores.

El estudiante E8 no presenta respuesta a las preguntas 1 y 2, por lo que el análisis se centra en las respuestas de 31 estudiantes.

Tres estudiantes (E11, E21, y E26) no presentan respuestas concretas sobre el límite de la función ya que solo proporcionan respuestas muy generales en las dos preguntas, por ejemplo, uno de ellos responde en la primera pregunta “es la aproximación en la función $x$”, otro más responde “por qué es la aproximación de los números, son más cercanos a los de a lado”. En cuanto a la segunda pregunta algunas respuestas que se presentan son “una aproximación más cercana”. Dos escriben en la tabla a qué valor consideran que las sucesiones tanto del dominio como del codominio se aproximan, otros consideran la sucesión de valores en las imágenes ya sea por la derecha o por la izquierda pero no en ambas, lo que los lleva a deducir que se aproximan a un único valor.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 4.9 | 4.99 | 4.999 | 4.9999 | 5.0000 | 5.00001 | 5.0001 | 5.001 | 5.01 |
| $f(x)$ | 9.8 | 9.98 | 9.998 | 9.9998 | 10 | 10.00002 | 10.0002 | 10.002 | 10.02 |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 1.7 | 1.8 | 1.99 | 1.999 | 2... | 2.001 | 2.01 | 2.2 | 2.3 |
| $f(x)$ | 3.9 | 4.24 | 4.960 | 4.9960 | 4 | 4.001 | 4.01 | 4.2 | 4.3 |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 1.7 | 1.8 | 1.99 | 1.999 | 2.000 | 2.001 | 2.01 | 2.2 | 2.3 |
| $f(x)$ | 3.9 | 4.24 | 4.960 | 4.9960 | [illegible] | 4.001 | 4.01 | 4.2 | 4.3 |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 4.9 | 4.99 | 4.999 | 4.9999 | [illegible] | 5.00001 | 5.0001 | 5.001 | 5.01 |
| $f(x)$ | 9.8 | 9.98 | 9.998 | 9.9998 | [illegible] | 10.00002 | 10.0002 | 10.002 | 10.02 |

*Figura 57.* Respuesta de los estudiantes E11, E21, y E26.

Por otro lado, ocho estudiantes (E13, E14, E15, E20, E27, E28, E29 y E30) consideran la sucesión de valores en el dominio tanto por la derecha como por la izquierda para determinar el límite, es decir, determinan el límite solo considerando la sucesión de valores en el dominio, además, no establecen una relación de dependencia entre $x$ y $f(x)$, esto se puede observar en algunas respuestas que los estudiantes presentan en la primera pregunta, por ejemplo, el estudiante E20 responde " El límite es 4.999 por que para pasar de 4.999 a 5.00001 en medio tiene que ser 5", una respuesta similar presenta el estudiante E15: "5 es límite ya que del lado derecho y del lado izquierdo se acercan a un número y es 5."

Solo un estudiante (E14) no responde la primera pregunta.

Respuestas similares se pueden notar para la segunda pregunta, por ejemplo, el estudiante E15 responde "2 es el límite por que en ambos lados al número que se acerca es 2", E28 responde: "2 es el punto medio entre los demás números". Algunos más consideran la sucesión de valores de izquierda a derecha, siendo el último elemento de ellos como el límite, un ejemplo de lo anterior es la respuesta del estudiante E14: "El límite es 1.999 porque se acerca" y que además podemos notar que su noción de límite es aquello que no se alcanza.

Otros estudiantes realizaron una lectura de izquierda a derecha y consideraron que el límite es el último valor de la columna, ejemplo de esto es la repuesta del estudiante E30: "es 2.3 por que es donde termina la función 2", más aun, algunos de ellos determinaron a qué valores se aproxima la sucesión de valores en las imágenes, sin que consideraran esta información para determinar el límite.

Es importante mencionar que ninguno de ellos dedujo en la pregunta dos que $f(x)$ se aproxima a dos valores, consideramos que esto se debe a que solo se enfocaron en una sucesión de valores de los laterales como se puede observar en la siguiente figura.

| $x$ | 1.7 | 1.8 | 1.99 | 1.999 | .2 | 2.001 | 2.01 | 2.2 | 2.3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 3.9 | 4.24 | 4.960 | 4.9960 | 4 | 4.001 | 4.01 | 4.2 | 4.3 |

.

*Figura 58.* Respuesta de los estudiantes que consideraron las sucesiones del dominio como información suficiente para determinar el límite.

Por todo lo anterior podemos decir que estos estudiantes muestran indicios de haber construido una concepción proceso de las sucesiones numéricas en el dominio (DG3a).

Por otro lado, diez estudiantes no presentan problemas para determinar en la primera pregunta que el límite de la función es 10, es decir, basan su respuesta en la sucesión de valores de las imágenes, lo anterior se puede observar en algunas respuestas de los estudiantes, por ejemplo, E31 escribe: "El límite es 10 ya que es el que se aproxima al límite tanto del lado derecho tanto del izquierdo", algunos más muestran indicios de establecer una relación entre el dominio y el codominio empleando la función, por ejemplo, E22 escribe: "mientras $x = 5$ la función $f(x)$ su límite es 10", mientras que E34 escribe: "10, por que el 10 se encuentra entre el 9.9998 y el 10.000002 y el 5 se va entre el 4.9999 y el 5.00001, y mientras se va alejando del 9 se acerca más al 10", otra respuesta es la del estudiante E28: "5 por que tanto en los números de la izquierda y la derecha se aproximan al 5 y la función $f(x)$ se aproximan al 10".

Sin embargo, esto no sucede con las respuestas de la segunda pregunta debido a que solo consideran una sucesión de valores ya sea por la izquierda o por la derecha más no ambas para determinar el límite, así por ejemplo, los estudiantes E9, E23 y E34 consideran que el límite de la función es 5 debido a que consideran la sucesión de valores de izquierda a derecha, ejemplo de ello es la respuesta del estudiante E34 el cual escribe: "por qué se aleja del 4 y se acerca al 5".

Un dato que se debe destacar es que el estudiante E23 considera las sucesiones de valores en el dominio por la izquierda y derecha, sin embargo, lo anterior no lo considera para las sucesiones en las imágenes, por lo que solo contempla una aproximación lateral, lo anterior se observa en la respuesta que proporciona "2 porque los números de la izquierda y la derecha se aproximan al 2 y la función $f(x)$ se aproximan al 5". Una situación similar lo presentan los estudiantes (E32, E22, E25, E24, E19 y E12) los cuales consideran la sucesión de valores de las imágenes de derecha a izquierda lo que los lleva a deducir que el límite de $f(x)$ es 4, esto se puede observar en las respuestas que proporcionan algunos estudiantes, por ejemplo, el estudiante E24, escribe "lo mismo como el anterior la función $f(x)$ es 4" por otro lado E22 escribe: "mientras $x = 2$ su función $f(x)$ su límite es 4", E19 responde "en los 2 lados se aproxima a 4".

Es importante destacar que el estudiante E34 considera la sucesión de valores en el dominio tanto por la derecha e izquierda para determinar el límite, ya que responde "el límite es 1.9999 por que se acerca a 2 y es en donde se desea llegar". Lo anterior pone en evidencia que varios de estudiantes no consideran las sucesiones de valores de las imágenes para determinar el límite de la función.

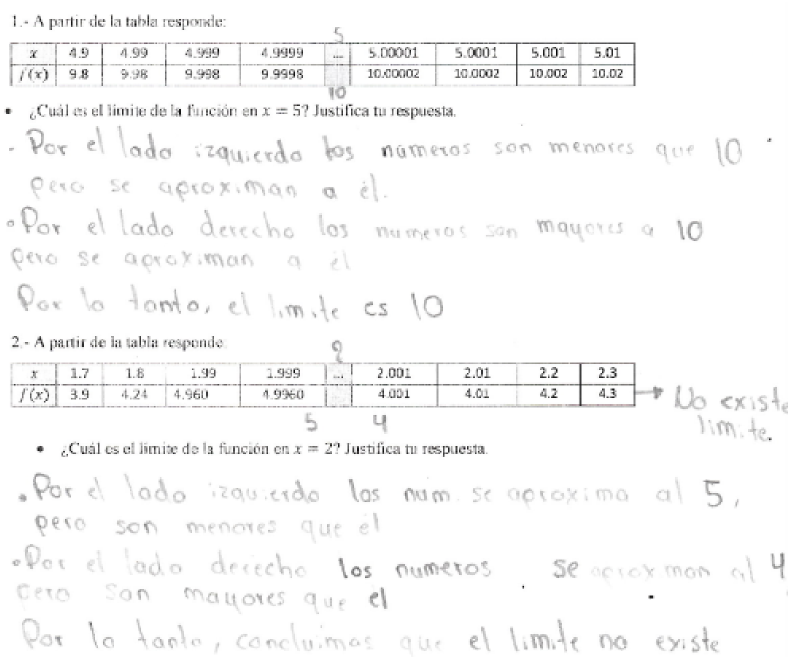
Por todo lo anterior podemos decir que estos estudiantes muestran indios de comenzar a construir los pasos DG3a y DG3b.

