BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

EXPERIENCIA DIDÁCTICA EN LA INTRODUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA EN ESTUDIANTES DE BACHILLERATO

TESIS
PARA OBTENER EL TÍTULO DE
MAESTRA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

PRESENTA
LIC. REBECA ANTONIO ZAMBRANO

DIRECTOR DE TESIS
DRA. DINAZAR I. ESCUDERO ÁVILA
CO-DIRECTOR DE TESIS
DR. ERIC FLORES MEDRANO

PUEBLA, PUE. MAYO 2018

6

BUAP

DRA. LIDIA AURORA HERNÁNDEZ REBOLLAR
SECRETARIA DE INVESTIGACIÓN Y
ESTUDIOS DE POSTGRADO, FCFM-BUAP
P R E S E N T E:

Por este medio le informo que la Lic.

REBECA ANTONIO ZAMBRANO

Estudiante de la Maestría en Educación Matemática, ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 03 de mayo de 2018, con la tesis titulada:

"Experiencia didáctica en la introducción del concepto de derivada en estudiantes de bachillerato"

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

A T E N T A M E N T E.
H. Puebla de Z. a 17 de mayo de 2018

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS - SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y ESTUDIOS DE POSGRADO
1578

DR. JOSIP SLISKO IGNJATOV
COORDINADOR DE LA MAESTRÍA
EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA.

Ccp Archivo.
DR. JSI / l'agm*

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por el financiamiento otorgado en el periodo de enero 2016 a diciembre 2017, para la realización de esta investigación.

CVU: 738777

Valeria Arantzazú

Citlalli

Raúl

Gracias por sus cálidos abrazos y sus significativas palabras para demostrarme su cariño.

Agradecimientos

En primer lugar agradezco a Dios por haberme permitido llegar hasta este punto, aun cuando existieron momentos que pensé que era más fácil darse por vencido.

A mis hijas, hijo y esposo por su gran apoyo para concluir este trabajo, por estar dispuestos a sacrificar el tiempo que debimos disfrutar juntos, por su enorme paciencia y motivaciones para que persiga y cumpla las metas que me propongo.

A mis familiares que me acompañaron en este proyecto de superación profesional, por estar al lado de mis hijos en momentos valiosos de su vida y en los cuales estuve ausente por concluir este trabajo.

A mis asesores:

Dra. Dinazar I. Escudero Ávila agradezco haya aceptado el reto de asesorarme sin conocer mi desempeño académico, considero que ha hecho una gran labor en mi formación profesional. Gracias por su paciencia, dedicación, comentarios y sugerencias que han sido de suma importancia para mejorar este trabajo hasta ver la versión final.

Dr. Eric Flores Medrano gracias por compartir un poco de su conocimiento a través de la aportación de ideas y de críticas constructivas para mejorar este trabajo.

Gracias a ustedes este proyecto llega a su fin.

A los integrantes del jurado que aceptaron revisar este trabajo y hacer sugerencias para su mejora. A mis profesores de la maestría gracias por los conocimientos transmitidos y las sugerencias que hicieron en cada avance de este trabajo.

A los directivos y estudiantes de la Preparatoria Emiliano Zapata BUAP por el apoyo brindado para realizar este trabajo de investigación. Mtro. Ricardo Valderrama gracias por el apoyo para presentar de forma parcial el trabajo en CIBEM y a los estudiantes de 3FV generación 2014-2017 por estar dispuestos a participar aun a pesar de que la cámara los cohibía.

Sin olvidar a mis compañeros de generación 2015-2017 por su amistad brindada, por su apoyo durante el tiempo en la maestría y a mis compañeros de trabajo por su atención brindada, sus palabras de motivación y dedicación de su tiempo para escucharme.

Índice

Resumen 1

Abstract 3

Introducción 5

Planteamiento del problema 5

Objetivo y preguntas de investigación 7

Estructura general del trabajo 8

Capítulo 1. Antecedentes 11

1.1 Didáctica del Cálculo 11

1.2 Didáctica de la derivada 14

1.2.1 Recorrido sobre investigaciones de la derivada 14

1.2.2 Conocimiento y didáctica de profesores con respecto a la derivada 15

1.2.3 Aprendizaje del concepto de derivada 17

1.2.4 La derivada en otras disciplinas 20

Capítulo 2. Marco de referencia 23

2.1 Pensamiento y lenguaje variacional 23

2.1.1 La derivada desde la perspectiva de pensamiento y lenguaje variacional 24

2.2 Registros de representación 28

2.2.1 Registros de representación asociados al concepto de derivada 32

Capítulo 3. Metodología 35

3.1 El diseño metodológico 35

3.2 El diseño de secuencias didácticas como recurso didáctico 36

3.3 El método 38

3.3.1 Métodos e instrumentos de recolección de datos 38

3.3.1.1 Secuencia didáctica para introducir el tema de derivada en bachillerato.. 40

3.3.1.2 Análisis a priori de la secuencia didáctica para introducir el tema de derivada en bachillerato 49

3.3.2 Métodos e instrumentos de análisis de datos 56

Capítulo 4. Análisis 59

4.1 Análisis actividad 1 59

4.1.1 Identificación de momentos clave ... 59
4.1.2 Puntos de referencia ... 61
4.1.3 Representación gráfica de movimientos constantes y no constantes ... 63
4.2 Análisis de la actividad 2 ... 65
4.2.1 Actividad 2. Parte 1. Análisis global ... 65
4.2.1.1 Primera pregunta ... 65
4.2.1.2 Segunda pregunta ... 67
4.2.1.3 Tercera pregunta ... 68
4.2.1.4 Cuarta pregunta ... 68
4.2.1.5 Quinta pregunta ... 69
4.2.1.6 Sexta pregunta ... 71
4.2.2 Actividad 2. Parte II. Análisis puntual ... 72
4.2.2.1 Pregunta 1 ... 72
4.2.2.2 Pregunta 2 ... 73
4.2.2.3 Pregunta 3 ... 74
4.2.2.4 Pregunta 4 ... 75
4.2.2.5 Pregunta 5 ... 75
4.3 Análisis de la actividad 3 ... 76
4.4 Reflexiones generales sobre las actividades ... 78
Capítulo 5. Conclusiones ... 81
5.1 Sobre los procesos de resolución que utilizan los estudiantes ... 81
5.1.1 Categoría 1 ... 82
5.1.2 Categoría 2 ... 82
5.1.3 Categoría 3 ... 82
5.1.4 Categoría 4 ... 83
5.1.5 Categoría 5 ... 83
5.2 Sobre la secuencia didáctica diseñada para la investigación ... 83
5.2.1 La secuencia didáctica y PyLV ... 83
5.2.2 La secuencia didáctica y los registros de representación ... 84
5.2.3 Mejoras de la secuencia ... 85

5.3 Reflexiones finales al respecto de mi desarrollo profesional como docente de matemáticas 85

Referencias bibliográficas 87

Anexos 95

Anexo 1. Evidencias de actividad 1 95

Anexo 2. Evidencias de actividad 2 parte I 105

Anexo 3. Evidencias de actividad 2 parte II 123

Anexo 4. Evidencias de actividad 3 141

Anexo 5. Transcripciones de presentaciones grupales 167

Índice de tablas

Tabla 2.1. Registros de representación del objeto ecuación de primer grado 30

Tabla 2.2. Tratamiento y conversión de un sistema de ecuaciones................................... 31

Tabla 2.3. Algunos Registros de Representación para el objeto derivada 33

Índice de figuras

Figura 2.1. Interpretación de la tangente como cociente de diferencias 27

Figura 2.2. Comparación de velocidades utilizando la pendiente 28

Figura 3.1. Gráfica donde se excluyen algunos momentos 50

Figura 3.2. Grafica con velocidades constantes... 51

Figura 3.3. El tiempo regresa... 51

Figura 4.1. Gráfica que muestra algunas posiciones en el movimiento de Juan. EQUIPO 4. Episodio 2. 60

Figura 4.2. Ubicación de la casa de Juan y de la casa de su compañero. EQUIPO 8. Episodio 3. 62

Figura 4.3. Gráfica con movimientos constantes EQUIPO 1. Episodio 5. 63

Figura 4.4. Gráfica distancia contra tiempo EQUIPO 2. Episodio 1. 63

Figura 4.5. Gráfica posición tiempo de variaciones no constantes EQUIPO 5. Episodio 5. 64

Figura 4.6. Gráfica que modela el movimiento de Juan. 65

Figura 4.7. Punto donde permanece inmóvil. 67

Figura 4.8. Comparación de velocidades en dos intervalos.. 69

Figura 4.9. Comparación de velocidades con intervalos iguales EQUIPO 9. 70

Figura 4.10. Gráfica para el análisis puntual. 72

Figura 4.11. Cambio de velocidad alrededor de b 73

Figura 4.12. Análisis de la velocidad de a a b. 74

Figura 4.13. Comparación de velocidad en dos puntos. 77

Figura 4.14. Comparación de la velocidad en dos puntos. 77

Resumen

El aprendizaje de la asignatura de Cálculo en el nivel medio superior presenta dificultades asociadas a la comprensión y a los procesos de enseñanza de un concepto, además de dificultades relacionadas entre la ruptura de lo algebraico con lo analítico. Son muchas las investigaciones desarrolladas alrededor de Cálculo diferencial desde los ámbitos epistemológico, cognitivo y didáctico.

En cuanto al ámbito didáctico se han buscado estrategias que sirvan de apoyo en la enseñanza y comprensión de los conceptos de función, límite y derivada. Especialmente en cuanto al concepto de derivada se han desarrollado diversas investigaciones en el nivel superior (estudiantes de universidad y estudiantes para profesor) y en el nivel medio superior. En estas se ha indagado sobre la comprensión que se ha logrado acerca de este concepto y de las formas más idóneas acerca de la transmisión a los estudiantes. Además, también se puede distinguir que se hace uso de distintas teorías. Por ejemplo, la teoría APOE, el Enfoque Ontosemiótico (EOS), el Pensamiento y Lenguaje Variacional (PyLV), los Registros de Representación Semiótica (RRS) y la vinculación entre algunas de estas teorías.

El trabajo presentado en esta tesis surge a partir de la necesidad de buscar estrategias que sirvan de apoyo a los docentes dentro del aula, particularmente en la asignatura de Cálculo. En este se muestra el diseño, aplicación y análisis de una secuencia didáctica para introducir el concepto de derivada en estudiantes de bachillerato que por primera vez trabajarán este concepto. Esta secuencia tiene sustento teórico en Pensamiento y Lenguaje Variacional y los Registros de Representación Semiótica. La metodología que se usó fue el de investigación acción. Bajo esta metodología usamos el método de observación participante, se realizó un análisis cualitativo de las evidencias obtenidas para ello se usó el método de comparación constante para crear categorías a partir de las evidencias, además de establecer la triangulación entre investigadores para eliminar los sesgos que se generan y que son propios de este tipo de metodología.

Con esta investigación podemos concluir que a partir de esta secuencia los estudiantes hacen uso de Estrategias Variacionales, el tránsito entre registros de forma parcial y usan conocimientos que adquirieron en otras asignaturas.

Además se dan algunas recomendaciones en cuanto a cambios en la redacción de la secuencia didáctica.

Abstract

The learning of Calculus in the high-school presents difficulties associated with the comprehension and teaching processes of a concept, in addition to difficulties related between the breaking of the algebraic and the analytical. There are many researches developed around Differential Calculus from the epistemological, cognitive and didactic scopes. Regarding the didactic scope, several strategies that support the teaching and understanding of the concepts of function, limit and derivative, have been sought.

Principally, regarding the concept of derivative, several researches have been developed at the higher level (university students and pre-service teachers) and at the upper secondary level. In these, we have investigated the understanding that has been achieved about this concept and the most appropriate ways to transmit it to students. In addition, it can also be distinguished that different theories are used. For example, the APOS theory, the Onto-semiotic Approach (OSA), the Variational Thinking and Language (VT&L), the Register of Semiotic Representation (RSR) and the link between some of these theories.

The work presented in this dissertation arises from the need to find strategies that serve as support for teachers in the classroom, in the subject of Calculus particularly. In this shows the design, application and analysis of a didactic sequence to introduce the concept of derivative in high school students who will be working on this concept for the first time. This sequence has theoretical support in Variational Thinking and Language and the Register of Semiotic Representation.

The methodology used was that of action research. Under this methodology, we used the participant observation method, making a qualitative analysis of the obtained evidences by the use of the constant comparison method to create categories based on the evidences, besides establishing the triangulation among researchers to eliminate the biases that generated, typical of this type of methodology.

From this research, we can conclude that, using this sequence, the students make use of variational strategies, make partial transition between registers and use knowledge they acquired from other subjects.

In addition, some recommendations are given regarding changes in the writing of the didactic sequence.

Introducción

Como docente de nivel medio superior, he observado las dificultades que los estudiantes presentan al momento de abordar conceptos fundamentales de la matemática. Además, es común notar que en la actualidad los docentes, al igual que los estudiantes, siguen privilegiando el dominio de procesos algorítmicos dentro de la matemática sin dar un verdadero significado a la comprensión de un concepto, lo cual genera que al abordar un nuevo tema los estudiantes ya no recuerden lo que suponemos han aprendido o que no puedan usarlo en situaciones nuevas. Una de las principales finalidades del aprendizaje de la matemática es la de permitir a los estudiantes adquirir habilidades para desarrollar procesos cognitivos que permitan visualizar y recolectar información para dar solución a un determinado problema hipotético o un planteamiento real, por ello los docentes debemos estar conscientes de que los conceptos que forman parte de la matemática deberán ser útiles en la vida personal, profesional y laboral de nuestros alumnos, lo que nos obliga a replantear nuestros métodos de enseñanza (Salinas y Alanís, 2009).

Planteamiento del problema

La asignatura de Cálculo como parte del currículum de nivel medio superior, proporciona herramientas para llevar a cabo estudios de fenómenos que existen en la naturaleza y que van cambiando conforme cambia el tiempo. De acuerdo con Vrancken y Engler (2014) es necesario utilizar la matemática para estudiar algún fenómeno y las variaciones que en él se producen, específicamente el concepto de derivada. Sin embargo, en la mayoría de los libros de texto de Cálculo se presenta una primera parte que generalmente llaman precálculo (desigualdades y funciones) para luego trabajar consecutivamente los conceptos de límite, continuidad, derivada y aplicaciones de la derivada (Salinas y Alanís, 2009). En la mayoría de programas de Cálculo de bachillerato, el concepto de derivada se enseña a los estudiantes como la pendiente de la recta tangente a una curva para luego llegar a la expresión de límite indeterminado, posteriormente como aplicación al cálculo de razones de cambio promedio e instantáneas y por último se abordan las reglas de derivación. Un ejercicio típico es pedir a los estudiantes que hallen la derivada de una función, primero usando la definición de límite indeterminado siguiendo la regla de los cuatro pasos y luego utilizando alguna fórmula de derivación. Sin embargo, no todos los estudiantes pueden hallar la derivada solicitada, presentan distintos obstáculos, como por ejemplo dificultades con el manejo algebraico de las fórmulas, que no tienen los conocimientos previos necesarios (Vrancken y Engler, 2014) o no dan un significado a la derivada de acuerdo al contexto en el que estén trabajando (Artigue, 1998; Sánchez-Matamoros, García y Llinares, 2008). También, en este mismo contexto, Moreno (2005) menciona que los docentes somos capaces de enseñar a resolver un problema de forma mecánica o algunos ejercicios que generalmente se presentan en los libros (velocidad instantánea, optimización de áreas, volúmenes, distancias, etc.), sin embargo estas actividades no generan la comprensión del concepto.

Por otro lado, Dolores (1996) enuncia que los estudiantes de nivel medio superior difícilmente comprenden los conceptos fundamentales del Cálculo puesto que no logran desarrollar lo que tal autor llama un "pensamiento y lenguaje variacional", lo cual puede deberse a dificultades en los procesos de asimilación de conceptos y al proceso de enseñanza. En la investigación realizada por Carabús (2002) se encontraron evidencias de que los estudiantes tienen dificultad para relacionar los diferentes registros en los que se representan las funciones y su respectiva derivada. Además menciona que se tiene un fuerte apego al pensamiento numérico y algebraico dejando a un lado el pensamiento y lenguaje variacional que son propios del Cálculo. Estas y otras investigaciones (e. g. Vrancken, Engler y Müller, 2010; Fuentealba, Sánchez-Matamoros y Badillo, 2015) reportan dificultades tanto en el ámbito numérico y algebraico, así también al asignar un significado a la variación como fundamento para la comprensión del concepto de derivada, esto bajo el enfoque de pensamiento y lenguaje variacional.

En lo que respecta al diseño de actividades para el aprendizaje de este concepto, estas investigaciones se apoyan de las diferentes formas de representar a la derivada mostrando que algunos registros de representación se favorecen más que otros, dando por hecho que a través de estas actividades se da un significado al concepto de derivada (Dolores, 2006; Sánchez-Matamoros, García y Llinares, 2006; Sánchez-Matamoros, García y Llinares, 2008; Vrancken y Engler, 2014).

Un punto importante a resaltar acerca de las investigaciones sobre el concepto de derivada es que, en su mayoría, se hacen propuestas de trabajo para estudiantes que ya han tenido un

acercamiento previo con el concepto de derivada (e. g. Testa, 2004; Sánchez-Matamoros, García y Llinares, 2006; Vrancken y Engler, 2014).
Como ya se ha referido, en distintas investigaciones se pone especial atención en la forma en la que se ha aprendido o la forma en que se usa el concepto de derivada, sin embargo, encontramos escasas referencias al respeco de formas para secuenciar las actividades que se utilizan al momento de abordar este concepto por primera vez. Los métodos convencionales de enseñanza, así como entender la derivada en una única representación, deja de lado el sentido de variación, fundamento principal para la derivada.

Mi formación inicial es de Licenciada en Matemáticas. Actualmente me desempeño como docente en la Preparatoria Emiliano Zapata BUAP labor que he realizado durante cinco ciclos escolares. El programa de estudios en este subsistema se desarrolla durante un ciclo anual; en el primer año se imparte la asignatura de Matemáticas I, en segundo año la asignatura de Matemáticas II y en tercer año se imparte la asignatura de Cálculo o Estadística dependiendo de la carrera que hayan elegido los estudiantes para continuar sus estudios. Desde que entré como docente hace seis años, he impartido la asignatura de Cálculo. En el tiempo que he impartido esta asignatura también he conformado el curso por procesos y algoritmos que desembocan en aritmética elemental, álgebra y geometría analítica, siguiendo el currículo que en este nivel se presenta. Considerando que nuestro interés es explorar los procesos de construcción del concepto de derivada cuando este se presenta por primera vez a los estudiantes, nos parece interesante modificar el enfoque tradicional y adoptar uno basado en la idea de la variación para analizar los beneficios de éste al introducir este concepto.

Por otro lado, dado que los resultados de las investigaciones respecto al concepto de derivada no parecen verse reflejados en el currículo de bachillerato ni en los libros de texto, consideramos relevante apoyarnos en literatura de investigación como fuente de conocimiento para el profesor y así crear una secuencia didáctica que nos ayude a generar formas distintas de abordar este concepto.

Objetivo y preguntas de investigación

Con base en la problemática planteada y la literatura de investigación que hemos consultado, hemos decidido centrarnos en propiciar que el estudiante logre comprender los fundamentos del concepto de derivada a través de dos enfoques, la idea de variación y cambio implícita en el concepto de derivada y el tránsito entre los diferentes registros en los que este se puede representar para que pueda aplicarla según el contexto en el que se encuentre.

Definimos entonces nuestro objetivo como:

Diseñar y probar una secuencia didáctica que permita introducir el tema de derivada a través de la idea de variación y el tránsito entre distintos registros de representación para estudiantes de bachillerato que por primera vez tienen contacto con el tema.

Para alcanzar este objetivo y direccionar nuestros esfuerzos, nos planteamos las siguientes preguntas de investigación:

- ¿Cómo abordan los estudiantes de bachillerato situaciones de variación como introducción al tema de derivada?
- ¿Cómo una secuencia didáctica, basada en la idea de la variación y el tránsito entre registros de representación ayuda a los estudiantes a reflexionar sobre los fundamentos del concepto de derivada?
- ¿Cómo el diseño de una secuencia didáctica, que propicia el trabajo con distintos registros de representación y está contextualizada a través de la idea de variación ayuda en la introducción al tema de derivada a estudiantes de bachillerato?

Estructura general del trabajo

A continuación describiremos brevemente como está organizado el reporte de nuestro trabajo, para que el lector tenga una visión global del documento y se genere una idea de lo que se encuentra en cada uno de los capítulos.

En el capítulo 1 se da un panorama general sobre distintas investigaciones realizadas en la línea de la didáctica del Cálculo en general, para posteriormente centrarnos en investigaciones realizadas específicamente en torno al concepto de derivada y enmarcar los aportes que esperamos obtener con nuestro estudio.

En el capítulo 2 presentamos los elementos teóricos que han sido la base para la elaboración de este trabajo como son el tratamiento de la derivada desde el punto de vista del pensamiento y lenguaje variacional y los distintos registros de representación con los cuales se trabaja, así como el tránsito y coordinación entre ellos.

En el capítulo 3 describimos el diseño metodológico del trabajo, explicando los métodos e instrumentos utilizados, así como la forma en que nos hemos apoyado en la teoría emergente de los datos para describir los resultados de la aplicación de la secuencia y valorar su funcionamiento. Además, presentamos aquí la justificación de cada una de las actividades propuestas en la secuencia que implementamos, así como un análisis a priori de las posibles respuestas de los estudiantes.

En el capítulo 4 se muestra el análisis de los resultados obtenidos durante la aplicación de la secuencia, organizados por actividad, proponiendo categorías que ayudarán para posteriormente realizar un análisis general de la secuencia didáctica completa.

En el capítulo 5 se presentan las conclusiones, en las que se retoman los resultados del análisis general de la secuencia con la finalidad de contrastar los resultados de investigación con nuestros objetivos y dar respuesta a nuestras preguntas de investigación.

Finalmente se incluyen los anexos en los que se proporciona las evidencias de producciones escritas de las actividades que los estudiantes realizaron y las transcripciones de los audios que se generaron en las clases.

Capítulo 1: Antecedentes

1.1 Didáctica del Cálculo

Desde los orígenes del Cálculo hasta la actualidad su enseñanza se centra en la matemática clásica "formal", dando mayor peso a procesos que se centran en la memorización de conceptos y repetición de algoritmos (Salinas y Alanís, 2009; Vrancken, 2011); este hecho no permite al estudiante desarrollar sus aprendizajes y extenderlos a situaciones distintas dentro y fuera del aula (Artigue, 1998).

Debido a los problemas que existen en la enseñanza y aprendizaje del Cálculo, este es un tema que ha sido ampliamente investigado y que cuenta ya con gran cantidad de trabajos de investigación al respecto, algunos desarrollados en el nivel universitario (e. g. Moreno, 2005; Vrancken y Engler, 2014), otros en el nivel medio superior (e. g. Dolores, 2006; Dolores, 2009). Estas investigaciones se desarrollan a partir de diferentes enfoques teóricos y contemplan esencialmente tres dimensiones: la *epistemológica*, donde se considera más importante la matemática (origen, validez y desarrollo de conocimiento) y no su enseñanza, pues se tiene la idea de que es suficiente poseer conocimiento matemático para enseñar matemáticas; la *cognitiva*, cómo se aprende y la *didáctica*, cómo se enseña, estas dos últimas atendiendo a la necesidad de crear herramientas que apoyen en la comprensión de los conceptos principales del Cálculo (Moreno, 2005; Salinas y Alanís, 2009).

En cuanto a la *dimensión cognitiva*, Tall (1990) es uno de los primeros en trabajar en este ámbito. En su investigación, realizada a partir de su experiencia en el aula, menciona las inconsistencias en el aprendizaje del Cálculo desde tres vertientes: la mente del estudiante, del profesor y del matemático formal; las matemáticas como una teoría que tiene conceptos que llevan significados complejos y el mensaje que puede transmitir ideas equivocadas o que puede darse de forma inapropiada. En cada una de estas vertientes considera que existen inconsistencias entre sí y menciona la importancia de aportar a los estudiantes aprendizaje basado en experiencias que los ayuden a construir imágenes conceptuales.

Con respecto a la *dimensión didáctica*, Moreno (2005) menciona dos enfoques desde los cuales se aborda la enseñanza y los objetivos que se persiguen en cada uno de ellos. El primero pretende que los estudiantes hagan matemáticas por medio de aplicaciones y comprendan la relación entre los elementos que conforman el Cálculo. El segundo enfoque tiene como idea principal que los estudiantes formulen, propongan, conjeturen, validen, argumenten y discutan con sus compañeros de clase.

En esta misma dimensión encontramos los trabajos de Artigue (1995), quien propone que el estudiante desde un inicio coordine las formas algebraica, numérica y gráfica de las funciones. Menciona, además, las dificultades asociadas en el aprendizaje de los objetos matemáticos que son utilizados en la enseñanza del Cálculo: números reales, concepto de función, concepto de límite; además, de la ruptura entre lo algebraico y lo analítico. Artigue, propone trabajar las intuiciones y concepciones de los estudiantes para que estas logren evolucionar a través de situaciones adaptadas. Desde este enfoque, el concepto de función es uno de los conceptos fundamentales dentro del Cálculo, pues con base en este se construyen los conceptos de límite, derivada e integral.

Salinas y Alanís (2009) nos presentan una investigación donde se propone al lector replantear las formas y estrategias para la enseñanza del cálculo, por ejemplo: el uso de nuevas herramientas tecnológicas, enfocarse en distintas teorías, realizar investigaciones cualitativas y el empleo de secuencias didácticas que sean factibles para ser aplicadas en grupos escolares completos como parte del curriculum. Por otra parte, Pino-Fan (2017), muestra un recorrido de investigaciones (e.g. Pino-Fan, Godino y Font, 2016; Godino, Font, Wilhelmi y Lurduy, 2011; Font, Godino y Gallardo, 2013) que se han hecho en torno a la didáctica del Cálculo a partir de la teoría de enfoque ontosemiótico (EOS) con la finalidad de ofrecer un panorama sobre los trabajos actuales en torno a la dimensión didáctica, además de dar a conocer que líneas de investigación que quedan abiertas y que pueden ser referentes teóricos en futuras investigaciones.

Por su parte Hitt (1998) y Bagni (2004) desarrollaron investigaciones con respecto al concepto de función con profesores de secundaria y estudiantes de secundaria respectivamente, basando sus investigaciones en las distintas representaciones (parejas ordenadas, gráfica, tabla, expresión algebraica, etc.) en las que una función puede escribirse. En ambos casos se muestra que existen dificultades para relacionar las distintas representaciones de una función.

Blázquez y Ortega (2001) realizaron una investigación sobre el concepto de límite donde los registros de representación algebraica, numérica, gráfica y verbal se utilizan en distintas tareas que los estudiantes resuelven y concluyen que el uso de distintos registros de representación favorece la comprensión de este concepto, dado que las limitaciones de unas representaciones se ven beneficiadas por otras y permiten que los estudiantes se formen una mejor imagen conceptual.

Otro elemento importante en los estudios referentes a la enseñanza y aprendizaje del Cálculo, son las gráficas, las cuales son utilizadas para analizar comportamientos de funciones como: concavidades, crecimiento, máximos o mínimos, etcétera, y que han sido abordadas desde distintas perspectivas.

Cordero (2008) presenta algunos usos que se le dan a las gráficas, ligadas a diferentes contextos, por ejemplo: las gráficas en la situación de la linealidad del polinomio, el modo en que las cosas varían, la propiedad asintótica de las funciones. Dolores, Chi, Canul, Cantú y Pastor (2009) usan las gráficas para analizar la variación de un fenómeno. Así mismo, Buendía (2009) presenta una discusión a partir del uso de las gráficas en Cálculo y analiza qué es lo que el estudiante observa al trabajar con gráficas y lo que implica en el conocimiento matemático, relacionando la visualización de la gráfica como un proceso vinculado a la noción matemática, sus significados y sus representaciones.

Flores (2007) menciona que las gráficas funcionan como estrategia para el análisis de funciones en contextos matemáticos y extramatemáticos. En esta investigación se trabajó con estudiantes de Nivel Medio Superior para conocer la interpretación que los estudiantes proporcionan al analizar un fenómeno que describe variaciones. Las actividades que realizaron permitieron el trabajo colaborativo, además de que arrojan información para la construcción y aplicación de actividades de aprendizaje. En la primera parte de la actividad se les solicita construir una gráfica que modele los cambios en la posición de una persona que realiza un movimiento, posteriormente se realiza la simulación, esto con la ayuda de un sensor, para obtener la gráfica. Al realizar las simulaciones del movimiento se esperaba que los estudiantes describieran las variaciones que en él se presentan y lo relacionaran con la gráfica obtenida, finalmente se realiza una comparación entre la gráfica propuesta y la hallada con el sensor. Esta investigación permite concluir que, al trabajar con situaciones de movimiento que implican variación y cambios, los estudiantes usan aprendizajes por intuición, por lo adquirido en la escuela; y en la interpretación y construcción de gráficas usan conocimientos obtenidos de su entorno.

1.2 Didáctica de la derivada

1.2.1 Recorrido sobre investigaciones de derivada

Son distintas las investigaciones que se han realizado en torno al concepto de derivada, estos estudios se han realizado en distintos niveles y a partir de diferentes teorías. Sánchez-Matamoros, García y Llinares (2008) realizaron un recorrido sobre las distintas investigaciones realizadas en torno al concepto de derivada, partiendo de las dificultades que los estudiantes de bachillerato y primeros años de la universidad presentan en la comprensión del concepto. Su investigación esta ordenada por los siguientes temas:

- Dificultades en la comprensión del concepto de derivada: la noción de razón de cambio.
- Relación de la razón de cambio y cociente incremental.
- Sistemas de representación y derivadas.
- Derivada puntual y global.
- Esquemas para la derivada,
- Aplicación del concepto de derivada: regla de la cadena.

Su trabajo pone de manifiesto algunos resultados sólidos de investigación a este respecto, como el que los estudiantes presentan dificultades para establecer relaciones entre comportamientos puntuales y globales del concepto, además de que existe una construcción progresiva del esquema y los modos de representación para el concepto. En general, los autores concluyen que, la manera en que los estudiantes llegan a entender el concepto de derivada se puede pensar desde dos enfoques: *Las características de los significados del concepto de derivada que elaboran,* dado que los estudiantes eligen ciertos modos de representación y estos no están conectados, y sobre *el desarrollo de esos significados.*

Sánchez-Matamoros, et al. (2008) identifican, además, distintos trabajos en los que se hace uso de los registros de representación para la construcción del concepto de derivada, evidenciando que los significados que proporcionan los estudiantes están relacionados con algunas formas de representación; por ejemplo, en el caso de la representación gráfica y algebraica los estudiantes las trabajan de manera separada sin relacionarlas entre sí. Los estudiantes presentan inconsistencias entre representaciones y tiene más facilidad para trabajar con el registro algebraico, ya que cuando se proporciona un gráfico de la función y se solicita la gráfica de su derivada, se dejan de lado aspectos como el grado de la función y de su derivada.

1.2.2 Conocimiento y didáctica de profesores con respecto a la derivada

Ahora bien, en lo que respecta a este concepto en el trabajo con profesores, se han desarrollado investigaciones concernientes al conocimiento matemático y didáctico-pedagógico del profesor sobre este concepto. Pino-Fan, Godino y Font (2013) por ejemplo, trabajaron con estudiantes que se desempeñarían como profesores de secundaria y/o bachillerato con la finalidad de explorar y caracterizar el conocimiento didáctico-matemático que tenían acerca de este concepto. A través del diseño y aplicación de un instrumento, Pino-Fan y colaboradores concluyen que es importante caracterizar los distintos significados del concepto de derivada. Por otro lado, Badillo, Azcarate y Font (2011) describieron los niveles de compresión (inter, intra y trans) de la derivada como una función y de la derivada en un punto con profesores que tenían a su cargo la asignatura de Cálculo con alumnos de 16 a 18 años. A través de un primer cuestionario que diseñaron y aplicaron, sobre lo que el estudiante puede contestar una vez que se trabajó el concepto de derivada, se determinó la forma de conocer a la derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza aprendizaje. Un segundo cuestionario aplicado durante una entrevista ayudo a investigar los aspectos de $f(x), f'(a)$ y $f'(x)$ y a validar los resultados del primer cuestionario. En ambos cuestionarios se trabajó con los esquemas gráfico y algebraico de la derivada. Los resultados muestran que la relación que establecen entre ellas puede estar relacionada con la representación algebraica y grafica del concepto. Sánchez-Matamoros, Fernández y Llinares (2015) hacen un estudio con estudiantes para profesor con la finalidad de analizar cómo dan sentido a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, cómo notan cuando un estudiante ha comprendido un concepto al resolver problemas. Los resultados de este estudio sugieren la creación de módulos de enseñanza en los programas para formación de los futuros profesores donde se favorezca el aprendizaje de cómo los estudiantes comprenden los conceptos matemáticos y avanzan en la compresión de los mismos. Otro de los resultados es que se deben reconocer explícitamente los elementos matemáticos y la relación con los modos de representación es una característica principal para notar que los estudiantes han logrado una compresión.

Pino-Fan, Font, Guzmán y Duval (2017) presentan un estudio de teoría de redes (networking of theories) entre la teoría de los registros de representación y el enfoque onto-semiótico. Se eligió como tema a la Derivada y a través de la actividad, la cual consistió en derivar una función valor absoluto. El análisis se realizó, con la respuesta proporcionada por un estudiante para profesor, a través de dos perspectivas teóricas: registros de representación semiótica y enfoque ontosemiótico, donde se compararon los principios utilizados en el análisis cognitivo y no en la comparación de los métodos. Los autores concluyen que las nociones de representación semiótica y la de registros de representación semiótica deben relacionarse para la comprensión de la actividad cognitiva en la solución de una tarea. De esta forma, proponen una metodología con ambas teorías. En este mismo nivel, Pino-Fan, Godino y Font (2018) realizan una investigación en la cual trabajan con la teoría onto-semiótica para conocer algunas características clave sobre el conocimiento de derivada que los futuros profesores tienen. A través de la aplicación de un cuestionario diseñado con el modelo Conocimiento Didáctico Matemático (DMK, por sus siglas en inglés), analizaron la compresión de la Derivada en el aspecto global. Los autores concluyen que las herramientas del modelo DMK: prácticas matemáticas y configuración de objetos y procesos, se pueden utilizar para analizar el conocimiento institucional y personal. También que los programas de formación docente deben tomar en cuenta la complejidad del significado global de derivada, además de que los educadores de docentes deberían conocer la red de objetos y procesos que intervienen en la resolución de tareas matemáticas para gestionar el aprendizaje y organizar los procesos educativos.

Ortega, Guzmán y Mena (2009) presentaron una investigación realizada con profesores que imparten la asignatura de Cálculo en los primeros semestres de universidad, esto, con la finalidad de determinar la contribución a la práctica docente. Los temas que trabajaron están relacionados con los temas que los estudiantes deben tratar en su primer curso de Cálculo diferencial en la universidad: concepto de derivada, cálculo de máximos y mínimos, interpretación de derivada, teoremas clave de la derivada, gráficas de curvas y problemas de aplicación. Las observaciones que comentan, con respecto a una encuesta que fue realizada, es que prevalece el uso de solo un registro de representación en la enseñanza de los temas, privilegiando el registro algebraico – simbólico; los ejercicios son rutinarios y problemas clásicos; no seleccionan problemas abiertos, no realizan demostraciones. En general, las clases son expositivas y no permiten la interacción entre alumno-alumno, docente-alumno.

Otras investigaciones involucradas con profesores muestran el interés de los profesores en mejorar su práctica docente, a través del uso de herramientas tecnológicas y/o ejemplos concretos de mecánica clásica, posición, velocidad y aceleración, además de investigar sobre las habilidades de comunicación dentro del aula entre profesor-estudiante y estudiante-estudiante (Gavilán, 2010).

1.2.3 Aprendizaje del concepto de derivada

En las investigaciones desarrolladas con estudiantes estas se han llevado a cabo en el contexto de aprendizaje y dificultades respecto al concepto de derivada, como la de Sánchez-Matamoros, García, y Llinares (2006) en la que se habla de la comprensión de la noción de derivada en estudiantes de bachillerato y primeros años de Cálculo en la universidad, abordado desde la perspectiva de la teoría APOE (Acción-Proceso-Objeto-Esquema).

Borji, Font, Alamolhodaei y Sánchez (2018) realizaron una investigación con estudiantes universitarios en el análisis de comprensión del problema: dada la gráfica de la función, trazar la gráfica de su derivada, en esta combinan la teoría APOS y OSA. Los resultados muestran que la mayoría de los estudiantes tuvieron problemas importantes en el desarrollo de construcciones mentales y en la realización del trabajo práctico necesario para resolver el problema, particularmente aquellas construcciones que deben realizarse para calcular la derivada en los puntos críticos y para determinar la velocidad de la variación de la inclinación de las líneas tangentes a una función, $f(x)$.

Otras investigaciones se han desarrollado bajo la línea de pensamiento y lenguaje variacional considerando que la comprensión de la derivada se logra al relacionar este concepto con sus fundamentos de variación y cambio en el contexto didáctico (e.g. Vrancken y Engler, 2014; Dolores, 2016; García, 2011); Dolores (1996) presenta el estudio de derivada en el que utilizan la modelación, explicación y predicción de fenómenos que presentan variaciones. En su trabajo se trata la relación entre sí de los conceptos de razón de cambio, razón de cambio instantáneo y derivada de la función en un punto. Los conocimientos y habilidades por los que se transita para la asimilación del concepto son: resolver problemas sobre rapidez instantánea de la variación, resolver problemas sobre: dirección instantánea de la variación y tangentes a curvas, utilizar e interpretar correctamente el significado de la notación con que se reconoce a la derivada, poder señalar ejemplos y contraejemplos sobre la existencia de la derivada, calcular derivadas mediante los diferenciales (regla de los cuatro pasos), memorizar la definición de derivada y las fórmulas básicas de derivación, calcular derivadas mediante fórmulas y reglas y resolver problemas diversos conocidas las formulas y reglas de derivación. Para su investigación concluye que los estudiantes que participaron lograron la formación de ideas variacionales y la comprensión del concepto de derivada. Otra propuesta desarrollada bajo esta línea de investigación, Vrancken, Engler y Müller (2010) muestran de una forma más clara su experiencia al trabajar con alumnos de su universidad del área de ingeniería agronómica. Las autoras concluyen que el concepto de derivada es un concepto desarrollado para cuantificar, describir y pronosticar la rapidez de la variación en fenómenos de la naturaleza o de la práctica. Mencionan, que, trabajar con fenómenos que presentan procesos de cambio es de gran apoyo para lograr la profundidad en las concepciones que al Cálculo se refieren, pero se debe estar consciente de que esto no se logra de manera instantánea.

Por su parte, Vrancken y Engler (2014) diseñaron una propuesta didáctica para introducir el concepto de derivada bajo la línea de pensamiento y lenguaje variacional. Los autores señalan que “la derivada refleja, con gran precisión, una de las propiedades esenciales de los fenómenos de la realidad: la rapidez de la variación [y que esta se relaciona] con tres nociones fundamentales: el cambio, la razón promedio de cambio y la razón instantánea de cambio” (p. 3). Por tanto, en su trabajo se toman en cuenta las concepciones previas del concepto de velocidad, el uso de gráficas de las funciones para relacionar las ideas; especialmente las que se relacionan con pendiente de recta secante y razón de cambio promedio para concluir que al obtener el límite de las pendientes de rectas secantes se puede establecer el concepto de derivada de la función en un punto. Otro de los elementos teóricos que sustenta el trabajo de Vrancken y Engler (2014) es la utilización de registros de representación (numérico, algebraico, gráfico y verbal) para mejorar la comprensión y desarrollo del pensamiento visual. La secuencia didáctica se desarrolla en dos partes, en la primera, se trabajó con la noción de razón de cambio promedio para posteriormente trabajar situaciones donde la velocidad no es constante, esta transición le permite integrar una segunda parte donde se analiza la construcción de la derivada. Al contestar las actividades los estudiantes utilizaron ideas, estrategias y procedimientos relacionados con el pensamiento y lenguaje variacional. Una de las conclusiones de este trabajo es que las actividades propuestas lograron motivar a los estudiantes, el trabajo en pequeños grupos favoreció la movilidad del trabajo y la definición de derivada surgió de forma natural a partir de la necesidad de cuantificar cambios en un instante.

García y Dolores (2016) trabajan el concepto de derivada con estudiantes de primer año de licenciatura a través de secuencias didácticas basadas en lo que denominan Pensamiento y Lenguaje Variacional. Los autores diseñaron una secuencia para cada una de las tres fases graduales en las que dividieron la toma de datos. En la primera fase se trabajaron conceptos iniciales y fundamentales (¿qué cambia?, ¿cuánto cambia?, ¿cómo cambia?), para que más adelante estos fueran utilizados al relacionarlos con el concepto de derivada. En la segunda fase se trabajaron actividades para la formación del concepto de derivada y sus características. En la última fase se diseñó la secuencia de manera que se estableciera la asimilación y repaso del concepto. En estas actividades se trabajaron los registros: verbal (que se presenta propiamente como el lenguaje matemático), numérico (al trabajar con sucesiones numéricas), gráfico (al trabajar con figuras o imágenes) y algebraico (con el uso de expresiones algebraicas). El resultado que arroja la investigación es que los estudiantes que muestran mejoría son los que asistieron a todas las sesiones programadas y participaron activamente. Un obstáculo mostrado en esta investigación es la cantidad de estudiantes con los que se trabajó y la irregularidad de asistencia.

Otras investigaciones de la derivada se han desarrollado en torno a la relación que existe entre la función y sus derivadas sucesivas. Buendía y Ordoñez (2009) realizaron una investigación para una función y sus derivadas para funciones periódicas con el objetivo de resignificar la relación a partir de un contexto de variación. A través de actividades que incluyen graficar, modelar o predecir se dieron significados a los comportamientos periódicos en las variaciones de las funciones y se dieron algunos resultados; por ejemplo los autores concluyen que en un contexto de variación se adquieren mayores significados a los comportamientos periódicos de las funciones. En Fuentealba, Sánchez-Matamoros y Badillo (2015), se realizó una investigación con estudiantes de Ingeniería y Matemáticas todos ellos ya habían tenido un acercamiento al Cálculo. El objetivo de esta investigación es analizar como los estudiantes trabajan el concepto de derivada, a través de las implicaciones entre $f - f'$ y $f - f''$. La primera actividad consiste en observar si a través de proporcionar información analítica de f en términos de f' y f'' los estudiantes pueden inferir información como monotonía, concavidad, presencia de extremos relativos y puntos de inflexión. La segunda actividad se presenta en modo gráfico, en esta se solicita al estudiante calcular la derivada en puntos especiales dada la gráfica de la función f y después se solicita dar un esbozo de la gráfica para la derivada. En la tercera actividad se proporciona la gráfica de la derivada y se solicita al estudiante esboce las posibles gráficas de la función, sin embargo se cree que los estudiantes solo podrán establecer algunas características sin considerar la curvatura de la función, esta acción obliga a analizar la relación entre la primera derivada y segunda derivada. A partir de esta investigación los autores encuentran que los estudiantes relacionan los elementos matemáticos entre f' con f'' y que estas relaciones pueden ser trasladadas a otros pares de derivadas sucesivas. Sin embargo, se muestran dificultades al establecer el uso directo entre $f', f'' y\, f'''$. Estos autores concluyen que con actividades de este tipo se favorece a los estudiantes para lograr una mejor comprensión del concepto de derivada.

