BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

"EL APRENDIZAJE DE LAS FRACCIONES: OPERATIVIDAD MEDIANTE GESTIÓN DE EQUIVALENCIAS Y SU INCIDENCIA EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS"

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRÍA EN
EDUCACIÓN MATEMÁTICA

PRESENTA:

FABIANA MAHTABEL ARTEAGA CERVANTES

DIRECTOR: DR. JOSÉ ANTONIO JUÁREZ LÓPEZ
CO-DIRECTOR: JUAN CARLOS MACIAS ROMERO

Diciembre 2016

6

BUAP

DRA. LIDIA AURORA HERNÁNDEZ REBOLLAR
SECRETARIA DE INVESTIGACIÓN Y
ESTUDIOS DE POSTGRADO, FCFM-BUAP
P R E S E N T E:

Por este medio le informo que el (la) C:

LIC. FABIANA MAHTABEL ARTEAGA CERVANTES

Estudiante de la Maestría en Educación Matemática, ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 29 de noviembre de 2016, con la tesis titulada:

"El aprendizaje de las fracciones: operatividad mediante gestión de equivalencias y su incidencia en la resolución de problemas"

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

A T E N T A M E N T E.
H. Puebla de Z. a 08 de diciembre de 2016

DR. JOSÉ ANTONIO JUÁREZ LÓPEZ
COORDINADOR DE LA MAESTRÍA
EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA.

Ccp.Archivo.
Dr'JAJL / l'agm*

Facultad
de Ciencias
Físico Matemáticas

Av. San Claudio y 18 sur, edif. 111 A,
Ciudad Universitaria, Col. San
Manuel, Puebla, Pue. C.P. 72570
01 (222) 229 55 00 Ext. 7550 y 7552

Agradecimientos

Al mejor maestro que la vida pudo regalarme, por compartir conmigo su tiempo y su conocimiento, por ayudarme a crecer e impulsarme a volar con mis propias alas, **mi padre**.

A **mi madre**, gracias por estar ahí siempre para escucharme, consolarme, alentarme y creer en mí. Por tu amor y entrega para hacerme una persona íntegra y feliz.

A ambos porque con su amor me han fortalecido, porque con su dedicación me forjaron como la persona que soy. Gracias por compartir mis tristezas y también mis triunfos; cada uno de ellos se los debo a ustedes y se los dedico con amor.

A **mi esposo**, éste logro lo comparto contigo. Por tu apoyo incondicional y tu cariño, por caminar conmigo, crecer conmigo y triunfar conmigo.

A mi hijo, mi más grande inspiración, por darme el último impulso para concluir este trabajo.

A dos grandes maestros y amigos que han inspirado a varias generaciones de docentes, que con su pasión contagian y con su saber animan a aprender más y ser mejor. Gracias **Pablo Zeleny** y **Juan Carlos Macías.**

A cada uno de los doctores que impartieron las clases de este programa de maestría y que sin duda alguna contribuyeron a nuestro crecimiento. Cambiaron nuestra visión de la docencia y nos mostraron caminos para seguir aprendiendo. Gracias

Un agradecimiento especial al Dr. José Antonio Juárez López, mi asesor de tesis, por acompañarme con paciencia y sabiduría en este camino.

Gracias a CONACYT por la beca otorgada.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

La enseñanza y el aprendizaje de las fracciones es un tema que desde hace varios años ha causado gran interés para ser investigado debido a que presenta múltiples dificultades en estudiantes de diferentes niveles educativos. Esta problemática ha propiciado que se realicen innumerables esfuerzos para identificar las dificultades que los estudiantes enfrentan al tratar de aprenderlas.

Muchos estudios exponen que uno de los principales factores que contribuye a esta complejidad es que las fracciones comprenden diversos significados y estos están relacionados, por lo que los estudiantes deben adquirir experiencia con sus múltiples interpretaciones para resolver tareas relacionadas con el tema de forma exitosa.

En México, uno de los aspectos a los que se da especial relevancia es la operatividad con fracciones. Algunos estudios revelan que, a pesar de ser un tema que se trata durante varios años en educación básica, muchos jóvenes y niños siguen presentando serias dificultades para operar con ellas. Y pese a que el algoritmo es revisado en repetidas ocasiones los estudiantes no lo dominan y aun cuando pueden operar con fracciones usando el algoritmo, se muestran ineficientes al momento de resolver problemas.

De acuerdo con la literatura revisada, algunos autores asocian la falta de dominio de la operatividad de fracciones con la falta de comprensión de las equivalencias. Por tal razón, en la presente investigación se propone una unidad didáctica para tratar de superar dichas dificultades e identificar si con esta intervención se obtiene una incidencia positiva en la resolución de problemas.

La exposición de esta investigación se organizó en ocho capítulos en los cuales se explica el proceso que se siguió para desarrollar el trabajo.

En el capítulo uno se exponen algunos reportes de investigación con respecto a la didáctica y dificultades de aprendizaje de las fracciones.

En el capítulo dos se detalla la problemática que se encuentra comúnmente en las aulas, se dan algunos referentes teóricos que dan muestra de la relevancia de la investigación que aquí se desarrolla.

En el capítulo tres se enmarca la problemática con la revisión de literatura relacionada con la comprensión de equivalencias como un requisito previo para abordar la operatividad de fracciones exitosamente.

El capítulo cuatro muestra la organización del trabajo de investigación, el análisis de la prueba diagnóstica y los resultados de la misma.

En el capítulo cinco se detalla el diseño de la unidad didáctica, la implementación y el análisis de dicha implementación en el aula.

El capítulo seis expone las experiencias obtenidas durante la implementación de la unidad didáctica en el aula, puntualizando por sesión los logros de aprendizaje de los estudiantes.

En el capítulo siete se explican, de forma detallada, los resultados obtenidos en el post-test en cada ítem y se muestran algunos comparativos del desempeño de los estudiantes en el pre-test y post-test.

Finalmente, en el capítulo ocho se expresan las implicaciones didácticas del trabajo, las reflexiones que de este emanaron y las conclusiones que la autora del mismo obtuvo después de esta experiencia didáctica y su trayecto formativo en el programa de maestría.

CAPÍTULO I

ANTECEDENTES

DE LAS DIFICULTADES DE APRENDIZAJE, LA ENSEÑANZA Y EL CURRÍCULO

El aprendizaje de las fracciones es un tema que desde hace varios años ha causado gran interés para ser investigado debido a que presenta múltiples dificultades en estudiantes de diferentes niveles educativos. En México, los planes y programas de educación básica consideran el tema de las fracciones uno de los más importantes académica y socialmente. De acuerdo con Post, Behr y Lesh (1982) el concepto de número racional está entre los conceptos más importantes que los niños experimentarán durante su formación debido a que, desde una perspectiva práctica, la habilidad para abordar efectivamente los números racionales mejora enormemente su habilidad para entender y operar con situaciones y problemas en el mundo real. Sin embargo y pese a que la fracción es uno de los conceptos a los que se les dedica un tiempo considerable en el currículo de primaria y secundaria, ya que se introduce desde el tercer grado de primaria y es revisado repetidamente en grados subsecuentes; hasta primero de secundaria de manera explícita y en posteriores implícitamente, los resultados son decepcionantes (Kamii y Clark, 1995).

Además no es ignorado que en este largo periodo escolar durante el que se revisa el tema de fracciones uno de los aspectos a los que se otorga gran relevancia es la operatividad con las mismas. Pese a ello, muchos niños y jóvenes siguen presentando serias dificultades para operar con ellas y aunque en el mejor de los casos los estudiantes son capaces de manejar el algoritmo, se muestran ineficientes al momento de resolver problemas; en general no muestran habilidad real en el manejo de las mismas.

Post, Behr y Lesh (1982) explican que estos resultados decepcionantes podrían deberse a muchas razones; incluyendo la demasiada prematura abstracción de ideas matemáticas y la falta de atención general a habilidades de pensamiento superiores. Otra probable razón asociada con los niveles de abstracción en la cual muchas instrucciones están enfocadas, es que se espera que los niños, con demasiada frecuencia y muy pronto, operen en el nivel de abstracción simbólico.

Por otra parte, cuando se trata de introducir el tema de fracciones, la mayoría de los materiales del currículo escolar tratan el número racional como objetos de cálculo; se avanza muy rápido a la operatividad con las mismas y se le da gran importancia al dominio de los algoritmos, por lo que los estudiantes pierden muchas de las interpretaciones importantes del número racional. Al respecto Hasemann (1981) menciona:

> *"…para la aritmética de fracciones existen muchas reglas, y esas reglas son más complicadas que las de los números naturales. Si esas reglas son introducidas demasiado pronto, existe el peligro de que sean usadas mecánicamente y sin pensar"* (Hasemann, 1981; p. 71).

Perera y Valdemoros (2009) explicaron en su estudio que una de las causas por las que se puede dificultar el aprendizaje de las fracciones es que los estudiantes, al introducirse en el tema de las fracciones, cuentan con escasos conocimientos previos debido a que estas son poco usadas en situaciones de la vida real. Nunes y Bryant (1997) argumentan que los estudiantes pueden mostrarse muy diestros al utilizar los términos fraccionarios, hablar coherentemente acerca de las fracciones e incluso resolver problemas fraccionarios, pero no captan varios aspectos cruciales de las fracciones. Por ejemplo, ellos señalan que una manera de presentar las fracciones por primera vez es mostrar enteros divididos en partes, diferenciadas unas de otras por estar coloreadas o no, y decir a los niños que el numerador es el número de partes coloreadas y el denominador el total de partes. Debido a dicha introducción de las fracciones, además de la enseñanza de las reglas para calcular, los estudiantes dan la impresión de saber mucho. No obstante en algunas investigaciones hechas en Brasil se pudo mostrar que los estudiantes, a pesar de resolver tareas de identificación de las partes con respecto de un todo en diagramas divididos en partes iguales por medio del doble conteo, fueron incapaces de establecer equivalencias para responder a tareas en términos de relaciones parte-todo. En este contexto, donde las partes en que se dividía el entero no eran explícitamente iguales, es decir; se les mostraba un entero dividido en 7 partes una de las cuales era del doble de tamaño que las otras, por lo que el estudiante debía hacer un análisis de las relaciones parte-todo y observar que se trataba de ¼ o bien al menos dividirla en dos para que todas las partes fueran iguales y así identificar que se trataba de 2/8 y no de 1/7 como la mayoría respondió. En otro estudio Kerslake (1986) también puso de manifiesto que a pesar de que los estudiantes lograban realizar las pruebas de equivalencia de forma exitosa no tenían una comprensión real de las mismas por lo que no lograron transferir este conocimiento para resolver operaciones con ellas. En el caso de la adición de fracciones con denominadores diferentes, incluso los niños que transformaron a denominadores comunes no parecieron percatarse de la relación entre equivalencia de las fracciones y la adición. Kerslake (1986) afirma que, aunque los alumnos hayan logrado realizar las pruebas de equivalencia, no tienen una comprensión real de las mismas y no las emplean para resolver operaciones con ellas. Ambos estudios pusieron en evidencia que los estudiantes pueden utilizar el lenguaje de las fracciones y aun así no comprender completamente su naturaleza. De la misma forma Kamii y Clark (1995) sostienen que, en el mejor de los casos, los estudiantes que son capaces de manejar el algoritmo, se muestran ineficientes al momento de resolver problemas que implican operar con fracciones. Además señalan que no existe mucha información relacionada al tema de fracciones equivalentes pero de acuerdo con los reportes que proporcionan información con respecto a la suma y resta de fracciones es evidente que hay dificultad en el manejo de las fracciones equivalentes, "*…algo claramente está mal con la manera en que las fracciones equivalentes y/o comunes denominadores son enseñados*" (Kamii & Clark, 1995; p. 367).

Freudenthal (1983) exponía:

> "*…la fracción como fracturador puede ser descrita mediante un concepto de equivalencia bastante restringido: no requiere más que dividir algo en n partes iguales. Pero en la realidad de la didáctica se necesita una equivalencia de más alto alcance, así como una disponibilidad sin restricciones de objetos en cada clase de equivalencia. Esta necesidad no ha sido reconocida en la didáctica de las fracciones ni en la elección de modelos didácticos hasta la fecha*" (Freudenthal, 1983; p. 23).

Todas estas dificultades pueden trascender a otras áreas de la matemática y dificultar el aprendizaje de temas más complejos, al respecto Fandiño (2009) asegura que aun cuando los estudiantes pueden proseguir con todas estas lagunas, llega un momento en el que se revelan mortales al tener que darlas por obvias en situaciones más complejas.

Como hemos revisado, en relación con el tema de fracciones son muchas las dificultades que se presentan al momento de enseñarlas y tratar de aprenderlas.

Muchos estudios han revelado que uno de los principales factores que contribuyen a esta complejidad es el hecho de que las fracciones comprenden una noción multifacética, debido a que tiene diversos significados (parte-todo, cociente, relación, operador) y que estos están interrelacionados. Kieren (1976) fue el primero en establecer que el concepto de fracción no es de construcción simple, porque consiste de varias subconstrucciones relacionadas. Él argumenta que para entender las ideas de número racional, uno debe adquirir experiencia con sus múltiples interpretaciones. Charalambous y Pantazi (2006) también explicaron que las fracciones comprenden una noción multifacética que integra cinco subconstrucciones interrelacionadas y que entender las cinco subconstrucciones es considerado un prerrequisito para resolver problemas relacionados con el tema exitosamente.

Esto evidencia entonces que las dificultades en el aprendizaje de los números racionales, desde su conceptualización hasta sus múltiples representaciones, no es para nada trivial y merece mucho la pena ser analizado.

CAPÍTULO II

PROBLEMÁTICA

PRESENTACIÓN

Como se ha mencionado previamente, el tema de fracciones comprende un amplio espectro de significados y abordar cada uno de ellos con la profundidad y atención requerida sería imposible en un solo trabajo, el estudio realizado se dirigió a descubrir si los alumnos de primer grado de secundaria, después de transitar por una unidad didáctica para superar las dificultades concernientes a fracciones equivalentes, tienen mayores posibilidades de resolver no sólo operaciones con fracciones sino problemas que implican el manejo de las mismas.

JUSTIFICACIÓN

En diversas investigaciones centradas en reconocer las dificultades que los estudiantes enfrentan al aprender a operar con fracciones se encuentra que una de las condiciones que imposibilita la correcta operatividad es que los estudiantes no reconocen a las fracciones como un conjunto de números diferente de los naturales y por tanto con propiedades diferentes, por lo que al momento de tratar de operar con las mismas tiendan a reducirlas a una operación de números naturales sumando numerador con numerador y denominador con denominador (Kerslake, 1986).

Otra cuestión importante es el hecho de que el tema de fracciones se introduce en una edad temprana y en ese momento los estudiantes disponen de pocos conocimientos previos relacionados con el tema que les permita abordarlo de forma exitosa (Perera & Valdemoros 2009).

Además cuando en educación básica se introduce por primera vez el tema de fracciones se les otorga poco significado en el contexto de los estudiantes, lo que ocasiona que estas sean trabajadas de forma mecanizada. A este respecto, Fandiño (2009) menciona que Stenger en 1971 propuso no dar a los estudiantes explicaciones sobre el significado de $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$ sino únicamente la regla para efectuarla, es decir, $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$. Esto representó en su momento una mejoría en las presentaciones formales de los estudiantes pero produjo un verdadero fracaso en el aprendizaje del sentido que se le da a lo que se está haciendo.

Lo anterior pone de manifiesto que una de las principales causas que se podrían atribuir a la aparición de todas las dificultades mencionadas líneas previas puede ser la manera en cómo se aborda la enseñanza de las fracciones. Pruzzo, (2012) declara que es indudable que los profesores enseñen las nociones sobre fracciones propuestas en el currículo, sin embargo los desempeños de los estudiantes ponen de manifiesto que pese al largo periodo en que se suele trabajar el concepto de fracción, más de la mitad de estudiantes no ha aprendido la noción. La enseñanza en las escuelas al abordar el tema presentan de manera simultánea diversos casos de fracciones agregando formas alternativas de medir peso, capacidad y volumen perdiendo así un atributo fundamental del concepto: la existencia de una unidad (o varias) que se dividen o reparten. Además no se emplea la evaluación como custodia de aprendizaje lo que no da la posibilidad a los estudiantes de reconstruir sus errores.

Hasta hace algunos años la enseñanza de las fracciones se centraba en la noción parte-todo y además estos *todo* se refería generalmente a cantidades continuas. Así se podía acceder a una representación de la unidad y después se pasaba a los números mixtos, las fracciones puras e impuras; etc. Esta forma de direccionar la enseñanza ha dejado *agujeros conceptuales* mismos que pueden ser superados enseñando las fracciones en todas sus interpretaciones.

De lo anterior se puede concluir lo siguiente:

La falta de dominio en el tema de fracciones es de suma importancia puesto que tiene repercusiones al abordar temas subsecuentes. Además se sugiere que estos problemas podrían provenir de la forma en que es enseñado.

Uno de los aspectos que presenta mayor dificultad es aplicar la operatividad de las fracciones en resolución de problemas.

Las dificultades con la operatividad de fracciones podrían asociarse a la falta de dominio de las equivalencias.

OBJETIVO

Los objetivos de este trabajo son:

- Identificar las dificultades que presentan los estudiantes de primer grado de secundaria al trabajar con problemas asociados con el tema de operatividad con fracciones, específicamente el uso de gestión de equivalencias.
- Diseñar una unidad didáctica que permita a los estudiantes superar dichas dificultades.
- Determinar el impacto que tiene el dominio de la gestión de equivalencias en la resolución de problemas.

PREGUNTAS

¿Cuáles son las principales dificultades que presentan alumnos de 1° de secundaria al enfrentarse a tareas cuya solución implica operar con fracciones?

¿De qué forma es posible superar las dificultades que los estudiantes de primero de secundaria presentan al tratar de resolver problemas relacionados con la operatividad de fracciones?

¿De qué forma incide el dominio de la gestión de fracciones equivalentes en la resolución de problemas que implican operar con fracciones?

CAPÍTULO III

MARCO TEÓRICO

DE LA DIDÁCTICA DE LAS FRACCIONES

Freudenthal (1983), en su fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas explicaba que los objetos matemáticos son noumena, pero un trozo de matemáticas puede ser experimentando como un phainomenon; los números son noumena pero trabajar con números puede ser un phainomenon. Los conceptos, estructuras e ideas matemáticas sirven para organizar los fenómenos -fenómenos tanto del mundo real como de las matemáticas-. Los números organizan el fenómeno de la cantidad.

Freudenthal explicaba que la fenomenología de un concepto matemático, de una estructura matemática o de una idea matemática se refiere a describir este noumenon en su relación con los phainomena para los cuales es el medio de organización, indicando cuáles son los phainomena para cuya organización fue creado y a cuáles puede ser extendido, de qué manera actúa sobre estos fenómenos como medio de organización y de qué poder nos dota sobre esos fenómenos. Si en esta relación entre noumenon y phainomenon se presta atención a cómo se adquiere tal relación en un proceso de enseñanza-aprendizaje, se habla entonces de la fenomenología didáctica de ese noumenon.

Lo que la fenomenología didáctica puede hacer es preparar un enfoque en el que se empiece por los fenómenos que solicitan ser organizados y, desde tal punto de partida, enseñar al estudiante a manipular esos medios de organización.

Freudenthal menciona que para él es más importante la constitución de objetos mentales basada en la fenomenología; en donde se invierte la aproximación de *primero los conceptos y después las aplicaciones*, en contraste con la adquisición de conceptos mediante "*embodiments*". Los "*embodiments*" son intentos de materialización de los conceptos matemáticos. Didácticamente esto significa enseñar abstracciones haciéndolas concretas. En esta aproximación las concreciones tienen un significado transitorio.

Hablando de las fracciones Freudenthal explicaba que son el recurso fenomenológico del número racional. La abundancia de fenómenos que se dominan con las fracciones y la razón es lo que causa el problema.

De acuerdo con Freudenthal es innegable que la didáctica de las fracciones se caracteriza por tendencias unificadoras. Los números naturales se enfocan desde varias perspectivas, pero cuando llega el turno de las fracciones se supone que los alumnos están suficientemente avanzados para quedarse satisfechos con un único enfoque desde la realidad. Este supuesto erróneo es, desde la perspectiva de Freudenthal la razón por la que, a diferencia de los números naturales, las fracciones funcionan mucho peor y por lo que mucha gente nunca aprende las fracciones.

Los alumnos que logran desarrollar destreza para aplicar los algoritmos pueden operar con fracciones de todos modos, los alumnos menos o nada diestros lo aprenden por ensayo y error o no lo aprenden en absoluto. Después de un tiempo usando las fracciones, algunos alumnos dominan los algoritmos, pero no tienen ni idea de lo que significan las fracciones, ni de lo que se puede hacer con ellas. La pobreza fenomenológica del enfoque es, desde la perspectiva de Freudenthal, en gran parte, responsable de este fallo didáctico.

> *La fracción como fracturador no es sólo un comienzo demasiado estrecho, es también unidireccional. Es extraño que todos los intentos de innovación hayan pasado por alto este punto. El moderno análisis fenomenológico ha enfocado el concepto de magnitud con cuidado; se ha reconocido el papel desempeñado por*

equivalencia y fracciones, pero este análisis fenomenológico nunca ha tenido una vertiente didáctica. (Freudenthal, 1983; p. 23).

LA OPERATIVIDAD Y LAS EQUIVALENCIAS

Kieren (1976) explicó que la mayoría de los materiales del currículo escolar trata el número racional como objetos de cálculo. Por lo tanto, niños y adolescentes pierden muchas de las interpretaciones importantes de número racional. Además argumenta que a partir de la idea de clases de equivalencia fluye la noción de operaciones en los racionales y también sus propiedades. En dicho estudio proporcionó un listado de cuestiones previas a la suma de fracciones en el que muestra que está íntimamente relacionada con la comprensión de las equivalencias.

Particularmente, el aspecto algebraico de las operaciones con racionales se pierde. Empero, los números racionales presentan una confrontación cara a cara con problemas algebraicos porque los niños deben:

a) Enfrentarse con la noción de equivalencia.
b) Hacer frente a una operación "+", que en su forma algebraica "funciona" como lo hace principalmente por razones axiomáticas y ya no es natural
c) Trabajar con las propiedades, particularmente una noción general del inverso.

Para un adecuado aprendizaje del aspecto algebraico que es inherente en el concepto de número racional, Kieren (1976) argumenta que es necesaria una variada experiencia con diversas interpretaciones de número racional.