En otro orden de ideas, dos estudiantes responden a la primera pregunta en términos de aproximación y el cual considera que el límite de la función se encuentra entre 9.9998 y 10.00002, ejemplo de lo anterior es la respuesta del estudiante E18, el cual escribe “el límite de la función $x = 5$ sería entre 9.9998 y el 10.00002 por que es menor que ellos y es el más cercano a ellos”, como podemos notar no propone un límite en particular, pero reflexiona que dicho límite de debe de encontrar entre ese intervalo, por lo que consideramos que sus respuestas presentan mejores argumentos que el resto de sus compañeros.

En cuanto a la segunda pregunta son capaces de deducir que la sucesión de valores en las imágenes tanto por la derecha y por la izquierda se aproximan a dos valores en este caso 5 y 4. Lo que los lleva a deducir que la función no tiene límite. Un ejemplo de lo anterior es la respuesta del estudiante E5: “No hay límite por que del lado izquierdo se aproxima a 5 y del lado derecho se aproxima a 4”.

Por todo lo anterior podemos decir que estos estudiantes muestran evidencias de haber construido los pasos DG3a y DG3b.

Finalmente, 10 estudiantes (E33, E3, E17, E16, E10, E7, E6, E4, E1 y E2) muestran evidencias de haber el paso DG3c, debido a que consideran las sucesiones de valores en las imágenes para determinar que el límite es 10 en la primera pregunta, de igual manera en la segunda pregunta consideran las sucesiones de valores tanto por la izquierda y por la derecha por lo que observan que se aproximan a dos cantidades diferentes el 5 y el 4 lo que les permite determinar que la función no tiene límite, lo anterior se puede observar en la siguiente figura.



1.- A partir de la tabla responde:

| $x$ | 4.9 | 4.99 | 4.999 | 4.9999 | ... 5 | 5.00001 | 5.0001 | 5.001 | 5.01 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 9.8 | 9.98 | 9.998 | 9.9998 | 10 | 10.00002 | 10.0002 | 10.002 | 10.02 |

- ¿Cuál es el límite de la función en $x = 5$? Justifica tu respuesta.

- Por el lado izquierdo los números son menores que 10 pero se aproximan a él.
- Por el lado derecho los numeros son mayores a 10 pero se aproximan a él

Por lo tanto, el limite es 10

2.- A partir de la tabla responde:

| $x$ | 1.7 | 1.8 | 1.99 | 1.999 | ... 2 | 2.001 | 2.01 | 2.2 | 2.3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 3.9 | 4.24 | 4.960 | 4.9960 | 5 4 | 4.001 | 4.01 | 4.2 | 4.3 |

→ No existe limite.

- ¿Cuál es el límite de la función en $x = 2$? Justifica tu respuesta.

- Por el lado izquierdo los num. se aproxima al 5, pero son menores que el
- Por el lado derecho los numeros se aproximan al 4 pero son mayores que el

Por lo tanto, concluimos que el limite no existe

*Figura 59.* Respuesta del estudiante E2.

En conclusión tres estudiantes muestran evidencias de haber construido el paso DG1. Por otro lado, veintiuno de los estudiantes muestran evidencias de haber construido el paso DG3a o DG3b. Finalmente, solo diez estudiantes mostraron evidencias de haber construido DG3c.

Tabla 1.
*Estructuras mentales que los alumnos construyeron de la representación numérica en la concepción dinámica.*

| Concepción dinámica | | |
|---|---|---|
| Representación numérica | | |
| Estructura mental | Número de Estudiantes | Observaciones |
| Acciones | 3 | Los estudiantes solo hallan las imágenes de la función para ciertos valores en el dominio. |
| Concepción proceso de las sucesiones de números en el dominio | 21 | Los estudiantes consideran las sucesiones de valores en las imágenes para determinar el límite de las funciones, algunos de ellos centran su atención en la sucesión de valores en el dominio lo que los lleva a determinar límites |

| | | |
|---|---|---|
| Concepción proceso de las sucesiones de números en el codominio. | | erróneos, es decir, no consideraron la sucesión de valores en las imágenes. Otros más modifican la regla de correspondencia y consideran la sucesión de valores ya sea del dominio, codominio o ambas. |
| Concepción proceso del límite. | 10 | Consideran las sucesiones de valores en las imágenes para determinar la existencia o no del límite, más aun, establecen una relación de dependencia entre x y f(x). |

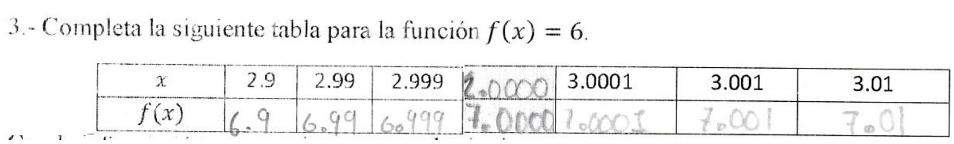
4.3.2 Análisis representación algebraico-numérica

De los 34 estudiantes, dieciocho (E24, E13, E12, E25, E7, E17, E10, E6, E1, E4, E33, E14, E23, E31, E22, E16, E2, y E3) evaluaron de manera correcta los valores de $x$ en la función $f(x) = 6$. Esto les permitió determinar que el límite de la función es 6, ya que las sucesiones de valores son constantes, algunas de las respuestas que presentaron son: “el límite de la función en $x = 3$ es 6 ya que en la indicación ya nos da el valor de $f(x)$”, “El límite es 6, porque es una constante”, “6, mientras $x = 3$ la función de $x$ es constante=6”, entre otras respuestas similares, por lo que podemos decir que estos estudiantes muestran evidencias de haber construido el paso DG3c.

El resto de los estudiantes no tuvieron éxito en determinar el límite de la función, por lo que se presentaron las siguientes situaciones:

El estudiante E21 no responde concretamente quien es el límite, solo presenta una afirmación muy general ya que escribe “es la aproximación que a simple vista se conoce”, pero no especifica si se trata de la sucesión constante de las imágenes o si se trata de la sucesión del dominio.

Dos estudiantes (E8 y E11) suman a la constante la parte decimal de los valores proporcionados en la tabla, como se puede observar en la siguiente figura.


3.- Completa la siguiente tabla para la función $f(x) = 6$.

| $x$ | 2.9 | 2.99 | 2.999 | 2.0000 | 3.0001 | 3.001 | 3.01 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 6.9 | 6.99 | 6.999 | 7.0000 | 7.0001 | 7.001 | 7.01 |

*Figura 60.* Respuesta del estudiante E8.

Incluso como podemos notar cuando se toma la sucesión de valores del lado derecho se le suma una unidad pasando de seis a siete, esta situación no les permite determinar quién es el límite de la función. Una vez que obtienen la sucesión de valores en las imágenes con este procedimiento determinan que la sucesión de valores en las imágenes se aproxima a 7, sin embargo dicha respuesta no se hace explicita por el estudiante, esto lo podemos deducir de los valores que presenta en la tabla.

Una situación similar presenta el estudiante E19 el cual resta una unidad a la constante y posteriormente le suma la parte decimal de los valores propuestos en el dominio ($f(x) = 6 - 1 + parte\ decimal\ de\ los\ valores\ propuesto\ en\ el\ dominio$), lo anterior no les permite determinar el límite de la función, lo anterior se puede observar en la respuesta que presenta "en los 2 lados se aproximan los 2 números" sin que quede claro a que números se refiere. Por otro lado, determina que la sucesión de valores del dominio es 3.

Por todo lo anterior decimos que estos estudiantes muestran evidencias de haber construido el paso DG3a y DG3b, aunque no haya una comprensión adecuada de la función constante.

Otro estudiante (E20) erróneamente determina que el límite de la función está determinada por el último valor de la sucesión de valores en el dominio ya que responde "el límite es de 2.999 por que 3 es donde se quiere llegar"

Para este estudiante decimos que muestra evidencias de haber construido el paso DG3a.

En esta pregunta nuevamente los estudiantes modifican la regla de correspondencia, ya que la sustituye por $f(x) = 6x$, esto los lleva a determinar erróneamente que la sucesión de valores de las imágenes se aproximan a 18.