1.2.4 La derivada en otras disciplinas

En su relación con otras disciplinas, explícitamente en Economía, la derivada suele tener distintas interpretaciones: *costo marginal*, *ingreso marginal*, *utilidad marginal*, *productividad marginal* y *tasa de impuesto marginal* (Arya y Lardner, 1987 citado en García, Moreno, Badillo y Azcarate, 2011). García, Moreno, Badillo y Azcarate (2011) presentan una introducción de la derivada en Economía conocido como análisis marginal. Para introducir la derivada en esta área se consideran la interpretación geométrica (pendiente de la recta tangente a la curva en un punto) y la interpretación verbal (razón de cambio instantáneo: velocidad instantánea). En su trabajo muestran un ejemplo aplicado a la economía con la finalidad de hacer que el estudiante y el docente tengan una visión más amplia sobre la utilidad de dicho concepto. Con base en este trabajo se sugiere: tomar en cuenta el origen del concepto, consideran que este hecho tiene importancia dentro de la didáctica del mismo; que el docente aproveche el contexto para establecer relaciones multidisciplinarias con respecto al concepto, además de implementar la importancia basada en problemas.

Como lo muestran las investigaciones anteriores, prevalecen el pensamiento y lenguaje variacional como una línea bajo la cual puede tratarse este concepto, además de que en todas se menciona al menos dos formas de representar a la derivada; aunque algunas de sus representaciones no necesariamente permiten la relación entre fenómenos que representan cambios. Por ejemplo, en su interpretación geométrica se relaciona al valor numérico de la derivada en un punto con la pendiente de la recta tangente en ese punto; esta representación parece introducir la idea de que la derivada es algo estático, cuando esta representa un concepto dinámico. Con respecto a los registros algebraico y numérico prevalece el uso de la memoria; pues se evocan técnicas para hallar derivadas donde, de igual forma, no se beneficia el aspecto variacional que el concepto pone en juego, dado que la relación entre la derivada y la variación se trabajan en un apartado de aplicaciones (Dolores, 2006; Testa, 2004). Con lo analizado hasta el momento pretendemos desarrollar nuestro trabajo sobre la línea de pensamiento y lenguaje variacional, admitiendo las diferentes representaciones en las que este concepto puede ser presentado.

Capítulo 2: Marco de referencia

Nuestro trabajo está sustentado bajo la línea de Pensamiento y Lenguaje Variacional y los registros de representación semiótica de Duval. En este capítulo se hace una mención breve de la historia de la derivada desde el punto de vista variacional, además, se mencionan algunos registros de representación para la derivada.

2.1 Pensamiento y lenguaje variacional

El pensamiento y lenguaje variacional es una línea de investigación desarrollada por un grupo de matemáticos educativos, encargada de estudiar la evolución y desarrollo del lenguaje alrededor de fenómenos que presentan variación. Esta línea parte del estudio de procesos de enseñanza y aprendizaje del Cálculo, pues este se considera de carácter dinámico, en el que se pueden modelar situaciones que varían (Cantoral y Hernández-Zavaleta, 2017).

Cantoral, Molina, y Sánchez (2005) mencionan la diferencia entre los términos cambio y variación:

> La noción de cambio denota la modificación de estado, de apariencia, de comportamiento o de condición de un cuerpo, de un sistema o de un objeto; mientras que la variación, la estamos entendiendo como una cuantificación del cambio, es decir, estudiar la variación de un sistema o cuerpo significa ejercer nuestro entendimiento para conocer cómo y cuánto cambia el sistema o cuerpo dado (p. 464).

Así, un estudiante utiliza el termino variacional cuando reconoce el cambio de forma cuantitativa y cualitativa del fenómeno u objeto que está estudiando. Por su parte, Dolores (1996) afirma que "en la cuantificación del cambio encuentran su razón de ser los conceptos básicos del cálculo, por eso muchos matemáticos suelen caracterizar al cálculo como la matemática del cambio" (p. 3). Por tanto, la variación es un eje a través del cual se han realizado investigaciones para introducir el concepto de derivada.

El desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional es un proceso que se lleva a cabo en tiempos prolongados, además de que, supone que el estudiante debe dominar los contenidos de la matemática básica y los procesos de pensamiento asociados a este, además de exigir rupturas con modos de pensamiento prevariacional. Otra característica es que para el desarrollo de este pensamiento se debe tener un vasto conocimiento de las formas gráficas (Cantoral y Farfán, 1998).

Para esta investigación hemos decidido utilizar la idea del Pensamiento y Lenguaje Varicaional para tratar el concepto de derivada desde sus fundamentos.

2.1.1 La derivada estudiada desde la perspectiva de pensamiento y lenguaje variacional

Como mencionamos antes, los comportamientos de fenómenos que presentan variaciones son parte fundamental del estudio de Cálculo. La variación está íntimamente relacionada con Cálculo, es en ella donde se generaron las ideas fundamentales que originaron el Cálculo diferencial.

Para la primera parte de esta sección hemos decidido basarnos en el trabajo de Alanís (1996) y Pulido (1997). Alanís (1996) elaboró, aplicó y evaluó secuencias didácticas basadas en cuestiones epistemológicas y didácticas sobre el concepto de derivada. Con el análisis epistemológico rescata el carácter variacional de la derivada a partir de la predicción, para llegar a lo analítico, en este tránsito utiliza las ideas de Newton, que lo llevaron a la invención del Cálculo. Con el análisis didáctico trabajó la transición de magnitudes constantes a magnitudes variables propias del Cálculo; teniendo como base actividades de Física. Por otra parte, Pulido (1997) realiza una investigación utilizando fenómenos de la Física que se representan con diferenciales, como medio para llegar al concepto de derivada; todo ello, se desarrolla con base en el Cálculo desarrollado por Leibniz.

Los orígenes o "invención" del Cálculo se atribuye a Newton y Leibinz, sin embargo, este ha sido producto de una evolución de distintos trabajos. No se puede negar que ellos dieron una aportación importante a partir de distintos trabajos que ya se habían realizado, sin embargo, Alanís (1996) señala tres momentos importantes, antes del surgimiento del Cálculo de Newton: El primer momento está marcado en la historia con el Colegio de Merton, cuyas aportaciones esenciales fueron proporcionar las definiciones de velocidad uniforme y de movimiento uniformemente acelerado; el segundo momento referente a Nicolás de Oresme, quien relacionó a la variación utilizando recursos geométricos. Por último, el momento en que Galileo Galilei al tratar de responder la pregunta ¿qué sucede cuando los cuerpos caen al vacío?, estableció que "la distancia recorrida, por un móvil que cae partiendo de una situación de reposo, es proporcional al cuadrado del tiempo transcurrido" (p. 42). Donde reconoce que el movimiento de los cuerpos que caen libremente es uniformemente acelerado.

Una vez descritos estos tres momentos Alanís describe el trabajo de Isaac Newton, quien relacionó a la matemática con modelos de dinámica celeste al plantear el problema de predecir las posiciones y las velocidades en cualquier instante de tiempo para dos cuerpos en el espacio, dicha investigación ha contribuido en distintas teorías como la mecánica de fluidos (Cantoral y Hernández-Zavaleta, 2017).

Según Alanís (1996), para trabajar lo que hoy conocemos como derivada, Newton utiliza el término *fluxión*: una razón de cambio del movimiento. Comenta, además, que en el desarrollo de la teoría del método de fluxiones; Newton consideró cantidades variables que van fluyendo con el tiempo, a las que denominó fluentes y a las razones de cambio instantáneas de las fluentes las llamo fluxiones; las cuales son las derivadas con respecto al tiempo de las fluentes. Las fluentes las representó con letras $x, y, \dots$, a las fluxiones con $\dot{x},\ \dot{y}, \dots$ y a los incrementos de las fluentes los represento con $\dot{x}o,\ \dot{y}o, \dots$, a los que llamó momentos, consideró a o como un incremento infinitesimal del tiempo. Su trabajo lo basó en dos problemas fundamentales:

1. Determinar la velocidad de movimiento en un momento de tiempo dado.
2. A partir de la velocidad de movimiento determinar el camino recorrido en un tiempo dado.

Además, Newton no utiliza el término de función, más bien, considera la derivación implícita para dar solución a los problemas planteados.

En el Cálculo que desarrolla Newton, un concepto protagonista es la cantidad de movimiento o algo que fluye con el tiempo; donde las magnitudes se generan a través de movimiento continuo y no por agregación de cantidades.

Por otro lado, para Leibniz la derivada es una razón de diferencias muy pequeñas, diferencias infinitesimales y la llamó cociente diferencial (Alanís, 1996). El objeto de estudio del Cálculo para Leibniz son las curvas, al estudiar las relaciones entre las distintas cantidades geométricas que varían (Pulido, 1997). Leibniz consideró una curva como un polígono con infinitos lados, donde asocia a la sucesión de abscisas $x_1, x_2, x_3, \ldots$ con la sucesión de ordenadas $y_1, y_2, y_3, \ldots$ mediante los puntos (x_i, y_i) los cuales están sobre la curva. A la diferencia entre dos valores sucesivos de x la llamó diferencial de x, (dx), de forma similar para la diferencia entre los valores sucesivos de y, (dy). A los lados del polígono que constituyen la curva los represento por ds, bajo este proceso resulta el triángulo característico (triangulo rectángulo que tiene lados infinitesimales) donde la hipotenusa de este triángulo sobre la curva coincide con la tangente a la curva en el punto (x, y). La pendiente de esta recta tangente, representada por $\frac{dy}{dx}$, es un cociente de diferencias que Leibniz nombra como *cociente diferencial*.

Con la Teoría del método de fluxiones Newton representa el problema de diferenciación implícita de funciones y obtiene una ecuación diferencial que expresa las leyes de un movimiento (Valdés, 1998; Bingham, 1973) y aunque los diferenciales de Leibniz surgieron al interior de la geometría estos han servido para estudiar fenómenos de física, por ejemplo en la mecánica de los fluidos (Pulido, 1997).

Este estudio histórico y epistemológico de la derivada es lo que da origen a la idea del pensamiento y lenguaje variacional, puesto que se observa la necesidad de cuantificar el cambio mediante las diferencias (Dolores, 2006; Vrancken y Engler, 2014).

Cabe aclarar que para definir la velocidad de un objeto se considera la posición que recorre por unidad de tiempo, la dirección y el sentido del desplazamiento, mientras, la rapidez es la relación entre el cambio de posición recorrida y el cambio en el tiempo expresada en números positivos.

La velocidad media, está dada por la razón: $V_m = \frac{\Delta p}{\Delta t}$, donde p y t son posición y tiempo, respectivamente. La velocidad instantánea, V_i se define como una derivada en particular: $V_i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta p}{\Delta t}$.

Este tipo de pensamiento también se analiza a través de las gráficas, dado que la velocidad media se asocia con la inclinación y la pendiente de la gráfica.

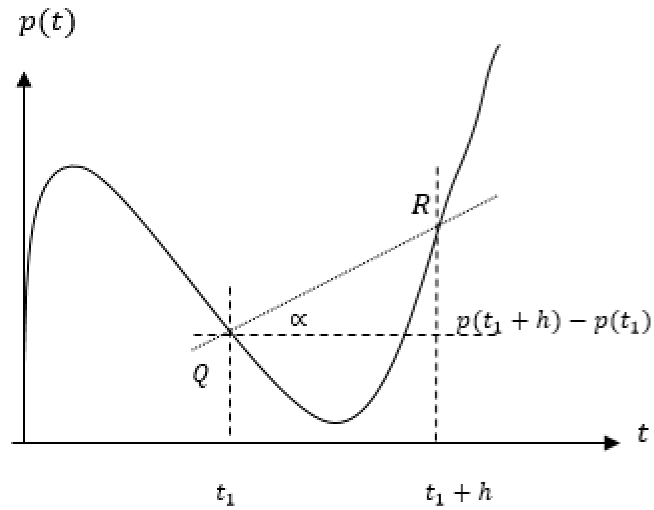


Figura 2.1. Interpretación de la tangente como cociente de diferencias

En la Figura 2.1. Se proporciona la gráfica de una función, $p(x)$. Se observa que $Q(t_1, p(t_1))$, $R(t_1 + h, p(t_1 + h))$, y el triángulo con hipotenusa QR tiene como altura $p(t_1 + h) - p(t_1)$. Por tanto,

$$\tan \alpha = \frac{p(t_1 + h) - p(t_1)}{t_1 + h - t_1} = \frac{p(t_1 + h) - (t_1)}{h}$$

La $\tan \alpha$ representa la pendiente de la curva que pasa por Q y por R. Si el valor de h se acerca a cero entonces el punto Q se acerca hacia el punto R, de manera que, la $\tan \alpha$ se convierte en la pendiente de la recta tangente a la curva en Q. Bajo esta consideración se llega a:

$$m_{tan} = \lim_{h \to 0} \frac{p(t_1 + h) - p(t_1)}{h}$$

Lo cual coincide con $V_i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta p}{\Delta t}$.

Así, la velocidad media se asocia con la pendiente de la secante a la curva que representa la función posición-tiempo y la velocidad instantánea como la pendiente de la recta tangente en un punto de la gráfica.

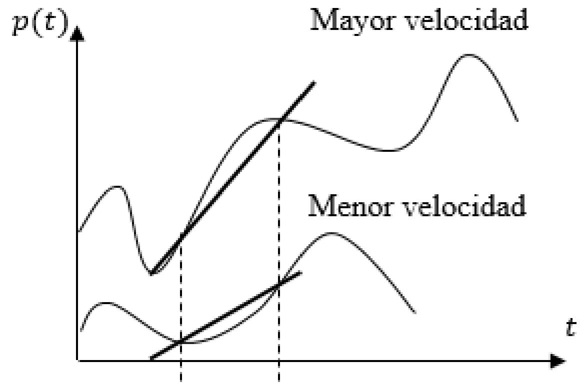


Figura 2.2. Comparación de velocidades utilizando la pendiente

La Figura 2.2 muestra la comparación entre la pendiente de la recta y que se puede decir con respecto a la velocidad. Utilizando esta relación se pueden analizar los cambios en la variación de un fenómeno.

La revisión de literatura que hemos hecho en este y en el capítulo anterior sugiere que estudiar el concepto de derivada bajo un contexto de variación, podría dotar de habilidades para modelar, predecir y explicar fenómenos, además de lograr una mejor comprensión del concepto en cuestión. Buendía y Ordoñez (2009) afirman que “estudiar qué es lo que varía y cómo, en fenómenos cambiantes permite dotar a la derivada de significados que se alejan del manejo de fórmulas de derivación, hecho al cual se suele limitar su enseñanza” (p.8). Los fenómenos que presentan procesos de cambio apoyan en la comprensión de algunos conceptos de Cálculo, sin embrago, es necesario realizar este tipo de actividades de una forma gradual. Por todo esto hemos decido tomar esta línea de trabajo para abordar la noción de derivada en el aula de bachillerato.

2.2 Registros de representación

Los sistemas de representación son producciones que involucran signos, imágenes o reglas que un individuo utiliza para mostrar la concepción que tiene sobre un objeto matemático. Esta relación se da de forma interna y externa, es decir, representaciones que surgen en la mente al pensar en un concepto matemático y que pueden ser exteriorizadas de alguna forma. Las representaciones externas son las que tienen un soporte físico y son parte importante en la construcción de la enseñanza, aprendizaje y comunicación de conocimiento en el ámbito matemático (D’Amore, 2004; Rico, 2009; García, 2011). Para Duval (2006) un registro de representación, es un sistema de representación que permite realizar la formación de una representación identificable como la representación de un registro dado, la transformación de la representación en otra representación y la transformación de la representación dentro del mismo registro donde se estableció. Así, un registro de representación semiótica debe permitir las actividades cognitivas: formación, tratamiento y conversión. Una parte importante del trabajo con registros de representación es la coordinación interna entre ellos como un elemento para garantizar el aprendizaje de los estudiantes (Guzmán, 1998).

Rico (2009) menciona que las representaciones matemáticas están formadas por signos o gráficas que hacen presentes los conceptos y procedimientos matemáticos, de manera que, a través de ello los estudiantes abordan e interactúan con el conocimiento matemático. Guzmán (1998) dice que en matemáticas las notaciones simbólicas para los objetos, escrituras aritméticas, lógicas y funcionales que se relacionan con el lenguaje natural, así también las figuras geométricas, gráficas cartesianas, diagramas, etc. constituyen los signos para poder manipular el objeto matemático. Los signos no son prioritarios para representar objetos, sino para poder ser sustituidos por otros y esta representación debe realizarse de acuerdo al objeto/concepto matemático en cuestión (Guzmán, 1998).

Estos registros se refieren a distintas formas de representar un mismo objeto matemático y se les da distintos nombres, algunos de estos son: verbal, numérico, gráfico, geométrico, etc.

A manera de ejemplo, se muestran distintas representaciones semióticas de un objeto en distintos registros semióticos:

Objeto: Ecuación de primer grado	
Registro semiótico	**Representación semiótica**
Verbal	Todos los números reales multiplicados por tres y al resultado se le suma cinco.
	Todos los números reales que pertenecen a la recta que pasa por (0, 5) con pendiente 3.

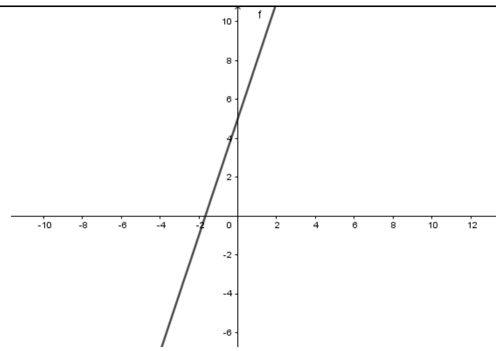
	La recta con ordenada al origen 5 y pendiente 3.
	Recta que tiene pendiente 3 y corta al eje Y en 5.
Algebraico	$y = 3x + 5$
	$3x - y + 5 = 0$
	$\{(x, y) \mid x \in R, y = 3x + 5\}$
Gráfico	

Tabla 2.1. Registros de representación del objeto ecuación de primer grado.

La conversión es una transformación de una representación dada en un registro a una representación dada en otro registro distinto. En el ejemplo anterior la conversión se da entre el registro algebraico al registro gráfico con la representación $y = 3x + 5$ a la gráfica de la función. La conversión entre registros debe ser congruente entre el registro con el que se inicia y el de llegada, y en muchas ocasiones esta congruencia no resulta fácil para los estudiantes (D'Amore, 2004).

La transformación o coordinación dentro de la representación de un mismo registro se denomina tratamiento de una representación. En el ejemplo anterior se realiza un tratamiento en el registro algebraico cuando se realiza el despeje de la variable y de la ecuación $3x - y + 5 = 0$. La siguiente tabla es un ejemplo que se presenta en De Herrero (2004) donde se muestra el tratamiento y la conversión entre los registros verbal, algebraico y gráfico de un sistema de ecuaciones.

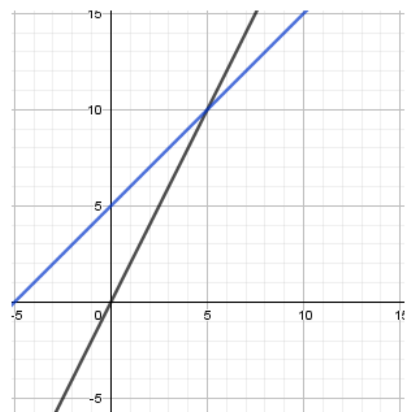
Registro verbal	Registro algebraico	Registro gráfico
El valor de la entrada al cine cuesta el doble del valor de la entrada al parque. Además, el cine cuesta 5 pesos más que la entrada al parque. ¿Cuánto cuestan las entradas al cine y al parque?	$\begin{cases} c = 2p \\ c = p + 5 \end{cases}$	
El valor de la entrada al parque cuesta la mitad del valor de la entrada al cine. Además, la entrada al parque cuesta 5 pesos menos que la entrada al cine. ¿Cuánto cuestan las entradas al cine y al parque?	$\begin{cases} p = \frac{1}{2}c \\ p = c - 5 \end{cases}$	
El valor de la entrada al cine menos el doble del valor de la entrada al parque es cero. Además, la diferencia entre el valor de la entrada al cine y el valor de la entrada al parque es de 5 pesos. ¿Cuánto cuestan las entradas al cine y al parque?	$\begin{cases} c - 2p = 0 \\ c - p = 5 \end{cases}$	

Tabla 2.2. Tratamiento y conversión de un sistema de ecuaciones.

Como se observa en los ejemplos, es indispensable que el estudiante realice la coordinación dentro de un mismo registro y la conversión entre los distintos registros de representación como parte fundamental de la actividad matemática, pues no se puede trabajar con un único registro sin realizar el tratamiento o coordinación dentro del mismo. Es sabido que dentro de la enseñanza de la matemática se considera que los estudiantes realizan esta coordinación de una forma fluida y natural sin tomar importancia al grado de dificultad que este hecho representa (De Herrero, 2004) y es aquí donde el docente debería detenerse para dar más apoyo a los estudiantes, dado que, los registros de representación deben permitir la manipulación y transformación dentro de un mismo registro y/o permitir la transformación total o parcial a otro registro, puesto que si un estudiante logra articular al menos tres registros de representación de un concepto matemático, entonces puede decirse que ha comprendido el concepto matemático (Duval, 2006; Rico, 1999).

Son distintas las investigaciones que se desarrollan en torno a los registros de representación sobre cuestiones como las dificultades de las diferentes representaciones del concepto de función (Hitt, 1998), el de límite (Blázquez y Ortega, 2001). Además, trabajos como el de Dolores, Chi, Canul, Cantú y Pastor (2009) utilizan el lenguaje común de situaciones que muestran variación para establecer la forma gráfica mostrando que, a pesar de utilizar representaciones para un concepto estas no siempre muestran las concepciones idóneas en cuanto al aspecto matemático se refiere.

2.2.1 Registros de representación asociados al concepto de derivada

Con respecto a la derivada, cómo se muestra en el capítulo anterior, distintas investigaciones (e. g. Vrancken, 2011; García, 2011; Vrancken y Engler, 2014; Sánchez-Matamoros, García y Llinares, 2008), reconocen los registros de representación como una herramienta importante para asignar significados a este concepto. Por ejemplo:

- Verbal, en el que se presenta propiamente como parte del lenguaje matemático.
- Numérico, se hace énfasis de sucesiones numéricas, se puede obtener la derivada como una sucesión de cocientes diferenciales en un intervalo, cuando una variable aumenta y la otra se queda fija.
- Algebraico, en él se hace uso de expresiones algebraicas para este concepto, se establece como el límite del cociente diferencial cuando las diferencias en X se aproximan a cero. Entendemos esta representación como analítica.
- Gráfico, donde se apoyan con figuras o imágenes en el plano cartesiano, dentro de este registro se pueden hacer transformaciones, por ejemplo pasar de la gráfica de la función a la gráfica de su derivada y viceversa, como pendiente de la recta tangente a una curva.

En la siguiente tabla mostramos algunos registros semióticos para la derivada con sus respectivas representaciones:

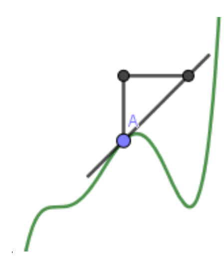
Objeto: Derivada	
Registro semiótico	**Representación semiótica**
Verbal	Razón de cambio instantáneo
	Velocidad instantánea en un punto
	Pendiente de la recta tangente a un punto sobre la curva
Algebraico	$\lim\limits_{t_2 \to t_1} \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1}$
	$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$
	$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$
Geométrico	

Tabla 2.3. Algunos Registros de Representación para el objeto derivada.

La derivada en algunas de sus representaciones no necesariamente permite la relación entre fenómenos que representan cambios. Por ejemplo, en su interpretación geométrica se relaciona al valor numérico de la derivada en un punto con la pendiente de la recta tangente en ese punto, esta representación parece introducir la idea de que la derivada es algo estático cuando esta representa un concepto dinámico. Con respecto a los registros algebraico y numérico prevalece el uso de la memoria pues se evocan técnicas para hallar derivadas donde de igual forma no se beneficia el aspecto variacional que el concepto pone en juego dado que la relación entre la derivada y la variación se trabajan en un apartado de aplicaciones (Dolores, 2006; Testa, 2004).

Capítulo 3: Metodología

3.1 El diseño metodológico

En cuanto a la educación se refiere, los profesores deben involucrarse en un proceso de mejora continua, sin embargo existe una marcada separación entre la enseñanza y la investigación debido a que la segunda parece centrarse más en las teorías sobre educación dejando de lado la práctica educativa (Latorre, 2007). Es por eso que hemos decido abordar un diseño metodológico que ponga de relieve el papel del profesor como investigador en su propia aula, enfatizando la importancia de convertirse en un profesor reflexivo.

Generamos un diseño metodológico de Investigación-Acción basado en algunas características fundamentales mencionadas por Elliott (2005), quien dice que el objetivo primordial de este tipo de investigación "consiste en mejorar la práctica en vez de generar conocimientos" (p. 67). En este sentido, analizamos algunas características de la Investigación-Acción mencionadas por Elliott (2000) para valorar la pertinencia de usar este tipo de diseño en nuestro trabajo:

- "Se relaciona con los problemas prácticos cotidianos experimentados por los profesores" (p. 24). Con relación a esta característica el problema ha sido planteado por la profesora a cargo de la asignatura y surge directamente de una preocupación personal observada en su experiencia profesional en cuanto a la forma tradicional de abordar el concepto de derivada, la cual desemboca en procesos algorítmicos y algebraicos como se mencionó ya en la introducción.
- Su propósito es "profundizar la comprensión del profesor (diagnóstico) de su problema" (p. 24). El desarrollo de este trabajo de investigación me ha permitido reflexionar y analizar distintas perspectivas y propuestas didácticas para el abordaje de este concepto, así como reconocer características profundas del mismo para hacer de él un objeto de enseñanza y aprendizaje.
- "Interpreta *lo que ocurre* desde el punto de vista de quienes actúan e interactúan en la situación problema" (p. 25). La actuación e interacción se llevan a cabo entre estudiantes y estudiantes-profesora y como se mostrará en el capítulo de análisis, se ha realizado una interpretación profunda del fenómeno que nos hemos planteado observar.

- "Considera la situación desde el punto de vista de los participantes, describirá y explicará *lo que sucede* con el mismo lenguaje utilizado por ellos" (p.25). En nuestra investigación las producciones escritas por los estudiantes se analizan y discuten a partir del lenguaje de los mismos estudiantes, el análisis de las evidencias se lleva a cabo contemplando el lenguaje de los estudiantes y a partir del sustento teórico de nuestro trabajo. Esto se abordará de manera profunda en el siguiente capítulo.

Elliott (2005) propone un modelo de Investigación-Acción que nos ha servido de pauta para realizar este trabajo de investigación:

1. Identificación de la idea inicial.
2. Reconocimiento (Descubrimiento y análisis de los hechos).
3. Plan general
    - Paso 1 de la acción.
    - Paso 2 de la acción.
4. Implementación del paso 1.
5. Revisión de la implementación y sus efectos.
6. Reconocimiento (explicación de fallos en la implementación y sus efectos).

En capítulos anteriores hemos descrito lo correspondiente a los puntos 1 y 2, en este capítulo abordaremos la descripción del Plan general de investigación y la forma en la que se implementa la investigación. En los capítulos de análisis y conclusiones mostraremos lo correspondiente al punto 5 y 6 respectivamente.

3.2 El diseño de secuencias didácticas como recurso didáctico

Aunque el diseño de secuencias de trabajo es una práctica habitual del profesor, generalmente, esta se realiza de manera artesanal, basándose en creencias o concepciones sobre el contenido y sobre cómo se enseña y aprende. Frecuentemente, como profesores tomamos en cuenta factores como: nivel de enseñanza en la institución, realidad en el aula, experiencias de alumnos y profesores, etcétera; lo cual nos lleva a pensar que una secuencia didáctica podría funcionar para determinado grupo de estudiantes y para otros no, pues estas se elaboran de acuerdo a característica puntuales que reconoce el profesor.

Sin embargo, existen trabajos de investigación que ofrecen elementos para generar secuencias basadas en fundamentos teóricos como los que proporciona Fernández (1999):

- *Seleccionar lo que hay que saber*, tomando en cuenta el currículo, los intereses de los alumnos, así como sus conocimientos y habilidades. En nuestro caso, por ejemplo, hemos elegido el concepto de derivada como parte fundamental del Cálculo. pero también como un concepto transversal que permite ser introducido desde la variación y el cambio.
- *Proporcionar actividades que faciliten a los estudiantes el conocimiento del objeto en cuestión*. Estas actividades deben desarrollarse considerando la importancia del concepto, la incidencia en el resto del curso y de otros cursos, así como la utilidad social que este tenga. Deben dar respuesta a los objetivos que desde un inicio se establecieron, además de fomentar el interés durante el desarrollo de las mismas. Estas actividades deben separarse en actividades de iniciación, desarrollo y de cierre. La actividad de inicio de nuestra secuencia plantea la construcción de una gráfica y en lo posterior se da el análisis de otra gráfica que el docente propone. La idea de esta actividad es que los estudiantes de alguna forma hagan el análisis con gráficas, que suponemos les permitirá observar cuál es la relación entre el concepto en cuestión con otras asignaturas, además de comprender los fundamentos en los cuales se sustenta el concepto de derivada.
- *Seleccionar los objetivos de acuerdo a lo que se ha propuesto en las actividades y a lo que se analizó dentro de la teoría*. Los objetivos deben ser acordes con el marco teórico bajo el cual se sustenta el trabajo. Para nuestra investigación, en particular nos interesa ver cómo los estudiantes enfrentan una situación de variación como forma de analizar el concepto de derivada, por lo que diseñamos una secuencia que propicie el trabajo con aspectos relativos a la variación.

Para Fernández (1999) la secuencia didáctica surge de la necesidad de organizar la enseñanza y el aprendizaje, y se ve condicionada por las personas que la elaboran de acuerdo a los objetivos que se persigan y el contexto en el cual se aplique. Además, las secuencias didácticas deben reunir los procesos de investigación educativa, ser creativas, permitir el descubrimiento, además del trabajo en equipo.

Por otra parte, Tobón, Pimienta y García (2010) nos dicen que una secuencia es un conjunto de actividades de aprendizaje y evaluación que se diseñan para que el docente tenga la función de guía de los estudiantes en la adquisición de nuevos conocimientos que, posteriormente, pueden ser evaluados para mejorar el aprendizaje y comprensión de un tema o concepto. Además, para el planteamiento de las actividades se deben tener en cuenta tareas y preguntas que representen un reto a los estudiantes, representar contradicciones y contribuir a que ellos hallen soluciones o propongan conjeturas de forma independiente, lo cual obliga a que los estudiantes reflexionen acerca del proceso de aprendizaje que están siguiendo.

Tomando en cuenta estas aportaciones, en este trabajo usaremos el termino secuencia didáctica para referirnos a una herramienta didáctica que sirve para hacer frente a problemas que se observan en el aula, y que se encuentra conformada por una serie de actividades que relacionan a los procesos de enseñanza-aprendizaje; además de que establece vínculos entre la teoría y las situaciones del mundo real.

3.3 El método

La naturaleza de los datos y el enfoque interpretativo bajo el cual hemos decidido abordar la investigación nos conduce a utilizar un enfoque cualitativo de análisis de los datos. Dado que en nuestra investigación nos interesa analizar cómo comprenden los estudiantes situaciones que presentan variaciones como fundamento para el concepto de derivada, hemos decidido utilizar un método de tipo cualitativo, que permita elaborar un informe minucioso de los resultados que se observen en dicha investigación, para que pueda servir de apoyo a otros docentes. Para esto utilizaremos la llamada *teoría fundamentada* que, como su nombre lo indica, genera teorías con fundamento en los datos que se recopilan. Los datos se recogen a través de observaciones y entrevistas utilizando distintas fuentes como documentos, escritura creativa, artículos de periódicos y diarios (Mayan, 2001). Dentro de este método se hace uso del método de comparación constante, lo cual supone hacer un análisis de los datos de forma simultánea para producir conceptos a través de la creación de categorías.

3.3.1 Métodos e instrumentos de recolección de datos

Como mencionamos antes, la investigadora es también profesora de Cálculo en un grupo que cursa el tercer año de bachillerato en la preparatoria Emiliano Zapata BUAP. En este grupo, que se escoge como grupo de informantes, los estudiantes han elegido alguna carrera de

Ciencias exactas o Ingeniería para continuar sus estudios al concluir este nivel educativo. El grupo está integrado por 27 estudiantes con edades entre 16 y 18 años. Dentro de las asignaturas que deben cursar está Cálculo Diferencial e Integral, como asignatura optativa, en el tercer año de bachillerato. Por otro lado, es importante mencionar que las asignaturas de Física: Física general, Física para ingeniería y Temas selectos de Física, todas correspondientes al tercer año, son asignaturas donde el estudiante pudo haber trabajado con el concepto de derivada sin considerar los fundamentos del mismo.

La secuencia se aplicó como parte de los trabajos normales del curso 2016-2017 de Cálculo Diferencial e Integral. La aplicación se llevó a cabo a lo largo de dos semanas repartidas en cuatro sesiones de cien minutos cada una. Para la primera sesión se integraron nueve grupos de trabajo, de forma que en cada grupo estuviera un estudiante con habilidades matemáticas alto, medio y bajo; estos equipos se mantuvieron durante dos sesiones más y en la última sesión el trabajo se realizó de forma individual. En adelante, nos referimos a los equipos como “Equipo #” y a los estudiantes como “E#”.

Dado que nuestra finalidad no solo es generar conocimiento, sino mejorar la práctica educativa a través de herramientas que nos permitan desarrollar las habilidades de los estudiantes en torno a los conceptos que se manejan en el currículum de Cálculo, y que el estudio se utiliza un diseño metodológico Investigación-Acción, el profesor a cargo del grupo, que también es parte del equipo de diseño y análisis de la secuencia, fungió como mediador durante todo el proceso de recolección de datos, esto significa que surgió la necesidad de recurrir al método de observación participante (Elliott, 2005).

El método de observación participante unifica la investigación, el perfeccionamiento de la práctica y el desarrollo de las personas en su ejercicio profesional, además de establecer un puente entre la teoría y la práctica, integra enseñanza y desarrollo del profesor, Y tiene ventajas como que el investigador conoce el contexto (Kawulich, 2005). Entre las desventajas más mencionadas esta los prejuicios y sesgos que el investigador puede dar en torno a la investigación (Kawulich, 2005), sin embargo, esto no representa un obstáculo metodológico en tanto que, para evitar estos sesgos y controlar la subjetividad se recurrió a un método de triangulación de investigadores, en el cual participan en la investigación varios observadores que opinan sobre el análisis para detectar o minimizar los sesgos que introduce la propia persona del investigador (Carrillo y Muñoz-Catalán, 2011):

> "Para Hammersley y Atkinson (1995) este tipo de triangulación se promueve mediante la formación de equipos de investigación, y se vería potenciada por la existencia de observadores que adoptaran roles diferentes en el campo o que fueran muy diferente entre sí" (p. 94).

Elliott (2005) proporciona una relación de técnicas y métodos que ayudan a conseguir pruebas durante la investigación que hemos utilizado para la recolección de datos:

- Análisis de documentos: En nuestra investigación utilizamos cuestionarios que los estudiantes contestaron y que son evidencias escritas generadas en los equipos durante las sesiones de trabajo.
- Grabaciones en audio, video y transcripciones: se utilizó el video para grabar las clases totalmente. Esta grabación estuvo a cargo de dos observadores, que en todo momento manejaron la cámara tratando de grabar momentos interesantes, como intercambio de ideas entre estudiantes o entre estudiantes-profesor, pero no interactuaron con estudiantes ni profesor. De estas grabaciones y videos se realizaron transcripciones.
- Utilización de observadores externos: dos personas realizaron la grabación de video, de manera que se captaran los momentos más significativos del concepto que se estaba trabajando.

3.3.1.1 Secuencia didáctica para introducir el tema de derivada en bachillerato

Como hemos mencionado antes, los trabajos de investigación revisados en el apartado de antecedentes nos sugieren la idea de realizar una secuencia didáctica desde la perspectiva del estudio de situaciones de variación y cambio, que permitan identificar puntos críticos y variaciones en un contexto de movimiento, además de ayudarnos a estructurar la secuencia en cuanto al número de actividades que se propusieron y lo que se solicita en cada una, así como la cantidad de estudiantes a los que se aplicaría. Hemos agregado también el trabajo con distintos registros de representación para la derivada para ayudar al estudiante a manejar el tema desde distintos enfoques.

Considerando que la práctica matemática necesita apoyarse de situaciones que se observen en un contexto cotidiano, propusimos un planteamiento donde se contextualiza una situación físico real, en la que existen diferentes cambios de velocidad. Además, Dolores (2006) menciona que la derivada encuentra su esencia en la variación, pues permite determinar cuánto cambia una variable respecto a otra variable en un instante dado.

Así, la secuencia didáctica que diseñamos consta de tres actividades utilizando la siguiente situación como base para el trabajo general:

> *Juan sale de su casa para ir a estudiar a casa de su compañero. No es necesario tomar el camión, pues su amigo vive en una colonia próxima a la suya. Cuando sale de casa contesta un mensaje avanzando con paso lento los primeros 250 metros, en cuanto envía el mensaje continúa caminando más rápido. Cuando han transcurrido 8 minutos recuerda que olvidó su libreta y regresa a casa corriendo. Llega a casa, toma su libreta y, como ya es tarde, camina a la esquina y espera 3 minutos para tomar un taxi que lo lleva a la casa de su compañero.*

En la secuencia hemos puesto especial atención en la representación gráfica de la derivada dado que en Cálculo las gráficas son utilizadas como herramientas privilegiadas para analizar comportamientos de funciones como concavidades, crecimiento, máximos o mínimos, etcétera (Suarez y Cordero, 2010). Suarez y Cordero (2010) utilizan las gráficas para estudiar cómo varía la posición y las relaciones entre velocidad y aceleración, con lo cual establecen un significado de la variación mediante la modelación-graficación. Flores (2007) menciona que las gráficas funcionan como estrategia para el análisis de funciones en contextos matemáticos y extramatemáticos. Por su parte, Dolores (2009) menciona que las gráficas, además de servir como herramientas didácticas que proporcionan información, son útiles en el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes.

Las actividades que proponemos permiten a los estudiantes analizar diferentes escenarios de variación: ¿qué magnitudes cambian?, ¿cuánto cambian? y ¿cómo cambian?. En estas, se acerca al estudiante a la necesidad de establecer una forma para analizar las variaciones entre las magnitudes, por medio del análisis de razones de cambio donde establecerá la relación entre pendiente de una curva y razón instantánea de cambio.

Tomando en consideración los resultados obtenidos por Vrancken (2011) y Dolores (2009), esperábamos que los estudiantes utilizaran conceptos como el estudio de la variación mediante la razón de cambio, velocidad media, razón de cambio media, relación con la recta secante, velocidad instantánea, razón de cambio instantánea y relación con la recta tangente.

En resumen, se busca que la secuencia propicie que el estudiante pueda inferir qué es lo que ocurre en diferentes intervalos de tiempo y modelar la situación a partir de una gráfica, para posteriormente analizar los intervalos de tiempo propuestos y llegar al análisis puntual y que cada una de estas fases lo lleve a construir una noción general de derivada como aquella que nos indica la razón de cambio instantánea entre dos variables.

Secuencia Didáctica

Actividad 1

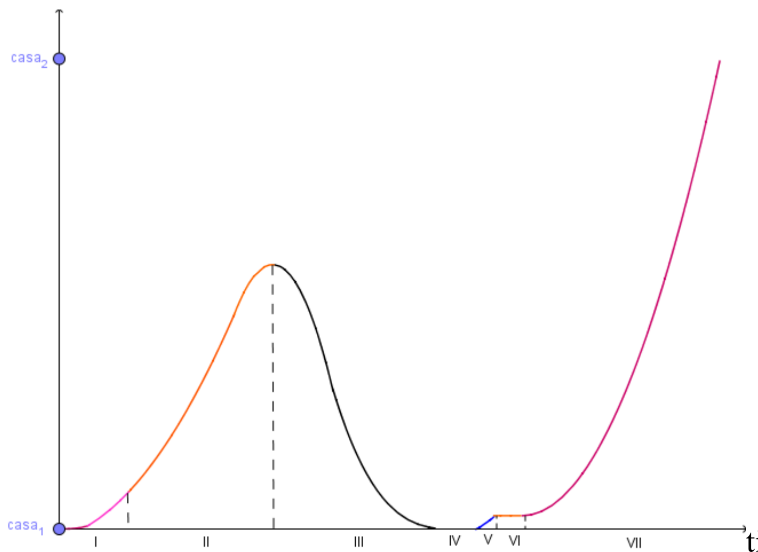
Instrucciones: Traza la gráfica posición – tiempo que representa el movimiento de Juan en la siguiente situación.

Juan sale de su casa para ir a estudiar a casa de su compañero. No es necesario tomar el camión, pues su amigo vive en una colonia próxima a la suya. Cuando sale de casa contesta un mensaje avanzando con paso lento los primeros 250 metros, en cuanto envía el mensaje continúa caminando más rápido. Cuando han transcurrido 8 minutos recuerda que olvidó su libreta y regresa a casa corriendo. Llega a casa, toma su libreta y, como ya es tarde, camina a la esquina y espera 3 minutos para tomar un taxi que lo lleva a la casa de su compañero.

Actividad 2 parte I

Instrucciones: Observa la siguiente gráfica que representa el movimiento de Juan a través de la comparación de posición contra tiempo. Contesta cada una de las preguntas y justifica tus respuestas.

posición



tiempo

¿En qué sección o secciones cambia su posición más rápido?

¿En qué momentos está inmóvil?

¿En esta gráfica es posible observar la velocidad de Juan? Justifica tu respuesta.

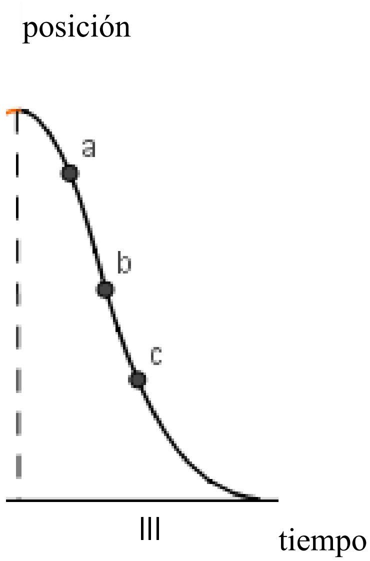
¿Cómo es la velocidad en la sección II con respecto a la de la sección VII? Justifique.