En el mismo sentido Post, Wachsmuth, Behr y Lesh (1984) afirmaron que la capacidad infantil para adquirir noción cuantitativa del número racional es crucial para el desarrollo de otros conceptos de los números racionales. Además, Wong y Evans (2007) expresan que "*la comprensión conceptual en matemáticas se desarrolla cuando los estudiantes pueden ver las conexiones entre conceptos y procedimientos y pueden dar argumentos para explicar porque algunos hechos son consecuencia de otros*" (NRC, 2001, p.119).

Cuando el cálculo con fracciones es el foco de la instrucción, el aprendiz se enfrenta a una serie de habilidades que debe aprender. En este orden hay una serie de subsecuencias ordenadas jerárquicamente para una habilidad particular. Por ejemplo, Fish (1874) en Kieren (1986) encontramos esta secuencia de cuestiones previas a la suma de fracciones.

a) Reducir fracciones al término superior o inferior (en lenguaje moderno – fracciones equivalentes);
b) Transformar un número entero o un número mixto a fracción impropia;
c) Convertir fracciones a fracciones equivalentes que tengan un denominador común;
d) Encontrar el mínimo común denominador de fracciones; y
e) Sumar fracciones.

Como puede apreciarse en el listado anterior la suma de fracciones está íntimamente relacionada con la comprensión de la equivalencia de fracciones.

La literatura señala, desde los años 60, que son muchos los estudiantes que no saben manejar la equivalencia de fracciones. Algunos estudios han revelado que para los estudiantes es más fácil manejar las equivalencias cuando estas fracciones involucran números múltiplos entre sí; para los alumnos resulta muy fácil cuando la estrategia se reduce a multiplicar o dividir numerador y denominador por el mismo número, sin embargo les resulta más difícil encontrar una estrategia que les permita gestionar la equivalencia cuando los números involucrados no son múltiplos entre sí (Fandiño, 2009). Esta manera de proceder de los estudiantes refleja una falta de dominio y en consecuencia de comprensión real de las equivalencias entre fracciones lo que desde el punto de vista de este autor representa uno de los significados de la fracción más importante porque se considera un elemento base que, al no construirse correctamente incide en la comprensión de otros significados de las fracciones con mayor relevancia; tanto en la resolución de problemas como en las operaciones con fracciones.

A lo largo de la experiencia obtenida en la enseñanza de las matemáticas hemos observado que los alumnos generalmente presentan dificultades cuando se les pide encontrar equivalencias a fracciones dadas, más aún cuando los denominadores no son múltiplos entre sí. Estas dificultades sobre la falta de comprensión real de la gestión de equivalencias trascienden a la operatividad con las mismas y el problema es persistente cuando los denominadores son diferentes y con mayor incidencia cuando estos no son múltiplos entre sí.

Post, Wachsmuth, Behr y Lesh (1984) hicieron un análisis sobre la comprensión de estudiantes de cuarto grado sobre el orden y la equivalencia de los racionales. Ellos mencionan que el concepto de números racionales está entre las ideas matemáticas más complejas e importantes que los niños enfrentarán antes de llegar a la escuela secundaria y que con una instrucción adecuada durante un periodo prolongado de tiempo, la mayoría de los niños a finales de cuarto grado son capaces de desarrollar un pensamiento adecuado para hacer frente a preguntas del orden y equivalencias de fracciones y que la habilidad para abordar efectivamente los racionales mejora enormemente su habilidad para entender y operar con situaciones y problemas en el mundo real.

Todo lo mencionado líneas previas evidencia que el manejo de los números racionales trasciende más allá de la operatividad con ellos. Además si la intención es que los niños o adolescentes dominen habilidades de pensamiento superiores que les permitan resolver problemas relacionados con el tema y no manejar el algoritmo mecánicamente, es de suma importancia dedicar tiempo a que se comprendan las diversas interpretaciones de los números racionales (Post, Behr y Lesh 1982). Dado que muchos autores asocian la comprensión de equivalencia con algunas de estas interpretaciones es posible considerar que el dominio de la operatividad de fracciones aplicado a la resolución de problemas puede tener su fundamento en el dominio de las fracciones equivalentes.

CAPÍTULO IV

<u>MÉTODO</u>

El estudio se realizó con 43 alumnos de primer grado de una Escuela Secundaria Técnica del estado de Puebla, que oscilan entre los 12 y 14 años. La escuela está ubicada en un contexto urbano de clase media.

El estudio realizado tiene un enfoque cualitativo, en este se realizó una investigación documental que tuvo como propósito conocer cuáles han sido las principales dificultades que enfrentan los estudiantes al estudiar las fracciones y la influencia que estas tienen en la resolución de problemas. Además se realizó una investigación de campo con la intención de identificar las dificultades que los alumnos presentan al manejar las fracciones y cómo hacen uso de las equivalencias.

Existe una vasta referencia bibliográfica sobre las investigaciones que se han derivado del tema de fracciones y las dificultades que este representa para los estudiantes. Algunas investigaciones se han centrado en la construcción del significado de fracción y cuáles son las dificultades al aprender fracciones. Otras en la enseñanza de las fracciones a nivel primaria. Algunas otras sobre la comprensión de los estudiantes en el tema de las fracciones. También existen algunas investigaciones que estudian los procedimientos empleados para operar con las fracciones algunos de los cuales mencionan la importancia de la comprensión de equivalencias. Sin embargo no se han encontrado reportes de investigación que provean de evidencia empírica sobre la temática de equivalencias, por lo que en el presente trabajo se optó por hacer un pre-test, basado en un estudio empírico que aportara información sobre la problemática tratada y a su vez orientara la etapa de intervención.

CAPÍTULO V

EL DIAGNÓSTICO

El diagnóstico se llevó a cabo en tres etapas; diseño del instrumento, aplicación y análisis de resultados. Para el diseño del instrumento diagnóstico se tomaron de referencia dos textos. El primero se corresponde con el trabajo de Klaus Hasemann (1981) y proporciona algunos ítems de diagnóstico sobre las dificultades con fracciones del cual se extrajeron los que correspondían a equivalencias, pero además provee de una clasificación con respecto del significado de fracción empleado para cada ítem y su grado de dificultad, misma que fue utilizada para clasificar todos los ítems del instrumento diagnóstico. Del segundo texto (Kamii & Clark, 1995) únicamente se extrajeron los ítems de su diagnóstico ya que su investigación se refiere a las fracciones equivalentes, sus dificultades e implicaciones educativas aunque, como se mencionó líneas previas, en tal estudio no se reporta intervención (el instrumento completo puede verse en el anexo 1). Posterior al diseño se aplicó el instrumento y se realizó el análisis de resultados.

La clasificación que se utilizó para determinar el grado de dificultad de cada ítem fue la siguiente (Hasemann, 1981):

Se clasifica en tres facetas:

1. Operaciones con fracciones

    a_1. Reconocer fracciones equivalentes

    a_2. Ordenar fracciones

    a_3. Adición y resta

    a_4. Multiplicación y división

2. Formas de representación de problemas

    b_1. Diagramas

    b_2. Símbolos matemáticos

b_3. Palabras

3. Formas de operar con fracciones

c_1. Describir fracciones en diferentes formas

c_2. Fracciones de forma inversa

c_3. Determinar el todo a partir de una parte fraccionaria

d_1. Adición

d_2. Sustracción

e_1. Multiplicación

e_2. División

Nota: La clasificación 3-c_2 no se utilizó para el estudio.

Los ítems pueden combinar varias facetas, esto implica una mayor dificultad y, por lo tanto, mayor exigencia sobre lo que los alumnos deben manejar con respecto del tema de fracciones para resolver con éxito cada uno de ellos.

ANÁLISIS DE RESULTADOS DEL DIAGNÓSTICO

Los resultados del diagnóstico se analizaron de forma cualitativa. Los ítems se analizaron de acuerdo con la clasificación de Hasemann por el grado de dificultad y el nivel de comprensión de los estudiantes en tareas relacionadas con el uso de fracciones equivalentes. Las respuestas se clasificaron en tres tipos; sin respuesta, incompletas o parciales y respuestas correctas. En cada ítem se valoró el tipo de respuesta y el razonamiento de los estudiantes al resolver las tareas propuestas. En el análisis lo más importante a considerar en el nivel de respuesta de los estudiantes y el grado de comprensión que pueden evidenciar en sus argumentaciones. Algunos de los ítems contenidos en el diagnóstico, su clasificación, justificación y análisis se presentan a continuación.

Ítems 1 y 2

1. Una galleta redonda se repartirá entre dos niños. ¿Cómo representarías la parte que le corresponde a cada uno? **(b_2)**

2. Con un pedazo de listón se tienen que hacer ocho moños del mismo tamaño. ¿Qué parte del listón se necesitará para cada moño? **(b_2)**

Los ítems anteriores tienen la misma estructura, la intención de colocarlos era conocer si los alumnos, dado que ya han cursado varios grados de educación primaria en los cuáles se trata el tema de fracciones, manejaban como idea fundamental el significado de fracción parte-todo. El ítem 1 se tomó textualmente del trabajo de Hasemann, sin embargo es importante aclarar que para una mejor comprensión debe precisarse que la repartición debe hacerse de forma equitativa ya que esto podría causar algún problema con la interpretación. En el caso del pre-test no se suscitó dicho inconveniente.

De acuerdo con los resultados del diagnóstico se pudo observar que el ítem 1; con 42 respuestas correctas (97%), no representa una dificultad para los estudiantes, sin embargo el ítem 2, que como hemos mencionado, corresponde con la misma estructura del primer ítem, si representó una dificultad importante, ya que de los 43 estudiantes el 33 % contestó incorrectamente dicho ítem. Esto pudo haber sucedido por varias causas, una de ellas puede ser la semántica, ya que les es más familiar la representación simbólica de $\frac{1}{2}$ que de $\frac{1}{8}$. Esta consideración es importante porque en las respuestas de los estudiantes se puede observar que algunos si representaron gráficamente el listón fraccionado pero no fueron capaces de representarlo de forma simbólica. Otra dificultad que se evidencia en las respuestas incorrectas de algunos estudiantes es que no conciben la fracción como la abstracción de la partición de un todo en el que no es necesario conocer una magnitud del objeto fraccionado. Los estudiantes explican que no es posible saber cuánto se necesita para cada moño debido a que no se les proporciona una medida y aun cuando no se les proporciona tienen la necesidad de inventar una (***Ilustraciones 4.1 y 4.2***).

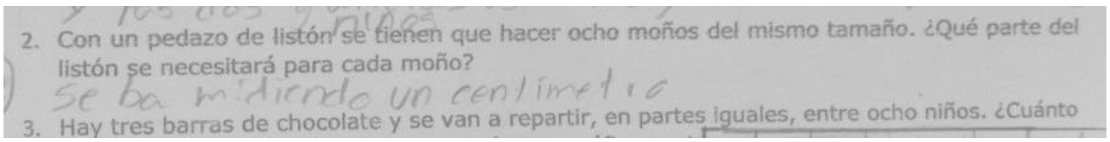

2. Con un pedazo de listón se tienen que hacer ocho moños del mismo tamaño. ¿Qué parte del listón se necesitará para cada moño?
Se ba midiendo un centimetro
3. Hay tres barras de chocolate y se van a repartir, en partes iguales, entre ocho niños. ¿Cuánto

Ilustración 4.1

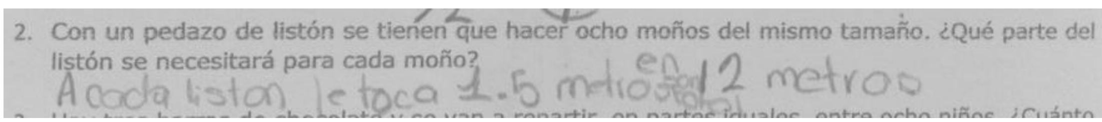

2. Con un pedazo de listón se tienen que hacer ocho moños del mismo tamaño. ¿Qué parte del listón se necesitará para cada moño?
A cada liston le toca 1.5 metros en 12 metros

Ilustración 4.2

También pudo haber influido el contexto del problema. A los niños les resulta más familiar el contexto de la repartición de una galleta que el de cortar un listón. Otra causa posible es que los estudiantes sean sensibles al rango numérico, es decir, que para ellos sea más familiar e intuitiva la idea de fraccionar en mitades que en octavos.

Ítem 3

3. Hay tres barras de chocolate y se van a repartir, en partes iguales, entre ocho niños. ¿Cuánto le toca a cada uno? Represéntalo numérica y gráficamente. **(b_3, e_2)**

Este ítem se colocó con la intención de identificar si los estudiantes advierten el significado de una fracción como resultado de una repartición.

El ítem tres solicita la repartición de tres chocolates entre ocho niños, y se espera que los estudiantes, además de representar gráficamente la parte que le toca a cada niño, escriban el resultado como fracción. Los resultados obtenidos muestran que el 51% de los estudiantes contestaron incorrectamente y el 25 % de los estudiantes ni siquiera respondió, lo que evidencia una gran dificultad en este ítem. Algunas de las estrategias incorrectas que emplearon los estudiantes en el diagnóstico fueron:

1. Dividir 8÷3. Al realizar tal división los estudiantes no mostraron una comprensión real de lo que necesitan hacer para determinar la parte que corresponde a cada niño, esto es, invierten los datos. Probablemente ellos suponen que al hacer una repartición (relacionada con la operación de dividir) el dato mayor siempre se ubica como dividendo; es decir, siempre se reparte *el más grande entre el más pequeño*, lo cual muestra un débil manejo de las fracciones en cuestión de repartición ya que los alumnos, pese a que han trabajado 4 grados de primaria con las fracciones, están más familiarizados con la repartición asociada con una división (***Ilustraciones 4.3 y 4.4***).

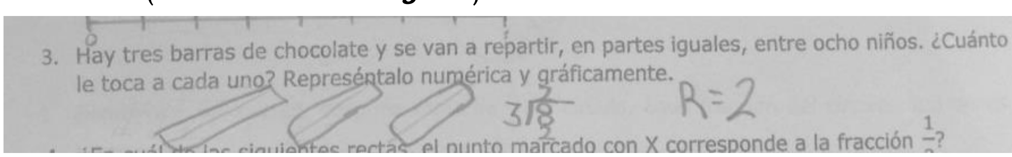


Ilustración 4.3

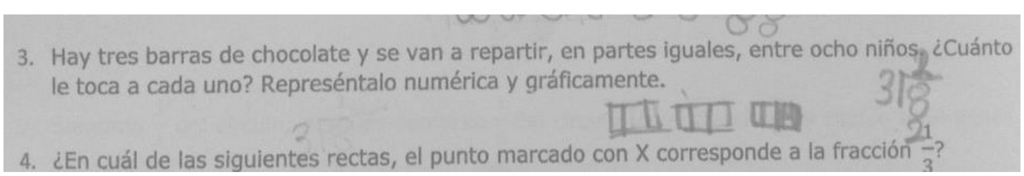
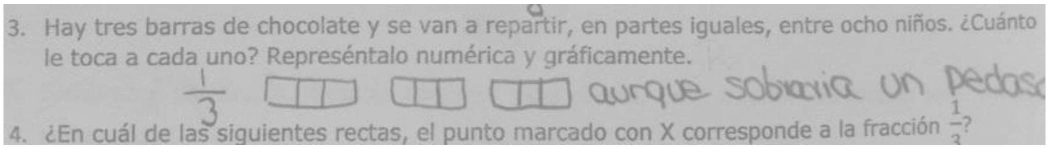


Ilustración 4.4

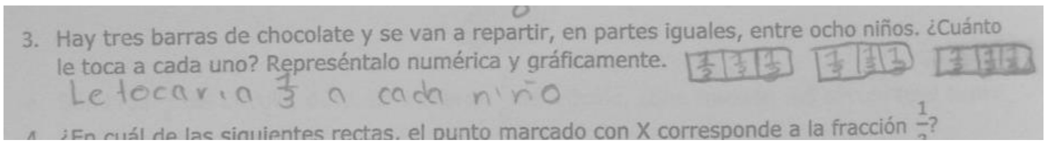
Algunos estudiantes fraccionaron cada chocolate en 3 partes, para obtener en total 9 partes, así pudieron hacer la repartición a 8 niños, sin embargo, no consideran que para hacer una repartición justa es necesario repartir todo el chocolate, por lo tanto no debe faltar ni


3. Hay tres barras de chocolate y se van a repartir, en partes iguales, entre ocho niños. ¿Cuánto le toca a cada uno? Represéntalo numérica y gráficamente.

$\frac{1}{3}$ aunque sobraria un pedaso

4. ¿En cuál de las siguientes rectas, el punto marcado con X corresponde a la fracción $\frac{1}{3}$?

Ilustración 4.5


3. Hay tres barras de chocolate y se van a repartir, en partes iguales, entre ocho niños. ¿Cuánto le toca a cada uno? Represéntalo numérica y gráficamente.

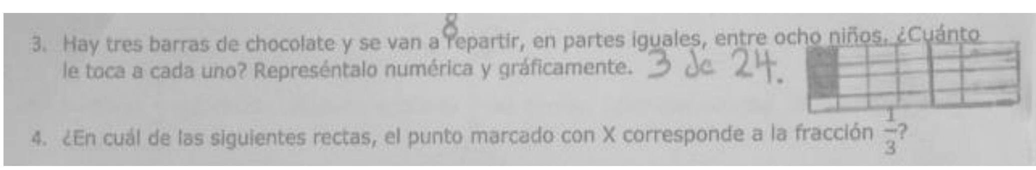
Le tocaria $\frac{1}{3}$ a cada niño

4. ¿En cuál de las siguientes rectas, el punto marcado con X corresponde a la fracción $\frac{1}{3}$?

Ilustración 4.6

sobrar nada, esta fue una consideración que no tomaron en cuanta. Aunque algunos expresan que sobra una parte, parece que no encontraron una mejor estrategia para resolver el problema por lo que se vuelve a evidenciar un débil manejo de las fracciones (***Ilustraciones 4.5 y 4.6***).

Un estudiante respondió que a cada niño le tocaban 3/24, él tuvo una idea de cómo podría resolverlo, sin embargo asume que el entero es la suma de todas las partes y no se percata que tiene 3 enteros y cada uno está fraccionado en 8 partes por lo que en realidad tiene 24/8 y al hacer la repartición de 24/8 entre ocho niños a cada uno le tocan 3/8 y no 3/24 como él supuso (***Ilustración 4.7***).


3. Hay tres barras de chocolate y se van a repartir, en partes iguales, entre ocho niños. ¿Cuánto le toca a cada uno? Represéntalo numérica y gráficamente.

3 de 24.

4. ¿En cuál de las siguientes rectas, el punto marcado con X corresponde a la fracción $\frac{1}{3}$?

Ilustración 4.7

Otros estudiantes, sin hacer ninguna representación gráfica ni operación aparente, intentaron dar respuesta al ítem. Suponemos que estos estudiantes atienden al contrato didáctico y por lo tanto ellos creen que eso es lo que se espera; dar alguna respuesta (***Ilustraciones 4.8 y 4.9***).

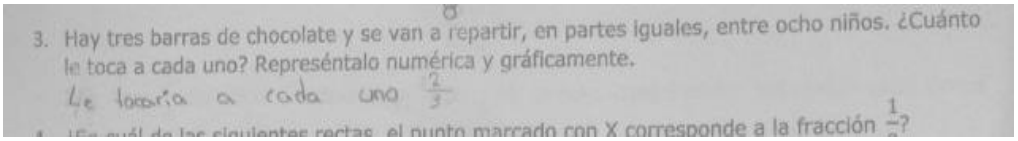

3. Hay tres barras de chocolate y se van a repartir, en partes iguales, entre ocho niños. ¿Cuánto le toca a cada uno? Represéntalo numérica y gráficamente.
Le tocaría a cada uno $\frac{2}{3}$

Ilustración 4.8

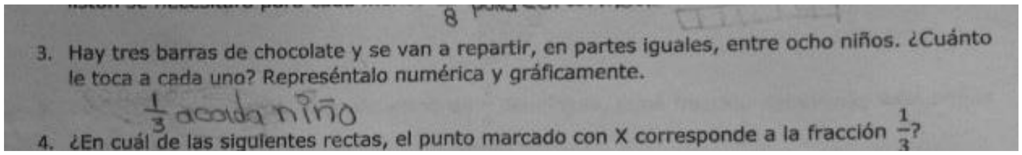
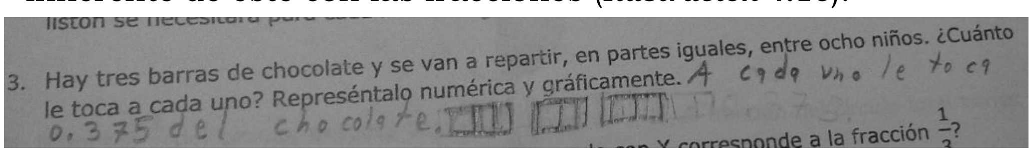

3. Hay tres barras de chocolate y se van a repartir, en partes iguales, entre ocho niños. ¿Cuánto le toca a cada uno? Represéntalo numérica y gráficamente.
$\frac{1}{3}$ a cada niño
4. ¿En cuál de las siguientes rectas, el punto marcado con X corresponde a la fracción $\frac{1}{3}$?

Ilustración 4.9

Con respecto de las respuestas correctas, los estudiantes también emplearon diferentes estrategias:

1. Los cinco estudiantes que respondieron con la fracción tres octavos muestran una representación gráfica de la situación, es decir; muestran los tres chocolates y fraccionan cada uno en 8 partes, sin embargo de acuerdo con lo solicitado en el problema sólo tres alumnos colorearon en sus representaciones la parte que le correspondía a cada niño.
2. Otros niños respondieron el ítem con el resultado de dividir 3÷8. Ellos saben qué representa la repartición de tres chocolates entre ocho niños, empero, ellos también muestran una fuerte tendencia a relacionar la repartición con la división más que con las fracciones. Finalmente su resultado es 0.375, pero ¿qué significado tiene para ellos el hecho de que cada niño le toque 0.375 partes del chocolate? Suponemos que ellos entienden la mecánica del problema pero no el significado ni la relación inherente de este con las fracciones (***Ilustración 4.10***).


3. Hay tres barras de chocolate y se van a repartir, en partes iguales, entre ocho niños. ¿Cuánto le toca a cada uno? Represéntalo numérica y gráficamente. A cada uno le toca 0.375 del chocolate.

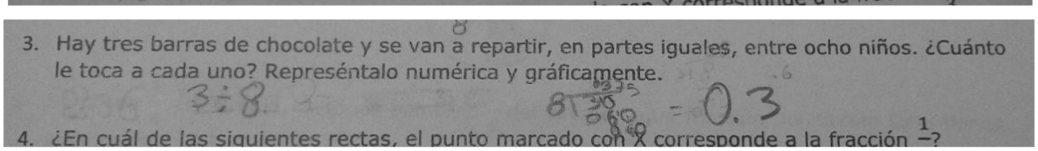
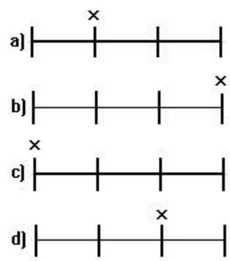

3. Hay tres barras de chocolate y se van a repartir, en partes iguales, entre ocho niños. ¿Cuánto le toca a cada uno? Represéntalo numérica y gráficamente.
3÷8 = 0.3
4. ¿En cuál de las siguientes rectas, el punto marcado con X corresponde a la fracción $\frac{1}{3}$?