3.- Completa la siguiente tabla para la función $f(x) = 6$.

| $x$ | 2.9 | 2.99 | 2.999 | 3000C | 3.0001 | 3.001 | 3.01 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 17.4 | 17.94 | 17.994 | 18000 | 18.0006 | 18.006 | 18.06 |

*Figura 61.* Respuesta del estudiante E29 en la tabla.

Lo anterior lo escriben en la tabla de valores, pero no lo consideran en la respuesta que proporcionan al final. Por ejemplo, dos estudiantes (E29 y E30) consideran que el límite de la función es 3.0001, es decir, consideran la sucesión de valores del dominio más no de las imágenes para determinar el límite, incluso describen la operación que realizaron con los valores de la tabla, por ejemplo, el estudiante E30 responde "3.0001 por que multiplica con $f(x) = 6$ ", otro estudiante (E32) prefiere no responder la pregunta, uno más presenta una respuesta que no encontramos relación con los valores en la tabla debido a que responde que el límite es cero sin que proporcione mayores argumentos de su respuesta. Finalmente, con la sucesión de valores de las imágenes bajo esta operación un estudiante determina erróneamente que el límite de la función es 18.

Por todo lo anterior decimos que estos estudiantes muestran evidencias de haber construido los pasos DG3a, DG3b o ambos.

Otra de las modificaciones que hicieron a la regla de correspondencia fue sustituirla por $f(x) = 6 + x$. Esto lleva a dos estudiantes (E5 y E18) a determinar erróneamente que el límite es 9, incluso en las respuestas que proporcionan describen la operación que realizaron, lo anterior se observa en la respuesta del estudiante E5 "El límite de la función en $x = 3$ es el 9 por que es el más cercano al sumar 8.0001 más 6, del resultado que da". Lo anterior incluso se puede observar en la siguiente figura.

3.- Completa la siguiente tabla para la función $f(x) = 6$.

| $x$ | 2.9 | 2.99 | 2.999 | 3 | 3.0001 | 3.001 | 3.01 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 8.9 | 4.99 | 8.999 | 9 | 9.0001 | 9.001 | 9.01 |

*Figura 62.* Respuesta del estudiante E5 en la tabla.

Dos estudiantes (E15 y E27) basan su respuesta en la sucesión de valores del dominio para determinar el límite, es decir, no consideran la sucesión de valores de las imágenes como información relevante para determinar el límite, lo anterior se puede observar en la respuesta del estudiante E15 "el límite es 3 por que en ambos lados se aproxima al 3". Por otro lado, el estudiante E18 no presenta respuesta.

Es importante resaltar que el estudiante E9 considera que la función tiene dos límites, uno de ellos es la sucesión de valores del dominio los cuales se aproximan a 3 y el otro es la sucesión de valores de las imágenes que se aproximan a 9, después de haber sumado a la constante los valores del dominio presentes en la tabla, ya que responde “3 y 9 por que llegan a ese límite”, es evidente que dicho estudiante no tiene claro la noción de límite dentro su concepción dinámica.

Por todo lo anterior decimos que estos estudiantes muestran evidencias de haber construido los pasos DG3a, DG3b o ambos.

En conclusión dieciséis estudiantes muestran evidencias de haber construido el paso DG3a o DG3b. Finalmente, solo dieciocho estudiantes mostraron evidencias de haber construido el paso DG3c.

Tabla 2.
*Estructuras mentales que los alumnos construyeron de la representación algebraica-numérica en la concepción dinámica*

<table>
<tr><th colspan="3">Concepción dinámica</th></tr>
<tr><th colspan="3">Representación algebraico-numérico</th></tr>
<tr><th>Estructura mental</th><th>Número de Estudiantes</th><th>Observaciones</th></tr>
<tr><td>Acciones</td><td>0</td><td></td></tr>
<tr><td>Concepción proceso de las sucesiones de números en el dominio</td><td rowspan="2">16</td><td rowspan="2">Los estudiantes consideran las sucesiones de valores en las imágenes para determinar el límite de las funciones, algunos de ellos centran su atención en la sucesión de valores en el dominio lo que los lleva a determinar límites erróneos, es decir, no consideraron la sucesión de valores en las imágenes. Otros más modifican la regla de correspondencia y consideran la sucesión de valores ya sea del dominio, codominio o ambas.</td></tr>
<tr><td>Concepción proceso de las sucesiones de números en el codominio</td></tr>
<tr><td>Concepción proceso del límite</td><td>18</td><td>Consideran las sucesiones de valores en las imágenes para determinar la existencia o no del límite, más aún, establecen una relación de dependencia entre $x$ y $f(x)$.</td></tr>
</table>

4.3.3 Análisis representación gráfica

Cuatro estudiantes (E8, E11, E21 y E28) no responden la actividad por lo que el análisis se centra en 30 estudiantes, de los cuales 15 estudiantes (E1, E4, E5, E6, E10, E15, E18, E19, E26, E27, E29, E30, E32, E33, E34) no hallan las imágenes de los valores particulares de $x$ propuestos en el problema, simplemente se limitan a responder las preguntas de ¿a qué número se aproxima la función $f(x)$? cuando $x$ toma valores alrededor de 1, es decir, se esperaba que los estudiantes consideraran la sucesión de valores de las imágenes tanto por la derecha como por la izquierda, para que pudieran determinar la existencia o no del límite. A dicha pregunta responden que la sucesión de valores tanto por la derecha como por la izquierda se aproximan a 1, esto lleva a 5 estudiantes a determinar que el límite de la función es 1, como se puede observar en algunas respuestas que presentaron. Por ejemplo, los estudiantes E27 y E15 responden respectivamente “su límite es 1” y “cuando llega a 1 el límite es 1 ya que se aproximaron al número 1”. Su respuesta se basa en considerar la sucesión de valores en el dominio de la función para determinar el límite de la función, como se puede observar las construcciones que realizaron en la gráfica, ver siguiente figura.

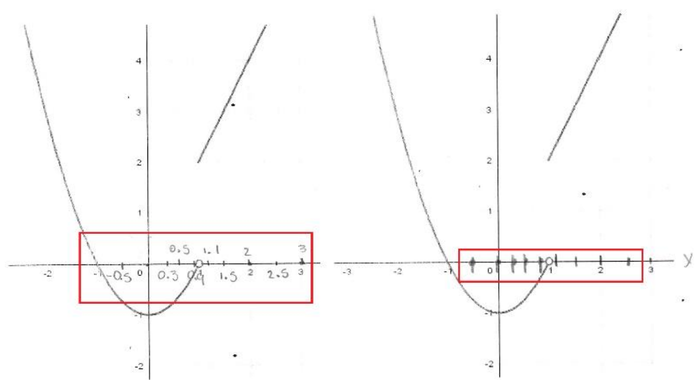


*Figura 63.* Construcciones de los estudiantes E27 y E6 en la gráfica.

Por lo anterior decimos que estos estudiantes muestran evidencias de haber construido el paso DG3c en su representación gráfica.

Además, el estudiante E32 no responde la pregunta, uno más (E30) proporciona una respuesta general.

Por otra parte, dos estudiantes (E33 y E34) responden que el límite es cero, sin que proporcionen un argumento a su respuesta, consideramos que su respuesta se basan en que cuando los valores de

$x$ se aproximan a 1, por la izquierda $f(x)$ se aproxima a cero, pero no tenemos suficiente información para sustentar lo anterior.

Solo cuatro estudiantes responden que $f(x)$ no tiene límite, pero esto se debe a razonamientos erróneos, tres de ellos (E4, E5 y E18) responden que la sucesión de valores de $f(x)$ se aproxima a 2, cuando $x$ toma valores muy próximos a 1 por la izquierda. Consideramos que dichos estudiantes observan que un segmento de la función inicia en el punto (1,2) por lo que consideran la coordenada 2 como el valor al que se aproxima la sucesión de las imágenes.

El anterior razonamiento surge debido a que no hallan los valores de las imágenes de manera particular para los valores de $x$ que se proporcionan. En cuanto a la sucesión de valores de las imágenes cuando $x$ toma valores muy próximos a 1 por la derecha, dicen que se aproxima a 1, es decir, nuevamente centran su atención en la sucesión de valores del dominio, más no del codominio. Lo anterior los lleva a determinar la no existencia del límite.

Por otro lado, el estudiante E1 responde que cuando $x$ toma valores muy próximos a 1 por la izquierda $f(x)$ se aproxima a 1, el cual es un error. En esta respuesta consideramos que el estudiante considera la sucesión de valores en el dominio por la izquierda, en cuanto a la sucesión de valores de las imágenes cuando $x$ toma valores muy próximos a 1 por la derecha, comenta que se aproxima a 2, es decir, en esta respuesta considera la sucesión de valores de las imágenes, lo anterior lo lleva a determinar que el límite no existe.