Identifica algún intervalo de tiempo en la sección II donde la velocidad sea mayor que la velocidad en algún intervalo de la sección VII.

Haz lo mismo que en la pregunta anterior, pero donde la velocidad en un intervalo en la sección II sea menor que la velocidad en un intervalo de la sección VII.

Actividad 2 parte II

Instrucciones: Reflexiona sobre el movimiento que llevaba a cabo Juan en intervalos específicos para analizar cómo varía la velocidad en determinados puntos. Justifica cada respuesta.



En la sección III la curva presenta un cambio de concavidad en b, ¿qué significa este cambio de concavidad con respecto al movimiento de Juan?

¿Qué puedes decir acerca de la velocidad en el intervalo de a a b?

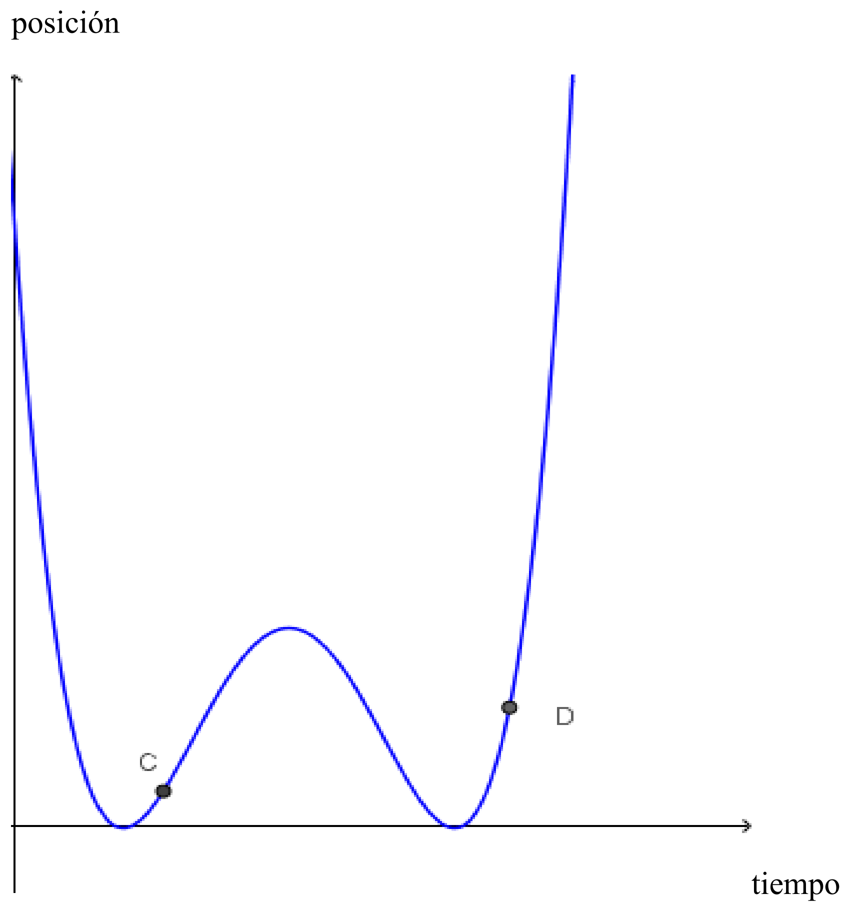
¿Qué puedes decir acerca de la velocidad en el intervalo de *b* a *c*?

¿Cómo es la velocidad antes de *b* con respecto a la velocidad después de *b*?

Si tomas dos intervalos cualesquiera, ¿qué características deben de tener para concluir que en alguno de ellos la velocidad es mayor que en el otro?

Actividad 3

Instrucciones: Dada la gráfica, posición contra tiempo, analiza cómo es la velocidad en el punto C con respecto a la velocidad en el punto D. Justifique su respuesta.



____

____

____

____

____

____

3.3.1.2 Análisis a priori de la secuencia didáctica para introducir el tema de derivada en bachillerato

Actividad 1. Coordinación entre el registro gráfico y verbal

Con la finalidad de tener un margen de acción del investigador con respecto a las posibles respuestas de los estudiantes, se realizó un análisis a priori de la actividad.

En la actividad 1, nuestra intención fue utilizar el enunciado para propiciar que los estudiantes trabajaran la coordinación entre el registro verbal y registro gráfico, además de plasmar en la gráfica cómo se comporta la curva cuando existen variaciones y cambio.

Actividad 1.

Instrucciones: Traza la gráfica posición – tiempo que representa el movimiento de Juan en la siguiente situación:

Juan sale de su casa para ir a estudiar a casa de su compañero. No es necesario tomar el camión, pues su amigo vive en una colonia próxima a la suya. Cuando sale de casa contesta un mensaje avanzando con paso lento los primeros 250 metros, en cuanto envía el mensaje continúa caminando más rápido. Cuando han transcurrido 8 minutos recuerda que olvidó su libreta y regresa a casa corriendo. Llega a casa, toma su libreta y, como ya es tarde, camina a la esquina y espera 3 minutos para tomar un taxi que lo lleva a la casa de su compañero.

La interpretación gráfica que los estudiantes proporcionen permitirá obtener información acerca de posibles interpretaciones que harán del problema, como por ejemplo: si realizaron consideraciones sobre las variables que intervienen, la escala de la gráfica o las distancias recorridas en los diferentes intervalos de tiempo (Flores, 2007). En nuestro caso nos interesa que los estudiantes realicen los trazos considerando cada uno de los intervalos que de manera implícita proporciona el problema. Además se espera que los estudiantes utilicen expresiones como: “si camina despacio el tiempo aumenta”, “si corre la distancia aumenta y el tiempo disminuye”, “debe haber un tiempo en que no avanza”, “la distancia que recorre en distintos intervalos de tiempo es diferente”, “siempre avanza la misma distancia”, “cuando regresa a casa tiene que llegar al punto (0, 0) en el plano cartesiano”, etcétera. De acuerdo a esto establecemos que se realizaran distintas gráficas, que, en algunos casos partirán de los conocimientos adquiridos en su vida cotidiana y en la escuela, y en otros de conocimientos erróneos adquiridos de su entorno (Flores, 2007).

A continuación mostramos algunas de las gráficas que consideramos los estudiantes podrían proponer:

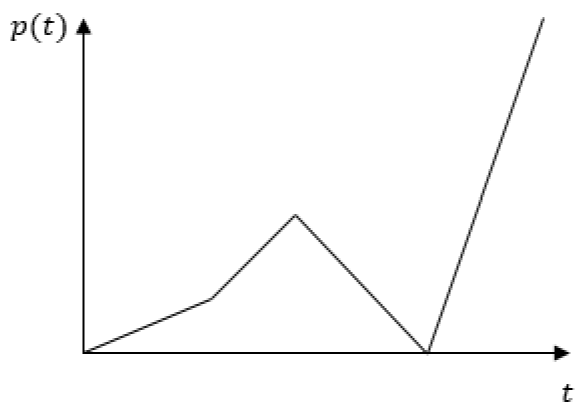


Figura 3.1. Gráfica donde se excluyen algunos momentos.

La Figura 3.1 muestra una gráfica en la que no se consideran todos los momentos de la situación de Juan, pensamos que los estudiantes tendrán dificultad para visualizar todos los momentos, sobre todo donde se permanece en un mismo lugar.

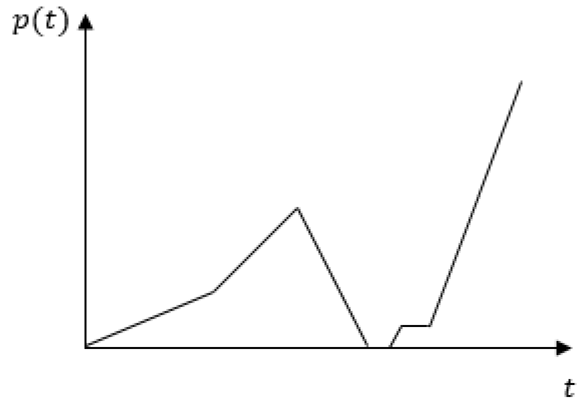


Figura 3.2. Grafica con velocidades constantes.

La Figura 3.2 proporciona una gráfica donde los estudiantes identifican todos los momentos presentados en la situación de Juan y que además suponen velocidades constantes.

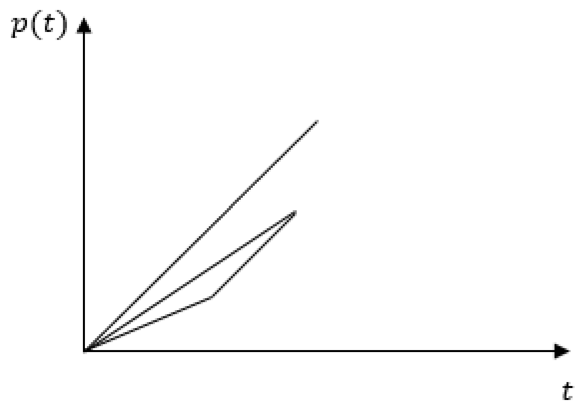


Figura 3.3. El tiempo regresa.

La Figura 3.3 nos muestra una gráfica donde identificaran algunos intervalos presentados en la situación, sin embargo la importancia radica en observar que los estudiantes puedan trazar la gráfica sin considerar que el tiempo no regresa.

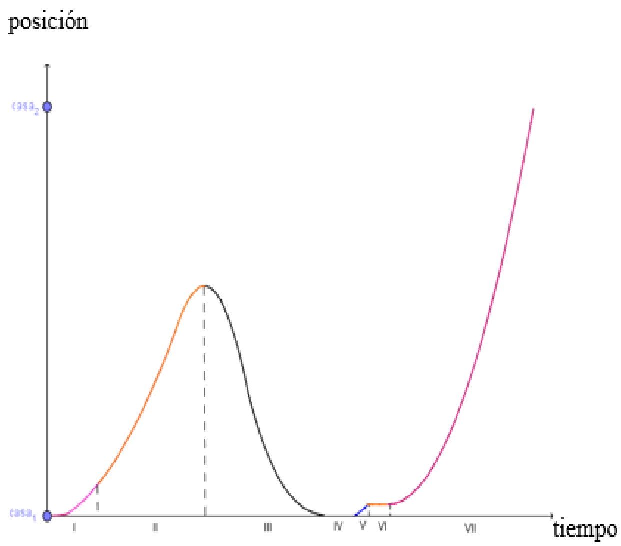
Puede observarse que en ninguna de las gráficas se presenta la ubicación de la casas, de Juan y de su compañero, pues creemos que los estudiantes considerarán de manera implícita las casas como referencia para trazar la gráfica o que quizá no sean tomadas en cuenta. No se descarta la posibilidad de que los estudiantes tracen la gráfica de distancia contra tiempo. Para apoyar a los estudiantes a que realicen la gráfica solicitada se les harán preguntas guía.

Una vez que los estudiantes realicen los trazos de su gráfica, se analizará alguna gráfica y se discutirá de forma grupal, si representa el movimiento planteado en el problema o en caso contrario se harán modificaciones.

Actividad 2. Análisis global y puntual

El objetivo de la actividad 2 es que los estudiantes realicen el análisis de manera global al trabajar por secciones sin tomar en cuenta el tamaño, en cuanto a tiempo, que hay en cada una de ellas. Una vez que hayan trabajado con las secciones se realizará el análisis en intervalos. En el cambio de secciones a intervalos inferimos que el estudiante iba a tomar intervalos del mismo tamaño para realizar dicho análisis, en este caso se puede orientar para que elijan intervalos de diferente tamaño y que expliquen cómo deducen que en un intervalo la velocidad es mayor que la velocidad en otro intervalo. Se espera que los estudiantes establezcan la relación de cambio que hay en la distancia con respecto al cambio que hay en el tiempo, y de esta forma llegar al concepto de velocidad de cambio promedio. *La rapidez o velocidad promedio de cambio se introducen con el propósito de que los estudiantes obtengan un recurso para cuantificar el cambio de una variable respecto de otra en intervalos grandes* (Dolores, 2009). La actividad crea una relación entre el registro verbal (problema planteado) y el registro gráfico debido a que se solicita un reconocimiento global y puntual, pues el estudiante debe excluir los diferentes trazos visuales para identificar los que corresponden a determinado tipo de movimiento. Además de que se realiza la coordinación entre los registros gráfico y analítico cuando se toma la gráfica y se establece que la razón de cambio promedio puede verse como la pendiente de la recta secante en dos puntos dados (Duval, 2006).

<table>
<tr><td colspan="2">Actividad 2. Parte 1. Análisis global
Instrucciones: Observa la siguiente gráfica que representa el movimiento de Juan a través de la comparación de posición contra tiempo. Contesta cada una de las preguntas y justifica tus respuestas.</td></tr>
<tr><td></td><td>1. ¿En qué sección o secciones cambia su posición más rápido?</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>
2. ¿En qué momentos está inmóvil?

3. ¿En esta gráfica es posible observar la velocidad de Juan? Justifica tu respuesta.

4. ¿Cómo es la velocidad en la sección II con respecto a la de la sección VII? Justifique

5. Identifica algún intervalo de tiempo en la sección II donde la velocidad sea mayor que la velocidad en algún intervalo de la sección VII.

6. Haz lo mismo que en la pregunta anterior, pero donde la velocidad en un intervalo en la sección II sea menor que la velocidad en un intervalo de la sección VII.
</td>
</tr>
</table>

De forma particular, en la pregunta 1 únicamente esperamos que los estudiantes contesten aludiendo a lo que ellos ya conocen, es más rápido correr que caminar, y es más rápido transportarse en carro que corriendo o caminado. Por ejemplo que en la sección donde corre y en la sección donde se transporta en taxi, o en la secciones III y VII.

En la pregunta 2 está relacionada con la pregunta 1, pues no solo se obliga al estudiante a utilizar la visualización para dar respuesta a la pregunta, sino a un análisis detallado sobre lo que ocurre en cada sección. En esta pregunta el estudiante debe mencionar cómo es que mientras una cantidad aumenta, la otra se mantiene constante.

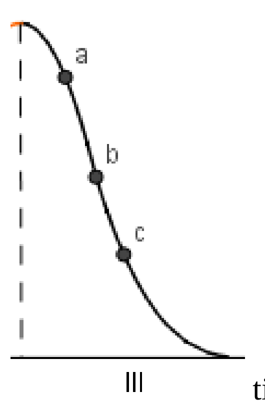
En la pregunta 4 solo esperamos que el estudiante establezca la relación de mayor, menor o igual; sin que proporcione una explicación detallada de su respuesta, o que la justificación sea similar a la que dio en la pregunta 1.

Las preguntas 5 y 6, están orientadas a trabajar de forma particular en las secciones mencionadas en la pregunta 4, esto es con la finalidad, a primera instancia, de que el estudiante descubra que no se puede generalizar que la velocidad sea mayor o menor que la velocidad en otro intervalo, pues al particionar las secciones se puede deducir que en algunos casos la velocidad es mayor en un intervalo de una sección que la velocidad de otro intervalo en otra sección. Se pretende que infiera que su respuesta es válida cuando se trata de velocidad promedio, y que establezca la relación que hay entre la velocidad promedio y la expresión:

$$\frac{cambio\ en\ la\ distancia}{cambio\ en\ el\ tiempo} = \frac{\Delta d}{\Delta t}$$

Si los estudiantes no plantean la expresión $\frac{\Delta d}{\Delta t}$, se guiará a esta mediante la discusión, por ejemplo, si tengo dos intervalos de tiempo diferentes, ¿cómo puedo hacer para comparar las velocidades?

<table>
<tr><td colspan="2">Actividad 2 parte II. Análisis Puntual

Instrucciones: Reflexiona sobre el movimiento que llevaba a cabo Juan en intervalos específicos para analizar cómo varía la velocidad en determinados puntos. Justifica cada respuesta.</td></tr>
<tr><td>Posición


tiempo</td><td>1. En la sección III la curva presenta un cambio de concavidad en b, ¿qué significa este cambio de concavidad con respecto al movimiento de Juan?

2. ¿Qué puedes decir acerca de la velocidad en el intervalo de a a b?

3. ¿Qué puedes decir acerca de la velocidad en el intervalo de b a c?

4. ¿Cómo es la velocidad antes de b con respecto a la velocidad después de b?</td></tr>
</table>

	5. Si tomas dos intervalos cualesquiera, ¿qué características deben de tener para concluir que en alguno de ellos la velocidad es mayor que en el otro?

Para esta actividad lo que se pretende de manera general es que los estudiantes empiecen a pensar que cuando hablamos de velocidad esta puede cambiar alrededor de un punto en particular (punto de inflexión), además de hacer un análisis puntual con respecto a la gráfica.

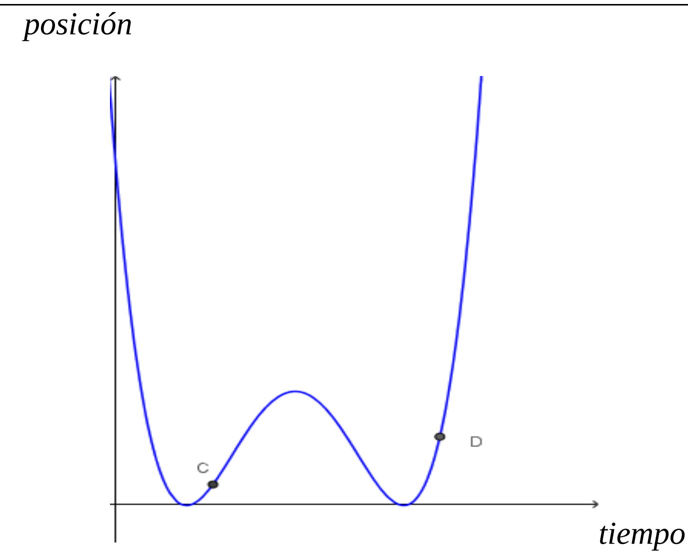
Para la pregunta 1 esperamos que los estudiantes contesten que se observa un cambio de velocidad usando en su argumentación el concepto de velocidad promedio que ya se mencionó en la actividad anterior. También pensamos que los estudiantes podrán argumentar sin la necesidad de recurrir a conocimientos formales de matemática, apoyados desde el planteamiento de la situación que describe el problema de Juan.

Una de las respuestas que esperamos en las preguntas 2 y 3, es que la velocidad va creciendo hasta llegar al punto b en el cuál se obtiene una velocidad mayor y a partir de ese punto la velocidad empieza a decrecer. También esperamos que nos dijeran que primero Juan va muy rápido dado que en ese momento empezó a correr, después cuando se cansa o ve que va llegando a su casa empieza a disminuir su velocidad y por lo tanto, esta, empieza a ser menor.

Para la pregunta 4, esperamos que los estudiantes logren contestar a partir del análisis que se hizo anteriormente. Y en la pregunta 5, pensamos que los estudiantes identificaran que los intervalos de tiempo deben tener la misma longitud o que los intervalos de posición deben ser iguales, es decir, considerar tiempos iguales o posiciones iguales.

Actividad 3. Velocidad en dos instantes

En la actividad tres esperamos que los estudiantes se apoyen de las actividades anteriores para mostrar trazos de rectas secantes que permitan determinar la velocidad en un punto. Este proceso les permitirá ver que la pendiente de la recta tangente a un punto se puede calcular a partir de las pendientes de rectas secantes. También esperamos que los estudiantes relacionen este hecho con el concepto de límite.

Actividad 3. Velocidad en dos instantes Instrucciones**:** Dada la gráfica, posición contra tiempo, analiza cómo es la velocidad en el punto C con respecto a la velocidad en el punto D. Justifique su respuesta.


3.3.2 Métodos e instrumentos de análisis de datos

Para el análisis de la información hemos decidido utilizar el enfoque de la Grounded Theory (GT) o teoría emergente de los datos, cuyos fundamentos están en una recogida y análisis sistemático de datos, a través de una continua interpelación entre el análisis y la recogida de información (Strauss y Corbin, 1994). Así, una parte de la teoría a la que se quiere llegar se genera durante el proceso de investigación, emergiendo directamente de los datos, lo cual es una característica principal en el proceso de desarrollo de la GT, en el que las teorías que se generan van evolucionando a través de una continua interacción entre los procesos de recogida y análisis sistemáticos.

El diseño metodológico que hemos planteado está enfocado en ofrecer información sobre posibles categorías que nos permitan comprender los procesos que llevan a cabo los estudiantes al enfrentarse a este tipo de secuencias didácticas.

Hemos codificado la información de las actividades para realizar el análisis de cada una de ellas. Por ejemplo, para la actividad 1, donde se le proporciona el enunciado de la situación de Juan y se solicita hacer la gráfica posición-tiempo que modela el planteamiento se realizó el análisis de la puesta grupal considerando los siguientes episodios:

Episodio 1: Presentación de la construcción de la gráfica.

Episodio 2: Análisis de la posición de Juan.

Episodio 3: Análisis de las secciones.

Episodio 4: Análisis del momento en el que Juan recuerda que olvidó la libreta y regresa.

Episodio 5: Análisis sobre si la gráfica presenta cambios de velocidad.

De acuerdo con Muñoz-Catalán (2010), las teorías generadas a partir de la GT tienen una riqueza conceptual importante, por la misma densidad de conceptos y relaciones que hay entre estos. Esto se hace a través del uso del método de comparación constante, que se refiere a un procedimiento analítico que tiene como finalidad la búsqueda y establecimiento de semejanzas, diferencias y relaciones entre distintos fragmentos procedentes de los datos, a través de una comparación cuidadosa e intensiva de los resultados que se generan durante el análisis.

A partir de esto realizamos categorías con las evidencias producidas durante las sesiones. Para la creación de estas categorías se consideró la interpretación de la teoría en la cual basamos nuestra investigación. Iniciamos por revisar nuestro material para identificar elementos que nos dieran evidencia de cómo introducir el concepto de derivada a partir de pensamiento y lenguaje variacional y los distintos registros que se trabajaron. De la revisión en grabaciones, audios y escritos de los estudiantes, se analizó la forma en la que un concepto relacionado a otro puede dar surgimiento al concepto de nuestro estudio. El nombre que dimos a nuestras categorías surge de los conceptos que se descubrieron en los datos (Strauss, Corbin y Zimmerman, 2002).

Capítulo 4: Análisis de evidencias

A continuación presentamos los resultados del análisis de la información recolectada al respecto de la secuencia didáctica elaborada para la introducción del tema de derivada.

Como hemos mencionado en el capítulo anterior, para el análisis de las actividades se retomaron las producciones escritas de los estudiantes, además de hacer una transcripción de los videos y los audios que se generaron durante cada sesión en las actividades presentadas en forma grupal.

El análisis se ha organizado de manera que presentaremos los resultados obtenidos primero para cada una de las actividades con sus respectivas tareas, para luego presentar un análisis global de la actividad, basándonos en las categorías generadas en los análisis locales.

4.1 Análisis de la actividad 1

Como ya se ha descrito antes, en esta actividad se proporciona un texto que describe el movimiento de Juan, un chico que sale de su casa para ir a estudiar a casa de su compañero y nuestra intención fue utilizar el enunciado para propiciar el tránsito entre el registro gráfico y el registro verbal, además de hacer uso de la gráfica como un medio para desarrollar el pensamiento y lenguaje variacional (Dolores 2006).

4.1.1 Identificación de momentos clave

En la situación descrita se identifican siete momentos clave de acuerdo con la posición de Juan.

- Sale de su casa y camina a paso lento porque envía el mensaje.
- Avanza más rápido.
- Recuerda que olvidó su libreta y regresa a casa corriendo.
- Se mantiene en su casa para buscar la libreta.
- Camina a la esquina.
- Espera el taxi.
- Toma el taxi y se va a casa de su amigo.

De los nueve equipos, dos identificaron todos estos momentos y los seis equipos restantes coincidieron en omitir el tiempo que pasa cuando Juan regresa a casa en busca de su libreta.

Un equipo trazó una gráfica de distancia-tiempo. La gráfica que se muestra en la Figura 4.1, es un ejemplo del tipo de representación que presentaron cinco equipos, y cuyas secciones no corresponden explícitamente a la situación planteada. Por ejemplo, para la Figura 4.1 el Equipo 4 menciona:

> [Equipo 4 –Actividad 1- presentación grupal Episodio 1]: En un tiempo t_1 recorre la distancia de 250 m y llega a su posición x_1. Posteriormente, camina 8min. El cual lo tomamos como un t_2 y llega a una posición x_2. Después, regresa a su casa, lo cual lo tomamos como la posición cero y lo hace en un t_3. Luego, camina a la esquina a una posición x_4 y lo hace en un t_4. Después, espera al taxi por 3min lo cual tomamos como t_5. Por último, hicimos la suposición de que tomó el taxi y en t_6 llegó a la casa de su amigo la cual estaba en una posición x_5.

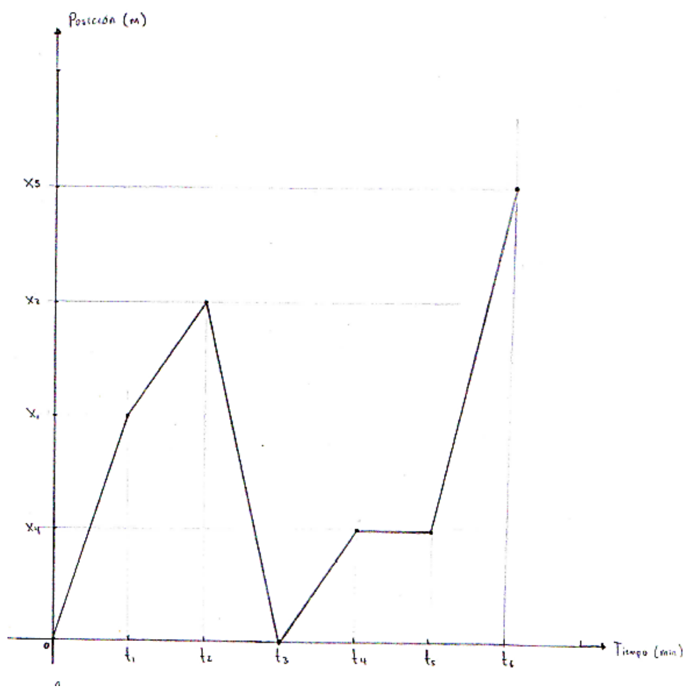


Figura 4.1. Gráfica que muestra algunas posiciones en el movimiento de Juan. EQUIPO 4. Episodio 2.

Se observa en la gráfica y la explicación escrita, que no se contempla el momento en el que Juan llega a casa y permanece un momento mientras toma la libreta.

4.1.2 Puntos de referencia

Otro de los aspectos en que hemos puesto atención es la utilización o no de puntos de referencia, por ejemplo, en el caso de esta primera actividad, analizamos si se toma en cuenta dónde colocar las casas de Juan y de su compañero, dado que, si en algunos equipos se considera que la casa de Juan está en el origen, es posible que se presenten dificultades al pensar que la gráfica debe regresar al origen y no tener en cuenta qué es lo que pasa con el tiempo en ese caso. De los nueve equipos, sólo el Equipo 5 establece la posición en la que se encuentran las casas, el Equipo 8 coloca la casa de Juan en el origen y la de su compañero en la parte final de la gráfica, en cinco equipos colocan la casa de Juan en el origen y dos equipos no mencionan nada sobre la posición de las casas. Aun cuando en la mayoría de los equipos no establecen las casas explícitamente, como puntos de referencia, estas fueron utilizadas porque se notó en la construcción de las gráficas. En la discusión grupal, cuando se les preguntó en dónde está la casa de Juan y en dónde colocarían la casa de su compañero, el estudiante 22 del Equipo 8 nos dice:

E22: Fue un problema en el que entramos, porque decimos que está aquí [Se refiere a la gráfica de la Figura 4.2 señalando el punto A], pero de alguna forma no puede estar específicamente acá [vuelve a señalar A], porque cuando regresa tenemos que regresar ahí y no podríamos regresar específicamente en este punto [continúa señalando el punto A]. Ahí no supimos bien cómo explicarlo, así que a la conclusión que llegamos es que tendría que ser todo este eje [Señalando el eje X], aunque no podemos explicar por qué, tal vez, la casa va a estar fija, pero sin depender del tiempo ni la distancia.

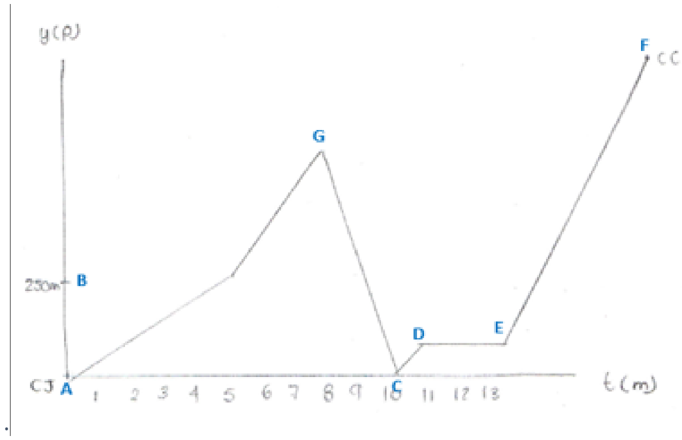


Figura 4.2. Ubicación de la casa de Juan y de la casa de su compañero. EQUIPO 8. Episodio 3.

Durante la discusión grupal, se observa como hay problema para establecer la posición de las casas como puntos de referencia, continuando con la explicación que hace el estudiante E22:

DOCENTE: Y sus demás compañeros, ¿qué opinan?

E10: Bueno, es que de lo que decía de la casa de Juan, yo creo que no hay conflicto de que digas que la casa de Juan es el origen porque entonces estarías regresando a la posición cero en un tiempo cero, pero por ejemplo, en un determinado tiempo puedes regresar a la posición donde iniciaste, por ejemplo en t=3, las coordenadas son (3, 0) y eso significa que pasados tres minutos el regresa a esa posición no que regresa al origen. Nosotros lo tomamos así y no tuvimos ningún conflicto.

DOCENTE: ¿Cuando regresamos a la casa de Juan tendríamos que regresar al eje X o tendríamos que regresar, como decía E22 al principio, al origen?

E13: Solo al eje X

E5: Porque no se puede regresar el tiempo

Después de continuar con la discusión, se estableció que la casa de Juan está sobre todo el eje X y de forma análoga se ubicó a la casa de su compañero a una distancia de la casa de Juan, la cual se representó con una línea horizontal.

Otros puntos que utilizaron como referencia son los 250m y los 8min que se mencionan en el problema.

4.1.3 Representación gráfica de movimientos constantes y no constantes

Otro de los aspectos interesantes a resaltar en la actividad es la representación gráfica de los movimientos de Juan que se muestran en las gráficas, donde se presentan con segmentos rectos considerando que los movimientos son constantes. En siete de los nueve equipos, se trazaron este tipo de gráficas, aunque estas se diferencian porque en algunas no se toma en cuenta cómo es la velocidad en cada uno de los momentos:

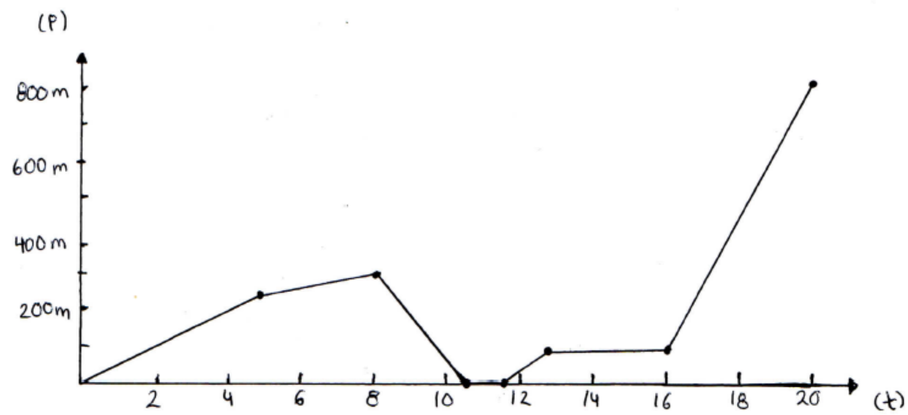


Figura 4.3. Gráfica con movimientos constantes EQUIPO 1. Episodio 5.

En el Equipo 2 se muestran evidencias de que, además de establecer la relación entre la posición y el tiempo, se establece una relación entre la distancia y el tiempo:

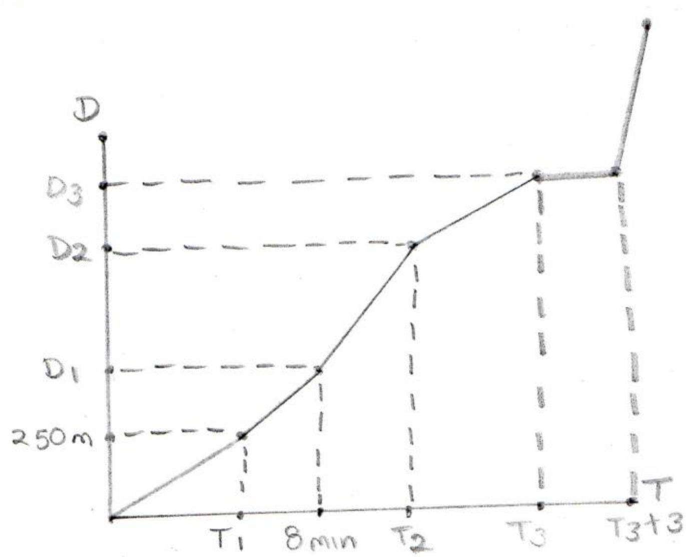


Figura 4.4. Gráfica distancia contra tiempo EQUIPO 2. Episodio 1.

DOCENTE: En esta gráfica, ¿qué estoy representando? [Señalando la gráfica distancia contra tiempo, Figura 4.4]

E5: La distancia que recorre.

DOCENTE: ¿Por qué la gráfica tiene esa forma?

E5: Porque la distancia que recorre todo el tiempo va aumentando, crece.

Sólo en el equipo 5 se consideró que las variaciones no son constantes y utilizaron una gráfica que presenta curvas (Figura 4.5). Además de proporcionar la gráfica también propusieron la función $\left[\frac{(x-1.7)^3}{5}+1\right]$ cuando $x>0$, para modelar la parte donde Juan camina enviando el mensaje y cuando termina de escribirlo. El momento en el que Juan corre, mencionan que se modela con una función lineal con pendiente negativa, y en el momento que espera el taxi proponen a la función constante $y=1$. Por último, el momento en que se va en taxi mencionan que se modela con una función cuadrática que abre hacia arriba.

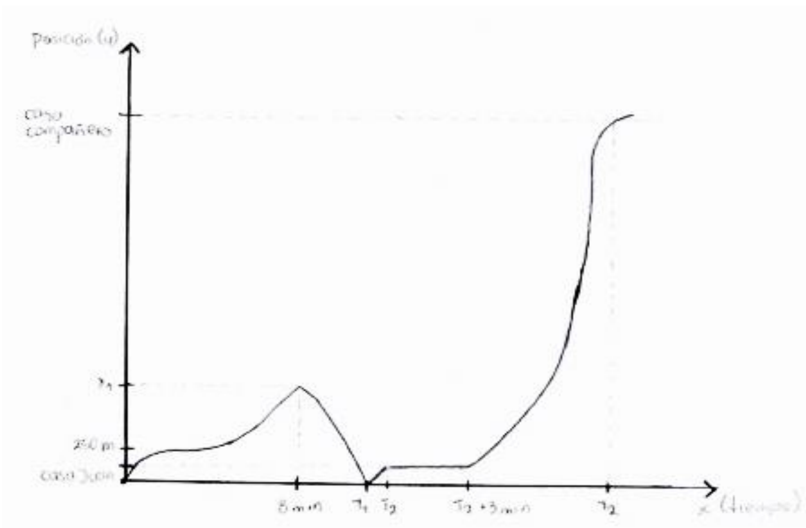


Figura 4.5. Gráfica posición tiempo de variaciones no constantes EQUIPO 5. Episodio 5.

En general, podemos decir que en la actividad 1, los estudiantes logran establecer relaciones entre las variables de la situación planteada para plasmarlos en el plano cartesiano, utilizando además, expresiones que están relacionadas con la idea de variación y cambio. En todos los grupos de trabajo se mencionó a la función de primer grado como una herramienta básica para modelar cambios constantes, además de reconocer a la pendiente de la recta como el elemento que nos modela dichos cambios. A pesar de que en los diferentes grupos de trabajo se omitió al menos una característica planteada en el enunciado, consideramos que se logró el tránsito entre el registro gráfico, el registro verbal y el registro algebraico.

4.2 Análisis de la actividad 2

4.2.1 Actividad 2. Parte 1. Análisis global

Para la actividad 2 se les proporciona la gráfica de la Figura 4.6 y se realiza el análisis en torno a secciones específicas que se presentan en la gráfica.

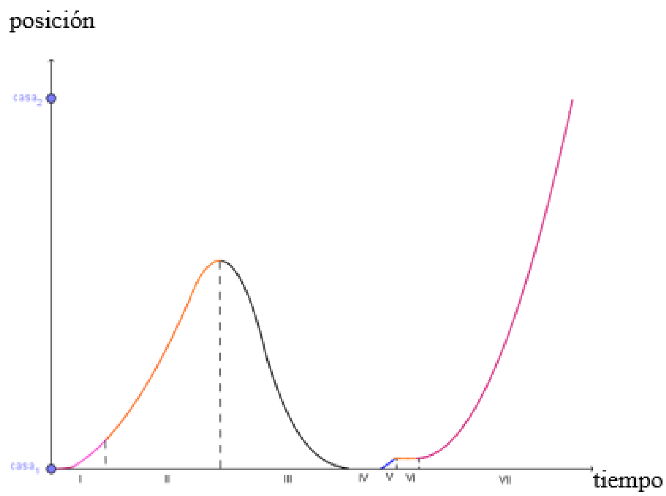


Figura 4.6. Gráfica que modela el movimiento de Juan.

4.2.1.1 Primera pregunta ¿En qué sección o secciones cambia su posición más rápido?

La mayoría de los equipos respondieron que en las secciones II, III o VII, es donde se aprecia un cambio más rápido de posición, pues observan cómo son las curvas que componen a la gráfica en las distintas secciones que analizaron. Por ejemplo el estudiante E22 del Equipo 8 nos menciona:

E22: II, III y VII porque recorre una mayor distancia en un intervalo de tiempo menor en comparación a las otras secciones.

En otros casos hacen uso de los conocimientos que adquirieron en las situaciones de su vida cotidiana:

Equipo 3: En la sección VII porque es el momento en el que al subirse al taxi se mueve más rápido, por lo tanto la inclinación de la curva es mayor.

En otros equipos el argumento surgió a partir de la comparación entre el intervalo de distancia que recorrió en un determinado tiempo:

Equipo 4: En la sección número III, porque el problema nos especifica que al principio Juan camina 250m, después camina más rápido y recorre otra distancia hasta cierto punto, posteriormente de ese mismo punto regresa corriendo a su casa, es decir, que en menos tiempo recorrió la misma distancia ,por lo que su cambio de posición fue más rápido.

Algunos equipos también mencionaron la relación que se da entre los intervalos de distancia sobre tiempo, además verificaron con conocimiento que no es adquirido en la escuela.

Equipo 1: III y VII ya que en ambos se recorre más distancia en el mismo tiempo. Además, en el problema es mencionado que en tales periodos va corriendo y viaja en auto, respectivamente.

Por ejemplo, durante la discusión grupal el estudiante E13 del Equipo 5 argumenta:

E13: Bueno… nosotros en base a la lectura sabemos que en la sección siete al tomar un vehículo, sabemos que la velocidad de un vehículo es mayor; bueno, hacemos una suposición en base a la lectura y en la sección tres de igual manera, recorre la misma distancia de la sección uno y dos sumadas; sin embargo en lugar de hacerlo caminando o a un paso más acelerado, lo hace corriendo. La segunda suposición que hacemos, solamente para comprobar si esto es cierto, solamente vemos la relación que hay entre el cambio de posición y el tiempo, vemos que tanto cambio hay de posición en menor tiempo, porque sabemos que si el tiempo es menor lo hace de una manera más acelerada.

4.2.1.2 Segunda pregunta ¿En qué momentos está inmóvil?[1]

En este caso, todos los equipos contestaron que en la sección IV y VI está inmóvil, puesto que son secciones donde parece haber rectas horizontales.

El argumento que dan en la mayoría los equipos es que "su posición se mantiene estable a pesar de que el tiempo transcurra", es decir, no se mueve de lugar:

Equipo 7: [se mantiene inmóvil] en el punto que va [de] la sección II [a la] III que se detiene unos segundos para dar la vuelta.

En este mismo equipo, el estudiante E19 menciona "Para que haya un cambio de velocidad debe haber un crecimiento o decrecimiento de la gráfica" y en la curva que se muestra en la Figura 4.7, en el punto E, se observa que no se avanza ni se retrocede.

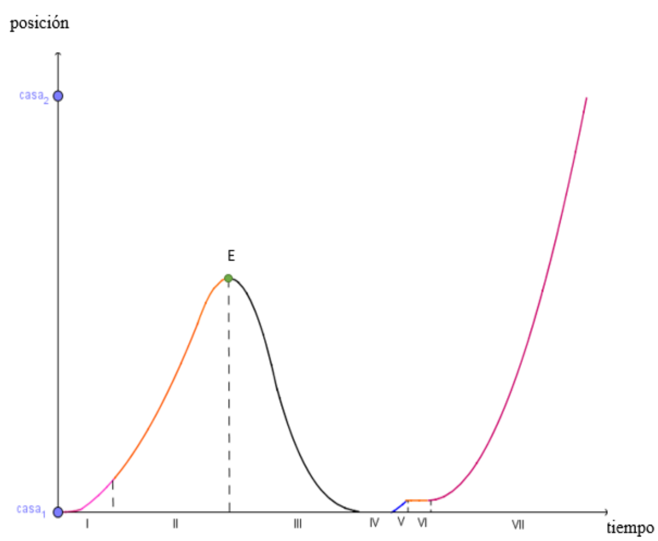


Figura 4.7. Punto donde permanece inmóvil.

Después de recordar el contexto del problema, los equipos observan que en ese punto Juan recuerda que olvidó su libreta, se establece entonces, que en un instante de tiempo Juan también permanece inmóvil.

[1] Para esta pregunta, se tuvo que hacer hincapié en que el termino inmovilidad no indica que Juan no se está moviendo en ese momento, sino que no hay un cambio de posición.

4.2.1.3 Tercera pregunta ¿En esta gráfica es posible observar la velocidad de Juan? Justifica tu respuesta

Dos equipos contestaron que no es posible observar la velocidad de Juan en la gráfica considerando que no se tienen datos suficientes para calcularla. Esta respuesta nos permite saber que los equipos confundieron el termino calcular con observar.

Equipo 3: "No es posible, ya que ninguna sección proporciona datos útiles para calcular su velocidad, sin embargo, es posible compararla".

El estudiante E8 de este equipo menciona:

E8: Pensamos que no es posible porque en unas partes te da el tiempo que transcurre y en otras la distancia, entonces como en todos esos intervalos iba variando su velocidad por eso nos iba a dar un aproximado de qué tan rápido se movía, pero no podemos decir cuál era su velocidad.