Ilustración 4.10

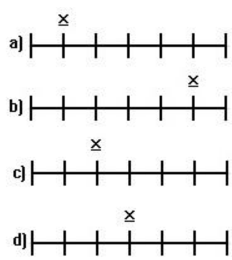
Ítems 4 y 5

4. ¿En cuál de las siguientes rectas, el punto marcado con X corresponde a la fracción $\frac{1}{3}$? **(b_1)**



e) Ninguna de las anteriores

5. ¿En cuál de las siguientes rectas, el punto marcado con X corresponde a la fracción $\frac{1}{3}$? **(a_1, b_1)**



e) Ninguna de las anteriores

Los ítems 4 y 5 tienen la misma estructura; ambos piden ubicar en la recta numérica la fracción $\frac{1}{3}$, la diferencia en ellos es que en el primer ítem la fracción solicitada se muestra de manera directa, en el segundo ítem la fracción no se muestra directamente, los alumnos deben encontrar su equivalencia con sextos. La finalidad de considerar estos ítems es conocer si los alumnos lograban identificar fracciones equivalentes en la recta numérica. Estos ítems tienen la misma estructura, como se mencionó anteriormente, se trata de que los alumnos ubiquen la fracción $\frac{1}{3}$. En el ítem 4 la recta está fraccionada en tercios, por lo que los alumnos pueden identificar la fracción de forma directa, es decir, sin hacer uso de equivalencias o conversiones.

En este ítem el 19% de los estudiantes contestó incorrectamente, la mayoría de ellos consideró la marca de un tercio en 0. Pese a que los ítems 4 y 5 tienen la misma estructura, el ítem 5 exige hacer una conversión de un tercio a la fracción equivalente dos sextos, en este ítem se obtuvieron 60% de respuestas incorrectas. Es evidente que los estudiantes tuvieron más dificultad en identificar la fracción solicitada debido a que la recta no se encuentra fraccionada en tercios directamente (***Ilustración 4.11***).

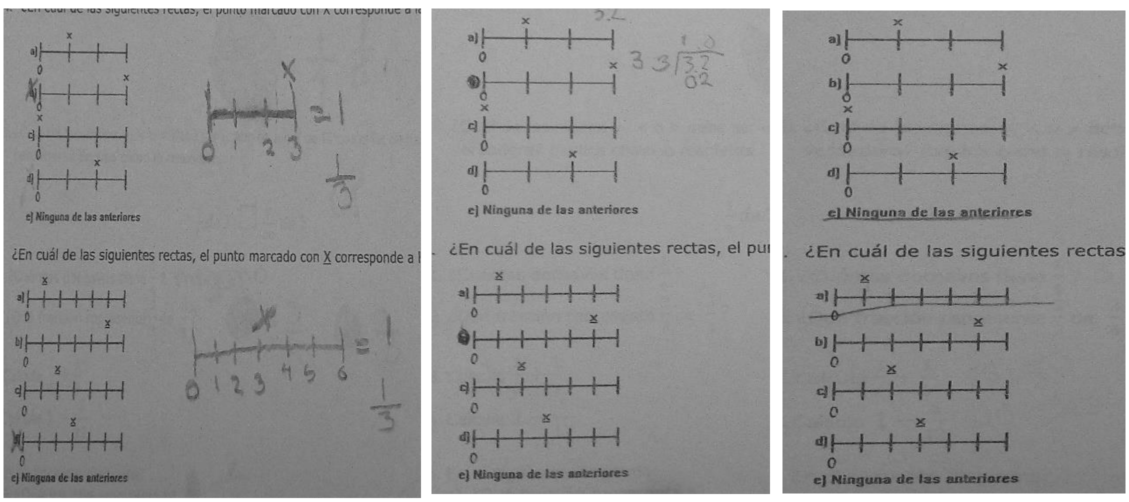


Ilustración 4.11

Ítem 6

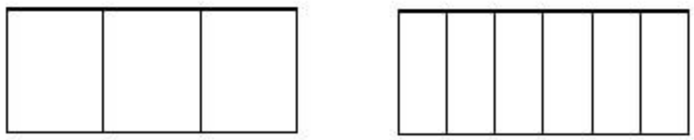
6. De las siguientes fracciones agrupa las que representan lo mismo, es decir, son equivalentes.

$$\frac{12}{16}, \quad \frac{2}{9}, \quad \frac{6}{8}, \quad \frac{3}{9}, \quad \frac{2}{6}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{3}{10}, \quad \frac{5}{10}$$

Con este ítem se pretendía observar cómo es que los estudiantes reconocen fracciones equivalentes, si lo hacen solamente por medio de múltiplos o emplean otras estrategias para reconocerlas. Todos los estudiantes que respondieron el ítem correctamente pudieron identificar equivalencias por medio de múltiplos, ninguno asoció por ejemplo; 2/6 y 3/9 ya que estos no son múltiplos entre sí aunque si son equivalentes.

Ítem 7

7. Sombrea $\frac{2}{3}$ de cada uno de los siguientes rectángulos. **(a_1, b_1)**



Con este ítem, del mismo modo que los ítems 4 y 5, interesa conocer el manejo de las fracciones equivalentes, la variante aquí es que se trata de un todo continuo.

Aparentemente este ítem no parece representar grandes dificultades para los estudiantes ya que más de la mitad (60%) contestó correctamente. Sin embargo conviene aclarar que del porcentaje de alumnos que no contestó correctamente a dicho ítem, el 34% solo pudo sombrear dos tercios en el rectángulo que estaba fraccionado en tercios directamente, no así en el que primero debía encontrar una fracción equivalente para poder sombrear, lo cual muestra una falta de manejo de las fracciones equivalentes (***Ilustración 4.12***).

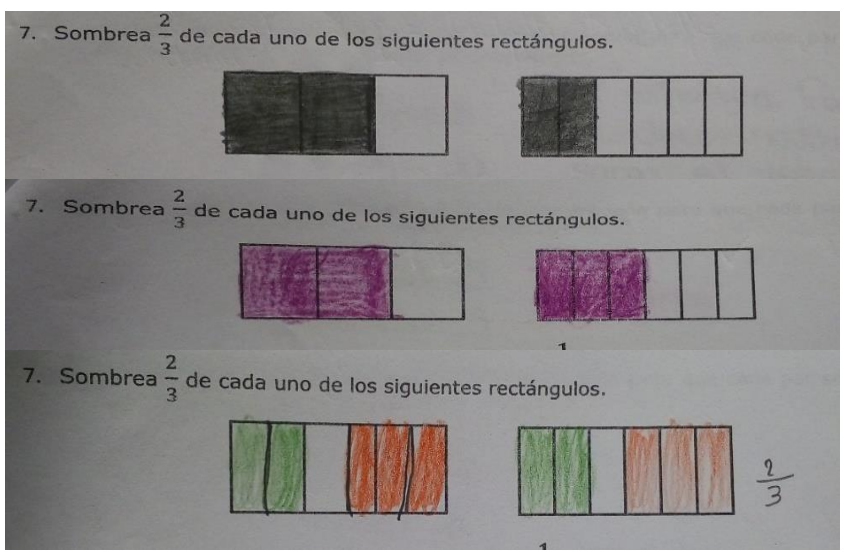
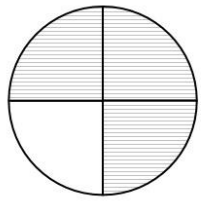


Ilustración 4.12

Ítem 8

8. Una parte del círculo está sombreada. Colorea $\frac{1}{6}$ **de la parte sombreada**. ¿Qué **fracción del círculo completo** representa la parte que coloreaste? **(a_4, b_1, e_1)**



En este ítem se pretendía observar si los estudiantes eran capaces de identificar una fracción de otra fracción mediante una representación gráfica y además expresarlo simbólicamente. En este el 41% de los estudiantes logró colorear un sexto de la parte sombreada pero, o bien no lograron escribir correctamente la representación simbólica o definitivamente no la escribieron. El 39% de los estudiantes contestaron incorrectamente al ítem, es decir, no lograron colorear un sexto ni escribir simbólicamente la respuesta (***Ilustración 4.13***).

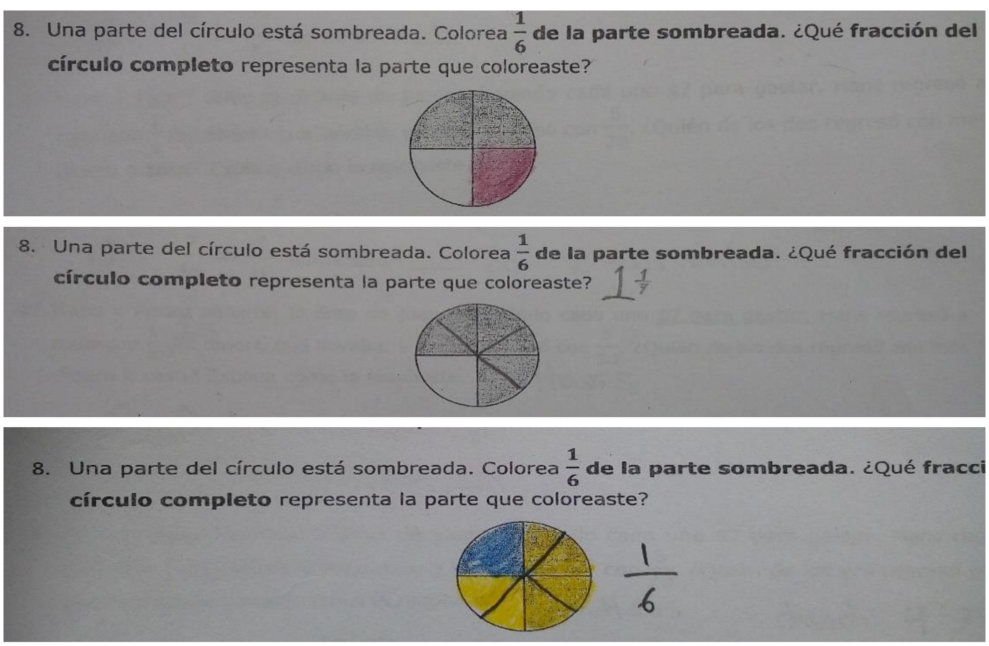
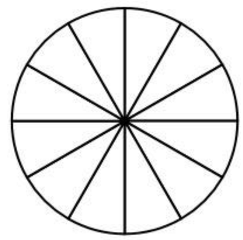


Ilustración 4.13

Ítem 9

9. Sombrea $\frac{1}{4}$ del círculo, después sombrea $\frac{1}{6}$ del círculo, ¿qué fracción del círculo total tienes sombreada? **(a_3, b_1, d_1)**



En este ítem se muestra un círculo dividido en doce partes iguales, la primera intención es observar si los estudiantes reconocen la equivalencia en doceavos de $\frac{1}{4}$ y también de $\frac{1}{6}$, finalmente se les pide sumar dichas fracciones y reconocer la parte del todo que se tiene sombreada con la intención de conocer su procedimiento para sumar fracciones. En este caso se trata de identificar si los alumnos tienen o no manejo de las equivalencias de fracciones, si con ello logran reconocer la equivalencia en doceavos de cada una de las fracciones planteadas y además si esto les permite realizar la suma haciendo uso de las equivalencias aún si no recuerdan el algoritmo.

El ítem 9 tiene varias exigencias con respecto de los ítems anteriores ya que, inicialmente se pedía a los estudiantes sombrear un cuarto del círculo, debido a que este estaba fraccionado en doce partes, antes debía encontrarse la equivalencia de doceavos-cuartos. La segunda parte del ítem consistía en sombrear un sexto del círculo, para lo cual, igual que en la primera consigna, se tenía que hallar la equivalencia sextos-doceavos. Finalmente se pedía indicar la fracción del círculo que quedaba sombreada después de haber realizado las primeras dos consignas. Esto implicaba una suma de fracciones, misma que se podía resolver de forma visual; identificando cuántos doceavos estaban sombreados o bien, sumar las fracciones equivalentes. En dicho ítem el 41% de los estudiantes contestó incorrectamente. De este porcentaje algunos sombrearon seis de los doceavos y cuatro de los doceavos, quedando sombreado finalmente $\frac{10}{12}$ (así lo expresan los estudiantes) del círculo completo. Esto pone en evidencia que los alumnos no tienen un manejo adecuado de las fracciones con respecto al significado parte-todo, debido a que, por una parte, ignoraron por completo que se les había pedido sombrear $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{6}$ del círculo y no 4 y 6 partes de las mostradas en el círculo, pero por otra si identificaron que la respuesta es una fracción que corresponde a una parte de un todo. Otro grupo considerable (34% de los que respondieron incorrectamente) logra colorear $\frac{1}{4}$ o bien $\frac{1}{6}$ del círculo, en muy pocos casos ambas por lo que no pudieron responder de forma completa al ítem. Estos resultados ponen de manifiesto que los alumnos no comprenden del todo la noción de fracción ni del uso de las equivalencias de fracciones. Aquí es importante aclarar que los estudiantes que lograron identificar las equivalencias contestaron correctamente al ítem, es decir, sombrearon correctamente las fracciones equivalentes en doceavos de un cuarto y un sexto. Pero además lograron resolver la suma de fracciones la cual, de acuerdo con los resultados, fue resuelta visualmente, solamente un estudiante hizo uso del algoritmo (***Ilustración 4.14***). Los estudiantes que contestaron correctamente el ítem sombrearon tres partes de las doce, representando la equivalencia en doceavos de $\frac{1}{4}$; y dos partes de las doce representando la equivalencia en doceavos de $\frac{1}{6}$, dieron el resultado de la suma directamente, es decir, no la expresaron como la suma de las dos fracciones originales $\frac{1}{4} + \frac{1}{6}$, tampoco la expresaron como suma de las dos fracciones equivalentes a $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{6}$ respectivamente, sin embargo de forma visual hicieron uso de las equivalencias para expresar el resultado de la suma (***Ilustración 4.15***).

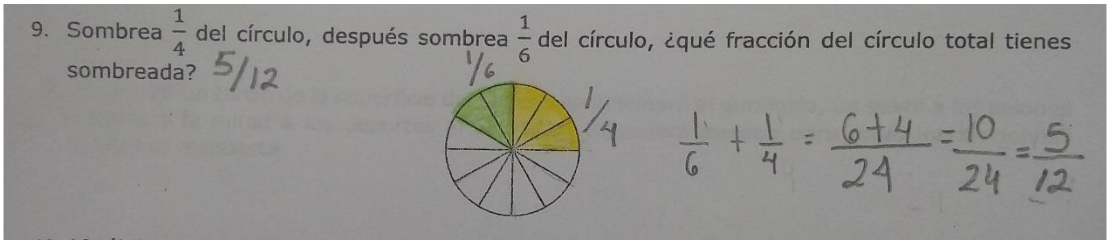


Ilustración 4.14

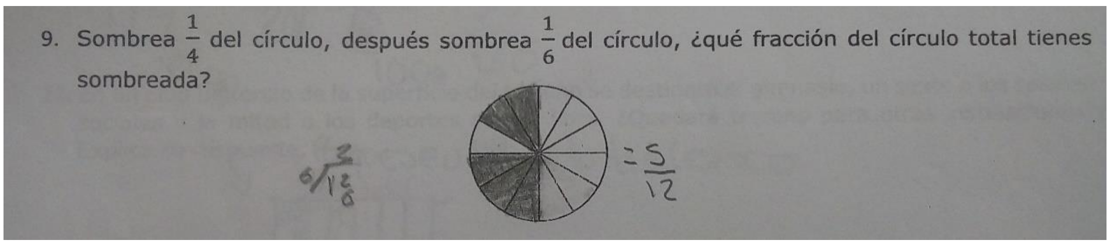


Ilustración 4.15

Ítem 10

10. ¿Cuál de los signos =, < o > debe ser usado en lugar de ☐ con el fin de hacer una declaración verdadera? Explica cómo lo resolviste. **(a_2, b_2, c_1)**

$$\frac{1}{4}\, de\ 7\ \square\ \frac{5}{20}\ de\ 7$$

Aquí se esperaba identificar el manejo de las fracciones equivalentes. Dado que las fracciones a comparar corresponden al mismo entero, la comparación en este ítem se reduce a la comparación simple de las fracciones $\frac{1}{4}$ y $\frac{5}{20}$. Se esperaba que los estudiantes lograran darse cuenta que estas son equivalentes. El 58% de los estudiantes no advirtieron que las fracciones son equivalentes, ellos tienen una idea parcial sobre la comparación de fracciones. La mayoría de los estudiantes escribió que la fracción $\frac{1}{4}$ era mayor que la fracción $\frac{5}{20}$ pero solamente un estudiante explicó su respuesta. Él menciona que: *entre* *menor número sea la fracción más va a tener*, estos estudiantes parecen tener claro que entre menos sea el número de partes en que se divide un entero la fracción es mayor, sin embargo pierden de vista que por medio de las fracciones equivalentes se pueden obtener representaciones diferentes de una misma fracción (***Ilustración 4.16***). Algunos otros estudiantes consideraron que; por ser mayor 5 que 1 y 20 que 4 la fracción mayor debe ser $\frac{5}{20}$, con lo cual, se vuelve a poner en evidencia una débil noción de fracción porque no les permite darse cuenta que no es correcto comparar los números de forma aislada ya que de acuerdo con la notación esto representa un número en sí mismo y no dos como ellos lo consideran (***Ilustración 4.17***). Además refleja falta de dominio de las fracciones equivalentes aun cuando estas se obtengan mediante múltiplos, no se muestra una comprensión real sobre el significado de estas.

De los alumnos que respondieron correctamente a este ítem solo tres dieron explicación de su respuesta uno escribió -tal parece que hay una equivalencia-, otro explica con más claridad que si realiza una simplificación de la fracción $\frac{5}{20}$ se obtiene la fracción ¼ y por lo tanto estas son equivalentes, el tercer estudiante explicó: - $\frac{5}{20}$ es una cuarta parte al igual que $\frac{1}{4}$ -.

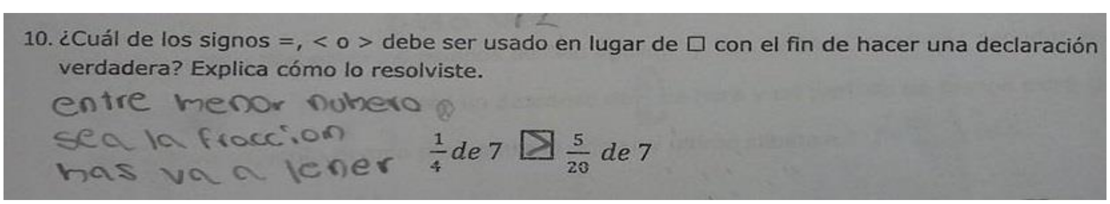


Ilustración 4.16

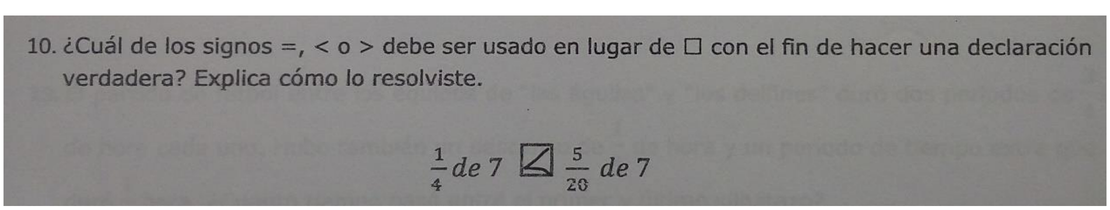


Ilustración 4.17

13. Calcula $\frac{1}{6}+\frac{1}{3}$ **(a_3, b_2, d_1)**

14. Calcula $1-\frac{5}{12}$ **(a_3, b_2, d_2)**

Con estos ítems se pretendía conocer cómo es que los estudiantes operan con las fracciones, si utilizan el algoritmo convencional o hacen uso de las equivalencias.

Las operaciones con fracciones frecuentemente son resueltas por los estudiantes mediante el algoritmo convencional, pocas veces con la comprensión real de lo que se está haciendo. En estos ítems, 39% y 20% respectivamente, contestaron incorrectamente pero 25% y 48% no lo respondieron. En total 64% no responde exitosamente al ítem 13 y 68% al ítem 14. Algunos de los errores que se evidencian es que los alumnos tienen la tendencia a sumar numerador con numerador y denominador con denominador (***Ilustración 4.18***). Otros estudiantes inventan sus propios métodos de solución. Por ejemplo; sumar numerador de la primera fracción con el denominador de la segunda y denominador de la primera con numerador de la segunda, formando con tales resultados la respuesta a la suma. Suponemos que este método es una adaptación de lo que recuerdan del algoritmo de la multiplicación y división y piensan que se suma cruzado (***Ilustración 4.19***).

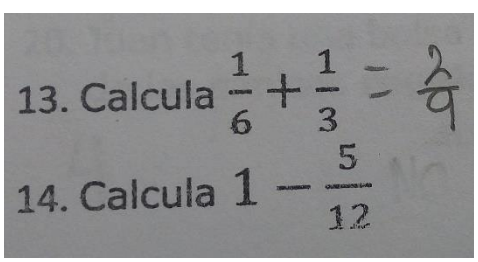


Ilustración 4.18

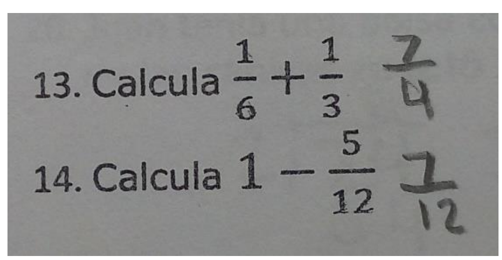


Ilustración 4.19

Lo anterior pone de manifiesto que para ellos las fracciones no representan un conjunto de números diferente de los naturales sino una combinación que además sigue conservando las mismas propiedades y que utilizan para operar indistintamente con unos y otros. Aunque algunos de los estudiantes que contestaron correctamente no muestran su procedimiento completo, de acuerdo con las respuestas obtenidas se puede suponer que hicieron uso de equivalencias (***Ilustración 4.20***). Dado que durante la educación básica el algoritmo convencional para operar con fracciones es revisado un periodo prolongado se esperaría que la mayoría de los estudiantes que cursan primero de secundaria ya lo dominaran puesto que lo han revisado desde cuarto de primaria, sin embargo, en los resultados del diagnóstico solamente ocho estudiantes mostraron el uso del mismo para resolver tales operaciones (***Ilustración 4.21***).