Finalmente, para cerrar el análisis de este grupo de estudiantes, dos más (E26 y E29) responden que cuando $x$ toma valores muy próximos a 1 por la izquierda $f(x)$ se aproxima a 0.1, sin que proporcionen más información, en cuanto $x$ toma valores muy próximos a 1 por la derecha, difieren en sus respuestas ya que uno comenta que se aproxima a 1 y otro responde que se aproxima 0.3. Para la primera pregunta decimos que uno de los estudiantes está considerando la sucesión de valores en el dominio, sin embargo, en su respuesta del límite parece que esta información no es relevante ya que escriben que el límite es 4, sin que proporcione un argumento del por qué considera esta respuesta. En cuanto a la segunda respuesta no hay información suficiente del por qué considera que se aproxima 0.3, más aún, esta información no la considera relevante ya que responde que el límite es 2.

Es importante mencionar que de este grupo de 14 estudiantes, solamente dos de ellos intentaron apoyarse en el trazo de líneas verticales.

Por todo lo anterior decimos que estos estudiantes muestran evidencias de haber construido el paso DG3a o DG3b pero no ambas.

En otro orden de ideas 15 estudiantes (E9, E7, E14, E22, E2, E3, E20, E23, E24, E25, E12, E13, E16, E17 y E31) hallan los valores de las imágenes de la función para los valores particulares de $x$ que se proporcionaron en la actividad, tres de ellos (E7, E9 y E14) no responden quien es el límite de la función solo intentan hallar las imágenes de los valores particulares, dos de ellos aún presentan problemas para proporcionar una adecuada aproximación de las imágenes e incluso el estudiante E9 presenta problemas con la notación de función ya que aún emplea el (=). Por lo que decimos que estos estudiantes aún presentan una concepción acción del concepto de límite en la noción dinámica.

Tres estudiantes más responden que el límite de la función es 1, debido a que nuevamente consideran la sucesión de valores en el dominio y no consideran la sucesión de valores en las imágenes para determinar el límite, es importante destacar que dos de ellos presentan problemas para proporcionar una adecuada aproximación del valor de las imágenes para ciertos valores de $x$, incluso determinan que cuando $x = 1$, $f(x) = 0$ el cual es un error. Los tres estudiantes intentan apoyarse trazando líneas verticales en la gráfica sin que obtengan mucho éxito.

Por lo anterior decimos que estos estudiantes muestran evidencias de haber construido el paso DG3a.

En otro orden de ideas, el estudiante E22 al determinar el valor de las imágenes no considera las imágenes negativas de cuando $x$ toma valores cercanos al 1 por la izquierda, más aún, solamente considera la sucesión de valores de las imágenes por la derecha para determinar el límite, por lo que responde "mientras $x = 1$ su función $f(x)$ su límite es 2".

Por lo anterior decimos que este estudiante muestra indicios de empezar a construir los pasos DG3a y DG3b.

Siete estudiantes responden que el límite de la función es 2, debido a que consideran la sucesión de valores de las imágenes por el lado derecho sin considerar la sucesión de valores por el lado izquierdo, lo anterior se puede observar en las respuestas que proporciona el estudiante E3, ya que es el único que no presenta errores en determinar las imágenes e incluso conjetura que la sucesión de valores de las imágenes por el lado derecho se aproxima a cero y dos por el izquierdo, ver siguiente figura.

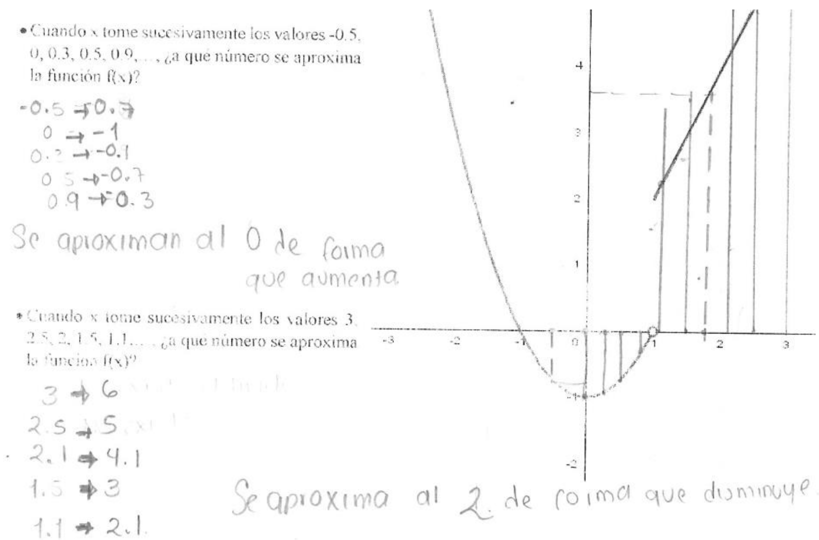



*Figura 64.* Respuestas del estudiante E3.

El resto de sus compañeros presentan diferentes errores, por ejemplo, cuatro de ellos (E20, E23, E24 y E25) presentan errores al determinar las imágenes de la función cuando $x$ toma valores por la izquierda de 1 en el dominio, e incluso no consideran imágenes negativas. Además dos estudiantes más (E12 y E13) responden a la pregunta ¿a qué número se aproxima la función $f(x)$? Cuando $x$ toma valores muy cercanos a 1 tanto por derecha y por izquierda, precisamente responden que se aproximan a 1 debido a que no tienen claro quién es el dominio y el codominio y centran su atención en la sucesión de valores del dominio. Pero en la pregunta final solo consideran la sucesión de valores de las imágenes del lado izquierdo. Por lo que podemos decir que estos estudiantes tienen claro que las imágenes de la función determinan el límite, pero aún no han asociado que deben considerar las dos sucesiones de valores por la derecha y por la izquierda cuando $x$ se aproxima a una determinada cantidad. Por lo anterior decimos que este estudiante muestra indicios de empezar a construir los pasos DG3a y DG3b.

Solo un estudiante determino acertadamente las imágenes de la función en su representación gráfica, por lo que responde que el límite no existe, pero falla en uno de los argumentos que proporciona, ya que responde “el límite no existe, por el lado de arriba $x = 1$ se aproxima a 2, mientras que por abajo el .99999" cuando habla por el lado de arriba se refiere que los valores de $f(x)$ se aproxima a 2, cuando $x$ se aproxima a 1 por la derecha, no obstante, en su segundo argumento está considerando la sucesión de valores en el dominio como se puede apreciar en la siguiente imagen.

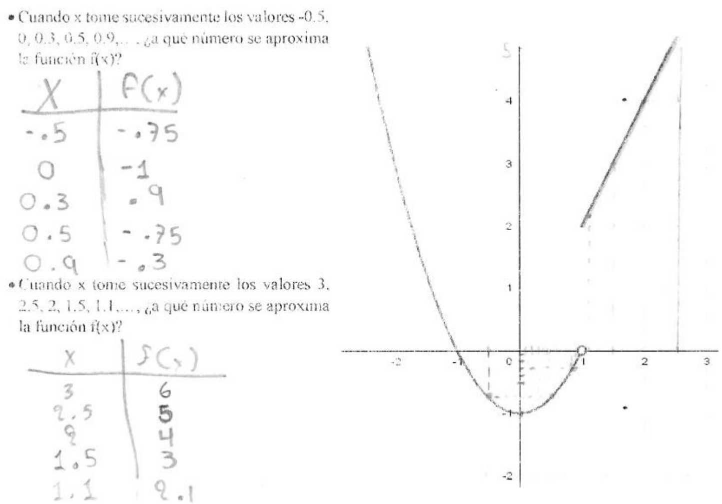



*Figura 65.* Respuestas del estudiante E2 y su construcción en la gráfica.

Por todo, lo anterior decimos que los estudiantes muestran indicios de empezar a construir los pasos DG3a y DG3b, pero aún no las han podido coordinar.

En conclusión ninguno de los estudiantes muestra evidencias de haber desarrollado el paso DG3c dentro de la representación gráfica.

De manera general decimos que veintisiete estudiantes muestran evidencias de haber construido los pasos DG3a o DG3b. Finalmente, solo tres estudiantes mostraron evidencias de haber construido el paso DG1.

Tabla 3.

