



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

PROPUESTA DIDÁCTICA BASADA EN LA TEORÍA DE INTELIGENCIAS MÚLTIPLES PARA LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE RAZONES Y PROPORCIONES EN SECUNDARIA

TESIS
PARA OBTENER EL TÍTULO DE
MAESTRA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

PRESENTA
LIC. ALMA SOTO CASTILLO

DIRECTOR DE TESIS
DR. JUAN CARLOS MACÍAS ROMERO

CO-DIRECTOR DE TESIS
DRA. LIDIA AURORA HERNÁNDEZ REBOLLAR

PUEBLA, PUE. MARZO 2019



BUAP.

DRA. LIDIA AURORA HERNÁNDEZ REBOLLAR
SECRETARIA DE INVESTIGACIÓN Y
ESTUDIOS DE POSTGRADO, FCFM-BUAP
P R E S E N T E:

Por este medio le informo que la C:

LIC. ALMA SOTO CASTILLO

Estudiante de la Maestría en Educación Matemática, ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 14 de diciembre de 2018, con la tesis titulada:

"Propuesta didáctica basada en la teoría de inteligencias múltiples para la enseñanza y aprendizaje de razones y proporciones en secundaria"

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

A T E N T A M E N T E.
H. Puebla de Z. a 26 de febrero de 2019.


DR. JOSIP SLISKO IGNJATOV
COORDINADOR DE LA MAESTRIA
EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA.



Ccp. Archivo.
DR JAJL / l agm*

Facultad
de Ciencias
Físico Matemáticas

Av. San Claudio y 18 sur, edif. FM1
Ciudad Universitaria, Col. San
Manuel, Puebla, Pue. C.P. 72570
01 (222) 229 55 00 Ext. 7550 y 7552

AGRADECIMIENTOS

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por el apoyo otorgado en la realización de este proyecto, financiando en el periodo comprendido de enero 2017 a diciembre 2018.

CVU: 817711

Agradezco a Dios por haberme permitido realizar este posgrado y por haber sido mi motor e inspiración en cada trabajo, idea, tarea y exposición.

Estudiar la Maestría en Educación Matemática en la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, modificó radicalmente mi manera de pensar y actuar en el ámbito profesional. Mi trabajo docente ahora es más reflexivo gracias a lo que conocí y aprendí durante la maestría.

Le doy las gracias al Dr. Juan Carlos Macías Romero por el compromiso y entusiasmo durante la realización de esta tesis. Gracias a él pude presentar oportunamente trabajos de calidad en los foros de avances y congresos nacionales e internacionales. Gracias por los ánimos y sabios consejos en los momentos de turbulencia, gracias por confiar y creer en mí, no pude haber tenido mejor director de tesis.

Agradezco a mis profesores por los conocimientos y experiencias compartidas, principalmente al Dr. José Gabriel Sánchez Ruíz por tomarse el tiempo para colaborar con artículos que me sirvieron para el proyecto de investigación, a la Dra. Honorina Ruíz Estrada por ayudarme a seleccionar los problemas matemáticos del instrumento que presento y a la Dra. Ileana Borja Técuatl por disipar cualquier duda que surgía.

Agradezco a la Dra. Lidia Aurora Sánchez Rebollar y a la Dra. María Aracely Juárez Ramírez por la disposición y observaciones pertinentes en los foros y trabajos escritos. Gracias a sus recomendaciones puede encaminar esta tesis.

Agradezco a la Lic. Abigail García Martínez por su paciencia, entusiasmo y apoyo en cada proceso administrativo. Gracias por preocuparte y por estar al pendiente.

Finalmente, agradezco a mi familia por su apoyo y cariño, especialmente a mi esposo, quien me motivó a iniciar esta maestría y me alentó para dar siempre lo mejor de mí humana y académicamente.

ÍNDICE

RESUMEN	9
ABSTRACT	10
INTRODUCCIÓN	11
CAPÍTULO I: PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	13
1.1 ANTECEDENTES.....	14
1.2 OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN	16
1.3 PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN.....	16
1.4 JUSTIFICACIÓN	17
CAPÍTULO II: MARCO TEÓRICO	18
2.1 INTELIGENCIAS MÚLTIPLES.....	19
2.2 INTELIGENCIAS MÚLTIPLES EN EL AULA	21
2.3 LA RAZÓN ENTRE DOS NÚMEROS	24
2.4 EL RAZONAMIENTO PROPORCIONAL	27
CAPÍTULO III: MÉTODO	31
3.1 CUESTIONARIO DE INTELIGENCIAS MÚLTIPLES AL DOCENTE Y A LOS ESTUDIANTES.....	33
3.2 ACTIVIDADES DE INTRODUCCIÓN A LAS INTELIGENCIAS MÚLTIPLES	33
3.3 ACTIVIDAD PARA LA EXPLICACIÓN DE LAS INTELIGENCIAS MÚLTIPLES.	33
3.4 ANOTACIONES DE LA OBSERVACIÓN DIRECTA.....	34
3.5 PRE-TEST DEL TEMA: RAZONES Y PROPORCIONES	34
3.6 ACTIVIDADES PARA ENSEÑAR CONTENIDO MATEMÁTICO USANDO LAS INTELIGENCIAS MÚLTIPLES.....	36

3.7 PUESTA DEL PLAN EN PRÁCTICA	37
3.8 POST-TEST DEL TEMA: RAZONES Y PROPORCIONES.....	47
3.9 ENTREVISTAS.....	47
CAPÍTULO IV: RESULTADOS.....	48
4.1 RESULTADOS DE LA INVESTIGACIÓN	49
4.1.1 Cuestionario de Inteligencias Múltiples al docente y a los estudiantes, un contraste con las anotaciones de la observación directa.....	49
4.1.2 Actividades de introducción a las Inteligencias Múltiples.....	50
4.1.3 Actividad para la explicación de las Inteligencias Múltiples.....	51
4.1.4 Pre-test del tema: razones y proporciones.....	52
4.1.5 Actividades para enseñar contenido matemático usando las Inteligencias Múltiples	63
4.1.6 Post-test del tema: razones y proporciones	88
4.1.7 Entrevistas.....	91
4.2 ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS.....	91
CAPÍTULO V: CONCLUSIONES.....	98
REFLEXIÓN PERSONAL	102
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	103
APÉNDICES.....	106
ANEXOS	113

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Ocho maneras de aprender	22
Tabla 2. Test de razones y proporciones	34
Tabla 3. Organización del plan secuencial	37
Tabla 4. El plan secuencial	37
Tabla 5. Inteligencias en los estudiantes	49
Tabla 6. Organización del test de IM	51
Tabla 7. Categorización de resultados del pre-test	55
Tabla 8. Resultados del pre-test por alumno y por ítem	56
Tabla 9. Categorización de resultados del post-test	88
Tabla 10. Resultados del post-test por alumno y por ítem	89

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Preguntas para planificar IM	23
Figura 2. Modelo aditivo	28
Figura 3. Característica básica de la proporcionalidad directa	28
Figura 4. Pizza de Inteligencias Múltiples	34
Figura 5. Introducción a las IM	50
Figura 6. Pizza de IM	52
Figura 7. Razón expresada como un solo número	57
Figura 8. Razón sin simplificar	57
Figura 9. Razón sin etiquetas	57
Figura 10. Sin relación lógica al operar con cantidades	58
Figura 11. Problema resuelto sin establecer relaciones lógicas	62
Figura 12. Razonamiento aditivo en un problema de proporcionalidad	62
Figura 13. Diferencia entre una razón y una fracción	63
Figura 14. Razón sin simplificar y razón simplificada	63
Figura 15. Equivalencia correcta sin usar clones	64
Figura 16. Respuesta de un alumno muy lógico-matemático	66
Figura 17. Razones simplificadas con etiquetas y sin etiquetas	67
Figura 18. Escala incorrecta de un alumno muy espacial	68

Figura 19. Dibujos a escala de alumnos muy espaciales	68
Figura 20. Dibujos de alumnos muy espaciales	69
Figura 21. Dibujos a escala de alumnos muy cinético-corporales	69
Figura 22. Experiencia de un alumno muy espacial al realizar su dibujo.....	70
Figura 23. Experiencia de un alumno muy cinético-corporal al realizar su dibujo	70
Figura 24. Experiencia de un alumno poco espacial al realizar su dibujo	71
Figura 25. Experiencia de A11 después de la sesión 5	71
Figura 26. Experiencia de A2 después de la sesión 5	71
Figura 27. Experiencia de A7 después de la sesión 5	72
Figura 28. Trazo de alumna muy espacial	72
Figura 29. Orden invertido de los lados de 10 cm y 11 cm	73
Figura 30. Correspondencia entre los lados	73
Figura 31. Trazo de la opción 2	73
Figura 32. Respuestas a preguntas 3 y 4 de hoja 2.....	74
Figura 33. Respuesta correcta para T1 de alumno poco lógico-matemático (A14).....	75
Figura 34. Respuesta correcta e incompleta para T2 de alumno muy espacial (A7)	76
Figura 35. Respuesta incorrecta de A9 para T2	76
Figura 36. Respuesta incorrecta de A10 para T2	76
Figura 37. Respuesta incorrecta de A10 para T3	77
Figura 38. Estudiante (A12) que identificó dobles y mitades en los datos de la tabla.....	78
Figura 39. Alumno espacial escribiendo los datos en el modelo situacional.....	79
Figura 40. Procedimiento de A13	79
Figura 41. Respuesta correcta de alumno poco lógico-matemático.....	80
Figura 42. Trabajo de A6 en hoja 6, sesión 9.....	83
Figura 43. Trabajo de A8 en hoja 6, sesión 9.....	83
Figura 44. Trabajo de A14 en hoja 6, sesión 9.....	84
Figura 45. Letra de la canción de A1, A3 y A13	85
Figura 46. Letra de la canción de A2, A12 y A15	86
Figura 47. Letra de la canción de A7 y A8	86
Figura 48. Letra de la canción de A6 y A11	87
Figura 49. Respuestas de A15 en I7 e I8 del post-test	88

Figura 50. Comparación de resultados por ítem entre el pre-test y el post-test	91
Figura 51. Gráfica comparativa de resultados por alumno entre el pre-test y post-test.....	97

RESUMEN

Esta tesis tiene como objetivos identificar los errores que cometen los estudiantes de primer grado de secundaria al resolver problemas de razones y proporciones y, diseñar una propuesta didáctica que favorezca su aprendizaje a través de las Inteligencias Múltiples (IM).

Durante la realización de ésta investigación, se aplicó un test de las IM al docente y a los estudiantes y al docente de matemáticas; se realizaron actividades introductorias y de explicación de las IM. Posteriormente se aplicó a un grupo de 16 alumnos de primer grado de secundaria un pre test de razones y proporciones diseñado con diez problemas, cinco problemas para el tema de razones entre dos números y cinco para el tema de proporcionalidad. Se encontró que los estudiantes expresan la razón como un solo número y que no etiquetan las cantidades que la forman; además, operan con números sin establecer relaciones de proporcionalidad y utilizan el razonamiento aditivo para resolver problemas de proporcionalidad directa. El porcentaje en respuestas correctas fue del 24%.

Se diseñaron y aplicaron actividades referentes a los temas, usando en éstas las IM de los alumnos, llevando a cabo dos secuencias didácticas —una para cada tema- de cinco sesiones cada una.

Se aplicó un post test cuyos resultados mostraron 75% de respuestas correctas, en éste pudo observarse que ningún alumno usó la estrategia aditiva al resolver los problemas de proporcionalidad; sin embargo, no todos los alumnos pudieron simplificar correctamente las razones entre dos números de algunos ítems.

Finalmente se entrevistaron a los sujetos de estudio quienes externaron haber comprendido más el tema de razones que el de proporcionalidad, atribuyendo que sus resultados en el post test tuvieron que ver con haber usado sus inteligencias.

ABSTRACT

The purpose of this research is identify the mistakes made by students on the first grade of secondary school by solving ratios and proportions problems and, to design a didactic proposal that favours their learning through the use of Multiple Intelligences (MI).

During the realization of this research an MI test was answered by the mathematic's teacher and students, introductory activities and explanation of the MI were carried out. Subsequently, a pretest of ratios and proportions was applied to a group of 16 first-year secondary students, designed with ten problems, five problems for the topic of ratios and five for the topic of proportionality. We founded that students express the ratios as a single number and they do not label the numbers of the ratios; in addition, they operate with numbers without establishing relations of proportionality and use additive reasoning to solve problems of direct proportionality. The percentage in correct answers was 24%.

Then, we worked with activities related to the topic, but now using students MI, carrying out two didactic sequences -one for each theme- of five sessions each one.

A posttest was applied and the results showed a 75% of correct answers, in this it could be observed that no student used the additive strategy when solving the problems of proportionality; however, not all students were able to correctly simplify the ratios between two numbers of some items.

Finally, the subjects of the study were interviewed, who explained that they had understood more about ratios than proportionality, attributing that their results in the post test were better because they used their intelligences.

INTRODUCCIÓN

La finalidad de este trabajo es la de presentar una propuesta didáctica, cuyo diseño busca que los alumnos y docentes utilicen las Inteligencias Múltiples para la enseñanza y aprendizaje del tema de razones y proporciones.

En esta investigación, los sujetos de estudio fueron alumnos de primer grado de la secundaria José Vasconcelos de Cuautlancingo, Puebla. En ellos, se identificó su inteligencia más desarrollada; se analizaron los errores que cometieron al resolver problemas de razones y proporciones; se diseñaron y aplicaron secuencias didácticas para favorecer el aprendizaje del tema en estudio y finalmente se hizo una comparación del desempeño de cada adolescente antes y después de la propuesta.

La tesis está estructurada en cinco capítulos, principalmente.

En el capítulo I, mostramos el planteamiento del problema, en el que se incluye una introducción, objetivos, preguntas de investigación y la justificación de la misma.

En el capítulo II describimos el marco teórico, en el cuál, los autores que se destacan son: Gardner (1994) para explicar y definir las Inteligencias Múltiples (IM), Armstrong (2006) para dar a conocer cómo es que aprenden los alumnos con determinadas inteligencias, Lamon (2006) para trabajar las razones entre dos números y Mochón (2013) para trabajar con las proporciones.

En el capítulo III, presentamos nuestra metodología cuyo enfoque es cualitativo descriptivo, y nuestro método, el cual diseñamos basándonos en diversos autores.

En el capítulo IV, damos a conocer los resultados de la investigación, que en términos generales fueron positivos, ya que observamos que el uso de las inteligencias múltiples en el aula de los sujetos de estudio, sí favoreció el aprendizaje de los temas.

En el capítulo V, exponemos las conclusiones, donde exhibimos la relación de las respuestas a las preguntas de investigación con los resultados obtenidos.

Finalizamos el documento con las reflexiones, referencias bibliográficas, apéndices y anexos. En estos últimos se encuentra el material usado en la investigación: test de Inteligencias

de Gardner, hojas para recortar y explicar Inteligencias Múltiples, test de razones y proporciones y hojas de trabajo (1-6).

CAPÍTULO I: PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1 ANTECEDENTES

En un principio la inteligencia se consideró como algo biológico, hereditario, que estaba dentro de la mente del individuo y que podía medirse; en otras palabras, como un atributo unitario situado en la cabeza de los individuos (Gardner, Kornhaber y Krechevsky, 1993).

Culturalmente, la sociedad ha limitado el concepto de “inteligencia”, asumiendo que una persona lo es si, ésta tiene aptitudes favorables únicamente en matemáticas, catalogando como “talentos” el resto de capacidades del individuo. Por otra parte, hay docentes de secundaria que buscan el modo de ayudar a sus alumnos a pensar con mayor eficacia cuando se enfrentan a problemas académicos; entre ellos, problemas matemáticos.

Fue Gardner (1994) quien afirmó que es importante reconocer y alimentar todas las inteligencias humanas y todas las combinaciones de inteligencias porque todos somos diferentes y poseemos combinaciones distintas de inteligencias (lingüística, lógico-matemática, espacial, cinético-corporal, musical, interpersonal, intrapersonal y naturalista). A raíz de la Teoría de Inteligencias Múltiples, muchos se dedicaron a trabajar con ellas, entre los autores destaca Armstrong (2006).

En la revisión de la literatura para sustentar el presente trabajo, se encontró que hay un sinnúmero de investigaciones que giran en torno al estudio de las Inteligencias que Gardner propone, pero en casi todas, el estudio es por separado. Es justamente Armstrong (2006) quien unió todas y dedicó catorce años de su vida aplicando esta teoría dentro de las aulas con alumnos de todos los niveles (desde primaria hasta cursos de doctorado), ese trabajo lo llevó a afirmar en su libro de Inteligencias Múltiples en el aula, que existen ocho maneras diferentes de enseñar a los alumnos.

Ferrándiz, Bermejo, Sainz, Ferrando y Prieto (2008) realizaron un estudio del razonamiento lógico-matemático, desde el modelo de las Inteligencias Múltiples, en el que proponen evaluar en los alumnos por lo menos seis de las ocho inteligencias para analizar las destrezas y dificultades y así configurar una instrucción más ajustada a las necesidades cognitivas de los estudiantes. Aunque su estudio profundizó en la inteligencia lógico-matemática, concluyen que utilizar el modelo de Inteligencias Múltiples tiene grandes ventajas, entre ellas, la posibilidad

de ofrecer una respuesta educativa adecuada a los alumnos evaluados mediante diseños de currículos.

Por otra parte, la diversidad de estudios sobre el tema de razones y proporciones que han realizado investigadores educativos de diferentes partes del mundo, ponen en evidencia claras dificultades en la enseñanza y aprendizaje de estos temas. Algunos de ellos, presentan alternativas para su enseñanza, pero ninguno incluye a las Inteligencias Múltiples.

En México, desde el año 2009 hasta el año 2013, la Secretaría de Educación Pública (SEP) realizó la prueba de Evaluación Nacional del Logro Académico en Centros Escolares (ENLACE) de Educación Básica. Los resultados nacionales en secundaria, oscilan del 50.4% al 57.7% en el nivel de insuficiencia (el más bajo de todos) en la asignatura de matemáticas. A partir del año 2015, la SEP en coordinación con el Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE) y las autoridades educativas de las entidades federativas, pusieron en operación el Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes (PLANEA), aplicándolo solo a grados terminales en primaria y secundaria. Los resultados en esta última continuaron deficientes por lo que desde la prueba PLANEA 2016 pudieron darse a conocer los problemas que se aplicaron, nueve de un total de 50 ítems son problemas de proporcionalidad, sin embargo no muestran los resultados nacionales por problema. De la misma manera ocurrió en PLANEA 2017 pero ahora con 10 problemas de proporcionalidad de un total de 50, es decir, aumentaron los ítems relacionados con proporcionalidad y los resultados continúan deficientes en más del 50% de la población estudiantil que cursa tercero de secundaria.

De acuerdo con Reyes-Gasperini (2013) la proporcionalidad, en tanto conocimiento matemático escolar, ha sido tema de estudio para la investigación científica de corte educativa por más de cuatro décadas. Las primeras investigaciones versaron sobre las dificultades que exhiben los estudiantes al resolver enunciados o problemas que involucren al razonamiento proporcional, muchos de estos estudios utilizaron fundamentos o aspectos cognitivos. Posteriormente, la investigación se orientó hacia los estudios de tipificación de estrategias ante dichas tareas: se clasificaban las posibles respuestas, las dificultades o errores mostrados por los estudiantes ante ciertas tareas o justo al momento de intentar resolver o trabajar una situación problema. Hart (1984) mostró en los resultados de su investigación que el uso de la estrategia aditiva es el error más común de los estudiantes cuando resuelven problemas de proporcionalidad

directa, ya que debieron haber usado la estrategia multiplicativa. Van Dooren, Bock & Verschaffel encontraron lo mismo en su investigación realizada en el año 2010, llamándolo: uso del razonamiento aditivo dentro de una situación de proporcionalidad. Otros autores que dieron a conocer este error fueron Balderas, Block y Ramos (2014), ellos lo nombraron relación aditiva pero su estudio no fue con alumnos sino con un grupo de profesores.

En el trabajo de Mochón (2012) se da a conocer que una muestra de alumnos de secundaria, al resolver problemas de proporcionalidad directa, ignoran parte de los datos, dan respuestas ilógicas y presentan errores al operar con los números a pesar de que su regla de tres esté bien planteada; mientras que Torres y Deulofeu (2018) encontraron que una alumna de sexto de primaria confunde el valor unitario y cuando debe encontrar una razón proporcional, suma 2 al primer componente y multiplica por dos el segundo componente, es decir, aplica a un número la estrategia aditiva y al otro la estrategia multiplicativa por lo que no se conserva la proporción.

1.2 OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN

- Identificar los errores que cometen los estudiantes de primer grado de secundaria al resolver problemas de razones y proporciones.
- Diseñar una propuesta didáctica que favorezca el aprendizaje de las razones y proporciones a través del uso de las Inteligencias Múltiples.

1.3 PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

- ¿Cuáles son los errores que cometen los alumnos de primero de secundaria cuando resuelven problemas de razones y proporciones?
- ¿Cuáles son los beneficios que se obtienen al aplicar la secuencia didáctica y permitirle a los estudiantes usar sus Inteligencias Múltiples mientras aprenden razones y proporciones?
- ¿Cuáles son los factores que permiten o no, el uso de las inteligencias múltiples en los estudiantes de primero de secundaria al aprender razones y proporciones?

1.4 JUSTIFICACIÓN

El sistema educativo no valora por igual todas las inteligencias. El colegio, no hace más que reflejar la visión de la sociedad en su conjunto. A nadie le extraña que un estudiante tenga que hacer muchos ejercicios para aprender a resolver ecuaciones, sin embargo, no nos planteamos la necesidad de apoyar a nuestros estudiantes a desarrollar y estimular el resto de sus capacidades; posiblemente, porque nunca lo hemos considerado parte de nuestra tarea o no hemos aprendido a hacerlo.

Para la aplicación de cualquier modelo de aprendizaje basado en las inteligencias múltiples, debemos en primera instancia aplicárnoslo a nosotros mismos como educadores y estudiantes adultos, porque si no tenemos una comprensión de la teoría íntimamente ligada a la experiencia y hayamos hecho nuestro este conocimiento, es decir estemos en condiciones de aplicarlo, no como copia, sino como modelo propio, no podremos trasmitirlo con éxito acompañado de experiencias cristalizadoras.

En el plan de estudios de secundaria de México, los aprendizajes esperados señalan los conocimientos y habilidades que los alumnos deben alcanzar al finalizar el programa de cada materia. El último aprendizaje esperado del curso de primer grado exige que un estudiante sea capaz de resolver problemas de proporcionalidad directa del tipo valor faltante (SEP, 2011, p.26). El inconveniente surge cuando el docente se enfrenta al diseño de la secuencia didáctica. Comúnmente los profesores optan por enseñar a sus alumnos a resolver problemas de proporcionalidad mediante la regla de tres, lo que concuerda con Ramírez y Block (2009), quienes mencionan que las ideas de proporcionalidad son en general mal entendidas, debido a que es común que en el aula se enseñe este tema de manera mecánica utilizando la regla de tres. Es Mochón (2012) quien comenta que la enseñanza de la regla de tres para resolver problemas de proporcionalidad, es insuficiente para que el alumno pueda desarrollar de manera completa una concepción sobre las ideas fundamentales de la proporcionalidad.

Sabiendo que una proporción es básicamente la igualdad entre dos razones (Mochón, 2012, p. 134), el profesor frente a grupo debe considerar que antes de enseñar a resolver problemas de proporcionalidad, el trabajo de la clase tiene que anteponer a las razones entre dos números, ya que si sus alumnos no saben plantear una razón, mucho menos lo harán con una proporción, aunque esta última, sí de manera mecánica.

CAPÍTULO II: MARCO TEÓRICO

2.1 INTELIGENCIAS MÚLTIPLES

Gardner (1998) manifiesta que todos somos diferentes, en gran parte porque todos tenemos distintas combinaciones de inteligencias, éstas se interrelacionan y son:

- *Inteligencia lingüística:* es la capacidad de utilizar las palabras de manera eficaz; incluye la capacidad de usar la sintaxis, fonología y semántica de las palabras. Los individuos forman un modelo mental del mundo detrás de palabras. Cuando se menciona que un estudiante tiene un mayor desarrollo en su habilidad lingüística, se dice que se expresa y piensa con mayor frecuencia a través de la palabra; que ama comunicarse, leer y escribir, que le gusta exponer utilizando un lenguaje o escritura formal, usando de manera eficiente las estructuras lingüísticas.
- *Inteligencia lógico-matemática:* capacidad para usar los números con eficacia (matemáticos, contables, estadísticos), incluye la sensibilidad a patrones y relaciones lógicas, afirmaciones y proposiciones. Esta inteligencia permite que los estudiantes, de manera casi natural, utilicen el cálculo y consideren proposiciones o establezcan y comprueben hipótesis para resolver situaciones de la cotidianidad.
- *Inteligencia espacial:* es la capacidad de percibir el mundo visuo-espacial de manera precisa y de llevar a cabo transformaciones basadas en esas percepciones. Implica sensibilidad al color, líneas, formas y espacio. Los inteligentes espaciales se manifiestan a partir de las imágenes, cuadros e ilustraciones.
- *Inteligencia cinético-corporal:* dominio del propio cuerpo para expresar ideas y sentimientos; facilidad para utilizar las manos en la creación o transformación de objetos. Incluye coordinación, equilibrio, destreza, fuerza, velocidad y flexibilidad.
- *Inteligencia musical:* Capacidad de percibir, discriminar, transformar y expresar las formas musicales. Incluye sensibilidad al ritmo, tono o melodía y al timbre o color de una pieza musical. Los alumnos que son frecuentemente musicales perciben, piensan, crean y sienten a partir de ritmos y de melodías.

- *Inteligencia interpersonal:* capacidad de percibir y distinguir los estados anímicos, las intenciones, las motivaciones y los sentimientos de otras personas. Incluye sensibilidad hacia expresiones faciales, voces y gestos. A través de ésta los estudiantes interactúan de manera eficaz con otros, capaces de conocer, reconocer e influenciar en los deseos, necesidades, e intenciones de sus pares
- *Inteligencia intrapersonal:* autoconocimiento y capacidad para actuar según ese conocimiento. Incluye una imagen precisa de uno mismo, con la conciencia de los estados de ánimo, intenciones, motivaciones, temperamentos, autoestima, autocomprensión, autodisciplina. Tener desarrollada esta inteligencia, es tener un acabado conocimiento personal y ser capaz de usarlo para desenvolverse de manera eficaz en su entorno.
- *Inteligencia naturalista:* es la facultad de conocer y clasificar las numerosas especies de flora y fauna del entorno. Incluye sensibilidad hacia otros fenómenos naturales y la capacidad de distinguir formas inanimadas. Consiste también en la interacción con las criaturas vivientes y el discernimiento de patrones de vida y fuerzas naturales.

La teoría de las Inteligencias Múltiples no es una teoría para determinar la única inteligencia adecuada. Es una teoría sobre funcionamiento cognitivo, y propone que toda persona posee capacidades en las ocho inteligencias, las cuales funcionan juntas de un modo único para cada persona. Es un modelo que valora la educación y la naturaleza de ésta para el desarrollo de las inteligencias.