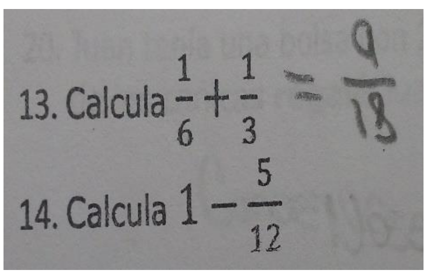


Ilustración 4.20

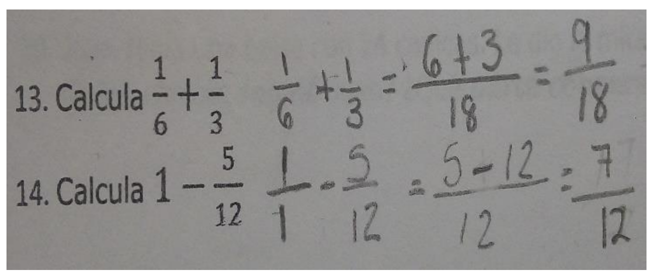
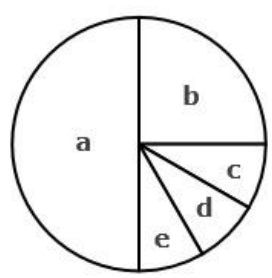


Ilustración 4.21

Ítem 15

15. En el siguiente diagrama:
    a) ¿Qué fracción representa *b*? **(b_1)**
    b) ¿Qué fracción del entero representan *c, d, e* juntas? **(a_1)**
    c) ¿Hay alguna otra manera de expresar qué fracción del entero es *b*? **(a_1, c_1)**



Nuevamente se quiso observar el manejo de equivalencias. En este diagrama se muestran fracciones de diferente tamaño con la intención de saber si los estudiantes eran capaces de representar una fracción de diferentes formas haciendo uso de equivalencias.

En este caso 58% de los estudiantes lograron contestar correctamente al inciso *a* que pide indicar la fracción que representa la letra b del diagrama y corresponde a $\frac{1}{4}$. Sin embargo, para ellos no es evidente que el inciso *b* también representa $\frac{1}{4}$ pero está representada como una equivalencia en doceavos por lo que sólo 41% contestó correctamente, y por lo tanto tampoco pudieron responder al inciso *c* ya que en él, precisamente se pide la equivalencia, en este inciso sólo 32% respondió correctamente.

Ítem 16

16. ¿Cuál debería ser el numerador de la segunda fracción para que cada par sea equivalente? Explica la estrategia que empleaste para resolverlo. **(a_1, b_2, c_1)**

a) $\frac{2}{4} = \frac{\square}{10}$

b) $\frac{4}{6} = \frac{\square}{15}$

c) $\frac{7}{14} = \frac{\square}{10}$

Cuando se trabaja con fracciones equivalentes es muy común observar que estas sean obtenidas multiplicando el numerador y denominador de la fracción en cuestión por el mismo número. Sin embargo, cuando se hacen comparaciones de fracciones cuyos denominadores no son múltiplos, esta tarea les resulta más compleja. El propósito de utilizar este ítem fue identificar cómo pueden los alumnos dar solución a estas comparaciones.

Como se ha reportado en varias investigaciones, aun cuando los estudiantes más diestros lograron manejar las equivalencias de fracciones por múltiplos, les resultó más complejo identificarlas cuando no corresponden a múltiplos de los datos en cuestión (***Ilustración 4.22)***. En este ítem solamente el 20% contestó correctamente. El resto del grupo intentó dar alguna respuesta pero no se observó la estrategia empleada para llegar a ella.

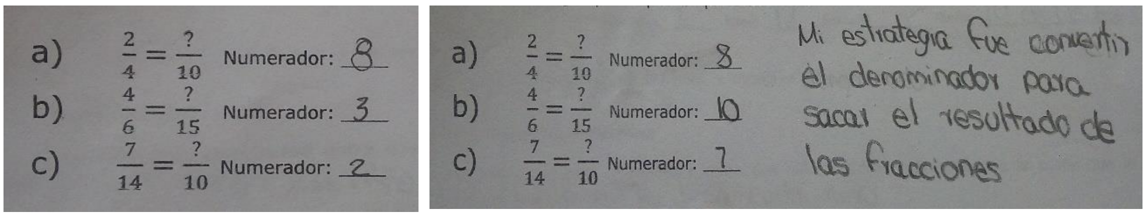


Ilustración 4.22

Ítems 17 a 21

Los ítems 17 a 21 constaron de algunos problemas que involucraban la comparación de fracciones, como es el caso de los ítems 17. Los ítems 18, 19 y 20 involucraron parte de un todo, además de sumas y restas de fracciones. Finalmente, el ítem 21 involucró parte de un todo (pero no entero como se suele pensar) y era posible resolver mediante la multiplicación de fracciones.

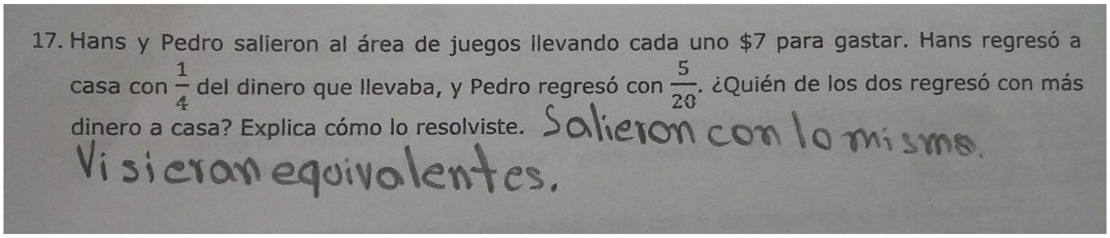
Estos ítems corresponden al uso de fracciones en un contexto determinado. Lo que cada ítem exige es comparar dos fracciones o resolver una o varias operaciones con fracciones. Los porcentajes de respuestas correctas para los ítems 17 a 22 son 39%, 27%, 7%, 9%, y 32% respectivamente. Como se puede apreciar, de estos ítems los que obtienen un porcentaje más bajo de respuestas correctas son el 19 y el 20.

Todos los problemas que se propusieron tenían como propósito conocer los procedimientos de solución de los estudiantes, si comprendían y cómo comprendían los problemas planteados. Además, se quería conocer si utilizaban procedimientos algorítmicos y evidenciar si en algunos casos los estudiantes resolvían usando equivalencias.

Ítem 17

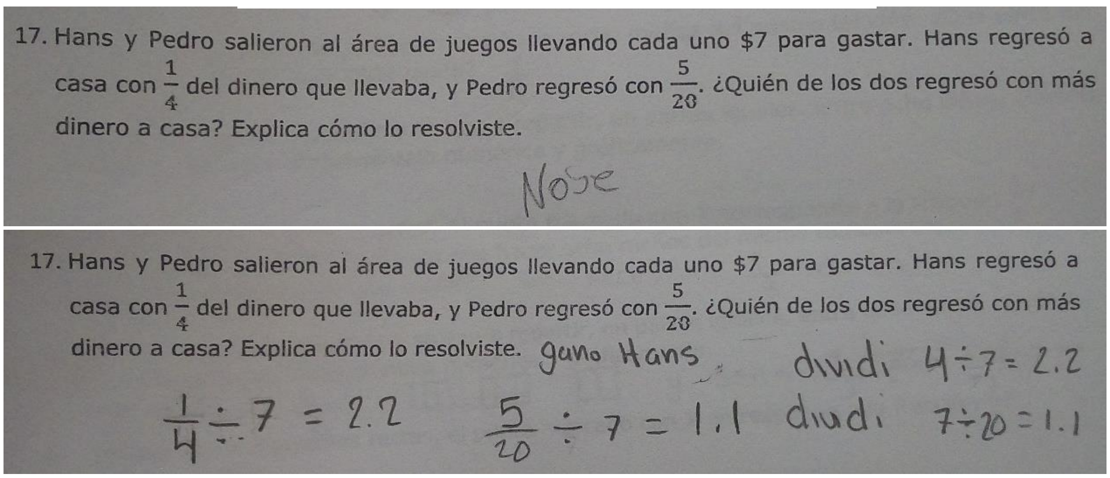
17. Hans y Pedro salieron al área de juegos llevando cada uno \$7 para gastar. Hans regresó a casa con $\frac{1}{4}$ del dinero que llevaba, y Pedro regresó con $\frac{5}{20}$. ¿Quién de los dos regresó con más dinero a casa? Explica cómo lo resolviste. **(a_2, b_3, c_1)**

En este problema, comparado con los demás, se obtuvo un mayor número de respuestas correctas. Esto puede deberse a que la exigencia en el mismo es mínima ya que solo debe hacerse una comparación entre fracciones. Sin embargo, si se hace una comparación con el ítem 10 se puede observar que ambos tienen el mismo nivel de complejidad; se pide comparar cuánto es $\frac{1}{4}$ de 7 y $\frac{5}{20}$ de 7, pero la manera en que está planteado cada ítem pudo influir en las respuestas de los estudiantes. En este ítem pudo pasarse por alto que las fracciones deben compararse con relación a 7, en cambio en el ítem 10 la forma de plantearlo puede confundir a los estudiantes y les resulta más complejo comparar cuando se tiene el *todo de referencia* que cuando se comparan directamente las fracciones (***Ilustración 4.23***). Cabe mencionar que muchos de los estudiantes trataron de responder a este ítem convirtiendo las fracciones a números decimales y comparándolos, lo cual pone de manifiesto la falta de dominio de las fracciones ya que los estudiantes se sienten más cómodos y seguros trabajando con números decimales (aunque tampoco los dominan), empero muchos estudiantes no lograron responder exitosamente (***Ilustración 4.24***).



17. Hans y Pedro salieron al área de juegos llevando cada uno \$7 para gastar. Hans regresó a casa con $\frac{1}{4}$ del dinero que llevaba, y Pedro regresó con $\frac{5}{20}$. ¿Quién de los dos regresó con más dinero a casa? Explica cómo lo resolviste. Salieron con lo mismo. Vi si eran equivalentes.

Ilustración 4.23



17. Hans y Pedro salieron al área de juegos llevando cada uno \$7 para gastar. Hans regresó a casa con $\frac{1}{4}$ del dinero que llevaba, y Pedro regresó con $\frac{5}{20}$. ¿Quién de los dos regresó con más dinero a casa? Explica cómo lo resolviste.

Nose

17. Hans y Pedro salieron al área de juegos llevando cada uno \$7 para gastar. Hans regresó a casa con $\frac{1}{4}$ del dinero que llevaba, y Pedro regresó con $\frac{5}{20}$. ¿Quién de los dos regresó con más dinero a casa? Explica cómo lo resolviste. gano Hans dividi $4 \div 7 = 2.2$

$\frac{1}{4} \div 7 = 2.2$ $\frac{5}{20} \div 7 = 1.1$ dividi $7 \div 20 = 1.1$

Ilustración 4.24

Ítem 18 y 19

18. En un club un tercio de la superficie del terreno se destinará al gimnasio, un sexto a los salones sociales y la mitad a los deportes al aire libre. ¿Quedará terreno para otras instalaciones? Explica tu respuesta. **(a_3, b_3, d_2)**

19. El partido de futbol entre los equipos de "las águilas" y "los delfines" duró dos periodos de $\frac{3}{4}$ de hora cada uno. Hubo también un descanso de $\frac{1}{4}$ de hora y un periodo de tiempo extra que duró $\frac{1}{2}$ hora. ¿Cuánto tiempo pasó entre el primer y último silbatazo? **(a_3, b_3, d_1)**

En el caso de los ítems 18 y 19, es preciso realizar operaciones con fracciones, específicamente sumas y restas. En estos ítems más del 70% de los estudiantes dieron respuestas incorrectas. En el ítem 18 se obtiene un porcentaje más alto de respuestas correctas que en el ítem 19 aun cuando en este se debe hacer solo una suma, no así en el ítem 18 que debe resolverse una suma primero y después una resta. Sin embargo, suponemos que la dificultad en el ítem 19 fue el hecho de que muchos estudiantes no se dieron cuenta que el texto del problema indica *dos periodos de* $\frac{3}{4}$ *de hora cada uno*; los estudiantes solo consideran un periodo al sumar. Entonces una parte de las respuestas incorrectas podría atribuirse a las dificultades que implica la comprensión del problema. Los alumnos que resolvieron correctamente hicieron uso de equivalencias (***Ilustración 4.25***), en el diagnóstico no se observó el uso del algoritmo convencional, lo cual podría justificarse por el hecho de que los números en cuestión son múltiplos y sumarlos no representa una gran dificultad como para recurrir al algoritmo, otra explicación posible es que los alumnos no recordaron el algoritmo, sin embargo, suponemos que si ellos comprendieran los significados de la fracción podrían resolver los problemas sin necesidad de algoritmos, haciendo uso de las equivalencias.

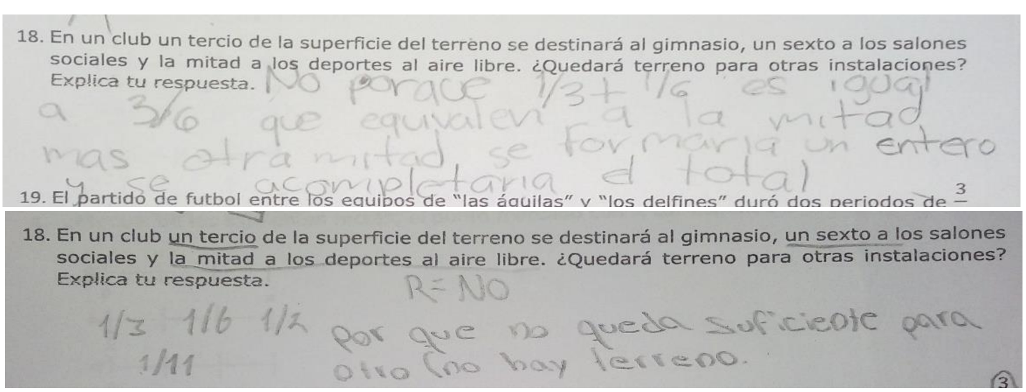


Ilustración 4.25

Ítem 21

21. Adrián tenía un pastel de chocolate. Por la mañana se comió un tercio de éste. Al regresar del trabajo, comió un cuarto **de lo que quedaba**. ¿Cuánto pastel le quedó finalmente? **(a_4, b_3, e_1)**

En este ítem la principal dificultad es que se pide hallar una parte de un todo que no corresponde precisamente a un entero, como generalmente es presentado a los estudiantes. Los estudiantes que lograron dar una respuesta correcta al ítem no mostraron el razonamiento que utilizaron, únicamente escribieron la respuesta.

CONCLUSIONES DEL DIAGNÓSTICO

De acuerdo con los estándares curriculares que se mencionan en el programa de estudios 2011 de primaria, al cabo del tercer periodo de educación básica "*los estudiantes saben comunicar e interpretar cantidades con números naturales, fraccionarios o decimales, así como resolver problemas aditivos y multiplicativos mediante los algoritmos convencionales*" (SEP, 2011, p.64). Por lo tanto sería deseable que los estudiantes que completaron exitosamente dicho nivel educativo y que inician la educación secundaria dominaran el concepto de fracción y se mostraran diestros al enfrentarse a tareas que implican operar con ellos. Sin embargo, como puede apreciarse en los resultados obtenidos en el diagnóstico, la mayoría de los estudiantes reflejan una falta de comprensión con respecto a las fracciones, sus significados y usos. Muchos de los alumnos no han comprendido siquiera el significado parte-todo. No distinguen que las fracciones representan una clase de números diferentes de los números naturales y por lo tanto con propiedades distintas, reconocen algunas nociones como equivalencias y orden de forma limitada.

La mayoría de los estudiantes ha transitado por una formación que dedica un tiempo considerable al tema de fracciones, ha revisado los algoritmos para comparar fracciones y operar con ellas un largo periodo, pero a pesar de los esfuerzos que se hacen para que los estudiantes dominen estos procedimientos, siguen reflejando un manejo ineficiente de los mismos. Cuando se les pide comparar fracciones tienden a aplicar reglas mecánicamente sin comprensión real de lo que se está haciendo.

En cuestión de operatividad de fracciones pocos alumnos hacen uso del algoritmo y tampoco comprenden las propiedades que les permiten operar con este tipo de números diferentes de los naturales. Muestran la necesidad de dar respuesta de alguna forma y utilizan el conocimiento que tienen de los números naturales para operar de la misma forma con las fracciones. En otros casos los estudiantes mezclan los conocimientos previos que tienen sobre el tema de fracciones pero al ser su comprensión parcial su desempeño es deficiente.

Debido a esta falta de comprensión de las fracciones los alumnos se mostraron poco diestros en la resolución de problemas. No han desarrollado estrategias que les permitan comprender y resolver los problemas que implican operar con ellas, de tal forma que si no disponen de una *receta* (llámese algoritmo) no les es posible dar solución a estos exitosamente. Además, aun cuando logran resolver los problemas de forma exitosa les es difícil argumentar sus respuestas. En la mayoría de los ítems en que se pidió la explicación de las respuestas los estudiantes la omitieron. Como un dato importante se pudo observar que cuando se propone a los estudiantes una tarea relacionada con operaciones con fracciones, aquellos que comprenden la noción de equivalencias, son capaces de resolver los problemas sin necesidad de recurrir al algoritmo y con mayor razón si no lo recuerdan.

En los resultados del diagnóstico se logró identificar el uso de equivalencias en gran parte de las respuestas correctas.

CAPÍTULO VI

DISEÑO DE LA UNIDAD DIDÁCTICA

De acuerdo con los resultados del diagnóstico, los estudiantes mostraron un débil dominio en la noción parte-todo. Reconocieron de una forma limitada el sentido de equivalencias, pese a que durante la educación básica la operatividad con fracciones es revisada repetidamente. Los estudiantes mostraron un manejo poco eficiente de las operaciones y tampoco mostraron un buen manejo del algoritmo siendo que a este se le da un fuerte énfasis en la educación. En general los estudiantes no comprenden el significado de fracción y esto impide que puedan emplearla para resolver problemas tanto en el contexto académico como en el contexto real. La siguiente unidad didáctica empleó un material concreto *partimundo* (***Ilustración 5.1***) con el propósito de aproximar a los estudiantes a la noción de parte-todo de una fracción, y a construir su significado (Acevedo, 2014). Además, se buscó que los estudiantes comprendieran la noción de equivalencias y desarrollaran estrategias para emplearlas en la resolución de problemas. Durante la aplicación de la unidad didáctica también se usaron otras nociones de fracción (operador, cociente y medida) pero se dio especial énfasis a la equivalencia.

Ilustración 5.1

Hiebert, Wearne y Taber (1991) referían que el uso de material concreto puede ayudar en la comprensión de ideas matemáticas. Explicaron que la comprensión puede describirse en términos de conexiones que son formadas entre representaciones – entre representaciones externas e internas y dentro de las representaciones internas – y a medida que los estudiantes interactúan con representaciones externas de ideas matemáticas, las representaciones internas pueden ser construidas gradualmente conectadas pieza por pieza a representaciones externas. Durante este proceso se puede esperar que, si se establecen construcciones y conexiones incompletas podrían producirse comprensiones parciales y por lo tanto un rendimiento imperfecto. La enseñanza de las fracciones pasa demasiado pronto, en el mejor de los casos, del material concreto a las abstracciones y esto puede suscitar que las conexiones que los estudiantes construyen sean débiles o incompletas, lo que provoca que tengan una comprensión equivocada sobre las fracciones y en consecuencia el empleo que hacen de estas cuando se presentan en una situación problemática sea deficiente. Con el uso del material concreto se espera que de forma paulatina los estudiantes establezcan conexiones que les permitan a su vez construir las ideas matemáticas sobre equivalencias de fracciones. Es importante aclarar que el material concreto es únicamente un medio para construir las ideas matemáticas y que en la medida en que estas sean construidas los estudiantes pueden desprenderse del mismo.

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Posterior a la aplicación de la unidad didáctica se espera que los estudiantes:

- Reconozcan el significado de la fracción en su relación parte-todo.
- Comparen fracciones con diferente denominador.
- Reconozcan fracciones equivalentes y las empleen en diferentes situaciones.
- Desarrollen estrategias para resolver operaciones básicas con fracciones utilizando equivalencias.

COMPETENCIAS

- Reconocer las fracciones en contextos donde se establezcan relaciones entre la parte y un todo.
- Utilizar el significado de fracción como parte-todo para solucionar situaciones problemáticas de la vida diaria.
- Desarrollar estrategias que le permitan gestionar fracciones equivalentes.
- Utilizar las equivalencias para resolver situaciones o problemas que impliquen operar con fracciones.

PROCEDIMIENTO METODOLÓGICO

Se realizan 8 sesiones de 50 minutos cada una.
Cada sesión se trabaja en equipos de la siguiente manera:

1. *Trabajo en equipo*. Se entrega una hoja de trabajo para cada sesión, que consta de 1 a 2 consignas con diferentes actividades que los estudiantes deberán reflexionar y socializar. En cada actividad aparecen unas preguntas problematizadoras que deberán ser contestadas por el grupo utilizando el material concreto.
2. *Socialización*. Una vez que se respondan las preguntas, se hará una reflexión del trabajo realizado.
3. *Formalización.* Se harán precisiones sobre aspectos importantes a rescatar de los procedimientos realizados por los estudiantes y se generalizarán procesos a través de nuevos planteamientos y su resolución.

ESTRATEGIA DIDÁCTICA

Durante la aplicación de la unidad didáctica se empleó el material didáctico *Partimundo*. Cada sesión se inició con las indicaciones de la actividad a realizar. Se hicieron algunas preguntas que permitieran identificar el grado de comprensión de cada tarea propuesta y en tal caso resolver las dudas que surgieran. Posteriormente se invitaba a los estudiantes a resolver en equipo las actividades propuestas y anotar sus observaciones y conclusiones en las hojas de trabajo. Después compartían en plenaria sus conclusiones y se hacían retroalimentaciones a las respuestas y estrategias de solución de los estudiantes. Finalmente mediante las participaciones de los estudiantes se formalizó lo aprendido.

EVALUACIÓN COMO PROCESO

Dentro de la aplicación de las secuencias, la evaluación es continua, ya que en cada consigna, los estudiantes responderán las preguntas formuladas en las hojas de trabajo en equipo. Posteriormente, cada equipo socializará las respuestas dadas a cada pregunta. Finalmente, tanto las producciones escritas como las intervenciones orales por parte de los estudiantes darán la pauta para llegar al proceso de formalización.