Esta respuesta se relaciona con las respuestas de otros equipos en los que mencionan que solamente se puede decir si es mayor o menor. Por ejemplo:

E22: Si se puede visualizar la velocidad pero no se puede calcular porque no tenemos los datos. Pero de forma visual si se puede analizar.

4.2.1.4 Cuarta pregunta ¿Cómo es la velocidad en la sección II con respecto a la de la sección VII? Justifique

La respuesta que dieron todos los equipos es que en la sección II la velocidad es menor con respecto a la velocidad de la sección VII. Aquí nuevamente se observa como los estudiantes mezclan argumentos matemáticos y no matemáticos para sustentar sus respuestas, por ejemplo un estudiante del Equipo 2 comenta:

E5: Porque en la sección dos va caminado, mientras que, en la sección siete va en taxi, además, la curva tiene un ángulo de inclinación más grande.

Cuando se pregunta por "ángulo de inclinación" el estudiante E10, de este mismo equipo, contesta que se refiere a la pendiente de la recta que pasa por los dos puntos.

Equipo 3: “Entre más vertical sea la curva la razón de cambio de la posición con respecto al tiempo es mayor. Como en la sección II la curva está más inclinada podemos decir que su razón de cambio es más pequeña. Tomamos razón de cambio como sinónimo de velocidad”.

Esta afirmación muestra evidencia de que se establece una relación entre la velocidad y la idea de variación.

Consideramos que esta pregunta proporciona evidencias de que los equipos tienen cierto conocimiento acerca de que la pendiente de una recta también nos proporciona información sobre la velocidad.

4.2.1.5 Quinta pregunta. Identifica algún intervalo de tiempo en la sección II donde la velocidad sea mayor que la velocidad en algún intervalo de la sección VII

Todos los equipos contestaron que al inicio de la sección II se identifica un intervalo de tiempo donde la velocidad es mayor que la velocidad al principio de la sección VII:

Equipo 2: “la sección inicial del intervalo VII entre los puntos (C, D) [En referencia a la Figura 4.8] tiene una velocidad menor al intervalo (A, B), pues la pendiente de la recta $\overline{AB}$ es mayor a la pendiente de la recta $\overline{CD}$.

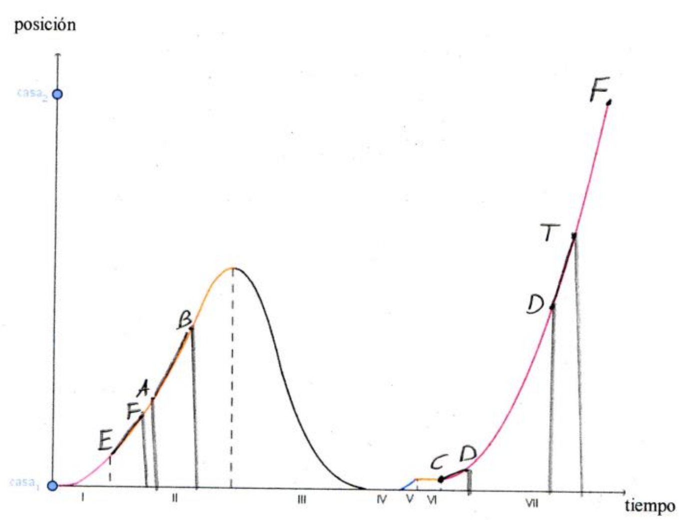


Figura 4.8. Comparación de velocidades en dos intervalos.

En el Equipo 7 y Equipo 9 se agrega la observación de que al principio de las secciones II y VII se están tomando intervalos de tiempo iguales, además de que la posición recorrida en la sección II fue mayor que la sección VII, aportando una característica específica de los intervalos.

El estudiante E22 del Equipo 9 agrega:

E22: Tomamos el final de cada sección y medimos un centímetro hacia la izquierda. Este es el intervalo de tiempo [traza los intervalos A y A´ en cada sección como se muestra en la Figura 4.9] es el mismo porque los dos son de un centímetro. Después lo que hicimos fue medir la posición, [traza la posición en cada intervalo con los intervalos B y B´ en figura 4.9] y se puede ver que se recorre más distancia [señala la distancia recorrida en el intervalo de la sección VII] en el mismo tiempo que aquí [señala la distancia recorrida en el intervalo de la sección II] o simplemente se traza la pendiente [traza la recta secante en cada intervalo que pasa por el punto inicial y final de cada intervalo] y te fijas en el ángulo, el ángulo se puede ver que aquí es mayor [en la Figura 4.9 señala el ángulo de inclinación, α, de la secante de la sección VII] que el ángulo de aquí [en la Figura 4.9 señala el ángulo de inclinación, θ, de la secante de la sección II].

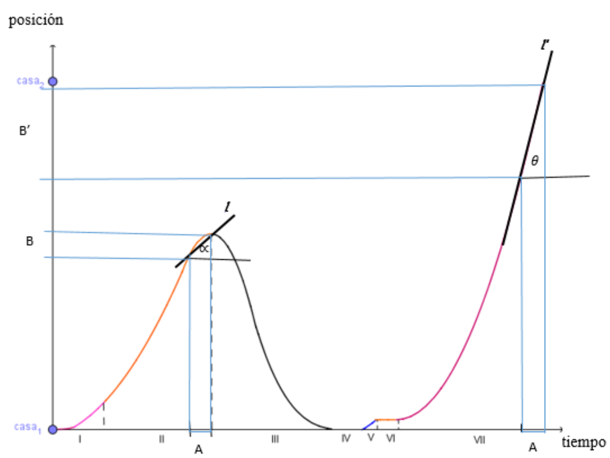


Figura 4.9. Comparación de velocidades con intervalos iguales EQUIPO 9.

4.2.1.6 Sexta pregunta Haz lo mismo que en la pregunta anterior, pero donde la velocidad en un intervalo en la sección II sea menor que la velocidad en un intervalo de la sección VII

Esta pregunta se contestó cuando se discutió la pregunta anterior. La Figura 4.8, muestra como el Equipo 2 identifica un intervalo de la sección II donde la velocidad es menor que la velocidad en un intervalo de la sección VII, argumentando que "la recta $\overline{EF}$ tiene pendiente menor a $\overline{DT}$, luego, la velocidad promedio en el intervalo (E, F) es menor a la del intervalo (D, T)". En los equipos restantes eligieron los intervalos casi al final de ambas secciones.

Durante la puesta en común para estas preguntas, se retomó la respuesta de la pregunta 4, dado que no en todo el intervalo de la sección II se cumple que la velocidad es menor con respecto a la velocidad de la sección VII. Cuando se preguntó si existía alguna contradicción entre la respuesta dada a la pregunta cuatro y las preguntas cinco y seis, los estudiantes comentaron:

E13: "Es posible, cuando hablamos de la velocidad entre dos tiempos distintos, solo se hace un promedio de la velocidad que hubo en un intervalo. Podemos decir que hablamos de una velocidad promedio".

En otra argumentación se incluyó a la pendiente de la recta secante:

E10: Se puede expresar como un Δx [cambio en la posición] sobre un Δt [cambio en el tiempo]. Que también es igual a la velocidad media y a la pendiente de la recta secante, porque la pendiente es el cambio en Y, que en este caso es el cambio en la posición, sobre el cambio en X, que por ahora es el cambio en el tiempo. Para nuestro problema nos va a quedar, posición final menos posición inicial todo entre tiempo final menos tiempo inicial igual a la velocidad promedio. [Escribe en el pizarrón la relación $\frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} = \overline{v}$]

Con respecto al análisis puntual de la gráfica, se propone a los estudiantes una segunda parte de la Actividad 2.

4.2.2 Actividad 2. Parte II. Análisis Puntual

Hay que recordar que para esta actividad se les proporcionó la gráfica de la Figura 4.10.

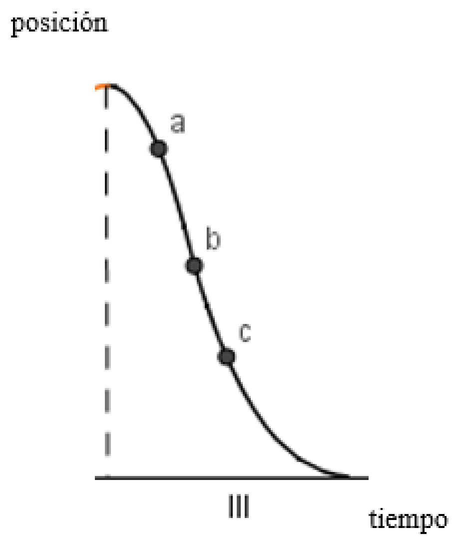


Figura 4.10. Gráfica para el análisis puntual.

4.2.2.1 Pregunta 1. En la sección III la curva presenta un cambio de concavidad en b, ¿qué significa este cambio de concavidad con respecto al movimiento de Juan?

En esta pregunta la mayoría de los equipos determinó que había un cambio de velocidad alrededor del punto b. Aquí ya mencionaron conceptos como velocidad promedio, aceleración, cambio de decrementos, este hecho nos da indicios sobre los conceptos que los estudiantes conocen porque se han visto en otras asignaturas. Por ejemplo, en el Equipo 6 mencionan "La V (velocidad) empieza a decrecer, ya que si trazamos una recta secante $\overline{ab}$ y $\overline{bc}$, la $m_{sec}\overline{ab} > m_{sec}\overline{bc}$". En la puesta en común un estudiante E9 del Equipo 3 comenta:

E9: "Como nos dice que hay un cambio de concavidad en el punto b, entonces nos pregunta qué representa ese punto, lo que nosotros hicimos fue un cambio de decrementos entre dos secciones. Las secciones que marcamos fueron entre el punto más alto A y b [En la Figura 4.11 traza la recta que une el punto A con b] y de b al punto A' [En la Figura 4.11 traza la recta que une el punto b al A']. Esto sería lo que es la velocidad promedio, esto tiene cierta pendiente, cierta velocidad promedio [denota a las rectas como V_1 y V_2] y significa que esta velocidad promedio es diferente a la de acá, entonces este punto [En la Figura 4.11 señala el punto b] nada más decimos que es un punto donde cambia la velocidad".

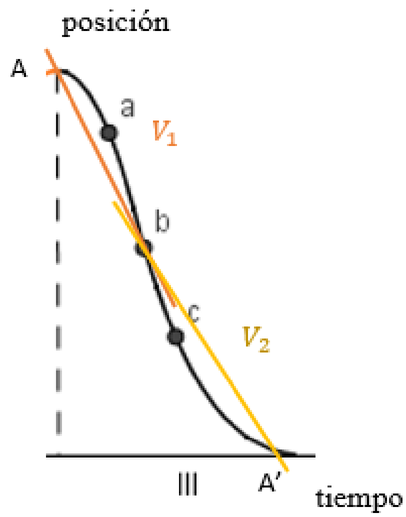


Figura 4.11. Cambio de velocidad alrededor de b

4.2.2.2 Pregunta 2. ¿Qué puedes decir acerca de la velocidad en el intervalo de a a b?

En dos equipos se realizó la comparación entre la velocidad de los intervalos de a a b y de b a c. Por ejemplo, el Equipo 4 menciona "es mayor a la del intervalo de b a c porque de a a b recorre una mayor distancia en el mismo tiempo que en b a c; recorre menos distancia en menos tiempo".

En otras respuestas que dieron, en los siete equipos restantes, inferimos que se analizó la velocidad dentro del intervalo solicitado sin utilizar rectas secantes alrededor del punto. Por ejemplo la respuesta del Equipo 6: "Es el intervalo con mayor V [velocidad] en la sección III. En el punto a hay una V_i (velocidad inicial) llamada n y en el punto b hay una V_f (velocidad final) llamada m tal que $n<m$. Cada vez que el intervalo se hace más pequeño, el ángulo de elevación de la pendiente es mayor". Aunque hablan de velocidad inicial y final, en la Figura 4.12 se observa que no hicieron el trazo de rectas secantes.

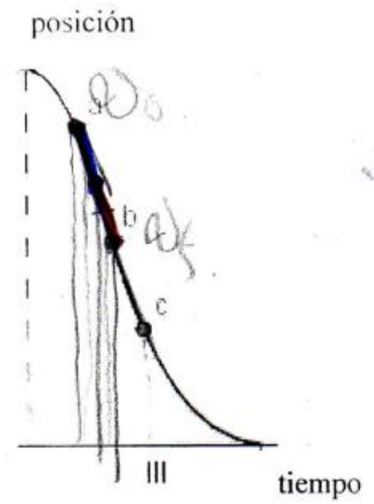


Figura 4.12. Análisis de la velocidad de *a* a *b*.

Durante la discusión grupal se llegó a la conclusión de que si se divide el intervalo que tiene como velocidad inicial el punto *a* y como velocidad final al punto *b*, en intervalos más pequeños y se hace la comparación; entonces se puede observar cómo la velocidad varía dentro del mismo intervalo, cambiando de menor a mayor hasta alcanzar una velocidad máxima que está dada en el punto *b*.

4.2.2.3 Pregunta 3. ¿Qué puedes decir acerca de la velocidad en el intervalo de b a c?

Para esta pregunta, al igual que en la pregunta dos, algunos equipos mostraron dificultad para contestar, por ejemplo el Equipo 4 hace la comparación de velocidades de *a* a *b* y de *b* a *c*: “la velocidad va disminuyendo y es menor que en el intervalo de *a* a *b*, puesto que en el intervalo de *b* a *c* recorre menos distancia en el mismo tiempo”.

En los equipos donde se hizo la comparación de velocidades en los intervalos de *a* a *b* y de *b* a *c* para la pregunta dos, no contestaron esta pregunta.

En la discusión grupal, después de haber analizado la pregunta 2, los estudiantes pudieron deducir que la velocidad en el intervalo también va cambiando, pero ahora el cambio se hace de mayor a menor.

4.2.2.4 Pregunta 4. ¿Cómo es la velocidad antes de b con respecto a la velocidad después de b?

La pregunta uno y la dificultad que presentaron en la pregunta dos y tres arrojo la respuesta a la pregunta cuatro. En el Equipo 2 se hace alusión a lo que conocen del problema:

Equipo 2: “Como en el problema nos dice que en esta sección Juan iba corriendo, entonces nosotros pensamos que de a a b la velocidad es mayor porque aquí empieza a correr [señala la parte de la gráfica donde está a, b de la Figura 4.10] que de b a c [señala la parte de la gráfica donde esta b, c de la Figura 4.10]”.

El Equipo 5 se apoya de lo que conocen con respecto a la situación del movimiento de Juan. Por ejemplo el estudiante E13 argumenta:

E13: Cabe recalcar que en lo que mencionó mi compañero también utilizamos el contexto de la lectura y nos apoyamos mucho de la primera respuesta en donde vemos la gráfica, al inicio de la gráfica [se apoya en la gráfica de la Figura 4.10] se puede considerar como en reposo y vemos cómo va acelerando de cierta manera hasta llegar a una aceleración máxima que en la gráfica seria el punto b y al finalizar vemos que va desacelerando hasta de nuevo quedar en un estado de reposo. Al analizar también lo que sería el problema vemos que del punto a al punto b está llevando cierta aceleración, está tratando de ir más rápido, por eso podemos inferir que va más rápido que de b a c.

4.2.2.5 Pregunta 5. Si tomas dos intervalos cualesquiera, ¿qué características deben de tener para concluir que en alguno de ellos la velocidad es mayor que en el otro?

En la pregunta 5 de la primera parte de esta actividad algunos equipos ya habían dicho que para poder hacer la comparación de velocidades en dos intervalos, estos deberían tener la misma longitud. En la discusión de esta pregunta en particular, dos equipos mencionaron la comparación entre las pendientes de las rectas secantes. Por ejemplo el Equipo 6, hace la comparación entre las pendientes de rectas secantes: “se trazan rectas secantes en cada intervalo. $m_{sec} = \bar{v}$. La recta que tenga mayor ángulo de elevación es la recta que tiene mayor $\bar{v}$”. Además, la conclusión a la que se llegó tras la discusión es que no es un único requisito, también es necesario que los intervalos se tomen en un mismo intervalo de tiempo o de distancia, es decir, tengan la misma longitud.

De manera general, la gráfica permitió analizar el comportamiento de la situación que describe cambios que varían en cuanto al tiempo, además de establecer análisis puntuales y globales con respecto al movimiento en diferentes secciones al contrastar con el realismo de la situación (Buendía & Carrasco, 2009). La división de la gráfica en diferentes intervalos nos apoyó para analizar las predicciones que realizan los estudiantes en cuanto a las razones de cambio en un instante dado. Analizar si la velocidad crece o decrece y cómo es su comportamiento alrededor de un punto de inflexión fue otra parte de la actividad que nos permitió localizar aspectos concretos para los fundamentos de la derivada.

Podemos decir que al realizar el análisis puntual y global de la gráfica, se observa cómo la velocidad varía, incluso dentro de un mismo momento del movimiento de Juan. Además de relacionar los conceptos de Física con conceptos geométricos. Esto modifico las ideas que los estudiantes utilizaron para trazar la gráfica de la Actividad 1, pues como se mostró la mayoría de los equipos supone velocidades constantes en cada momento de la situación de Juan.

4.3 Análisis de la actividad 3

Para esta actividad los estudiantes siguieron la idea de comparar velocidades en dos intervalos de tiempo, se tuvo que hacer énfasis en que la actividad consistía en comparar la velocidad en dos puntos. Por ejemplo, el estudiante E27 propone una solución en la cual utiliza conocimientos de Física, su respuesta es correcta, sin embargo su procedimiento no es muy claro:

E27: “Primero dividí el eje X y Y en espacios de 1cm, después establecí un punto de referencia en el tiempo cero de acuerdo a la gráfica, una vez localizado saqué la velocidad promedio de un punto de referencia al punto C (Una recta secante de A a C) y de igual forma de A a B y con valores aproximados la velocidad en D resultó ser mayor a la velocidad en C.”

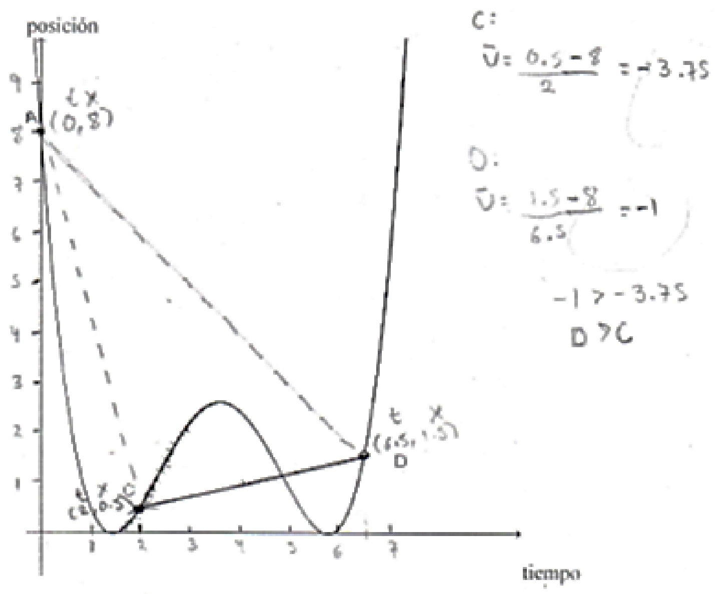


Figura 4.13. Comparación de velocidad en dos puntos.

Algunos estudiantes de manera inmediata trazaron rectas tangentes sin seguir un proceso o únicamente lo mencionaron sin llevar a cabo los trazos sobre la gráfica. Por ejemplo, el estudiante E2 nos muestra una gráfica donde no se observan con claridad las rectas tangentes.

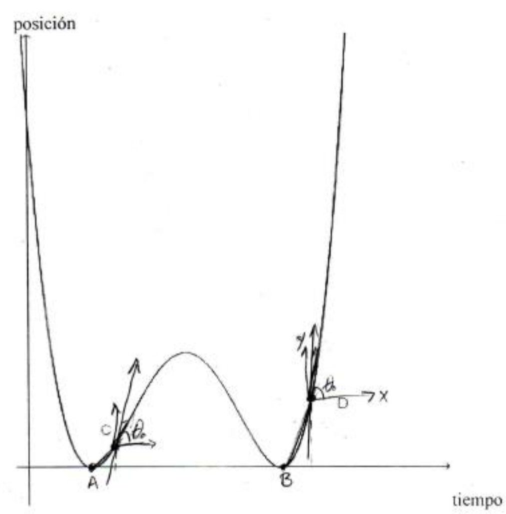


Figura 4.14. Comparación de la velocidad en dos puntos.

E2: “La velocidad del punto D es mayor a la velocidad del punto C, debido a que si se traza una recta tangente, que sólo toca a esos puntos, se puede obtener la velocidad de cada punto; después se pueden comparar los grados de inclinación de ambas pendientes tangentes y así se nota cuál de los puntos tiene mayor velocidad”

Con esto inferimos que usa a la pendiente de la recta tangente como elemento clave para concluir que la velocidad en el punto D es mayor que la velocidad en el punto C.
Otro estudiante utiliza el concepto de límite aunque no escribe la forma algebraica se puede notar en la explicación que proporciona:

E13: "La velocidad en el punto C es menor con respecto al punto D. Podemos llegar a esta conclusión observando el contexto de cada punto y evaluando X, intervalo de tiempo tanto por la derecha y la izquierda de cada punto, suponiendo que se toma el mismo intervalo X para ambos puntos. Una vez evaluado dicho comportamiento, el intervalo se reduce las veces que sea necesario donde la velocidad en un punto tiende a cero para poder hacernos a un solo punto y poder comparar"

Cuando se comentó su respuesta concluye en que estaba hablando de hacer que las diferencias de tiempo fueran cada vez más pequeñas para dar una conclusión acerca de la velocidad.

Durante la discusión grupal, el estudiante E11 del Equipo 4 nos explica:

E11: Yo recuerdo que en Física vimos que la velocidad en un punto es la velocidad instantánea y se puede encontrar con un límite, el $v_{ins} = \lim_{\Delta t \to 0} [\bar{v}]$ y sabemos que la velocidad promedio es velocidad final (x_f) menos velocidad inicial (x_i) entre un tiempo final (t_f) menos un tiempo inicial (t_i) y entonces el límite anterior nos queda como: $v_{ins} = \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{\Delta x}{\Delta t}\right]$ pero necesitamos conocer a la velocidad o a una función para calcular a la velocidad".

Esta explicación permitió que se retomara a la pendiente de la recta secante como velocidad promedio y se concluyó que la pendiente de la recta tangente es una velocidad instantánea, la cual puede escribirse como un límite.

4.4 Reflexiones generales sobre las actividades

Con respecto a la primera actividad, los estudiantes establecieron relaciones entre las variables del problema de Juan para plasmarlos en el plano cartesiano utilizando expresiones que están relacionadas con la idea de variación y cambio. En todos los equipos de trabajo se mencionó a la función de primer grado como herramienta principal para modelar cambios constantes y las curvas para cambios variables, además de reconocer a la pendiente de la recta como el elemento que nos modela dichos cambios.

Se tuvieron algunas dificultades en la segunda parte de la actividad 2, estas surgieron al no comprender que es lo que se solicitaba. Al parecer, aunque hay un cambio de concavidad de la gráfica que se muestra en la actividad 2 parte II, este no es muy notorio y esto no fue de ayuda al pensar que los estudiantes iban a tomar intervalos a la izquierda y derecha del punto de inflexión. Aún con estas dificultades los equipos se apoyaron de conocimientos previos para hacer uso de los conceptos: recta secante y velocidad promedio. Pese a las dificultades los estudiantes lograron establecer la comparación de la velocidad entre las diferentes secciones de una gráfica.

La solución de la actividad tres satisface nuestros objetivos parcialmente, puesto que, aunque en la mayoría de equipos se mencionó a la pendiente de la recta tangente para calcular velocidades instantáneas, no se utilizó el proceso de acercarse al punto C y al punto D, fijando un intervalo y luego hacer que la longitud de tiempo se hiciera cada vez más pequeño de acuerdo a lo que se hizo en la actividad 2 parte II. Notamos que en los estudiantes predomina la versión de que la recta tangente es la recta que toca a la curva en un sólo punto y no se trabajó la idea de que esta es el límite de las rectas secantes, mucho menos se menciona que es la recta es la mejor aproximación lineal a la curva (Orts, Llinares y Boigues, 2016).

En general la secuencia didáctica nos permitió observar el proceso de transición de los estudiantes entre el registro verbal, analítico y geométrico. Analizar el comportamiento de la velocidad en secciones, alrededor de un punto de inflexión y en un instante dado, nos ayudó a poner atención en aspectos concretos del comportamiento gráfico (¿cómo cambia?, ¿cuánto cambia?, crece, decrece, aceleración, velocidad promedio, velocidad en un instante), que formarán parte esencial de la construcción de significado del concepto de derivada.

Capítulo 5: Conclusiones

A continuación presentamos las reflexiones derivadas del análisis de los resultados de nuestra investigación, los cuales hemos mostrado de manera detallada en el capítulo anterior.

Como mencionamos en la introducción de este documento, el objetivo principal para realizar el trabajo de investigación era introducir el concepto de derivada a partir de situaciones que varían, considerando que es la primera vez que los estudiantes tienen contacto con este concepto y que debe ser enseñado a partir de sus fundamentos para que los estudiantes lo asocien y puedan darle un significado al estudiar fenómenos que varían, además de reconocer algunas de sus representaciones, dado que en el capítulo de antecedentes se mostró la importancia que tienen los registros de representación semiótica en la comprensión de un concepto matemático.

Recordemos que nuestro objetivo se centró en introducir el concepto de derivada, a partir de sus fundamentos y relacionarlo con algunos registros de representación semiótica para estudiantes que trataran con este concepto por primera vez, todo esto con ayuda de una secuencia didáctica. Para ello nos planteamos las preguntas de investigación que nos apoyarían en el logro de nuestro objetivo:

1. ¿Cómo abordan los estudiantes de bachillerato situaciones de variación como introducción al tema de derivada?
2. ¿Cómo una secuencia didáctica, basada en la idea de la variación y el tránsito entre registros de representación, ayuda a los estudiantes a reflexionar sobre los fundamentos del concepto de derivada?
3. ¿Cómo el diseño de una secuencia didáctica, que propicia el trabajo con distintos registros de representación y está contextualizada a través de la idea de variación ayuda en la introducción al tema de derivada a estudiantes de bachillerato?

5.1 Sobre los procesos de resolución que utilizan los estudiantes

Como se mostró en el capítulo anterior, los estudiantes hacen uso de conocimientos adquiridos en su vida cotidiana y de conocimientos adquiridos en la escuela para argumentar las respuestas a cada una de las preguntas. Una vez que se analizan las evidencias, hemos podido establecer cinco categorías que engloban los procesos de resolución que realizan los estudiantes según los conocimientos que ponen en juego:

5.1.1 Categoría 1. Identificación de la presencia de variables y las relaciones entre ellas

Para poder trazar la gráfica los estudiantes tuvieron que hacer una lectura del planteamiento que modela el movimiento de Juan. En la actividad 2, también fue necesario establecer la relación posición tiempo para poder hacer el análisis tanto global como puntual de la gráfica que se les proporcionó. Por ejemplo, en la pregunta 5 de la actividad dos, donde se solicita al estudiante identificar intervalos donde se cumple que la velocidad es menor en uno de ellos en distintas secciones, se deben elegir segmentos en la gráfica donde la pendiente de la recta secante sea menor que la pendiente de la recta secante en otro intervalo. Esto nos da indicios de cómo relacionan pendiente de recta secante con velocidad.

5.1.2 Categoría 2. Las gráficas muestran las variaciones en la posición de Juan

El trazo de la gráfica en la actividad 1 permite analizar si los estudiantes consideran a las variaciones constantes o no constantes. Por ejemplo, la gráfica de la Figura 4.5 que muestra variaciones no constantes está incluida dentro de esta categoría; además de que se proporcionan posibles expresiones algebraicas que la modelan.

5.1.3 Categoría 3. Uso de conocimientos que no pertenecen a la matemática formal

Esta categoría nos parece importante, puesto que observamos que en todas las actividades los conocimientos no formales dentro de la matemática fueron de gran apoyo para los estudiantes, sin embargo, en algunas actividades este hecho es más notorio que en otras. Por ejemplo, en las preguntas donde los estudiantes deben contestar cómo es la velocidad en el intervalo de a a b y cómo es la velocidad de b a c, considerar qué es lo que estaba haciendo Juan en ese momento fue de gran apoyo, lo cual generó que no se considerara necesario trazar intervalos y trazar con rectas secantes dentro de estos intervalos.

5.1.4 Categoría 4. Uso implícito del concepto de pendiente

En algunos equipos no se utilizó propiamente el término pendiente, pero se habló sobre la inclinación de la recta o inclinación de la curva, este concepto fue utilizado como un sinónimo de pendiente de la recta para poder realizar la comparación entre las velocidades.

5.1.5 Categoría 5. Relacionan conceptos: pendiente de recta secante-velocidad promedio y pendiente de recta tangente-velocidad en un punto

La relación entre estos conceptos se notó con mayor claridad en las actividades 2 y 3. Por ejemplo, en la pregunta 1 de la actividad 2, el Equipo 6 usa explícitamente el término pendiente de la recta secante para poder dar respuesta a su pregunta y en la actividad 3 se observa cómo los estudiantes, apoyados de conocimientos adquiridos en Física relacionan la velocidad en un punto con la pendiente de la recta tangente.

5.2 Sobre la secuencia didáctica diseñada para la investigación

La forma de hilar las actividades nos sirvió para analizar una situación que presenta variaciones, partir de lo global a lo puntual permitió establecer de manera natural la relación entre la velocidad de cambio promedio e instantánea, además de permitir el tránsito entre algunos registros de representación para la derivada.

5.2.1 La secuencia didáctica y el Pensamiento y Lenguaje Variacional

Las actividades propuestas en la secuencia permitieron al estudiante trabajar una situación en la que identificó los distintos cambios de velocidad. Por ejemplo, en la actividad 1, los estudiantes construyeron gráficas que modelan distintos cambios de velocidad en cada momento donde hay cambio de posición de Juan, como lo muestran las gráficas presentadas en la sección 4.1.3 del Capítulo 4.

Otra evidencia que muestra cómo los estudiantes trabajaron el concepto de variación es el análisis que hacen en la actividad 2, partir de la comparación de la velocidad en un intervalo y en un punto, generó de forma natural la relación de velocidad promedio y velocidad instantánea. En el capítulo de análisis se pudo observar que, a excepción de un equipo, no se logró construir gráficas donde los movimientos por cada sección no son constantes, los cambios en la variación del movimiento únicamente quedaron representados entre el cambio de un momento a otro de la posición de Juan, lo cual nos hace suponer que identifican cambios de velocidad, pero no dentro de una misma sección.

Como lo mostramos en las secciones 4.1 y 4.2 del capítulo 4, los estudiantes usan estrategias de trabajo que están ligadas a Pensamiento y Lenguaje Variacional, sin embargo, parece que esta idea se rompe en la actividad 3; dado que se limitan a la representación geométrica de la derivada sin atender el comportamiento de variación que surge alrededor de un punto. Los conocimientos de la asignatura de Física fueron determinantes en el uso de esta representación dejando a un lado el análisis de variación alrededor de un punto para determinar la velocidad puntual.

5.2.2 La secuencia didáctica y los registros de representación

De manera general podemos decir que la secuencia resulta ser adecuada y funcional, puesto que permitió trabajar los registros de representación semiótica para el concepto en cuestión, dado que se encontraron evidencias de tránsito entre representaciones como, por ejemplo, en la actividad 1 que los estudiantes realizaron el tránsito entre el registro verbal y el registro gráfico. Otro ejemplo, es la evidencia mostrada por el equipo 5, donde se hace la transición entre el registro verbal, el registro algebraico y el registro gráfico. En este mismo capítulo apartado 4.2.2.5 se evidencia la respuesta del equipo 6, en esta surge el tránsito entre el registro verbal y el registro gráfico, a través de la representación geométrica de la velocidad promedio como pendiente de la recta secante en dos puntos y en la actividad 3, el estudiante E11 hace uso del registro algebraico al representar a la velocidad instantánea como un límite de la velocidad promedio.

Así, la secuencia nos permitió trabajar con los distintos registros asociados a los fundamentos del concepto de derivada. Aunque observamos que algunos estudiantes pueden trabajar distintos registros de representación de un concepto, ellos, se inclinaran más al registro aritmético y algebraico que son los registros que han trabajado con mayor frecuencia en su vida estudiantil. Lo mencionado anteriormente se mostró en la actividad 3, donde el estudiante E11 sabe la fórmula para calcular la velocidad instantánea, sin embargo, considera que no le es útil por falta de datos.

5.2.3 Mejoras de la secuencia

Como se mencionó en el capítulo anterior, los estudiantes tuvieron algunas dificultades asociadas a la redacción y figura proporcionada, en la actividad 2 parte 2 preguntas 2 y 3 los estudiantes no comprendieron que se les solicitaba, con respecto a la gráfica no es muy notorio el cambio de concavidad, esto dificulta el proceso de analizar qué pasa con la velocidad alrededor de un punto. Por tanto, se deben refinar estas preguntas y gráfica para que sea más entendible lo que se solicita.

Con lo expuesto en los apartados anteriores de este capítulo contestamos nuestras preguntas de investigación que nos planteamos para esta investigación, además de cumplir con nuestro objetivo.

5.3 Reflexiones finales al respecto de mi desarrollo profesional como docente de matemáticas

Hasta antes de ingresar a la maestría consideré suficiente dominar el campo disciplinar para nivel medio superior y tenía la idea de que la forma de transmitir los conocimientos se iría aprendiendo en el camino. Durante estos dos años de maestría he notado que los trabajos basados en investigación y docencia son de gran apoyo para mejorar el desempeño del docente en el aula. Apoyarse de herramientas que ya han sido aplicadas en otro contexto o elaboradas a base de investigación no es sencillo, en el sentido de que cada una de las ramas de la matemática tiene dificultades propias que deben atacarse desde diferentes puntos.

Por otra parte, con esta investigación he notado lo que conlleva realizar investigaciones de enseñanza-aprendizaje: búsqueda de información y selección de acuerdo al concepto a tratar; construcción de herramientas didácticas, tomando en cuenta el contexto de la institución; implementación y análisis de la información obtenida. Considero que uno de los factores elementales es que el docente esté interesado en mejorar sus procesos de enseñanza, a partir de conocimientos generados de investigaciones a través del diseño de distintas herramientas didácticas, lo cual, también implica que el docente asuma una actitud crítica frente a su desempeño profesional. También debe contemplarse que, aunque existan investigaciones que nos permitan diseñar herramientas donde se faciliten los procesos de enseñanza-aprendizaje, estas no son una receta mágica para que la práctica docente pueda ser mejorada fácilmente, pues existen otros factores en los que no se tiene injerencia directamente, más bien, se hace uso de una de las utilidades de la investigación en la educación.

Un trabajo posterior a esta investigación es que puede llevarse a cabo la actividad usando herramientas tecnológicas para el diseño de la gráfica de la situación que se plantea y, a partir de esta, generar otras situaciones donde la idea de variación esté presente.

Bibliografía

Alanís, J. A. (1996). *La predicción: un hilo conductor para el rediseño del discurso escolar del Cálculo*. Tesis doctoral. México, D.F.: Cinvestav-IPN.

Alanís, J.A. y Salinas, P**.** (2009). Hacía un nuevo paradigma de la enseñanza del Cálculo dentro de una Institución Educativa. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *12*(3), 355-382.

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas* (pp. 97-140). México: Una empresa docente y Grupo editorial Iberoamérica.

Artigue, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las aportaciones didácticas y los cambios curriculares? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *1*(1), 40-55.

Badillo, J., Azcárate, C., y Font, V. (2011). Análisis de los niveles de comprensión de los objetos f'(a) y f'(x) en profesores de matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias*, *29*(2), 191-206.

Bagni, G. (2004). Una experiencia didáctica sobre funciones en la escuela secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *7* (1), 5-23.

Beltran, A. L. (2003). *La investigación- acción. Conocer y cambiar la práctica educativa.* Barcelona, España: Graó.

Bingham, T.R. (1973). Newton y el desarrollo del cálculo. *Boletín de Matemáticas*, *7*(2), 113-130.

Blázquez, S., y Ortega, T. (2001). Los sistemas de representación en la enseñanza del límite. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 4*(3), 219-236.

Borji, V., Font, V., Alamolhodaei, H., y Sánchez, A. (2018). Application of the Complementarities of Two Theories, APOS and OSA, for the Analysis of the

University Students' Understanding on the Graph of the Function and its Derivative. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 14, (s. d.).

Buendía, G., y Carrasco, E. (2009). Gráficas de Variación: Reflexiones sobre la visualización de la curva. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 22*, 35-43, México: CLAME.

Buendía, G., y Ordoñez, A. (2009). El comportamiento periódico en la relación de una función y sus derivadas: significados a partir de la variación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *12*(1): 7-28.

Cantoral, R. (1993). Hacia una didáctica del cálculo basada en la cognición. *Publicaciones centroamericanas*, 7, 391-410.

Cantoral, R. (2013). *Teoría socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. Barcelona: Editorial Gedisa SA.

Cantoral, R., y Mirón, H. (2000). Sobre el estatus de la noción de derivada: de la epistemología de Joseph Louis Lagrange al diseño de una situación didáctica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *3*(3), 265-292.

Cantoral, R., Molina, J.G. y Sánchez, M. (2005). Socioepistemología de la Predicción. En J. Lezama, M. Sánchez y J.G. Molina (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. 18, 463-468. México: CLAME.

Carabús, O. (2002). El Aprendizaje del Cálculo en la Universidad. La Conceptualización de la Derivada de una Función y sus Niveles de Comprensión. *Producciones Científicas NOA. Sección*. Catamarca, Argentina.

Carrillo, J., y Muñoz-Catalán, M.C. (2011). Análisis metodológico de las actas de la SEIEM (1997-2010) desde la perspectiva de los métodos cualitativos. Reflexión en torno a un caso. En M. Marín, G. Fernández, L. Blanco, y M. Palarea (Eds.), *Memorias del XV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.* 99-116. Ciudad Real, España: SEIEM.

Cordero, F. (2008). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. En R. Cantoral, O. Covián, R.M Farfán, J. Lezama, y V. Romo (Eds.). *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano* (pp. 265-286). Reverté-Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. A. C.

D'Amore, B. (2004). Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución, *Uno*, 35, 90-106.

De Herrero, S. (2004). Sistemas de ecuaciones lineales: una secuencia didáctica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *7*(1), 49-78.

Dolores, C. (2006). *Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada en el bachillerato.* Tesis doctoral. Guerrero, México: UAGro.

Dolores, C. (2009). Usos de las gráficas y sus representaciones en el aprendizaje de las Matemáticas. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 20.* 499-503, Camagüey, Cuba: Clame.

Dolores, C., Chi, A., Canul, E., Cantú, C., y Pastor, C. (2009). De las descripciones verbales a las representaciones gráficas. El caso de la rapidez de la variación en la enseñanza de la matemática. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*. 18, 41-57.

García, M., y Dolores, C. (2016). Diseño de una situación de aprendizaje para la comprensión de la derivada. *UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, (46), 49-70.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La gaceta de la RSME*, *9*(1), 143-168.

Elliott, J. (2005). *El cambio educativo desde la investigación-acción*. Madrid, España: Ediciones Morata.

Fernández, J. (1999). *¿Cómo hacer unidades didácticas innovadoras?* Sevilla: Diada Editora.

Flores, C. (2007). Las Formas Básicas de Graficación y su Relación con Situaciones de Movimiento. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 20*. 485-489, Camagüey, Cuba: Clame.

Fuentealba A., Sánchez-Matamoros-García, y Badillo J. (2015). Análisis de tareas que pueden promover el desarrollo de la comprensión de la derivada. *Uno. Revista de didáctica de las matemáticas*, 70, 72-77.

García, L., Moreno, M., Badillo, E., y Azcarate, C. (2011). Historia y aplicaciones de la derivada en las ciencias económicas: consideraciones didácticas. *Economía, XXXVI, 31*, 137-171.

García, M., y Dolores, C. (2016). Diseño de una situación de aprendizaje para la enseñanza del concepto de derivada. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 46, 45-70.

García, M. (2011). *Una situación de Aprendizaje para Contribuir a la Mejora del Concepto de Derivada*. Tesis de maestría no publicada, Guerrero, México: UAGro.

Guzmán, I. (1998) Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de los estudiantes. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 1(1), 5-21.

Hammersley, M., y Atkinson, P. (1995). Ethnography: Practices and principles. *New York: Routledge.*

Hitt, F. (1998). Difficulties in the Articulation of Different Representations Linked to the Concept of Function. *Journal of Mathematical Behavior*, 17 (1), 123-134.

Kawulich, B. (2005). La observación participante como método de recolección de datos. In *Forum: qualitative social research,* 6 (2), 1-32.

Mayan, M. (2001). Una introducción a los métodos cualitativos. Módulo de entrenamiento para estudiantes y profesionales. Alberta: *International Institute for Qualitative Methodology*.

Moreno, M. (2005). El papel de la didáctica en la enseñanza del Cálculo: evolución, estado actual y retos futuros. *Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM*. 81-96.

Muñoz-Catalán, M.C. (2010). El desarrollo profesional en un entorno colaborativo centrado en la enseñanza de las matemáticas: el caso de una maestra novel. Tesis doctoral publicada en http://goo.gl/OA4ydJ. Huelva, España: Universidad de Huelva.

Ortega, S., Guzmán, I., y Mena, A. (2009). ¿Cómo enseñan las derivadas los profesores de cálculo, en la Universidad? *Teoría y aplicaciones del Análisis Estadístico Implicativo: primera,* 311-336.

Orts, A., Llinares, S., y Boigues, J.F. (2016). Elementos para una Descomposición Genética del concepto de recta Tangente. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 10, 111-134.

Pino-Fan, L., Godino, J. D., y Font, V. (2010). Conocimiento didáctico-matemático sobre la enseñanza y aprendizaje de la derivada. *Memorias XIII Escuela de Invierno en Matemática Educativa* (pp. 206-213), Monterrey, Nuevo León, México: Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey

Pino-Fan, L. R., Godino, J. D., y Font, V. (2013). Diseño y aplicación de un instrumento para explorar la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores sobre la derivada (2ª parte). *Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática*, *8*, 1-47.

Pino-Fan, L., Guzmán, I., Font, V., y Duval, R. (2017). Analysis of the underlying cognitive activity in the resolution of a task on derivability of the absolute-value function: Two theoretical perspectives. *PNA*, *11*(2), 97-124.

Pino-Fan, L. R., Godino, J. D., y Font, V. (2018). Assessing key epistemic features of didactic-mathematical knowledge of prospective teachers: the case of the derivative. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *21*(1), 63-94.

Pulido, R. (1997). *Un estudio teórico de la articulación del saber matemático en el discurso escolar: la transposición didáctica del diferencial en Física y la matemática escolar*. Tesis doctoral. México, D.F.: Cinvestav-IPN.

Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *PNA*, 4(1), 1-14.