Gardner (1994) menciona que las inteligencias reciben un estímulo cuando se participa en una actividad con valor cultural y el crecimiento del individuo en esa actividad sigue un patrón de desarrollo. Su Teoría funciona como metamodelo para organizar y sintetizar las innovaciones educativas que pretenden romper el enfoque didáctico tan limitado; es aplicable al currículo de diversas formas. También es una herramienta especialmente útil para observar nuestras fortalezas y debilidades en las áreas que utilizamos los docentes, porque nos permite observar todas las actividades que realizamos para alcanzar nuestros objetivos, y también cuáles acciones dejamos de lado por cuanto no nos sentimos cómodos al ejecutarlas. Ofrece un modelo de desarrollo personal que puede ayudar a los educadores a entender cómo influye su propio perfil de inteligencias en sus métodos docentes en el aula, además, abre la puerta a una amplia gama de

actividades que pueden ayudar a desarrollar inteligencias descuidadas, a activar las inteligencias poco desarrolladas o paralizadas y a mejorar el nivel de rendimiento en las inteligencias ya desarrolladas. Esto se relaciona con Díaz (2002) quien menciona que la concepción constructivista del aprendizaje y la intervención educativa deben considerar:

- El desarrollo psicológico del individuo, particularmente en el plano intelectual y en su intersección con los aprendizajes escolares.
- La identificación y atención a la diversidad de intereses, necesidades y motivaciones de los alumnos en relación con el proceso enseñanza-aprendizaje.
- El replanteamiento de los contenidos curriculares, orientados a que los sujetos aprendan sobre contenidos significativos.
- El reconocimiento de la existencia de diversos tipos y modalidades de aprendizaje escolar, dando una atención más integrada a los componentes intelectuales, afectivos y sociales.
- La importancia de promover la interacción entre el docente y sus alumnos, así como entre los alumnos mismos, con el manejo del grupo mediante el empleo de estrategias de aprendizaje cooperativo.
- La búsqueda de alternativas novedosas para la selección, organización y distribución del conocimiento escolar, asociadas al diseño y promoción de estrategias de aprendizaje e instrucción cognitivas.

2.2 INTELIGENCIAS MÚLTIPLES EN EL AULA

Para esas alternativas novedosas fue Armstrong (2006) quien, basado en las 8 inteligencias de Gardner, proporcionó ejemplos de las ocho maneras en que los alumnos pueden adquirir y demostrar sus conocimientos en temas específicos.

Tabla 1. Ocho maneras de aprender

Los estudiantes muy	Piensan	Les gusta	Necesitan
Lingüísticos	En palabras	Leer, escribir, explicar historias, los juegos de palabras.	Libros, casetes, objetos para escribir, papel, periódicos, diálogo, conversación, debates, historias
Lógico-matemáticos	Razonando	Experimentar, preguntar, resolver enigmas lógicos, calcular.	Materiales para experimentar, materiales científicos y para manipular, visitas al planetario y al museo de la ciencia.
Espaciales	Imágenes	Diseñar, dibujar, visualizar, garabatear.	Arte, piezas de construcción, video, películas, diapositivas, juegos de imaginación, laberintos, rompecabezas, libros ilustrados, visitas a museos de arte.
Cinético-corporales	A través de sensaciones somáticas.	Bailar, correr, saltar, construir, tocar, gesticular.	Juegos de rol, teatro, movimiento, juegos de construcción, deporte y juegos físicos, experiencias táctiles, aprendizaje manual.
Musicales	A través de ritmos y melodías.	Cantar, silbar, canturrear, crear ritmos con los pies y las manos, escuchar.	Cantar acompañados, asistir a conciertos, tocar algún instrumento en casa y en el colegio.
Interpersonales	Transmitiendo ideas a otras personas.	Liderar, organizar, relacionarse, manipular, mediar, asistir a fiestas.	Amigos, juegos en grupo, reuniones sociales, actos colectivos, clubes, mentores/discípulos.
Intrapersonales	En relación con sus necesidades, sentimientos y objetivos.	Establecer objetivos, mediar, soñar, planificar, reflexionar.	Lugares secretos, soledad, proyectos propios, decisiones.
Naturalistas	A través de la naturaleza y las formas naturales.	Jugar con sus mascotas, la jardinería, investigar la naturaleza, criar animales, cuidar del planeta.	Tener acceso a la naturaleza, oportunidades para relacionarse con animales, herramientas para investigar la naturaleza.

Basado en la tabla anterior, un docente puede identificar qué inteligencia pondera en sus alumnos a través de la observación. Armstrong (2006) recomienda realizarla sobre todo cuando

los alumnos no tienen actividades específicas encomendadas, sino cuando nada tengan que hacer. La tabla también permite diseñar actividades ya que considera cómo piensan los estudiantes, qué les gusta y qué necesitan. Este autor manifiesta que los alumnos son los máximos expertos sobre su propio modo de aprender, y que una de las tareas del docente es introducir y explicar a sus alumnos el tema de las Inteligencias Múltiples. Para ello, propone actividades de entre las cuales los profesores deben seleccionar. En el capítulo tres se presenta la usada para la investigación y las clases planificadas por sesiones de modo que los estudiantes trabajen sus inteligencias. Para planificar las lecciones o las unidades curriculares utilizando la teoría de las Inteligencias Múltiples (IM) el profesor debe:

- i. *Centrarse en un objetivo o tema específico:* pueden ser objetivos para todo el año o crear un programa para lograr un objetivo de instrucción específico. Nosotros lo haremos con un Aprendizaje Esperado indicado en el Programa de Matemáticas 2011, para el cual es necesario trabajar el tema de razones y de proporciones.
- ii. *Formular preguntas clave de IM: (vea figura 1)*

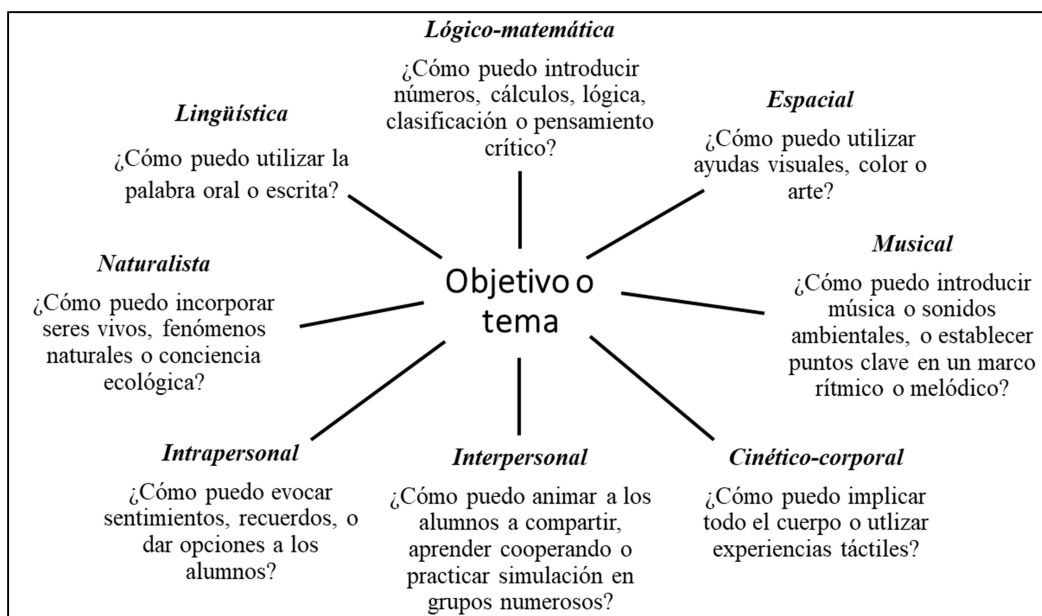


Figura 1. Preguntas para planificar IM

- iii. *Considerar las posibilidades:* repasar las preguntas de la figura 1 y considerar materiales que puedan resultar convenientes.
- iv. *Tormenta de ideas:* conseguir ideas, al menos una o dos por cada inteligencia.

- v. *Seleccionar actividades adecuadas*: a partir de las ideas de la tormenta de ideas, seleccionar las más viables para el entorno educativo.
- vi. *Establecer un plan secuencial*: con las ideas seleccionadas, diseñar un plan para una lección o una unidad sobre el tema o el objetivo elegido.
- vii. *Poner el plan en práctica*: reunir los materiales necesarios, seleccionar un marco temporal adecuado y llevar a cabo el plan. Modificar la lección según las necesidades para incorporar los cambios que se vayan produciendo durante su aplicación.

El considerar dentro del aula las Inteligencias Múltiples, requiere que los maestros conozcan activadores y desactivadores de éstas, conocidos como *experiencias cristalizadoras* y *experiencias paralizantes*, que constituyen los dos procesos decisivos en el desarrollo de las inteligencias. Para Gardner, una experiencia cristalizadora ocurre cuando el niño hace conexiones con algo que involucra su curiosidad y estimula su exploración; para Salmon (2016), se les provee de éstas cuando el maestro valora el pensamiento de los niños y los envuelve en pensamiento de alto nivel. Según Miller (1981) las experiencias cristalizadoras son como las chispas que encienden una inteligencia para que continúen su desarrollo, por el contrario, las experiencias paralizantes son vivencias que cierran inteligencias y suelen estar llenas de vergüenza, culpabilidad, temor, ira y otras emociones negativas que evitan que las inteligencias crezcan y se desarrollen.

2.3 LA RAZÓN ENTRE DOS NÚMEROS

Según Durmus (2005) la insuficiencia del conocimiento pedagógico y matemático de los maestros es una de las causas primarias de las dificultades que experimentan los estudiantes en las aulas. Cuando un docente prepara las sesiones que trabajará con sus grupos, debe tomar en cuenta la investigación que ya se ha realizado en lo referente al tema que abordará. Para el diseño de las sesiones presentadas en la propuesta didáctica (incluidas en el capítulo tres) se consideraron a algunos autores, principalmente para el conocimiento de conceptos y puntos a considerar cuando se trabajan razones y proporciones en el salón de clase.

De acuerdo con Fandiño (2015) hay varias formas de entender el concepto de fracción, entre ellas, la fracción como razón, a quien ella llama “relación”.

Una relación es una comparación de dos cantidades. Se puede usar una relación para transmitir una idea que no se puede expresar como un solo número (Lamon, 2006, p. 183). Según la autora, la relación de cosas a cosas puede escribirse de varias maneras:

1. $\frac{a}{b}$ o a/b
2. $a \rightarrow b$
3. $a : b$
4. $\textcircled{a} b$

Las razones a veces comparan medidas del mismo tipo. Hay dos tipos de relaciones que comparan medidas del mismo tipo: comparaciones entre partes y todo y comparaciones entre partes y partes. Las comparaciones entre parte y todo son razones que comparan la medida de parte de un conjunto con la medida de todo el conjunto. Las comparaciones de parte y parte comparan la medida de parte de un conjunto con la medida de otra parte del conjunto. Por ejemplo, en una caja de huevos que contiene 5 marrones y 7 huevos blancos, se aplican todas las siguientes razones: 5 a 7 (comparación entre parte marrón y blanco), 7 a 5 (comparación entre parte blanca y marrón), 5 a 12 (comparación parte marrón-total), 7 a 12 (parte blanca-comparación total).

La notación de fracciones se usa cuando se hace referencia a aquellos aspectos en los que las relaciones se comportan como otras interpretaciones de números racionales escritos en forma de fracción mientras que la notación de dos puntos se ve favorecida por formas en que las proporciones no actúan como otras fracciones. Si se usa la notación de fracción, se debe tener cuidado de usar cantidades, y no meramente números. Es decir, una proporción de 5 niñas a 7 niños no debe escribirse $\frac{5}{7}$ sino $\frac{5 \text{ niñas}}{7 \text{ niños}}$ ya que cuando no se etiquetan las cantidades, las diferencias conceptuales y operativas entre las razones y las fracciones pueden perderse o volverse confusas. Cuando los niños intentan construir significados entre éstas, cualquiera de las siguientes notaciones puede servir como una interpretación verbal de los símbolos:

a a b

a por b

a para b

a por cada b

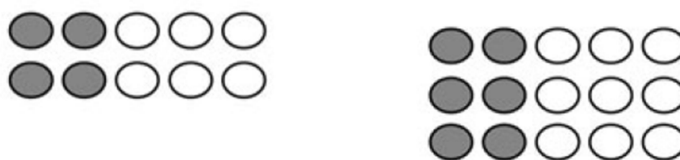
por cada *b* hay un *a*

la razón de *a* a *b*

a es a *b*

Las razones en contextos presentan un desafío en el aula debido a los muchos matices que ocurren en su uso diario. Esto significa que al resolver problemas de relación, es importante discutir cada situación en detalle. Es importante discutir todos los problemas y entendimientos relacionados con exactamente qué tipo de información se puede obtener de la información que se reporta utilizando razones. Por ejemplo, la relación 25: 5 es reducible a 5: 1, al reducir la proporción, las edades actuales del niño y su padre se pierden, pero se retiene la información de que el padre es cinco veces más viejo que su hijo. (Lamon, 2006, p. 191)

De acuerdo con Lamon, los niños prefieren conjuntos discretos de monedas o fichas de colores para representar razones entre dos números -eso les ayuda a desarrollar estrategias para explicar su pensamiento- y cuando trabajan con equivalencias la clonación es una herramienta muy importante; entonces, dada la relación 2:3, un clon de 2 y un clon de 3 es como el que se muestra.



Para cualquier otro clon, puede usarse en cualquier momento , así podemos ver que 6:9 se formó con clones de 2:3, por lo tanto son equivalentes.

Cid, Godino y Batanero (2003) proporcionan literatura útil al profesor para distinguir entre fracciones y razones. Las razones utilizadas son siempre entre números enteros y se podía pensar que la razón es equivalente a una fracción. Sin embargo, en algunas situaciones el uso que

se hace del término razón es más amplio que el de fracción, por lo que algunos autores diferencian entre estos dos términos. Estas situaciones son las siguientes:

- Cuando se comparan los tamaños de colecciones de objetos de naturaleza diferente, y no tiene sentido pensar en un conjunto global que los contenga. Por ejemplo cuando se dice que en una ciudad hay 2 automóviles por cada 5 habitantes.
- Las razones se pueden expresar mediante símbolos diferentes de fracciones: $4:7$, o $4 \rightarrow 7$; el símbolo de la fecha indica bien el aspecto de correspondencia de una razón, como medio de comparar cantidades.
- Las razones pueden tener un cero como segunda componente. En una bolsa la razón de bolas rojas a verdes puede ser de 10 a 0, si no hay ninguna verde. En las fracciones el denominador siempre debe ser distinto de cero.

Para Gómez (2007) la razón se comprende como una función entre dos magnitudes y la proporcionalidad es vista como una propiedad caracterizada por la linealidad, ya sea implícitamente a través de los procedimientos escalares, o bien explícitamente a través de los procedimientos funcionales.

2.4 EL RAZONAMIENTO PROPORCIONAL

El razonamiento proporcional juega un papel importante en el desarrollo de las ideas matemáticas del estudiante, pero con frecuencia, éste no se desarrolla correctamente. Al respecto Karplus, Pulos & Stage (1983) después de su investigación sobre razonamiento proporcional, concluyeron que los estudiantes deciden utilizarlo o no, de acuerdo con la facilidad o dificultad que encuentran en relacionar los números involucrados. Hart (1984) encontró que los alumnos aplican estrategias aditivas en problemas de proporcionalidad pero son Godino y Batanero (2002) quienes afirman que esta estrategia es útil para enfrentar con éxito ciertos problemas más sencillos, pero no es válida en el caso general. Ejemplifican esta situación mediante lo siguiente:

Kilos de tortilla	Precio
1	14
1.5	21
2	28
3	42

Diagram annotations: An arrow on the left points from 1 to 1.5 with '+.5?'. An arrow on the right points from 14 to 21 with '+14', and from 21 to 28 with '+14'.

Figura 2. Modelo aditivo

Para Lamon (2007) el razonamiento proporcional significa ser capaz de dar argumentos que apoyen afirmaciones hechas sobre la relación estructural entre cuatro cantidades (a, b, c, d) en un contexto que simultáneamente implica covarianza de cantidades e invarianza de razones o productos.

Según, Lesh, Post y Behr (1988), el razonamiento proporcional involucra un sentido de variación entre dos cantidades para comparar múltiples valores. La variación proporcional directa es solo una, de infinitud de posibles variaciones (llamadas funciones) y por tanto, debemos saber diferenciarla de otras.

Días	# de Coches
30	600
90	1,800
15	300
1	20

Diagram annotations: An arrow on the left points from 30 to 90 with 'Triple'. An arrow on the right points from 600 to 1,800 with 'Triple'.

Figura 3. Característica básica de la proporcionalidad directa

La figura 3 muestra la característica de proporcionalidad más básica que sirve para analizar si dos cantidades están relacionadas de una manera proporcional directa. De manera general, si una cantidad sufre un aumento o una disminución de tipo multiplicativo, la otra también tendrá el mismo cambio, ya sea de aumento o de disminución (Mochón 2012,p.136).

Entender el concepto de razón y saber cómo se representa, es fundamental para abordar el tema de proporcionalidad en secundaria, es Mochón (2012) quien manifiesta que una proporción

es básicamente igualdad entre dos razones, dicha igualdad puede aparecer como una relación entre cuatro números relacionados entre sí o dentro una variación entre dos cantidades.

Torres y Deulofeu (2018) comentan que es particularmente importante la elección de los ejemplos que hace el profesor con el fin de ayudar a sus alumnos a entender el concepto, a profundizar en el mismo, a adquirir el lenguaje adecuado y a mostrar la validez de sus procedimientos. El papel del profesor cuando trabaja el tema de proporcionalidad con sus alumnos es el de ser guía para encaminar a los estudiantes en direcciones correctas y enseñar las diferentes formas de razonamiento que se pueden aplicar en situaciones de este tipo y diferenciarlo de contextos no proporcionales. Así, la enseñanza de la regla de tres como única estrategia para resolver problemas de proporcionalidad resultaría insuficiente para que el alumno pueda desarrollar de manera completa una concepción sobre las ideas fundamentales de la proporcionalidad y sus diferentes enfoques, y saber cuándo aplicar correctamente esta regla. Mochón (2012) propone acercamientos para la instrucción en este tema:

1. Uso de tablas y razonamiento “preproporcional”
2. Valor unitario por medio de tablas
3. Razonamiento proporcional (constancia de la razón)
4. Algorítmico (basado en la regla de tres pero con apoyo contextual de una tabla y un entendimiento desarrollado en el acercamiento 3)

Este autor recomienda evitar la frase “El producto de los extremos es igual al producto de los medios” porque están basadas en la memorización. Prefiere considerar los siguientes pasos cuando se utiliza la regla de tres en problemas:

- Verificar que en la situación planteada exista la proporcionalidad directa, examinando la variación paralela entre las dos cantidades (doble, triple, mitad, etc.).
- Plantear la situación en una tabla de cuatro valores con sus medidas correspondientes.
- Resolver el problema por medio de la igualdad de razones.

Antes de la alternativa de Mochón para la enseñanza del razonamiento proporcional, Vergnaud (1991) refirió sobre los problemas de tipo multiplicativo y afirmó que una proporción es una relación entre magnitudes o números que viene dada por una función lineal, cuya constante de proporcionalidad establece la relación entre las magnitudes o números correspondientes. Vergnaud las llama relaciones cuaternarias porque relacionan cuatro elementos entre sí: $\frac{18}{15} = \frac{6}{5}$, dieciocho entre quince es igual a seis entre cinco. Una relación cuaternaria tiene

con frecuencia la forma “ a es a b , como c es a d ” y viene a ser lo mismo que afirmar que la relación entre a y b es la misma que la relación entre c y d .

Debido a que la primera gran forma de relación multiplicativa es una relación cuaternaria, el autor muestra este ejemplo: Tengo 3 paquetes de yogur y hay 4 yogures en cada paquete, ¿cuántos yogures tengo? (Vergnaud, 1991, p.197).

<i>Paquetes</i>		<i>Yogures</i>
1	→	4
3	→	x

Escribe esto bajo la forma de proporción y transforma las ecuaciones encontradas:

Primera formulación

$$\frac{x \text{ yogures}}{4 \text{ yogures}} = \frac{3 \text{ paquetes}}{1 \text{ paquete}}$$

Se multiplican los dos términos de la ecuación por “4 yogures”:

$$x \text{ yogures} = \frac{3 \text{ paquetes} (4 \text{ yogures})}{1 \text{ paquete}}$$

Se simplifican las dimensiones (mismas que Lamón llama etiquetas) del segundo término:

$$\begin{aligned} x \text{ yogures} &= \frac{3(4 \text{ yogures})}{1} \\ x \text{ yogures} &= 3(4 \text{ yogures}) \end{aligned}$$

Segunda formulación

$$\frac{x \text{ yogures}}{3 \text{ paquetes}} = \frac{4 \text{ yogures}}{1 \text{ paquete}}$$

Se multiplican los dos términos de la ecuación por “3 paquetes”:

$$x \text{ yogures} = 3 \text{ paquetes} \left(\frac{4 \text{ yogures}}{1 \text{ paquete}} \right)$$

$$x \text{ yogures} = 3 \text{ paquetes} \left(\frac{4 \text{ yogures}}{\text{paquete}} \right)$$

$$x \text{ yogures} = 3 \text{ paquetes} (4) \left(\frac{\text{yogures}}{\text{paquete}} \right)$$

Existe una forma inmediata:

$$x \text{ yogures} = \frac{3 \text{ ~~paquetes~~ } (4 \text{ yogures})}{1 \text{ ~~paquete~~}}$$

$$x \text{ yogures} = 3(4 \text{ yogures})$$

CAPÍTULO III: MÉTODO

Después de revisar las características de los enfoques de investigación científica de Hernández, Fernández y Baptista (2014) se asume que este diseño de estudio es cualitativo, porque se basa en métodos de recolección de datos no estandarizados, utiliza técnicas como la observación no estructurada, la indagación es flexible, busca interpretar lo que se va captando activamente; las realidades van modificándose conforme transcurre el estudio, el investigador se introduce en la experiencia de los participantes y constituye el conocimiento; no se generalizan de manera probabilística los resultados y es naturalista e interpretativa.

Es de tipo descriptivo porque no comprende el empleo de hipótesis ni predicciones, sino que busca las características del fenómeno estudiado y se emplea cuando se tiene poca información de éste.

La investigación se realiza con 16 alumnos de primer grado de secundaria del Colegio José Vasconcelos ubicado en Cuautlancingo Puebla; las edades oscilan entre 11 y 12 años, habiendo en el grupo 5 mujeres y 11 hombres. Las familias pertenecen a clase media-baja, media y media-alta.

El método que usamos para la investigación es el siguiente:

- Cuestionario de Inteligencias Múltiples (IM) al docente y a los estudiantes
- Actividades de introducción a las IM
- Actividad para la explicación de las IM
- Anotaciones de la observación directa
- Pre-test del tema: razones y proporciones
- Actividades para enseñar contenido matemático usando las IM
- Puesta del plan en práctica
- Post-test del tema: razones y proporciones
- Entrevistas

Nuestro método estuvo basado en Gardner (1994), Armstrong (2006), Hernández, Fernández y Baptista (2014); Lamon (2006) y Mochón (2012).

3.1 CUESTIONARIO DE INTELIGENCIAS MÚLTIPLES AL DOCENTE Y A LOS ESTUDIANTES

El objetivo del test de Inteligencias Múltiples es ayudar a conectarse con las propias experiencias vitales de las ocho inteligencias, así como entender la teoría desde la experiencia y personalizar el contenido. El docente y sus estudiantes deberán responder el test de Inteligencias Múltiples de Gardner (2014). (*Vea anexo I*)

3.2 ACTIVIDADES DE INTRODUCCIÓN A LAS INTELIGENCIAS MÚLTIPLES

La finalidad de realizar actividades de introducción para los sujetos de estudio, es darles a conocer las ocho inteligencias. Consisten sencillamente en explicarles la Teoría de las Inteligencias Múltiples (Armstrong, 2006; p. 66).

Armstrong, en este paso, recomienda usar términos simplificados para cada inteligencia:

- Inteligencia lingüística: hábil en palabras.
- Inteligencia lógico-matemática: hábil en números o en lógica.
- Inteligencia espacial: hábil en imágenes.
- Inteligencia cinético-corporal: hábil en el cuerpo, en deportes o en manualidades.
- Inteligencia musical: hábil en música.
- Inteligencia interpersonal: hábil en personas.
- Inteligencia intrapersonal: hábil en uno mismo.
- Inteligencia naturalista: hábil en naturaleza.

3.3 ACTIVIDAD PARA LA EXPLICACIÓN DE LAS INTELIGENCIAS MÚLTIPLES

El objetivo de esta actividad es para explicar las Inteligencias Múltiples a los estudiantes. Sirve para celebrar las potencialidades de aprendizaje de cada uno y no para decidir a qué grupo exclusivo se pertenece. La actividad se denomina *pizza de Inteligencias Múltiples* (Armstrong, 2006; p. 69). (*Vea apéndice I*)



Figura 4. Pizza de Inteligencias Múltiples

3.4 ANOTACIONES DE LA OBSERVACIÓN DIRECTA

Para describir lo que se está viendo, escuchando y palpando del contexto de los participantes observados en la investigación, es necesario hacer anotaciones. Implica adentrarse profundamente en situaciones sociales y mantener un papel activo, así como una reflexión permanente. Estar atento a los detalles, suceso, eventos e interacciones (Hernández, Fernández y Baptista, 2014; p. 399).

3.5 PRE-TEST DEL TEMA: RAZONES Y PROPORCIONES

En este paso de la investigación, se aplica el instrumento que fue diseñado basándose en diversas fuentes. Evalúa tanto razones como proporciones. Se decidió trabajar con ambos temas debido a que el último Aprendizaje Esperado que plantea el Programa de Matemáticas en primer grado de secundaria es: “Resuelve problemas de proporcionalidad directa del tipo “valor faltante”, en los que la razón interna o externa es un número fraccionario”. (SEP, 2011, p. 35).

Tabla 2. Test de razones y proporciones

RAZONES	PROPORCIONES
Ítem 1. Un segmento AB mide 20 cm de largo y otro segmento CD de 25. El primero son los $\frac{4}{5}$ del segundo. Escribe la relación que indica las longitudes entre los dos segmentos. (Fandiño, 2015, p. 6)	Ítem 6. John necesita 15 botes de pintura para pintar 18 sillas, ¿cuántas sillas pintará con 25 botes de pintura? (Pitta-Pantazi y Christou, 2011)

Ítem 2. Hay 100 asientos en un teatro, 30 en el balcón y 70 en el patio principal. Se han vendido ochenta entradas para el primer pase incluyendo todos los asientos del patio principal. ¿Cuál es la razón entre los asientos del balcón y los del patio principal? (Lamon, 2005, p.198)	Ítem 7. Si Jorge pedalea a una razón de 8 km por hora, al cabo de 45 minutos ¿a qué distancia está de su casa? (Cid, Godino y Batanero, 2002, p. 330)
Ítem 3. La Academia Posh cuenta con una proporción de 150 estudiantes a 18 profesores. ¿Cómo se puede ajustar el número de profesores para que la proporción de alumnos por profesor de la academia sea de 15 a 1? (Lamon, 2006)	Ítem 8. Una motocicleta puede funcionar durante 10 minutos con un valor de \$24 en combustible. ¿Cuánto tiempo podría funcionar con \$17 en combustible? (Lamon, 2006)
Ítem 4. Se tiene un sólido que tiene una masa de 340 gramos y ocupa un volumen de 120 centímetros cúbicos. ¿Cuál es la razón entre los gramos y el volumen del sólido? (Arons & Redish, 1997)	Ítem 9. Para tu fiesta, habías planeado comprar 2 kg de nueces mixtas para 8 personas, pero ahora vendrán 10 personas. ¿Cuántos kilogramos deberías comprar? (Lamon, 2006)
Ítem 5. $L_1 = 30\text{m}$ (altura del edificio 1) $L_2 = 12\text{m}$ (altura del edificio 2) ¿Cuál es la razón entre la altura de ambos edificios? (Arons & Redish, 1997)	Ítem 10. En una fotografía de un edificio hay una ventana de 3 cm de altura por 6 cm de ancho como la mostrada a continuación.  Un pintor quiere hacer un dibujo amplificado de esta ventana, de tal manera que la altura de la ventana le quede de 15 cm. ¿De cuánto debe ser el ancho de la ventana amplificada? (Mochón, 2012, p. 153)

Los ítems 1, 2, 3 se tradujeron al idioma español, respetando el contexto y sintaxis de los mismos.