*Estructuras mentales que los alumnos construyeron de la representación gráfica en la concepción dinámica.*

| Concepción dinámica | | |
|---|---|---|
| Representación gráfica | | |
| Estructura mental | Número de Estudiantes | Observaciones |
| No responden | 4 | No realizan la actividad |

| | | |
|---|---|---|
| Acciones | 3 | Hallan las imágenes de $f(x)$ para un número finito de valores de $x$. No son capaces de realizar este proceso de manera infinita. |
| Concepción proceso de las sucesiones de números en el dominio | 27 | Los estudiantes consideran las sucesiones de valores en las imágenes para determinar el límite de las funciones, algunos de ellos centran su atención en la sucesión de valores en el dominio lo que los lleva a determinar límites erróneos, es decir, no consideraron la sucesión de valores en las imágenes. |
| Concepción proceso de las sucesiones de números en el codominio | | |
| Concepción proceso del límite | 0 | |

# Capítulo 5

# CONCLUSIONES

## 5.1 Conclusiones generales

Los resultados obtenidos tanto de las actividades como del cuestionario final, coinciden en parte con los resultados que presenta Pons (2014). Por ejemplo, en una de sus reflexiones afirma que uno de los conocimientos previos necesarios que necesita el estudiante en su camino a la comprensión de concepto de límite es el de función, en nuestra investigación los estudiantes presentan serias deficiencias con dicho concepto ya que presentan errores al evaluar los valores del dominio en la regla de correspondencia, lo anterior conduce a los estudiantes a tener menor éxito al tratar de determinar a qué número se aproxima la sucesión de valores en las imágenes. Además, reporta que los estudiantes deben familiarizase previamente con la función definida por partes, lo anterior se refuerza debido a que los estudiantes presenta problemas para resolver una de las actividades donde se involucra este tipo de funciones en su representación algebraico- numérica y gráfica, esto influyo en parte a que la mayoría de los estudiantes se alejarán de la construcción del concepto de límite desde la noción dinámica.

Sin embargo, nuestra investigación muestra evidencias de otros conocimientos previos que son necesarios y que no son considerados en la investigación de Cottril et al. (1996) y Pons (2014). Una de ellas es la comparación de números decimales, debido a que los estudiantes presentaron dificultad al trabajar con el ordenamiento de cantidades decimales e incluso presentan mayor dificultad al trabajar con números decimales negativos.

Otro de los conocimientos previos que el estudiante necesita es el de función constante, y que sin embargo Pons (2014) no aborda en sus resultados. Nuestra investigación muestra evidencias que al trabajar la actividad cuatro de la secuencia didáctica y al no estar familiarizados con este tipo de funciones, la mitad de la población realizó operaciones de resta o producto para hallar sus imágenes. Sin embargo, esta situación se volvió a presentar en el cuestionario final, donde, aunque en menor cantidad, realizaron operaciones para obtener las imágenes de la función constante, suma o producto. Del primer acercamiento con la función constante permitió que más alumnos presentaran mayor éxito al trabajar con ella en el cuestionario final, es decir, los impulsamos a que se acercaran al concepto límite de una función constante.

Es importante resaltar que también presentaron problemas para denotar adecuadamente la función, por ejemplo, varios de ellos emplean el signo de igualdad en situaciones como 5=2.3333, intentando relacionar que al valor de 5 en el dominio le corresponde el 2.3333 del codominio.

En nuestra investigación muchos estudiantes construyeron de manera aislada la aproximación en el dominio y el codominio. Esta situación no les permitió coordinar por medio de la función estos dos procesos, lo anterior coincide con lo reportado por Cottril et al. (1996) donde comenta que mayoría de los estudiantes que participaron en su investigación no logran conectar que el comportamiento del rango proviene de la aplicación de la función a lo que está sucediendo en el dominio. Para los estudiantes son procesos diferentes y aunque puedan empezar a establecer que hay una conexión entre ellos, no parecen entender que es la función y su proceso lo que hace esta conexión. Una situación similar reporta Pons (2014) debido a que encontró evidencias de que algunos estudiantes presentaron dificultades para coordinar las aproximaciones en el dominio y en el rango. Ya que, o no coordinan las aproximaciones, o solamente realizan dicha coordinación en un único modo de representación (numérico o gráfico) cuando las aproximaciones laterales coinciden. Sumando a lo anterior, en nuestra investigación hallamos evidencia de que muchos estudiantes solamente consideran una aproximación lateral ya sea derecha o izquierda para determinar a qué valor se aproxima la sucesión de valores tanto en el dominio como en el codominio, otros más realizaron una lectura de izquierda a derecha de todos los valores en la tabla.

Pons (2014) comenta que los estudiantes acceden al significado dinámico de límite mediante la utilización del modo de representación gráfico cuando las aproximaciones laterales coinciden, se progresa en modo numérico y se consolida en modo algebraico– numérico. Sin embargo, esta situación no se presentó en nuestra investigación ya que es en el modo de representación algebraico-numérico donde los estudiantes tienen mayor éxito en la construcción de una concepción proceso del concepto de límite dentro de la concepción dinámica. No obstante, donde se tiene menor éxito es en la representación gráfica.

Algunas de las situaciones que consideramos que pudieron influir a que los estudiantes presentaran menor desempeño en la representación gráfica se deben en primer lugar a que no se encontraban familiarizados con ella, esto implico a que no lograran determinar las imágenes de la función, por lo que fue oportuna la intervención del profesor al orientarlos a trazar líneas verticales y horizontales, para determinar un valor aproximado de las imágenes de la función Sin embargo, como se puede observar en el análisis de los datos, no se logró resultados destacados ya que algunos no lograron determinar que cuando la gráfica interseca al eje de las abscisas $f(x) = 0$. Otros más, mezclaron la sucesión de valores con el dominio y el codominio, lo que los llevó a conjeturar erróneamente que la función se aproximaba a dos valores diferentes.

En cuanto a la concepción métrica Pons (2014) reporta que los estudiantes tienen dificultades para coordinar las métricas en términos de desigualdades. Mientras que Cottril et al. (1996) señalaron que solo unos pocos estudiantes iban más allá de la coordinación de los dos procesos de aproximación debido a la problemática utilización de las desigualdades.

En cuanto a las actividades de nuestra investigación, cuya finalidad eran encaminar a los estudiantes a desarrollar una concepción métrica, el análisis indica que los estudiantes presentaron varios problemas durante la solución, uno de ellos fue el concepto de valor absoluto, debido a que no se encontraban familiarizados por lo menos con una noción básica. Dicha situación trató de ser subsanada con orientación por parte del docente, no obstante, muchos estudiantes presentaron en la tabla distancias negativas.

Otras de las dificultades encontradas fue la comparación de cantidades de decimales, por lo que a muchos de ellos les impidió establecer la condición solicitada en una de las preguntas, donde, se condiciona las distancias en valor absoluto de $f(x)$ con respecto al valor al que se aproxima la sucesión de valores de las imágenes de la función, Solamente pocos estudiantes presentaron indicios de una comprensión básica de la actividad y solo uno de ellos logró establecer las distancias con el límite, sin llegar a mayor profundidad.

## 5.2 Estructuras mentales construidas en la concepción dinámica

Como lo mencionamos en la sección anterior el cuestionario final fue diseñado para detectar las estructuras mentales que los estudiantes lograron construir una vez finalizada la secuencia didáctica en la noción dinámica considerando los diferentes modos de representación.

El análisis de los datos muestra que los estudiantes tienen mayor o menor éxito en la construcción de las estructuras mentales dependiendo los modos de representación. Como lo mencionamos con anterioridad la mayor cantidad de estudiantes que lograron construir una concepción proceso del concepto de límite se encuentra en la representación con 18 estudiantes, seguido por la representación numérica con 10 estudiantes, y con menor éxito se encuentra la representación algebraica debido que ningún estudiante logro construir esta estructura mental.

La mayoría de los estudiantes lograron construir una concepción proceso de las sucesiones numéricas en el dominio, el codominio o ambas, pero no fueron capaces de coordinarlos. Por ejemplo, en la representación numérica 21 estudiantes mostraron evidencias de haber construido esta estructura mental, en la algebraico-numérica, 16 y 27 en la gráfica.

En cuanto a la representación numérica 3 estudiantes de la población de estudio muestran evidencias de poseer una concepción acción, de la misma manera con la misma cantidad de estudiantes la representación gráfica.

La información anterior nos permite reflexionar que la secuencia didáctica permitió construir los primeros pasos de la descomposición genética (concepción dinámica), pero no se logró construir los niveles siguientes. Una reflexión similar la presentan Cottril et al. (1996) en su reporte de investigación en el que afirma que solo pocos estudiantes presentaron algún indicio de pasar muy por encima de los primeros cuatro pasos de la descomposición genética preliminar. Pero en general, solo tienen una idea vaga de las desigualdades que intervienen de la descripción del límite $\epsilon$-$\delta$. Además, no hubo estudiantes que manifestaran evidencias de haber alcanzado los últimos dos niveles.

Por otra parte Pons (2014) concluye que 59 estudiantes se encuentran en el nivel intra, 47 en el nivel inter y 23 en el nivel trans, del nivel esquema del concepto de límite. Lo anterior se obtiene del resultado de agregar varios elementos a su propuesta teórica.