CAPÍTULO VII

LA UNIDAD DIDÁCTICA

SECUENCIA DIDÁCTICA 1

Sesión 1

La primera actividad tiene como propósito que los estudiantes reconozcan la noción parte-todo. Para ello se emplea material concreto de madera que es empleado en la enseñanza de números fraccionarios, sus operaciones y relaciones.

- Recursos didácticos

El juego de madera consta de 11 discos fraccionados en 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12 partes iguales, una de las superficies de los discos tendrá impresa una imagen (animal, cosa, alimento etc.), y la superficie posterior tendrá la superficie lisa.

Dos dados numerados del 1 al 6.

Consigna 1

- Para esta consigna el profesor divide al grupo en equipos de 4 integrantes y le reparte a cada equipo una bolsita que contendrá el juego de los 11 discos.
- Se indica a los estudiantes sacar las piezas y armar los discos de acuerdo con la figura que tienen (como un rompecabezas), con la intención de que reconozcan las piezas e identifiquen que están fraccionados en x partes iguales.
- Cuando los estudiantes han armado los discos se les cuestiona sobre ¿qué es lo que observan?, ¿cómo está dividido cada disco?, ¿en cuántas partes está dividido cada disco?, ¿cómo podrían nombrar cada disco y cada una de las partes?

Consigna 2

- Después de reconocer el material, se da la siguiente consigna: Cada equipo se coloca en círculo y elige un competidor que se colocará al centro, colocando todas las fichas del juego dispersas en el piso.

- El profesor lanza ambos dados y dice en voz alta la suma entre estos, de acuerdo con este resultado los representantes de cada equipo deberán escoger el disco que este dividido por dicho número de fracciones, por ejemplo, si se obtiene como resultado 5, se busca el disco con 5 partes (sabiendo que cada ficha estará dispersa) y armará el disco por la figura inicialmente dada. El representante de equipo que termine primero le dará un punto a su equipo. Se repite el procedimiento con los otros tres integrantes, el equipo que más puntos acumule al finalizar el juego gana.

Después de realizar las dos consignas se reflexiona sobre las representaciones gráficas (imágenes) que tiene cada uno de los discos, en plenaria los estudiantes expresarán las unidades de medida que se pueden atribuir a cada uno de estos objetos. Por ejemplo, al disco que tiene la imagen de un perro, se le pueden asignar las siguientes unidades de medida: peso del animal, tiempo promedio de vida, distancia promedio que puede recorrer, valor comercial en pesos etc.

Sesión 2

En esta sesión se sigue trabajando con la noción parte-todo, en ella se pide a los estudiantes hacer una retroalimentación de lo revisado en la sesión anterior. Poniendo especial énfasis en el significado que tiene la partición de cada objeto y su relación con las imágenes de un contexto real (y sus magnitudes).

- Recursos didácticos

Nuevamente se emplea el material de los discos.

Consigna 1

En esta consigna se pide a los estudiantes identificar la figura que corresponde al entero dividido en medios, en tercios, cuartos etc. y después que completen una tabla. Con esta actividad se intenta que los estudiantes amplíen la noción de parte-todo a elementos reales, que se percaten que la fracción no es un simple partidor de objetos, sino de magnitudes asociadas a ellos. Al completar la tabla también se está trabajando la noción de operador pero no es la intención de la secuencia ahondar en dicho significado.

Imagen representada	Nombre de las partes del disco	Representación de los pedazos (fracción) del disco	Magnitud asociada	Magnitud que representan los pedazos
León	Quintos	1/5	kilogramos-200	1/5 representa 40kg 3/5 representan 120 kg …
Situación Problema:	El peso promedio de un león en edad adulta es de 200kg, si un león joven ha llegado a 4/5 del peso promedio, ¿cuál es el peso de éste?			
Barra de chocolate	tercios	1/3	longitud (cm) 15	1/5 representa 40kg 3/5 representan 120 kg …
Situación Problema:				

- El profesor integra nuevamente al grupo en equipos de 4-5 estudiantes, les reparte las bolsitas de material de los 11 discos y una hoja de trabajo para cada integrante del equipo.
- Les pide observar la imagen que corresponde al disco de medios, tercios, cuartos etc. y lo anote en la tabla en la columna: <u>imagen representada</u>.

- Cuando los estudiantes hayan completado la indicación anterior, se les pide escribir en la columna: magnitud asociada, una magnitud que pueda relacionarse con el objeto representado. Por ejemplo, si es una caja de manzanas, se puede escribir número de manzanas, número de kilogramos que pesa, etc.
- Para llenar la columna: representación de los pedazos (fracción) de los discos, se pide a algún integrante de cada equipo que elijan un disco (por ejemplo, el león), que mencionen el nombre de la fracción en que fue dividido (quintos), la magnitud asociada a este (por ejemplo 200 kilogramos, promedio de vida, etc.), cuánto representa un pedazo del disco (1/5) y finalmente se les pregunta ¿cuántos kilos representaría ese pedazo del total de kilos del león?, cuanto representaría 2/5, 3/5 etc. para llenar la columna: magnitud que representan los pedazos.
- En la última fila, se pide a los estudiantes redactar una situación problemática con cada una de las representaciones de la tabla anterior. Por ejemplo: El peso promedio de un león en edad adulta es de 200kg, si un león joven ha llegado a 4/5 del peso promedio, ¿cuál es el peso de éste? Otro ejemplo puede ser: El peso promedio de un león en edad adulta es de 200kg, un león cachorro pesa 80 kg, ¿qué fracción del promedio de un adulto representa el peso de dicho cachorro?
- También puede preguntarse a los estudiantes qué pasaría si, por ejemplo, el disco del león estuviera dividido en cuartos, ¿cambiarían las magnitudes asociadas a cada fracción? ¿cuánto representaría un cuarto del peso promedio? etc.

Como cada equipo tiene la libertad de elegir la magnitud que quiera asociar a su imagen, todos tendrán respuestas diferentes, mismas que se compartirán en plenaria para retroalimentar las respuestas y conclusiones de los equipos. Al finalizar la sesión se pide a los estudiantes que escriban sus reflexiones con respecto a lo que ellos consideran que significa una fracción.

SECUENCIA DIDÁCTICA 2

Sesión 3

Con las actividades de esta sesión se pretende que los estudiantes adviertan que una fracción puede representar el resultado de una repartición y no necesariamente se requiere expresar el resultado con magnitudes específicas o ya definidas. Además se busca introducir al estudiante a la noción de equivalencias.

- Recursos didácticos

Juego de discos de cartón, en esta ocasión se entrega por equipo 4 paquetitos de discos.

Consigna 1

- El profesor integra al grupo en equipos de 4-5 integrantes. Les pide que cada equipo tome los tres discos que tienen la manzana dibujada (los fraccionados en cuartos), por lo que tendrán una representación de tres manzanas.
- Se pide a los estudiantes recordar que son tres manzanas, pero que esta ocasión verán los discos por el reverso (es decir la parte lisa). Se les cuestiona sobre cómo harían para repartir las tres manzanas entre cuatro niños, es decir, que fracción de la manzana le tocaría a cada niño. Primero lo comentarán en su equipo y posteriormente compartirán su respuesta con los demás equipos.
- Cuando hayan compartido sus respuestas y discutan cómo llegaron a esas conclusiones, se propone otras tres situaciones análogas a la anterior, por ejemplo:

- 1. Se toman 2 discos con la imagen de la caja de chocolates (sextos) y se quiere repartir entre 6 niños, se les pregunta ¿qué fracción le tocará a cada niño?
- 2. Se toman cuatro discos que tienen la imagen de un rollo de listón (tercios) y se les pregunta ¿qué fracción le correspondería a cada niño?
- Después de analizar las cuatro situaciones planteadas se les pide que observen sus respuestas y la relación que tienen los datos proporcionados. Finalmente se invita a compartir sus conclusiones y se formaliza lo aprendido.

CONSIDERACIONES PREVIAS: En las cuatro situaciones propuestas, el profesor puede elegir el total de discos a repartir arbitrariamente, empero, debe cuidar que la fracción en que estén divididos los discos coincida con el número de niños entre los que se quiere repartir.

Con las actividades propuestas en esta sesión se espera que los alumnos adviertan que no siempre es necesario tener las magnitudes asociadas a un objeto para saber qué fracción de un todo le corresponde a cada niño. Por ejemplo, en el caso de los discos con el rollo de listón dibujado no se tienen los metros que contiene, sin embargo, se puede saber la porción del total que le tocará a cada niño.

Sesión 4

Consigna 2

En las actividades de la consigna 1 se puso cuidado en que coincidiera el número de partes del disco con el número de niños a quienes se iba a repartir. En las actividades siguientes no se requiere esa consideración, sin embargo si es necesario que el número de partes en que está dividido el disco sea múltiplo del número de niños a quienes se desea repartir.

- El profesor integra al grupo en equipos de 4-5 integrantes. Les pide que tomen el disco que tiene la caja de chocolates (sextos) y se les pide que los repartan entre tres niños, ¿qué fracción le corresponderá a cada niño? Otra situación que puede plantearse es: Tomar 3 discos que tienen un trozo de carne (doceavos), estos deberán repartirlos entre 4 niños, ¿Qué fracción (por ejemplo del peso) le tocará a cada niño?

Es importante que se propongan varias actividades con la misma estructura de la primera situación (por lo menos 6) y otras más con la estructura de la segunda situación, a fin de que los estudiantes adviertan la correspondencia entre fracciones equivalentes. Por ejemplo, al repartir la barra de chocolate los alumnos pueden percatarse que a cada niño le toca 1/2, sin embargo el disco no está dividido en medios sino en sextos, por lo que los alumnos deberán encontrar una fracción equivalente de ½ en sextos. En la segunda situación se pide repartir tres discos fraccionados en doceavos a cuatro niños, Por la consigna anterior ellos saben que de los 3 discos divididos entre cuatro niños a cada uno le corresponderían ¾ pero, dado que no están fraccionados en cuartos, deberán encontrar una equivalencia en doceavos.

- Después de hacer sus observaciones, se comentan en plenaria las estrategias que emplearon para poder hacer la repartición.

<u>Sesión 5</u>

Consigna 3

Para realizar la siguiente actividad es necesario un material de complemento. En esta ocasión se incluye dentro de la bolsita de material de madera unos discos de acetato (fraccionados en las mismas partes que los discos de madera).

- Se pide a los estudiantes que coloquen los discos de madera del lado de la superficie lisa (sin imagen) y sobre estos coloquen los discos de acetato que están fraccionados en las mismas partes para reconocerlos.
- Se pide a los estudiantes que tomen los discos de acetato e identifiquen, por ejemplo, si ½ tiene equivalencia con tercios y argumenten su respuesta, también se les pregunta si un medio tiene equivalencia en cuartos o quintos etc. y argumenten sus respuestas. Se proponen varias preguntas análogas a las anteriores.
- Después de contestar las preguntas se cuestiona a los estudiantes sobre cómo podrían hacer para hallar fracciones equivalentes a cualquier otra si no se contara con el material concreto, la intención es que los estudiantes reconozcan como primera noción de equivalencias los múltiplos y describan una estrategia para obtener una fracción equivalente a otra por medio de estos.

Es posible que después de realizar las consignas anteriores, los estudiantes adviertan que las fracciones equivalentes que han encontrado se pueden obtener sin necesidad de usar siempre el material didáctico, es decir, pueden hallarse multiplicando tanto el numerador como el denominador por un mismo número. Finalmente se formaliza lo aprendido y se describe la estrategia que los alumnos descubrieron para hallar fracciones equivalentes por medio de múltiplos.

Sesión 6

Consigna 4

Las actividades propuestas a continuación tienen la intención de que los estudiantes reflexionen que un todo puede ser una parte y que es posible hallar una fracción de otra fracción empleando fracciones equivalentes.

La siguiente actividad trata que los estudiantes apliquen la noción de equivalencia para resolver la siguiente situación: Se pide a los alumnos tomar tres piezas del entero dividido en cuartos (manzana) es decir ¾ y se desea repartir estas tres piezas entre cuatro niños.

- Después se plantea la siguiente pregunta: ¿qué pueden hacer para poder repartirlo?, tal como están las piezas, ¿se puede repartir uno a uno a cada niño?, ¿Qué podrían hacer para repartir, qué se les ocurre? (con estas preguntas se espera que los niños comenten que tienen que fraccionar en más partes, para ello pueden hallar fracciones equivalentes).
- Si los estudiantes responden que se pueden hallar fracciones equivalentes se plantea la siguiente pregunta: ¿a qué fracciones es equivalente ¾? Es posible que los alumnos respondan 6/8, entonces se les pide que tomen 6 partes del disco fraccionado en octavos y lo comparen con ¾, ¿si son equivalentes?, bien, y con esta fracción ¿es posible hacer la repartición? ¿por qué? ¿Qué otra fracción es equivalente a ¾? Es posible que los estudiantes respondan 12/16, etc. entonces se vuelve a plantear la pregunta ¿con esta fracción se puede realizar la repartición? ¿por qué? Aquí es importante que los alumnos adviertan que, por ejemplo 6/8, 9/12 y 12/16 son fracciones equivalentes a ¾, sin embargo la única que permite repartir a los cuatro niños es 12/16 ya que 12 es divisible por 4.
- Se deben proponer varias tareas análogas a la anterior y se pide a los estudiantes que identifiquen la relación que guardan las primeras fracciones propuestas con sus respectivas equivalencias y además observen la relación que tienen tales equivalencias con el número de alumnos a quienes se desea

repartir. Por ejemplo; se desea repartir ¾ entre cuatro niños, la fracción equivalente que permite hacer dicha repartición es 12/16, la cual se obtiene multiplicando tanto el numerador como el denominador de ¾ por 4 siendo 4 el número de niños entre los que se desea repartir. Finalmente se busca que los estudiantes describan una estrategia que les permita realizar tareas análogas a las propuestas.

- También se pueden proponer tareas como cuánto es la mitad de 5/8, en esta situación también se puede convertir a una fracción equivalente que permita hacer tal división, es decir 10/16.

<u>Sesión 7</u>

Consigna 5

La actividad anterior está enfocada en reconocer fracciones equivalentes por medio de múltiplos. En esta consigna las actividades propuestas buscan ampliar la noción de equivalencia. Aquí se pretende que los estudiantes reconozcan otras formas de comparar las fracciones y argumenten si pueden ser o no equivalentes aun cuando a primera vista sus numeradores y denominadores no sean múltiplos entre sí.

Para realizar la siguiente actividad se sigue empleando el material de madera y los acetatos además plumones.

- El profesor proporciona el material didáctico con los discos de madera y los acetatos. Propone dos fracciones como por ejemplo: 2/4 y 5/10, y pregunta a los estudiantes si estas fracciones son o no equivalentes, ¿cómo pueden saberlo?, ¿Cómo pueden emplear el material didáctico para conocer si son o no equivalentes? (Aquí se les propone el uso de los acetatos)
- Si los niños no logran encontrar una estrategia se les puede pedir que comparen los discos de acetato de cuartos y décimos y

coloreen 2 y 5 respectivamente, después los sobrepongan y observen si son o no equivalentes.

- Si logran encontrar la equivalencia se pide que expliquen cómo es que se dieron cuenta si eran equivalentes o no.
- En esta ocasión se trata de que los estudiantes puedan darse cuenta que es posible hallar equivalencias no solo mediante múltiplos sino también reduciendo la fracción a su mínima expresión. Deben proponerse varias comparaciones para que los estudiantes obtengan conclusiones.
- Al finalizar las actividades los alumnos deberán compartir sus observaciones y explicar una estrategia que les permita determinar cuándo una fracción es equivalente a otra y cuando no en los casos en que los denominadores no son múltiplos entre sí.

Hasta el momento no se ha introducido ningún tipo de algoritmo o regla sintáctica para operar con fracciones. En todas las situaciones y tareas propuestas se trata de que sean los alumnos quienes generen las estrategias para gestionar de diferentes formas las fracciones equivalentes, desarrollen la noción de equivalencia en un sentido amplio y que la comprensión de las mismas les permita resolver situaciones relacionadas con la operatividad de las mismas.

SECUENCIA DIDÁCTICA 3

Sesión 8

Con las actividades de esta sesión se tratará que los estudiantes, una vez comprendida la noción de equivalencia y después de haber desarrollado estrategias para hallar fracciones equivalentes a otras, sean capaces de utilizarlas para resolver situaciones que impliquen operar con fracciones.

- Recursos didácticos

Juego de discos de madera y acetato.

Consigna 1.

- El profesor integra al grupo en equipos de 4-5 integrantes y propone resolver la siguiente situación: Tomar los sectores circulares y completar la siguiente tabla:

Fracción 1	**Equivalencias**	**Fracción 2**	**Equivalencias**	**Fracción en la que coinciden**
$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{4}$		
$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{3}$		
$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{5}$		

- Se plantea la siguiente situación a los estudiantes: Dos hermanos toman una porción de leche cada mañana. El hermano más grande consume ¼ del contenido total del envase mientras que el pequeño bebe 1/3. ¿Qué fracción total del envase consumen entre los dos hermanos?, ¿Qué fracción del envase queda?
- Se pregunta a los estudiantes ¿cómo podrían saber qué fracción del total han consumido?, ¿cómo pueden hacer la suma de lo consumido?, ¿de qué forma podrían utilizar la información que les proporciona la tabla anterior para resolver el problema?
- Los alumnos pueden observar la tabla y proponer el uso de las fracciones equivalentes para resolver el problema.

- Se plantean diferentes situaciones que permitan a los estudiantes identificar que es necesario convertir a fracciones equivalentes para poder sumar o restar fracciones.
- Finalmente se espera que los estudiantes desarrollen una estrategia que les permita sumar fracciones con diferentes denominadores haciendo uso de las fracciones equivalentes.

En cada una de las secuencias se debe hacer hincapié en que se están fraccionando magnitudes asociadas a determinados objetos. Es por ello que en cada actividad se hace referencia a la imagen que tiene impresa y no se utilizan los sectores simplemente como objetos. Los alumnos no deben perder de vista que se puede fraccionar todo lo que ve en su contexto diario, el peso, la talla, los kilogramos, los litros, etc.

CAPÍTULO VIII

<u>ANALISIS DE LOS RESULTADOS DE LA INTERVENCIÓN</u>

SECUENCIA 1 (PARTE-TODO)

Hoja de trabajo 1

En la primera sesión de trabajo se pidió a los estudiantes reunirse en equipos de 4 personas y se repartió el material de trabajo.

Imagen impresa en el disco	¿En cuántas partes está dividido cada disco?	¿Cómo podrían nombrar cada una de las partes?	Numéricamente, ¿cómo se puede representar cada una de las partes?	¿Qué magnitud puede atribuirse a cada figura?

Con esta primera actividad se pretendía que los estudiantes identificaran la noción de fracción como parte-todo. Después de reunirse en equipos, haber armado los rompecabezas y contestar su hoja de trabajo, se hicieron las siguientes preguntas:

Docente: ¿qué es lo que observan?

Estudiante: Son rompecabezas.

Docente: Bien, estos rompecabezas, ¿cómo están divididos?

Estudiante: En fracciones.

Docente: ¿en cuántas partes está dividido cada disco?

Estudiantes: En medios, tercios, cuartos, etc.

Docente: Entonces, ¿cómo puede nombrarse cada disco y cada una de las partes?

Estudiantes: Los discos son enteros y cada parte es medio o tercio… depende de las partes en que se dividió.

Docente: ¿Cómo pueden representar numéricamente cada una de las partes?

En la última pregunta algunos estudiantes compartieron sus respuestas, la mayoría de los estudiantes sí representó las partes con notación fraccionaria (***Ilustración 6.1***) pero tres equipos lo representaron en notación decimal (***Ilustración 6.2***). Dado que se dieron estas respuestas diferentes, se preguntó a los estudiantes por qué habían representado en notación decimal y explicaron que la pregunta decía *numéricamente*, entonces se escribieron las dos notaciones en el pizarrón y se cuestionó de forma grupal a los estudiantes si una fracción era uno o dos números.

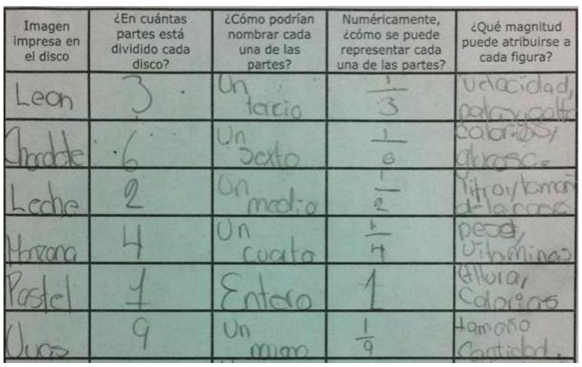


Imagen impresa en el disco	¿En cuántas partes está dividido cada disco?	¿Cómo podrían nombrar cada una de las partes?	Numéricamente, ¿cómo se puede representar cada una de las partes?	¿Qué magnitud puede atribuirse a cada figura?
Leon	3	Un tercio	$\frac{1}{3}$	Velocidad, [illegible]
Chocolate	6	Un sexto	$\frac{1}{6}$	Calorías, [illegible]
Leche	2	Un medio	$\frac{1}{2}$	Litros, [illegible] de la [illegible]
Manzana	4	Un cuarto	$\frac{1}{4}$	peso, Vitaminas
Pastel	1	Entero	1	Altura, Calorías
Uvas	9	Un noveno	$\frac{1}{9}$	tamaño, Cantidad

Ilustración 6.1

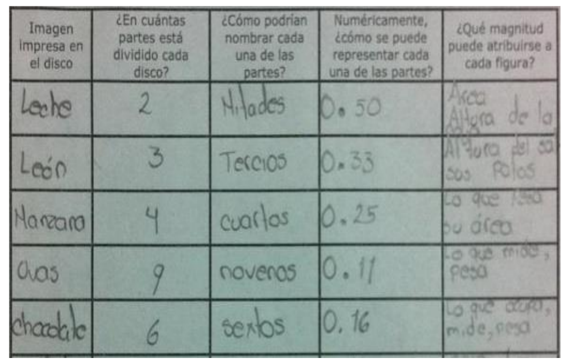
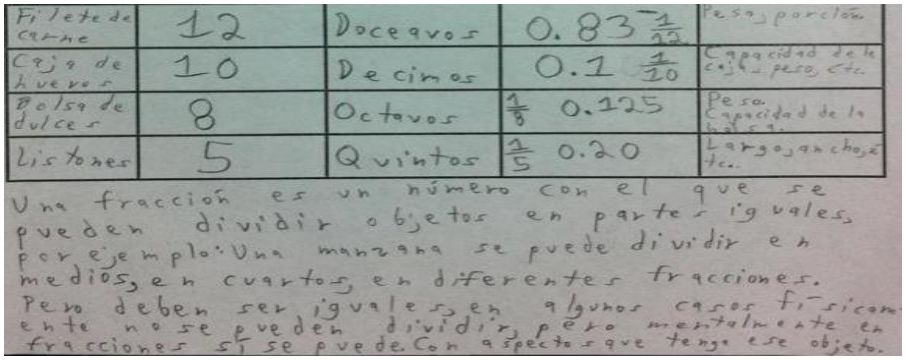


Imagen impresa en el disco	¿En cuántas partes está dividido cada disco?	¿Cómo podrían nombrar cada una de las partes?	Numéricamente, ¿cómo se puede representar cada una de las partes?	¿Qué magnitud puede atribuirse a cada figura?
Leche	2	Mitades	0.50	Area Altura de la [illegible]
León	3	Tercios	0.33	Altura del sol sus Polos
Manzana	4	cuartos	0.25	Lo que pesa su área
Uvas	9	novenos	0.11	Lo que mide, pesa
chocolate	6	sextos	0.16	Lo que [illegible], mide, pesa

Ilustración 6.2

Algunos estudiantes estaban confundidos, los que escribieron la notación decimal no estaban seguros de que una fracción fuera un número. Los estudiantes que escribieron la notación fraccionaria afirmaban que la fracción es un número que sirve para representar una parte de un todo y que no pueden ser dos números porque separados no representan lo mismo que juntos por eso no los pueden separar, -la fracción es un número- afirmaron. Con esa explicación los demás alumnos estuvieron de acuerdo en que la fracción es un número (***Ilustración 6.3***).