Los ítems 4 y 5, pertenecen a la investigación realizada por Arons & Redish (1997). El autor diseñó los problemas con el objetivo de conocer el significado que daban los estudiantes al resultado de la operación que da solución. Para el instrumento de esta investigación, consideramos la respuesta numérica de los problemas, anexando la pregunta: ¿cuál es la razón...?

Los ítem 6 y 10 no fueron modificados, mientras que el 7, 8 y 9 fueron traducidos del inglés, además de que los dólares se cambiaron a pesos mexicanos (en el ítem 8) y las libras a kilogramos (en el ítem 9). Para el formato del test de razones y proporciones aplicado a los sujetos de estudio, *vea apéndice II*.

3.6 ACTIVIDADES PARA ENSEÑAR CONTENIDO MATEMÁTICO USANDO LAS INTELIGENCIAS MÚLTIPLES

En el diseño de actividades para enseñar contenido matemático se emplea el procedimiento de siete pasos que sugiere un modo de planificar las unidades curriculares utilizando la teoría de las I.M. como marco organizativo (Armstrong 2006, p. 88):

- i. Centrarse en un tema específico
- ii. Formular preguntas clave de Inteligencias Múltiples
- iii. Considerar todas las posibilidades
- iv. Tormenta de ideas
- v. Seleccionar actividades adecuadas
- vi. Establecer un plan secuencial
- vii. Poner el plan en práctica

El plan consiste en la implementación de dos secuencias didácticas de cinco sesiones para cada tema. Para las sesiones subrayadas es necesaria una hoja de trabajo, mismas que se encuentran en los apéndices y anexos.

Tabla 3. Organización del plan secuencial

SECUENCIA 1: RAZÓN ENTRE DOS NÚMEROS Tiempo por sesión: 45 minutos	SECUENCIA 2: PROPORCIONALIDAD DIRECTA Tiempo por sesión: 45 minutos.
Sesión 1: Etiquetas y simplificación	Sesión 6: <u>Estrategia sumativa Vs estrategia multiplicativa.</u> (<i>vea apéndice IV, V</i>)
Sesión 2: ¿Cuántos quito, cuántos pongo?	Sesión 7: <u>Razonamiento preproporcional.</u> (<i>vea anexo II</i>)
Sesión 3: <u>Comparación entre dos cantidades.</u> (<i>vea apéndice III</i>)	Sesión 8: <u>Valor unitario.</u> (<i>vea anexo III</i>)
Sesión 4: Dibujos a escala	Sesión 9: <u>Razonamiento proporcional y algoritmo.</u> (<i>vea anexo IV</i>)
Sesión 5: Los animales	Sesión 10: Soy cantautor

Todas las sesiones tienen un objetivo que incluye el uso de ciertas inteligencias según se adaptaran a las actividades seleccionadas de la tormenta de ideas. La razón por la que las sesiones tienen objetivos, es porque nos basamos en las sesiones propuestas por Mochón (2012) como alternativa para la enseñanza del razonamiento proporcional.

3.7 PUESTA DEL PLAN EN PRÁCTICA

Una vez diseñadas las actividades para enseñar contenido matemático, se deben poner en práctica. Consiste en reunir los materiales necesarios, seleccionando un marco temporal adecuado y llevando a cabo el plan (Armstrong, 2006, p. 89).

Tabla 4. El plan secuencial

SECUENCIA 1: Razón entre dos números <i>Sesión 1: Etiquetas y simplificación</i>
--

Objetivo: Identificar la diferencia entre fracciones y razones, reconociendo a $\frac{3}{2}$ como fracción y a $\frac{3 \text{ rojas}}{2 \text{ azules}}$ como razón, a través de la utilización de fichas de colores y llamando las palabras “rojas” y “azules” como etiquetas. Reconocer que las razones sirven para comparar dos cantidades (Lamon, 2006).

Inteligencias usadas (Iu): lógico-matemática, espacial e interpersonal.

Recursos: fichas de colores (pueden ser tapa roscas, o bien trozos de hojas de colores).

Actividad:

- La profesora forma equipos de tres personas, procurando que en cada terna haya un alumno en el que pondere la inteligencia lógico-matemática o espacial.
- Se reparte a cada equipo el material para trabajar.
- La maestra propone que los alumnos clasifiquen colores según las razones dadas. Por ejemplo, organizar las fichas a razón de $\frac{3 \text{ rojas}}{2 \text{ azules}}$, escribiendo la razón en su libreta y dibujando las fichas respetando los colores. Es importante que la profesora se asegure que sus alumnos escriban correctamente la razón, para que posteriormente escriban la diferencia entre $\frac{3}{2}$ y $\frac{3 \text{ rojas}}{2 \text{ azules}}$, llamando fracción y razón respectivamente e identificando que la diferencia entre ambas son las etiquetas de las cantidades.
- Posteriormente representarán con las fichas $\frac{6 \text{ rojas}}{4 \text{ azules}}$, y el profesor preguntará si representa lo mismo que $\frac{3 \text{ rojas}}{2 \text{ azules}}$. Se espera que los estudiantes identifiquen que sí representan lo mismo pero que $\frac{3 \text{ rojas}}{2 \text{ azules}}$ es la más factible.
- Los equipos propondrán un par de razones equivalentes y las escribirán y dibujará en la libreta.
- Para finalizar, escribirán y responderán en su libreta: ¿para qué sirve una razón? Se espera que los alumnos escriban que sirve para comparar dos cantidades. (Lamon, 2006)

Sesión 2: ¿Cuántos quito, cuántos pongo?

Objetivo: Formar y simplificar razones formadas con alumnos ($\frac{6 \text{ niños}}{4 \text{ niñas}}$) con ayuda de una línea roja para separar una cantidad de la otra.

Analizar qué debe hacerse para simplificar la razón (quedando $\frac{3 \text{ niños}}{2 \text{ niñas}}$) y qué debe hacerse para que quede $\frac{3 \text{ niños}}{1 \text{ niña}}$.

Iu: interpersonal y corporal.

Recursos: línea roja en el centro del salón.

Actividad:

- El profesor dirá una razón, el grupo debe formarla con sus mismos compañeros. Las razones pueden ser *niños:niñas* y *niñas:niños* para que los alumnos identifiquen que no se trata de las mismas razones y que es importante tanto el orden en el que se escriban las cantidades que se están comparando como la etiqueta de cada una de éstas.
- Los estudiantes formarán $\frac{5 \text{ niñas}}{10 \text{ niños}}$ y deberán organizarse para colocar a 5 niñas por arriba de la línea roja y a 10 niños por debajo de la línea.
- La profesora preguntará: ¿esto se puede simplificar? Si el alumno A8 levanta la mano, él será quien dé solución, de no ser así, la maestra elegirá al azar a los que quieran responder.
- Cuando los alumnos hayan llegado a $\frac{1 \text{ niña}}{2 \text{ niños}}$ entonces el profesor pedirá que todas las niñas se coloquen arriba de la línea roja y los niños abajo (de haber asistido todos, quedará 5:11).
- Se hará la pregunta, ¿qué debemos hacer para que la razón de *niñas a niños* quede 30:50. Se tomará tiempo suficiente para reflexionar que no se requieren aumentar alumnos sino simplificar la razón (llegando a 3:5) para poder saber cuántas niñas y niños quitar.
- Los estudiantes responderán en su libreta el siguiente problema: Si en el Colegio José Vasconcelos hay un salón para cada 20 estudiantes y ahora hay un salón para cada 23 estudiantes, ¿Cómo podemos ajustar el número de alumnos para que la proporción salón a estudiantes siga de 1 a 20?
- Se cerrará la sesión del día, consensuando respuestas y argumentando las soluciones.

Se dejará como tarea, llevar al aula la imagen de un animal, objetivo o personaje de caricatura que a ellos les agrade. Además de avisar que para la clase siguiente necesitarán su juego de escuadras y colores.

Sesión 3: Comparación entre dos cantidades

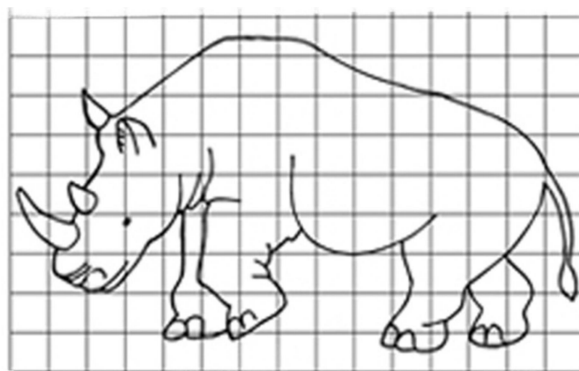
Objetivo: Medir y comparar correctamente parejas de cuadrados para simplificar las razones formadas con las medidas de éstos.

Iu: lógico-matemática, interpersonal y espacial.

Recursos: cuadrados verdes, amarillos, naranjas, rosas y morados con longitudes por lado de 15 cm, 8 cm, 5 cm, 20 cm y 25 cm respectivamente. Juego de escuadras y regla; cartulinas e imágenes (mismas que se pidieron la sesión anterior).

Actividad:

- La profesora reparte a cada alumno la **HOJA 1 (vea apéndice III)**.
- Formados en binas tendrán 5 cuadrados de diferentes colores, los medirán y escribirán la magnitud de cada uno.
- Resolverán la hoja de trabajo, escribiendo las razones solicitadas. Tales razones deberán estar simplificadas y debidamente etiquetadas.
- Una vez que hayan concluido con ese trabajo, entregarán su hoja a la profesora.
- Mientras los estudiantes entregan su hoja de trabajo, la maestra pedirá que saquen la imagen requerida la sesión anterior. Encima de ésta se trazarán cuadrados de 1 o 2 cm por lado, según las características del dibujo. Posteriormente cada alumno tendrá media cartulina, en la cual realizarán otra cuadrícula con cuadrados de 3 o 5 cm por lado (nuevamente depende de la imagen). Ejemplo:



Es posible que en la sesión 3 únicamente dé tiempo de trazar la cuadrícula de la imagen original y no de cuadricular la cartulina. Todo dependerá del tiempo que requieran los estudiantes para realizar las actividades. Los productos finales los recogerá la docente.

Sesión 4: Dibujos a escala

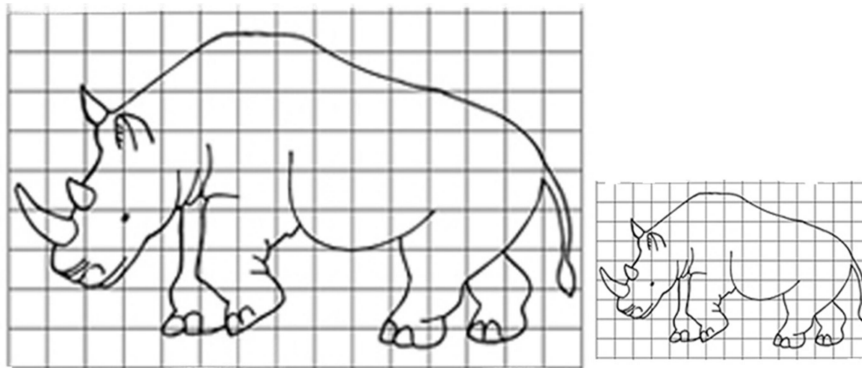
Objetivo: Aplicar las escalas en los dibujos, trazando cuadrículas en la hoja del dibujo original y en la hoja donde realizarán la copia. Escribir correctamente una escala de reducción.

Iu: espacial y lógico-matemática.

Recursos: cartulina blanca, juego de escuadras, regla, colores, tijeras.

Actividad:

- Se tomarán 5 minutos de la sesión para repartir el material (cartulinas e imágenes) mientras el profesor pregunta ¿cuál fue la última actividad de la sesión anterior?
- Los estudiantes trazarán las cuadrículas que les hagan falta para comenzar a dibujar a escala de ampliación su imagen. Es probable que haya alumnos que tarden más de lo planeado en el trazo de su cuadrícula, por lo que se tomará toda la sesión para que los adolescentes logren terminar su dibujo.



- Terminado el dibujo, redactarán todo lo que sepan del animal que realizaron a escala (cuál es su hábitat, si está o no en peligro de extinción, vivíparo y ovíparo, etc.).
- Llevarán como tarea, investigar sobre su animal y redactarán puntos importantes en la libreta de matemáticas.
- Los productos finales nuevamente se quedan en el salón.

Sesión 5: Los animales

Objetivo: Explicar oralmente características del animal que reprodujeron a escala y resaltar por qué su escala es la mostrada.

Iu: lingüística y naturalista.

Recursos: dibujo a escala realizado la clase anterior.

Actividad:

- Todos los estudiantes trabajarán de manera individual.
- Leerán lo escrito en la parte trasera de su dibujo a escala y lo compararán con lo investigado. Compartirán dos alumnos la información con sus compañeros.
- El profesor hará tres preguntas, mismas que el alumno anotará en su libreta y responderá. ¿Cómo te sentiste al realizar tu dibujo?, ¿qué te pareció la actividad?, ¿qué calificación le pones a tu dibujo y por qué?
- Mientras los alumnos responden las preguntas, la profesora pasará a cada uno de los lugares con una urna contenedora de papeles, en los cuales estará escrita una palabra que se haya usado durante el tema de razones (razones, fracciones, etiqueta, comparar, cantidad). Dependiendo de cuál le haya tocado a cada alumno, tendrán que redactar en su libreta un acróstico o rima que hable del trabajo realizado durante las 5 sesiones. Puede basarse en los apuntes de su libreta para escribir.

Se considera que los alumnos A1, A7 y A13 serán los primeros en terminar, ya que según la observación directa de la maestra, son los alumnos con una inteligencia lingüística más desarrollada que sus compañeros.

SECUENCIA 2: Proporcionalidad directa

Debido a que las actividades se realizarán en hojas de trabajo, en todas las sesiones de la segunda secuencia didáctica, los estudiantes realizarán en su libreta su “inventario de lo aprendido”, escribiendo por sesión lo que se les dificultó, lo que se les facilitó y lo que aprendieron. Para escribir lo que aprendieron deberán comenzar con la frase “AHORA YA SÉ...”. Las inteligencias que estarán usando en cada redacción de su inventario, son la lingüística y la intrapersonal.

Sesión 6: Estrategia sumativa versus estrategia multiplicativa

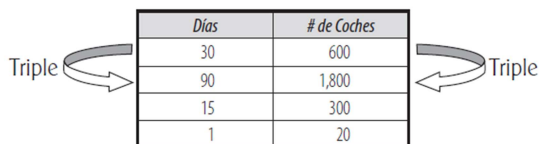
Objetivo: Aplicar la estrategia sumativa y la estrategia multiplicativa en problemas geométricos que requieren un razonamiento proporcional, al trazar la copia de un triángulo. Comparar cuál estrategia permite conservar la proporción de la figura original.

Iu: intrapersonal, lógico-matemática y lingüística.

Recursos: compás, escuadra o regla, hoja de trabajo 2, inventario de lo aprendido.

Actividad:

- La profesora reparte a cada alumno la **HOJA 2 (vea apéndice IV)**.
- Los alumnos deberán trazar un triángulo con ayuda de su juego geométrico, con las dimensiones establecidas en la hoja de trabajo. En caso de haber alumnos con dificultad para el trazo, recibirán ayuda del docente, pues la intención de la actividad es que logren comparar dos triángulos según dos opciones.
- La opción uno está basada en la estrategia aditiva que ocupan erróneamente en problemas de proporcionalidad directa. Deberán trazar un segundo triángulo con las medidas solicitadas, mismas a las que les fueron sumados 8 cm por lado.
- La segunda opción está basada en la estrategia multiplicativa. Se proponen nuevas medidas, las cuales fueron los productos al haber multiplicado por 3 cada uno de los lados del triángulo original.
- Con la pregunta ¿qué observas?, ¿cuál de las dos opciones nos da un triángulo más parecido?, se espera que los alumnos logren darse cuenta que es la opción dos, para sí, contestar en la última pregunta que deben multiplicar por 3 para conservar la proporción de la figura.
- Cuando los estudiantes hayan terminado, entregarán la hoja y la profesora les dará la **HOJA 3 (vea apéndice V)**. Observarán los datos de cada tabla para elegir cuáles son las que representan una variación proporcional. A un lado de la tabla, tendrán que escribir si lo son o no. Se busca que el alumno analice dos cantidades que están relacionadas de manera proporcional, verificando la variación entre las dos cantidades (Lesh, Post y Behr, 1998) Ejemplo:



Días	# de Coches
30	600
90	1,800
15	300
1	20

SÍ HAY PROPORCIONALIDAD DIRECTA

- Para finalizar los alumnos comenzarán con su inventario de lo aprendido. Escribirán en su libreta lo que se les dificultó, lo que se les facilitó y lo que aprendieron. Para escribir lo que aprendieron deberán comenzar con la frase “AHORA YA SÉ... PERO SE ME DIFICULTÓ...” o en su defecto “AHORA YA SÉ... Y NADA SE ME DIFICULTÓ...”

Sesión 7: Razonamiento preproporcional

Objetivo: Reflexionar sobre si la situación planteada es de tipo proporcional y que inicie el razonamiento proporcional a través de razones sencillas como el triple, la mitad, una vez y media y dos veces y media. (Mochón, 2012, p. 144)

Iu: intrapersonal, lógico-matemática y lingüística.

Recursos: hoja de trabajo número 4, inventario de lo aprendido.

Actividad:

- La profesora reparte a cada alumno la **HOJA 4 (vea anexo II)**.
- Los estudiantes podrán resolver el problema como prefieran y en el espacio que gusten del salón.
- La profesora deberá pasar por los lugares para supervisar el trabajo de los alumnos y apoyar si es necesario.
- Cuando hayan terminado, entregarán la hoja a la maestra.
- Para finalizar los alumnos escribirán en su inventario de lo aprendido. Para escribir lo que aprendieron deberán comenzar con la frase “AHORA YA SÉ... PERO SE ME DIFICULTÓ...” o en su defecto “AHORA YA SÉ... Y NADA SE ME DIFICULTÓ...”

Sesión 8: Valor unitario

Objetivo: Mostrar la estrategia unitaria para que el alumno se dé cuenta que, una vez que se llega a conocer una de las dos cantidades cuando la otra tiene el valor unitario (1), el problema se torna en un simple problema multiplicativo. (Mochón 2012, p. 147)

Iu: intrapersonal, lógico-matemática y lingüística.

Recursos: hoja de trabajo número 5. Inventario de lo aprendido.

Actividad:

- La profesora reparte a cada alumno la **HOJA 5 (vea anexo III)**.
- El trabajo se realizará de manera individual, de ser necesario la profesora apoyará a los alumnos que lo requieran.
- Cuando el alumno haya terminado, entregará su hoja de trabajo.
- Para finalizar los alumnos escribirán en su inventario de lo aprendido. Para escribir lo que aprendieron deberán comenzar con la frase “AHORA YA SÉ... PERO SE ME DIFICULTÓ...” o en su defecto “AHORA YA SÉ... Y NADA SE ME DIFICULTÓ...”

Sesión 9: Razonamiento proporcional y algoritmo

Objetivo: Concebir a la proporcionalidad de una manera integral como una igualdad de dos razones formadas por cuatro valores. (Mochón, 2012, p. 150)

Iu: intrapersonal, lógico-matemática, lingüística e interpersonal.

Recursos: hoja de trabajo número 6, inventario de lo aprendido.

Actividad:

- La profesora repartirá la **HOJA 6 (vea anexo IV)**. Misma que responderán aplicando el su razonamiento proporcional (constancia de la razón) y planteando la regla de tres para hallar cada respuesta de la tabla.
- La maestra solicitará el apoyo del alumno A5, pues fue quien respondió correctamente los ítems de proporcionalidad de manera correcta. El alumno explicará a sus compañeros cómo se resuelve el problema aplicando correctamente la regla de tres y escribiendo ambas razones con las etiquetas debidas.

$$\frac{\text{Precio A}}{\# \text{ de latas A}} = \frac{\text{Precio B}}{\# \text{ de latas B}}$$

- Para finalizar los alumnos escribirán en su inventario de lo aprendido. Para escribir lo que aprendieron deberán comenzar con la frase “AHORA YA SÉ... PERO SE ME

DIFICULTÓ...” o en su defecto “AHORA YA SÉ... Y NADA SE ME DIFICULTÓ...”

Se les quedará como tarea traer la pista musical de la canción de su preferencia.

Sesión 10: Soy cantautor

Objetivo: Elaborar y presentar una canción habiendo modificado la letra, adaptándola a las experiencias y aprendizajes adquiridos durante las nueve sesiones anteriores. Implementar en la letra de sus canciones las palabras: razón, proporción, etiqueta, etc., redactando sin errores ortográficos. Conservar la métrica de la canción al cantarla frente al grupo.

Iu: musical, lingüística e interpersonal.

Recursos: celular, instrumentos musicales (opcional).

Actividad:

- Durante los primeros 30 minutos de la sesión, los alumnos escribirán la letra de una canción que vaya acorde con la música que escogieron.
- El grupo decidirá si trabajan en equipos o de manera individual.
- La letra de la canción debe hablar de razones y proporciones. Pueden basarse en conceptos, en cómo diferenciar la una de la otra, en procesos de solución, en experiencias de su inventario, etc.
- Se darán 5 minutos para el ensayo de la canción.
- Los últimos minutos de la clase, serán para que los equipos pasen al frente a mostrar su producto final de la clase.
- Los equipos sólo dispondrán de un minuto para cantar.
- Para finalizar los alumnos escribirán en su inventario de lo aprendido como tarea, para escribir su opinión acerca de la actividad realizada en la sesión 9.

En caso de requerirse, se trabajará una sesión más, para que todos los alumnos hagan su presentación.

3.8 POST-TEST DEL TEMA: RAZONES Y PROPORCIONES

El post-test de esta investigación tendrá los mismos ítems que el pre-test. El objetivo es medir el avance que tuvieron los estudiantes en el tema de razones y proporciones, mismo que se analizará por tema y por alumno.

3.9 ENTREVISTAS

En las entrevistas se realizarán preguntas abiertas y neutrales, ya que pretenden obtener perspectivas, experiencias y opiniones detalladas de los participantes en su propio lenguaje (Hernández, Fernández y Baptista, 2014; p. 405). Dichas entrevistas se harán a los alumnos que hayan tenido un retroceso en los resultados en el test de razones y proporciones, a los que hayan avanzado considerablemente –con respecto a sus respuestas- y a los alumnos de cero aciertos en el pre-test.

CAPÍTULO IV: RESULTADOS

En este capítulo se mostrarán primero los resultados de la investigación basada en el método de la misma, posteriormente se realizará un análisis tomando en cuenta los resultados por ítem y finalmente el análisis se hará de acuerdo a los resultados por alumno.

4.1 RESULTADOS DE LA INVESTIGACIÓN

4.1.1 Cuestionario de Inteligencias Múltiples al docente y a los estudiantes, un contraste con las anotaciones de la observación directa

En el cuestionario sobre I.M. aplicado al docente de matemáticas para ayudarlo a empezar a conectarse con sus propias experiencias vitales en las ocho inteligencias, los resultados indican que la inteligencia que pondera en él es la lógico-matemática mientras que tiene pocas habilidades de la cinético-corporal.

En cuanto al primer acercamiento de los sujetos del estudio con las ocho inteligencias se encuentra que algunos de ellos no tienen una concepción realista de sus inteligencias, ya que consideran tener habilidades cuando el docente ha observado lo contrario. Para tener un mejor panorama, se realizó un cuadro comparativo en el que se contrasta la opinión de los estudiantes en cuanto a sus inteligencias, con lo recabado por el profesor en las anotaciones de observación directa.

Tabla 5. Inteligencias en los estudiantes

Alumno	Inteligencia que mejor lo describe	Inteligencia que casi no lo describe	Inteligencia que mejor lo describe (Contraste con lo observado por el profesor)
1	Cinético-corporal	Intrapersonal	Lingüística
2	Espacial	Musical	Espacial
3	Lógico-matemática y naturalista	Espacial, interpersonal	Lógico-matemática
4	Espacial	Interpersonal	Lógico-matemática
5	Lógico-matemática	Intrapersonal	Lógico-matemática
6	Cinético-corporal	Interpersonal	Lingüística
7	Espacial	Cinético-corporal	Lógico-matemática
8	Musical	Intrapersonal	Naturalista
9	Espacial	Musical e intrapersonal	Espacial
10	Lógico-matemática	Lingüística	Lógico-matemática

11	Cinético-corporal	Intrapersonal	Cinético-corporal
12	Musical	Interpersonal	Naturalista
13	Lingüística	Cinético-corporal	Lingüística
14	Espacial	lógico-matemática	Espacial
15	Espacial	Cinético-corporal	Espacial
16	Espacial	Interpersonal	Lógico-matemática

En el alumnado predomina la inteligencia espacial en un 44%, a su vez, las que menos desarrolladas tienen son la inteligencia interpersonal en un 25% y la intrapersonal en un 31%. Los resultados de la observación del docente coinciden con los del test de IM de Gardner en 9 de 16 alumnos.

4.1.2 Actividades de introducción a las Inteligencias Múltiples

Siguiendo las indicaciones de Armstrong (2006) y aprovechando el interés de alumnos que conforman el grupo, se realizó lo siguiente:

Se presentaron diapositivas con imágenes. Los alumnos observaron la segunda:



Figura 5. Introducción a las IM

Docente: ¿qué dice ahí?

Alumnos: ¿tú eres inteligente?

Docente: levante la mano quién se considera inteligente

Únicamente el 37% del alumnado levantó la mano. Lo que coincide con los resultados de Armstrong (2006) quien afirma haber descubierto que parece existir una relación inversa entre el

número de manos levantadas y el curso en el que se encuentran los alumnos. Mientras más avanzado es el curso en el que está un estudiante, menor será el número de ellos que se consideren inteligentes.

Después de hablarles de la Teoría de I.M. de Gardner, se les entregó a los estudiantes el test que realizaron. Como estaba enumerado, la profesora escribió en el pizarrón los números que pertenecían a cada inteligencia.