Robles, M., Del Castillo, A., y Font, V. (2012). Análisis y valoración de un proceso de instrucción de la derivada. *Educación Matemática*. 24(1), 5-41.

Rodríguez, G., Gil, J., y García, E. (1996). *Tradición y enfoques en la investigación cualitativa*. Barcelona: Ediciones Aljibe.

Sánchez-Matamoros, G., García, G., Blanco, M., y Llinares, S. (2006). El Desarrollo del esquema de la Derivada. *Enseñanza de las ciencias*. *24*(1), 85-98.

Sánchez-Matamoros, G., García, M., y Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 11*(2). 267-296.

Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C., y Llinares, S. (2015). Developing pre-service teachers' noticing of students' understanding of derivative concept. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 13, 1305-1329.

Strauss, A., y Corbin, J. (1994). Grounded Theory Methodology: An overview. En N. Denzin, & Y. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 273-285). Thousand Oaks, C.A.

Strauss, A. L., Corbin, J., y Zimmerman, E. (2002). *Bases de la investigación cualitativa: técnicas y procedimientos para desarrollar la teoría fundamentada*. Medellín: Universidad de Antioquia.

Suárez, L., y Cordero, F. (2010). Modelación – graficación, una categoría para la matemática escolar. Resultados de un estudio socioepistemológico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 13(4), 319-333.

Tall, D. (1990). Inconsistencies in the learning of calculus and analysis. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 12*(3)(4), 49-63.

Testa, Z. (2004). *Procesos de resignificación del valor numérico de la función derivada segunda: Un estudio en el sistema escolar Uruguayo*. Tesis de maestría, México: IPN.

Tobón, S., Pimienta, J., y García, J. (2010). *Secuencias Didácticas: Aprendizaje y evaluación de competencias*. México: Pearson.

Valdés, J.E.N. (1998). El legado histórico de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Consideraciones (auto) críticas. *Boletín de Matemáticas, 5*(1), 53-79.

Vrancken, S. (2011). *La construcción de la derivada desde la variación y el cambio articulando distintos sistemas de representación*. Tesis de maestría. Universidad del Litoral.

Vrancken, S., y Engler, A. (2014). Una Introducción a la Derivada desde la Variación y el Cambio: resultados de una investigación con estudiantes de primer año de la universidad. *Boletín de Educación Matemática, 28* (48). 449-468.

Anexos

Anexo 1. Evidencias de Actividad 1

Gráfica de Equipo 1

Suponiendo que la distancia de su casa a la de su compañero es de 700 m, si Juan camina lento tarda 14 minutos, si va rápido 9.3 min y si va corriendo, 7 minutos.

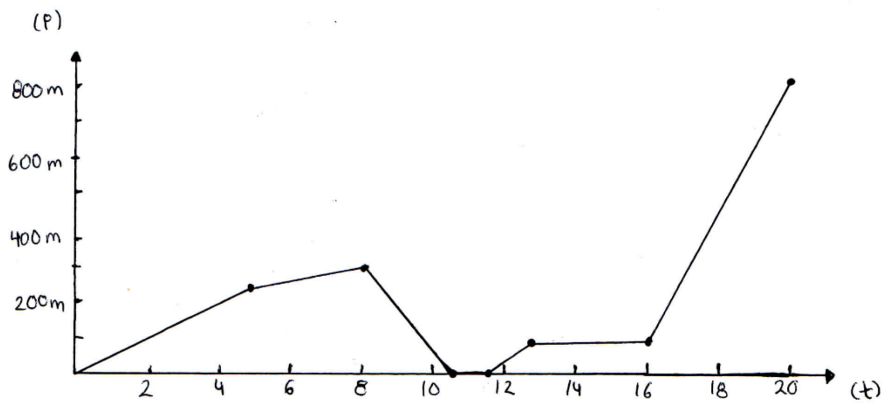
250 m en 5 min - lento
22.5 m en 3 min - rápido

272.5 m en 8 min.

1 min. en tomar su libreta.

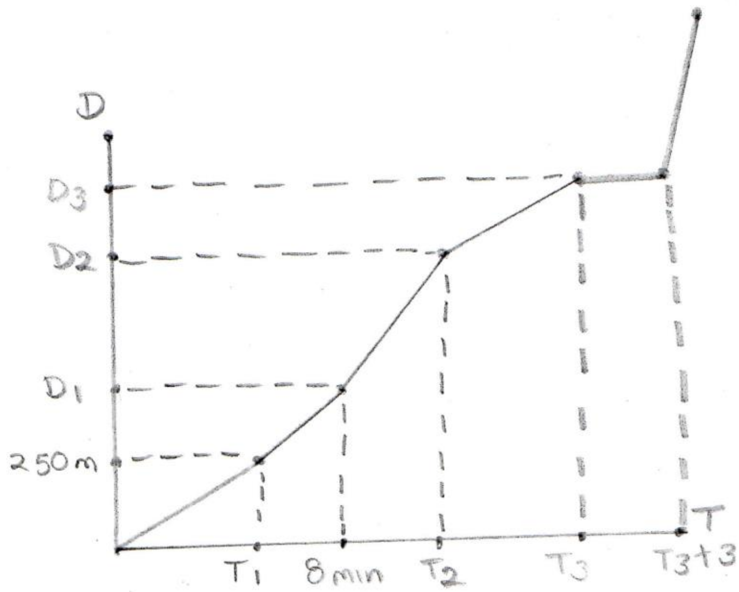
Suponiendo que espera el taxi en la esquina de su casa (Av. 25 Pte.) que está a 75 m. y camina rápido porque se le hizo tarde, se hace 1 minuto, más los 3 minutos que esperó el taxi que lo llevó a la casa de su compañero.

Suponiendo que el taxi no tiene parada alguna, se tarda 3 min. hasta el destino.



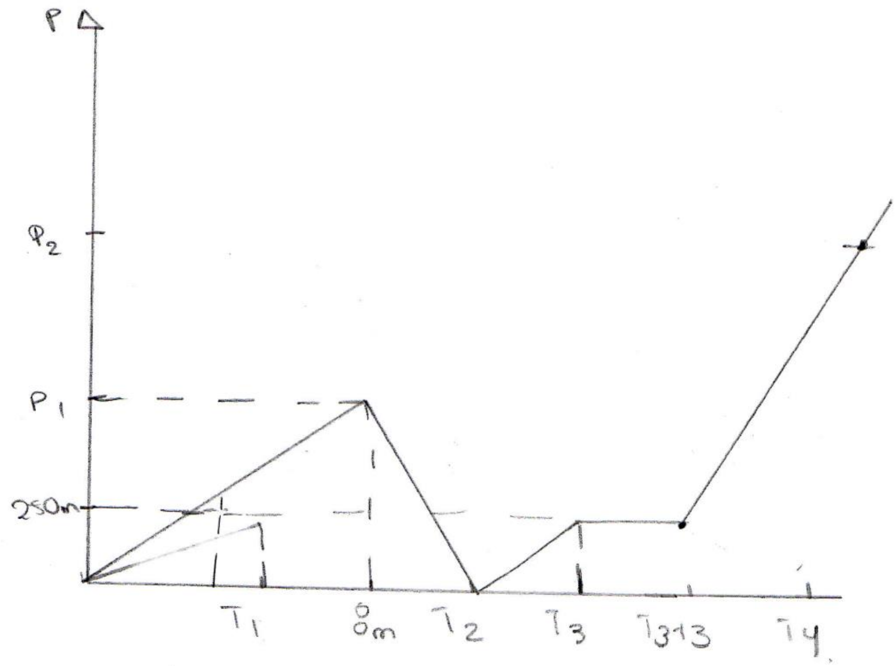
Gráfica de Equipo 2

Gráfica distancia-tiempo



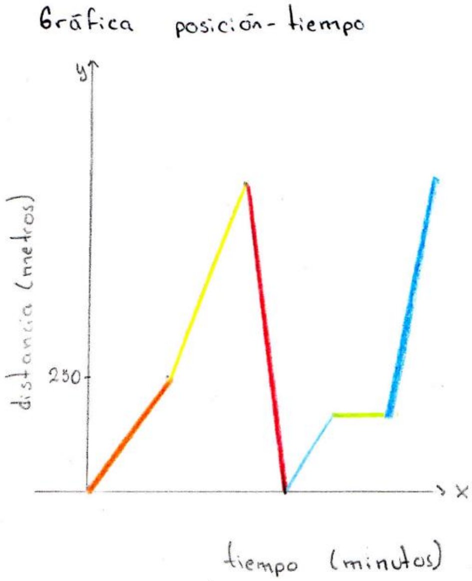
En el eje Y se representa la distancia recorrida a la casa de Juan se localiza en el origen. El tiempo recorrido se presenta en el eje X. Dado que d=Vt la pendiente de cada segmento de recta representa la velocidad en ese lapso de tiempo. La distancia recorrida depende de la velocidad de Juan y del tiempo durante el que mantenga esa velocidad. Suposimos que la velocidad es constante en cada intervalo de tiempo por lo que la grafica de distancia-tiempo es una linea recta en cada intervalo.

Gráfica posición-tiempo



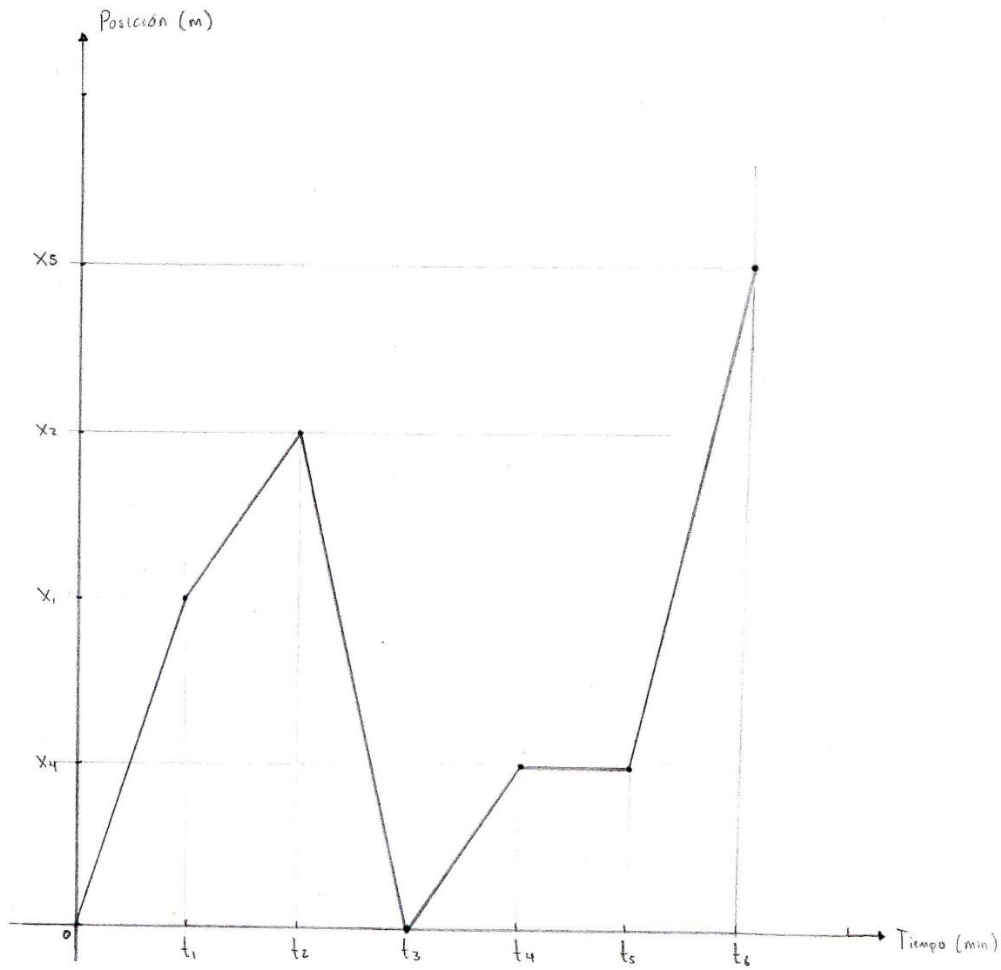
El punto (0,0) es la casa de Juan y el punto (T_4, P_2) es la casa final. El valor de la pendiente es positivo cuando se aleja de la casa, negativo cuando disminuye.
Supusimos que la velocidad de cada intervalo es constante, por eso es una linea recta.
Es una función lineal por intervalos, con curvas se da una mejor aproximación.

Gráfica de Equipo 3



Juan parte de su casa que tomamos como el punto cero cuando contesta y envia su mensaje lleva una velocidad baja que suponemos es constante, luego aumenta la velocidad por lo que la pendiente de la recta que describe el recorrido es mayor, cuando se da cuenta de su libreta aunque regresa a su casa a una posición (x, 0) sale de su casa y llega a la esquina con otra velocidad y cuando espera al taxi no recorre nada de distancia, pero el tiempo sigue pasando y luego sube al taxi y avanza muy rápido.

Gráfica de Equipo 4



Se muestra la grafica posicion-tiempo que representa el movimiento de Juan a la casa de su amigo tomando en cuenta la variable t como el tiempo en minutos y X como la posicion en metros.

En un t_1 recorre la distancia de 250m y llega a una posición X_1.

Posteriormente dice que camina 8min el cual lo tomamos como un t_2 y llega a una posicion X_2.

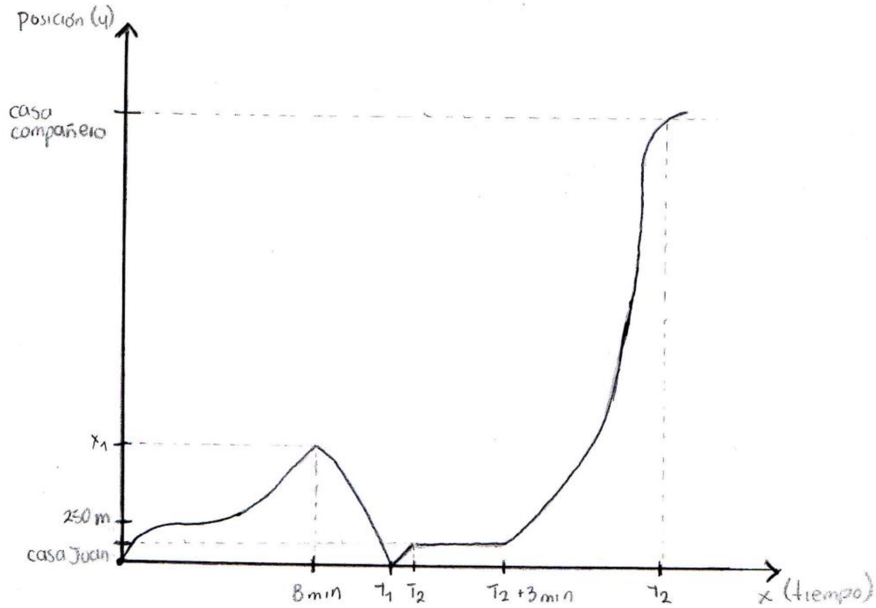
Después regresa a su casa, la cual tomamos como la posicion cero (0) y lo hace en un t_3.

Luego camina a la esquina a una posicion X_4 y lo hace en un t_4.

Después espera un taxi por 3min. lo cual tomamos como t_5.

Por ultimo hicimos la suposicion de que tomó el taxi y en un t_6 llegó a la casa de su amigo la cual estaba en una posicion X_5.

Gráfica de Equipo 5

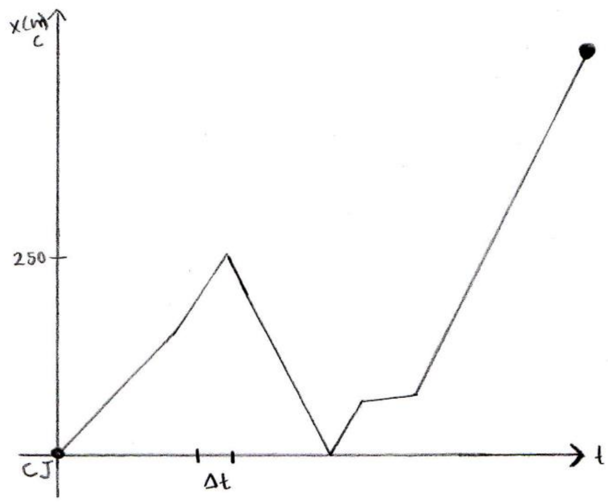


Nota: Se desprecian muchos datos de condiciones externas de Juan durante el trayecto.

En la gráfica podemos encontrar dos variables, una respecto al tiempo que inicia en la casa de Juan y termina cuando llega a la casa de su compañero, y una respecto a su posición cuando la casa de Juan es la posición 0 y la casa de su compañero es la posición final, la gráfica consta de varias partes, en la primer parte donde la lectora menciona que inicia a paso lento, luego la va acelerando, podemos definir esa parte como $\left[\frac{(x-1.71)^3}{5}+1\right]$ cuando $x>0$, la segunda parte de la gráfica la vemos como lineal tal que tiene una pendiente negativa $8 \leq x < 9$, la siguiente parte de la gráfica la vemos como constante debido a que mantiene una misma posición pero el tiempo sigue transcurriendo tal que $x=1$, $9 \geq x < 10$, la parte 4 de la gráfica la podemos ver como una ecuación cuadrática que abre hacia arriba tal que el vértice de la gráfica se encuentra en $(10,1)$ y la gráfica existe cuando $10 \geq x < 12$.

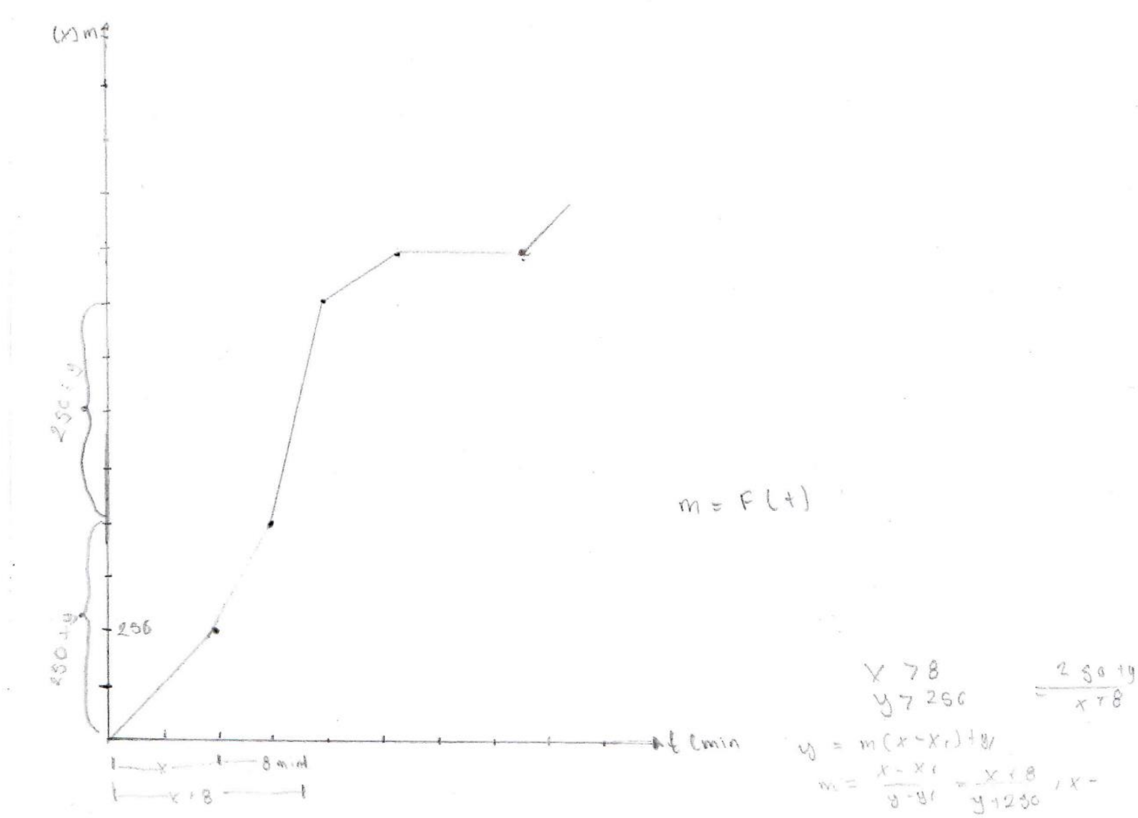
Gráfica de Equipo 6

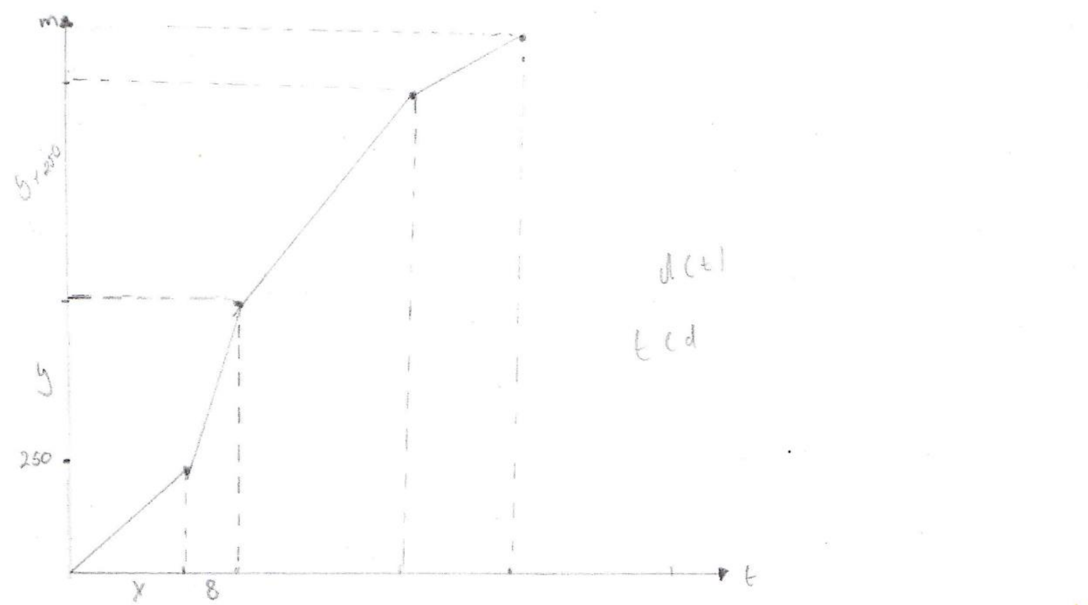
Actividad: Casa de Juan



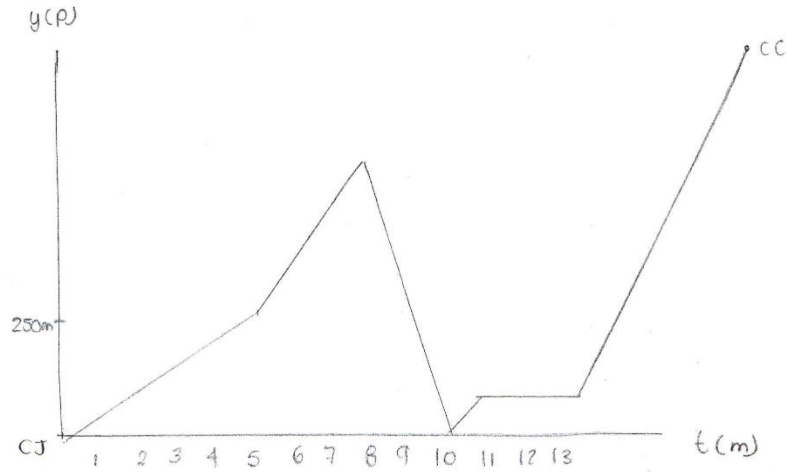
- Tomamos como punto de referencia (0, 0) la casa de Juan.
Desde el momento en que empieza a caminar recorre 250m alterando su posición inicial. Después acelera su ritmo al caminar, haciendo que recorra más en menor tiempo. Cuando recuerda que olvidó su libreta, regresa a su posición inicial (su casa) pero el tiempo sigue transcurriendo.
Su posición vuelve a cambiar cuando camina hacia la esquina y se mantiene ahí 3 minutos.
Después de que sube al taxi, transcurre su camino sin percances y de manera rápida, llegando a su destino.

Gráfica de Equipo 7





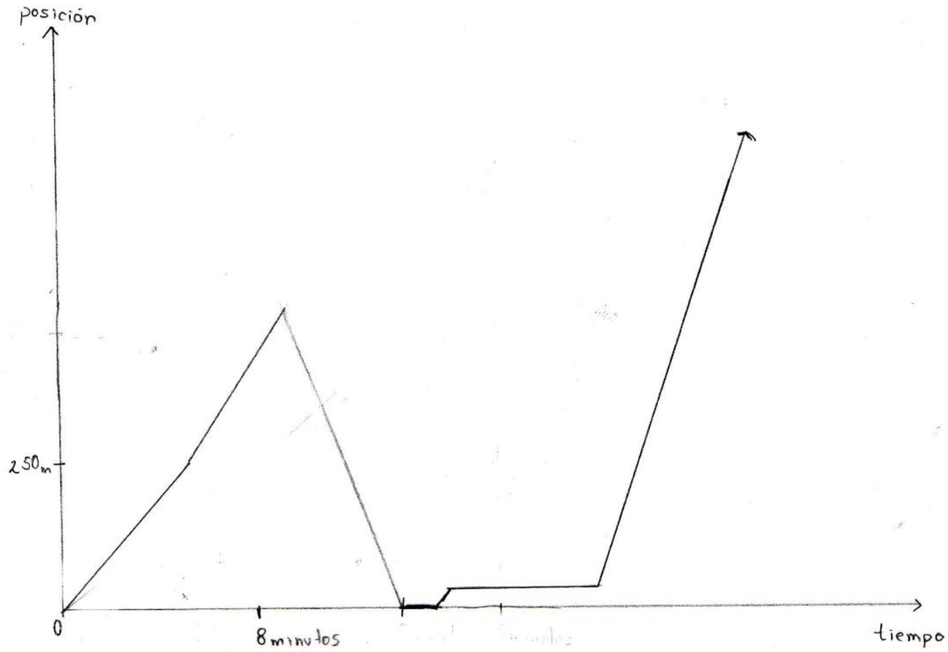
Gráfica de Equipo 8



Llegamos a la conclusión de que el problema se podría modelar a través de una función por trozos, donde las casas se mantienen fijas sin importar la distancia ni el tiempo transcurridos.

- En la gráfica establecemos que la distancia está en función del tiempo, por lo que es una gráfica posición-tiempo.

Gráfica de Equipo 9



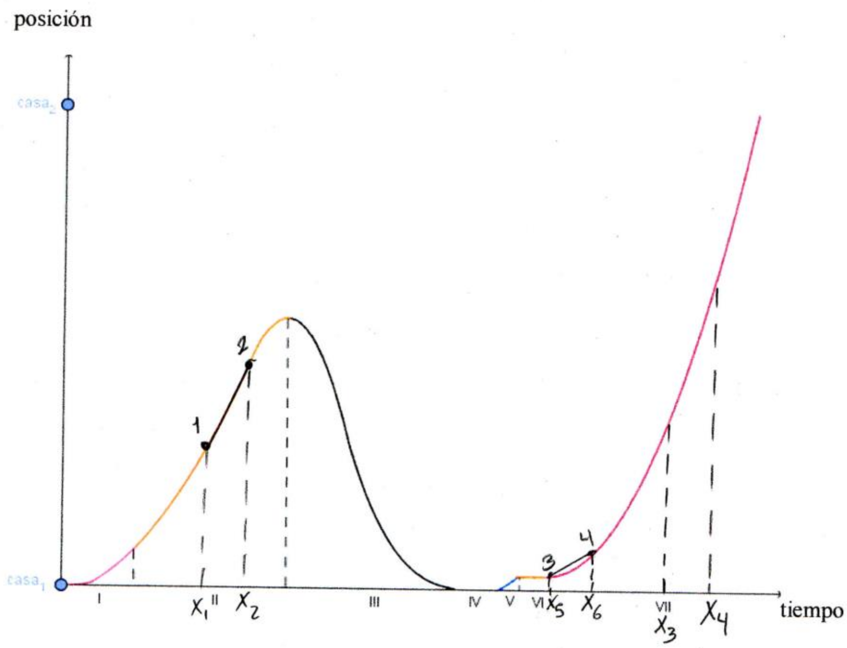
CERO representa el punto de partida (casa de Juan) y el tiempo transcurre 8 minutos hasta una posición NO exacta, allí la gráfica desciende a la misma posición mientras el tiempo aún avanza, se mantiene estático en cuestión de posición pero no de tiempo; la gráfica asciende mientras camina para tomar el taxi y vuelve a mantener una posición fija entre tanto transcurren 3 minutos. Finalmente la gráfica asciende en menor tiempo porque la velocidad del taxi es mayor.

Anexo 2. Evidencias de Actividad 2 parte I

Equipo 1

Actividad 2 parte I

Instrucciones: Observa la siguiente gráfica que representa el movimiento de Juan a través de la comparación de posición contra tiempo. Contesta cada una de las preguntas y justifica tus respuestas.



¿En qué sección o secciones cambia su posición más rápido?

Sección II ya que el problema describe que despues de contestar el mensaje, camina más rápido; sección III porque el problema indica que regreso corriendo por su libreta; sección VII ya que describe el manejo del taxi.

¿En qué momentos está inmóvil?

Secciónes II, IV y VI ya que en la II se detinen para volver a su casa y en las otras 2 secciones no hay cambio en la posición pero si en el tiempo.

¿En esta gráfica es posible observar la velocidad de Juan?, Justifica tu respuesta

Si, porque la relación posición-tiempo no es proporcional en todas las partes de la gráfica ya que a mayor distancia y menor tiempo significaría que va más rápido.

¿Cómo es la velocidad en la sección II con respecto a la de la sección VII? Justifique

Es menor ya que de acuerdo a los intervalos de tiempo ($[x_1, x_2]$, $[x_3, x_4]$ cuando $[x_1 ; x_2] = [x_3, x_4]$) la distancia de la sección II, tomada de la diferencia en la posición entre el punto 1 y 2, es menor que la distancia entre los puntos 3 y 4.

Identifica algún intervalo de tiempo en la sección II donde la velocidad sea mayor que la velocidad en algún intervalo de la sección VII.

El intervalo $[x_1, x_2]$ es mayor al intervalo $[x_5, x_6]$, suponiendo que la distancia de ambos intervalos es igual, porque si se comparan los ángulos de inclinación de ambas pendientes se puede decir cual es mayor.

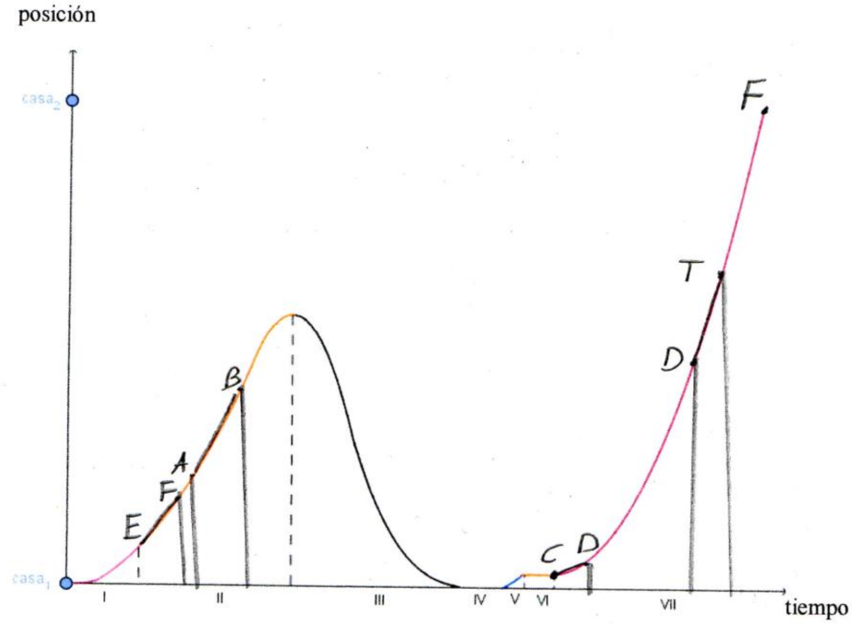
Haz lo mismo que en la pregunta anterior, pero donde la velocidad en un intervalo en la sección II sea menor que la velocidad en un intervalo de la sección VII.

El intervalo $[x_1, x_2]$ es menor al intervalo $[x_3, x_4]$, porque al comparar los ángulos de inclinación de ambas pendientes uno resulta menor a otro.

Equipo 2

Actividad 2 parte I

Instrucciones: Observa la siguiente gráfica que representa el movimiento de Juan a través de la comparación de posición contra tiempo. Contesta cada una de las preguntas y justifica tus respuestas.



¿En qué sección o secciones cambia su posición más rápido?

En la VII y la III porque la pendiente de la recta CF es mayor en valor absoluto a la pendiente de la recta que determina la velocidad promedio de los otros intervalos

¿En qué momentos está inmóvil?

En la IV y la VI porque la pendiente de la recta es nula

¿En esta gráfica es posible observar la velocidad de Juan?, Justifica tu respuesta

No con exactitud, pero se puede dar una aproximación de las variaciones que ha sufrido.

¿Cómo es la velocidad en la sección II con respecto a la de la sección VII? Justifique

Menor porque se observa que la pendiente de la recta que une su punto inicial y final, es decir la recta que representa la velocidad promedio, es menor.

Identifica algún intervalo de tiempo en la sección II donde la velocidad sea mayor que la velocidad en algún intervalo de la sección VII.

La sección inicial del intervalo VII entre los puntos (C, D) tiene una velocidad menor al intervalo (A, B) pues la pendiente de la recta AB es mayor a CD.

Haz lo mismo que en la pregunta anterior, pero donde la velocidad en un intervalo en la sección II sea menor que la velocidad en un intervalo de la sección VII.

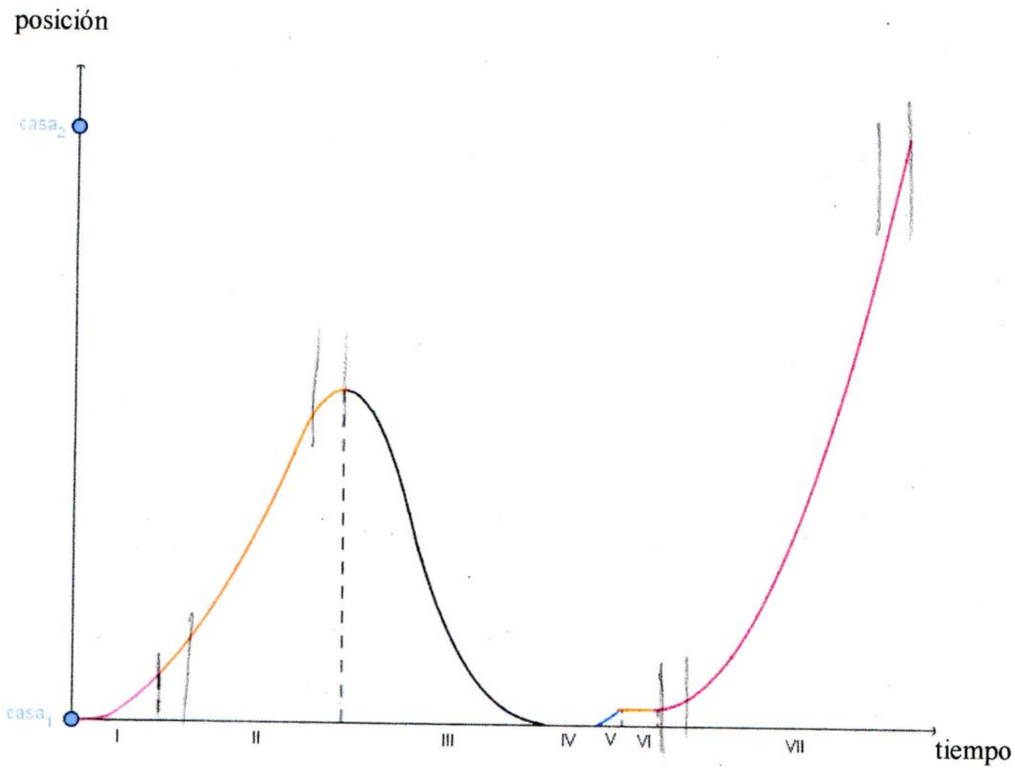
La recta EF tiene pendiente menor a DT luego la velocidad promedio en el intervalo (E,F), es menor a la del intervado (D,T).

CM
CN

Equipo 3

Actividad 2 parte I

Instrucciones: Observa la siguiente gráfica que representa el movimiento de Juan a través de la comparación de posición contra tiempo. Contesta cada una de las preguntas y justifica tus respuestas.



¿En qué sección o secciones cambia su posición más rápido?

En la sección VII, porque es el momento donde el taxi cambia su posición más rápido

¿En qué momentos está inmóvil?

En las secciones IV y VI. En la sección IV está ubicado dentro de su casa el cual es un punto fijo en el plano.
En la sección VI porque estuvo en un punto fijo del plano.

¿En esta gráfica es posible observar la velocidad de Juan?, Justifica tu respuesta

No se puede ya que en ninguna sección nos proporciona datos útiles para calcular un aproximado a la velocidad exacta.

¿Cómo es la velocidad en la sección II con respecto a la de la sección VII? Justifique

es menor, porque la razón de cambio posición-tiempo (pendiente ó velocidad) mientras mayor verticalidad tenga mayor velocidad lleva y en la sección II la curva está más inclinada.

Identifica algún intervalo de tiempo en la sección II donde la velocidad sea mayor que la velocidad en algún intervalo de la sección VII.

En los inicios de ambas secciones, donde observamos que en la sección dos tenemos una velocidad inicial establecida y la otra al principio existe un punto donde la velocidad inicial es 0.
*Nota: se dividió en intervalos de tiempo iguales para poder comparar el inicio

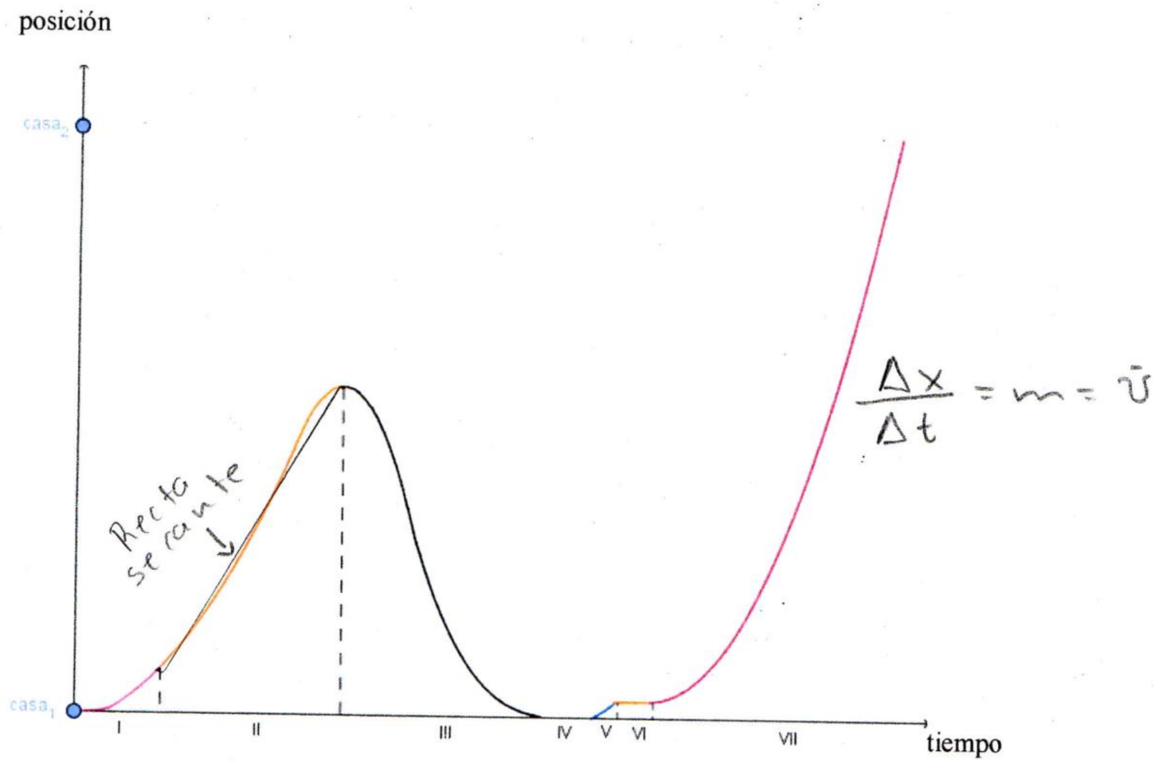
Haz lo mismo que en la pregunta anterior, pero donde la velocidad en un intervalo en la sección II sea menor que la velocidad en un intervalo de la sección VII.

En la parte final de ambas secciones. En la sección II Juan se va deteniendo en la parte final y en la sección VII sigue aumentando su velocidad, debido al taxi.
*Nota: cada punto tiene una pendiente y esa pendiente es la velocidad promedio $\bar{V} = \frac{\Delta d}{t}$

Equipo 4

Actividad 2 parte I

Instrucciones: Observa la siguiente gráfica que representa el movimiento de Juan a través de la comparación de posición contra tiempo. Contesta cada una de las preguntas y justifica tus respuestas.



¿En qué sección o secciones cambia su posición más rápido?

En la sección III porque en el problema se especifico que está caminando rápido y regresa a su casa corriendo, es decir recorre en menos tiempo la misma distancia.

¿En qué momentos está inmóvil?

En el IV y el VI, porque Juan se encuentra en su casa y esperando el taxi, por lo que no cambia su posición porque no cambia de lugar.

¿En esta gráfica es posible observar la velocidad de Juan?, Justifica tu respuesta

Sí, se puede visualizar si va más rápido o más lento pero no puedo cuantificarla.

¿Cómo es la velocidad en la sección II con respecto a la de la sección VII? Justifique

La sección VII es mayor ya que en la gráfica se observa que recorre una distancia mayor en menor tiempo, además en el problema en la sección II Juan va caminando mientras en la sección VII va en el taxi.

Identifica algún intervalo de tiempo en la sección II donde la velocidad sea mayor que la velocidad en algún intervalo de la sección VII.

En el inicio de la sección II Juan lleva cierta velocidad ya que estaba caminando, mientras al inicio de la sección VII el taxi parte del reposo.