Filete de carne	12	Doceavos	0.83 $\frac{1}{12}$	Peso, porción
Caja de huevos	10	Decimos	0.1 $\frac{1}{10}$	Capacidad de la caja, peso, etc.
Bolsa de dulces	8	Octavos	$\frac{1}{8}$ 0.125	Peso. Capacidad de la bolsa.
Listones	5	Quintos	$\frac{1}{5}$ 0.20	Largo, ancho, etc..

Una fracción es un número con el que se pueden dividir objetos en partes iguales, por ejemplo: Una manzana se puede dividir en medios, en cuartos, en diferentes fracciones. Pero deben ser iguales, en algunos casos físicamente no se pueden dividir, pero mentalmente en fracciones sí se puede. Con aspectos que tenga ese objeto.

Ilustración 6. 3

Posteriormente se pidió a los estudiantes que observaran las imágenes que cada disco tenía impreso y asociaran una magnitud a la misma. Los alumnos no tenían una idea clara de lo que es una magnitud por lo que se les dio un ejemplo con el disco de los tercios que tenía impreso un león, se les explicó que a un león no se le puede fraccionar físicamente en partes iguales, pero pueden asociarse a él medidas como el peso, la talla, número de piezas, etc. y a estas se les llama magnitudes. Seguido de esta explicación, para los estudiantes fue fácil asociar una magnitud a los objetos representados en cada disco. Finalmente, los estudiantes compartieron en plenaria qué magnitudes asoció su equipo a cada objeto.

Hoja de trabajo 2

En esta sesión se sigue trabajando con la noción parte-todo, en ella se hizo una retroalimentación de lo revisado en la sesión anterior. Poniendo especial énfasis en el significado que tiene la partición de cada disco y la forma en que podemos asociarlo con la partición de objetos de un contexto real (mediante sus magnitudes). Es importante aclarar que la hoja de trabajo dos estaba programada para revisarse en una sesión. Sin embargo, dadas las dificultades que presentaron los estudiantes se tomaron dos sesiones para ella.

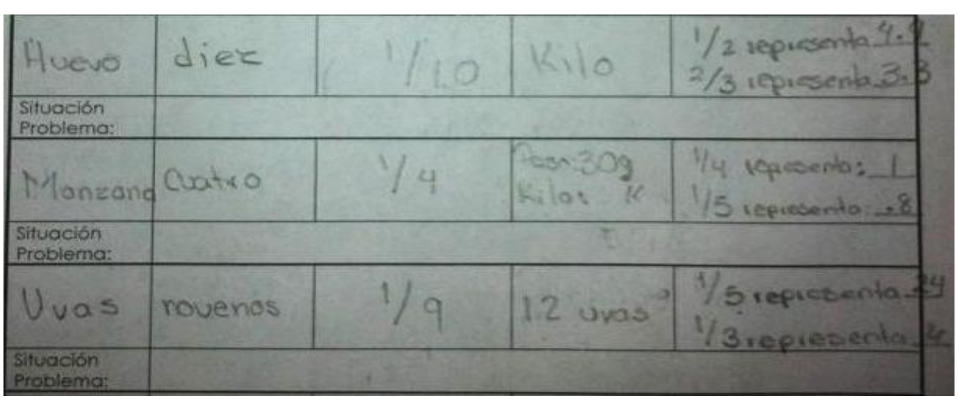
Nuevamente los estudiantes se reunieron por equipos, se les entregó una hoja de trabajo y el docente orientó la actividad. Tal como se pide en la consigna de la hoja de trabajo, el docente cuestiona sobre qué imágenes impresas tiene cada disco, el número de partes en que están divididas, cómo se puede representar cada parte (fracción) y se les pide asociar una magnitud a siete de las diez imágenes que tienen los discos. Para orientar la actividad se les da el ejemplo del bote de leche cuya magnitud asociada puede ser un litro y la magnitud que representarían en ese caso las fracciones (medios) es 500ml ya que el bote de leche está fraccionado en medios. Después de completar las columnas se pedía redactar una situación problema que asociara todas las columnas y se les da un ejemplo con el león. Posterior a ello se pidió a los estudiantes que compartieran en equipo sus ideas y contestaran el resto de la hoja.

Imagen representada	Nombre de las partes del disco	Representación de los pedazos (fracción) del disco	Magnitud asociada	Magnitud que representan los pedazos
Listones				1/5 representa: _______ 3/5 representan: _______
Situación Problema:				

Mientras los estudiantes contestaban la hoja de trabajo, el docente monitoreó la actividad para observar las interacciones de los equipos y cómo es que resuelven las actividades propuestas. En este momento se observó que los estudiantes tenían dificultades para contestar las últimas dos columnas, en la penúltima columna se les pide asociar una magnitud al objeto y en la última que identifiquen la parte de esa magnitud que representan las fracciones asociadas a dicho objeto.

Al tratar de asociarle una magnitud al objeto representado en cada disco presentaron menores dificultades; ellos podían asociar fácilmente litros al bote de leche, kilogramos al león, pero en algunos equipos no escribían magnitudes específicas por lo que se les explicó que era correcta la magnitud que estaban asociando pero esta debía ser específica, por ejemplo; si algún disco tuviera la imagen de un niño podríamos asociarle como magnitud el peso, pero no todos los niños pesan lo mismo por lo que deben imaginar que es un niño específico (por ejemplo ustedes) y asignarle un peso específico por ejemplo 40 kg. Considero que esta primera dificultad se presentó por falta de claridad en la instrucción del propio instrumento. Después de haber hecho esta primera aclaración la mayoría de los equipos logró completar dicha columna satisfactoriamente.

En el caso de la última columna varios estudiantes presentaron mayor dificultad que en la penúltima columna. Por ejemplo, algunos estudiantes que decidieron asociar a la imagen de los huevos (que está fraccionada en décimos) un kilogramo, al tratar de escribir la parte de esa magnitud que representan los décimos no lograron hacerlo correctamente (***Ilustración 6.4***).



Huevo	diez	1/10	Kilo	1/2 representa [illegible] 2/3 representa 3.3
Situación Problema:				
Manzana	Cuatro	1/4	Peso: 30g Kilos [illegible]	1/4 representa: 1 1/5 representa: .8
Situación Problema:				
Uvas	novenos	1/9	12 uvas	1/5 representa [illegible] 1/3 representa [illegible]
Situación Problema:				

Ilustración 6.4

Otros estudiantes a los que se les presentó la misma situación trataban de hacer una división pero al no ser exacta (por ejemplo un décimo de1 kilogramo es 0.1 kg) optaban por modificar la magnitud (por ejemplo elegían como magnitud 10 piezas) para que de esta forma pudieran hacer la representación de las partes sin ningún problema (***Ilustración 6.5***).

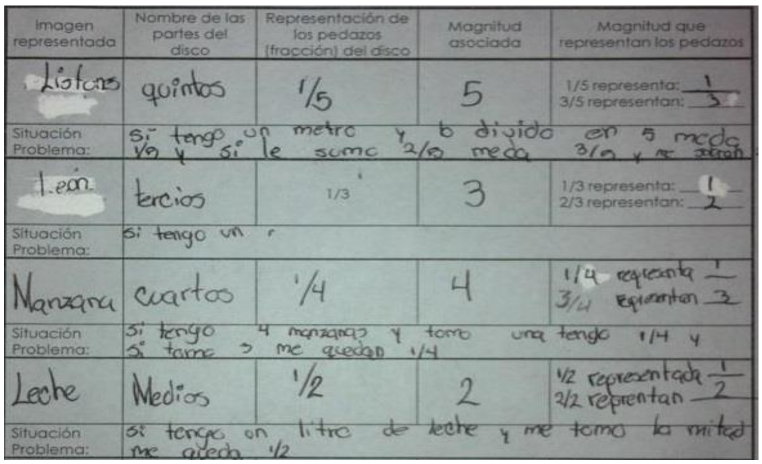
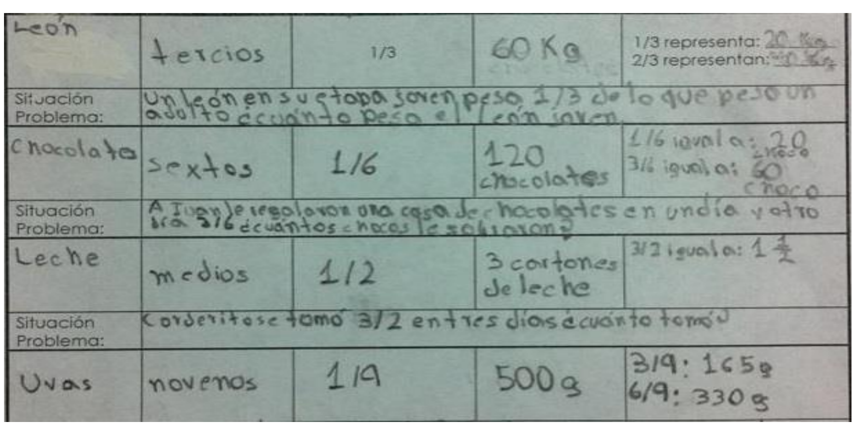


Imagen representada	Nombre de las partes del disco	Representación de los pedazos (fracción) del disco	Magnitud asociada	Magnitud que representan los pedazos
Listones	quintos	1/5	5	1/5 representa: 1 3/5 representan: 3
Situación Problema:	si tengo un metro y lo divido en 5 me da 1/5 y si le sumo 2/5 me da 3/5 y me [illegible]			
León	tercios	1/3	3	1/3 representa: 1 2/3 representan: 2
Situación Problema:	si tengo un			
Manzana	cuartos	1/4	4	1/4 representa 1 3/4 representan 3
Situación Problema:	si tengo 4 manzanas y tomo una tengo 1/4 y si tomo 3 me quedan 1/4			
Leche	Medios	1/2	2	1/2 representada 1 2/2 reprentan 2
Situación Problema:	si tengo un litro de leche y me tomo la mitad me queda 1/2			

Ilustración 6.5

En otros casos los estudiantes si logran representar correctamente las fracciones, aun cuando las magnitudes no son exactas hacen una división y expresan correctamente la parte de la magnitud asociada a la fracción; algunos estudiantes redondearon sus resultados (***Ilustración 6.6***) y otros no (***Ilustraciones 6.7 y 6.8***).



León	tercios	1/3	60 Kg	1/3 representa: 20 Kg 2/3 representan: 40 Kg
Situación Problema:	Un león en su etapa joven peso 1/3 de lo que peso un adulto ¿cuánto peso el león joven.			
Chocolate	sextos	1/6	120 chocolates	1/6 igual a: 20 choco 3/6 igual a: 60 choco
Situación Problema:	A Juan le regalaron una caja de chocolates en un día y otro [illegible] 3/6 ¿cuántos chocos le sobraron?			
Leche	medios	1/2	3 cartones de leche	3/2 igual a: 1 1/2
Situación Problema:	Corderito se tomó 3/2 en tres días ¿cuánto tomó?			
Uvas	novenos	1/9	500 g	3/9: 165 g 6/9: 330 g

Ilustración 6.6

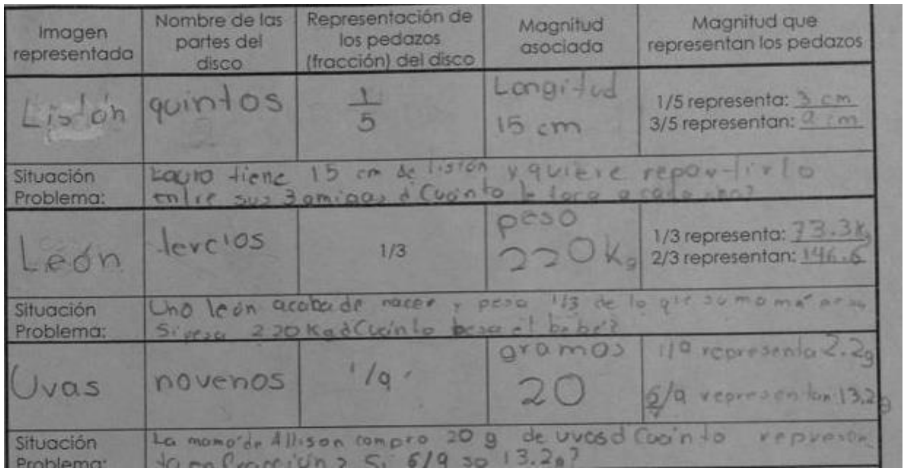


Imagen representada	Nombre de las partes del disco	Representación de los pedazos (fracción) del disco	Magnitud asociada	Magnitud que representan los pedazos
Listón	quintos	$\frac{1}{5}$	Longitud 15 cm	1/5 representa: 3 cm 3/5 representan: 9 cm
Situación Problema:	Laura tiene 15 cm de listón y quiere repartirlo entre sus 3 amigas ¿Cuánto le toca a cada una?			
León	tercios	1/3	peso 220 Kg	1/3 representa: 73.3 Kg 2/3 representan: 146.6
Situación Problema:	Una león acaba de nacer y pesa 1/3 de lo que su mamá pesa. Si pesa 220 Kg ¿Cuánto pesa el bebé?			
Uvas	novenos	1/9	gramos 20	1/9 representa 2.2 g 6/9 representan 13.2 g
Situación Problema:	La mamá de Allison compró 20 g de uvas ¿Cuánto representa la fracción? Si 6/9 son 13.2 g?			

Ilustración 6.7

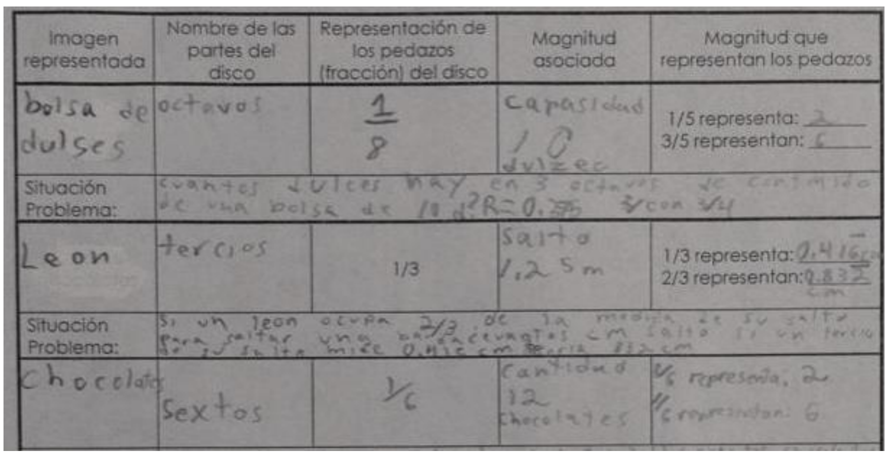
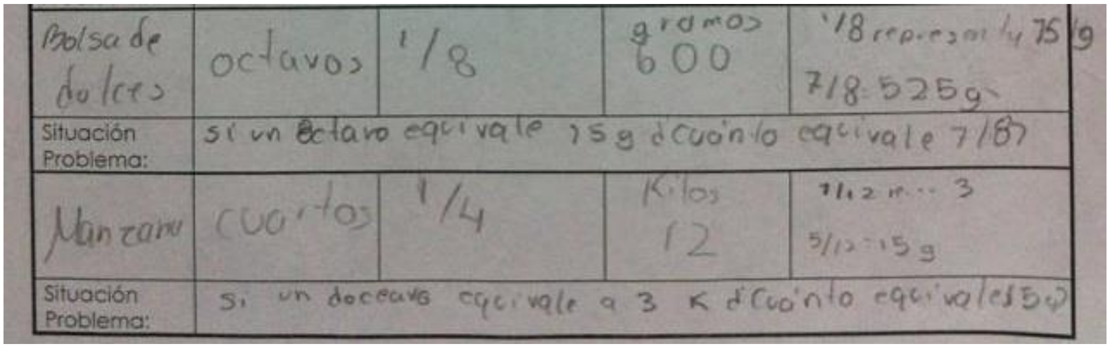


Imagen representada	Nombre de las partes del disco	Representación de los pedazos (fracción) del disco	Magnitud asociada	Magnitud que representan los pedazos
bolsa de dulses	octavos	$\frac{1}{8}$	capasidad 10 dulzes	1/5 representa: 2 3/5 representan: 6
Situación Problema:	cuantos dulces hay en 3 octavos de contenido de una bolsa de 10 d? R= 0.375 3/con 3/4			
Leon	tercios	1/3	salta 1.25 m	1/3 representa: 0.416 cm 2/3 representan: 0.833 cm
Situación Problema:	Si un leon ocupa 2/3 de la medida de su salto para saltar una [illegible] cm salto si un tercio de su salto mide 0.416 cm [illegible] 833 cm			
Chocolate	sextos	1/6	cantidad 12 chocolates	1/6 representa: 2 3/6 representan: 6

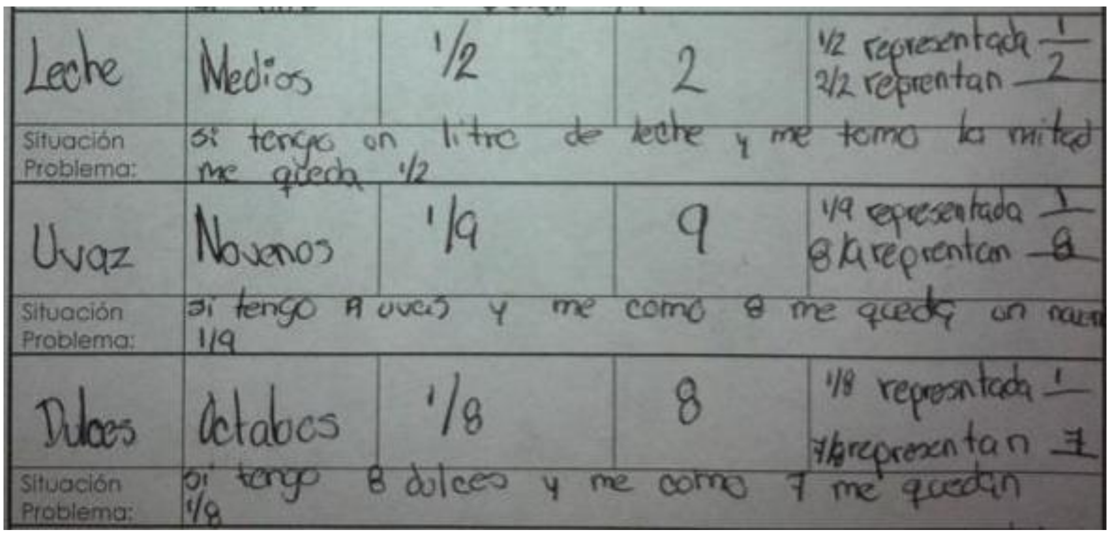
Ilustración 6.8

Al concluir las respuestas de las columnas, se pedía a los estudiantes redactar una situación problema. Cabe mencionar que los estudiantes que presentan menores dificultades para responder a las columnas de esta hoja de trabajo también muestran más facilidad para redactar una situación problema (***Ilustración 6.9***), incluso las situaciones problema que proponen son de una estructura más compleja que de los estudiantes que tuvieron mayores dificultades para responder a las columnas *magnitud asociada* y *magnitud que representan los pedazos* (***Ilustración 6.10***).



Bolsa de dulces	octavos	1/8	gramos 600	1/8 representa 75 g 7/8: 525 g
Situación Problema:	si un octavo equivale 75 g ¿cuánto equivale 7/8?			
Manzana	cuartos	1/4	Kilos 12	7/12 ... 3 5/12: 15 g
Situación Problema:	si un doceavo equivale a 3 K ¿cuánto equivale 5/12?			

Ilustración 6.9



Leche	Medios	1/2	2	1/2 representada 1/2 2/2 reprentan 2
Situación Problema:	si tengo un litro de leche y me tomo la mitad me queda 1/2			
Uvaz	Novenos	1/9	9	1/9 representada 1 8/9 reprentan 8
Situación Problema:	si tengo 9 uvas y me como 8 me queda un nuev 1/9			
Dulces	Octabos	1/8	8	1/8 represntada 1 7/8 representan 7
Situación Problema:	si tengo 8 dulces y me como 7 me quedan 1/8			

Ilustración 6.10

Al concluir las actividades en equipo se pidió a algunos estudiantes que compartieran sus respuestas y las estrategias que utilizaron para responder a las últimas dos columnas. Con esta consigna se trató de que los alumnos expusieran sus dificultades y pudieran retroalimentar sus propios procedimientos con los de sus demás compañeros, finalmente los estudiantes que no lograron realizar la división correctamente para responder a la última columna, mencionaron que sí tenían claro que podían hacer una división pero no recordaban cómo resolver la división con decimales. En este momento un compañero que logró responder satisfactoriamente a la hoja de trabajo 1 compartió el procedimiento para resolver divisiones con decimales.

SECUENCIA 2 (INTRODUCCIÓN A LA NOCIÓN DE EQUIVALENCIA)

Hoja de trabajo 1 y 2

En esta cuarta sesión de trabajo el propósito fue que los estudiantes advirtieran que una fracción puede representar el resultado de una repartición y no necesariamente se requiere expresar el resultado con magnitudes específicas o ya definidas. Además, se busca introducir al estudiante a la noción de equivalencias.