Tabla 6. Organización del test de IM

Inteligencia	Número de afirmación
Lingüística:	1, 9, 17, 25, 33, 41
Lógico-matemática:	2, 10, 18, 26, 34, 42
Espacial:	3, 11, 19, 27, 35, 43
Cinético-corporal:	4, 12, 20, 28, 36, 44
Musical:	5, 13, 21, 29, 37, 45
Interpersonal:	6, 14, 22, 30, 38, 46
Intrapersonal:	7, 15, 23, 31, 39, 47
Naturalista:	8, 16, 24, 32, 40, 48

El estudiante A1 identificó rápidamente que los números pertenecientes a cada inteligencia, eran una sucesión aritmética cuya diferencia es 8. Esto resultó una clara observación de que el alumno A1 presenta desarrollada su Inteligencia lógico-matemática.

4.1.3 Actividad para la explicación de las Inteligencias Múltiples

La actividad que se realizó fue la Pizza de Inteligencias Múltiples. Una a una, comenzaron a identificar la inteligencia que representaba cada uno de los sectores circulares según la imagen. Posteriormente debían relacionar a algunos personajes conocidos, con la inteligencia que más desarrollada tienen. Sorprendentemente lograron identificar y relacionar correctamente 7 de 8. El personaje que no ubicaron en la pizza fue Sigmund Freud.

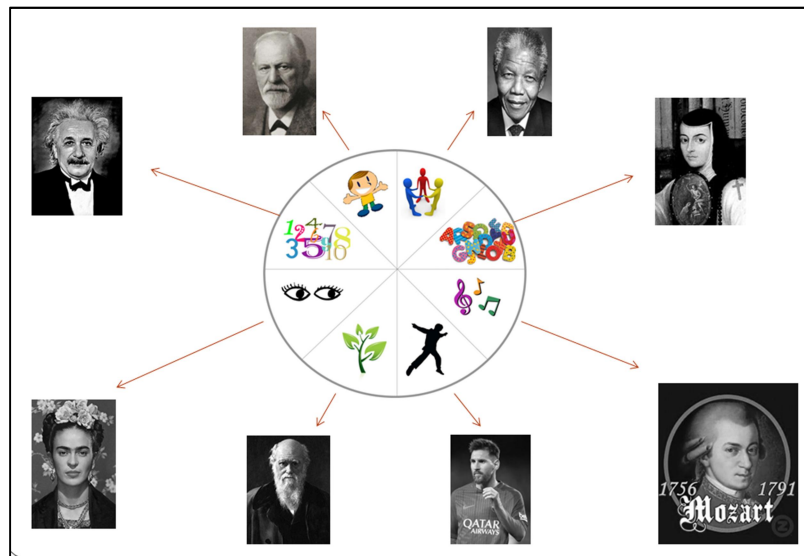


Figura 6. Pizza de IM

Entre pares, suelen identificar rápidamente las inteligencias en otro compañero. Una de las razones puede ser el hecho de que ellos conviven toda la jornada escolar, por lo que tienen más tiempo para conocerse y darse cuenta cómo es cada uno de sus compañeros.

Los alumnos del grupo de primero de secundaria, reconocen inteligencias en otros compañeros porque son sabedores que todos las tienen, porque conocen el nombre de cada una y ello les permite argumentar por qué tienen una u otra más o menos desarrollada.

Algunos adolescentes no fueron capaces de reconocer la inteligencia que pondera en su persona; lo que nos lleva a deducir que la menos desarrollada en ellos es la intrapersonal, ya que según Gardner (1994) incluye una imagen precisa de uno mismo e implica la capacidad para actuar según el autoconocimiento.

4.1.4 Pre-test del tema: razones y proporciones

Durante una sesión de la clase de matemáticas, los 16 estudiantes de primer grado de secundaria resolvieron el test de razones y proporciones. Antes de que comenzaran, la profesora pidió que de no saber cómo resolver el problema, escribieran la leyenda –no sé resolverlo– posteriormente tuvieron 50 minutos para contestarlo.

En los resultados del pre-test, además de haber alumnos que escribieron no saber resolver el problema o no haberle entendido, hubo respuestas correctas e incorrectas. Algunas respuestas

de los alumnos se presentan a continuación, ubicando primero la correcta, seguida de un ejemplo de respuesta incorrecta.

Resultados en razones (pre-test)

Ítem 1: Un segmento AB mide 20 cm de largo y otro segmento CD de 25. El primero son los 4/5 del segundo. Escribe la relación que indica las longitudes entre los dos segmentos.

1. Un segmento AB mide 20 cm de largo y otro segmento CD de 25. El primero son los 4/5 del segundo. Escribe la relación que indica las longitudes entre los dos segmentos.

$$R = 4/5$$

1. Un segmento AB mide 20 cm de largo y otro segmento CD de 25. El primero son los 4/5 del segundo. Escribe la relación que indica las longitudes entre los dos segmentos.

La relación que hay es que entre los 2 usan la tabla de 5

El alumno A1 fue el único que pudo resolver el ítem 1. A pesar de que el mismo problema tiene la respuesta, el 94% del alumnado no supo contestarlo o llegó a una respuesta incorrecta, redactando que la relación de las longitudes de dos segmentos es por medio de los quintos, o bien, que el segmento CD es quien representa el entero.

Ítem 2: Hay 100 asientos en un teatro, 30 en el balcón y 70 en el patio principal. Se han vendido ochenta entradas para el primer pase incluyendo todos los asientos del patio principal. ¿Cuál es la razón entre los asientos del balcón y los del patio principal?

2. Hay 100 asientos en un teatro, 30 en el balcón y 70 en el patio principal. Se han vendido ochenta entradas para el primer pase incluyendo todos los asientos del patio principal. ¿Cuál es la razón entre los asientos del balcón y los del patio principal?

$$10 : 70$$

2. Hay 100 asientos en un teatro, 30 en el balcón y 70 en el patio principal. Se han vendido ochenta entradas para el primer pase incluyendo todos los asientos del patio principal. ¿Cuál es la razón entre los asientos del balcón y los del patio principal?

$$\begin{array}{r} 40 \\ 70 \overline{) 300} \\ \underline{280} \\ 20 \end{array}$$

$$\frac{100}{300}$$

$$R = 40$$

$$\begin{array}{r} 70 \quad 70 \\ \times 2 \quad \times 4 \\ \hline 140 \quad 280 \end{array}$$

El 12% logró representar correctamente la razón. Del 88% restante, hubo quienes dieron como respuesta final un solo número; otros que escribieron “no sé responder el problema”.

Ítem 3: La Academia Posh cuenta con una proporción de 150 estudiantes a 18 profesores. ¿Cómo se puede ajustar el número de profesores para que la proporción de alumnos por profesor de la academia sea de 15 a 1?

3. La Academia Posh cuenta con una proporción de 150 estudiantes a 18 profesores. ¿Cómo se puede ajustar el número de profesores para que la proporción de alumnos por profesor de la academia sea de 15 a 1?

Señala 10 profesores para los 150 alumnos.

3. La Academia Posh cuenta con una proporción de 150 estudiantes a 18 profesores. ¿Cómo se puede ajustar el número de profesores para que la proporción de alumnos por profesor de la academia sea de 15 a 1?

Despidiendo a 3 profesores.

El problema no solicita que se escriba la razón, sino que modifiquen alguna de las dos cantidades para lograr una razón de 15 a 1. El alumno A10 logra deducir que deben ser 10 profesores y 150 alumnos, implícitamente está desechando a profesores, por lo que su respuesta se consideró correcta. El alumno A5, logra identificar que el despido debe ser de profesores, pero el número que propone no satisface la razón solicitada.

Ítem 4: Se tiene un sólido que tiene una masa de 340 gramos y ocupa un volumen de 120 centímetros cúbicos. ¿Cuál es la razón entre los gramos y el volumen del sólido?

4. Se tiene un sólido que tiene una masa de 340 gramos y ocupa un volumen de 120 centímetros cúbicos. ¿Cuál es la razón entre los gramos y el volumen del sólido?

340 : 120 cm⁴

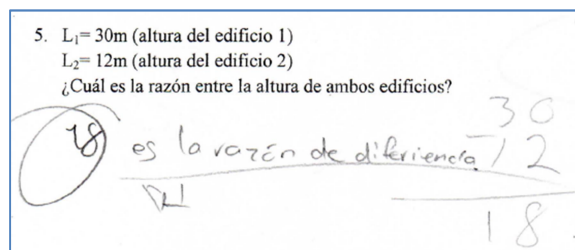
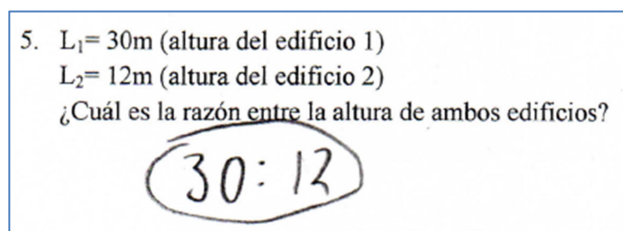
340
120 cm⁴

El 100% del grupo estudiado erró en la resolución del ítem o no supieron contestarlo. Hubo quienes incluso contestaron 220 cm², asumiendo que debían restar 120 cm de 340 gramos. El alumno A7 fue el que más se acercó a la respuesta correcta, proponiendo una razón pero confundiendo las unidades de las cantidades, además de que no la simplificó.

Ítem 5: $L_1 = 30\text{m}$ (altura del edificio 1)

$L_2 = 12\text{m}$ (altura del edificio 2)

¿Cuál es la razón entre la altura de ambos edificios?



Dos alumnos lograron establecer la relación, entre ellos A16. El 81% contestó incorrectamente, sobresaliendo entre las respuestas la diferencia entre 30 y 12, es decir, los estudiantes operaron $30-12$, estableciendo que la solución es 18, nombrando a éste número: razón.

En promedio hay un 9% en respuestas correctas y un 91% en incorrectas. Los resultados se categorizaron en la tabla 7 clasificando las respuestas en tres categorías:

C: alumnos que resolvieron el problema con procedimiento y resultado correcto.

I: alumnos que resolvieron el problema, pero su procedimiento y/o respuesta fue incorrecta

NC: alumnos cuya respuesta fue –no sé resolverlo- o –no le entendí al problema-.

Tabla 7. Categorización de resultados del pre-test

ítem	I 1	I 2	I 3	I 4	I 5	I 6	I 7	I 8	I 9	I 10
C	6%	13%	6%	0%	19%	25%	19%	13%	69%	69%
I	31%	50%	25%	50%	50%	56%	56%	63%	31%	25%
NC	63%	38%	69%	50%	31%	19%	25%	25%	0%	6%
	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%

El 50% de los ítems de razones (Ítem1-Ítem 5), no fueron resueltos porque los alumnos manifestaron no saber hacerlo o no haberle entendido al problema y aunque también fueron bajos los resultados en los ítems de proporcionalidad (Ítem 6-Ítem 10), hubo mayor número de respuestas correctas en relación a los ítems de razones.

En la tabla 8 se desglosan los aciertos de cada alumno (**AcA**) y de cada ítem (**AcI**) con sus respectivos porcentajes (**%AcA**, **%AcI**) esto para analizar los resultados con las inteligencias y la comparación de los resultados cuando se haya aplicado el instrumento al término de la propuesta didáctica.

Tabla 8. Resultados del pre-test por alumno y por ítem

ítems	I 1	I 2	I 3	I 4	I 5	I 6	I 7	I 8	I 9	I 10	AcA	%AcA
A1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	1	4	40%
A2	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	3	30%
A3	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	10%
A4	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	2	20%
A5	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	5	50%
A6	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	3	30%
A7	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	4	40%
A8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0%
A9	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	2	20%
A10	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	3	30%
A11	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	3	30%
A12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0%
A13	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	3	30%
A14	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	2	20%
A15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0%
A16	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	3	30%
AcI	1	2	1	0	3	4	3	2	11	11		
%AcI	6%	13%	6%	0%	19%	25%	19%	13%	69%	69%		

Los alumnos A1, A5, A7 y A9, fueron los estudiantes con mayor número de aciertos en el pre-test, aunque sólo A5 resultó de los más altos en el post-test. En tres de ellos, la maestra de matemáticas observó una preponderante inteligencia lógico-matemática.

Es importante resaltar que los alumnos A8, A12 y A15 no tuvieron respuestas correctas y que de acuerdo al test de IM, la inteligencia lógico-matemática no es la que menos desarrollada tienen.

Analizando las respuestas incorrectas de los estudiantes, cumplimos con el primer objetivo de investigación y damos respuesta a la pregunta: ¿cuáles son los errores que cometen

los alumnos de primero de secundaria –de este estudio- cuando resuelven problemas de razones y proporciones?

- Expresan la razón como un solo número (*figura 7*).
- No simplifican la razón entre dos números (*figura 8*).
- No etiquetan las cantidades que forman la razón (*figura 9*).
- Operan con las cantidades sin establecer relación lógica entre las mismas (*figura 10*).

2. Hay 100 asientos en un teatro, 30 en el balcón y 70 en el patio principal. Se han vendido ochenta entradas para el primer pase incluyendo todos los asientos del patio principal. ¿Cuál es la razón entre los asientos del balcón y los del patio principal?

$$R=20 \text{ asientos}$$

Figura 7. Razón expresada como un solo número

5. $L_1=30\text{m}$ (altura del edificio 1)
 $L_2=12\text{m}$ (altura del edificio 2)
 ¿Cuál es la razón entre la altura de ambos edificios?

$$30:12$$

Figura 8. Razón sin simplificar

2. Hay 100 asientos en un teatro, 30 en el balcón y 70 en el patio principal. Se han vendido ochenta entradas para el primer pase incluyendo todos los asientos del patio principal. ¿Cuál es la razón entre los asientos del balcón y los del patio principal?

100 = teatro

30 = balcón

70 = patio principal

80

$$\frac{30}{70}$$

Figura 9. Razón sin etiquetas

2. Hay 100 asientos en un teatro, 30 en el balcón y 70 en el patio principal. Se han vendido ochenta entradas para el primer pase incluyendo todos los asientos del patio principal. ¿Cuál es la razón entre los asientos del balcón y los del patio principal?

Handwritten calculations:

$$\begin{array}{r} 40 \\ 70 \overline{) 300} \\ \underline{280} \\ 20 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 100 \\ \times 30 \\ \hline 3000 \end{array}$$

$R = 40$

$$\begin{array}{r} 70 \quad 70 \\ \times 2 \quad \times 4 \\ \hline 140 \quad 280 \end{array}$$

Figura 10. Sin relación lógica al operar con cantidades

Resultados en proporciones (pre-test)

Ítem 6: John necesita 15 botes de pintura para pintar 18 sillas. ¿Cuántas sillas pintará con 25 botes de pintura?

6. John necesita 15 botes de pintura para pintar 18 sillas. ¿cuántas sillas pintará con 25 botes de pintura?

Handwritten calculations:

$$\begin{array}{r} 1.2 \\ 15 \overline{) 18} \\ \underline{30} \\ 0 \end{array}$$

bote 1 = 1.2 sillas

$$\begin{array}{r} 1.2 \\ \times 25 \\ \hline 60 \\ 240 \\ \hline 300 \end{array}$$

$R = 30$ sillas

6. John necesita 15 botes de pintura para pintar 18 sillas. ¿cuántas sillas pintará con 25 botes de pintura?

Handwritten calculations:

28 sillas

$$\begin{array}{r} +10 \quad 15 = 18 \\ 25 = 28 \end{array}$$

A partir de este ítem comienzan los problemas de proporcionalidad y también empiezan a incrementar el número de alumnos con respuestas correctas, sin embargo, menos del 50% acertó. Ningún estudiante planteó una regla de tres. El 25% dividió 18 por 15 obteniendo 1.2, este número lo multiplicaron por 25 y obtuvieron 30.

Ítem 7: Si Jorge pedalea a una razón de 8 km por hora, al cabo de 45 minutos ¿a qué distancia está de su casa?

7. Si Jorge pedalea a una razón de 8 km por hora, al cabo de 45 minutos ¿a qué distancia está de su casa?

$$\begin{array}{l} 8 \text{ km} \quad 60 \text{ m} \\ \textcircled{6 \text{ km}} \quad 45 \text{ m} \end{array} \quad \begin{array}{r} 45 \\ \times 8 \\ \hline 360 \end{array} \quad \begin{array}{r} 6 \\ 60 \overline{) 360} \\ \underline{00} \end{array}$$

7. Si Jorge pedalea a una razón de 8 km por hora, al cabo de 45 minutos ¿a qué distancia está de su casa?

$$\begin{array}{r} 45 \text{ min} \\ \times 8 \text{ km} \\ \hline 280 \end{array} \quad \textcircled{R=280} \text{ de distancia}$$

Sólo 1 estudiante pudo plantear la regla de tres, dándose cuenta que debía comparar kilómetros con minutos, su estrategia fue convertir una hora en 60 en minutos. Entre los principales errores que cometieron los alumnos al tratar de solucionar el ítem, se observó que decidieron operar con los números, en el ejemplo mostrado el estudiante optó por multiplicar 8 por 5.

Ítem 8: Una motocicleta puede funcionar durante 10 minutos con un valor de \$24 en combustible. ¿Cuánto tiempo podría funcionar con \$17 en combustible?

8. Una motocicleta puede funcionar durante 10 minutos con un valor de \$24 en combustible. ¿Cuánto tiempo podría funcionar con \$17 en combustible?

$$\begin{array}{l} \boxed{7.0 \text{ min}} \\ 24 \times 5 = 120 \\ 170 \div 24 = 7.08 \\ 17 \div 24 = 0.708 \\ 10 \div 24 = 0.416 \\ 17 \div 24 = 0.708 \\ 10 \div 24 = 0.416 \end{array}$$

8. Una motocicleta puede funcionar durante 10 minutos con un valor de \$24 en combustible. ¿Cuánto tiempo podría funcionar con \$17 en combustible?

$$\begin{array}{r} 24 \\ -17 \\ \hline 07 \end{array} \quad \textcircled{7 \text{ minutos}} \quad \begin{array}{r} 24 \\ \times 5 \\ \hline 120 \end{array} \quad \begin{array}{r} 17 \\ \times 5 \\ \hline 85 \end{array} \quad \begin{array}{r} 10 \\ \times 5 \\ \hline 50 \end{array}$$

Este problema fue el que menos aciertos tuvo de los que pertenecen a proporcionalidad. El 13% pudo llegar a 7 minutos como respuesta correcta. Hubo alumnos que realizaron las

operaciones de cada estrategia que se les ocurría, un caso particular es el que se muestra. El segundo ejemplo de este ítem, es el de un estudiante que llegó a 7 minutos como respuesta final, pero su procedimiento es incorrecto, ya que decidió restar los números pertenecientes a los pesos.

Ítem 9: Para tu fiesta, habías planeado comprar 2 kg de nueces mixtas para 8 personas, pero ahora vendrán 10 personas. ¿Cuántos kilogramos deberías comprar?

Sorprendentemente el 69% respondió correctamente. La mayoría de los adolescentes no usaron la regla de tres para resolver este ítem

9. Para tu fiesta, habías planeado comprar 2 kg de nueces mixtas para 8 personas, pero ahora vendrán 10 personas. ¿Cuántos kilogramos deberías comprar?

2.5 Kg

$$\begin{array}{r} 10 \\ - 8 \\ \hline 2 = 1/2 \text{ de kilo} \end{array}$$

Docente: ¿cómo obtuviste 2.5 kilogramos?

Alumna: dividí mentalmente, para 4 personas es un kilo, entonces ese kilo lo repartí entre 4 y me salió 250 gramos. Luego resté 10 menos 8 y me salieron 2 personas y como por cada persona son 250 gramos, entonces por dos personas es medio kilo.

9. Para tu fiesta, habías planeado comprar 2 kg de nueces mixtas para 8 personas, pero ahora vendrán 10 personas. ¿Cuántos kilogramos deberías comprar?

2 kg nueces = 8 personas
+ 2

$$2 \overline{) 8}$$

R = 4 Kg

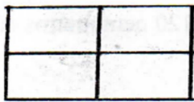
Los estudiantes que utilizaron la estrategia aditiva llegaron a 4 kg, esta respuesta es incorrecta. Asumen que si aumentan 2 personas, entonces también se deben aumentar 2 kg.

Ítem 10: En una fotografía de un edificio hay una ventana de 3 cm de altura por 6 cm de ancho como la mostrada a continuación.



Un pintor quiere hacer un dibujo amplificado de esta ventana, de tal manera que la altura de la ventana le quede de 15 cm. ¿De cuánto debe ser el ancho de la ventana amplificada?

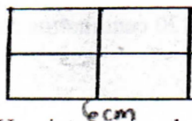
10. En una fotografía de un edificio hay una ventana de 3 cm de altura por 6 cm de ancho como la mostrada a continuación.



Un pintor quiere hacer un dibujo amplificado de esta ventana, de tal manera que la altura de la ventana le quede de 15 cm. ¿De cuánto debe ser el ancho de la ventana amplificada?

30 cm por que 15 es la mitad de 30

10. En una fotografía de un edificio hay una ventana de 3 cm de altura por 6 cm de ancho como la mostrada a continuación.



3 cm

$$6 \times 3 = 18$$

$$R = 18 \text{ cm}$$

Un pintor quiere hacer un dibujo amplificado de esta ventana, de tal manera que la altura de la ventana le quede de 15 cm. ¿De cuánto debe ser el ancho de la ventana amplificada?

Altura = 15 cm

no le entendí al problema.

Ancho =

Al igual que en el ítem 9, el 69% de los alumnos dio respuesta correcta al problema, pero no fueron exactamente los mismos estudiantes. Entre los aciertos, sólo un alumno usó la regla de tres (ese adolescente utilizó la regla de 3 en todos los problemas de proporcionalidad y todos fueron correctos). En ese 69% hubo diferentes estrategias de solución; en la que a continuación se muestra, el alumno relacionó 3 cm y 6 cm como: uno es la mitad de otro. Al saber que el lado correspondiente a 3 cm debía ser 15, dedujo que la respuesta era 30 cm porque 15 es la mitad de 30. En los errores, nuevamente se observó que el estudiante busca operar con los números del problema. En este ejemplo el alumno decide multiplicar y escribir que no le entendió al problema.

En el pre-test de proporciones, en promedio hay un 39% en respuestas correctas, resultado superior al obtenido en razones entre dos números. Los errores que cometieron los alumnos en esta investigación, al resolver problemas de proporcionalidad directa son:

- Operan con los números sin establecer relaciones de proporcionalidad (*figura 11*).
- Utilizan un razonamiento aditivo en problemas de proporcionalidad directa (*figura 12*).

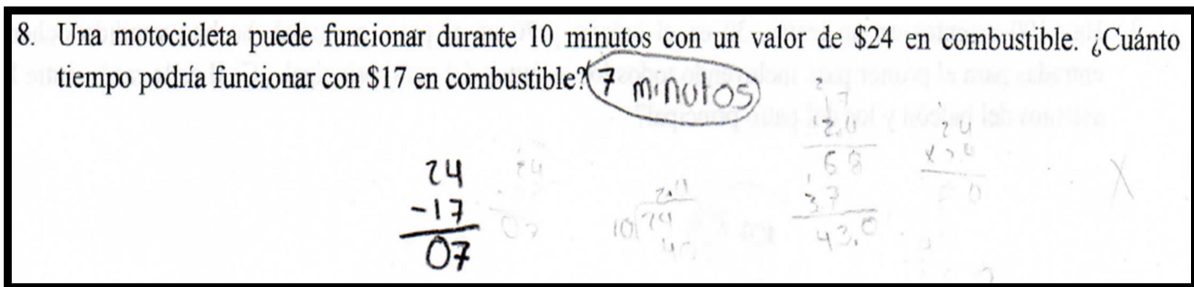


Figura 11. Problema resuelto sin establecer relaciones lógicas

En la figura 11 se observa cómo el estudiante, a pesar de que pudieron escribir que no sabían resolver el problema, decide resolverlo operando con los números con la etiqueta de pesos (\$) realizando una resta cuya diferencia es 7, a ésta únicamente agrega la etiqueta minutos y llega a la respuesta *7 minutos*, que es una respuesta correcta encontrada sin haber llegado al razonamiento proporcional.

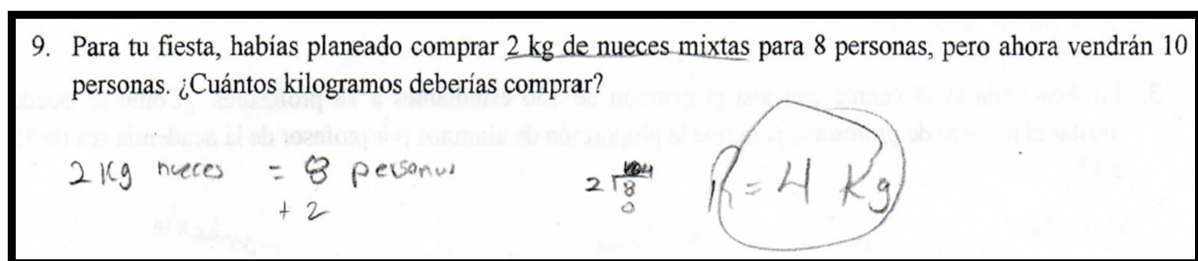


Figura 12. Razonamiento aditivo en un problema de proporcionalidad

El alumno está utilizando una estrategia aditiva para solucionar el problema nueve. Asume que si aumentaron dos personas, entonces también aumentan 2 kg de nueces.

Karplus, Pulos & Stage (1983) concluyeron que los estudiantes son quienes deciden si usar o no el razonamiento proporcional. En los resultados del pre-test de esta investigación, se tiene que los alumnos deciden no usarlo, aplicando estrategias diversas, entre ella la estrategia aditiva, encontrada también por Hart (1984) en su investigación.

4.1.5 Actividades para enseñar contenido matemático usando las Inteligencias Múltiples

Resultados de la sesión 1: Etiquetas y simplificación

Se cumplió con el objetivo de identificar la diferencia entre una razón y una fracción, considerando lo dicho por Lamon (2006) respecto al uso de las etiquetas y a Cid, Godino y Batanero (2003) en lo que concierne al denominador cero (*figura 13*).

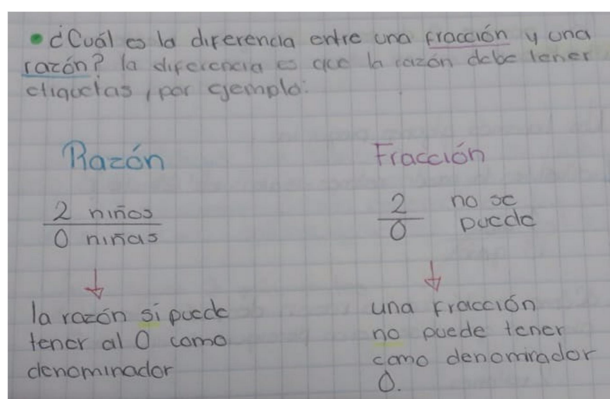


Figura 13. Diferencia entre una razón y una fracción

En cuanto a la simplificación de las razones, se trabajó con tapa roscas de dos colores diferentes para cada equipo. La razón $\frac{6 \text{ rojas}}{4 \text{ azules}}$ debieron simplificarla a $\frac{3 \text{ rojas}}{2 \text{ azules}}$, lo único que variaría sería el nombre de las etiquetas porque dependería del color (*figuras 14*).