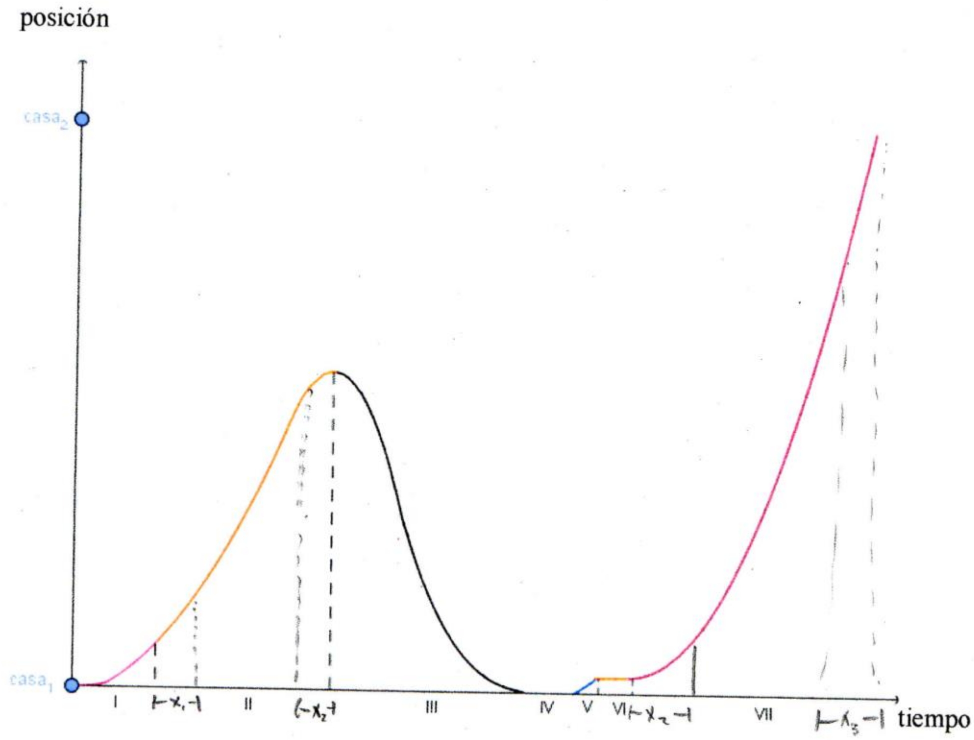
Haz lo mismo que en la pregunta anterior, pero donde la velocidad en un intervalo en la sección II sea menor que la velocidad en un intervalo de la sección VII.

En la mitad de la sección VII la velocidad es mayor que casi al final de la sección II porque de igual forma en ese punto en la sección VII Juan lleva una velocidad.

Equipo 5

Actividad 2 parte I

Instrucciones: Observa la siguiente gráfica que representa el movimiento de Juan a través de la comparación de posición contra tiempo. Contesta cada una de las preguntas y justifica tus respuestas.



¿En qué sección o secciones cambia su posición más rápido?

En la sección II, III y VII, en la sección II se recorre una distacia considerable en un tiempo determinado, algo que de igual manera sucedio en la sección III, ya que se recorrió una distancia mayor a la sección II en un menor tiempo, y en la sección VII se recorre una mayor distancia en mucho menos tiempo, basandose en la lectura, que menciona como se hace el uso de un taxi

¿En qué momentos está inmóvil?

En la sección IV y VI ya que no se presenta un cambio significativo, además de al no moverse esto no detiene el tiempo.

¿En esta gráfica es posible observar la velocidad de Juan?, Justifica tu respuesta

Si, ya que con las curvas, los cambios permite una observación aproximada de como fue cambiando Juan su velocidad

¿Cómo es la velocidad en la sección II con respecto a la de la sección VII? Justifique

Es menor ya que se observa un mayor desplazamiento en un menor tiempo siendo la sección II un mayor tiempo con respecto a la VII pero recorriendo una mayor distancia

Identifica algún intervalo de tiempo en la sección II donde la velocidad sea mayor que la velocidad en algún intervalo de la sección VII.

En X_1 la velocidad es mayor ya que se lleva una velocidad previa, siendo diferente de cero, ya que no parte del reposo, algo que si ocurre en la sección VII ya que el taxi no puede iniciar con una velocidad.

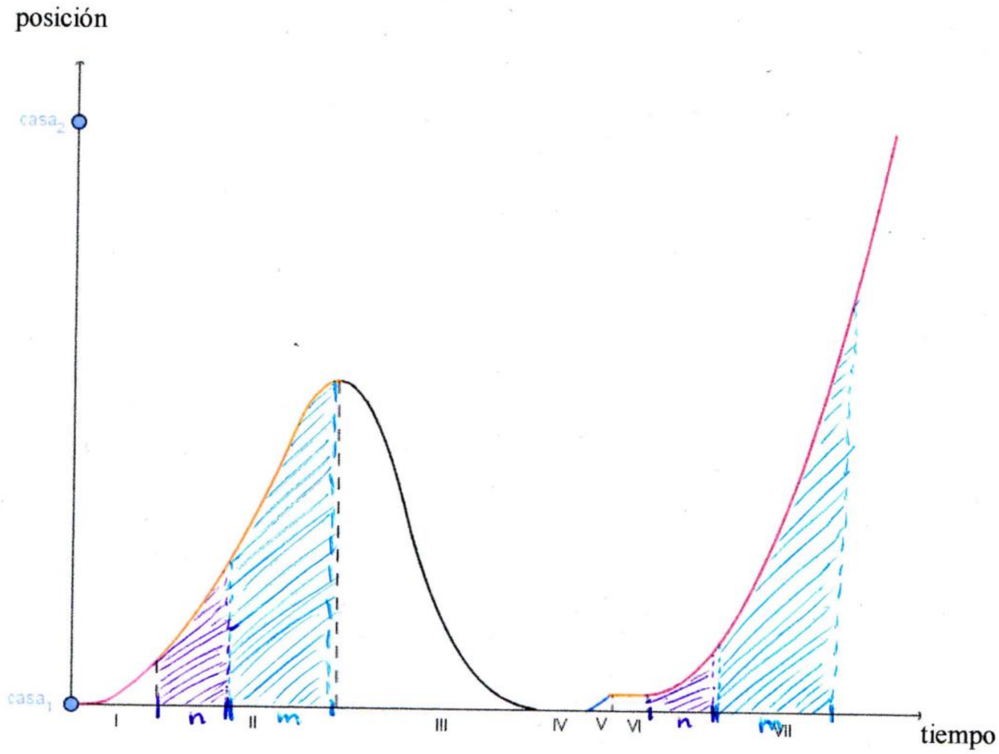
Haz lo mismo que en la pregunta anterior, pero donde la velocidad en un intervalo en la sección II sea menor que la velocidad en un intervalo de la sección VII.

En la sección X_2 y X_3 ya que el taxi una vez que arranca ya lleva una velocidad que mantiene constante

Equipo 6

Actividad 2 parte I

Instrucciones: Observa la siguiente gráfica que representa el movimiento de Juan a través de la comparación de posición contra tiempo. Contesta cada una de las preguntas y justifica tus respuestas.



¿En qué sección o secciones cambia su posición más rápido?

También III

VII, porque de un modo obvio es más rápido cambiar de posición en un vehículo de mayor velocidad.

¿En qué momentos está inmóvil?

También II-III

IV y VI ya que en esas secciones el tiempo siguió transcurriendo, pero se observó que la posición se mantuvo igual.

¿En esta gráfica es posible observar la velocidad de Juan?, Justifica tu respuesta

Sí, ya que en física una gráfica posición-tiempo se puede ver como una f por trozos, entonces (con el concepto de diferencial, la derivada de una función que representa la posición es igual a la velocidad. En la sección VII, hay un desplazamiento ($f(x)=x^3$) aplicando lo anterior la velocidad se denota como una función cuadrática.

¿Cómo es la velocidad en la sección II con respecto a la de la sección VII? Justifique

la velocidad en la sección VII es mayor ya que en esta se observa que posee velocidad cuadrática, mientras que en la II es lineal.

Identifica algún intervalo de tiempo en la sección II donde la velocidad sea mayor que la velocidad en algún intervalo de la sección VII.

Si dividimos la sección II por la mitad y la VII en un intervalo de igual tiempo que el anterior y comparamos estos, entonces notaremos que su velocidad es mayor, ya que en el intervalo de la sección II cambia más rápido de posición que el VII.

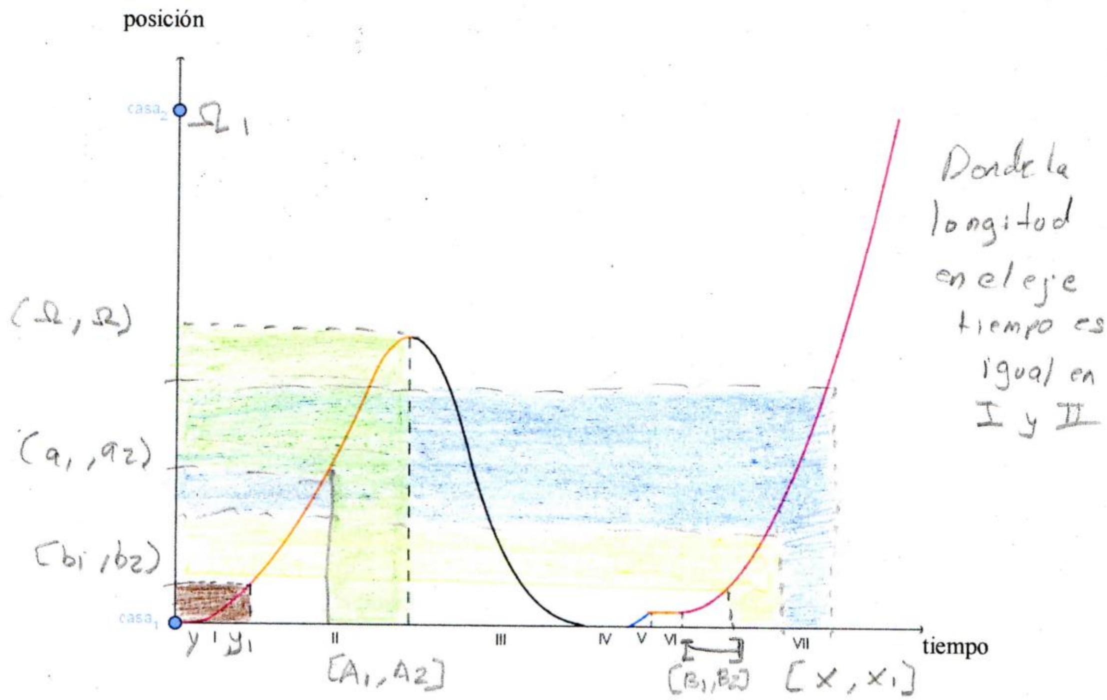
Haz lo mismo que en la pregunta anterior, pero donde la velocidad en un intervalo en la sección II sea menor que la velocidad en un intervalo de la sección VII.

Si tomamos las partes que anteriormente se despreciaron y nuevamente los comparamos (ambos intervalos con tiempo igual) la velocidad de VII es mayor de la II ya que en la VII esta aumenta de manera cuadrática y en II lineal. En el intervalo 2 de la sección II es un MRU con velocidad constante y en el intervalo de VII es un MRUA con aceleración constante, lo que significa que su velocidad va aumentando conforme el tiempo avanza.

Equipo 7

Actividad 2 parte I

Instrucciones: Observa la siguiente gráfica que representa el movimiento de Juan a través de la comparación de posición contra tiempo. Contesta cada una de las preguntas y justifica tus respuestas.



¿En qué sección o secciones cambia su posición más rápido?

III y VII debido a que la prolongación de la curva es mayor que en los demás

¿En qué momentos está inmóvil?

El punto (0,0) en la gráfica puede ser considerado un movimiento inmóvil. IV, VI ya que no se muestran cambios en la posición ya que en la gráfica se encuentran líneas horizontales que indican la misma posición en esos tramos. Además las intersecciones en los tramos I con III y V con VI

¿En esta gráfica es posible observar la velocidad de Juan?, Justifica tu respuesta

Si, porque podemos comparar los cambios de posición con el tiempo en que transcurren los mismos y determinar o tener noción de la velocidad

¿Cómo es la velocidad en la sección II con respecto a la de la sección VII? Justifique

Es menor porque la sección VII presenta un mayor cambio de posición en un intervalo corto de tiempo muy similar que en la sección 2, sin embargo en la sección II no se presenta un mayor cambio de posición.

Identifica algún intervalo de tiempo en la sección II donde la velocidad sea mayor que la velocidad en algún intervalo de la sección VII.

Suponiendo que la longitud entre A y B con respecto al eje "tiempo" son iguales entonces podemos decir que el intervalo A tiene una mayor velocidad que el B. Si el intervalo $[A_1, A_2]$ es igual al $[B_1, B_2]$ entonces el vencedor cuando formemos la razón $[a_1, a_2]$ y $[b_1, b_2]$ nos dirá la dif. en la velocidad y comprobar lo dicho anteriormente.

Haz lo mismo que en la pregunta anterior, pero donde la velocidad en un intervalo en la sección II sea menor que la velocidad en un intervalo de la sección VII.

Suponiendo las condiciones pasadas son las mismas para comprobar que la velocidad en $[y, y_1]$ es menor con respecto a $[x, x_1]$ tenemos que:

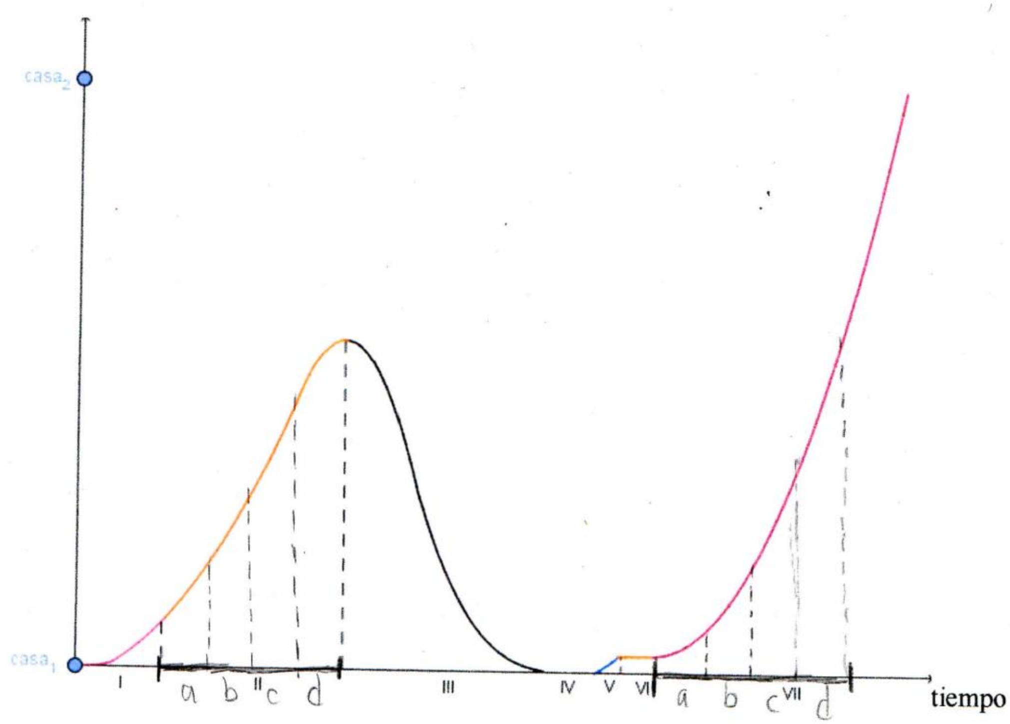
$$\frac{[\alpha, \alpha_1]}{[x, x_1]} < \frac{(\Omega, \Omega_1)}{[y, y_1)} \quad \text{porque}$$

$$[\alpha, \alpha_1] < [\Omega, \Omega_1]$$

Equipo 8

Actividad 2 parte I

Instrucciones: Observa la siguiente gráfica que representa el movimiento de Juan a través de la comparación de posición contra tiempo. Contesta cada una de las preguntas y justifica tus respuestas.



¿En qué sección o secciones cambia su posición más rápido?

II, III y VII, porque recorre una mayor distancia en un intervalo de tiempo menor en comparación a las otras secciones.

¿En qué momentos está inmóvil?

IV y VI, porque su posición se mantiene estable a pesar de que el tiempo transcurra.

¿En esta gráfica es posible observar la velocidad de Juan?, Justifica tu respuesta

Sí, porque se puede suponer que cada momento representa un cambio de velocidad, pero no se puede calcular porque no se tiene datos suficientes.

¿Cómo es la velocidad en la sección II con respecto a la de la sección VII? Justifique

la Velocidad (II) es menor que Velocidad (VII) deacuerdo al texto, porque la velocidad es mayor en un taxi que caminando rápido, porque avanza mayor distancia en menor tiempo.

Identifica algún intervalo de tiempo en la sección II donde la velocidad sea mayor que la velocidad en algún intervalo de la sección VII.

Al inicio de ambas secciones, porque la velocidad inicial de la seccion II es >0, mientras que en la sección VII el taxi parte del reposo en el segmento a.
Además la pendiente es más inclinada en la sección IIa

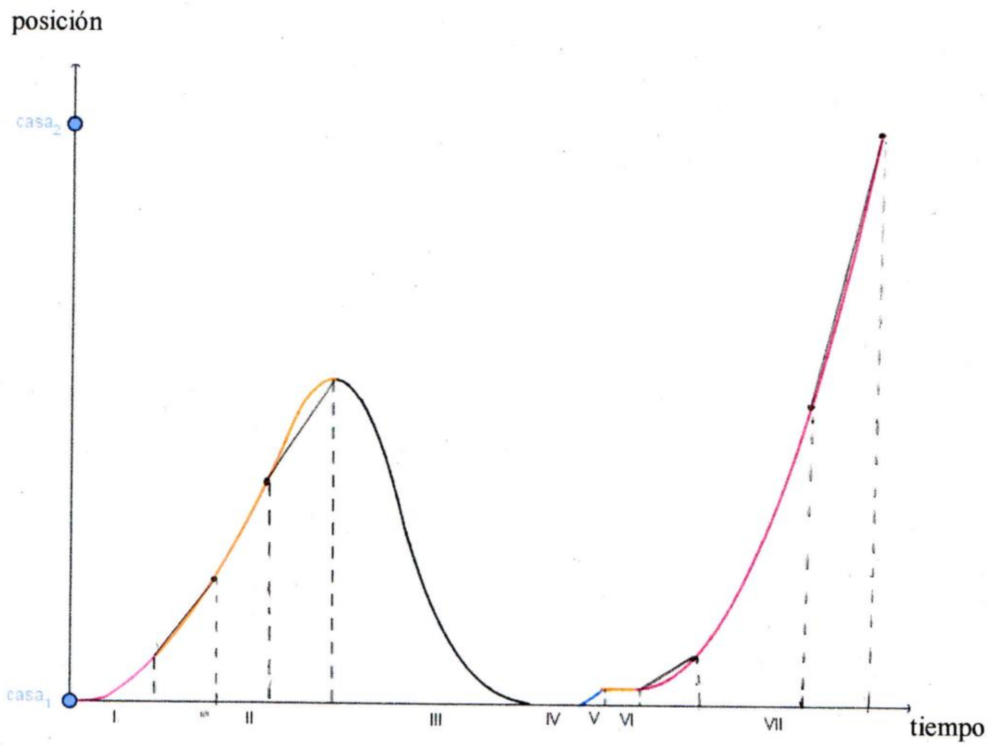
Haz lo mismo que en la pregunta anterior, pero donde la velocidad en un intervalo en la sección II sea menor que la velocidad en un intervalo de la sección VII.

En el segmento d, porque en la sección 2 va desacelerando al final mientras que en la sección 7 la velocidad aumenta.
Además la sección es más inclinada (en la sección VII d).

Equipo 9

Actividad 2 parte I

Instrucciones: Observa la siguiente gráfica que representa el movimiento de Juan a través de la comparación de posición contra tiempo. Contesta cada una de las preguntas y justifica tus respuestas.



¿En qué sección o secciones cambia su posición más rápido?

II, VII

porque la pendiente que une al punto inicial y puto final de estos segmentos de la gráfica es más cercana a ser una recta vertical.

¿En qué momentos está inmóvil?

IV, VI

La aparición de segmentos con pendiente cero, indican que no hay cambio alguno de posición

¿En esta gráfica es posible observar la velocidad de Juan?, Justifica tu respuesta

Se puede observar tomando en cuenta la pendiente de cualquiera de las secciones de la gráfica.

¿Cómo es la velocidad en la sección II con respecto a la de la sección VII? Justifique

Menor porque el ángulo de la recta que forman los puntos de la sección II, es menor al ángulo de la recta que forman los puntos de la sección VII, con respecto a la horizontal

Identifica algún intervalo de tiempo en la sección II donde la velocidad sea mayor que la velocidad en algún intervalo de la sección VII.

Al inicio de ambas secciones un determinado intervalo de tiempo y el cambio de posición de la sección II fue más rapido que el de la sección VII

Haz lo mismo que en la pregunta anterior, pero donde la velocidad en un intervalo en la sección II sea menor que la velocidad en un intervalo de la sección VII.

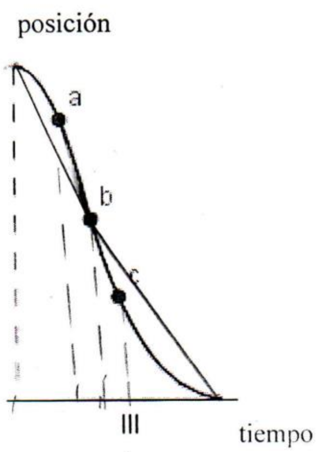
Al final de las secciones, con un intervalo específico (para ambas) se pudo observar que la velocidad del auto incrementa conforme más recorre.

Anexo 3. Evidencias de Actividad 2 parte II

Equipo 1

Actividad 2 parte II

Instrucciones: Reflexiona sobre el movimiento que llevaba a cabo Juan en intervalos específicos para analizar cómo varía la velocidad en determinados puntos. Justifica cada respuesta.



En la sección III la curva presenta un cambio de concavidad en b, ¿qué significa este cambio de concavidad con respecto al movimiento de Juan?

A partir del punto b empieza a desacelerar paulatinamente debido a que se acerca más a su casa.

¿Qué puedes decir acerca de la velocidad en el intervalo de a a b?

Es mayor a comparación al intervalo b a c, debido a que se recorre mayor distancia en el mismo tiempo.

¿Qué puedes decir acerca de la velocidad en el intervalo de *b* a *c*?

Es menor en comparación al intervalo a a b, debido a que recorre menos distancia en el mismo tiempo.

¿Cómo es la velocidad antes de *b* con respecto a la velocidad después de *b*?

Antes del punto b la velocidad es constante pero a partir del punto b, considerado el punto en el que esta más cerca de su casa, su velocidad manifiesta una disminución paulatina hasta llegar a su casa.

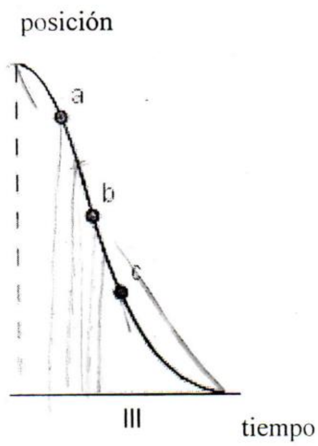
Si tomas dos intervalos cualesquiera, ¿qué características deben de tener para concluir que en alguno de ellos la velocidad es mayor que en el otro?

La primera característica debe ser que tengan el mismo tiempo en ambos intervalos; tener pendientes diferentes.

Equipo 2

Actividad 2 parte II

Instrucciones: Reflexiona sobre el movimiento que llevaba a cabo Juan en intervalos específicos para analizar cómo varía la velocidad en determinados puntos. Justifica cada respuesta.



En la **sección III** la **curva** presenta un **cambio de concavidad** en b. ¿qué **significa este** cambio de concavidad **con respecto** al movimiento **de Juan**?

Que su velocidad es menor que su velocidad en el punto a poco mayor al punto C

¿Qué **puedes decir acerca** de la velocidad **en el intervalo** de a a b?

Fue aumentando porque al dividir la seccion a b y comparando los dos intervalos se puede apreciar que en el primer intervalo la velocidad era menor al del segundo intervalo llegando a la conlusion de que su velocidad fue creciendo

¿Qué puedes decir acerca de la velocidad en el intervalo de b a c?

Que fue disminuyendo del b a l c segmentando en 2 parte iguales dichos intervalos en los cuales se observa que el primer intervalo la velocidad era mayor que el segundo gracias a la velocidad q. tiene la pendiente de la secante con la definicion de velocidad.

¿Cómo es la velocidad antes de b con respecto a la velocidad después de b?

antes de b es mayor y despues de b es menor

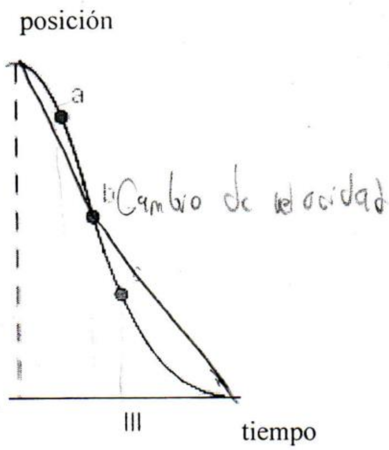
Si tomas dos intervalos cualesquiera, ¿qué características deben de tener para concluir que en alguno de ellos la velocidad es mayor que en el otro?

que la pendiente de la secante de cualquier intervalo sea mayor al del otro intervalo

Equipo 3

Actividad 2 parte II

Instrucciones: Reflexiona sobre el movimiento que llevaba a cabo Juan en intervalos específicos para analizar cómo varía la velocidad en determinados puntos. Justifica cada respuesta.



En la sección III la curva presenta un cambio de concavidad en *b*, ¿qué significa este cambio de concavidad con respecto al movimiento de Juan?

El punto b representa el cambio de dos decrementos de la velocidad promedio de $\overline{ab}$ y $\overline{bc}$

¿Qué puedes decir acerca de la velocidad en el intervalo de *a* a *b*?

En el intervalo hace un cambio de posición grande en un periodo corto de tiempo, por lo que se dice que su velocidad es alta

¿Qué puedes decir acerca de la velocidad en el intervalo de *b* a *c*?

En el intervalo bc Juan hace un cambio de posición medianamente corto en un periodo de tiempo un poco grande por lo que decimos que su velocidad es baja.

¿Cómo es la velocidad antes de *b* con respecto a la velocidad después de *b*?

es mayor, porque si trazamos dos rectas una que una el punto b. con el inicio y el final de la sección II respectivamente y las comparamos, se denota que la pendiente, o velocidad promedio antes de b es mayor que después de b.

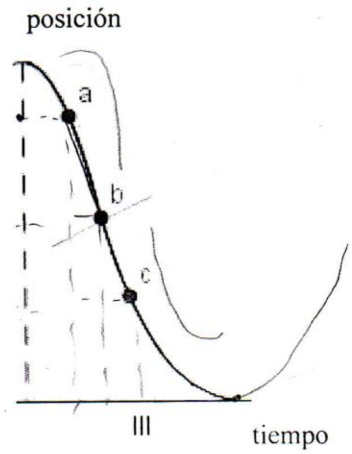
Si tomas dos intervalos cualesquiera, ¿qué características deben de tener para concluir que en alguno de ellos la velocidad es mayor que en el otro?

A mayor diferencia de posición recorrida en un intervalo de tiempo igual, mayor es la velocidad

Equipo 4

Actividad 2 parte II

Instrucciones: Reflexiona sobre el movimiento que llevaba a cabo Juan en intervalos específicos para analizar cómo varía la velocidad en determinados puntos. Justifica cada respuesta.



En la sección III la curva presenta un cambio de concavidad en *b*, ¿qué significa este cambio de concavidad con respecto al movimiento de Juan?

Representa un cambio de velocidad.

¿Qué puedes decir acerca de la velocidad en el intervalo de *a* a *b*?

La velocidad es mayor en ese intervalo ya que avanza una distancia mayor en menor tiempo.

¿Qué puedes decir acerca **de la velocidad** en el intervalo de ***b*** a ***c***?

La velocidad empieza a decrecer, ya que en el segmento ab tiene una mayor posición que el segmento bc en la misma cantidad de tiempo.

¿Cómo es la velocidad antes **de *b* con respecto** a la velocidad **después de** *b*?

Antes de b la velocidad es mayor y después empieza a disminuir

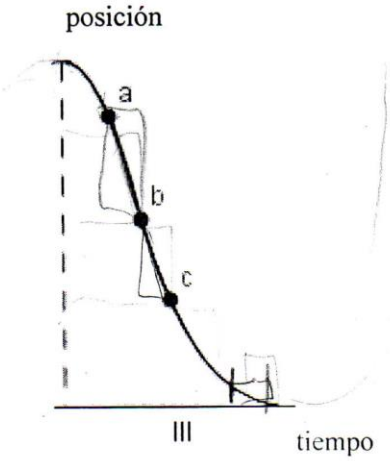
Si tomas dos intervalos **cualesquiera,** ¿**qué características deben de tener para** concluir que en alguno de ellos la velocidad es **mayor que en el** otro?

Que en el primero se recorre un distancia mayor en determinado tiempo y en el segundo se recorre una distancia menor en el mismo tiempo.

Equipo 5

Actividad 2 parte II

Instrucciones: Reflexiona sobre el movimiento que llevaba a cabo Juan en intervalos específicos para analizar cómo varía la velocidad en determinados puntos. Justifica cada respuesta.



En la sección III la curva presenta un **cambio** de concavidad en *b*, **¿qué significa** este cambio de concavidad con respecto al movimiento de Juan?

Juan partió de un punto inicial a una posición x_1 y de este punto regresó al punto inicial, y como no hay distancias negativas desde el punto solo que regresar a una posición x_2.

¿Qué puedes decir acerca de la velocidad en el intervalo de *a* a *b*?

Del punto a al b se puede observar una velocidad muy cercana a un a pendiente siendo así una velocidad constante de punto a punto

¿Qué puedes decir acerca de la velocidad en el intervalo de *b* a *c*?

Del segmento b al C se va disminuyendo la velocidad constantemente ya que en algun punto de la gráfica comienza a disminuir debido a que en el sig. segmento.

¿Cómo es la velocidad antes de *b* con respecto a la velocidad después de *b*? disminuye

Esta disminuye de mayor a menor siendo algun punto del segmento àb va aumentando hasta un punto máximo b y luego disminuyendo hasta el cero o inicio

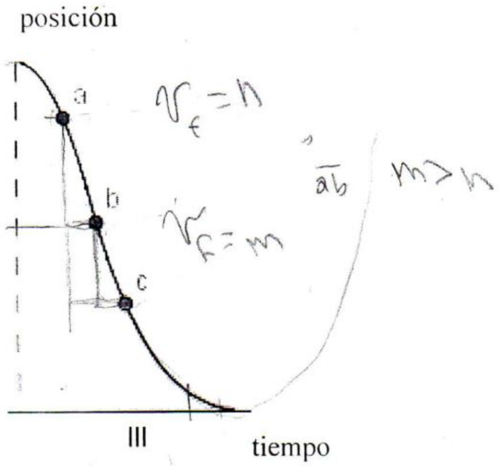
Si tomas dos intervalos cualesquiera, ¿qué características deben de tener para concluir que en alguno de ellos la velocidad es mayor que en el otro?

Que alguno de los dos segmentos debe contar con una pendiente, secante diferente ya que esto puede garantizar que alguna de las dos sea menor a otra

Equipo 6

Actividad 2 parte II

Instrucciones: Reflexiona sobre el movimiento que llevaba a cabo Juan en intervalos específicos para analizar cómo varía la velocidad en determinados puntos. Justifica cada respuesta.



En la sección III la curva presenta un cambio de concavidad en *b*, ¿qué significa este cambio de concavidad con respecto al movimiento de Juan?

La V empieza a decrecer ya que si trazamos una recta secante $\overline{ab}$ y $\overline{bc}$
$m_{sec}\ \overline{ab} > m_{sec}\ \overline{bc}$

¿Qué puedes decir acerca de la velocidad en el intervalo de *a* a *b*?

Es el intervalo con mayor V en la sección III
En el punto a hay una V_i llamada n y en el punto b hay una V_f llamada m, tal que $n < m$. Cada vez que el intervalo se hace más pequeño el ángulo de elevación de la pendiente es mayor.

¿Qué puedes decir acerca de la velocidad en el intervalo de *b* a *c*?

En el punto b hay una v_i llamada n y en el punto c hay una v_f llamada m, tal que n > m.
Si hacemos los intervalos c/ vez más pequeños el angulo de elevación de la pendiente va disminuyendo

¿Cómo es la velocidad antes de *b* con respecto a la velocidad después de *b*?

La v es mayor antes de b y después de b empieza a decrecer

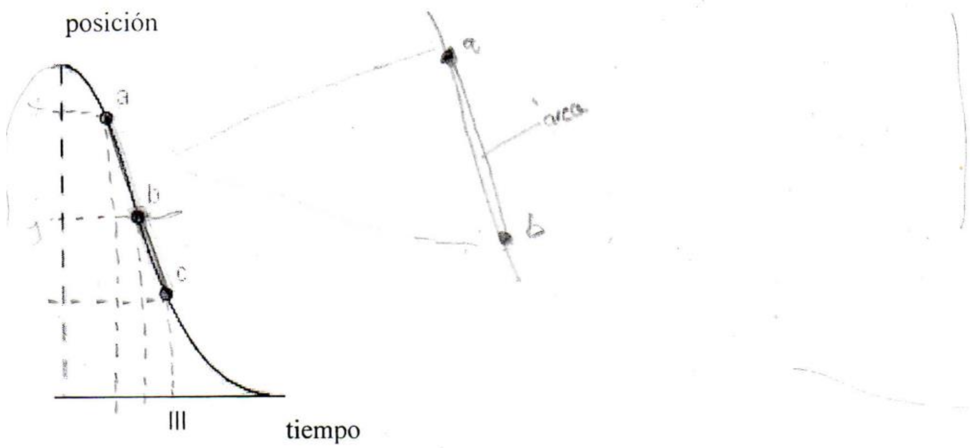
Si tomas dos intervalos cualesquiera, ¿qué características deben de tener para concluir que en alguno de ellos la velocidad es mayor que en el otro?

Se trazan rectas secantes en c/ intervalo. $m_{sec} = \bar{v}$. La recta que tenga mayor angulo de elevación es la que tiene mayor $\bar{v}$

Equipo 7

Actividad 2 parte II

Instrucciones: Reflexiona sobre el movimiento que llevaba a cabo Juan en intervalos específicos para analizar cómo varía la velocidad en determinados puntos. Justifica cada respuesta.



En la sección III la curva presenta un cambio de concavidad en *b*, ¿qué significa este cambio de concavidad con respecto al movimiento de Juan?

Que Juan aumento su velocidad ya que la pendiente de la recta secante que se forma en ambos intervalos es negativa... en el intervalo [a, b] la pendiente de la recta secante es menor que en el caso del intervalo [b, c], donde la pendiente es mayor.

¿Qué puedes decir acerca de la velocidad en el intervalo de *a* a *b*?

Suponiendo que podemos medir el área entre la recta secante y la curva, encontraríamos que esa área en el intervalo de "a a b" tiende a ser "0" osea que la curva y la recta tienden a ser la misma y si esto pasa la velocidad tiende a ser constante.

¿Qué puedes decir acerca de la velocidad en el intervalo de b a c?

¿Cómo es la velocidad antes de b con respecto a la velocidad después de b?

antes del punto b Juan tenía una velocidad mayor. ya que la pendiente de la recta secante que se forma en ambos intervalos (antes y después de b) es negativa. la pendiente de la recta del intervalo antes de b es menor que la del intervalo después de b lo cual indica que la velocidad antes de b era mayor que la velocidad despúes de b.

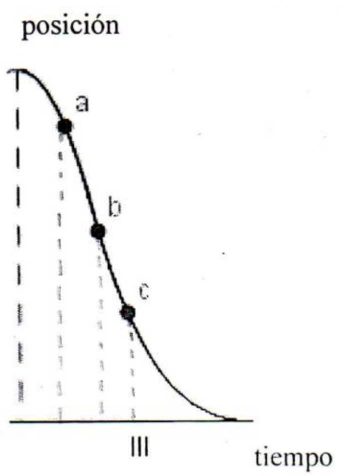
Si tomas dos intervalos cualesquiera, ¿qué características deben de tener para concluir que en alguno de ellos la velocidad es mayor que en el otro?

La pendiente debe ser menor o mayor en cada intervalo según sea el caso.

Equipo 8

Actividad 2 parte II

Instrucciones: Reflexiona sobre el movimiento que llevaba a cabo Juan en intervalos específicos para analizar cómo varía la velocidad en determinados puntos. Justifica cada respuesta.



En la sección III la curva presenta un cambio de concavidad en *b*, ¿qué significa este cambio de concavidad con respecto al movimiento de Juan?

Representa un cambio de velocidad y trayectoria

¿Qué puedes decir acerca de la velocidad en el intervalo de *a* a *b*?

La curva del $\overline{ab}$ se asemeja bastante a la pendiente de la recta secante, por lo que se podría decir que casi es una velocidad promedio

¿Qué puedes decir acerca de la velocidad en el intervalo de *b* a *c*?

¿Cómo es la velocidad antes de *b* con respecto a la velocidad después de *b*?

Despues de b empiezo a desacelerar y antes de b está acelerando

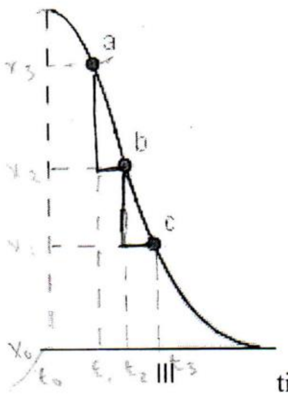
Si tomas dos intervalos cualesquiera, ¿qué características deben de tener para concluir que en alguno de ellos la velocidad es mayor que en el otro?

Comparando los angulos, cuando son mayores las velocidades tambien

Equipo 9

Actividad 2 parte II

Instrucciones: Reflexiona sobre el movimiento que llevaba a cabo Juan en intervalos específicos para analizar cómo varía la velocidad en determinados puntos. Justifica cada respuesta.



En la sección III la curva presenta un cambio de concavidad en *b*, ¿qué significa este cambio de concavidad con respecto al movimiento de Juan?

que Juan está regresando a su casa porque la pendiente de la recta secante que atraviesa los puntos a y b es negativa

¿Qué puedes decir acerca de la velocidad en el intervalo de *a* a *b*?

Al trazar una recta secante de los puntos a y b se observa la velocidad promedio y al compararla con la gráfica del punto a al b, se observa que no son iguales, por lo tanto, la velocidad no es constante.

¿Qué puedes **decir** acerca de la velocidad **en el intervalo** de *b* a *c*?

Al trazar una recta secante de los puntos b y c se puede observar que la velocidad va de menos a más.

¿Cómo es **la velocidad** antes de *b* con respecto **a la velocidad** después de ***b***?

la vel antes de b es mayor a la vel. despues de b

Si tomas **dos intervalos** cualesquiera, ¿**qué características** deben de tener **para concluir** que en alguno **de ellos la velocidad** es mayor que **en el otro?**

que la pendiente de la recta secante y el ángulo de inclinación entre más se acerquen a una recta vertical su velocidad tiende a aumentar

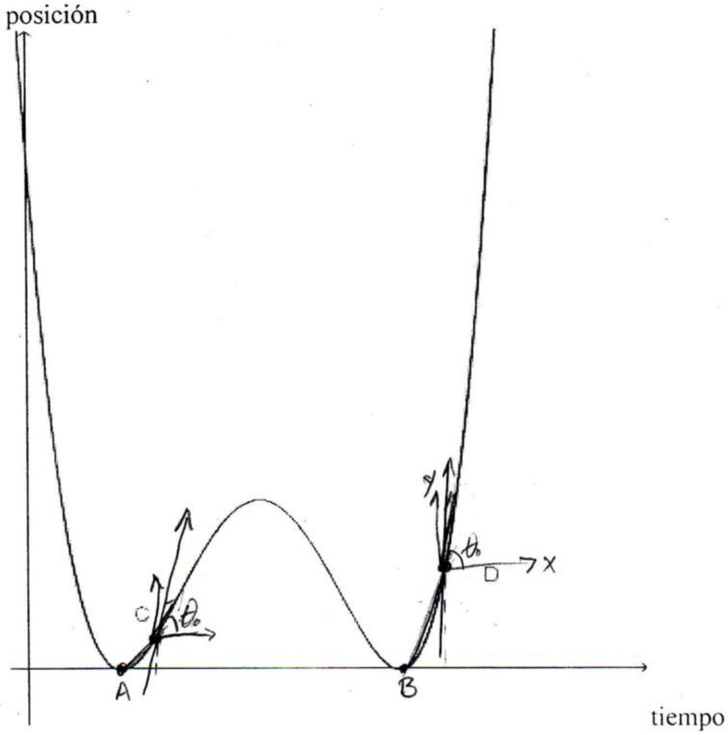
(x_1, t_1) $(x_2\ t_2)$

Anexo 4. Evidencias de Actividad 3

E1

Actividad 3

Instrucciones: Dada la gráfica, posición contra tiempo, analiza cómo es la velocidad en el punto C con respecto a la velocidad en el punto D. Justifique su respuesta.

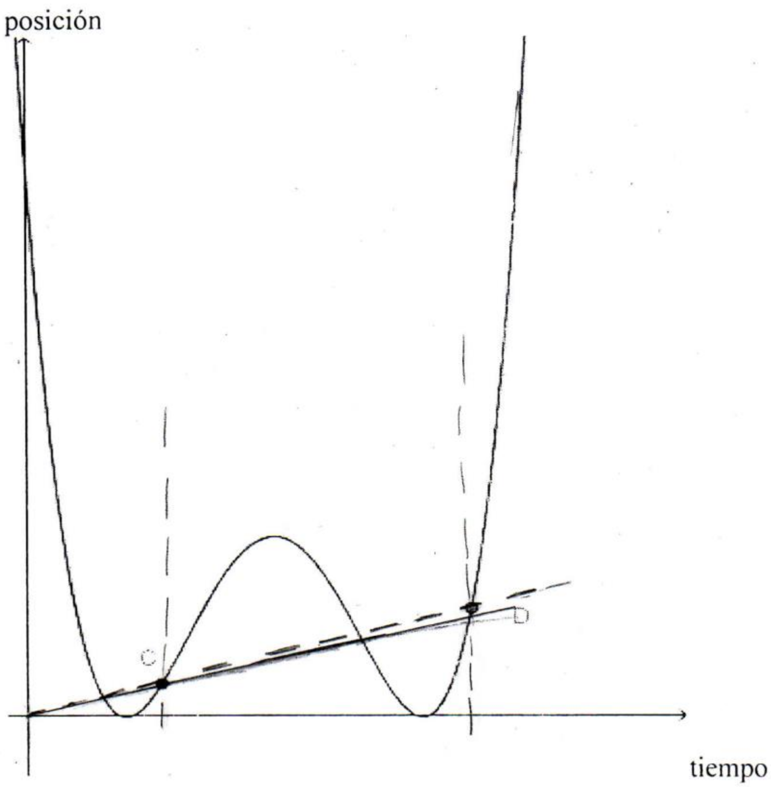


La velocidad del punto D es mayor a la velocidad del punto C debido a que si se trasa una recta tangente que solo toca a esos puntos se puede obtener la velocidad de cada punto, después se pueden comparar los grados de inclinación de ambas pendientes tangentes y así se nota cual de los puntos tiene una mayor velocidad

E2

Actividad 3

Instrucciones: Dada la gráfica, posición contra tiempo, analiza cómo es la velocidad en el punto C con respecto a la velocidad en el punto D. Justifique su respuesta.