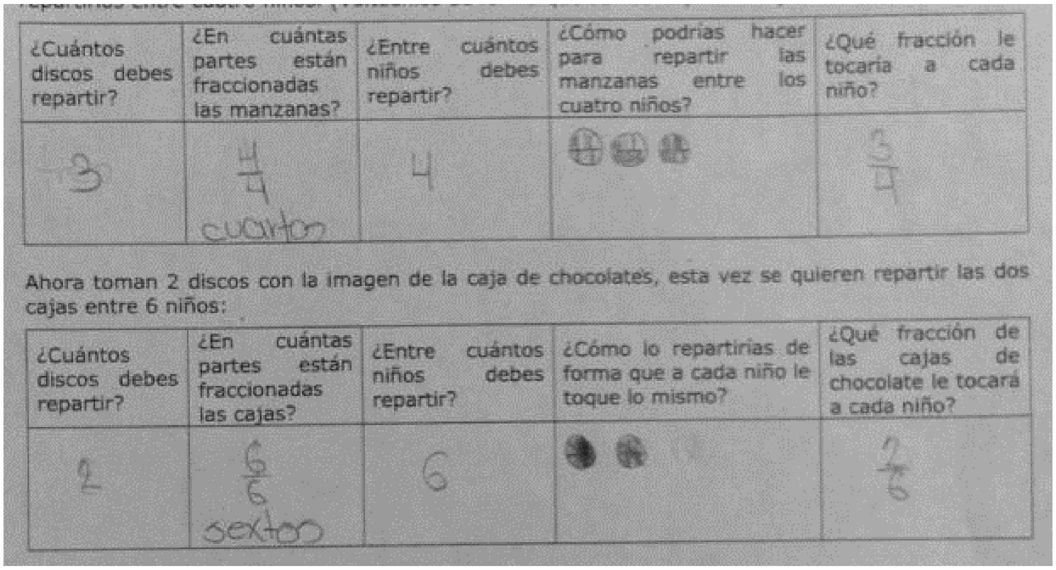
En estas hojas de trabajo la consigna fue responder a tres actividades como la siguiente:

Ahora toman 2 discos con la imagen de la caja de chocolates, esta vez se quieren repartir las dos cajas entre 6 niños:

¿Cuántos discos debes repartir?	¿En cuántas partes están fraccionadas las cajas?	¿Entre cuántos niños debes repartir?	¿Cómo lo repartirías de forma que a cada niño le toque lo mismo?	¿Qué fracción de las cajas de chocolate le tocará a cada niño?

En ella se puso cuidado en que los discos estuvieran fraccionados exactamente en el mismo número de niños a quienes se deseaba repartir. Por ejemplo, en el caso mostrado previamente los chocolates estaban divididos en sextos y se querían repartir a seis niños.

El trabajo, como se indica en la metodología utilizada, siempre se hace en equipo de manera que puedan compartir sus propias ideas sobre cada consigna y finalmente puedan exponer en plenaria sus razonamientos, hasta este momento los estudiantes continuaron empleando el material concreto como apoyo. En esta sesión de trabajo la mayoría de los estudiantes no presentaron dificultad para responder correctamente a las actividades (***Ilustración 6.11***).



¿Cuántos discos debes repartir?	¿En cuántas partes están fraccionadas las manzanas?	¿Entre cuántos niños debes repartir?	¿Cómo podrías hacer para repartir las manzanas entre los cuatro niños?	¿Qué fracción le tocaría a cada niño?
3	4/4 cuartos	4		3/4

Ahora toman 2 discos con la imagen de la caja de chocolates, esta vez se quieren repartir las dos cajas entre 6 niños:

¿Cuántos discos debes repartir?	¿En cuántas partes están fraccionadas las cajas?	¿Entre cuántos niños debes repartir?	¿Cómo lo repartirías de forma que a cada niño le toque lo mismo?	¿Qué fracción de las cajas de chocolate le tocará a cada niño?
2	6/6 sextos	6		2/6

Ilustración 6.11

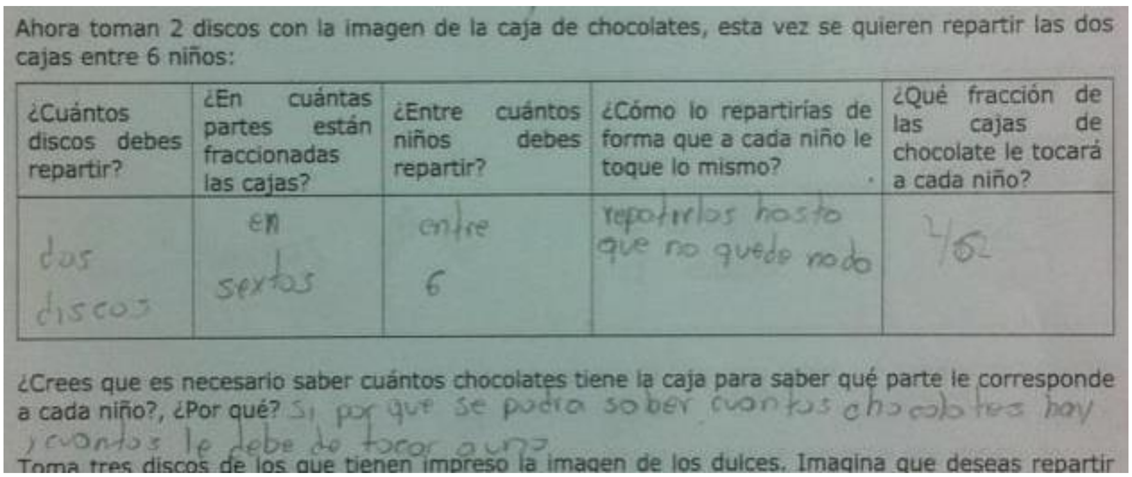
La dificultad más significativa que se encontró fue el hecho de que al tener dos discos (enteros) fraccionados en sextos los estudiantes sumaban las partes como un todo y consideraban tener doceavos. Entonces al responder la columna ¿Qué fracción de las cajas de chocolate le tocará a cada niño? los estudiantes respondían 2/12. En este momento se les hicieron las siguientes preguntas:

Docente: ¿Cuántos enteros tienen que repartir?
Estudiantes: Dos.
Docente: Ok, ¿cómo se llama a cada parte en que está fraccionado un entero?
Estudiante: Sextos.
Docente: Muy bien, entonces, ¿Por qué si son sextos en la pregunta -¿Qué fracción de las cajas de chocolate le tocará a cada niño?- ustedes responden 2/12?, ¿cómo es que cambiaron de nombre?, ¿Es correcto? [Los estudiantes se muestran confundidos, algunos explican que sumaron las partes y en total son doce, de las cuales a cada niño le tocaron 2 por eso escribieron 2/12. Ahora no están seguros]
Docente: Ok, ¿recuerdan qué es una fracción?, ¿quién puede explicarme?

Estudiantes: Es la parte de un todo.
Docente: Muy bien, es la parte de un todo. En una fracción, ¿qué expresa el numerador y qué el denominador?
Estudiantes: El numerador representa las partes que se toman de un entero y el denominador las partes en que está dividido el entero.
Docente: Entonces regresemos a la actividad. ¿Cuál es el entero? y ¿en cuánto está fraccionado?
Estudiantes: El disco de los chocolates está fraccionado en sextos.
Docente: Supongamos que sólo repartirán una caja de chocolates, es decir; un entero. ¿Cuánto le tocará a cada niño?
Estudiantes: Un sexto.
Docente: Si tuviera dos enteros, la cantidad de enteros que tengo ha aumentado ¿cierto?, sin embargo, las partes se siguen llamando igual porque como ustedes lo explicaron la fracción es una parte del entero y el entero es cada disco. Entonces cada uno está dividido en…
Estudiantes: Sextos.
Docente: ¡Bien!, ¿Cuántos sextos tenemos en total, contando los dos enteros?
Estudiantes: ¡12 sextos! [hasta ese momento los alumnos pudieron percatarse del error al sumar todas las partes como un todo]
Docente: Entonces ¿cómo podrían responder a la última pregunta?
Estudiantes: 2/6.

Con los cuestionamientos anteriores el docente esperaba que los estudiantes pudieran superar la dificultad presentada. Para finalizar a la sesión se les hizo una última pregunta: ¿Crees que es necesario conocer cuántos dulces tiene la bolsa o cuál es el peso para saber qué parte se le debe dar a cada niño? ¿Por qué? En las sesiones anteriores se trabajó la noción de parte todo y se pedía que los estudiantes asociaran a los objetos magnitudes específicas que les permitieran hacer reparticiones. Sin embargo, en esta sesión se esperaba que pudieran desprenderse de la parte concreta de una magnitud y se dieran cuenta que aun cuando no se tiene una magnitud específica podemos expresar en fracción el resultado de una repartición.

A pesar de que la mayoría de los estudiantes resolvió correctamente las actividades algunos respondieron que si necesitaban la magnitud (***Ilustración 6.12***). Para concluir se regresó a la primera actividad en donde se pide repartir tres discos de manzanas. Se revisaron sus anotaciones y se les cuestionó si en la tarea propuesta se especificaba cuántos kilos iban a repartir o cuántas manzanas, ellos respondieron que no. -Sin embargo, sí han podido decir qué parte le tocaría a cada niño-, entonces respondieron que sí; ¾. Entonces se les cuestionó nuevamente si era necesaria la magnitud, hasta ese momento pudieron percatarse que no era necesaria, finalmente respondieron que no. Con esto se concluyó la sesión.



Ahora toman 2 discos con la imagen de la caja de chocolates, esta vez se quieren repartir las dos cajas entre 6 niños:

¿Cuántos discos debes repartir?	¿En cuántas partes están fraccionadas las cajas?	¿Entre cuántos niños debes repartir?	¿Cómo lo repartirías de forma que a cada niño le toque lo mismo?	¿Qué fracción de las cajas de chocolate le tocará a cada niño?
dos discos	en sextos	entre 6	repatirlos hasta que no quedo nada	2/62

¿Crees que es necesario saber cuántos chocolates tiene la caja para saber qué parte le corresponde a cada niño?, ¿Por qué? si por que se podria saber cuantos chocolates hay y cuantos le debe de tocar a uno

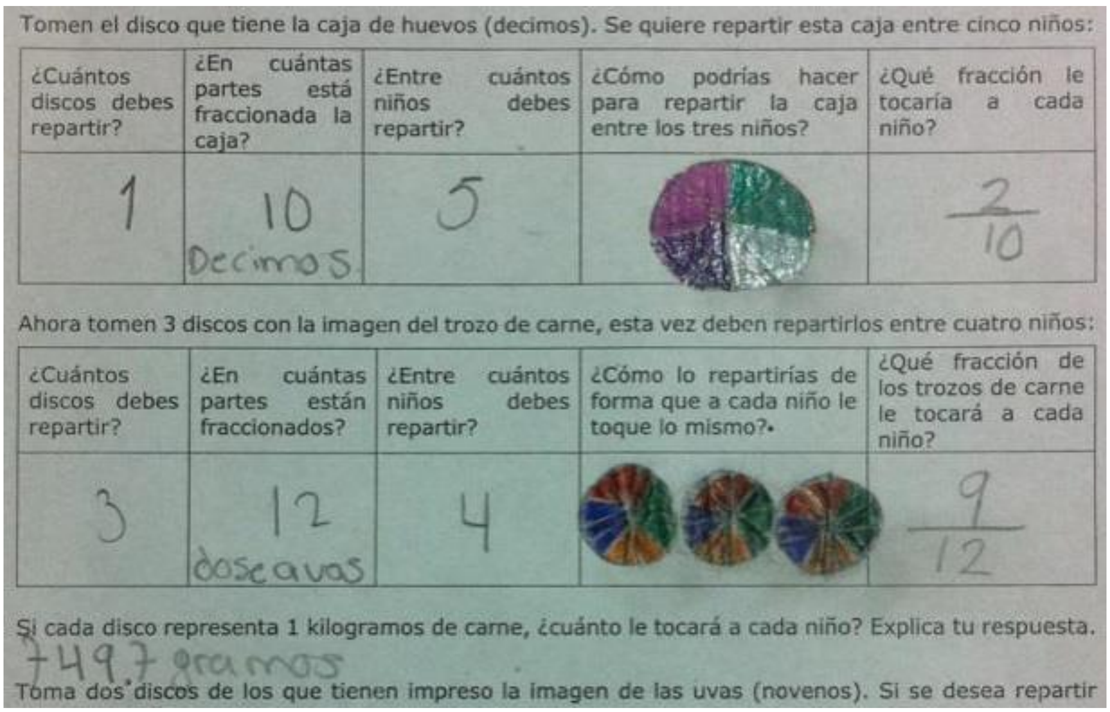
Toma tres discos de los que tienen impreso la imagen de los dulces. Imagina que deseas repartir

Ilustración 6.12

Hoja de trabajo 3 y 4

Con esta hoja de trabajo se pretendía que los estudiantes desarrollaran una idea intuitiva de equivalencia y cómo poder encontrar una correspondencia entre fracciones equivalentes. Por ejemplo, en una situación se les pide repartir una caja de huevos entre cinco niños. Los alumnos pueden percatarse que a cada niño le toca 1/5, sin embargo, el disco no está dividido en quintos sino en décimos, por lo que los alumnos deberán encontrar una fracción equivalente de 1/5 en décimos. En la segunda situación se pide repartir **tres** discos fraccionados en doceavos a cuatro niños. Por la sesión anterior ellos saben que de los 3 discos divididos entre cuatro niños a cada uno le corresponderían ¾ pero, dado que no están fraccionados en cuartos, deberán encontrar una equivalencia en doceavos.

En esta hoja de trabajo los estudiantes lograron hacer la correspondencia de las fracciones equivalentes sin problemas (***Ilustración 6.13***).



Tomen el disco que tiene la caja de huevos (decimos). Se quiere repartir esta caja entre cinco niños:

¿Cuántos discos debes repartir?	¿En cuántas partes está fraccionada la caja?	¿Entre cuántos niños debes repartir?	¿Cómo podrías hacer para repartir la caja entre los tres niños?	¿Qué fracción le tocaría a cada niño?
1	10 Decimos	5		$\frac{2}{10}$

Ahora tomen 3 discos con la imagen del trozo de carne, esta vez deben repartirlos entre cuatro niños:

¿Cuántos discos debes repartir?	¿En cuántas partes están fraccionados?	¿Entre cuántos niños debes repartir?	¿Cómo lo repartirías de forma que a cada niño le toque lo mismo?	¿Qué fracción de los trozos de carne le tocará a cada niño?
3	12 doseavos	4		$\frac{9}{12}$

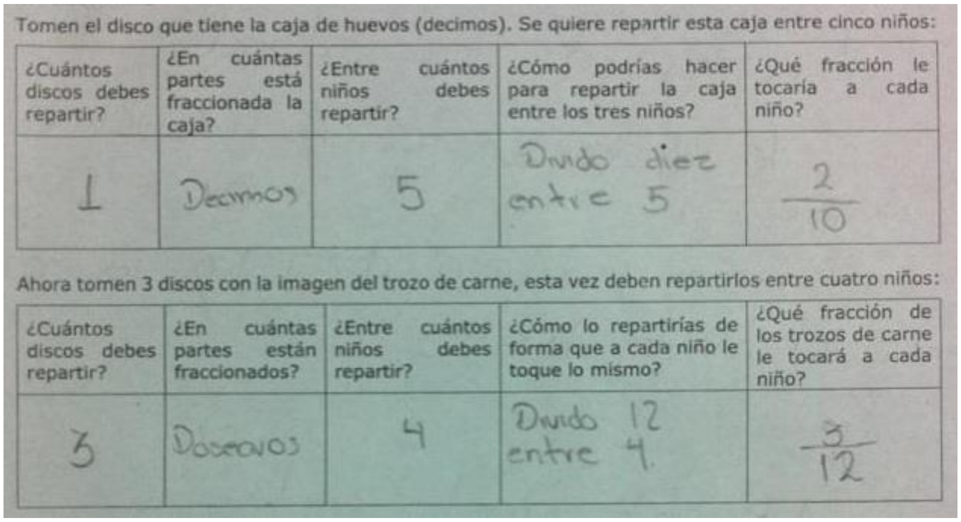
Si cada disco representa 1 kilogramos de carne, ¿cuánto le tocará a cada niño? Explica tu respuesta.

749.7 gramos

Toma dos discos de los que tienen impreso la imagen de las uvas (novenos). Si se desea repartir

Ilustración 6.13

La mayoría de los estudiantes contestó correctamente, el error de los que no dieron la respuesta correcta a la columna: ¿qué fracción le tocaría a cada niño? fue que no consideraron que en algunas de las situaciones propuestas se debían repartir más de un entero, por lo que dieron como respuesta lo que le tocaría a cada niño por entero y no el total, esto ocurrió en dos equipos (***Ilustraciones 6.14 y 6.15***). En esta actividad empieza a notarse una mayor comprensión y reflexión sobre las fracciones y cómo las emplean para resolver las situaciones planteadas. Hasta este momento no se ha introducido ningún algoritmo para hallar fracciones equivalentes, sin embargo, los estudiantes usaron sus propios razonamientos para resolver las actividades de esta sesión.

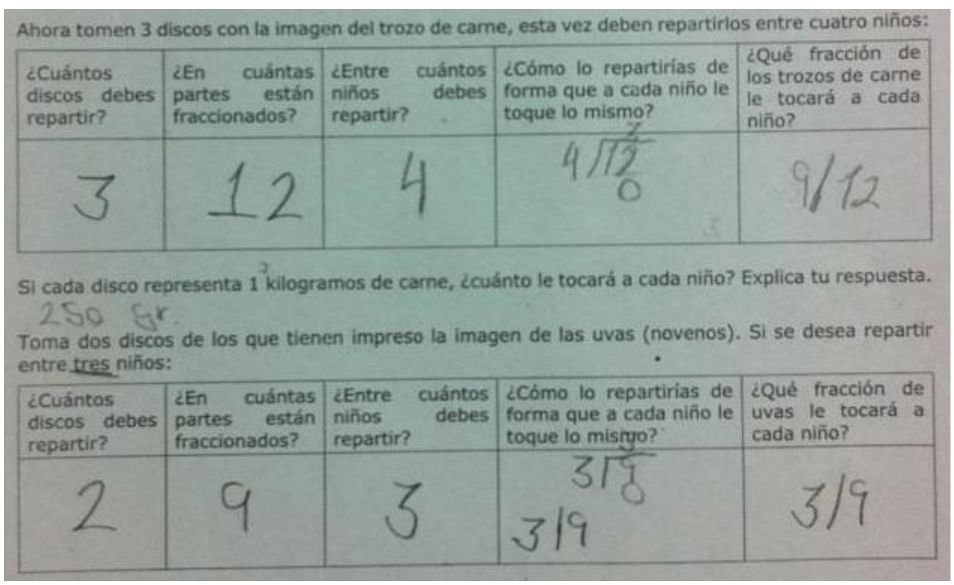

Tomen el disco que tiene la caja de huevos (decimos). Se quiere repartir esta caja entre cinco niños:

¿Cuántos discos debes repartir?	¿En cuántas partes está fraccionada la caja?	¿Entre cuántos niños debes repartir?	¿Cómo podrías hacer para repartir la caja entre los tres niños?	¿Qué fracción le tocaría a cada niño?
1	Decimos	5	Divido diez entre 5	$\frac{2}{10}$

Ahora tomen 3 discos con la imagen del trozo de carne, esta vez deben repartirlos entre cuatro niños:

¿Cuántos discos debes repartir?	¿En cuántas partes están fraccionados?	¿Entre cuántos niños debes repartir?	¿Cómo lo repartirías de forma que a cada niño le toque lo mismo?	¿Qué fracción de los trozos de carne le tocará a cada niño?
3	Doseavos	4	Divido 12 entre 4.	$\frac{3}{12}$

Ilustración 6.14


Ahora tomen 3 discos con la imagen del trozo de carne, esta vez deben repartirlos entre cuatro niños:

¿Cuántos discos debes repartir?	¿En cuántas partes están fraccionados?	¿Entre cuántos niños debes repartir?	¿Cómo lo repartirías de forma que a cada niño le toque lo mismo?	¿Qué fracción de los trozos de carne le tocará a cada niño?
3	12	4	$4\overline{)12}$ 3, 0	9/12

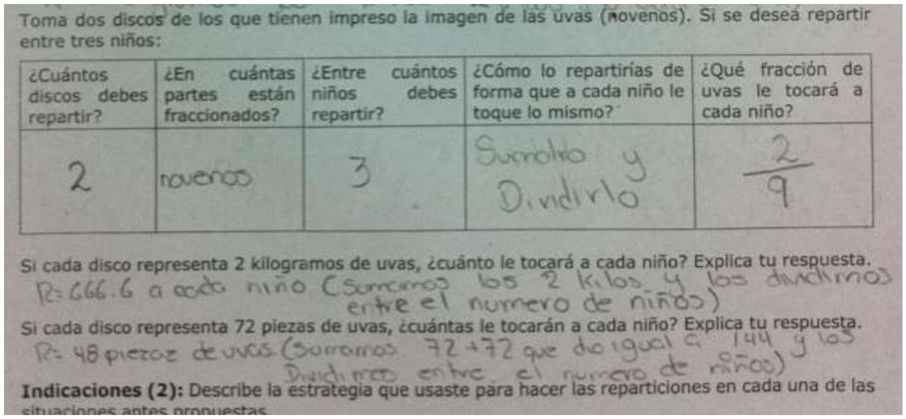
Si cada disco representa 1 kilogramos de carne, ¿cuánto le tocará a cada niño? Explica tu respuesta.
250 gr.

Toma dos discos de los que tienen impreso la imagen de las uvas (novenos). Si se desea repartir entre tres niños:

¿Cuántos discos debes repartir?	¿En cuántas partes están fraccionados?	¿Entre cuántos niños debes repartir?	¿Cómo lo repartirías de forma que a cada niño le toque lo mismo?	¿Qué fracción de uvas le tocará a cada niño?
2	9	3	$3\overline{)9}$ 3, 0 3/9	3/9

Ilustración 6.15

En esta sesión se sigue haciendo hincapié en que al hacer una repartición cuando no se tienen magnitudes específicas el resultado puede expresarse en fracción. Pero si se cuenta con magnitudes la repartición se puede expresar como la parte de esa magnitud específica. En las tareas donde se asignaron magnitudes específicas los alumnos no mostraron dificultad para dar la respuesta correcta (***Ilustraciones 6.16 y 6.17***).