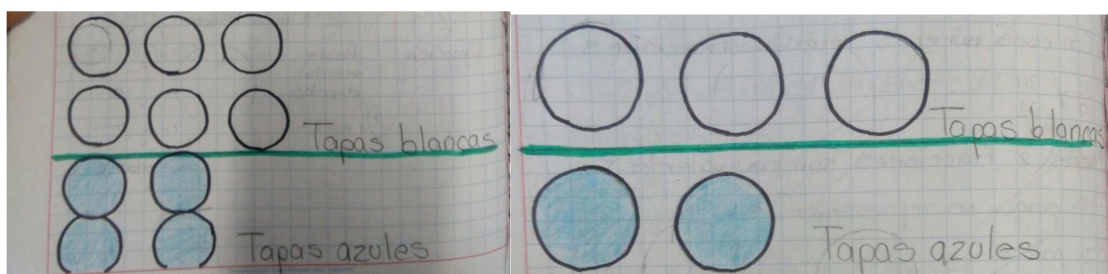


Figura 14. Razón sin simplificar y razón simplificada

En las razones se observa que utilizamos los clones (Lamon, 2006, p.185). Para obtener una razón equivalente, este equipo debió quitar tres tapas blancas y dos tapas azules para (quitar la mitad de lo que hay arriba y la mitad de lo que hay abajo). Otros equipos, al trabajar con equivalencias, llegaron a razones equivalentes pero sin usar los clones (*figura 15*); esos alumnos

son parte de quienes lograron plantear correctamente la razón en el ítem 4 (del post-test) pero no pudieran simplificarla.

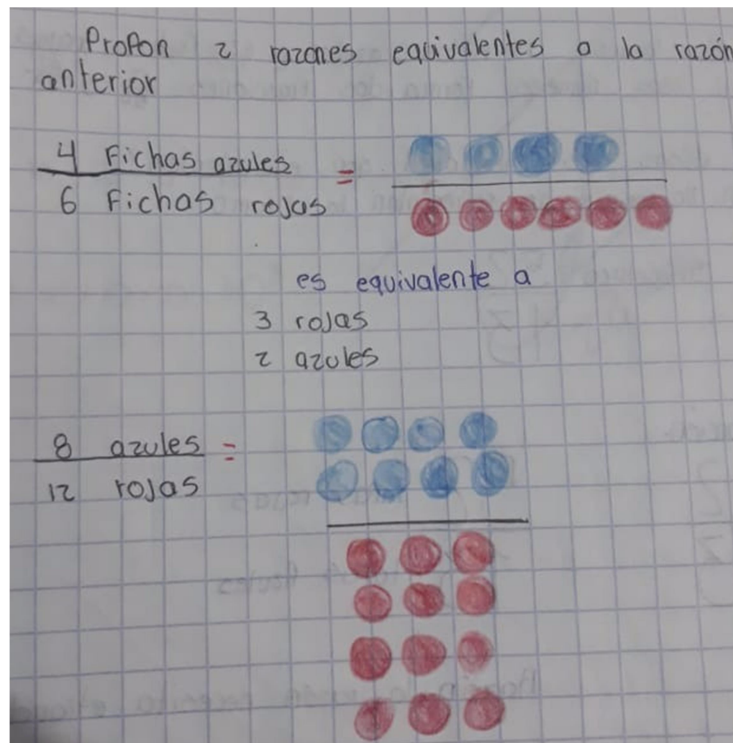
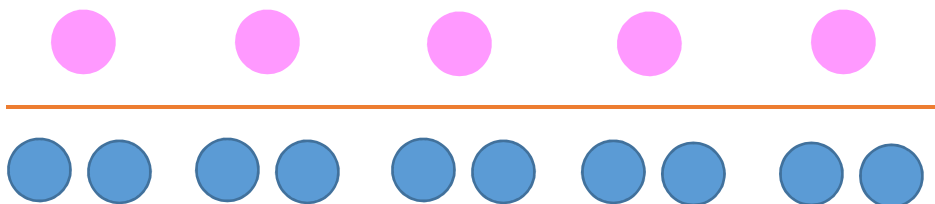


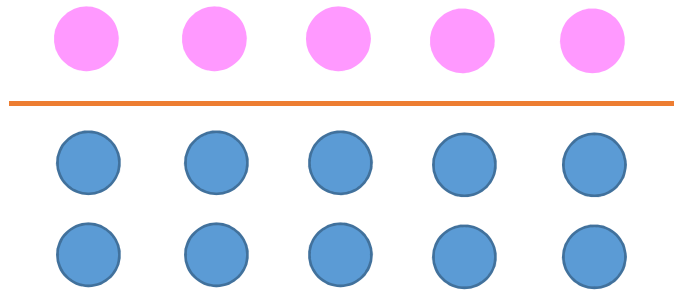
Figura 15. Equivalencia correcta sin usar clones

Resultados de la sesión 2: ¿Cuántos quito, cuántos pongo?

Se organizaron las bancas del salón para tener espacio. Mientras los estudiantes las organizaban, la profesora explicaba el juego. Todo el grupo estuvo completo, por lo que la primer razón en representarse con personas, fue la de 5 niñas a 11 niños, después, fue necesario decir más razones para que los alumnos estuvieran más en movimiento. La organización propia del grupo fue favorable. Cuando se formó la razón 5 niñas a 10 niños, se hizo la pregunta: ¿se puede simplificar? Entre las respuestas hubo niños que dijeron que no, pero no supieron justificarla. Al alumno A5 se le ocurrió formar de la siguiente manera:



Posterior a ello, la profesora propuso:



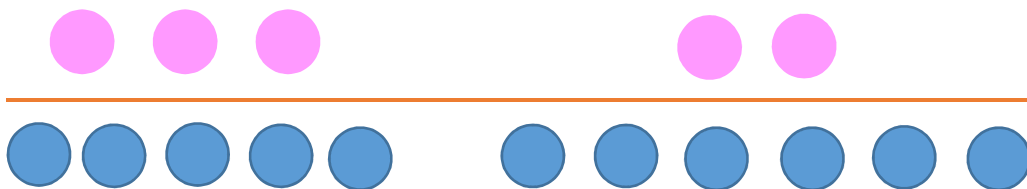
Siguió el juego de las razones, esta vez la profesora ocupó etiquetas como: grades, pequeños, niñas, niños. Por ejemplo: 6 pequeños a 2 grandes. En cada una preguntó si se podían simplificar. Los alumnos acertaron a la mayoría de las preguntas.

Una vez que se llegó a la razón que se podría formar con los alumnos del salón (5 niñas a 11 niños)...

Profesora: ¿Qué hacemos si queremos que la razón de niñas-niños del salón, sea de 3 a 10.

A8: Sacar a dos niñas y un niño.

Posteriormente respondieron en la libreta: ¿qué debemos hacer para que la razón de niñas-niños de nuestro salón quede 30:50? Se dio tiempo para que reflexionaran e intentaran resolver. Después comentaron con el compañero de mesa y al final propusieron soluciones. A1 propuso simplificar primero la razón, 30:50, quedando 3:5. Posterior a ello el alumno A7 pasó al pizarrón para hacer la representación con círculos, quedando de la siguiente manera:



A7: debemos quitar a dos niñas y a 6 niños, porque no podemos formar otro grupito como este.

Refiriéndose a los tres círculos rosas y a los 5 azules de la izquierda.

Profesora: ¿Por qué no podemos hacer otro grupito como el que dice A7?

A8: porque faltaría una niña, por eso no se pudo.

Claramente A8 (con ayuda de una actividad en la que usaron su inteligencia corporal) logró darse cuenta de los clones, es decir, de las equivalencias.

Después de compartir respuestas, como grupo, llegaron a la siguiente solución, descrita en tres pasos:

1. Primero simplificamos para que quede 3 niñas : 5 niños
2. Tomamos 3 niñas y 5 niños
3. Por último sacamos a 2 niñas y 6 niños.

El profesor propuso el problema planteado en la propuesta de esta sesión: Si en el Colegio José Vasconcelos hay un salón para cada 20 estudiantes y ahora hay un salón para cada 23 estudiantes, ¿cómo podemos ajustar para que la relación salón-estudiantes siga 1 a 20? Antes de dar a conocer la respuesta del problema, 11 de 16 alumnos lograron darse cuenta que se ajusta quitando 3 estudiantes por aula (*figura 16*).

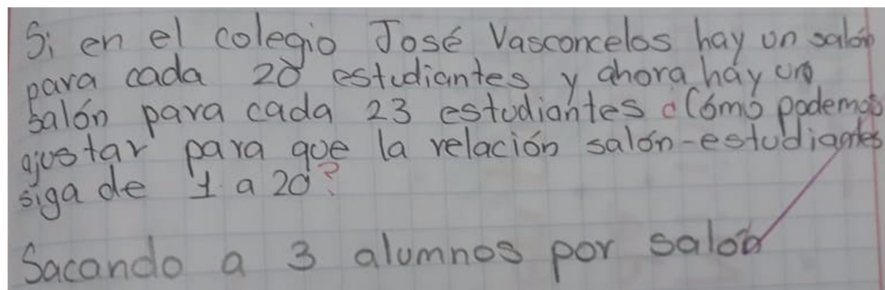


Figura 16. Respuesta de un alumno muy lógico-matemático

Resultados de la sesión 3: Comparación entre dos cantidades

Durante la sesión todos los alumnos, al resolver la **HOJA 1 (vea apéndice III)** midieron y anotaron correctamente las magnitudes de los lados de los cuadrados presentados. Cuando las compararon, A1, A2, A3, A4, A5, A6, A10, A13, A14 y A16 lograron tener todos sus resultados correctos ya que consideraron siempre las etiquetas y simplificaron correctamente (*figura 17*); mientras que A7, A8, A9, A11, A12 y A15 plantearon bien su primera propuesta de razón entre magnitudes, pero en la respuesta final olvidaron etiquetar.

1. ¿Cuál es la razón entre la magnitud de C_a y C_n? $\frac{8 \text{ amarillo}}{5 \text{ naranja}}$	1. ¿Cuál es la razón entre la magnitud de C_a y C_n? $\frac{8 \text{ cm}}{5 \text{ cm}}$
2. ¿Cuál es la razón entre la magnitud de C_r y C_v? $\frac{20 \text{ rosa}}{15 \text{ verde}} = \frac{4 \text{ rosa}}{3 \text{ verde}}$	2. ¿Cuál es la razón entre la magnitud de C_r y C_v? $\frac{20 \text{ cm}}{15 \text{ cm}} = \frac{4}{3}$
3. ¿Cuál es la razón entre la magnitud de C_v y C_n? $\frac{15 \text{ verde}}{5 \text{ naranja}} = \frac{3 \text{ verde}}{1 \text{ naranja}}$	3. ¿Cuál es la razón entre la magnitud de C_v y C_n? $\frac{15 \text{ cm}}{5 \text{ cm}} = \frac{3}{1}$
4. ¿Cuál es la razón entre la magnitud de C_n y C_a? $\frac{5 \text{ naranja}}{8 \text{ amarillo}} =$	4. ¿Cuál es la razón entre la magnitud de C_n y C_a? $\frac{5 \text{ cm}}{8 \text{ cm}}$
5. ¿Cuál es la razón entre la magnitud de C_r y C_m? $\frac{20 \text{ rosa}}{25 \text{ morado}} = \frac{4 \text{ rosa}}{5 \text{ morado}}$	5. ¿Cuál es la razón entre la magnitud de C_r y C_m? $\frac{20 \text{ cm}}{25 \text{ cm}} = \frac{4}{5}$

Figura 17. Razones simplificadas con etiquetas y sin etiquetas

Cuando terminaron de contestar la hoja 1, comenzaron con la cuadrícula de sus imágenes y de sus cartulinas usando reglas y escuadras. Todos los alumnos presentaron dificultades para hacer coincidir el número de cuadrados dentro de su cartulina, ya que éstos debían ser los mismos que los trazados en la cuadrícula original, inclusive los muy lógico-matemáticos tardaron para hacerlo. La docente únicamente intervino para apoyar a los que más dificultades tenían, haciendo preguntas orientadoras para que fueran los alumnos quienes concluyeran cuánto debían medir sus cuadrados en la cartulina.

Resultados de la sesión 4: Dibujos a escala

El objetivo de la sesión fue aplicar las escalas en los dibujos, trazando cuadrículas en la hoja del dibujo original y en la hoja donde realizarán la copia y, escribir correctamente una escala de reducción. La clase comenzó retomando las cuadrículas de ambas superficies (la del dibujo y la de la cartulina). Cada uno trabajó a su ritmo para finalmente concluir su trabajo, escribiendo la escala de su dibujo. A4, quien es muy espacial, fue el único que confundió el orden de los

números de su escala, representado en ella una reducción y no una ampliación, pero el dibujo fue exacto (*figura 18*).



Figura 18. Escala incorrecta de un alumno muy espacial

Otros alumnos, también muy espaciales, realizaron ampliaciones bastante detalladas de sus dibujos y además simplificaron y escribieron correctamente su escala de ampliación. De acuerdo con los alumnos de la clase y con la docente, esos fueron los mejores dibujos, en especial el de A9 (*figuras 19 y 20*).

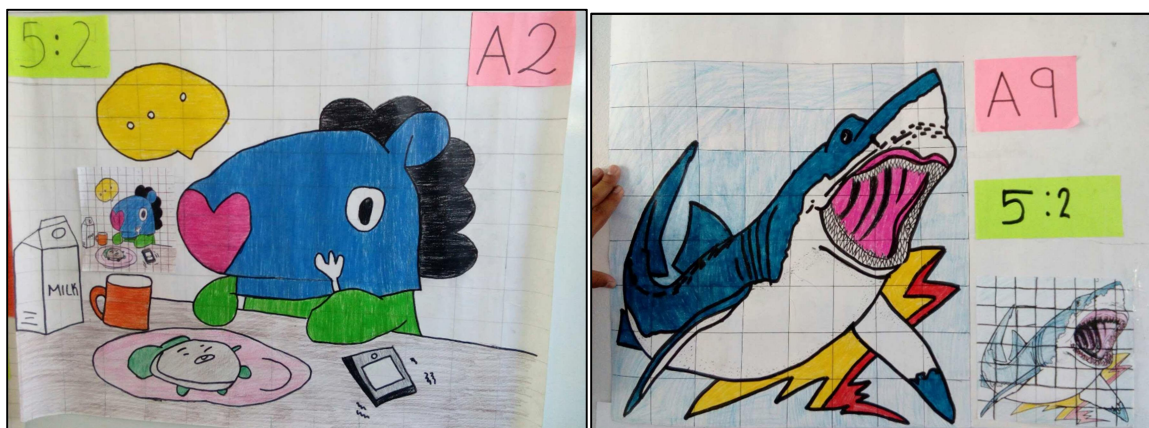


Figura 19. Dibujos a escala de alumnos muy espaciales



Figura 20. Dibujos de alumnos muy espaciales

Los alumnos A1, A6 y A11, a pesar de no tener tan desarrollada su inteligencia espacial, realizaron escalas de ampliación muy exactas (**figura 21**), el común que resalta en estos tres estudiantes es que coinciden en ser más cinético-corporales. Se asume que logramos generar en ellos experiencias cristalizadoras debido a que alumnos no tan espaciales lograron excelentes dibujos a escala, recordemos que según Miller (1981) la experiencia cristalizadora es la chispa que necesitan para abrir la inteligencia y que comience el desarrollo de ésta.

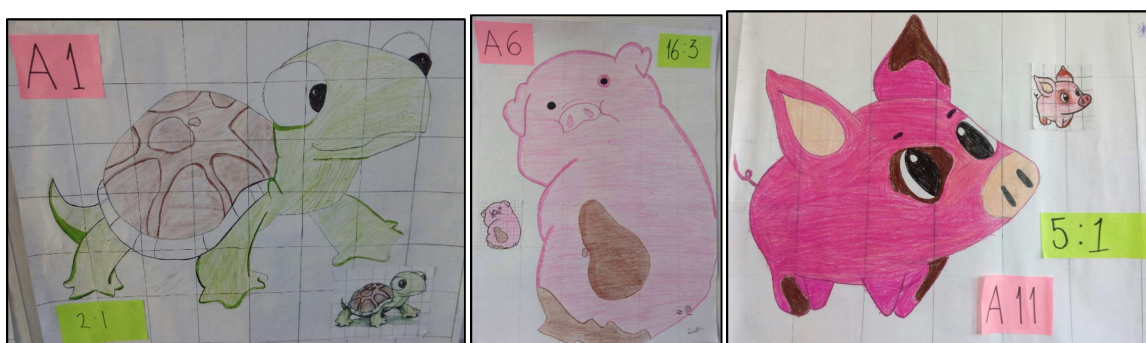


Figura 21. Dibujos a escala de alumnos muy cinético-corporales

Resultados de la sesión 5: Los animales

El objetivo de la sesión número cinco fue explicar oralmente las características del animal que reprodujeron a escala y comentar por qué su escala es la mostrada en sus dibujos. Se esperaba que A3 compartiera más información acerca del animal que dibujó por ser el alumno

con una inteligencia naturalista mayormente desarrollada y aunque no lo hizo mal, los alumnos A1 y A13 explicaron mejor que cualquiera de su grupo de pares. Revisando la tabla 5 (página 49), observamos que de acuerdo al test de Gardner, A1 y A13 tienen más desarrollada su inteligencia lingüística. Sin embargo A1 fue quien que se expresó con un lenguaje más técnico al hablar del hábitat y características de las tortugas. Por otra parte, A10 presentó dificultades al hablar, titubeaba, confundía palabras, tartamudeaba, repetía ideas y hacía pausas muy alargadas; resultado que coincide con el test de IM, ya que es quien tiene menos desarrollada su inteligencias lingüística.

En la descripción de la sesión 5, se había considerado realizar una actividad más relacionada con la inteligencia lingüística, pero por cuestiones de tiempo no fue posible realizarla. Tampoco respondieron las preguntas que aparecen en la misma sesión, pero redactaron en las libretas su experiencia al hacer el dibujo y la experiencia en la actividad de la sesión 5. Al observar a los adolescentes y leer sus experiencias al hacer el dibujo, nos dimos cuenta que la principal dificultad en la mayoría fue el trazo de las cuadrículas como tal, y el número de cuadrados que debería tener trazados la cartulina (*figura 22 y 23*).

<i>Experiencia al hacer el dibujo</i> Al principio fue difícil me estrese por que no podía hacer la cuadrícula, lo tuve que repetir dos veces pero si me quedo la cuadrícula. La verdad no fue muy difícil hacer mi dibujo pense que me quedaria muy mal, mi dibujo pero resulto lo contrario si me salio y me gusto.	Al principio fue difícil, me estresé porque no podía hacer la cuadrícula, lo tuve que repetir dos veces pero sí me quedó. La verdad no fue muy difícil hacer mi dibujo, pensé que me quedaría muy mal pero resultó lo contrario, sí me salió y me gustó.
---	---

Figura 22. Experiencia de un alumno muy espacial al realizar su dibujo

<i>¿Cuál fue tu experiencia al hacer tu dibujo a escala?</i> Se me complicó un poco al hacer la cuadrícula y un poco el trazo. En la cuadrícula porque no medía bien, y por lo mismo en el trazo, se me complicó y tuve que volver a resolver pero el resultado fue bueno y mejoré.	Se me complicó un poco al hacer la cuadrícula y un poco el trazo. En la cuadrícula porque no medía bien, y por lo mismo en el trazo se me complicó y tuve que volver a resolver pero el resultado fue bueno y mejoré.
---	---

Figura 23. Experiencia de un alumno muy kinético-corporal al realizar su dibujo

Por el contrario, otros –no muy espaciales- presentaron dificultad al trazar el dibujo y no la cuadrícula (*figura 24*).

A mí me agradó el hacer dibujos usando cuadrículas ya que mi abuelo era pintor y ya me había mostrado esa técnica de dibujo, incluso él me mostró algunos dibujos que hizo con esa técnica. A mí no se me complicó hacer la cuadrícula ya que usé una regla y escuadra para trazar bien las líneas, lo único que se me dificultó fue el trazar el dibujo.	A mí me agradó el hacer dibujos usando cuadrículas ya que mi abuelo era pinto y ya me había mostrado esa técnica de dibujo, incluso él me mostró algunos dibujos que hizo con esa técnica. A mí no se me complicó hacer la cuadrícula ya que usé una regla y escuadra para trazar bien las líneas, lo único que se dificultó fue el trazar el dibujo.
---	---

Figura 24. Experiencia de un alumno poco espacial al realizar su dibujo

En lo que respecta a las experiencias individuales en la actividad para describir a los animales, todos concuerdan en que resultó interesante, pero uno de los factores que influyó negativamente en la realización de esta sesión, fue la carente información de bastantes alumnos, debido a que no investigaron en sus casas lo referente al animal dibujado (*figuras 25-27*).

<i>Mi experiencia en la actividad de la clase.</i> *En esa actividad pude observar los demás dibujos de mis compañeros, además, ellos expusieron sobre el animal de su dibujo. Todas sus explicaciones me parecían interesantes, yo no sabía casi nada de algunos animales y sus explicaciones me ayudaron a saber un poco más sobre ellos.	Mi experiencia en la actividad de la clase. En esa actividad pude observar los demás dibujos de mis compañeros, además, ellos expusieron sobre el animal de su dibujo. Todas sus explicaciones me parecían interesantes, yo no sabía casi nada de algunos animales y sus explicaciones me ayudaron a saber un poco más sobre ellos.
---	---

Figura 25. Experiencia de A11 después de la sesión 5

<i>Experiencia en la actividad de los animales</i> Al principio estuve un poco desanimada por que no investigue sobre el animal que dibuje y me sentí un poco triste por que no cumplí con eso pero conforme pasaban mis compañeros me sentía mejor por que me hacían reír y me levantaron mucho el ánimo, siendo honesta me gustaría repetir la actividad por que fue muy divertido y estoy segura de que si algún día lo repetimos ahora sí cumplire con todo.	Experiencia en la actividad de los animales Al principio estuve un poco desanimada porque no investigué sobre el animal que dibujé y me sentí un poco triste porque no cumplí con eso, pero conforme pasaban mis compañeros me sentía mejor porque me hacían reír y me levantaron el ánimo, siendo honesta me gustaría repetir la actividad porque fue muy divertido y estoy segura de que si algún día repetimos ahora sí cumplire con todo.
--	---

Figura 26. Experiencia de A2 después de la sesión 5

Experiencia al exponer: No tenía la información necesaria. Me gustó bastante porque aprendí muchas cosas nuevas de mis compañeros.	Experiencia al exponer: No tenía la información necesaria. Me gustó bastante porque aprendí muchas cosas nuevas de mis compañeros.
---	---

Figura 27. Experiencia de A7 después de la sesión 5

Resultados de la sesión 6: Estrategia aditiva Vs estrategia multiplicativa

En la sesión 6 el objetivo fue comparar la estrategia aditiva y la estrategia multiplicativa después de aplicar cada una en la construcción de un triángulo. Como primera consigna, los alumnos debieron trazar un triángulo de magnitudes 4cm, 3cm y 2cm, considerando el lado más largo como la base de la figura. Algunos presentaron dificultad en el uso del compás para trazar el triángulo, entre ellos A8 (**figura 28**); pero fueron sus compañeros quienes se ofrecieron a apoyarlos en la explicación del trazo con el compás (entre ellos A1 y A5, estudiantes muy lingüístico y lógico-matemático respectivamente). Una vez dada la explicación de cómo trazar el triángulo, no fue necesario repetirla.

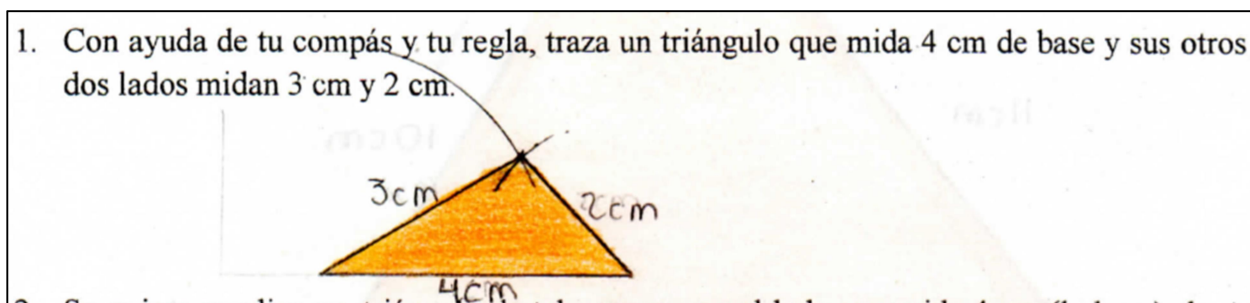


Figura 28. Trazo de alumna muy espacial

Posterior a esto, se les solicitó trazar el triángulo de la opción 1, que consistía en sumar 8 cm a cada uno de los lados, por lo que los lados de 4 cm, 3cm y 2cm ahora debían medir 12 cm, 11 cm y 10 cm respectivamente. Todos los alumnos trazaron considerando estas últimas medidas (**figura 29**), pero no todos lo hicieron respetando la correspondencia de los lados (**figura 30**).

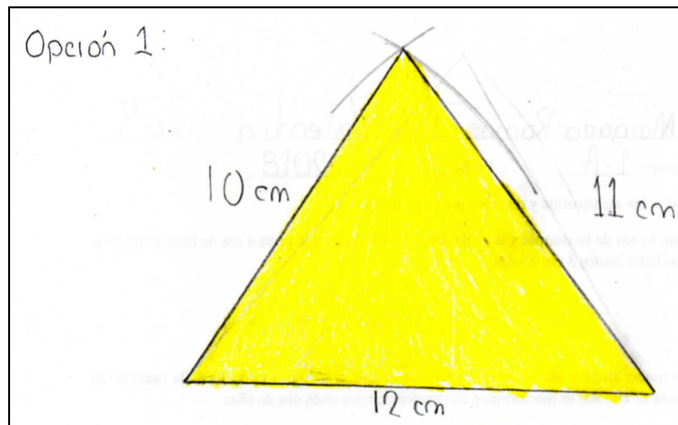


Figura 29. Orden invertido de los lados de 10 cm y 11 cm

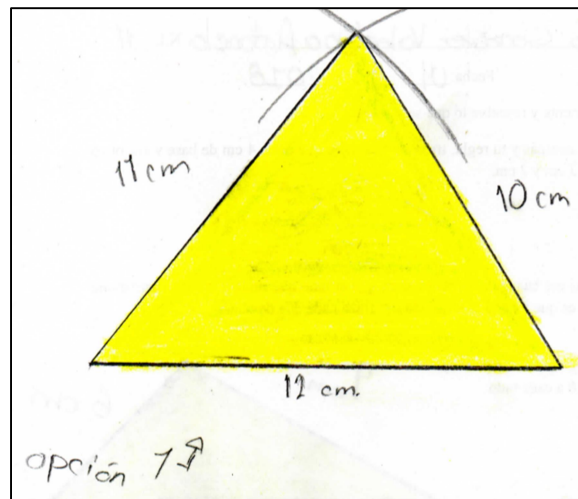


Figura 30. Correspondencia entre los lados

En la opción 2, basada en la estrategia multiplicativa, debieron multiplicar por 3 las medidas de cada lado, por lo que ahora serían de 12 cm, 9 cm y 6 cm (**figura 31**).