## 5.3 Recomendaciones Pedagógicas

Señalamos que es de suma importancia que los profesores consideren reforzar las construcciones de conceptos previos como lo es el concepto de función, trabajar con actividades en las que se aborden diferentes tipos de funciones como la constante y las definidas por partes. También recomendamos abordar el concepto de valor absoluto y la comparación de cantidades decimales, ya que, sin ellas, los estudiantes no lograrán concepciones sólidas de objetos matemáticos más complejos como lo es el límite de una función.

Lo anteriormente expuesto nos orientó a reflexionar que las actividades propuestas resultaron adecuadas para la construcción de la concepción proceso de la noción dinámica del límite funcional, pero consideramos que es necesario cambiar el orden de implementación de algunas actividades de la secuencia. Una propuesta es el intercambio de la actividad 6 por la actividad 7, y de la actividad 10 por la actividad 12. También, consideramos que la actividad 9 puede ser resuelta antes de abordar la actividad 6. Recomendamos incorporar tareas para casa con ejercicios similares, para reforzar y encaminarlos hacia la definición formal de límite.

La información que obtuvimos de las respuestas dadas por los estudiantes permitieron detectar las construcciones y los mecanismos mentales descritos en la descomposición genética y que coinciden con los reportados por Cottrill et al. (1996). Sin embargo, notamos la falta de mención de una construcción adecuada de los números racionales que permitiría a los estudiantes ordenar y percibir el comportamiento de una sucesión. Además del concepto de valor absoluto, ya que es una llave que permitirá trabajar con la concepción métrica del límite de una función en futuras investigaciones

## BIBLIOGRAFÍA


Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Fuentes, S. R., Trigueros, M., y Weller, K. (2013). *APOS theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education*. Springer Science & Business Media.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K., & Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process scheme. *The Journal of Mathematical Behavior*, *15*(2), 167-192.

Blázquez, S., y Ortega, T. (2002). Nueva definición del límite funcional. *UNO: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, (30), 67-84.

Blázquez, S., Ortega, T., Gatica, S., y Benegas, J. (2006). Una conceptualización de límite para el aprendizaje inicial de análisis matemático en la universidad. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *9*(2), 189-209.

Hitt, F. (2003). Dificultades en el aprendizaje del cálculo. In *XI Meeting of Middle-Higher Level Mathematics Teachers*, Michoacan University San Nicolás de Hidalgo, Morelia (Mexico).

Hitt, F., y Páez, R. (2004). Dificultades de aprendizaje del concepto de límite y actividades de enseñanza. *Recuperado de: http://biblioteca. cinvestav. mx/indicadores/texto_completo/cinvestav/2005/133187_1. pdf*.

Monaghan, J., Sun, S., y Tall, D. (1994). Construction of the limit concept with a computer algebra system. *Proceedings of PME*, *18*(1), 279-286.

Li, L., y Tall, D. O. (1993). Constructing different concept images of sequences and limits by programming. *Proceedings of PME*, *17*(2), 41-48.

Trigueros, M. (2005). La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. *En revista Educación Matemática*, *17*(1), 5-31.

Pons, J. B. P. (2014). *Análisis de la comprensión en estudiantes de bachillerato del concepto de límite de una función en un punto* (Doctoral dissertation, Universitat d'Alacant-Universidad de Alicante).

Roa, S., y Oktaç, A. (2008). *Construcciones y mecanismos mentales asociados al concepto transformación lineal*. Tesis de Maestría no publicada, CINVESTAV- IPN.

SEP Plan de estudios 2017. México, 2017. Disponible en http://www.sems.gob.mx/work/models/sems/Resource/12615/5/images/BT_Calculo_Diferencial.pdf. Fecha de consulta, 7 de Mayo de 2019.

Tall, D. (1992). The transition to advanced mathematical thinking: Functions, limits, infinity and proof. *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, 495-511.

Vrancken, S., Gregorini, M. I., Engler, A., Muller, D., & Hecklein, M. (2006). Dificultades relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite. *Revista PREMISA*, *8*(29), 9-19.

# ANEXOS

Anexo 1. Secuencia Didáctica

Actividad 1

A partir de la tabla responde:

| $x$ | 2.9 | 2.99 | 2.999 | 2.9999 | … | 3.0001 | 3.001 | 3.01 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 14.21 | 14.9201 | 14.992001 | 14.99920001 | | 15.0080001 | 15.0801 | 15.81 |

- ¿A qué número se aproxima $x$ ?
- ¿A qué número se aproximan los valores de la función $f(x)$ ?
- Describe el comportamiento de la función $f(x)$ con relación al comportamiento de la variable $x$.

Actividad 2

A partir de la tabla responde:

| $x$ | 3.99 | 3.999 | 3.9999 | 3.99999 | … | 4.00001 | 4.0001 | 4.001 | 4.01 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 15.530 | 15.5254 | 15.5015 | 15.50001 | | 14.00003 | 14.0003 | 14.003 | 14.03 |

- ¿A qué número se aproxima $x$ ?
- ¿A qué número se aproximan los valores de la función $f(x)$ ?
- Describe el comportamiento de la función $f(x)$ con relación al comportamiento de la variable $x$.

Actividad 3

Completa la siguiente tabla para la función $f(x) = x^2 - 1$.

| $x$ | 1.9 | 1.99 | 1.999 | 1.9999 | 2 | 2.0001 | 2.001 | 2.01 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | | | | |

Con la información que reuniste contesta las siguientes preguntas:

- ¿A qué número se aproxima $x$ ?
- ¿A qué número se aproximan los valores de la función $f(x)$ ?
- Describe el comportamiento de la función $f(x)$ con relación al comportamiento de la variable $x$.

Actividad 4

Completa la siguiente tabla para la función $f(x) = -2$.

| $x$ | 3.9 | 3.99 | 3.999 | 4 | 4.0001 | 4.001 | 4.01 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | | | |

Con la información que reuniste contesta las siguientes preguntas:

- ¿A qué número se aproxima $x$ ?
- ¿A qué número se aproximan los valores de la función f(x)?
- Describe el comportamiento de la función $f(x)$ con relación al comportamiento de la variable $x$.

Actividad 5

Completa la siguiente tabla para la función f(x) $= \begin{cases} 2x+1 & x<0 \\ -2x-3 & x \geq 0 \end{cases}$

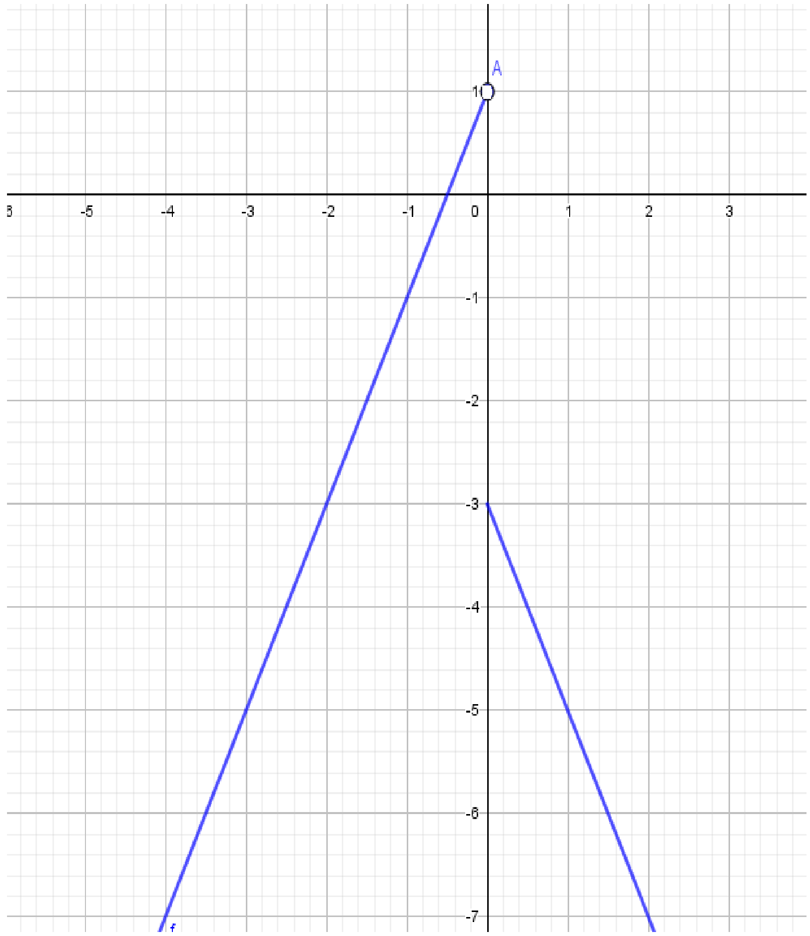
| $x$ | -0.1 | -0.01 | -0.001 | -0.0001 | 0 | 0.0001 | 0.001 | 0.01 | 0.1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | | | | | |

Con la información que reuniste contesta las siguientes preguntas:

- ¿A qué número se aproxima $x$ ?
- ¿A qué número se aproximan los valores de la función $f(x)$ ?
- Describe el comportamiento de la función $f(x)$ con relación al comportamiento de la variable $x$.