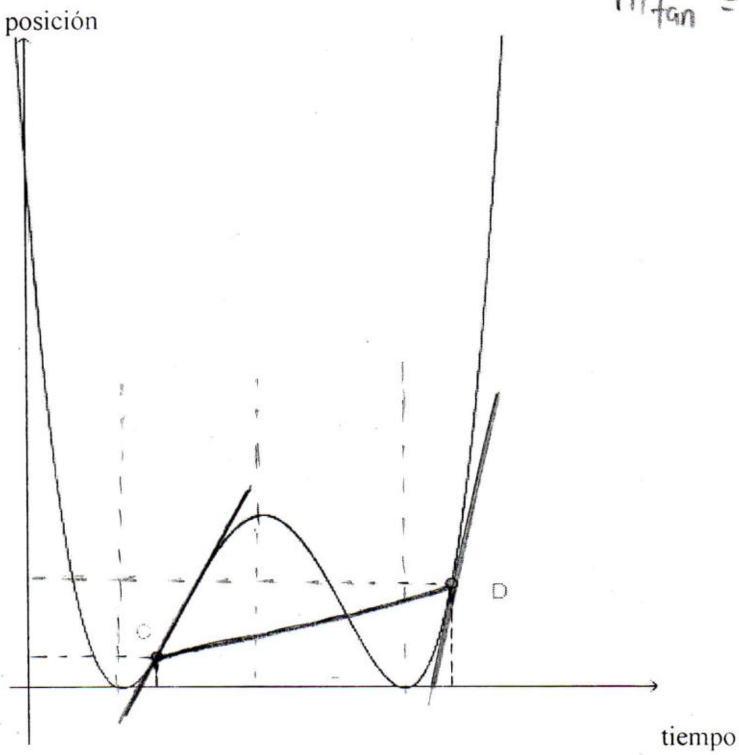


Es casi la misma, ya que, tomando el origen como punto de inicio, de donde se traza una recta para cada punto, las pendientes son diferentes, en el punto C es, mínimamente, menor que en el D, puesto que en ésta última la pendiente es mayor.

E3

Instrucciones: Dada la gráfica, posición contra tiempo, analiza cómo es la velocidad en el punto C con respecto a la velocidad en el punto D. Justifique su respuesta.

$m_{tan} = V_{inst}.$

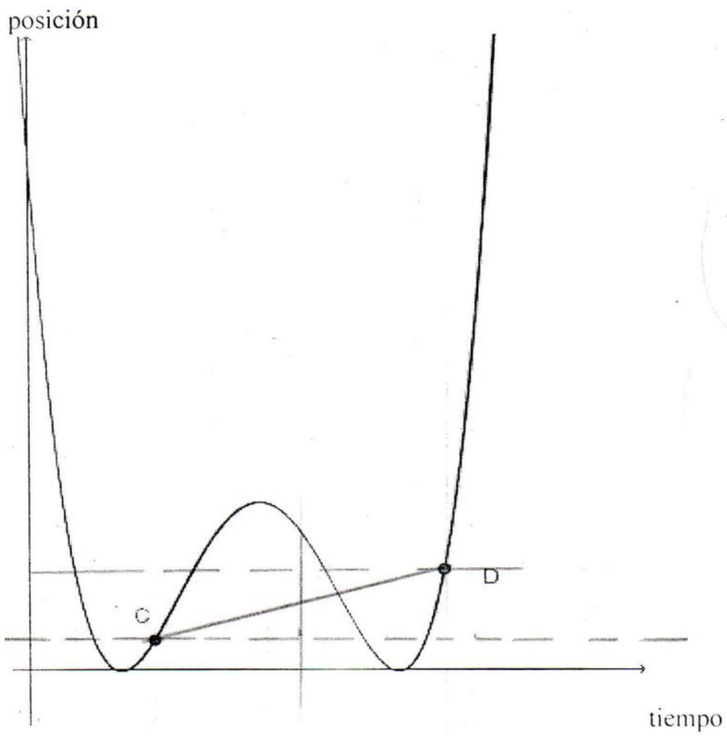


La velocidad es mayor en el punto D, ya que al unir ambos puntos (C, D) se observa que hay una pendiente creciente en el primer cuadrante y también, al trazar rectas tangentes. en ambos puntos marcados de la gráfica, podemos ver que el ángulo de inclinación del punto D es mayor a comparación del de C que se ve más inclinado.

E5

Actividad 3

Instrucciones: Dada la gráfica, posición contra tiempo, analiza cómo es la velocidad en el punto C con respecto a la velocidad en el punto D. Justifique su respuesta.

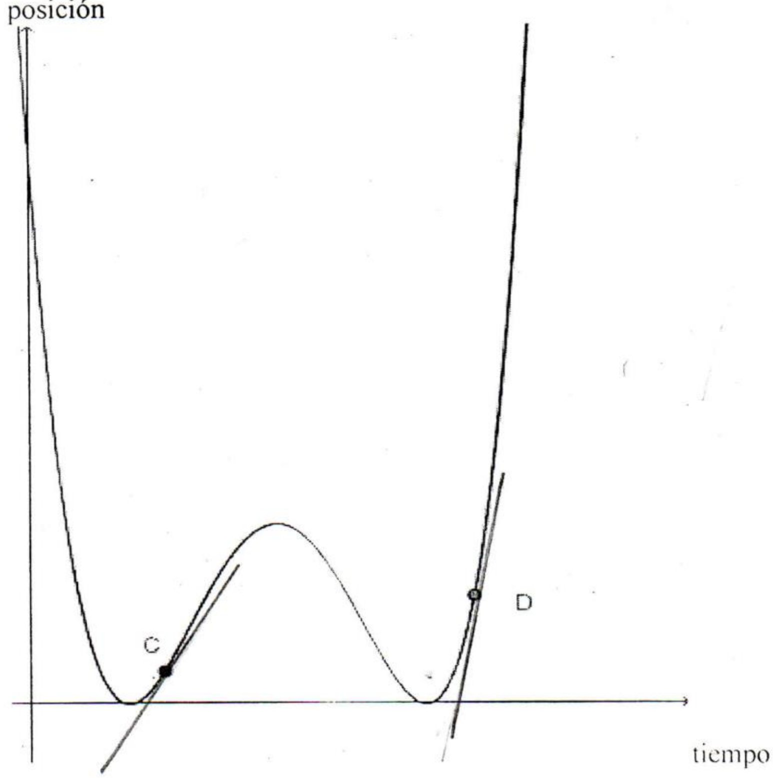


Trazando una secante y tomando su mitad
y se ve el cambio de el angulo de
inclinación de cada pendiente en donde
el punto D tiene mayor grado de inclinación
por lo que tiene un mayor grado de
velocidad que en el punto C.

E6

Actividad 3

Instrucciones: Dada la gráfica, posición contra tiempo, analiza cómo es la velocidad en el punto C con respecto a la velocidad en el punto D. Justifique su respuesta.

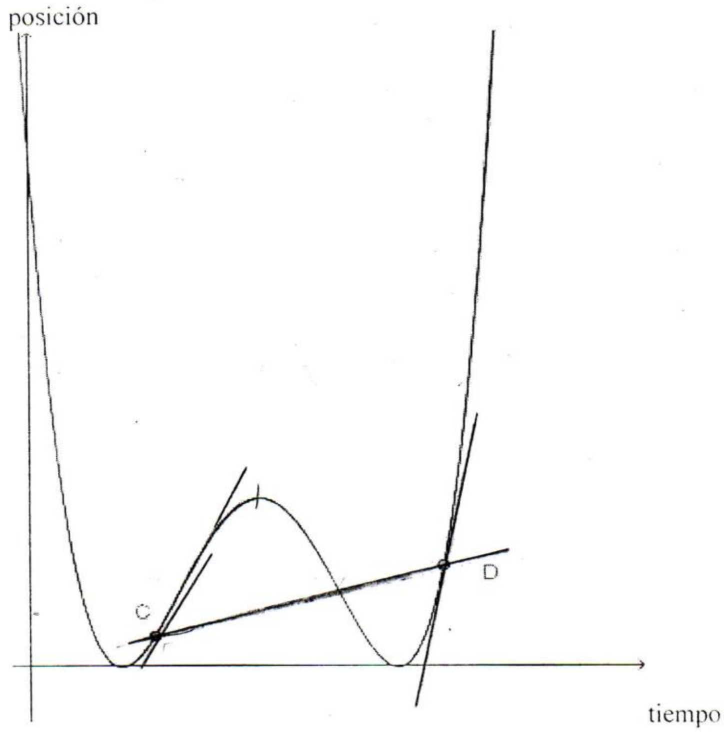


Para poder determinar como es la velocidad del punto C respecto al d debemos trazar una tangente en cada uno de los puntos para así determinar la inclinacion de la tangente por medio de la pendiente dicho que entre mas inclinada sea la recta tiene una pendiente mayor entonces la velocidad en el punto c es menor que en el D.

E7

Actividad 3

Instrucciones: Dada la gráfica, posición contra tiempo, analiza cómo es la velocidad en el punto C con respecto a la velocidad en el punto D. Justifique su respuesta.



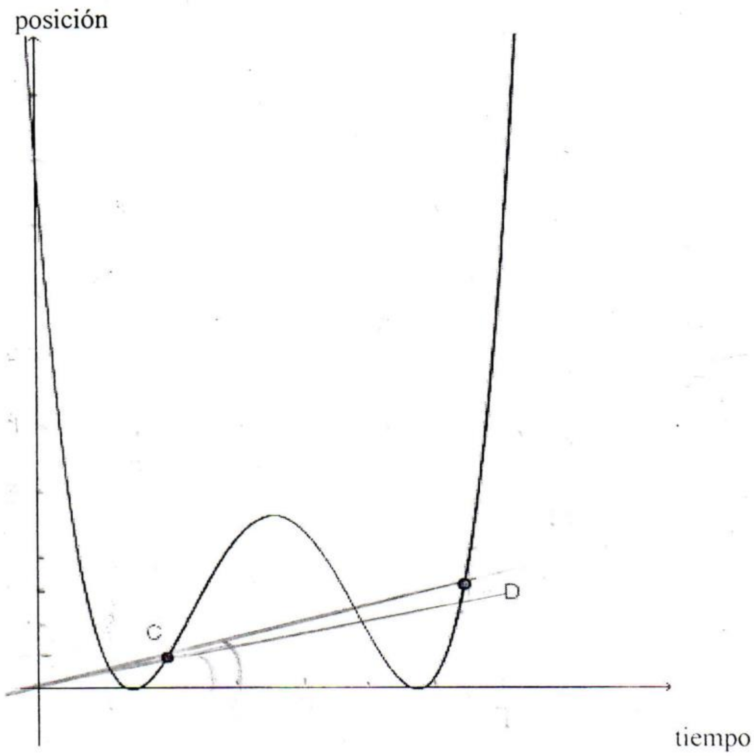
La velocidad es mayor en el punto D, ya que al unir ambos puntos (c,d), se observa que hay una pendiente creciente en el primer cuadrante, y también al trazar rectas secantes en ambos puntos marcados en la gráfica, podemos ver que el ángulo de inclinación del punto D, es mayor a comparación de C que se ve más inclinado.

) velocidad instantanea.

E8

Actividad 3

Instrucciones: Dada la gráfica, posición contra tiempo, analiza cómo es la velocidad en el punto C con respecto a la velocidad en el punto D. Justifique su respuesta.

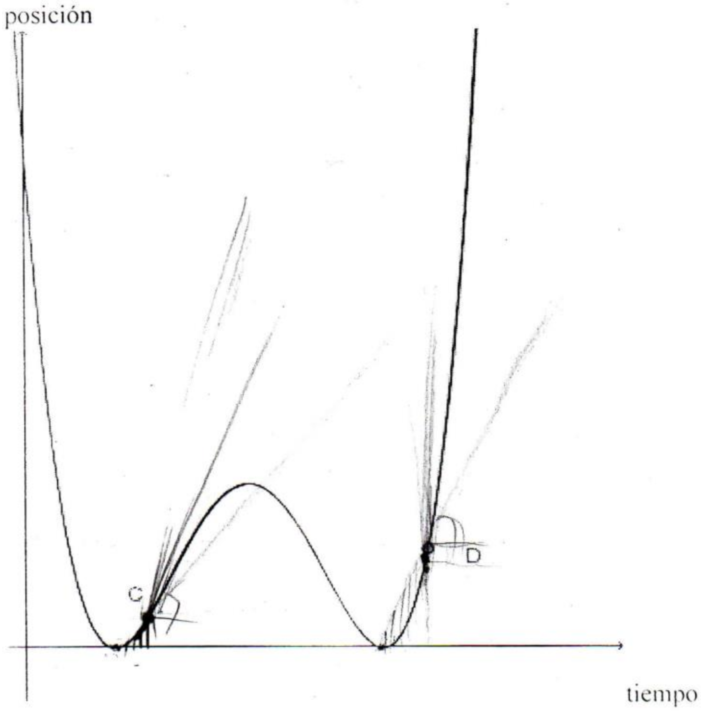


Si trazamos 2 rectas una que uniera al origen con el punto C y otra que lo uniera con D y las comparamos la recta que une al origen con C tiene un ángulo de inclinacion menor que el de otra recta por lo que podemos decir que la velocidad en ese punto es menor.

E9

Actividad 3

Instrucciones: Dada la gráfica, posición contra tiempo, analiza cómo es la velocidad en el punto C con respecto a la velocidad en el punto D. Justifique su respuesta.

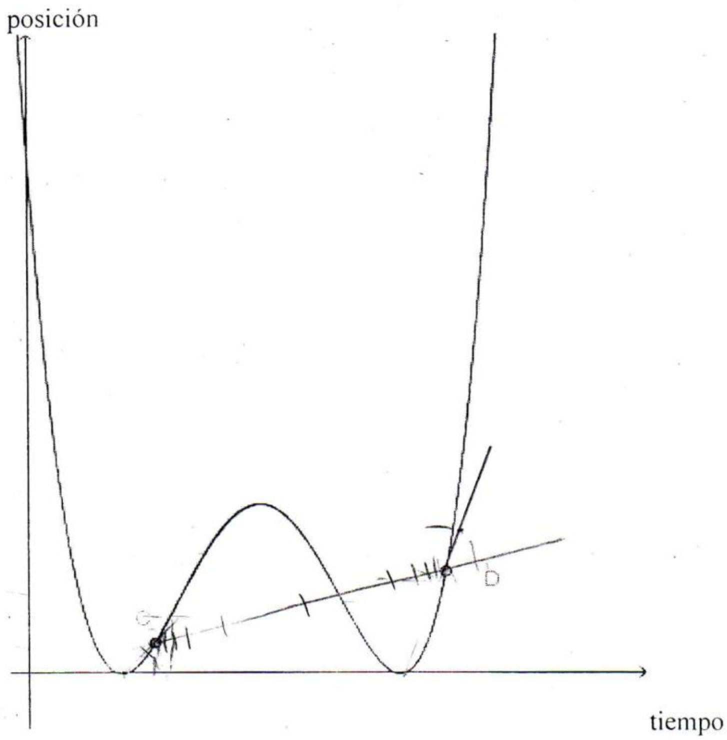


Para comparar C y D estos dos puntos deben pertenecer a un intervalo, el primer intervalo que se toma para C lo inicié en la posición 0 con un tiempo determinado a C, con esto C tiene una velocidad promedio, sin embargo se desprecia la velocidad de los demás puntos así que se van tomando otros puntos anteriores a C, acercandose lo mayor posible, de esta forma se sacarían muchas velocidades promedio donde C pertenece a ellas y luego se sumarían y se sacaría otro promedio de esas velocidades promedio hasta llegar a cierto número muy cercano a lo que es la velocidad de C, y lo mismo se haría para D y compararíamos aquel promedio donde D tiene un cambio mayor.

E10

Actividad 3

Instrucciones: Dada la gráfica, posición contra tiempo, analiza cómo es la velocidad en el punto C con respecto a la velocidad en el punto D. Justifique su respuesta.

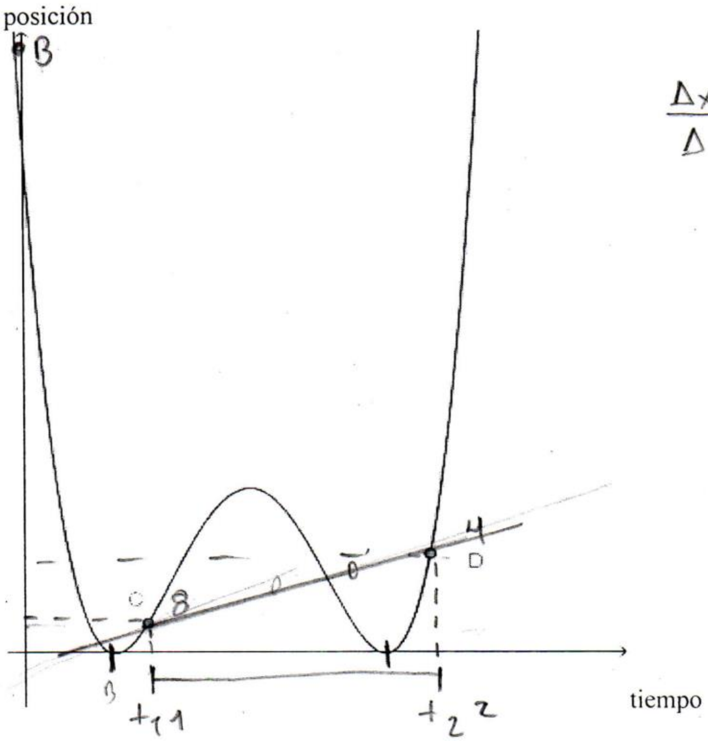


"ya que pide analizar el comportamiento de la función en determinado punto, lo que pide es el límite de ambos puntos. Por lo que, se podría obtener $\lim_{x \to C} f(x)$ y $\lim_{x \to D} f(x)$ y compararlos los límites de cada punto entre sí y de esa forma determinar cual es menor y cual es mayor.

E11

Actividad 3

Instrucciones: Dada la gráfica, posición contra tiempo, analiza cómo es la velocidad en el punto C con respecto a la velocidad en el punto D. Justifique su respuesta.



$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{v_f - v_1}{t_f - t_i}$$

$\lim$
Δ

$$v_{ins} = \lim_{\Delta t \to 0} [\vec{v}] \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{\Delta x}{\Delta t}\right]$$

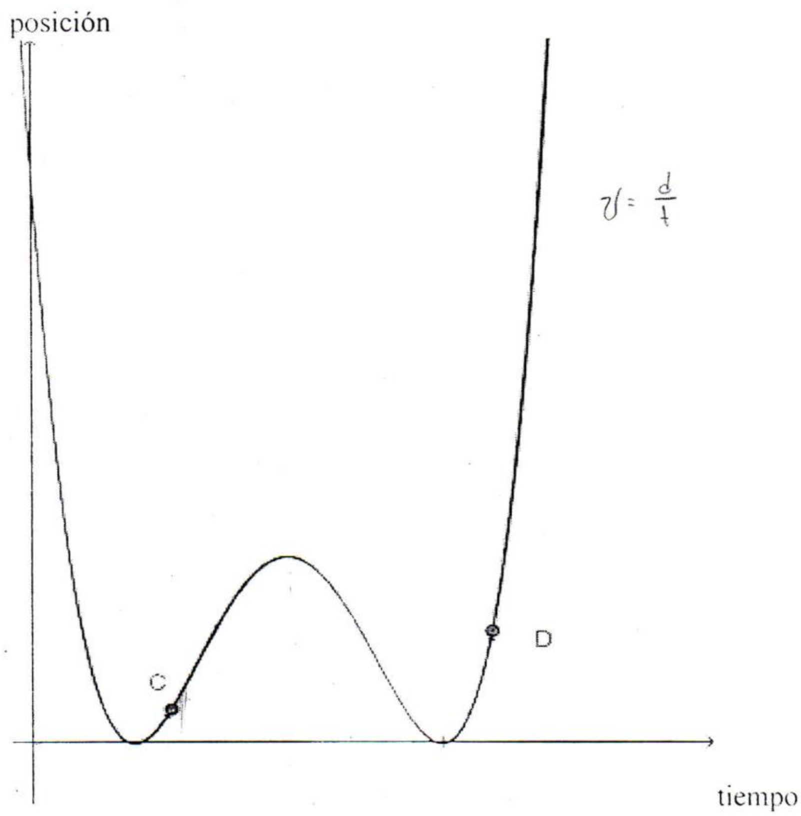
En este caso la velocidad del ponto C es menor que la velocidad del ponto D, ya que al trazar una recta que pase por esos dos pontos se puede observar que D es mayor C

trazar una recta que pase por los pontos C y D

E12

Actividad 3

Instrucciones: Dada la gráfica, **posición contra** tiempo, **analiza cómo** es la velocidad **en el punto** C con **respecto a la velocidad** en el **punto D. Justifique** su **respuesta.**

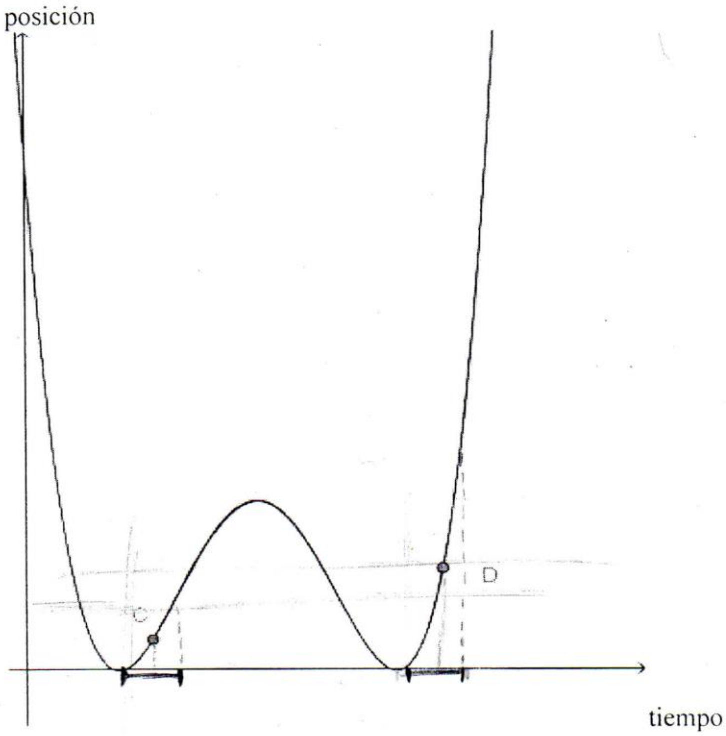


Primero ir tomando un punto muy, muy cercano a cada uno de los puntos, posteriormente de cada uno de ese punto muy cercano trazar la pendiente y posteriormente medir el angulo de inclinación de cada uno de los intervalos, es decir de cada pendiente para darnos cuenta que D tiene un angulo mayor que C, por lo que la velocidad es mayor en ese punto.

E13

Actividad 3

Instrucciones: Dada la gráfica, posición contra tiempo, analiza cómo es la velocidad en el punto C con respecto a la velocidad en el punto D. Justifique su respuesta.



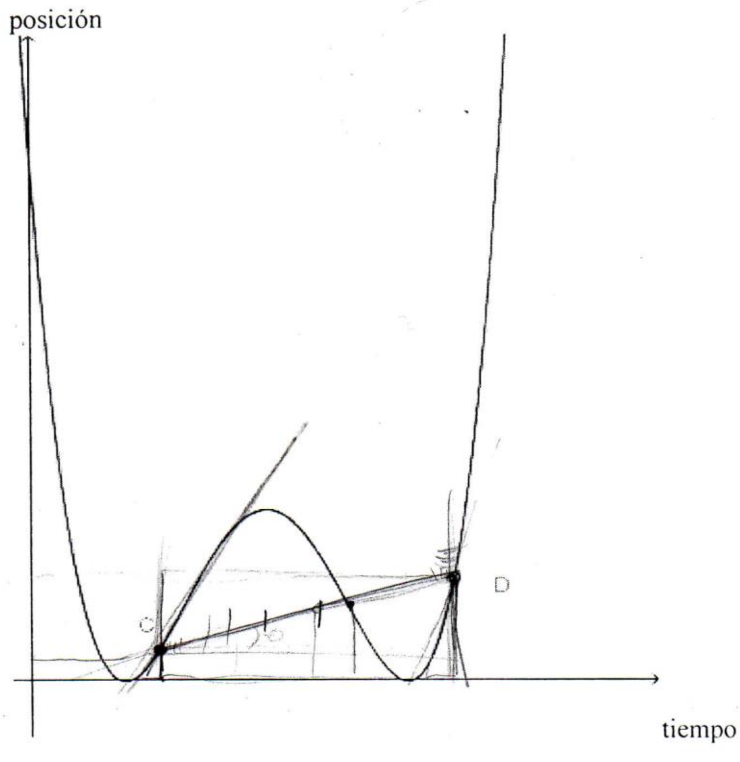
La velocidad en el punto C es menor con respecto al punto D. Podemos llegar a esta conclusión observando el contexto de cada punto y evaluando X intervalo de tiempo tanto por la derecha y la izquierda de cada punto suponiendo que se toma el mismo intervalo X para ambos puntos.
Una vez determinado el comportamiento de los puntos con respecto al intervalo X se puede aplicar el conocimiento adquirido en pasadas sesiones para determinar el punto que presenta mayor velocidad con respecto al otro punto.
Una vez evaluado dicho comportamiento el intervalo se reduce las veces que sea necesario

donde la velocidad en un punto tiende a 0 para poder hacercarnos a un punto y poder comparar.

E14

Actividad 3

Instrucciones: Dada la gráfica, posición contra tiempo, analiza cómo es la velocidad en el punto C con respecto a la velocidad en el punto D. Justifique su respuesta.

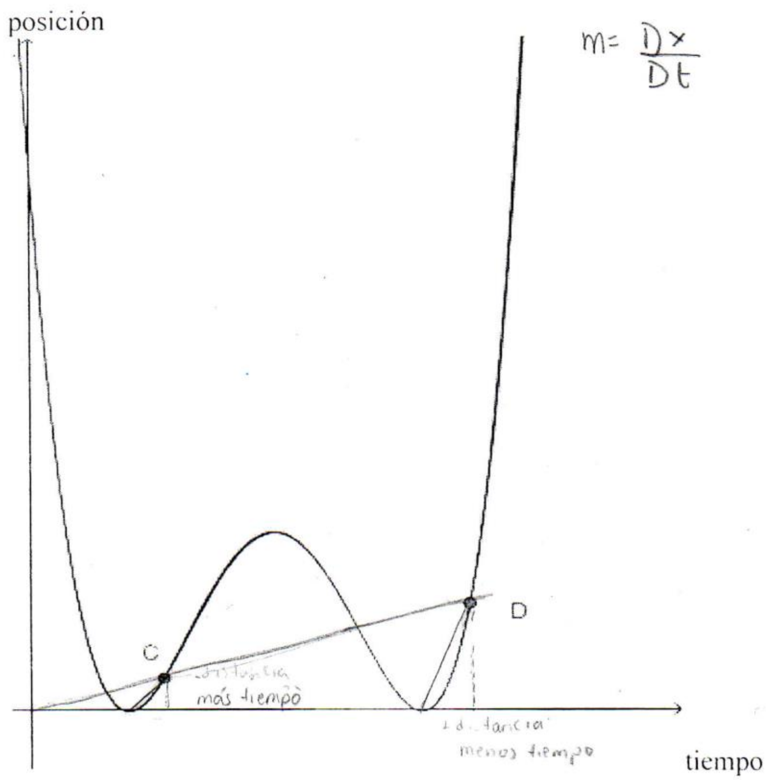


Si trazamos una linea del punto c al D, obtenemos la velocidad constante, una pendiente, siendo así, hubo un cambio de velocidad, algo que no podría ser si no existiera una pendiente, si fuera una constante, otro dato sería las pendientes tangentes que se podría formar con el punto y algun segmento de la gráfica, si son diferentes unas de otras comprobaría algun cambio de velocidad

E15

Actividad 3

Instrucciones: Dada la gráfica, posición contra tiempo, analiza cómo es la velocidad en el punto C con respecto a la velocidad en el punto D. Justifique su respuesta.

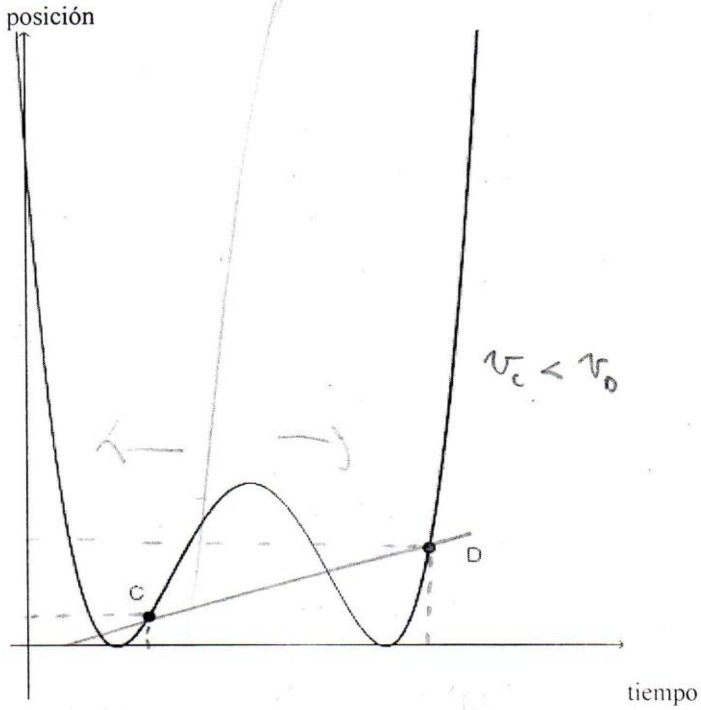


suponiendo que tenga el mismo tiempo se puede comparar
la velocidad del punto D es mayor que la del punto C dado que
tiene una pendiente mayor.
en el punto C la velocidad va aumentando poco y la velocidad
del Punto D va aumentando más

E16

Actividad 3

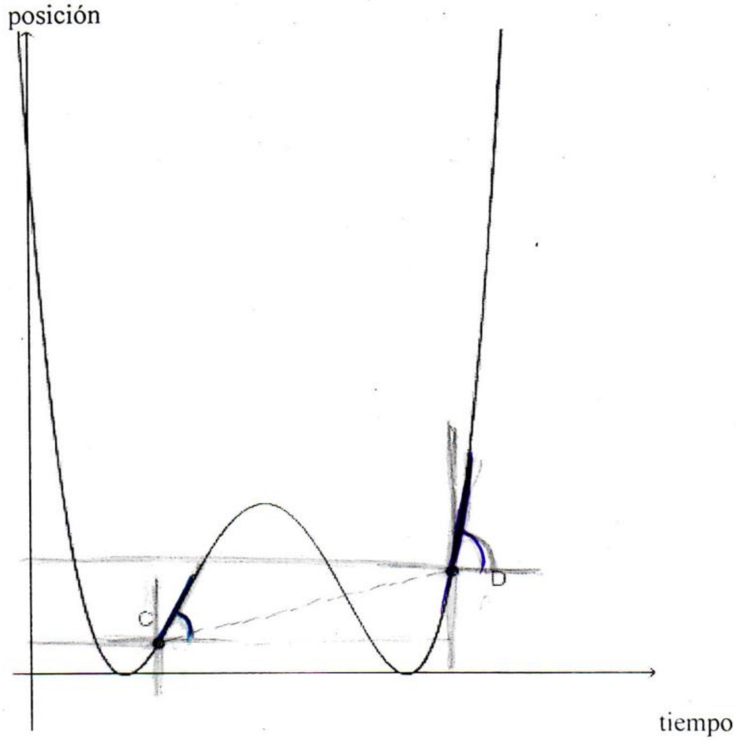
Instrucciones: Dada la gráfica, posición contra tiempo, analiza cómo es la velocidad en el punto C con respecto a la velocidad en el punto D. Justifique su respuesta.



$v_C < v_D$. ya que la forma de la gráfica implica que en un punto de la gráfica donde $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ y Δx es un punto de la gráfica y a medida que el punto se aleja de la posición inicial la v aumenta si C está más cerca de D. $v_C < v_D$

Si se traza una secante en C y D si $v_C = v_D \Rightarrow m = 0$ siendo $m_{sec} = \Delta v$ la v es igual, pero al tener $m \neq 0 \Rightarrow v$ es diferente, al ser m positiva quiere decir que la $v_C < v_F$

E17

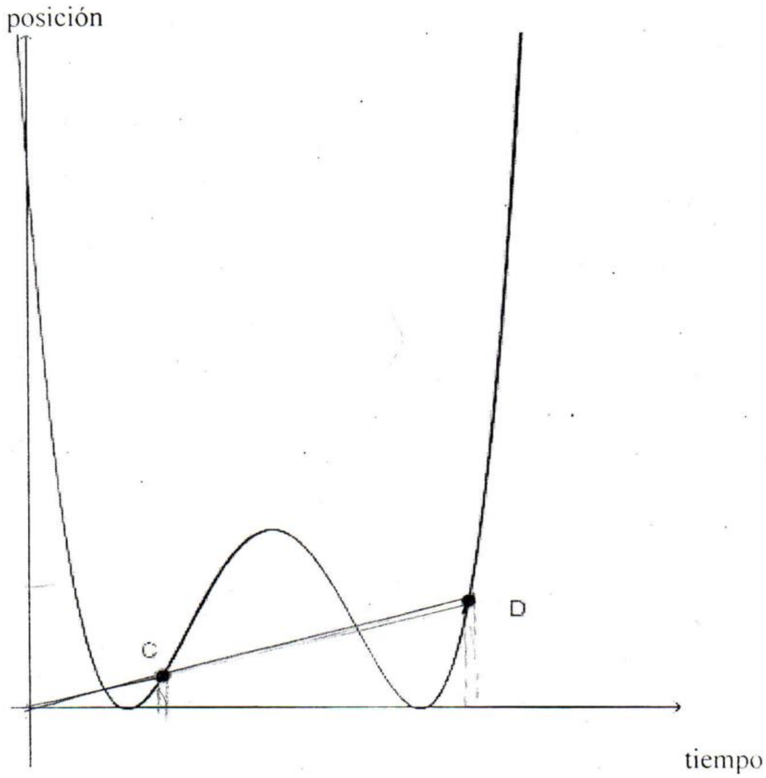


Se puede notar que la v es creciente, ya que comparamos la inclinación de la pendiente que inicia en el punto c y d. Con esto podemos determinar que con la velocidad del punto d se llega más lejos en menor tiempo. Si trazamos un plano en cada punto, podemos formar un ∢ de elevación de la m y con este podemos determinar su velocidad.

E18

Actividad 3

Instrucciones: Dada la gráfica, **posición contra** tiempo, **analiza cómo** es la velocidad **en el punto** C con **respecto a la** velocidad **en el punto D. Justifique su respuesta.**

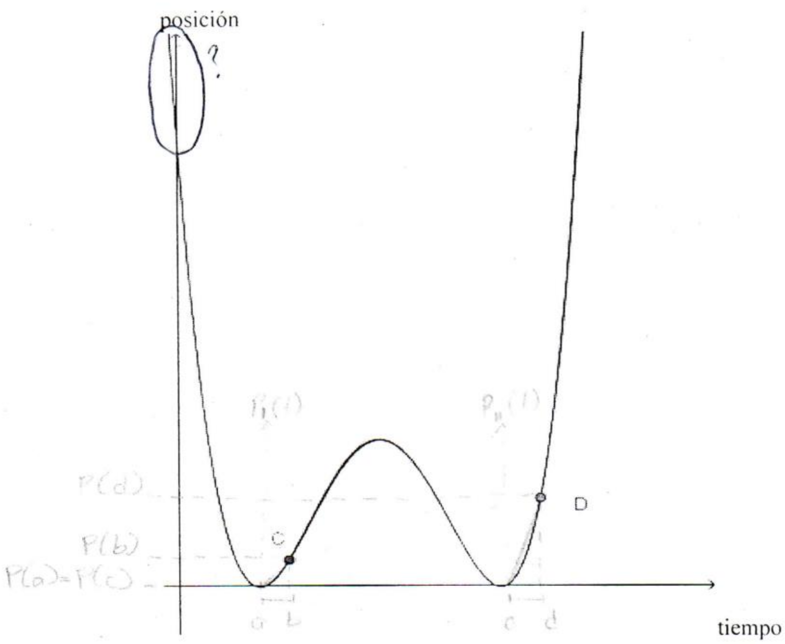


Si hicieramos un acercamiento al punto C y lo dividimos en 3 entonces podriamos sacar su pendiente, Si en el punto D hicieramos igual un acercamiento y lo dividimos en 3 entonces igual podriamos sacar la pendiente y al compararlas nos dariamos cuenta que C es menor que D.

E19

Actividad 3

Instrucciones: Dada la gráfica, posición contra tiempo, analiza cómo es la velocidad en el punto C con respecto a la velocidad en el punto D. Justifique su respuesta.



$[a, b] = [c, d]$ $[P(a), P(b)] < [P(b), P(d)]$

$\Rightarrow \frac{P(a)-P(b)}{a-b} < \frac{P(b)-P(d)}{b-d}$. Dadas las funciones $p_1(t)$

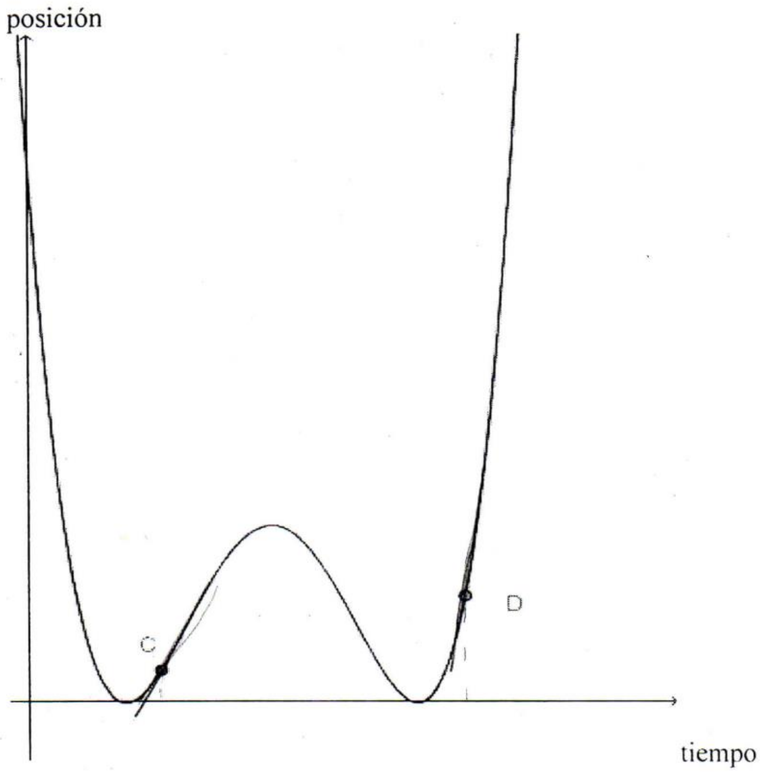
$= \frac{P(a)-P(b)}{a-b}t$ y $p_{11}(t) = \frac{P(b)-P(d)}{b-d}t$. Si $[P(a), P(b)] < [P(b), P(d)]$, $[a, b] = [c, d]$

$\Rightarrow p_1(b) < p_{11}(d) \Rightarrow \frac{P_1(b)}{b} < \frac{P_{11}(d)}{d} \Rightarrow \frac{P(b)}{b} < \frac{P(d)}{d}$

E20

Actividad 3

Instrucciones: Dada la gráfica, posición contra tiempo, analiza cómo es la velocidad en el punto C con respecto a la velocidad en el punto D. Justifique su respuesta.

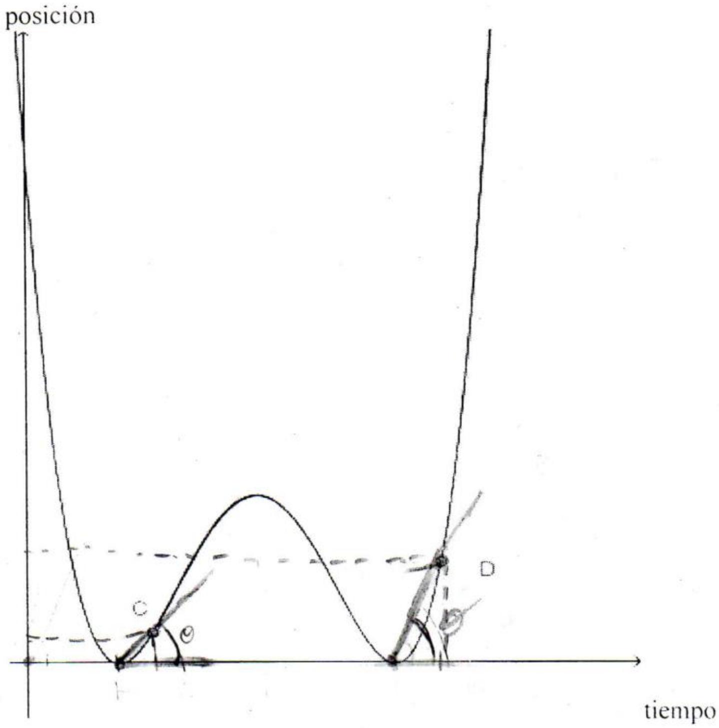


En el punto D la velocidad es menor que en el punto C porque si trazamos una pendiente recta secante sería mayor, lo

E21

Actividad 3

Instrucciones: Dada la gráfica, posición contra tiempo, analiza cómo es la velocidad en el punto C con respecto a la velocidad en el punto D. Justifique su respuesta.