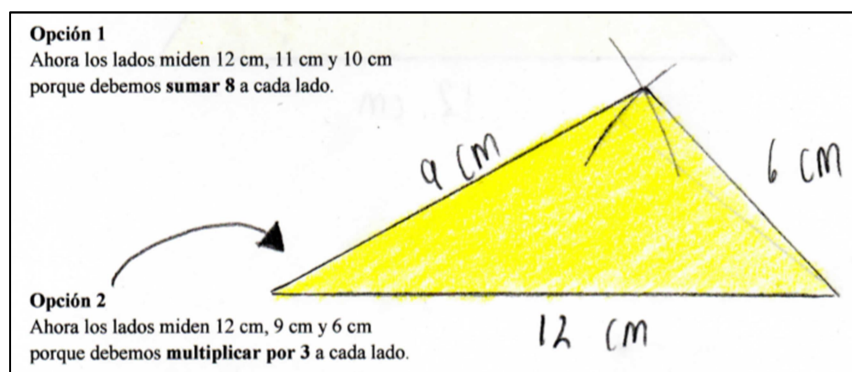


Figura 31. Trazo de la opción 2

La profesora leyó para el grupo la pregunta número 3 de la hoja 2: ¿Qué observas?, ¿Cuál de las dos opciones nos da un triángulo más parecido? La respuesta de todos los estudiantes fue: la opción 2. Cuando se preguntó: ¿Qué debemos hacer para que se conserve la proporción de la figura?, cada alumno lo redactó conforme lo entendió, pero todos coincidieron con la palabra “multiplicar” (*figura 32*).

3. ¿Qué observas?, ¿Cuál de las dos opciones nos da un triángulo más parecido? opción 2 4. Para que se conserve la proporción de la figura, ¿qué debemos hacer? multiplicar por el mismo número
3. ¿Qué observas?, ¿Cuál de las dos opciones nos da un triángulo más parecido? La opción 2 4. Para que se conserve la proporción de la figura, ¿qué debemos hacer? Multiplicar por un mismo número las 3 medidas
3. ¿Qué observas?, ¿Cuál de las dos opciones nos da un triángulo más parecido? La opción 2 4. Para que se conserve la proporción de la figura, ¿qué debemos hacer? Multiplicar todas las medidas por el mismo número
3. ¿Qué observas?, ¿Cuál de las dos opciones nos da un triángulo más parecido? opcion 2 4. Para que se conserve la proporción de la figura, ¿qué debemos hacer? multiplicar

Figura 32. Respuestas a preguntas 3 y 4 de hoja 2

En esa misma sesión se trabajó la hoja 3. Se propusieron tres tablas, mismas que debieron observar, analizar de manera individual y, colorear de amarillo en la que encontraran una variación proporcional directa, basados en el ejemplo de la tabla de Lesh, Post y Behr (*vea figura 2, página 28*).

Propuesta T1

Número de ganadores	Monedas para cada uno
2	350
5	140
10	70
200	?

El 100% de los estudiantes respondió correctamente. La mayoría relacionó 5 ganadores es a 140 monedas y 10 ganadores es a 70 monedas, descubriendo que una aumenta mientras la otra disminuye, por lo que no hay relación de proporcionalidad directa (*figura 33*).

Número de ganadores	Monedas para cada uno
2	350
5	140
10	70
200	?

No hay proporcionalidad directa

$\times 2$ $\div 2$

Figura 33. Respuesta correcta para T1 de alumno poco lógico-matemático (A14)

Propuesta T2

Edad (años)	Estatura (m)
0	0.40
5	1.00
10	1.40
15	1.65
20	1.80

87% de los alumnos presentes en el grupo, respondieron que no había una proporcionalidad directa (respuesta correcta), de ese porcentaje el 78% no identificó la relación entre las cantidades comparadas en ambas columnas (*figura 34*). A9 y A10 consideraron que sí había una relación proporcional (*figura 35 y 36*).

Edad (años)	Estatura (m)
0	0.40
5	1.00
10	1.40
15	1.65
20	1.80

no hay proporcionalidad directa

Figura 34. Respuesta correcta e incompleta para T2 de alumno muy espacial (A7)

Edad (años)	Estatura (m)
0	0.40
5	1.00
10	1.40
15	1.65
20	1.80

Handwritten annotations: $15 \times 5 = 5$, $20 / 2 = 10$ in the 'Edad' column; $1.65 \times 5 = 1.00$, $1.80 / 2 = 1.40$ in the 'Estatura' column.

Figura 35. Respuesta incorrecta de A9 para T2

En la figura 35 se observa la respuesta de A9, estudiante muy espacial, asumió en la columna edad: $15 \times 5 = 5$, $20 / 2 = 10$ mientras que en la columna estatura: $1.65 \times 5 = 1.00$ y $1.80 / 2 = 1.40$. Este alumno no es capaz de identificar correctamente la característica básica de la proporcionalidad directa, al igual que el estudiante A10.

Edad (años)	Estatura (m)
0	0.40
5	1.00
10	1.40
15	1.65
20	1.80

Handwritten annotations: $15 \times 3 = 5$, $20 \times 3 = 10$ in the 'Edad' column; $1.00 \times 3 = 1.00$, $1.40 \times 2 = 1.40$ in the 'Estatura' column.

Si es de proporcionalidad Directa

Figura 36. Respuesta incorrecta de A10 para T2

Propuesta T3

Días	# de Coches
30	600
90	1,800
15	300
1	20

El 93% de los alumnos presentes en el grupo respondieron correctamente, ya que en esta tabla sí existe una variación proporcional directa. Nuevamente A10 erró en la respuesta, al afirmar que no hay proporcionalidad directa (*figura 37*).

Días	# de Coches
30	600
90	1,800
15	300
1	20

No hay proporcionalidad Directa

Figura 37. Respuesta incorrecta de A10 para T3

Para que los adolescentes del grupo en el que se realizó la investigación usaran su inteligencia intrapersonal, a partir de esta sesión comenzaron con su “Inventario de lo aprendido”, en el cual escribieron lo que aprendieron (con la etiqueta “ahora ya sé...”) y lo que se les dificultó (con la etiqueta “se me dificultó...”). Los resultados del inventario se describirán en ésta y las demás sesiones como se muestra a continuación:

Ahora sé:

- Para conservar una proporción se necesita hacer la misma operación de la derecha a la izquierda.
- Para conservar una proporción se multiplican cantidades por un mismo número.
- Cómo identificar la proporcionalidad directa en una tabla.
- Puedo hacer figuras geométricas más grandes o más pequeñas y aun así se parecen.

Se me dificultó:

- Saber cuál es la operación que tenía que hacer en los dos lados, porque la ponía al revés, no ponía la misma.
- Trazar los triángulos con las nuevas medidas.
- Nada.

Resultados de la sesión 7: Razonamiento preproporcional

El objetivo de la sesión 7 fue iniciar el razonamiento proporcional en los sujetos del estudio, a través de razones sencillas como el triple, el doble, la mitad, etc. Esto para reflexionar sobre si la situación planteada es de tipo proporcional.

Se aplicó el problema del pirata (*vea anexo II*) propuesto por Mochón (2012). El problema fue: Un pirata encuentra un mapa con medidas raras en el que se indica dónde fue enterrado un tesoro; el pirata localiza la piedra y el árbol y al caminar entre ellos cuenta 30 de sus pasos, ayúdale a saber cuántos de sus pasos corresponden a cada una de las medidas dadas en el mapa.

Los alumnos A3 y A4 no asistieron a la sesión, mientras que A1, A2, A6, A7, A8, A10, A12, A14, A15 y A16 hicieron la división $\frac{30 \text{ pasos pirata}}{12 \text{ medidas mapa}}$, encontrando que por cada medida del mapa el pirata debe dar 2.5 pasos. No obstante, también escribieron en la tabla relaciones de doble, triple o mitad (*figura 38*).

Medidas mapa	Pasos pirata
12	30
18	45
24	60
9	22.5

Handwritten calculations and notes:

- Next to 12: $2 \times$
- Next to 18: $1.5 \times$
- Next to 24: $2 \times$
- Next to 9: $0.75 \times$
- Below the table: $22.5 \times 2 = 45.0$
- Below the table: $22.5 \times 2 = 45$
- Top right: $12 \overline{) 30} 2.5$

Figura 38. Estudiante (A12) que identificó dobles y mitades en los datos de la tabla

Cuando la profesora de matemáticas preguntaba por qué multiplicaban 2.5 por los números de “medidas mapa”, los alumnos con los que se trabajó la sesión respondieron que era para estar seguros de las cantidades que escribían en la columna “pasos pirata”.

Hubo estudiantes como A15 y A16 (adolescentes muy espaciales) que optaron por escribir los resultados en el mapa, antes de escribirlos en la tabla, posteriormente hallaron el valor

unitario y operaron para encontrar la cantidad de “pasos pirata” de 18 y 9 “medidas de mapa” (*figura 39*).

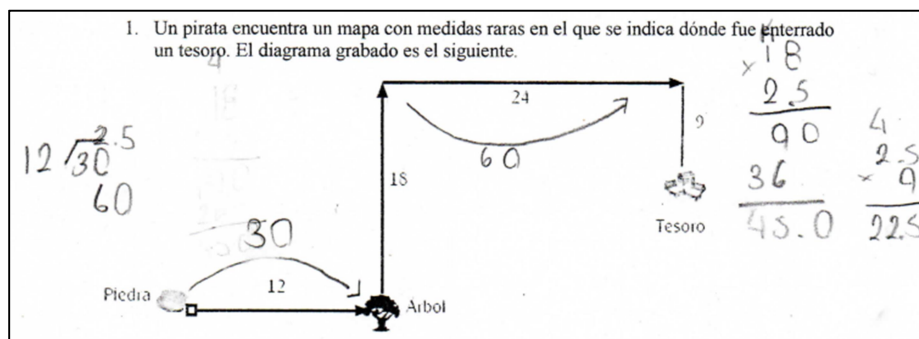


Figura 39. Alumno espacial escribiendo los datos en el modelo situacional

Para obtener el resultado final, todos sumaron los datos de la columna derecha (pasos pirata). A13 agregó datos a la tabla, pero indicó cuáles fueron los números que sumó (*figura 40*). Indicó, incluso con color verde, la operación $12/2=6$ y $30/2=15$, ambos cocientes los multiplicó por 3 para llegar a una relación proporcional entre 18 medidas mapa y 45 pasos pirata.

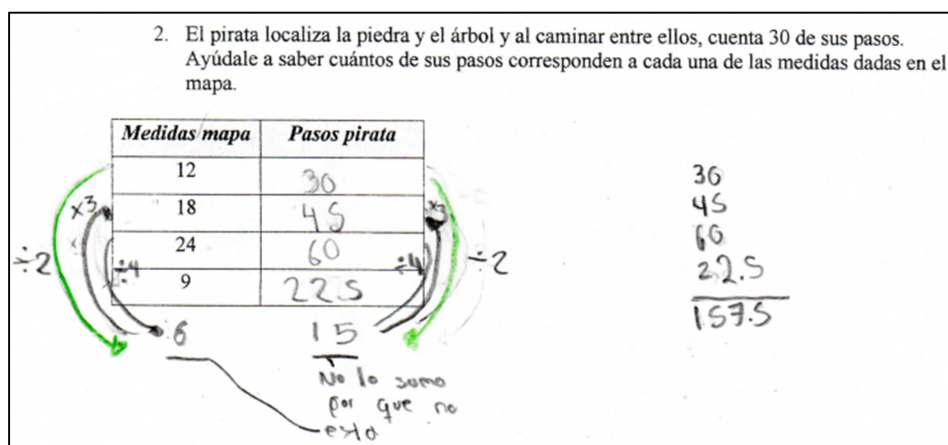


Figura 40. Procedimiento de A13

En el Inventario de lo aprendido sobresale lo siguiente:

Ahora sé:

- Debo tener estrategias para todo.
- Existen otras estrategias para resolver un problema de proporcionalidad.
- No es lo mismo una razón y una proporción.

Se me dificultó:

- Saber si tenía que multiplicar o dividir.
- Encontrar el 22.5 de la columna de la derecha.
- Nada.

Resultados de la sesión 8: Valor unitario

El objetivo de la sesión número 8 era mostrar la estrategia unitaria en la solución de un problema de proporcionalidad directa. El problema fue: Diana pedalea a 4 km por hora. Si recorrerá una distancia de 3 km para llegar a su casa en bicicleta, ¿en cuántos minutos llegará a su casa? ¿Por qué la tabla dice **minutos** y no **horas**?

Las etiquetas de las cantidades que formaron la razón fueron “kilómetros” y “minutos”. Los estudiantes A4, A12, y A13 estuvieron ausentes durante esta sesión; de los 13 alumnos presentes, el 77% llegó la respuesta correcta, entre ellos A14 (alumno poco lógico-matemático) quien dividió correctamente 60 minutos entre 4 kilómetros, encontrado así que el valor unitario es 15 minutos por cada kilómetro para después multiplicar 15 por cada número de la columna “kilómetros” (*figura 41*).

4 = 1 h 60 m $\frac{15}{28}$ $\frac{15}{45}$

¿Por qué en la tabla dice minutos y no horas?
Para facilitarlo

Kilómetros	Minutos
4	60
1	15
7	105
3	45
5	75

$\begin{array}{r} 15 \\ \times 7 \\ \hline 105 \end{array}$ $\begin{array}{r} 15 \\ \times 5 \\ \hline 75 \end{array}$ $\begin{array}{r} 15 \\ \times 4 \\ \hline 60 \end{array}$

Figura 41. Respuesta correcta de alumno poco lógico-matemático

El error que cometieron los estudiantes A2, A3 radicó en haber considerado 60 minutos como el valor unitario del problema, motivo por el cual no llegaron a 45 minutos (respuesta correcta). A su vez A5 erraba al afirmar que Diana pedalea 3 km en 35 minutos, obteniéndolo al dividir 105 minutos entre 3 km. Cuando se entrevistó a A5, comentó haberse confundido con las operaciones.

En el Inventario de lo aprendido, sobresale:

Ahora sé:

- Cómo utilizar la técnica de “valor unitario” en la proporcionalidad.
- Cómo utilizar el valor unitario y que con ése es más fácil todos los problemas de proporcionalidad.
- Sacando el valor unitario es más fácil obtener los demás resultados.

Se me dificultó:

- No fue difícil pero confundí el valor unitario.

Resultados de la sesión 9: Razonamiento proporcional y algoritmo

El objetivo de la novena sesión fue concebir a la proporcionalidad de una manera integral como una igualdad de dos razones formadas por cuatro valores. (Mochón, 2012, p. 150)

De los 16 alumnos del grupo, únicamente 15 trabajaron en esta sesión (A4 nuevamente estuvo ausente). El trabajo se hizo en binas, mismas que formó la profesora de matemáticas. Siguiendo con la secuencia didáctica, se solicitó a A5 que compartiera con sus compañeros cómo se resuelve un problema de proporcionalidad directa, esto porque fue quien acertó a todos los problemas de proporciones en el pre-test aplicando correctamente la regla de tres.

El problema fue: Una tienda vende paquetes de 6 latas de refrescos por \$15. Completa la tabla siguiente para que el dueño de la tienda la utilice. (Mochón, 2012, p. 151)

<i>Latas</i>	<i>Pesos</i>
6	15
12	
18	
24	
30	

El estudiante A5 comentó saber resolver usando regla de tres porque se lo enseñaron en sexto grado de primaria, pero que no conocía todas las maneras en las que se pueden solucionar los problemas de proporcionalidad directa. Posterior a ello y basado en la tabla, extrajo los cuatro valores con sus correspondientes medidas para resolver el problema por medio de la igualdad de razones con un formato tradicional de la regla de tres:

$$\frac{6 \text{ latas}}{15 \text{ pesos}} = \frac{12 \text{ latas}}{x \text{ pesos}}$$

Mochón (2012) propone que es mejor invertir la ecuación cuando la incógnita aparece abajo:

$$\frac{\text{Precio } A}{\# \text{ de latas } A} = \frac{\text{Precio } B}{\# \text{ de latas } B}$$

La propuesta de A5 y la recomendación de Mochón son fracciones equivalentes, por lo tanto se permitió que el estudiante continuara con su procedimiento.

$$\frac{6 \text{ latas}}{15 \text{ pesos}} = \frac{12 \text{ latas}}{x \text{ pesos}}$$

$$(6 \text{ latas})(x \text{ pesos}) = (12 \text{ latas})(15 \text{ pesos})$$

$$x = \frac{(12)(15)}{6}$$

En ese paso del procedimiento del adolescente, la profesora intervino y dijo al grupo que era necesario escribir a cada número la etiqueta correspondiente, porque se estaban comparando dos razones. Solicitó que recordaran que una característica que diferencia a las razones de las fracciones, son las etiquetas. Entonces se anotó en el pizarrón:

$$x = \frac{(12 \text{ latas})(15 \text{ pesos})}{6 \text{ latas}}$$

$$x = \frac{180 \text{ pesos}}{6}$$

$$x = 30 \text{ pesos}$$

Después, los alumnos dieron solución al problema, planteando una regla de tres para hallar cada cuarta proporcional solicitada en la tabla. Algunos acotaron con colores sus procedimientos para identificar las respuestas (*figura 42*).

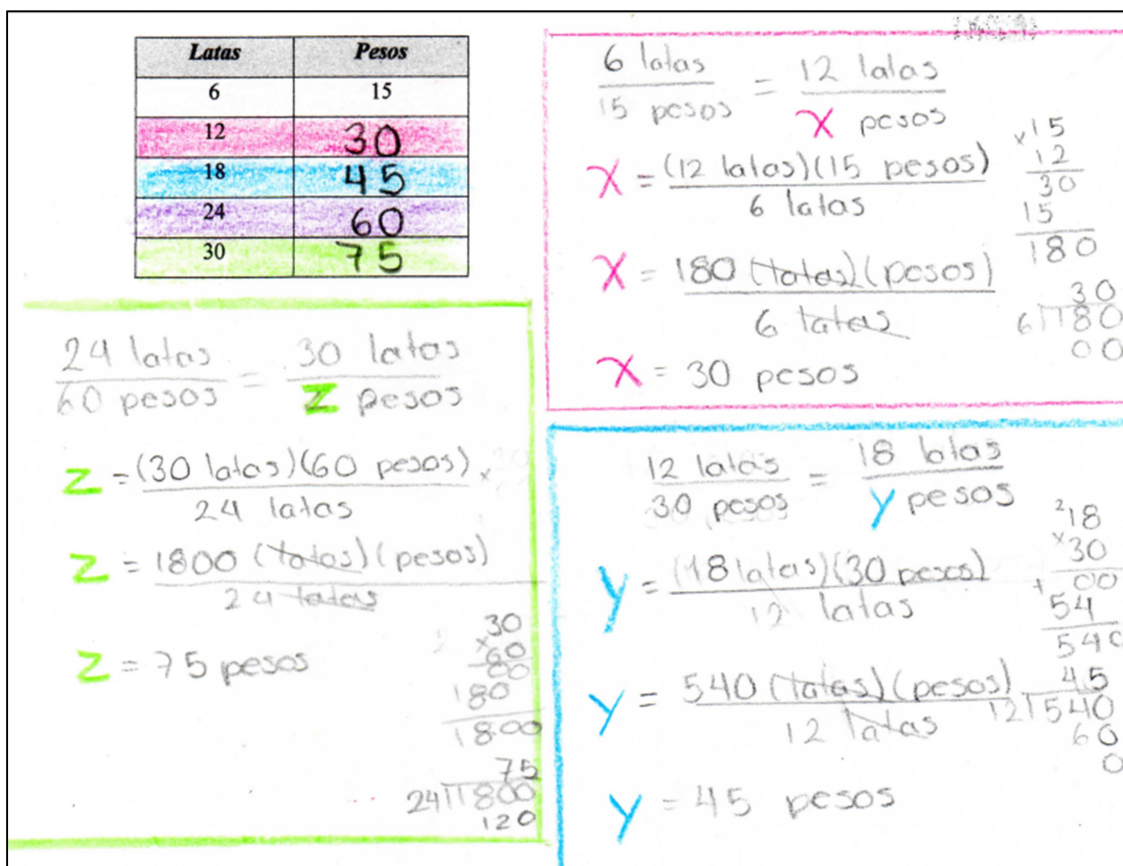


Figura 42. Trabajo de A6 en hoja 6, sesión 9

Cuando trabajaron en binas, la mayoría de ellas omitió en su algoritmo: $(\# \text{ de latas } A)(\text{precio } B) = (\# \text{ de latas } B)(\text{precio } A)$, no obstante, el resto de su algoritmo fue correcto. A8 y A14, quienes no formaban parte de la misma bina, no lograron resolver usando regla de tres, prefiriendo apoyarse en la tabla y encontrar la variación paralela entre las dos cantidades relacionadas en cada fila (*figuras 43 y 44*).

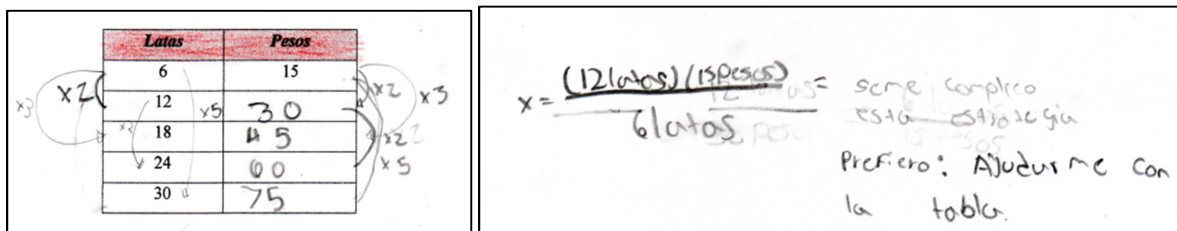


Figura 43. Trabajo de A8 en hoja 6, sesión 9

Handwritten work by student A14:

$$x = \frac{(24 \text{ lat}) \times (15 \text{ Pes})}{6}$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 15 \\ \hline 120 \\ 24 \\ \hline 360 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 60 \\ 6 \overline{) 360} \\ \underline{60} \\ 00 \\ \underline{0} \end{array}$$

Se me iso mas complejo y prefiero usar la tabla

Figura 44. Trabajo de A14 en hoja 6, sesión 9

El Inventario de lo aprendido, se usó por último en la sesión 9, los alumnos manifestaron:

Ahora sé:

- Se me hace más fácil hacer el de tablas y me cuesta un poco el de la regla de tres.
- La estrategia de las tablas y del valor unitario es más fácil para mí.
- La regla de tres es más segura pero más laboriosa porque me tardo.
- Todas las formas que hay para resolver problemas de proporcionalidad.

Se me dificultó:

- El procedimiento de toda la regla de tres porque es muy largo.
- Nada

Debido a que se terminó el trabajo de la sesión antes del tiempo establecido, los adolescentes formaron sus equipos para comenzar a discutir la selección de la melodía que iban a ocupar para la última sesión.

Resultados de la sesión 10: Soy cantautor

En la sesión 10 estuvieron ausentes A4, A5 y A14. Los objetivos fueron:

- Elaborar y presentar una canción habiendo modificado la letra, adaptándola a las experiencias y aprendizajes adquiridos durante las nueve sesiones anteriores.
- Implementar en la letra de sus canciones las palabras: razón, proporción, etiqueta, etc.
- Conservar la métrica de la canción al cantarla frente al grupo.

Debido a que los equipos ya estaban formados, solo se dio tiempo para que escribieran la letra de su canción –sin revisar sus apuntes–, anotando también el cantante o grupo y el nombre de la canción original.

Canción Original: Bella Cantante: Wolfine Ayer me dijo oh la maestra, que había una diferencia entre fracción y razón Y yo viendo como nos lo explicaba, entendiendo como es que eso se daba Apuntando en la libreta yo me di cuenta de la diferencia entre ellas Coro: Razón tan bella y proporción tan compleja ^{x2} prefiero usar razones para resolver problemas. Me dijeron que no era inteligente, por que me costaba mate y ahora se que no es así Ay teacher me enseñaste la razón ^{x2} ahora por ti soy mejor. equipo: Cesar Carlos Alina	Canción original: Bella Cantante: Wolfine Ayer me dijo oh la maestra, que había una diferencia entre fracción y razón y yo viendo cómo nos lo explicaba entendiendo cómo es que eso se daba. Apuntando en la libreta yo me di cuenta de la diferencia entre ellas. Coro: Razón tan bella y proporción tan compleja, prefiero usar razones para resolver problemas. Me dijeron que no era inteligente, porque me costaba mate y ahora sé que no es así. Ay teacher, me enseñaste la razón y también la proporción ahora por ti soy mejor. Coro
---	---

Figura 45. Letra de la canción de A1, A3 y A13

La figura 45 muestra el trabajo con mejor ortografía de la sesión 10. Es la letra de la canción de tres alumnos que en equipo lograron plasmar, en la letra que modificaron, su experiencia durante las sesiones en las que se trabajaron razones y proporciones. Cuando la profesora de matemáticas estuvo supervisando la tarea encomendada, se dio cuenta que A3 (muy lógico-matemático) fue quien contribuyó con la primera estrofa de su canción, A13 (muy lingüístico) ayudaba a sus compañeros a corregir la ortografía y que procuraba las rimas en lo que redactaban, incluso propuso trabajar con lápiz para poder realizar las correcciones; A1 (muy cinético-corporal) cantaba los versos que hasta el momento habían escrito mientras aplaudía, incluso fue el único de su equipo que bailó cuando presentaron ante el grupo su producto final.