Actividad 6

A continuación se muestra la gráfica de cierta función, apóyate en ella y contesta las siguientes preguntas:




a) Elige un valor para la $x$ y calcula el valor de la función $f(x)$ en ese punto.

b) Cuando $x$ tome sucesivamente los valores -2, -1.5, -1, -0.5,-0.1, …, ¿a qué número se aproxima la función $f(x)$?

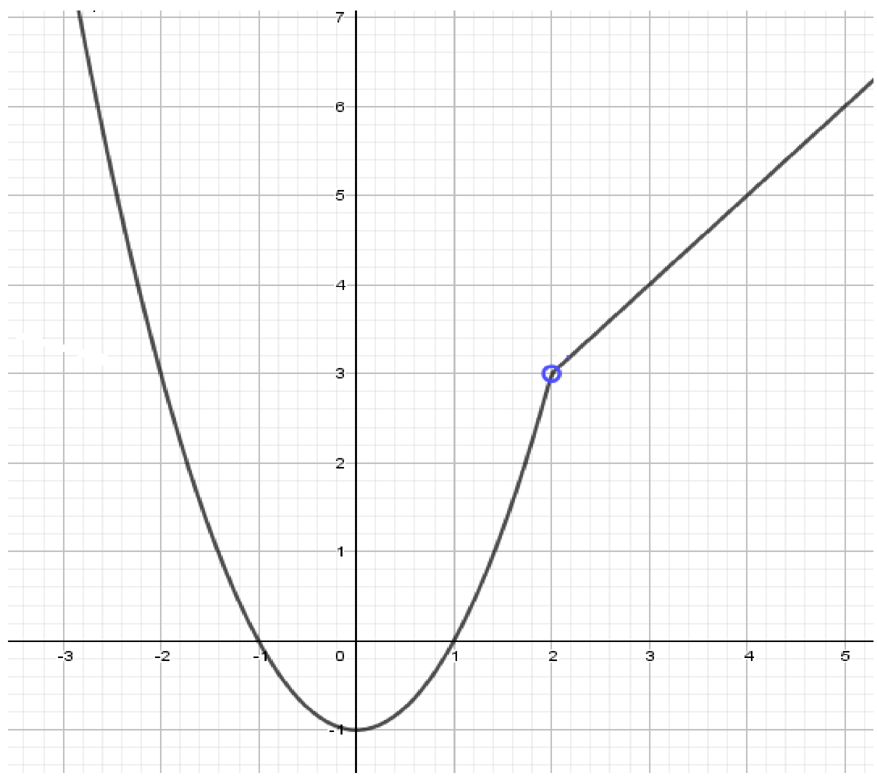
c) Cuando $x$ tome sucesivamente los valores 0.1, 0.5, 1, 1.5, 2,…., ¿a qué número se aproxima la función $f(x)$?

d) Describe el comportamiento de la función $f(x)$ con relación al comportamiento de la variable $x$.

Actividad 7

A continuación se muestra la gráfica de cierta función, apóyate en ella y contesta las siguientes preguntas:

a) Elige un valor para la $x$ y calcula el valor de la función $f(x)$ en ese punto.



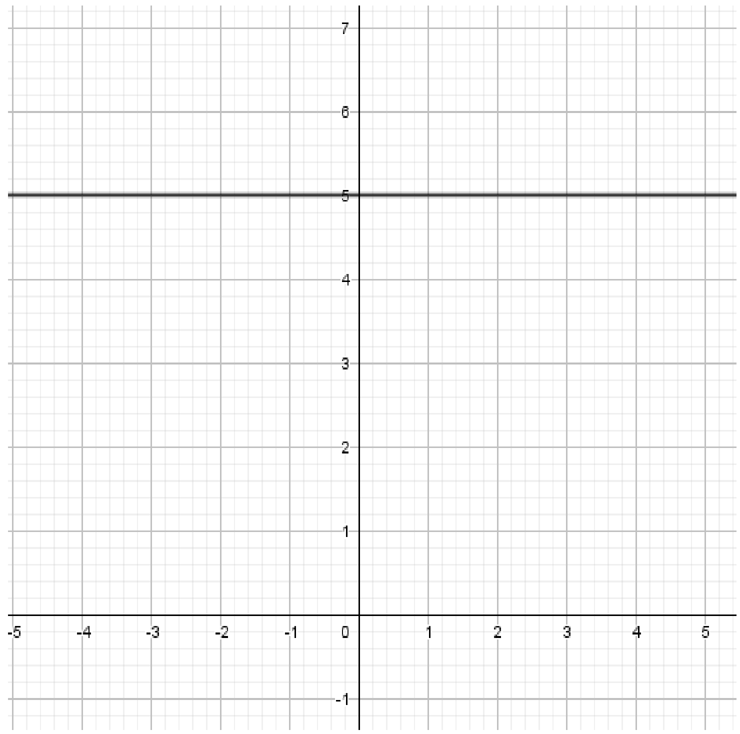

b) Cuando $x$ tome sucesivamente los valores 0.5, 1, 1.2, 1.5, 1.7, 1.9,… ¿a qué número se aproxima la función $f(x)$?

c) Cuando $x$ tome sucesivamente los valores 3.5, 3.2, 3, 2.7, 2.5, 2.3, 2.1,… ¿a qué número se aproxima la función $f(x)$?

d) Describe el comportamiento de la función $f(x)$ con relación al comportamiento de la variable $x$.

Actividad 8

A continuación se muestra la gráfica de cierta función, apóyate en ella y contesta las siguientes preguntas



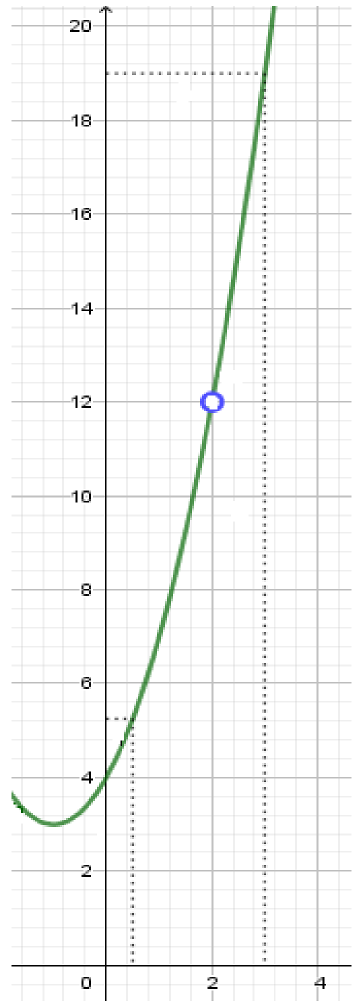

a) Elige un valor para la $x$ y calcula el valor de la función $f(x)$ en ese punto.

b) Cuando $x$ tome sucesivamente los valores 0.5, 1, 1.3, 1.5, 1.7, 1.9,… ¿a qué número se aproxima la función $f(x)$?

c) Cuando $x$ tome, sucesivamente, los valores 3.5, 3, 2.7, 2.5, 2.3, 2.1,… ¿a qué número se aproxima la función $f(x)$?

d) Describe el comportamiento de la función $f(x)$ con relación al comportamiento de la variable $x$.

Actividad 9




Observa la siguiente gráfica correspondiente a cierta función $g(x)$, apóyate de los trazos y nota lo siguiente

Si $x = 0.5$, el valor de $g(x) = 5.25$

Si $x = 3$, el valor de $g(x) = 19$

Realiza los trazos necesarios para completar los siguientes enunciados:

Si $x = 1$, el valor de $g(x) =$ _______

Si $x = 3.2$, el valor de $g(x) =$ _______

Si $x = 1.5$, el valor de $g(x) =$ _______

Si $x = 2.5$, el valor de $g(x) =$ _______

Si $x = 1.75$, el valor de $g(x) =$ _______

Si $x = 1.25$, el valor de $g(x) =$ _______

¿Qué valor aproximadamente tomará $g(x)$, cuando $x = 1.9$ ?

¿Qué valor aproximadamente tomará $g(x)$, cuando $x = 2.1$ ?