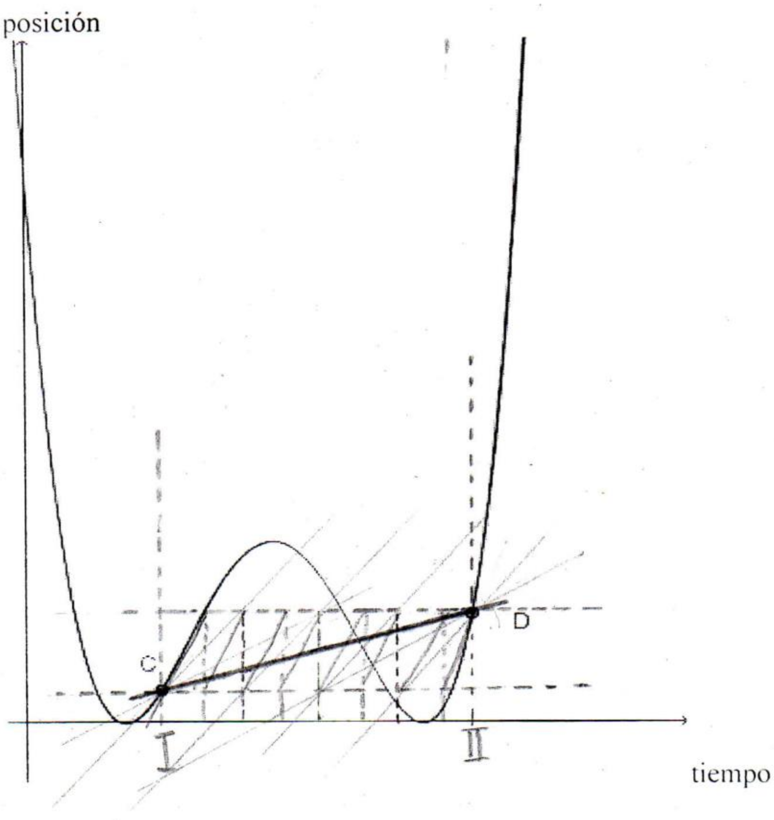


La velocidad en el punto C es menor que en el punto D. Si pudiesemos trazar intervalos de tiempo iguales y trazaramos una línea recta del inicio del intervalo al punto C y D respectivamente observariamos que ambas líneas tienen pendiente positiva lo cual muestra q' la velocidad aumenta, sin embargo si prolongamos la línea hasta la base de la gráfica y medimos el ángulo que se forma encontraremos que el ángulo que se forma a partir de la recta que une al punto D con el inicio del intervalo es mayor que el ángulo que se forma a partir de C, lo cual indica que la velocidad es mayor en el P. D que en el punto D,

E23

Actividad 3

Instrucciones: Dada la gráfica, posición contra tiempo, analiza cómo es la velocidad en el punto C con respecto a la velocidad en el punto D. Justifique su respuesta.

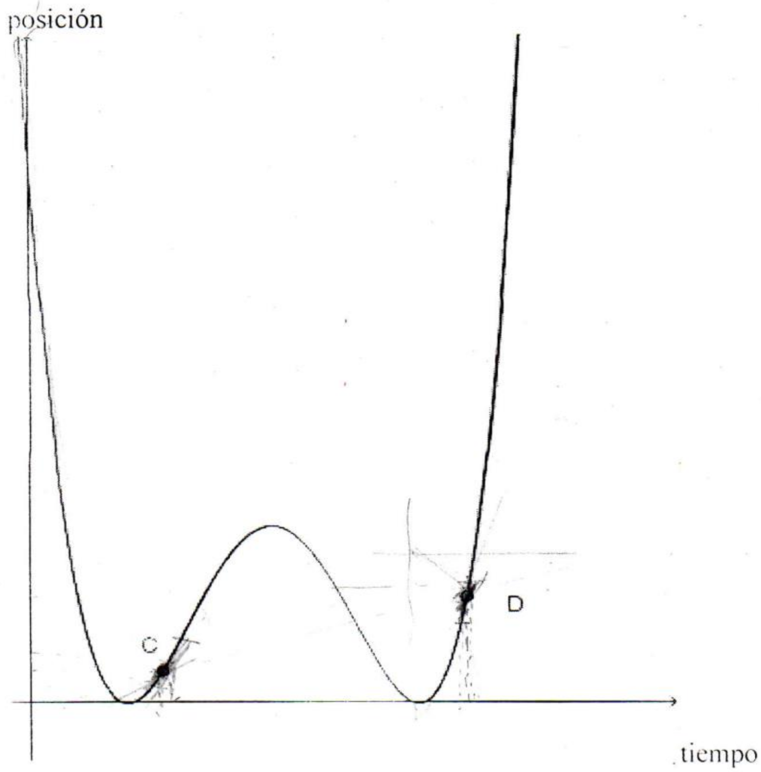


Al trazar dos instantes, I y II, ambos con los mismos condiciones de tiempo y al trazar una recta que toque ambos puntos, despues se debe ir dividiendo a la mitad esta recta, se puede observar un cambio de pendiente en cada segmento lo cual representa que la velocidad en el punto C es menor a la del punto D

E24

Actividad 3

Instrucciones: Dada la gráfica, posición contra tiempo, analiza cómo es la velocidad en el punto C con respecto a la velocidad en el punto D. Justifique su respuesta.

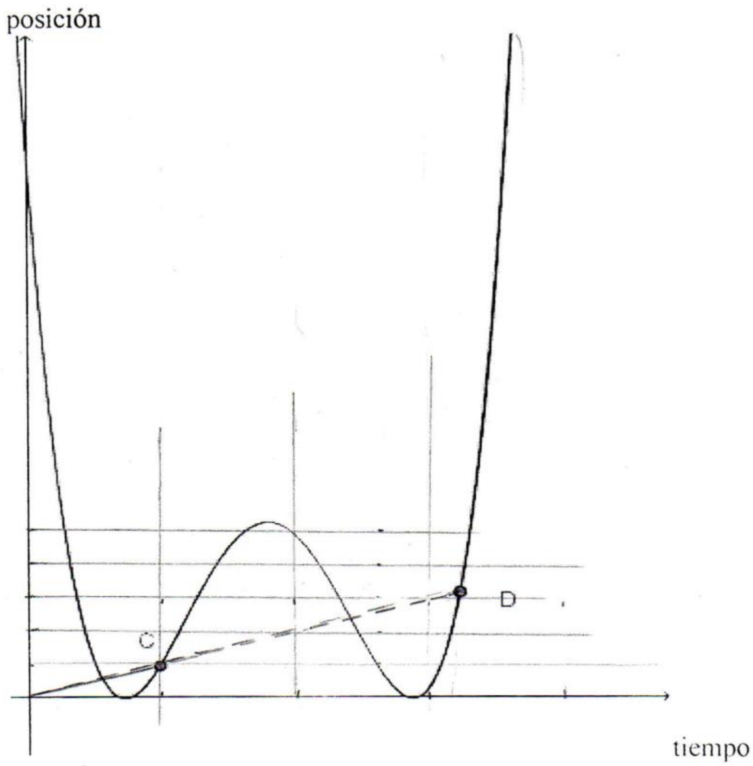


La velocidad en el punto D es mayor que el punto C
al trazar una línea de C a D se ve que hay un cambio de velocidad
y tiene una pendiente creciente, y la pendiente a la que
pertenece el punto C es menor a la pendiente del punto D

E25

Actividad 3

Instrucciones: Dada la gráfica, posición contra tiempo, analiza cómo es la velocidad en el punto C con respecto a la velocidad en el punto D. Justifique su respuesta.



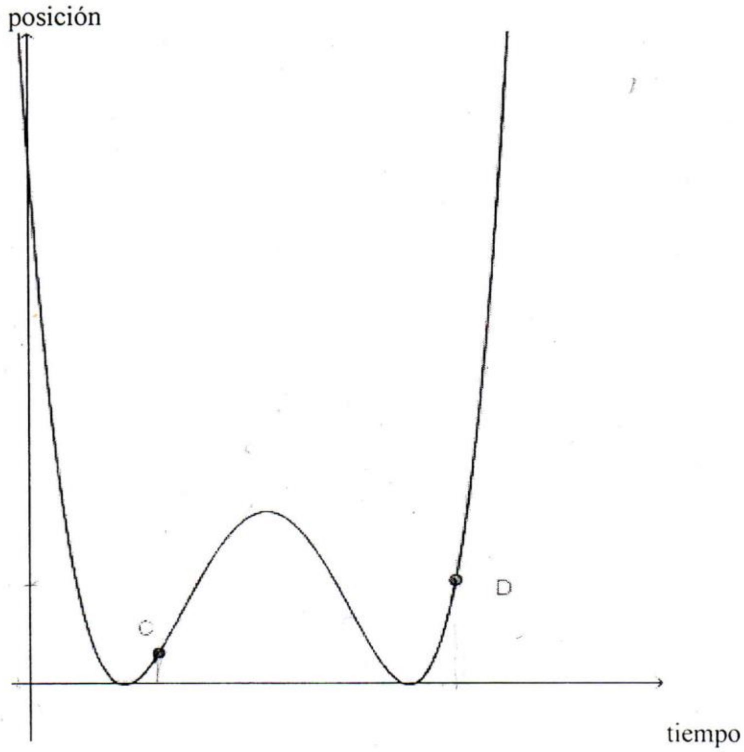
Son iguales.

Si se traza una secante que vaya del origen al punto C y al punto D respectivamente, puede observarse que la pendiente de ambas rectas es la misma, asignando también intervalos de tiempo y posición, lo que reafirma la

E26

Actividad 3

Instrucciones: Dada la gráfica, posición contra tiempo, analiza cómo es la velocidad en el punto C con respecto a la velocidad en el punto D. Justifique su respuesta.



Tomar un punto que este muy cercano a C y D y el hacer su se observa que la Secante del punto trazado con D tiene una ángulo mayor que el de C y el punto trazado.

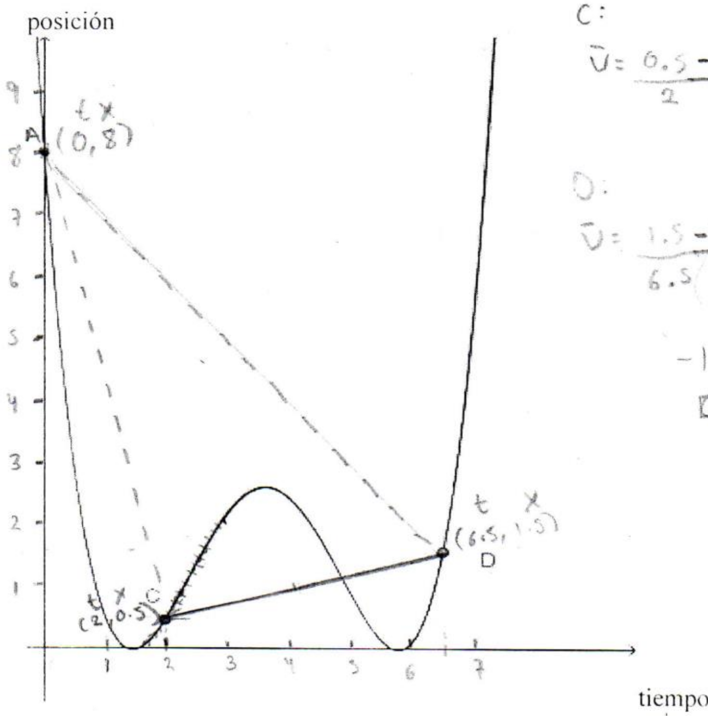
E27

$\Delta \bar{v} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i}$

…/…/2017

Actividad 3

Instrucciones: Dada la gráfica, posición contra tiempo, analiza cómo es la velocidad en el punto C con respecto a la velocidad en el punto D. Justifique su respuesta.



C:

$\bar{v} = \frac{0.5 - 8}{2} = -3.75$

D:

$\bar{v} = \frac{1.5 - 8}{6.5} = -1$

$-1 > -3.75$

D > C

Primero dividí el eje "x" y "y" en espacios de 1 cm; después establecí un punto de referencia en el tiempo 0 de acuerdo a la gráfica, una vez localizado saqué la velocidad promedio de mi punto de referencia (A) al punto C (una recta secante de "A" a "C") y de igual forma de "A" a "B" y con valores aproximados D resultó ser mayor a C

Anexo 5. Transcripciones de presentaciones grupales

Sesión 1

Actividad 1

Episodio 1: Trazo de la gráfica

E22 Primero establecimos el punto de partida, bueno donde está la casa de Juan. Después dice que avanza de manera rápida, perdón, de manera lenta los primeros 250 metros así que esos los colocamos por aquí [señala la gráfica de la figura 1 en los puntos A y B]. Después que camino más rápido hasta los ocho minutos, eso quiere decir que camino más distancia en menos tiempo, después que olvido algo en su casa y regresó corriendo, eso quiere decir que avanzó la misma distancia en menos tiempo, pero como no dan un dato especifico de qué tiempo tomo realmente dimos este dato como un tiempo cualquiera, después dice que caminó a la esquina y estuvo esperando tres minutos, entonces de aquí a aquí [señala en su gráfica los puntos que indican la casa y la esquina. Punto D] estuvo tres minutos [marca el punto E y señala el segmento DE], después dice que ya toma un taxi para llegar a la casa de su compañero. Nosotros marcamos la casa de su compañero aquí [señala en la gráfica el punto que queda al final del segmento de recta. Punto F].

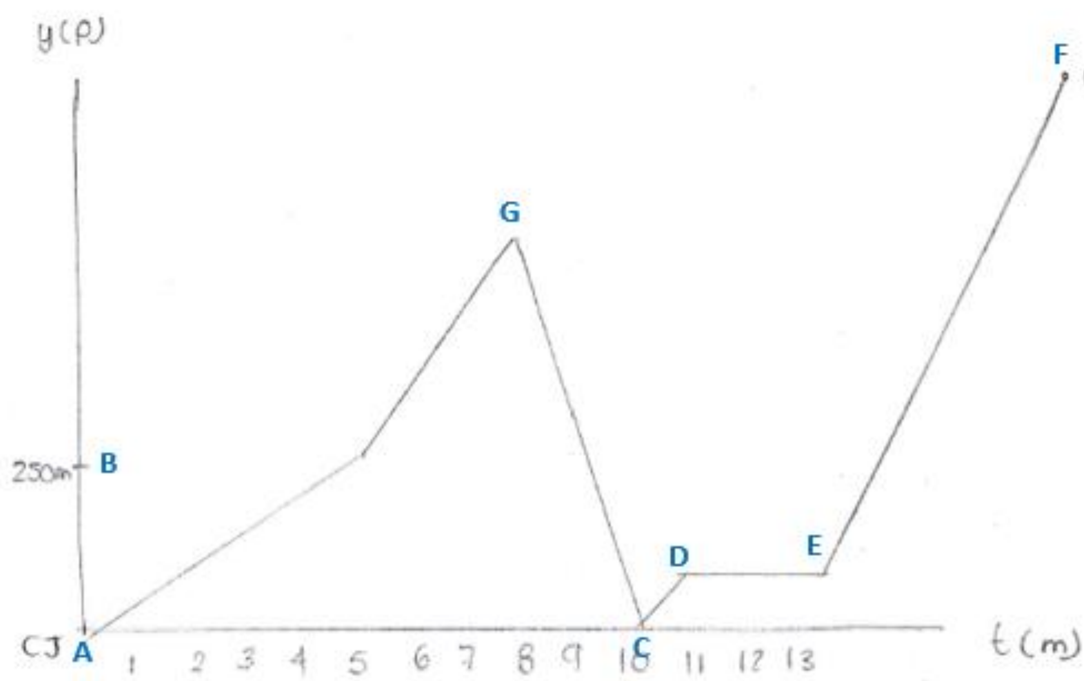


Figura 4. Gráfica que se analizó para modelar el problema de Juan

Episodio 2: Análisis de la posición de la casa de Juan

DOCENTE: ¿Dónde está la casa de Juan?

E22: Fue un problema en el que entramos porque decimos que está aquí [señalando el punto A] pero de alguna forma no puede estar específicamente acá [vuelve a señalar A], porque cuando regresa tenemos que regresar ahí y no podríamos regresar específicamente en este punto [continua señalando el punto A]. Ahí no supimos bien cómo explicarlo así que a la media conclusión que llegamos es que tendría que ser todo este eje [Señalando el eje X] aunque no podemos explicar por qué, la casa va a estar fija pero sin depender del tiempo ni la distancia.

DOCENTE: Y sus demás compañeros que opinan, ¿Alguien obtuvo una gráfica similar a la que tenemos ahí en el pizarrón?

E10: Bueno es que, de lo que decía, de la casa de Juan, yo creo que no hay conflicto de que digas que la casa de Juan es el origen porque entonces estarías regresando a la posición cero en un tiempo cero. Pero por ejemplo en un determinado tiempo puedes regresar a la posición donde iniciaste, por ejemplo en t=3, las coordenadas son (3, 0) y eso significa que pasados tres minutos el regresa a esa posición no que regresa al origen. Nosotros lo tomamos así y no tuvimos ningún conflicto.

DOCENTE: ¿Alguien tomo igual la casa de Juan en el origen? ¿Cuando regresamos a la casa de Juan tendríamos que regresar al eje X o tendríamos que regresar, como decía Miriam, al principio, al origen? ¿Es suficiente regresar al eje X o tendríamos que regresar al punto (0, 0)?

E13: Solo al eje X

DOCENTE: ¿Por qué solo al eje X?

E22: Porque no depende del tiempo.

E5: Porque no se puede regresar el tiempo

DOCENTE: ¡Porque no podemos regresar el tiempo! No importa que el tiempo siga avanzando la casa seguirá existiendo. Y ahora, ¿La casa del compañero de Juan está en el lugar correcto?

E13: La casa debe estar ubicada a una cierta altura del eje Y, más o menos la distancia a la que está a la casa de Juan, porque si se deja así como esta entonces la casa solo existe en un único tiempo.

En esta parte se observa como los estudiantes no presentan dificultad alguna en ubicar la casa de Juan, pero si la de su compañero. Las gráficas de otros equipos no mencionan en donde se ubican las casas. La única gráfica que ubica las casas es la que se ha mostrado en la figura 3.

Episodio 3: Análisis de las secciones

DOCENTE: Ahora veamos cada uno de los pedazos de esa gráfica y analicemos si realmente cada una de las partes corresponde a lo que está dado en el problema.

[Se empieza a leer el problema señalando cuáles son las partes que corresponden a los movimientos que realiza Juan. En la parte del problema donde dice “llega a casa y toma su libreta se dan cuenta de que no aparece en la gráfica”]

E16: Ahí no está en la gráfica.

E5: Exacto. Falta un cachito [señalando con los dedos un segmento horizontal].

DOCENTE: ¿Es necesario incluir esa parte o no?

E13: Pero no está recorriendo en sí una distancia.

E18: Pero el tiempo está avanzando

DOCENTE: Entonces, sí tendría que agregar algo a la gráfica, ¿dónde se agregaría?

[E20 se levanta de su lugar, señala en la gráfica un segmento entre CD, a la altura del eje X, y lo agrega. Se termina de leer el problema y analizar si las partes corresponden al problema planteado.]

Episodio 4: Discusión del punto donde Juan olvida la libreta.

DOCENTE: Supongo que a ustedes alguna vez se les ha olvidado algo en algún lugar. Recuerdo que olvide algo y que hago, ¿doy la vuelta rápidamente?, ¿me detengo? o ¿qué pasa?.

E11: Pasa tiempo [Se aproxima al pizarrón señalando el punto G y borra el pico que hay en la gráfica y en su lugar traza un segmento horizontal]

DOCENTE: ¿Cuánto tiempo pasa?, ¿Es mucho tiempo?

ALUMNOS: No, no es mucho tiempo. Es pequeño.

DOCENTE: ¿Se puede contar?, ¿Cómo marcamos ese tiempo en la gráfica?

[Los estudiantes titubean para contestar, la maestra hace alusión a sus conocimientos adquiridos en Laboratorio de Física. Se hace mención de que el movimiento que hace Juan es un movimiento rectilíneo.]

DOCENTE: De acuerdo al movimiento, ¿qué representa ese pico sobre la gráfica?

E13: Representa un cambio muy brusco… muy rápido.

DOCENTE: Entonces Juan iba caminando, recuerda y regresa… [Hace una señal con las manos para indicar que regresa muy rápido], ¿puede hacer ese movimiento Juan?

ALUMNOS: no

DOCENTE: Entonces si aquí termina en pico, dice su compañero que tendria que hacer un cambio muy brusco, [se queda pensando…] ¿no se si yo pudiera generar ese pico en la gráfica? [luego pregunta], ¿Qué pasó cuando el recuerda que olvido su libreta?

E13: Se queda pensando.

DOCENTE: ¿Ha pasado tiempo?, ¿Cuánto tiempo?, ¿entonces cómo nos queda la gráfica en ese punto?

E22: En ese pico debería haber una curva

[Moisés pasa a trazar la curva en el punto G y además quita los demás picos para trazar, ligeramente, curvas.]

DOCENTE: Y ahora ¿en la gráfica, dónde recuerda que olvido su libreta?

E13: Aquí [Señalando el punto más alto sobre la primera curva que trazo]

Sesión 2

Actividad 2

Episodio 1: Se recuerda parte de la clase anterior

DOCENTE: En la clase pasada trazamos la gráfica que modela la posición de Juan para ir a casa de su compañero, también explicamos algunas gráficas y eliminamos algunas variables. Hay que recordar que es lo que estaba haciendo Juan en cada uno de esos momentos. ¿Qué nos dice el problema acerca de Juan?

[E19 lee el problema de Juan]

DOCENTE: ¿Cuántos momentos identificamos en el problema?

E13: Al menos cinco o seis

DOCENTE: Ya habíamos establecido algunos momentos. ¿Cuántos momentos establecimos?

[Los alumnos empiezan a leer nuevamente el problema haciendo énfasis en cada parte de los momentos que recorrió Juan y se concluye que son siete]

DOCENTE: Ahora les voy a dar la siguiente actividad con una gráfica que se propone para modelar el problema de Juan, en ella no se consideran algunas variables. La actividad se hará con los mismos equipos.

Episodio 2: Los estudiantes trabajan en el análisis de la gráfica

SAUL: Para esta pregunta [Señala la primera pregunta en la hoja] ¿se puede contestar a partir de la gráfica o de lo que nosotros sabemos?

DOCENTE: Pueden hacer uso de los dos conocimientos

OLGA: Entonces en que momentos esta inmóvil, seria en la posición cuatro y en la posición seis, porque pues porque la posición no cambia, el tiempo si pero la posición no.

MOISES: Nosotros encontramos una relación entre la posición y el tiempo.

DOCENTE: ¿Cuál es esa relación?

MOISES: Posición sobre tiempo, que se puede ver como una unidad de medida para la velocidad.

Docente: Y así sería, posición sobre tiempo

MOISES: Bueno la posición sería lo mismo que la distancia que lleva recorrida en un intervalo de tiempo.

Episodio 3: Análisis de las primeras tres preguntas de la actividad.

Pregunta 1.

DOCENTE: ¿Alguien gusta comentar que respuesta han dado a la primera pregunta?

E21: tenemos que las dos secciones donde cambia de posición más rápido Juan es en la sección tres y en la sección siete, debido a la prolongación de la curva.

DOCENTE: ¿A qué nos referimos cuando decimos la prolongación de la curva?

E21: que tan larga es.

DOCENTE: ¿qué tan larga es?, ¿puede haber algo más que me indique que en esas secciones cambia de manera más rápida?

E13: bueno… nosotros en base a la lectura sabemos que en la sección siete al tomar un vehículo sabemos que la velocidad de un vehículo es mayor, bueno hacemos una suposición en base a la lectura y en la sección tres de igual manera, recorre la misma distancia de la sección uno y dos sumadas, sin embargo en lugar de hacerlo caminando o a un paso más acelerado lo hace corriendo. La segunda suposición que hacemos, solamente para comprobar si esto es cierto, solamente vemos la relación que hay entre el cambio de posición y el tiempo, vemos que tanto cambio hay de posición en menor tiempo, porque sabemos que si el tiempo es menor lo hace de una manera más acelerada.

DOCENTE: ¿Cómo ven ese cambio de posición en menor tiempo? Ahí está la gráfica. [Señala la gráfica]

E13: [Se levanta de su lugar y traza sobre la gráfica la recta] Bueno, tal vez es un poco rustico, pero en base a la lectura sabemos que esta distancia, [señalando el punto señalando las distancias de la sección I y II] es exactamente la misma distancia de aquí [Señalando la distancia de la sección III] pero si también tomamos en cuenta esto [mide la longitud del tiempo de la sección I y II en el eje X con una pluma] vemos que son aproximadamente como dos plumas y mientras en esta [mide el tiempo en la sección III con la misma pluma] es un poquito más de una pluma, estamos viendo que avanzo la misma distancia en menor tiempo, estamos dándonos cuenta que hubo un cambio de posición bastante acelerado. De igual manera en este [señala la sección VII] donde vemos que es casi una pluma.

DOCENTE: Entonces en la sección tres y en la sección siete es donde avanza más rápido. ¿Alguien agrego otra sección?

E11: nosotros agregamos la misma sección siete, pero también podemos

Pregunta 2

DOCENTE: vamos con la siguiente pregunta.

E18: ¿En qué momentos esta inmóvil? En la sección cuatro y seis, ya que el tiempo sigue transcurriendo y la posición no cambia.

DOCENTE: en la posición cuatro donde se encontraba.

ESTUDIANTES: en su casa

DOCENTE: y en la posición seis

ESTUDIANTES: Esperando el taxi

DOCENTE: ¿nada más ahí, esta inmóvil?

E19: en el punto entre la sección dos y la sección tres

DOCNETE: ¿Cuál es ese punto?

E19: [Señala sobre la gráfica el punto] Porque para que haya un cambio de posición en el tiempo tendría que haber crecimiento o decrecimiento, en el caso de esta cresta, [señalando el punto sobre la gráfica] este punto no demuestra que está creciendo o que está regresando, más bien que esta inmóvil.

DOCENTE: si chicos, ¿qué estaba pasando en ese punto?

ESTUDIANTES: se quedó en shock, olvido su libreta.

DOCENTE: recordó que olvido su libreta, ¿y porque no tenemos algo así? [traza sobre un segmento horizontal arriba del punto marcado]

E6: porque no ha transcurrido tanto tiempo en el que se queda pensando.

DOCENTE: y a ese pequeño tiempo en el que recuerda que olvido su libreta y regresa, ¿cómo se le puede llamar?

Estudiantes: un milisegundo, un tiempo t.

DOCENTE: ¿Y en términos de matemática o de física, cómo le llamamos a ese pequeño intervalo de tiempo?

ESTUDIANTES: instante de tiempo

DOCENTE: como en este punto no retrocedo ni avanzo entonces hay un instante de tiempo en el que se permanece inmóvil.

Pregunta 3

DOCENTE: vamos con la pregunta tres

E8: ¿en esta gráfica es posible observar la velocidad? Pensamos que no es posible porque en unas partes te da el tiempo que transcurre y en otras la distancia, entonces como en todos esos intervalos iba variando su velocidad por eso nos iba a dar un aproximado de que tan rápido se movía pero no podemos decir cuál era su velocidad.

DOCENTE: pero entonces. ¿No podemos decir cuál es su velocidad, pero si podemos observar su velocidad? ¿Puedo decir si es mayor es menor o cómo es?

E22: si se puede visualizar la velocidad pero no se puede calcular porque no tenemos los datos. Pero de forma visual si se puede analizar.

Episodio 4: Trabajan con las siguientes tres preguntas de la actividad 2 parte 1.

Sesión 3

Episodio 1. Análisis de las últimas tres preguntas de la actividad 2 parte 1

Pregunta 4

DOCENTE: Revisaremos las siguiente pregunta

E5: nosotros comentamos que la velocidad es menor

DOCENTE: ¿Por qué es menor?

E5: porque en la sección dos va caminado mientras que en la sección siete va en taxi, además la curva tiene un ángulo de inclinación más grande.

DOCENTE: cuando hablan de inclinación de la curva, ¿Cómo es que están viendo esa inclinación, o a partir de qué ven la inclinación?

E10: de la pendiente

DOCENTE: ¿cuál pendiente?

E13: Podemos hacer una comparativa, poder destacar que en cierto intervalo, en este caso en la sección dos avanza una posición en determinado tiempo pero en la sección siete avanza una posición mayor con respecto a la de la sección dos. Por tanto se puede decir que en la sección dos es más lento o menos larga que la sección siete.

Pregunta 5 y 6

DOCENTE: Alguien gusta pasar a marcar los intervalos

E11: nosotros decimos que el inicio de la sección dos [señala en el eje X el punto que corresponde al inicio de la sección dos] porque aquí ya lleva cierta velocidad y nos está pidiendo que algún intervalo de la sección dos donde la velocidad sea mayor en algún intervalo de la sección siete y aquí en el inicio de la sección siete está partiendo del reposo [señala en el eje X el punto que corresponde al inicio de la sección siete]. Entonces digamos que este pequeño intervalo donde lleva ya una velocidad que el intervalo de la sección siete.

DOCENTE: y puedes marcar ese intervalo, porque lo que está marcado únicamente es un punto.

[E11 no identifica los intervalos más que el inicio de cada uní de ellos]

E22: bueno nosotros también pensamos lo mismo que al inicio Juan ya lleva cierta velocidad [señala el inicio de la sección dos] por lo tanto en ese momento si va más rápido y aquí como parte del reposo [señala el inicio de la sección siete] y como realmente no tenemos datos entonces pigmentamos la sección dos en tres partes muy aproximadas [Divide a la sección dos en tres partes] y también dividimos en la sección siete tres partes [divide tres partes, aproximadamente iguales a las de la sección dos, al inicio de la sección siete] las denotamos con letras *a, b, c.* [Denota cada subintervalo en cada sección con las letras *a, b, c*] y decimos que en ambas secciones para *a* de la sección dos es mayor la velocidad para *a* de la sección siete.

DOCENTE: y los demás equipos, ¿tomaron los mismos intervalos o tienen otros?

ESTUDIANTES: son parecidos

DOCENTE: una parte de su argumentación es que cuando va avanzando ya lleva una cierta velocidad y allá [señala a la sección siete] está partiendo del reposo. ¿De qué otra forma se pueden validar esos resultados? Antes de contestar la pregunta damos respuesta a la última pregunta.

E26: tomamos el final de cada sección y medimos un centímetro hacia la izquierda. Este es el intervalo de tiempo [traza los intervalos en cada sección] es el mismo porque los dos son de un centímetro. Después lo que hicimos fue medir la posición, [traza la posición en cada intervalo] y se puede ver que se recorre más distancia [señala la distancia recorrida en el intervalo de la sección siete] en el mismo tiempo que aquí [señala la distancia recorrida en el intervalo de la sección dos] o simplemente se traza la pendiente [traza la recta secante en cada intervalo que pasa por el punto inicial y final de cada intervalo] y te fijas en el ángulo, el ángulo se puede ver que aquí es mayor [señala el ángulo de inclinación de la secante de la sección siete] que el ángulo de aquí [señala el ángulo de inclinación de la secante de la sección dos].

DOCENTE: Matemáticamente esto también valida la respuesta. ¿Este procedimiento sirve para contestar la pregunta anterior?

ESTUDIANTES: si

DOCENTE: bueno ahora tengo una pregunta. Si ya encontramos un intervalo en la sección dos donde la velocidad es mayor que en un intervalo de la sección siete y viceversa, entonces podemos generalizar lo que se nos preguntó anteriormente, ¿realmente la velocidad en la sección dos es menor que la velocidad de la sección siete? ¿Qué está pasando ahí?

E13: tal vez se generaliza por promedio por así decirlo, se toma el promedio general de la velocidad en la sección siete y el promedio general de la velocidad en la sección dos.

DOCENTE: ¿entonces estamos hablando de una velocidad en general o de qué tipo de velocidad?

ESTUDIANTES: de la velocidad promedio o de velocidad media

DOCENTE: entonces podemos decir ahora que la velocidad promedio en la sección dos es menor que la velocidad promedio en la sección siete. ¿Y ahí en la gráfica que me representa la velocidad promedio?

E5: la pendiente de la sección, no, de la curva.

DOCENTE: ¿cuál es la pendiente de la curva?

E22: tomamos el punto inicial y el punto final de la curva y trazamos la recta entre ambos. [Pasa al pizarrón y retoma lo que trazo el EQUIPO 9]

DOCENTE: Pero estamos hablando de pendiente de una curva o de quien es la pendiente.

E13: de una recta

DOCENTE: entonces la velocidad promedio es la pendiente de una recta, porque estamos suponiendo que todo el tiempo avanza a una misma velocidad. ¿Pero esa recta es cualquier recta?

[El docente, apoyado de los conocimientos de geometría que tienen los estudiantes, les ayuda a recordar conceptos como: cuerda, tangente y secante]

ESTUDIANTES: es una recta secante a la curva

DOCENTE: ahora, ¿qué relación se puede establecer entre pendiente de la recta secante a la curva y velocidad promedio?

E13: que se pueden definir como lo mismo

DOCENTE: entonces ahora podemos concluir que la velocidad promedio es igual a la pendiente de la recta secante. Hace un momento hablaron también de un cambio de posición en un cambio de tiempo, ¿cómo puedo expresar ese cambio?

E10: se puede expresar como un Δx [cambio en la posición] sobre un Δt [cambio en el tiempo]. Que también es igual a la velocidad media y a la pendiente de la recta secante, porque la pendiente es el cambio en Y, que en este caso es el cambio en la posición, sobre el cambio en X, que por ahora es el cambio en el tiempo. Para nuestro problema nos va a quedar, posición final menos posición inicial todo entre tiempo final menos tiempo inicial igual a la velocidad promedio. [Escribe la relación $\frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} = \overline{v}$]

DOCENTE: de ahora en adelante denotaremos a la pendiente de la recta secante como: m_{sec} [escribe en el pizarrón m_{sec}] y cada vez que hablemos de pendiente de recta secante debemos recordar que estamos hablando de un cambio promedio.

Episodio 2. Trabajan con la actividad 2 parte II

Sesión 4

Episodio 1. Análisis de las preguntas de la actividad 2 parte II

Pregunta 1

DOCENTE: En la clase pasada estuvimos trabajando con un punto donde hay un cambio de concavidad y analizamos que ocurre alrededor de ese punto. Alguien gusta pasar a explicar cuál fue el análisis que hizo con su equipo.

[Como ningún estudiante se decide la docente menciona un número y pasa el estudiante que corresponde a ese número en la lista]

E9: Como nos dice que hay un cambio de concavidad en el punto b, entonces nos pregunta que representa ese punto, lo que nosotros hicimos fue un cambio de decrementos entre dos secciones. Las secciones que marcamos fueron entre el punto más alto y b [En la Figura 1 traza la recta que une el punto A con b] y de b al punto A' [En la Figura 1 traza la recta que une el punto b al A']. Esto sería lo que es la velocidad promedio, esto tiene cierta pendiente, cierta velocidad promedio [denota a las rectas como V_1 y V_2] y significa que esta velocidad promedio [señala sobre la gráfica a V_1] es diferente a la de acá [señala sobre la gráfica a V_2] entonces este punto [En la Figura 1 señala el punto b] nada más decimos que es ese punto donde cambia la velocidad.

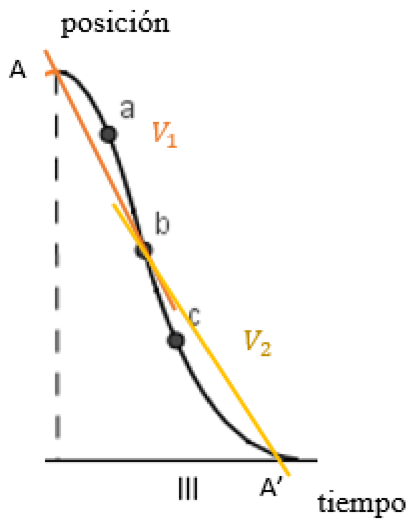


Figura 1. GRAFICA DE EQUIPO 3

DOCENTE: ¿Alguien contesto algo diferente a lo que menciona su compañero o todos tienen que b es un punto donde hay un cambio de velocidad?

ESTUDIANTES: Si, contestamos lo mismo

DOCENTE: ¿Dieron una explicación diferente para el cambio de velocidad?

ESTUDIANTES: No

Preguntas 2, 3, 4.

DOCENTE: Entonces vamos con la pregunta dos. ¿Qué puedes decir acerca de la velocidad de a a b?

E11: Como en el problema nos dice que en esta sección Juan iba corriendo entonces nosotros pensamos que de a a b la velocidad es mayor porque aquí empieza a correr [señala la parte de la gráfica donde esta a, b] que de b a c [señala la parte de la grafica donde esta b, c].

DOCENTE: Ustedes contestan entonces como es la velocidad de a a b, o como es la velocidad de a a b comparada con la de b a c.

E11: lo segundo

Docente: ¿Específicamente como es la velocidad de *a* a *b*?

E12: yo lo plantee de una forma que dividí los intervalos de esta forma [traza las rectas perpendiculares sobre la gráfica] entonces se puede observar que es el mismo tiempo y una mayor distancia [señala la distancia de *a* a *b*] como sabemos que la distancia es un del equis sobre un delta t por eso es mayor.

DOCENTE: Eso es con respecto a la velocidad de *a* a *b* con respecto a la velocidad de *b* a *c*. pero la pregunta es ¿cómo es la velocidad de *a* a *b*?

E14: Nosotros llegamos a la conclusión de que ahí la velocidad muy cercana a constante pues es una pendiente, para esto despreciamos cualquier cambio mínimo. Al trazar una línea recta de *a* a *b* nos dimos cuenta que los cambios de velocidad son muy pequeños por lo tanto decidimos despreciarlos por eso decimos que se acerca a una velocidad constante por lo cual sería mayor porque no cambia. Y de *b* a *c* se nota que va disminuyendo, algo que no hace de *a* a *b*.

DOCENTE: Otra vez estamos comparando la velocidad de *a* a *b* con la velocidad de *b* a *c*.

E13: cabe recalcar que en lo que menciono mi compañero también utilizamos el contexto de la lectura y nos apoyamos mucho de la primera respuesta en donde vemos la gráfica, al inicio de la gráfica se puede considerar como en reposo y vemos como va acelerando de cierta manera hasta llegar a una aceleración máxima que en la gráfica seria el punto *b* y al finalizar vemos que va desacelerando hasta de nuevo quedar en un estado de reposo. Al analizar también lo que sería el problema vemos que del punto *a* al punto *b* está llevando cierta aceleración está tratando de ir más rápido por eso podemos inferir que va más rápido de *b* a *c*.

DOCENTE: Tenemos una respuesta de la aceleración con respecto a los dos intervalos.

E13: si no tenemos un punto de partida no podemos decir que es rápido o que es lento.

DOCENTE: Pero como podría ver lo que dicen, de *a* a *b* está yendo más rápido.

E16: Si tomamos el intervalo de *a* a *b* como un todo entonces se puede decir que en el punto *a* hay una velocidad inicial y que en el punto *b* hay otra velocidad final. Una manera de demostrar que la velocidad inicial es menor que la velocidad final es tomar el intervalo como un todo y tomar intervalos más pequeños por ejemplo dividir a la mitad y comparar este con este [señala sobre la gráfica los intervalos 1 y 2] y luego dividir otra vez a la mitad y comparar, entre mas pequeños se van haciendo los intervalos podemos ver que lo que va a hacer es que el ángulo de la pendiente va a empezar a aumentar.

DOCENTE: No sé a qué te refieres cuando dices el ángulo de la pendiente, puedes marcarlo. (14:30)

E16: [Traza las rectas obtenidas] si marcamos estas rectas vemos cómo cambia el ángulo de inclinación y eso ya nos dice que tan rápido o que tan lento va.

DOCENTE: [Se dirige a todos los estudiantes] ¿Ustedes que opinan con respecto a lo que nos dice su compañero, creen que será una forma viable de argumentar que la velocidad está aumentando?

ESTUDIANTES: Si. Porque también vemos cómo va aumentando.

DOCENTE: En ese intervalo la velocidad va aumentando. Y entonces ¿qué podemos decir de la velocidad de *b* a *c*?

E19: considerando la respuesta anterior que la velocidad va disminuyendo.

ESTUDIANTES: Si y la forma de verlo es similar a lo que comentamos.

DOCENTE: Nuestra siguiente pregunta parece que ya la contestamos, pues ya mencionaron que la velocidad antes de *b* es mayor que la velocidad después de *b*. además también consideraron el contexto del problema, en ese momento Juan iba corriendo, llega un momento en el que él, me decían en la clase pasada se sofoca, y además también porque va llegando a su casa. En la siguiente pregunta ¿qué característica deben tener los intervalos para concluir que en un intervalo hay mayor velocidad que en otro?

Pregunta 5

E16: si trazamos la recta secante en cada intervalo y vemos el ángulo de inclinación de la pendiente se puede decir que la que tiene mayor ángulo de inclinación es la que tiene mayor velocidad.

DOCENTE: ¿Esa característica corresponde a los intervalos?

E13: tener el mismo tiempo, que los intervalos tengan el mismo tiempo.

DOCENTE: ¿Podría comparar la velocidad en dos intervalos de tiempo diferentes? Por ejemplo comparar la velocidad promedio en un intervalo de 30 min y un intervalo de tiempo de 40min.

ESTUDIANTES: No se puede, la comparación puede hacerse si los intervalos tienen el mismo tiempo, son iguales.

Episodio 2. Realización de la actividad 3

Episodio 3. Análisis grupal de la actividad 3

DOCENTE: E27 cómo le hizo para hacer la comparación de esas velocidades

E27: Primero dividí el eje X y Y en espacios de 1cm, después establecí un punto de referencia en el tiempo cero de acuerdo a la gráfica una vez localizado saque la velocidad promedio de un punto de referencia al punto C (Una recta secante de A a C) y de igual forma de A a B y con valores aproximados la velocidad en D resulto ser mayor a la velocidad en C.

DOCENTE: Alguien más que quiera compartir lo que hizo

E13: La velocidad en el punto C es menor con respecto al punto D. Podemos llegar a esta conclusión observando el contexto de cada punto y evaluando X intervalo de tiempo tanto por la derecha y la izquierda de cada punto, suponiendo que se toma el mismo intervalo X para ambos puntos. Una vez evaluado dicho comportamiento el intervalo se reduce las veces que sea necesario donde la velocidad en un punto tiende a cero para poder hacernos a un solo punto y poder comparar.

DOCENTE: Si nos vamos acercando al punto C y al punto D, ¿gráficamente que te quedaría?

E13: Pues solo me voy acercando a un punto

DOCENTE: Si tomamos otros puntos, por ejemplo tomo C', ¿qué me quedaría entre C y C'?

ESTUDIANTES: un segmento

DOCENTE: ¿Qué representa?

ESTUDIANTES: El promedio entre CC'

DOCENTE: Y si me acerco más, ¿qué me quedaría?

ESTUDIANTES: un punto

DOCENTE: Y entonces, ¿el segmento anterior qué pasa a ser?...

ESTUDIANTES: En una recta tangente

DOCENTE: ¿A quién?

ESTUDIANTES: Al punto C

Docente: Alguien de ustedes utilizo este concepto para dar respuesta a esta pregunta

E6: …. Lo que podíamos hacer es trazar una recta en la cual solo toque un punto que sería C [traza una recta que solo toca al punto C] igual se hace para D. Entonces viendo con los ejercicios anteriores donde calculamos el ángulo de inclinación para hallar la velocidad y si tiene una mayor inclinación se determina que hay mayor velocidad ya que para la velocidad hay una razón entre distancia sobre tiempo, entonces se determina que entre más inclinado entonces hay una mayor velocidad. Y se determina que la velocidad en C es menor que la velocidad en D.

DOCENTE: … ¿hay algo más don lo que se podría relacionar ese concepto?

ESTUDIANTES: Una velocidad instantánea

E11: Yo recuerdo que en Física vimos que la velocidad en un punto es la velocidad instantánea y se puede encontrar con un límite, el $v_{ins} = \lim_{\Delta t \to 0}[\bar{v}]$ y sabemos que la velocidad promedio es velocidad final (x_f) menos velocidad inicial (x_i) entre un tiempo final (t_f) menos un tiempo inicial (t_i) y entonces el límite anterior nos queda como: $v_{ins} = \lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{\Delta x}{\Delta t}\right]$ pero necesitamos conocer a la velocidad o a una función para calcular a la velocidad".