Las alumnas A2, A12 y A15; muy espacial, musical y espacial respectivamente, lograron plasmar en su letra los conceptos abordados en clase (**figura 46**), pero no procuraron las rimas en la letra ni llevaron el ritmo al realizar su presentación ante el grupo. En los renglones 16 y 17 de la figura 46 se lee: "...todas salen con el mismo resultado, no importa la estrategia...". A2, A12 y A15 quisieron dar a entender que no importa si resuelven un problema de proporcionalidad directa hallando el valor unitario, apoyándose en una tabla o planteando la regla de tres, porque

sea cual fuere el procedimiento que se emplee, el resultado será el mismo. A su vez, cuando escribieron “...usar al cero como denominador...” se refieren o poderlo utilizar como segunda componente de una razón entre dos números. (Cid, Godino y Batanero, 2003)

Canción original: AirPlane Pt.2 Cantante: BTS Canción Modificada: Razon Proporción Etiqueta Fracción Cero La razón es la comparación de dos cantidades, la razón debe tener etiquetas, la razón puede usar al cero como denominador, la proporción es la comparación de dos razones. Hay tres estrategias para resolver problemas de proporcionalidad, una de ellas es la regla de tres otra de ellas sería tablas y la última estrategia sería valor unitario pero todas salen con el mismo resultado, no importa la estrategia lo que importa es resolver el problema que nos deja nuestra	Canción original: Airplane parte 2 Cantante: BTS La razón es la comparación entre dos cantidades, la razón debe tener etiquetas, la razón puede usar al cero como denominador, la proporción es la comparación de dos razones. Hay tres estrategias para resolver problemas de proporcionalidad, una de ella es la regla de tres, otra de ellas sería tablas y la última estrategia sería valor unitario pero todas salen con el mismo resultado; no importa la estrategia, lo que importa es resolver el problema que nos deja nuestra maestra.
--	--

Figura 46. Letra de la canción de A2, A12 y A15

Canción original: Scooby doo - pa-pa Canción copia: Etiquetas usa ya. y la cosa suena ra y la cosa suena ra etiquetas usa ya en la ra ra razón en la ra ra razón en la pro pro proporción en la pro pro proporción y la cosa suena ra ra ra ra etiquetas usa ya. Fin.	Canción original: Scooby doo papá Canción: etiquetas usa ya Y la cosa suena ra Y la cosa suena ra etiquetas usa ya en la ra ra razón en la ra ra razón en la pro pro proporción en la pro pro proporción Y la cosa suena ra ra ra ra etiquetas usa ya.
--	---

Figura 47. Letra de la canción de A7 y A8

Se esperaba que A8 por ser muy musical, presentara uno de los mejores trabajos en la sesión 10 pero no resultó así. Es importante resaltar que A8 es poco intrapersonal y que frecuentemente se pone nervioso en las clases de matemáticas cuando tiene que hablar ante todo el grupo o cuando es el líder del equipo. Fue idea de A7 hablar del uso de las etiquetas en las razones y las proporciones para la letra de su canción (*figura 47*). El equipo manifestó nerviosismo en su presentación final. Mientras tanto, A6 y A11 trabajaron rápidamente, recordando que las razones se emplean en escalas de ampliación y reducción y, que se pueden expresar $4/3$ o 4 es a 3, olvidando que las etiquetas diferencian a una razón de una fracción (*figura 48*). En las últimas líneas de su redacción, escribieron “...una proporción es casi lo mismo que una razón, pero en ésta se tiene que hacer la misma operación para cada razón.”; aludiendo a la variación paralela entre dos cantidades de una tabla. (Mochón, 2012)

1	2	3	
Canción original: Friends	Con la palabra “es a”	Si a uno le quitas la mita	Canción original: Friends
Cantante: Marshmello & Anne-Marie	Como por ejemplo:	Al otro también	Cantante: Marshmello & Anne-Marie
Letra modificada:	4 es a 3	Pero ¿por qué?	Oh oh oh oh...
Oh oh oh oh...	Generalmente	Para que quede proporcional	Hoy cantaremos sobre razones y proporciones.
Hoy cantaremos	Lo utilizamos	A la otra ampliación razón	Para empezar les vamos a decir qué son las razones... las razones son relaciones entre magnitudes, es decir: objetos, personas, estudiantes y cucharadas también.
Sobre razones	Para una ampliación	Eso es todo	
Y proporciones	O también	Gracias por su atención...	
Para empezar	Una reducción		En el caso de los números, se expresan como fracciones o también con la palabra “es a”, como por ejemplo: 4 es a 3. Generalmente lo usamos como una ampliación o también una reducción. Pero es todo sobre la razón y ahora empezaremos con las proporciones, porque tengo que explicar qué es una proporción. Qué es eso de un proporción, una proporción (una proporción) es casi lo mismo que una razón pero en ésta se tiene que hacer la misma operación para cada razón.
Les vamos a decir	Pero eso es todo sobre la razón y ahora empezaremos		
Que son las razones...	Con las proporciones		
Las razones	Porque tengo que explicar		
Son relaciones entre magnitudes	Que es una proporción		
Es decir:	Una proporción (una proporción)		
Objetos, personas, estudiantes	Es casi lo mismo a una razón		
Y cucharadas también	Pero esta se tiene que hacer		
En el caso de los números...	La misma operación		
Se expresan cómo:	Para cada ampliación razón		
Fracciones o también,			

Figura 48. Letra de la canción de A6 y A11

La presentación final de A6 y A11 –ambas muy cinético-corporales- se caracterizó por llevar el ritmo de la melodía y por moverse al ritmo de la música, principalmente A11.

4.1.6 Post-test del tema: razones y proporciones

En el post-test de razones y proporciones se aplicó casi cinco semanas después de la aplicación del pre-test. Los ítems fueron los mismos en ambos cuestionarios, por lo tanto, para poder comparar los resultados se utilizan las mismas categorías:

C: alumnos que resolvieron el problema con procedimiento y resultado correcto.

I: alumnos que resolvieron el problema, pero su procedimiento y/o respuesta fue incorrecta

NC: alumnos cuya respuesta fue –no sé resolverlo- o –no le entendí al problema-.

Tabla 9. Categorización de resultados del post-test

ítem	I 1	I 2	I 3	I 4	I 5	I 6	I 7	I 8	I 9	I 10
C	88%	63%	50%	100%	88%	63%	69%	56%	88%	88%
I	13%	38%	50%	0%	13%	38%	25%	38%	13%	13%
NC	0%	0%	0%	0%	0%	0%	6%	6%	0%	0%
	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%

En la tabla 9 se puede observar cómo se redujo considerablemente el número de alumnos con respuestas incorrectas y aún más, el número de estudiantes que no supieron resolver los problemas. En los ítems 7 y 8 hay un 6% en la categoría **NC**, ese porcentaje se debe a que A15 no pudo resolver los problemas planteados (*figura 49*). Resaltamos que en los problemas de proporcionalidad, ningún estudiante aplicó la estrategia aditiva para resolver los ítems.

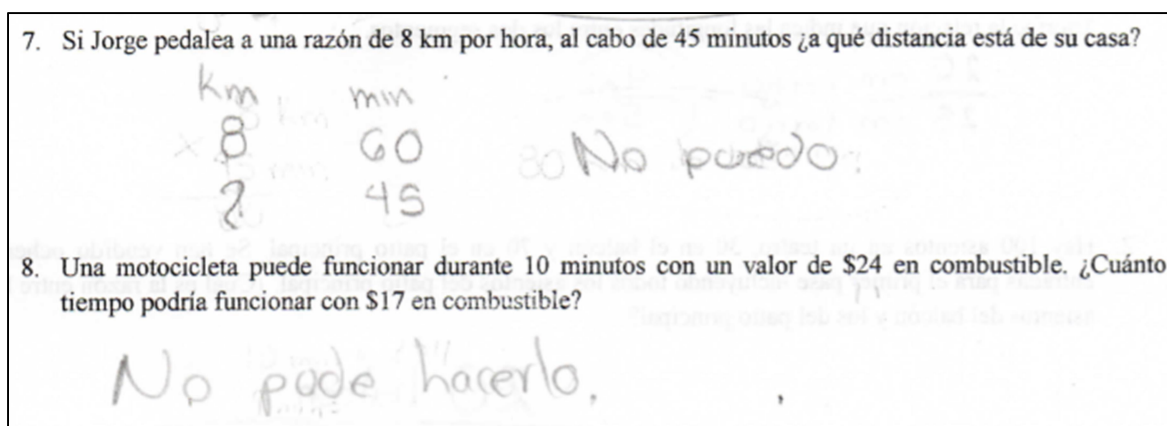


Figura 49. Respuestas de A15 en I7 e I8 del post-test

La tabla 10 presenta un desglose de resultados del post-test, mostrando el total de aciertos por ítem (**AcI**) y su respectivo porcentaje (**%AcI**). **AcA** representa la cantidad de aciertos por alumno y **%AcA** el porcentaje del mismo.

Tabla 10. Resultados del post-test por alumno y por ítem

ítems:	I 1	I 2	I 3	I 4	I 5	I 6	I 7	I 8	I 9	I 10	AcA	%AcA
A1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	9	90%
A2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	100%
A3	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	9	90%
A4	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	8	80%
A5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	100%
A6	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	9	90%
A7	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	8	80%
A8	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1	4	40%
A9	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	8	80%
A10	0	0	1	1	1	0	1	0	1	1	6	60%
A11	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	7	70%
A12	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	5	50%
A13	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	7	70%
A14	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	8	80%
A15	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1	5	50%
A16	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	7	70%
AcI	14	10	8	16	14	10	11	9	14	14		
%AcI	88%	63%	50%	100%	88%	63%	69%	56%	88%	88%		

Resultados en razones enfocados en respuestas incorrectas del post-test

Ítem 1: A10 no identificó que al pedirle que escribiera la relación entre las longitudes de los dos segmentos debía escribir $\frac{4 \text{ cm}}{5 \text{ cm}}$. A11 respondió $\frac{4}{5}$ y se le consideró como incorrecta porque no escribió las etiquetas (cm).

Ítem 2: la respuesta correcta es $\frac{10 \text{ asientos balcón}}{70 \text{ asientos patio}}$. A8 y A10 se equivocaron en ambas cantidades, A14, A15 y A16 sólo erraron en la cantidad de *asientos balcón* y A11 invirtió las cantidades, escribiendo: $\frac{70 \text{ asientos patio}}{10 \text{ asientos balcón}}$.

Ítem 3: para que la respuesta fuera correcta, los alumnos que participaron en la investigación, debieron darse cuenta que había que despedir a 8 profesores. Cuatro de los ocho alumnos que se equivocaron, pensaron que había que despedir a 3 profesores, de esa manera la razón quedaría 150 estudiantes a 15 profesores o $\frac{10 \text{ estudiantes}}{1 \text{ profesor}}$ y no $\frac{15 \text{ estudiantes}}{1 \text{ profesor}}$.

Ítem 4: las respuestas resultaron correctas en un 100%, pero hemos de resaltar que la mayoría decidió no simplificar las razones; A5 fue quien redujo hasta $\frac{17 \text{ gramos}}{6 \text{ cm}^3}$, A6 lo dejó en $\frac{34 \text{ gramos}}{12 \text{ cm}^3}$ y el resto del grupo en $\frac{340 \text{ gramos}}{120 \text{ cm}^3}$.

Ítem 5: únicamente se tenía que simplificar la razón $\frac{30 \text{ metros}}{12 \text{ metros}}$ hasta $\frac{5 \text{ metros}}{2 \text{ metros}}$, pero A12 y A13 respondieron $\frac{30 \text{ cm}}{20 \text{ cm}}$ y $\frac{3 \text{ metros}}{3 \text{ metros}}$ respectivamente.

Resultados en proporciones enfocados en respuestas incorrectas del post-test

Ítem 6: A4 y A9 no tienen procedimiento que avale su respuesta, A8, A10 y A16 no encontraron correctamente la variación paralela entre las cantidades de la tabla que plantearon –la cual fue correcta-. El resultado del problema es: 30 sillas.

Ítem 7: 6 kilómetros es el resultado correcto. A7 colocó mal los datos al plantear su regla de tres, A8 nuevamente no encontró la variación paralela entre las cantidades de la tabla que planteó en su intento de solución, A9 y A12 se equivocaron al operar y A15 no pudo resolver el problema.

Ítem 8: A4 intentó resolverlo mentalmente llegando a 8 minutos y no a 7 minutos. A6, A8, A10 y A14 no operaron adecuadamente y A7 en vez de multiplicar 10x7 y dividir por 24, realizó: 10*24/17.

Ítem 9: A8 y A15 establecieron operaciones erróneas con los datos que debían formar la regla de tres.

Ítem 10: A12 y A13 no se percataron que solo había que duplicar la medida del ancho de la ventana de la fotografía. A13 respondió correctamente el ítem 10 en el pre-test por que se le entrevistó.

Docente: ¿Por qué crees que te equivocaste?

A13: porque en el primer cuestionario hice lo doble de 15, en este caso 30, y aquí hice el triple de 6.

Docente: ¿Por qué el triple de 6?

A13: porque me pedía 15 y 3×5 son 15, entonces ese 3 lo multipliqué por 6 cm, me confundí.

4.1.7 Entrevistas

Se entrevistaron a los alumnos A8, A12, porque fueron dos de los tres estudiantes que tuvieron aciertos nulos en el pre-test. Ellos externaron haber comprendido más el tema de razones que el de proporciones y consideraron que el haber hecho todas las actividades planteadas en la propuesta didáctica, mejoró la percepción que tenían de sí mismos y atribuyeron que sus resultados tuvieron que ver con haber usado sus inteligencias. Al entrevistar al grupo, muchos consideraron que sus resultados mejoraron porque nunca les habían enseñado de la misma forma en un salón de clases.

4.2 ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

Después de aplicar nuevamente los 10 ítems, los resultados fueron favorables. En los ítems de razones se obtuvo un 78% en resultados correctos y en los de proporcionalidad un 73%. El instrumento permitió identificar los errores de los alumnos y la propuesta coadyuvó en el aprendizaje de los sujetos del estudio, principalmente en el tema de razones, pero es precisamente en la simplificación de razones en las que la propuesta didáctica presentada no favoreció como se esperaba.

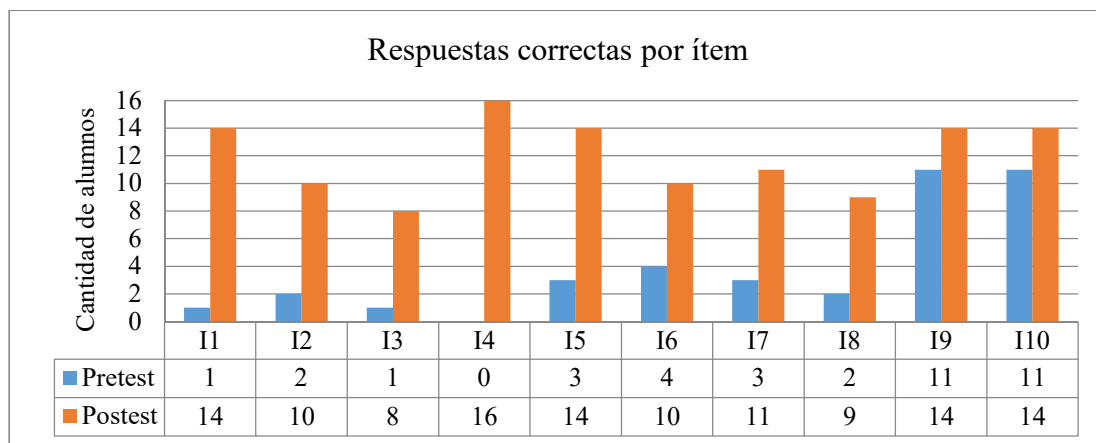


Figura 50. Comparación de resultados por ítem entre el pre-test y el post-test

La figura 50 hace claramente visible que hubo un mejor resultado en el post-test. Aunque para algunos fue nuevo el tema, muchos de los alumnos con los que se trabajó para esta investigación, ya habían abordado los temas en su educación primaria, pese a ello, sus resultados no resultaron tan favorecedores en el pre-test.

Con apoyo de la tabla de inteligencias de los estudiantes que participaron en la investigación (tabla 5, página 49), se realizó un análisis general del desempeño de los alumnos según el trabajo que realizaron en el tema de razones y de proporciones y crecimiento en respuestas correctas. Para esto se consideró la siguiente nomenclatura:

A: alumno número...

IMD: inteligencia que mejor lo describe

IND: inteligencia que casi no lo describe

DR: desempeño del alumno en el tema de razones

DP: desempeño del alumno en el tema de proporciones

A1

IMD: Cinético-corporal **IND:** intrapersonal

DR: incrementó sus resultados en un 60%. Pese a ser un alumno muy cinético-corporal, la actividad *cuántos quito, cuántos pongo?*, en la que justamente usaron esa inteligencia, no le ayudó a resolver correctamente el ítem 3.

DP: respondió todos los problemas después de la aplicación de la propuesta didáctica, todos sus resultados fueron correctos y logró plantear y resolver en éstos la regla de tres con el algoritmo adecuado.

Durante los trabajos en equipo, A1 siendo poco intrapersonal, pudo interactuar cordialmente con su grupo de pares.

A2

IMD: espacial **IND:** musical

DR: sus resultados correctos incrementaron al 100%; siendo muy espacial, su dibujo realizado en la sesión 3 fue de los mejores

DP: 100% en respuestas correctas, de 1 a 5 aciertos en pre-test y post-test respectivamente. Al principio resolvía los problemas de proporcionalidad directa, intentando hallar el valor unitario, posterior a las sesiones trabajadas, planteó igualdad entre dos razones.

En la sesión 10 su desempeño no resultó tan favorable, y fue precisamente en el que debió usar su inteligencia musical.

A3

IMD: lógico-matemático **IND:** intrapersonal e interpersonal

No asistió a la sesión 6: *estrategia sumativa versus estrategia multiplicativa*

DR: confundía razones con fracciones, ya que no etiquetaba las cantidades (Lamon, 2006). La actividad *cuántos quito, cuántos pongo?* de la sesión 3, tampoco le ayudó para resolver correctamente el ítem 3. Aumentó 80% sus respuestas correctas.

DP: en proporciones de un 20% en aciertos, logró el 100%. La causa puede deberse a que es un alumno muy lógico-matemático y a que esa fue la inteligencia usada en todas las sesiones del tema de proporciones. Empleó poco la regla de tres y utilizó más el valor unitario y el cálculo mental para resolver los problemas de proporcionalidad directa.

En los trabajos realizados en equipo, siempre se mostró serio pero colaborativo.

A4

IMD: espacial **IND:** interpersonal

No asistió a las sesiones 7, 8, 9 y 10.

DR: sobresalió principalmente en la sesión 3, realizado un buen dibujo a escala, pero confundió ésta asumiendo su escala de ampliación era 1:2. De un 0% en aciertos, logró un 100% en el post-test.

DP: de las cinco sesiones destinadas para trabajar el tema de proporcionalidad, A4 asistió solo a una. Como consecuencia, prácticamente no hubo avances en él.

Siempre mostró apatía al trabajar en equipo, sin embargo, lo llevó a cabo.

A5

IMD: lógico-matemático **IND:** intrapersonal

Ausente en la sesión 5 y 10.

DR: de 0% a 100% en respuestas correctas. No sabía qué escribir cuando el problema solicitaba una razón entre dos números. Fue el único que simplificó correctamente todas las razones del post-test.

DP: en el primer test aplicó siempre la regla de tres hallando en todos la respuesta correcta. Durante las sesiones 6-9 se mostró interesado en conocer todas las posibles formas de resolver un problema de proporcionalidad directa. Para resolver el post-test usó el valor unitario, planteó la regla de tres y realizó cálculo mental, llegando nuevamente a resultados adecuados.

A6

IMD: Cinético-corporal **IND:** interpersonal

DR: de un 0 a un 100% en respuestas correctas. A6 desconocía totalmente a qué se refería un problema cuando solicitaba la razón entre dos números. Su IMD la usó mucho más en las primeras sesiones.

DP: en ninguna sesión del tema de proporciones, usó su inteligencia cinético-corporal. El avance del estudiante fue de un 20%.

En los trabajos en equipo hizo un esfuerzo por ser paciente con sus compañeros, escuchar y considerar sus opiniones.

A7

IMD: espacial **IND:** cinético-corporal

DR: sabía representar razones la forma a:b como Cid, Godino y Batanero (2003) lo recomiendan, pero a todos etiquetaba ni simplificaba (Lamon, 2006). Sus aciertos incrementaron del 40% al 100%. A pesar de ser muy espacial, su dibujo a escala no fue de los mejores.

DP: en un principio intentó resolver los ítems 6-10 hallando el valor unitario (Mochón, 2012) o empleando cálculo mental, otros no los pudo resolver. Después, planteó regla de tres en 4 de 5 problemas, resolviendo el último con cálculo mental. Su incremento en respuestas correctas fue del 20%.

A8

IMD: musical **IND:** intrapersonal

DR: de no saber responder los ítems 1-5 del pre-test, en el post-test incrementó sus resultados en un 60%, usando las etiquetas respectivas al representar las razones entre dos números, pero tendiendo notorias dificultades para simplificarlas.

DP: en el mejor de los casos, prefirió usar el razonamiento preproporcional (Mochón, 2012), mismo que para Lesh, Post y Behr (1988) es la variación paralela entre cantidades de una tabla. De cero aciertos en el pre-test, en el post-test logró solamente uno.

Siendo muy musical, no presentó su canción como se esperaba, sin embargo, saber que tiene poco desarrollada su inteligencia intrapersonal, abre la posibilidad de ser la causa del trabajo poco afable.

A9

IMD: espacial **IND:** musical e intrapersonal

DR: el alumno sí sabía escribir las razones entre dos números, incluso con etiquetas, pero aun así resolvió de manera incorrecta los ítems 1-5. A9 es el estudiante más espacial de todo el grupo de estudio. Solo en las sesiones del tema de razones, los alumnos usaron su inteligencia espacial, específicamente en la sesión 3. Este adolescente fue quien mejor realizó su dibujo a escala. Todas sus respuestas del post-test fueron correctas.

DP: aumentó un 20% en respuestas correctas. Siempre intentó resolver los problemas de proporcionalidad hallando el valor unitario. Tuvo dificultades para usar la regla de tres y su algoritmo.

A10

IMD: lógico-matemática **IND:** lingüística

DR: de un 20% a un 60% en problemas resueltos correctamente.

DP: de un 40% a un 60% en respuestas correctas.

Al ser poco lingüístico, fue justificable su escaso desempeño al exponer las características del animal que dibujó a escala.

A11

IMD: cinético-corporal **IND:** intrapersonal

DR: para A11 tampoco resultó usar en la sesión 2 su inteligencia preponderante, ya que el ítem 3 lo resolvió de manera incorrecta. De cero respuestas correctas, logró un 40% después de la aplicación de la propuesta didáctica.

DP: en proporciones, primero tuvo el 60% en respuestas correctas, posteriormente un 100%

A12

No asistió a la sesión 8: *Valor unitario*

IMD: Cinético-corporal **IND:** intrapersonal

DR: de cero aciertos y no saber cómo representar las razones entre dos números a, 3 aciertos escribiendo siempre las etiquetas.

DP: de cero a 2 aciertos. Decidió no usar la regla de tres. (Karplus, Pulos & Stage, 1983)

A13

No asistió a la sesión 8: *Valor unitario*

IMD: lingüístico **IND:** cinético-corporal

DR: no sabía representar razones entre dos números, por tanto, no supo resolver ningún problema en el pre-test. Después de aplicar la propuesta didáctica logró un 60% en aciertos pero no simplificó correctamente todas las razones.

DP: en el pre-test obtuvo 3 aciertos, en el post-test 4, tendiendo correcto el ítem 1 antes de la intervención docente y errando en el mismo después de la intervención.

A14

No asistió a la sesión 10: *Soy cantautor*

IMD: espacial **IND:** lógico-matemática

DR: aumento del 80% en respuestas correctas. Su principal dificultad fue simplificar las razones.

DP: aumento del 40% en respuestas correctas. Nunca empleó la regla de tres para resolver los problemas de proporcionalidad directa.

Siendo un alumno poco lógico-matemático, sorprendió con sus resultados.

A15

IMD: espacial **IND:** cinético-corporal

DR: antes de aplicar la secuencia didáctica, A15 no entendía lo que pedían los problemas ni lo que es una razón. Obviamente sus aciertos fueron nulos, pero en el post-test logró un 60% de respuestas correctas.

DP: de 0% incrementó al 40%. En el problema número 6, encontró correctamente la variación entre las cantidades (Lesh, Post & Behr, 1988). Intentó usar la misma estrategia para resolver el resto de los problemas, pero no lo logró.

A16

IMD: espacial **IND:** interpersonal

DR: el alumno sabía expresar razones pero omitía las etiquetas. De un 20% en respuestas correctas del pre-test, aumentó a un 60% en el post-test.

DP: A16, también sabía el algoritmo de la regla de tres, mismo que usó para resolver los problemas del pre-test. En el post-test, fue capaz de resolver los ítems hallando el valor unitario, aplicando la regla tres e identificando la variación paralela entre cantidades; su porcentaje de aciertos fue del 80%.

La figura 51 corresponde a los resultados de los sujetos de estudio en el pre-test y en el post-test. La finalidad es comparar el número de aciertos antes y después de aplicada la propuesta didáctica.

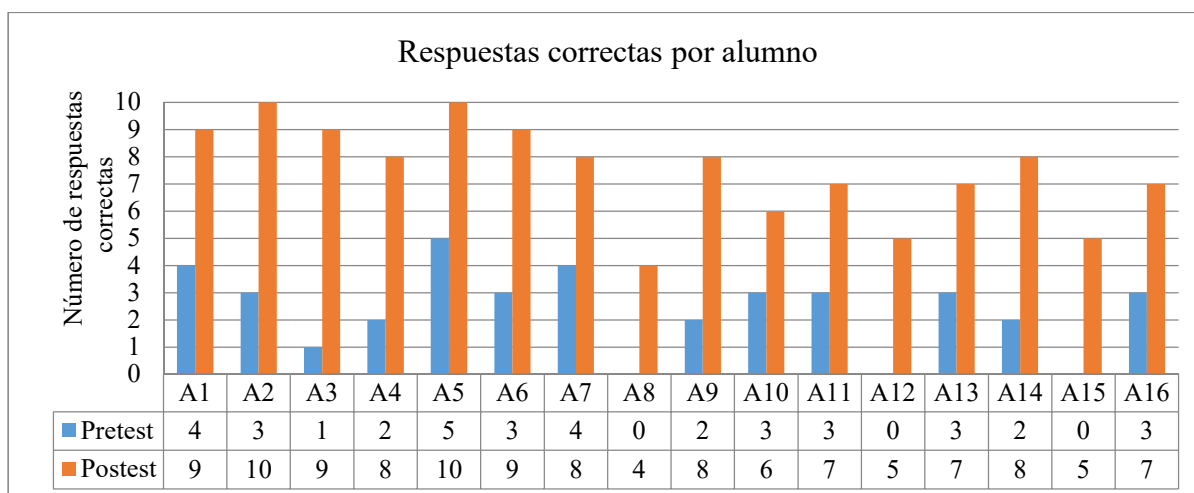


Figura 51. Gráfica comparativa de resultados por alumno entre el pre-test y post-test

CAPÍTULO V: CONCLUSIONES

Considerando el primer objetivo de la investigación, que a su vez da respuesta a la primera pregunta de la misma encontramos que, cuando los alumnos resuelven problemas de razones entre dos números, expresan éstas como un solo número y no como la comparación de dos cantidades, no las etiquetan y tampoco las simplifican. Mientras tanto, en el tema de proporcionalidad directa, operan con los números sin establecer relaciones correctamente y utilizan un razonamiento aditivo, resultado que coincide con Hart (1984) quien encontró que los estudiantes aplican una estrategia aditiva cuando resuelven problemas de proporcionalidad directa; 34 años después, los alumnos de esta investigación continúan aplicando esa estrategia, que para Godino y Batanero (2002) es útil solo para cierto tipo de problemas y no debe ser válido generalizarla.

Algunos alumnos con los que se realizó la investigación ya conocían la regla de tres y la aplicaban usando el algoritmo que les fue enseñado en su educación primaria, por lo que estamos de acuerdo con Durmus (2005) cuando afirma que, la insuficiencia del conocimiento pedagógico y matemático de los docentes, es una de las causas primarias de las dificultades que experimentan los estudiantes en el aula; entre las insuficiencias está el pretender enseñar a resolver problemas de proporcionalidad directa usando la regla de tres de manera mecánica (Ramírez y Block, 2009), ya que no es suficiente para que el alumno pueda desarrollar de manera completa una concepción sobre las ideas fundamentales de la proporcionalidad.

Aludiendo a la segunda pregunta de investigación, identificamos que los beneficios al aplicar la secuencia didáctica ofrecen una respuesta educativa adecuada (Ferrándiz *et al*, 2008), atienden a la diversidad y necesidades de los estudiantes (Díaz, 2002) y rompen el enfoque didáctico tan limitado (Gardner, 1994) con el que la mayoría de los docentes estamos acostumbrados a trabajar. Permitirle usar sus inteligencias múltiples a los sujetos del estudio en el aula de matemáticas, es mostrarles diferentes alternativas al aprender; pero es un reto para el docente diseñar actividades que les provoquen experiencias cristalizadoras (Salmon, 2016), mismas que les ayudan a mostrar sus capacidades y habilidades porque son la chispa que necesitan para que su inteligencia se abra (Miller, 1981).