Actividad 10

En la siguiente tabla te presentamos los valores que toma la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x < 2 \\ x + 1 & x \geq 2 \end{cases}$

para ciertos valores. Además, se han construido dos columnas más con los valores de diferencias en valor absoluto de $|x - 2|$ y $|f(x) - 3|$. Analiza detenidamente los datos presentados y contesta las siguientes preguntas.

| $x$ | $f(x)$ | $\|x - 2\|$ | $\|f(x) - 3\|$ |
|---|---|---|---|
| 1,9 | 2,61 | 0,1 | 0,39 |
| 1,99 | 2,960 | 0,01 | 0,040 |
| 1,999 | 2,9960 | 0,001 | 0,004 |
| 1,9999 | 2,99960 | 0,0001 | 0,0004 |
| … | … | … | … |
| 2,0001 | 3,0001 | 0,0001 | 0,0001 |
| 2,001 | 3,001 | 0,001 | 0,001 |
| 2,01 | 3,01 | 0,01 | 0,01 |
| 2,1 | 3,1 | 0,1 | 0,1 |

¿Qué tan próximos deben de estar los valores de $x$ de 2, para que la diferencias de $f(x) - 3$ en valor absoluto sean menor que 0.004?

Con la información que posees hasta ahora, ¿podrías indicar cuál es el límite de la función $f(x)$ en el punto $x = 2$? Justifica tu respuesta

Actividad 11

En la actividad 4 calculaste los valores que toma la función $f(x) = -2$ cuando la variable $x$ toma ciertos valores, te presentamos en la siguiente tabla los valores que toma $f(x)$. Además se han construido dos columnas más de diferencias en valor absoluto, en la cuarta columna se han calculado los valores absoluto de $|f(x) + 2|$. Con ayuda de tu calculadora encuentra los valores de $|x - 4|$.

Una vez que hayas completado la tabla contesta las siguientes preguntas

| $x$ | $f(x)$ | $\|x-4\|$ | $\|f(x)+2\|$ |
|---|---|---|---|
| 3,9 | -2 | | 0 |
| 3,99 | -2 | | 0 |
| 3,999 | -2 | | 0 |
| 3,9999 | -2 | | 0 |
| … | … | … | … |
| 4,0001 | -2 | | 0 |
| 4,001 | -2 | | 0 |
| 4,01 | -2 | | 0 |
| 4,1 | -2 | | 0 |

¿Qué sucede con las distancias de $|x - 4|$cuándo $x$ toma valores cada vez más próximos a 4?

¿Qué sucede con las distancias de $|f(x) + 2|$ cuándo $f(x)$ toma valores cada vez más próximos a -2?

¿Qué tan próximos deben de estar los valores de $x$ de 4, para que la diferencias de $f(x) - (-2)$, en valor absoluto, sea menor qué 0,0001?

Con la información que posees hasta ahora, ¿podrías indicar cuál es el límite de la función $f(x)$ en el punto $x = 4$?

Actividad 12

En la actividad 1 calculaste los valores que toma la función $f(x) = x^2 - 1$ cuando la variable $x$ toma ciertos valores, te presentamos en la siguiente tabla los valores que toma $f(x)$. Además se han construido dos columnas más de diferencias en valor absoluto, en la tercera columna se han calculado los valores absoluto de $|x - 2|$. Con ayuda de tu calculadora encuentra los valores de $|f(x) - 3|$.

Una vez que hayas completado la tabla contesta las siguientes preguntas

| $x$ | $f(x)$ | $\|x - 2\|$ | $\|f(x) - 3\|$ |
|---|---|---|---|
| 1,9 | 2,61 | 0,1 | |
| 1,99 | 2,9601 | 0,01 | |
| 1,999 | 2,996001 | 0,001 | |
| 1,9999 | 2,99960001 | 0,0001 | |
| … | … | … | … |
| 2,0001 | 3,00040001 | 0,0001 | |
| 2,001 | 3,004001 | 0,001 | |
| 2,01 | 3,0401 | 0,01 | |
| 2,1 | 3,41 | 0,1 | |

¿Qué sucede con las distancias $|x - 2|$ cuando $x$ toma valores cada vez más próximos a 2?

¿Qué sucede con las distancias de $|f(x) - 3|$ cuando $f(x)$ toma valores cada vez más próximos a 3?

¿Qué tan próximos deben de estar los valores de $x$ de 2, para que la diferencias de $f(x) - 3$, en valor absoluto, sea menor qué 0,0399?

Con la información que posees hasta ahora, ¿podrías indicar cuál es el límite de la función $f(x)$ en el punto $x = 2$?

Anexo 2. Cuestionario final

Nombre: _______________________________________________ Edad _______

Sexo: M (    ) F (    )

El objetivo de esta prueba es conocer tu comprensión del concepto límite después de haber trabajado la secuencia didáctica en clase. Los resultados se utilizarán como parte de una investigación académica y serán presentados de manera anónima. Gracias por tu participación

1.- A partir de la tabla responde:

| $x$ | 4.9 | 4.99 | 4.999 | 4.9999 | … | 5.00001 | 5.0001 | 5.001 | 5.01 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 9.8 | 9.98 | 9.998 | 9.9998 | | 10.00002 | 10.0002 | 10.002 | 10.02 |

- ¿Cuál es el límite de la función en $x = 5$? Justifica tu respuesta.

2.- A partir de la tabla responde:

| $x$ | 1.7 | 1.8 | 1.99 | 1.999 | … | 2.001 | 2.01 | 2.2 | 2.3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 3.9 | 4.24 | 4.960 | 4.9960 | | 4.001 | 4.01 | 4.2 | 4.3 |

- ¿Cuál es el límite de la función en $x = 2$? Justifica tu respuesta.
-

3.- Completa la siguiente tabla para la función $f(x) = 6$.

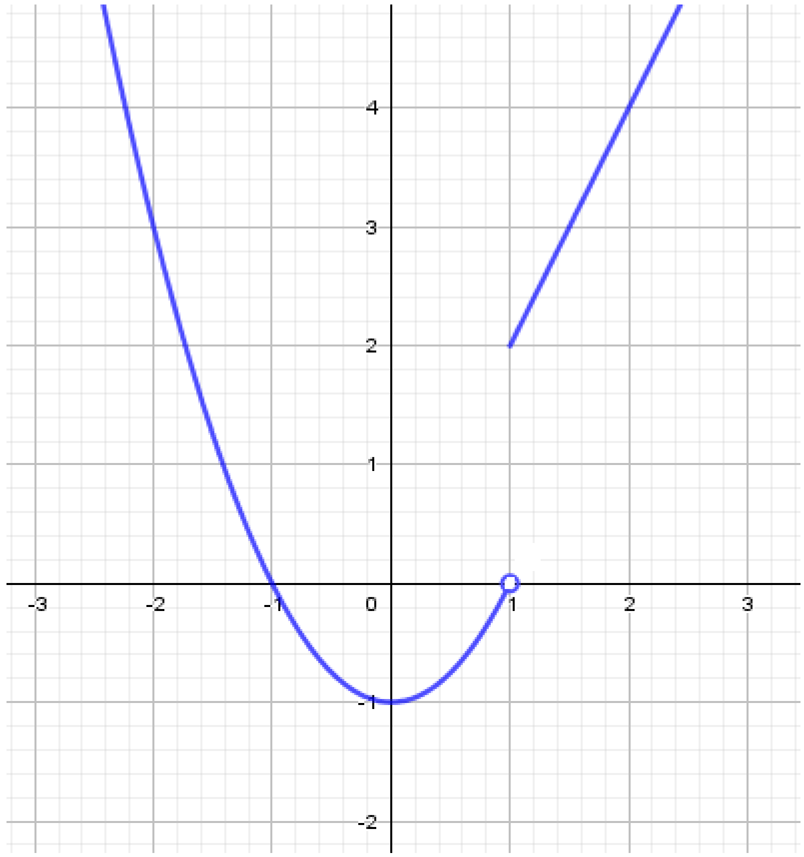
| $x$ | 2.9 | 2.99 | 2.999 | | 3.0001 | 3.001 | 3.01 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | | | |

Con la información que reuniste contesta la siguiente pregunta:

- ¿Cuál es el límite de la función en $x = 3$? Justifica tu respuesta.

4.- A continuación se muestra la gráfica de cierta función, apóyate en ella y contesta las siguientes preguntas:

- Cuando x tome sucesivamente los valores -0.5, 0, 0.3, 0.5, 0.9,…, ¿a qué número se aproxima la función f(x)?




- Cuando x tome sucesivamente los valores 3, 2.5, 2, 1.5, 1.1,…, ¿a qué número se aproxima la función f(x)?

- ¿Cuál es límite de la función en $x = 1$? Justifica tu respuesta.