Los factores internos –al aula- que no coadyuvaron en la implementación de la propuesta ni en el uso de las inteligencias múltiples del alumnado fueron: el mobiliario, el espacio del salón, el tiempo de clase, el incumplimiento de tareas y el ausentismo de algunos estudiantes; caso más destacado el de A4, quien faltó a casi todas las sesiones del tema de proporcionalidad y por ende, sus avances fueron poco favorecedores. Los factores internos que sí permitieron el uso de las inteligencias están directamente relacionados con el diseño del método de investigación, los instrumentos empleados, las actividades y materiales usados durante las sesiones de las secuencias didácticas y, el entusiasmo de los alumnos y de la profesora. Como factor externo estuvo la libertad que se le dio a la profesora para implementar nuevas actividades dentro del aula y, el respeto a las sesiones trabajadas, evitando interrumpir los módulos de matemáticas para que llevara a cabo la investigación sin interrupciones.

De acuerdo con la tabla de Armstrong (2006), al tener material manipulable y ayudados de los clones que menciona Lamon (2006), los alumnos muy espaciales debieron poder simplificar las razones. Debido a que los resultados obtenidos en el ítem 4, concuerdan con los resultados de los alumnos en la HOJA 1 de trabajo, concluimos que es necesario que los estudiantes trabajen de manera individual y que el profesor de matemáticas dedique mayor número de sesiones cuando se trabaje con equivalencias, porque aunque en un alumno sobresalga la inteligencia lógico-matemática, si no se le dedica más tiempo a las equivalencias, no logrará simplificar una razón. Si los alumnos no se sienten seguros de simplificar correctamente una razón, prefieren no hacerlo.

Independientemente de la polémica de considerar “inteligencias”, “capacidades” o “fortalezas” a esas facultades más o menos desarrolladas en las personas, a los docentes nos resulta de suma utilidad diagnosticarlas en nuestros estudiantes, ya que nos permite comprenderlos más y seleccionar las actividades más apropiadas para obtener el máximo aprovechamiento.

Armstrong (2006) recomienda observar a los estudiantes, principalmente cuando nada tienen que hacer, esto para indagar sobre su inteligencia preponderante (de las inteligencias de Gardner), pero al realizar esta investigación, deducimos que es mejor considerar los resultados de

un instrumento ya validado, en nuestro caso, el test de inteligencias múltiples de Gardner (1994), ya que una vez que se conoció mejor al grupo, se confirmó que las inteligencias mayor y menor desarrolladas en ellos son las obtenidas en el cuestionario, no precisamente en las que el docente considera. El hecho de que un docente observe buen desempeño de un estudiante en la clase de matemáticas, no quiere decir que en el alumno pondere la inteligencia lógico-matemática.

El profesor que conoce las inteligencias de sus estudiantes es capaz de llegar a la causa del porqué se le dificulta o facilita cierta actividad encomendada. Si la profesora de matemáticas que aplicó la secuencia didáctica, no hubiera conocido que es poco espacial, no habría diseñado actividades en las que sus alumnos usaran esa inteligencia; resaltamos que el grupo estudiado es mayormente espacial y que su desempeño estuvo directamente ligado a sus inteligencias.

Finalmente, es complicado hacer generalizaciones sobre el cómo aprende razones y proporciones cualquier estudiante de secundaria. Sin embargo, el trabajo realizado con los sujetos de estudio de esta investigación permitió conocer cómo aprenden los temas en cuestión, a través del uso de sus inteligencias múltiples. Por ejemplo: un alumno muy lingüístico se expresó mejor que uno muy naturalista cuando describieron a un animal, los estudiantes muy espaciales prefirieron hacer anotaciones en los modelos situacionales y no en las tablas de variación proporcional; los muy cinético-corporales fueron capaces de hacer excelentes dibujos cuando usaron su inteligencia espacial y los muy lógico-matemáticos no siempre obtuvieron los mejores resultados.

REFLEXIÓN PERSONAL

Después de haber realizado este trabajo de investigación, me doy cuenta que yo era de esas profesoras que enseñaban la regla de tres de manera mecánica, pensando que por el hecho de explicar pausada y detalladamente, mis alumnos estaban aprendiendo.

Haber hecho el test de Inteligencias Múltiples, fue sinónimo de conocimiento personal y profesional, porque de otro modo no me habría dado cuenta de mis habilidades y capacidades más y menos desarrolladas y no habría aprovechado las de mis estudiantes para que aprendieran en las clases de matemáticas, independientemente del tema que estuviera abordando.

Saber que mi inteligencia espacial está poco desarrollada, implicó un reto mayor cuando encontré que la mayoría de mis alumnos eran precisamente más espaciales. Estoy segura que de seguir ignorando esto, mis clases seguirían siendo las mismas. Ahora sé que un alumno muy lógico-matemático, no tendrá el mismo desempeño que sus pares, en los que prepondere esta misma inteligencia; pero si el docente propone alternativas novedosas para que el menos favorecido en su inteligencia lógico-matemática, pueda trabajar usando su inteligencia más desarrollada, le brinda la oportunidad de tener experiencias cristalizadoras durante las sesiones de matemáticas.

Trabajar con Inteligencias Múltiples es insuficiente sin el conocimiento didáctico-matemático. Un docente de matemáticas no se puede permitir enseñar considerando solo su experiencia laboral, el contenido de un libro de texto o sus creencias. Un profesor de matemáticas debe leer, conocer las alternativas de los autores que ya han investigado, analizarlas y adaptarlas en su aula.

Mucho se ha trabajado al respecto de las Inteligencia Múltiples de Gardner, pero poco se ha realizado después de la investigación de Armstrong. Haber diseñado y aplicado la propuesta didáctica no fue una tarea sencilla, aun así, es necesario continuar con investigaciones que impliquen el uso de las inteligencias de los estudiantes dentro del aula de matemáticas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

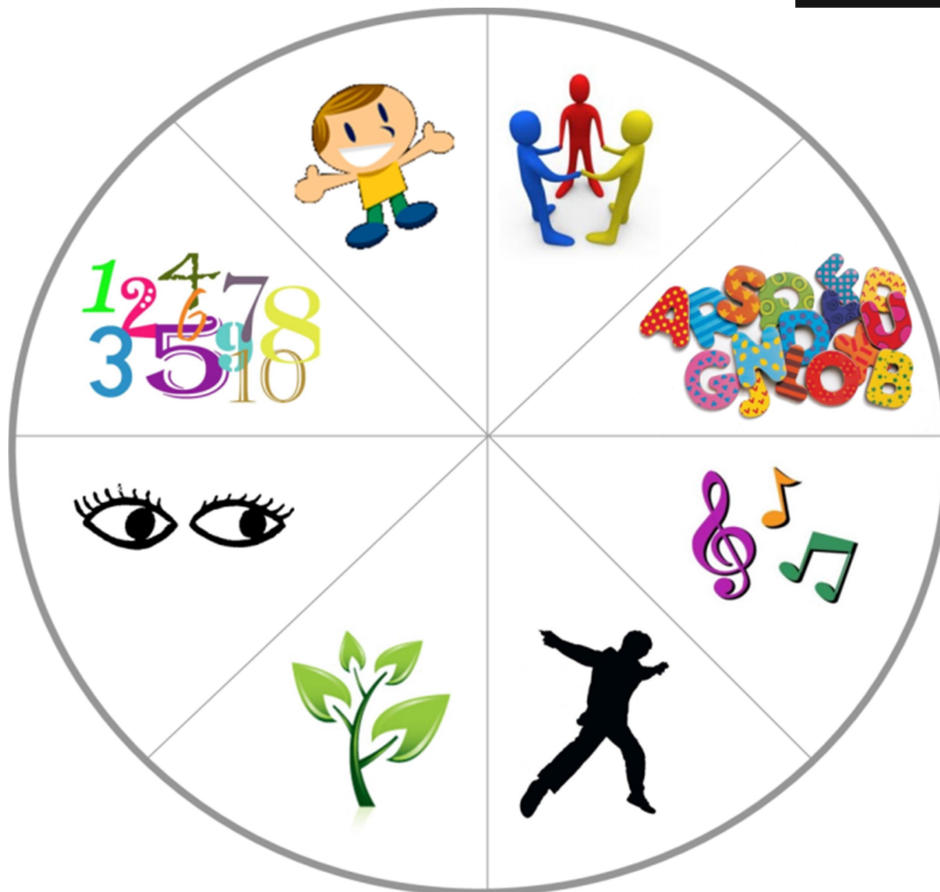
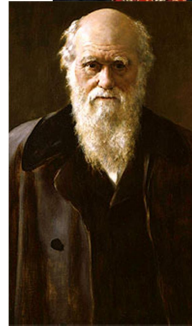
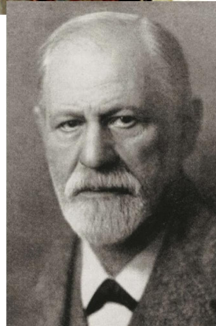
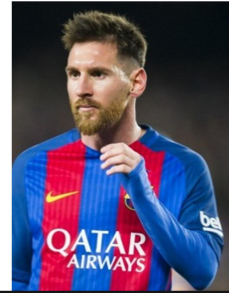
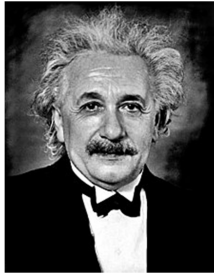
- Armstrong, T. (2006). *Las inteligencias múltiples en el aula*. Buenos Aires, Argentina: Manantial.
- Arons, A. B., & Redish, E. F. (1997). *Teaching introductory physics* (Vol. 22). New York: Wiley.
- Balderas, R., Block, D., & Guerra Ramos, M. T. (2014). "Sé cómo se hace, pero no por qué": Fortalezas y debilidades de los saberes sobre la proporcionalidad de maestros de secundaria. *Educación matemática*, 26(2), 7-32.
- Cid, E., Godino, J. D., & Batanero, C. (2003). *Sistemas numéricos y su didáctica para maestros*. Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática.
- Díaz, F., & Hernández, G. (2002). Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. *Una interpretación constructivista*, 2. México: Mc. Graw Hill.
- Dooren, W. V., Bock, D. D., & Verschaffel, L. (2010). From addition to multiplication... and back: The development of students' additive and multiplicative reasoning skills. *Cognition and Instruction*, 28(3), 360-381.
- Durmus, S. (2005). Identifying pre-service elementary school teachers' conceptualization levels of rational numbers. *Kuram ve Uygulamada Egitim Bilimleri*, Vol. 5 (2), pp. 659-666. Obtenido el 12 de abril de 2008 de la base de datos ProQuest Psychology Journals.
- Fandiño, M. (2009). Las fracciones: aspectos conceptuales y didácticos. Bogotá: Magisterio.
- Ferrándiz, C., Bermejo, R., Sainz, M., Ferrando, M. & Prieto, M. (2008). Estudio del razonamiento lógico-matemático desde el modelo de las inteligencias múltiples. *Anales de psicología*, 24(2), 213.
- Gardner, H. (1994). Estructuras de la mente. La teoría de las inteligencias múltiples. México: FCE.
- Gardner, H. (1998). Inteligencias múltiples. Barcelona: Paidós.

- Gardner, H., Kornhaber, M., & Krechevsky, M. (1993). Abordar el concepto de inteligencia. *Inteligencias múltiples: La teoría en la práctica*. Barcelona: Paidós.
- Godino, J. D., & Batanero, C. (2002). *Proporcionalidad y su didáctica para maestros*. España, Granada: Proyecto de Investigación y Desarrollo del Ministerio de Ciencia y Tecnología.
- Gómez, B. (2007). La razón en semejanza: El caso del perrito. *Investigaciones en educación matemática: Pensamiento numérico*, 237-257.
- Hart, K. (1984). Ratio: *Children's Strategies and Errors*. Windsor: NFER-NELSON.
- Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación*. México: Mc Graw Hill.
- Karplus, R., Pulos, S. & Stage, E. (1983). "Proportional reasoning of early adolescents". In: R. Lesh and M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 45-90). New York: Academic Press.
- Lamon, S. (2006). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers*. Routledge.
- Lamon, S. (2007). Rational numbers and proportional reasoning. Edited by Frank K, Lester Jr. National Council of Teachers of Mathematics. *Second Handbook of research on mathematics teaching and learning*. (pp. 629-667). United States of America.
- Lesh, R., Post, T. R., & Behr, M. (1988). "Proportional Reasoning". In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 93-118). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Miller, A. (1981). *The drama of the gifted child*, Nueva York, Basic Books.
- Mochón Cohen, S. (2012). Enseñanza del razonamiento proporcional y alternativas para el manejo de la regla de tres. *Educación matemática*, 24(1), 133-157.
- Pitta-Pantazi, D., & Christou, C. (2011). The structure of prospective kindergarten teachers' proportional reasoning. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 14(2), 149-169.

- Ramírez, M. y Block, D. (2009). “La fracción y la razón: un vínculo difícil en las matemáticas escolares”. En *Educación Matemática*, 21, 1, 63-90.
- Reyes-Gasperini, D. (2013). *La transversalidad de la proporcionalidad*. México: Subsecretaría de Educación Media Superior. Secretaría de Educación Pública.
- Salmon, A. K. (2016). Teacher’s Discourse in the Classroom and the Development of Children’s Cognitive Skills.
- S.E.P. (2011). *Programas de estudio 2011. Guía para el Maestro. Educación Básica*. México: D.F.
- S.E.P. (2014). *Evaluación Nacional del Logro Académico en Centros Escolares*. Educación Básica. Recuperado el 12 de febrero de 2019 de <http://www.enlace.sep.gob.mx/ba/>
- S.E.P. (2018). *Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes*. Planea en educación básica. Recuperado el 12 de febrero de 2019 de <http://www.planea.sep.gob.mx/>
- Torres, E., & Deulofeu, J. (2018). La enseñanza y el aprendizaje de la proporcionalidad en el paso de la Educación Primaria a la Secundaria: el caso de Ainoa. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 99, 105-126.
- Vergnaud, G. (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad: Problemas de la enseñanza de las Matemáticas en la escuela primaria*. México: Trillas.

APÉNDICES

APÉNDICE I: PIZZA DE INTELIGENCIAS MÚLTIPLES



APÉNDICE II: TEST DE RAZONES Y PROPORCIONES

NOMBRE DEL ALUMNO: _____

EDAD: _____ años con _____ meses GRADO Y GRUPO: _____ NÚMERO DE LISTA: _____

FECHA: _____ / _____ / _____ GÉNERO: FEMENINO () MASCULINO ()

INSTRUCCIONES: resuelve los siguientes problemas realizando las operaciones y/o dibujos que necesites. Explica tu procedimiento y encierra tu respuesta final.

1. Un segmento AB mide 20 cm de largo y otro segmento CD de 25. El primero son los $\frac{4}{5}$ del segundo. Escribe la relación que indica las longitudes entre los dos segmentos.
2. Hay 100 asientos en un teatro, 30 en el balcón y 70 en el patio principal. Se han vendido ochenta entradas para el primer pase incluyendo todos los asientos del patio principal. ¿Cuál es la razón entre los asientos del balcón y los del patio principal?
3. La Academia Posh cuenta con una proporción de 150 estudiantes a 18 profesores. ¿Cómo se puede ajustar el número de profesores para que la proporción de alumnos por profesor de la academia sea de 15 a 1?
4. Se tiene un sólido que tiene una masa de 340 gramos y ocupa un volumen de 120 centímetros cúbicos. ¿Cuál es la razón entre los gramos y el volumen del sólido?
5. $L_1 = 30\text{m}$ (altura del edificio 1)
 $L_2 = 12\text{m}$ (altura del edificio 2)
¿Cuál es la razón entre la altura de ambos edificios?

NÚMERO DE LISTA: _____

6. John necesita 15 botes de pintura para pintar 18 sillas. ¿cuántas sillas pintará con 25 botes de pintura?
7. Si Jorge pedalea a una razón de 8 km por hora, al cabo de 45 minutos ¿a qué distancia está de su casa?
8. Una motocicleta puede funcionar durante 10 minutos con un valor de \$24 en combustible. ¿Cuánto tiempo podría funcionar con \$17 en combustible?
9. Para tu fiesta, habías planeado comprar 2 kg de nueces mixtas para 8 personas, pero ahora vendrán 10 personas. ¿Cuántos kilogramos deberías comprar?
10. En una fotografía de un edificio hay una ventana de 3 cm de altura por 6 cm de ancho como la mostrada a continuación.



Un pintor quiere hacer un dibujo amplificado de esta ventana, de tal manera que la altura de la ventana le quede de 15 cm. ¿De cuánto debe ser el ancho de la ventana amplificada?

APÉNDICE III: HOJA 1, sesión 3

Nombre: _____ N.L. _____

Grado y grupo: _____ Fecha: _____ / _____ / _____

Indicaciones: de acuerdo a los cuadrados que te entregó tu profesora, escribe las dimensiones de cada uno. Guíate por el color.

El cuadrado amarillo (C_a) mide: _____ cm

El cuadrado verde (C_v) mide: _____ cm

El cuadrado naranja (C_n) mide: _____ cm

El cuadrado rosa (C_r) mide: _____ cm

El cuadrado morado (C_m) mide: _____ cm

Ahora contesta las preguntas, encerrando tu respuesta final.

1. ¿Cuál es la razón entre la magnitud de C_a y C_n ?
2. ¿Cuál es la razón entre la magnitud de C_r y C_v ?
3. ¿Cuál es la razón entre la magnitud de C_v y C_n ?
4. ¿Cuál es la razón entre la magnitud de C_n y C_a ?
5. ¿Cuál es la razón entre la magnitud de C_r y C_m ?

APÉNDICE IV: HOJA 2, sesión 6

Nombre: _____ N.L. _____

Grado y grupo: _____ Fecha: _____ / _____ / _____

Indicaciones: lee atentamente y resuelve lo que se te pide

1. Con ayuda de tu compás y tu regla, traza un triángulo que mida 4 cm de base y sus otros dos lados midan 3 cm y 2 cm.
2. Se quiere ampliar ese triángulo de tal manera que el lado que mide 4 cm (la base) ahora mida 12 cm. Así es que tenemos dos opciones; traza cada una de ellas.

Opción 1

Ahora los lados miden 12 cm, 11 cm y 10 cm
porque debemos **sumar 8** a cada lado.

Opción 2

Ahora los lados miden 12 cm, 9 cm y 6 cm
porque debemos **multiplicar por 3** a cada lado.

3. ¿Qué observas?, ¿Cuál de las dos opciones nos da un triángulo más parecido?
4. Para que se conserve la proporción de la figura, ¿qué debemos hacer?

APÉNDICE V: HOJA 3, sesión 6

Nombre: _____ N.L. _____

Grado y grupo: _____ Fecha: _____ / _____ / _____

Indicaciones: Observa cada una de las tablas y colorea con amarillo la tabla en la que haya una variación proporcional directa. Cualquier anotación u operación, realízala en los espacios en blanco de esta página.

<i>Número de ganadores</i>	<i>Monedas para cada uno</i>
2	350
5	140
10	70
200	?

<i>Edad (años)</i>	<i>Estatura (m)</i>
0	0.40
5	1.00
10	1.40
15	1.65
20	1.80

<i>Días</i>	<i># de Coches</i>
30	600
90	1,800
15	300
1	20

ANEXOS

ANEXO I: TEST DE IM DE GARDNER

Nombre: _____ Grado y grupo: _____ N.L. _____

Lee cada afirmación y marca con una X sólo una casilla para cada fila según tu opinión.

#	Afirmación	<i>Nunca</i>	<i>Rara vez</i>	<i>A veces</i>	<i>Con frecuencia</i>	<i>Siempre</i>
1	Los libros son importantes para mí.					
2	Soy capaz de calcular operaciones mentalmente sin esfuerzo.					
3	Cuando cierro los ojos percibo imágenes visuales claras.					
4	Practico al menos un deporte o algún tipo de actividad física de forma regular.					
5	Percibo cuando una nota musical está desafinada.					
6	Prefiero los deportes de equipo a los deportes solitarios.					
7	Dedico tiempo a reflexionar o pensar en cuestiones importantes de la vida.					
8	Me gusta ir de excursión o simplemente pasear en plena naturaleza.					
9	Me gustan los juegos de palabras como el Scrabble.					
10	Me gustan los juegos o acertijos que requieren un pensamiento lógico.					
11	Utilizo una cámara de fotos o videocámara para captar lo que veo a mi alrededor.					
12	Me cuesta permanecer quieto durante mucho tiempo.					
13	Pienso que sin la música mi vida sería más triste.					
14	Cuando tengo un problema, tiendo a buscar la ayuda de otra persona en lugar de intentar resolverlo por mí mismo.					
15	Soy capaz de afrontar los contratiempos con fuerza moral.					
16	Me encanta tener animales en casa					
17	Aprender a hablar o leer otra lengua me resulta relativamente sencillo.					
18	Creo que casi todo tiene una explicación racional.					
19	Me gustan los rompecabezas, laberintos y demás juegos visuales.					
20	En general, las mejores ideas se me					

	ocurren cuando estoy paseando o corriendo, o mientras realizo alguna actividad física.					
21	En ocasiones, cuando voy por la calle, me sorprende cantando mentalmente la música de un anuncio de televisión o alguna otra melodía.					
22	Disfruto con el reto que supone enseñar a otra persona o grupos de personas, lo que sé hacer.					
23	Mantengo una visión realista de mis puntos fuertes y débiles.					
24	Se me da bastante bien describir las diferencias entre distintos tipos de árboles, perros, pájaros u otras especies de flora o fauna.					
25	Cuando hablo, hago referencias frecuentes a datos que he leído o escuchado.					
26	Me siento más cómodo cuando las cosas están medidas, analizadas o cuantificadas de algún modo.					
27	Soy capaz de orientarme en un lugar desconocido.					
28	Cuando leo información o veo un video sobre una actividad, necesito practicarlo.					
29	Con solo escuchar una selección musical una o dos veces, ya soy capaz de reproducirla con bastante acierto.					
30	Me siento cómodo entre una multitud.					
31	Preferiría pasar un fin de semana solo en una cabaña, en el bosque, que en un lugar turístico lleno de gente.					
32	Me gusta leer libros o revistas, o ver programas de televisión o películas, en los que la naturaleza esté presente.					
33	Recientemente he escrito algo de lo que estoy especialmente orgulloso o que me ha aportado el reconocimiento de los demás.					
34	En ocasiones pienso en conceptos claros, abstractos, sin palabras ni imágenes.					
35	Me gusta dibujar o garabatear.					
36	Creo que soy una persona con una buena coordinación.					

37	Acostumbro a producir sonidos rítmicos con golpecitos o a cantar melodías mientras estoy trabajando, estudiando o aprendiendo algo nuevo.					
38	Me gusta participar en actividades sociales.					
39	Escribo un diario personal en el que recojo los pensamientos relacionados con mi vida.					
40	Cuando tengo vacaciones, prefiero los entornos naturales a los hoteles o complejos turísticos y a los destinos urbanos o culturales.					
41	Me gusta entretenerme o entretener a los demás con trabalenguas o juegos de palabras.					
42	Mi mente busca patrones, regularidad o secuencias lógicas en las cosas.					
43	Prefiero el material de lectura con muchas ilustraciones.					
44	Acostumbro a gesticular mucho o a utilizar otras formas de lenguaje corporal cuando hablo con alguien.					
45	Conozco las melodías de numerosas canciones.					
46	Prefiero los juegos sociales como el Monopoly o las cartas, que los que se realizan en solitario (como muchos videojuegos).					
47	Me considero una persona con mucha fuerza de voluntad o independiente.					
48	Intento ayudar, en la medida de mis posibilidades, para frenar la destrucción del planeta.					

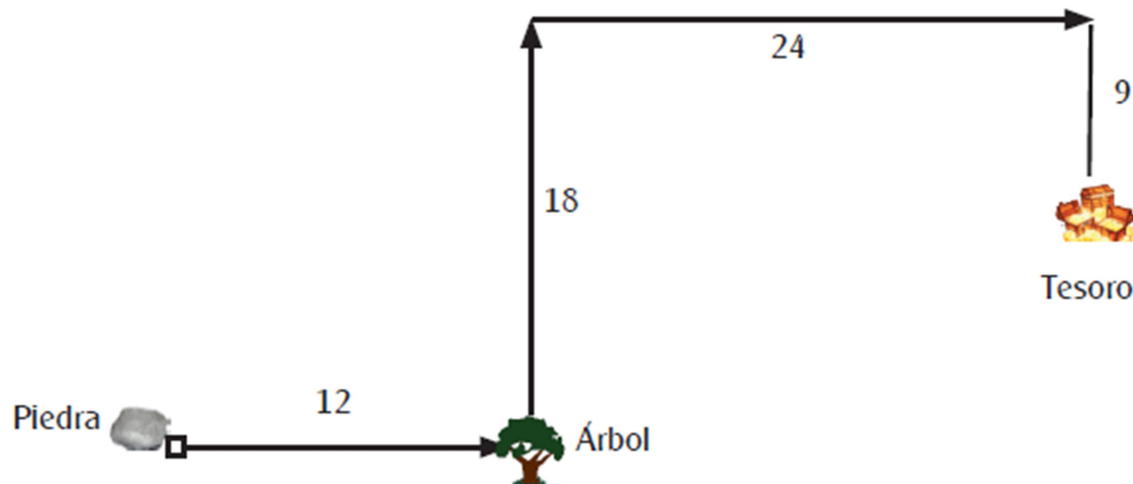
ANEXO II: HOJA 4, sesión 7

Nombre: _____ N.L. _____

Grado y grupo: _____ Fecha: ____ / ____ / ____

Indicaciones: Completa la tabla y responde las preguntas. Utiliza los espacios en blanco de esta página para realizar tus operaciones.

Un pirata encuentra un mapa con medidas raras en el que se indica dónde fue enterrado un tesoro. El diagrama grabado es el siguiente.



El pirata localiza la piedra y el árbol y al caminar entre ellos, cuenta 30 de sus pasos. Ayúdale a saber cuántos de sus pasos corresponden a cada una de las medidas dadas en el mapa.

Medidas mapa	Pasos pirata
12	
18	
24	
9	

¿Cuántos pasos debe dar para llegar al tesoro si sale desde la piedra? _____

ANEXO III: HOJA 5, sesión 8

Nombre: _____ N.L. _____

Grado y grupo: _____ Fecha: _____ / _____ / _____

Indicaciones: Completa la tabla y responde las preguntas. Utiliza los espacios en blanco de esta página para realizar tus operaciones.

Diana pedalea a 4 km por hora. Si recorrerá una distancia de 3 km para llegar a su casa en bicicleta, ¿en cuántos minutos llegará a su casa? _____

¿Por qué en la tabla dice **minutos** y no **horas**?

<i>Kilómetros</i>	<i>Minutos</i>
4	
1	
7	
3	
5	

ANEXO IV. HOJA 6, sesión 9

Nombre: _____ N.L. _____

Grado y grupo: _____ Fecha: _____ / _____ / _____

Indicaciones: Completa la tabla y responde las preguntas. Utiliza los espacios en blanco de esta página para realizar tus operaciones.

Una tienda vende paquetes de 6 latas de refresco por \$15. Completa la tabla siguiente para que el dueño de la tienda la utilice.

<i>Latas</i>	<i>Pesos</i>
6	15
12	
18	
24	
30	