Toma dos discos de los que tienen impreso la imagen de las uvas (novenos). Si se desea repartir entre tres niños:

¿Cuántos discos debes repartir?	¿En cuántas partes están fraccionados?	¿Entre cuántos niños debes repartir?	¿Cómo lo repartirías de forma que a cada niño le toque lo mismo?	¿Qué fracción de uvas le tocará a cada niño?
2	novenos	3	Sumarlo y Dividirlo	$\frac{2}{9}$

Si cada disco representa 2 kilogramos de uvas, ¿cuánto le tocará a cada niño? Explica tu respuesta.

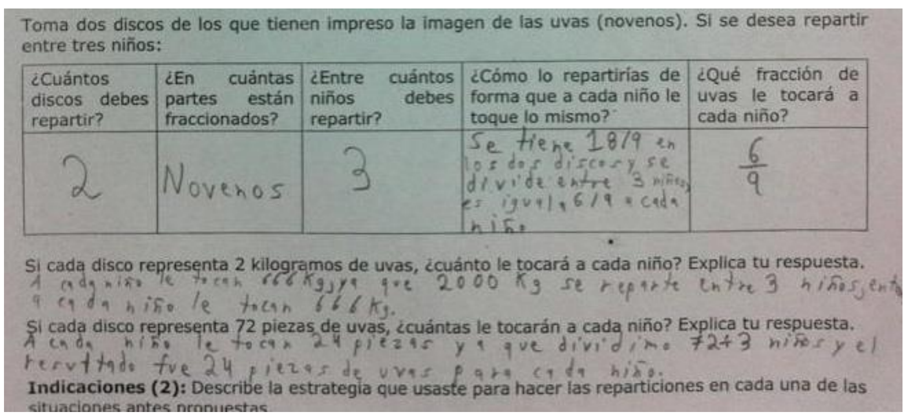
R=666.6 a cada niño (Sumamos los 2 kilos y los dividimos entre el numero de niños)

Si cada disco representa 72 piezas de uvas, ¿cuántas le tocarán a cada niño? Explica tu respuesta.

R= 48 piezas de uvas (Sumamos 72+72 que dio igual a 144 y los Dividimos entre el numero de niños)

Indicaciones (2): Describe la estrategia que usaste para hacer las reparticiones en cada una de las situaciones antes propuestas.

Ilustración 6.16



Toma dos discos de los que tienen impreso la imagen de las uvas (novenos). Si se desea repartir entre tres niños:

¿Cuántos discos debes repartir?	¿En cuántas partes están fraccionados?	¿Entre cuántos niños debes repartir?	¿Cómo lo repartirías de forma que a cada niño le toque lo mismo?	¿Qué fracción de uvas le tocará a cada niño?
2	Novenos	3	Se tiene 18/9 en los dos discos y se divide entre 3 niños, es igual a 6/9 a cada niño	$\frac{6}{9}$

Si cada disco representa 2 kilogramos de uvas, ¿cuánto le tocará a cada niño? Explica tu respuesta.

A cada niño le tocan 666 Kg, ya que 2000 Kg se reparte entre 3 niños, entonces a cada niño le tocan 666 Kg.

Si cada disco representa 72 piezas de uvas, ¿cuántas le tocarán a cada niño? Explica tu respuesta.

A cada niño le tocan 24 piezas ya que dividimos 72÷3 niños y el resultado fue 24 piezas de uvas para cada niño.

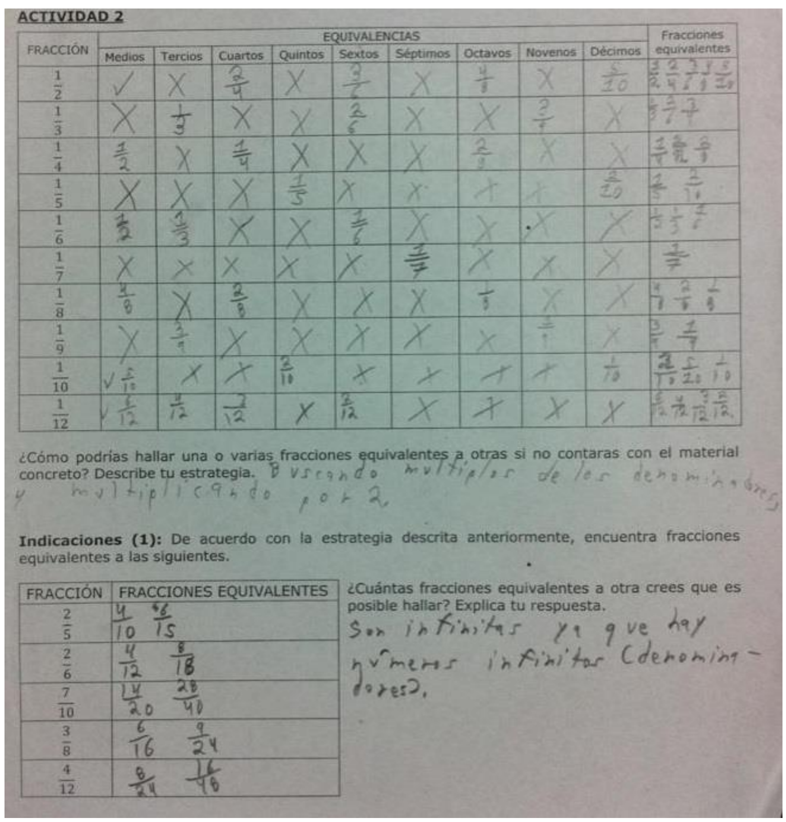
Indicaciones (2): Describe la estrategia que usaste para hacer las reparticiones en cada una de las situaciones antes propuestas.

Ilustración 6.17

SECUENCIA 3 (EQUIVALENCIA FORMALMENTE)

<u>Hoja de trabajo 1</u>

Para realizar la actividad de esta sesión fue necesario emplear un material de complemento. Además del material de madera se incluyeron unos discos de acetato fraccionados en las mismas partes que los discos de madera y del mismo tamaño. Se pidió a los estudiantes observar mediante superposición si las fracciones coincidían unas con otras. Por ejemplo, si los medios coincidían exactamente con los tercios y si era así que escribieran cuantos tercios tenía un medio, además debían explicar sus respuestas. En esta consigna los estudiantes no tuvieron problemas. Explicaron que las fracciones que coincidían eran múltiplos entre sí, por lo tanto, una estrategia para hallar fracciones equivalentes a otras era multiplicar numerador y denominador por el mismo número. Después de realizar esta actividad, se les pidió que de acuerdo con la estrategia descrita escribieran fracciones equivalentes a otras. Finalmente, se les preguntó: ¿cuántas fracciones equivalentes a otra crees que es posible hallar? y además se les pedía explicar su respuesta. En esta pregunta los estudiantes coincidieron en que se podían hallar fracciones equivalentes infinitas. (***Ilustraciones 6.18. 6.19 y 6.20***).



ACTIVIDAD 2

FRACCIÓN	EQUIVALENCIAS									Fracciones equivalentes
	Medios	Tercios	Cuartos	Quintos	Sextos	Séptimos	Octavos	Novenos	Décimos	
$\frac{1}{2}$	✓	X	$\frac{2}{4}$	X	$\frac{3}{6}$	X	$\frac{4}{8}$	X	$\frac{5}{10}$	$\frac{1}{2}$ $\frac{2}{4}$ $\frac{3}{6}$ $\frac{4}{8}$ $\frac{5}{10}$
$\frac{1}{3}$	X	$\frac{1}{3}$	X	X	$\frac{2}{6}$	X	X	$\frac{3}{9}$	X	$\frac{1}{3}$ $\frac{2}{6}$ $\frac{3}{9}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	X	$\frac{1}{4}$	X	X	X	$\frac{2}{8}$	X	X	[illegible]
$\frac{1}{5}$	X	X	X	$\frac{1}{5}$	X	X	X	X	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{5}$ $\frac{2}{10}$
$\frac{1}{6}$	[illegible]	[illegible]	X	X	$\frac{1}{6}$	X	X	X	X	[illegible]
$\frac{1}{7}$	X	X	X	X	X	$\frac{1}{7}$	X	X	X	$\frac{1}{7}$
$\frac{1}{8}$	$\frac{4}{8}$	X	$\frac{2}{8}$	X	X	X	$\frac{1}{8}$	X	X	$\frac{4}{8}$ $\frac{2}{8}$ $\frac{1}{8}$
$\frac{1}{9}$	X	$\frac{3}{9}$	X	X	X	X	X	$\frac{1}{9}$	X	$\frac{3}{9}$ $\frac{1}{9}$
$\frac{1}{10}$	√ $\frac{5}{10}$	X	X	$\frac{2}{10}$	X	X	X	X	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$ $\frac{5}{20}$ $\frac{1}{10}$
$\frac{1}{12}$	√ $\frac{6}{12}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{3}{12}$	X	$\frac{2}{12}$	X	X	X	X	$\frac{6}{12}$ $\frac{4}{12}$ $\frac{3}{12}$ $\frac{2}{12}$

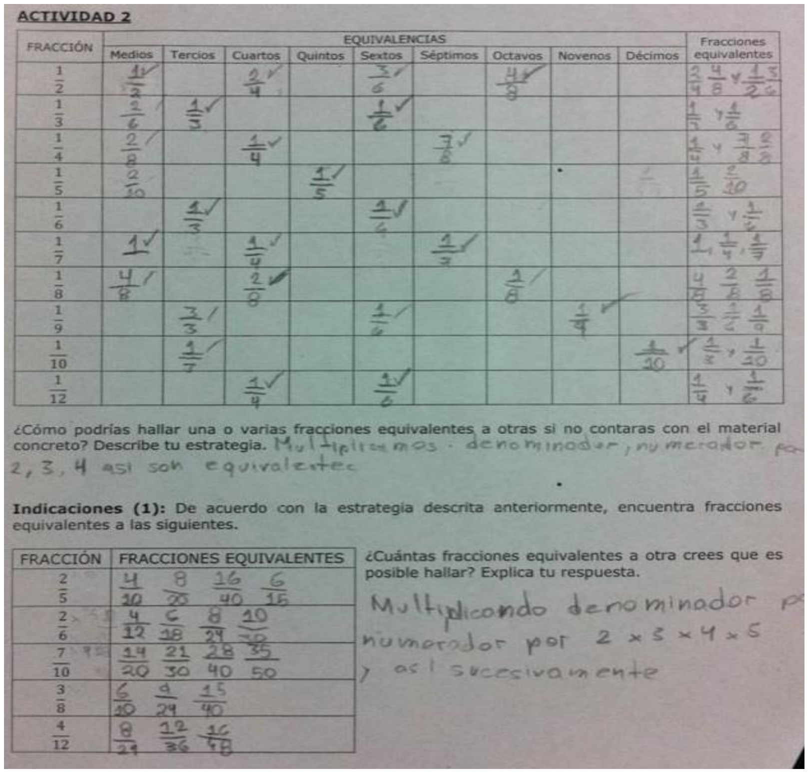
¿Cómo podrías hallar una o varias fracciones equivalentes a otras si no contaras con el material concreto? Describe tu estrategia. Buscando multiplos de los denominadores y multiplicando por 2.

Indicaciones (1): De acuerdo con la estrategia descrita anteriormente, encuentra fracciones equivalentes a las siguientes.

FRACCIÓN	FRACCIONES EQUIVALENTES
$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{10}$ $\frac{6}{15}$
$\frac{2}{6}$	$\frac{4}{12}$ $\frac{8}{18}$
$\frac{7}{10}$	$\frac{14}{20}$ $\frac{28}{40}$
$\frac{3}{8}$	$\frac{6}{16}$ $\frac{9}{24}$
$\frac{4}{12}$	$\frac{8}{24}$ $\frac{16}{48}$

¿Cuántas fracciones equivalentes a otra crees que es posible hallar? Explica tu respuesta.
Son infinitas ya que hay numeros infinitos (denominadores).

Ilustración 6.18



ACTIVIDAD 2

FRACCIÓN	Medios	Tercios	Cuartos	Quintos	Sextos	Séptimos	Octavos	Novenos	Décimos	Fracciones equivalentes
1/2	1/2 ✓		2/4 ✓		3/6 ✓		4/8 ✓			2/4 4/8 y 1/2 3/6
1/3	2/6	1/3 ✓			1/6 ✓					1/3 y 1/6
1/4	2/8		1/4 ✓			7/8 ✓				1/4 y 7/8 2/8
1/5	2/10			1/5						1/5 2/10
1/6		1/3 ✓			1/6 ✓					1/3 y 1/6
1/7	1 ✓		1/4 ✓			1/7 ✓				1, 1/4, 1/7
1/8	4/8		2/8				1/8			4/8 2/8 1/8
1/9		3/3			1/6			1/9 ✓		3/3 1/6 1/9
1/10		1/7							1/10 ✓	1/3, 1/10
1/12			1/4 ✓		1/6 ✓					1/4 y 1/6

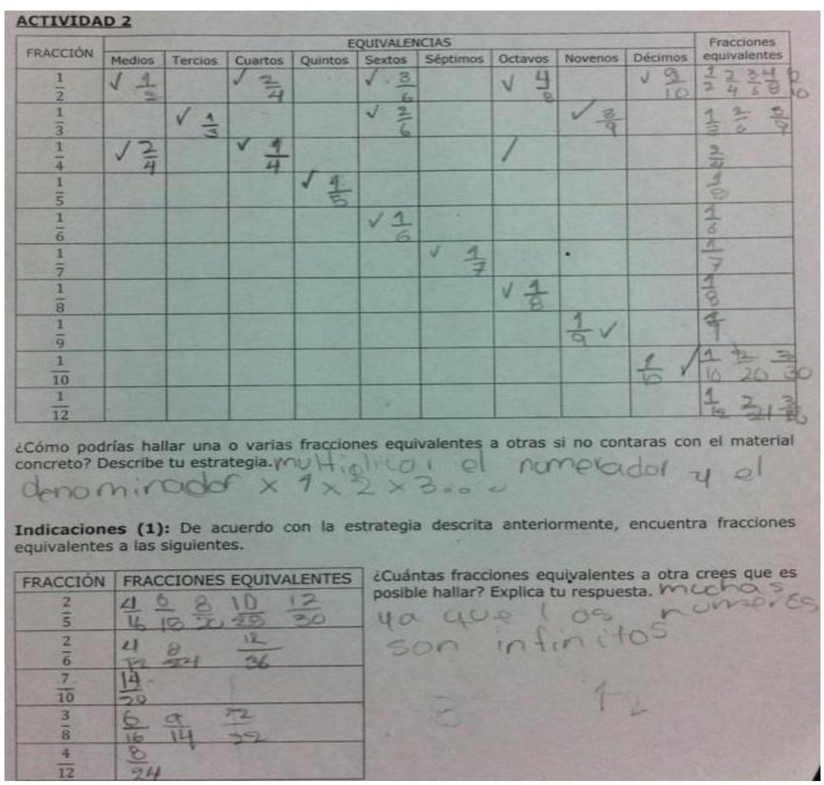
¿Cómo podrías hallar una o varias fracciones equivalentes a otras si no contaras con el material concreto? Describe tu estrategia. Multiplicamos denominador, numerador por 2, 3, 4 asi son equivalentes

Indicaciones (1): De acuerdo con la estrategia descrita anteriormente, encuentra fracciones equivalentes a las siguientes.

FRACCIÓN	FRACCIONES EQUIVALENTES
2/5	4/10 8/20 16/40 6/15
2/6	4/12 6/18 8/24 10/30
7/10	14/20 21/30 28/40 35/50
3/8	6/16 9/24 15/40
4/12	8/24 12/36 16/48

¿Cuántas fracciones equivalentes a otra crees que es posible hallar? Explica tu respuesta. Multiplicando denominador por numerador por 2 x 3 x 4 x 5 y asi sucesivamente

Ilustración 6.19



ACTIVIDAD 2

FRACCIÓN	Medios	Tercios	Cuartos	Quintos	Sextos	Séptimos	Octavos	Novenos	Décimos	Fracciones equivalentes
1/2	✓ 1/2		✓ 2/4		✓ 3/6		✓ 4/8		✓ 9/10	1/2 2/4 3/6 4/8
1/3		✓ 1/3			✓ 2/6			✓ 3/9		1/3 2/6 3/9
1/4	✓ 2/4		✓ 1/4				/			2/4
1/5				✓ 1/5						1/5
1/6					✓ 1/6					1/6
1/7						✓ 1/7				1/7
1/8							✓ 1/8			1/8
1/9								1/9 ✓		1/9
1/10									1/10 ✓	1/10 2/20 3/30
1/12										1/12 2/24 3/36

¿Cómo podrías hallar una o varias fracciones equivalentes a otras si no contaras con el material concreto? Describe tu estrategia. multiplicar el numerador y el denominador x 1 x 2 x 3...

Indicaciones (1): De acuerdo con la estrategia descrita anteriormente, encuentra fracciones equivalentes a las siguientes.

FRACCIÓN	FRACCIONES EQUIVALENTES
2/5	4/10 6/15 8/20 10/25 12/30
2/6	4/12 8/24 12/36
7/10	14/20
3/8	6/16 9/24 12/32
4/12	8/24

¿Cuántas fracciones equivalentes a otra crees que es posible hallar? Explica tu respuesta. muchas ya que los numeros son infinitos

Ilustración 6.20

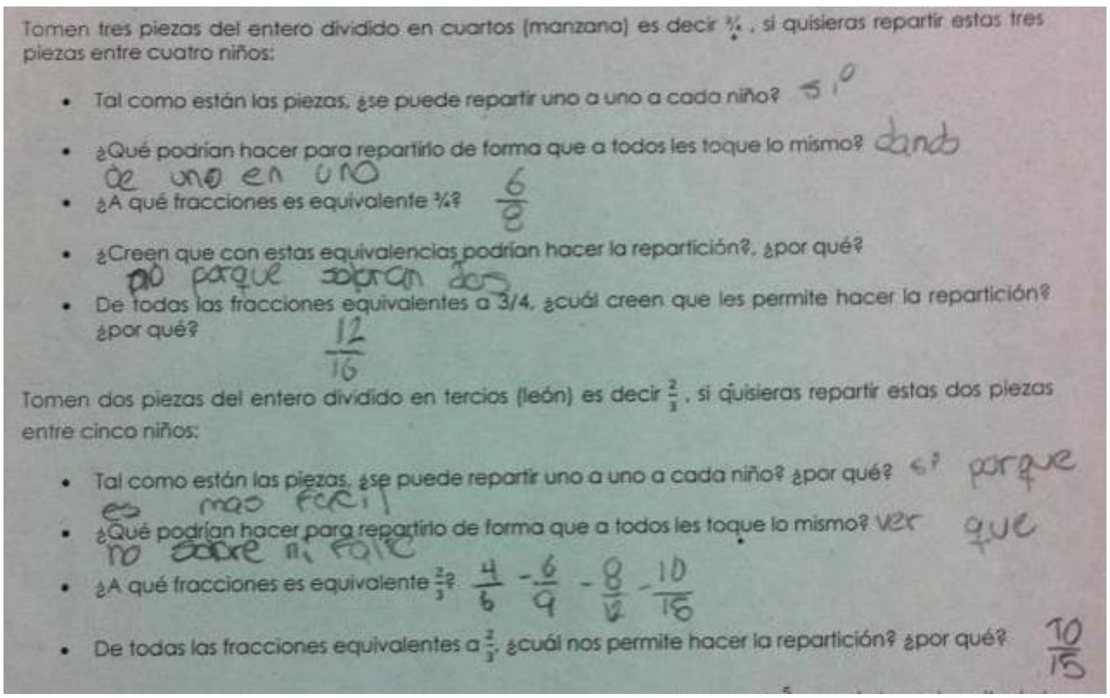
De acuerdo con el análisis previo puede notarse que el propósito de la sesión se logra ya que los estudiantes si advierten que una estrategia para hallar fracciones equivalentes es multiplicar tanto numerador como denominador por el mismo número. Además, cuando logran formalizar su estrategia no tienen más la necesidad de usar el material didáctico.

Hoja de trabajo 2

En esta sesión la intención didáctica era que los estudiantes reflexionaran que un todo puede ser una parte de un *entero* y no necesariamente el entero, además que es posible hallar una fracción de otra fracción empleando fracciones equivalentes.
Las actividades propuestas a los alumnos trataban de aproximarlos a una estrategia que les permitiera responder a situaciones como la siguiente empleando fracciones equivalentes: Toma tres piezas del entero dividido en cuartos (manzanas) es decir ¾ y se desea repartir estas tres piezas entre cuatro niños. Posterior a ello se les hicieron las siguientes preguntas: ¿qué pueden hacer para poder repartirlo?, tal como están las piezas, ¿se puede repartir uno a uno a cada niño?, ¿por qué?, ¿qué podrían hacer para repartir estas piezas de tal forma que a cada niño le toque lo mismo y no sobre?, ¿A qué fracciones es equivalente ¾?, ¿alguna de estas fracciones equivalentes permite hacer la repartición?, ¿por qué? Cabe mencionar que este tipo de planteamientos puede resolverse mediante una división de fracciones por un entero, sin embargo, a pesar de que los estudiantes han revisado previamente estas operaciones y conocen el algoritmo de la división de fracciones, ninguno pudo relacionar la estrategia de solución con el algoritmo ya conocido. Es importante aclarar que en cada secuencia lo que se buscaba era estimular la reflexión de los estudiantes sobre el uso de las fracciones equivalentes. Ningún algoritmo se introdujo a

menos que fuera deducido por los estudiantes como producto de sus propias reflexiones después de haber realizado cada consigna.

En esta sesión, aunque las actividades seguían realizándose en equipo, se pidió a los estudiantes resolver la primera actividad y posteriormente se comentaron en plenaria sus respuestas y razonamientos. Para ellos era claro que ¾ no podía repartirse entre cuatro niños dado que tal como están las piezas, un niño se quedaría sin porción de manzanas, pero cuando se les preguntó qué podían hacer para repartirlo no tenían una idea de cómo poder hacerlo (***Ilustración 6.21***).



Tomen tres piezas del entero dividido en cuartos (manzana) es decir $\frac{3}{4}$, si quisieras repartir estas tres piezas entre cuatro niños:

- Tal como están las piezas, ¿se puede repartir uno a uno a cada niño? si
- ¿Qué podrían hacer para repartirlo de forma que a todos les toque lo mismo? dando de uno en uno
- ¿A qué fracciones es equivalente ¾? $\frac{6}{8}$
- ¿Creen que con estas equivalencias podrían hacer la repartición?, ¿por qué? no porque sobran dos
- De todas las fracciones equivalentes a 3/4, ¿cuál creen que les permite hacer la repartición? ¿por qué? $\frac{12}{16}$

Tomen dos piezas del entero dividido en tercios (león) es decir $\frac{2}{3}$, si quisieras repartir estas dos piezas entre cinco niños:

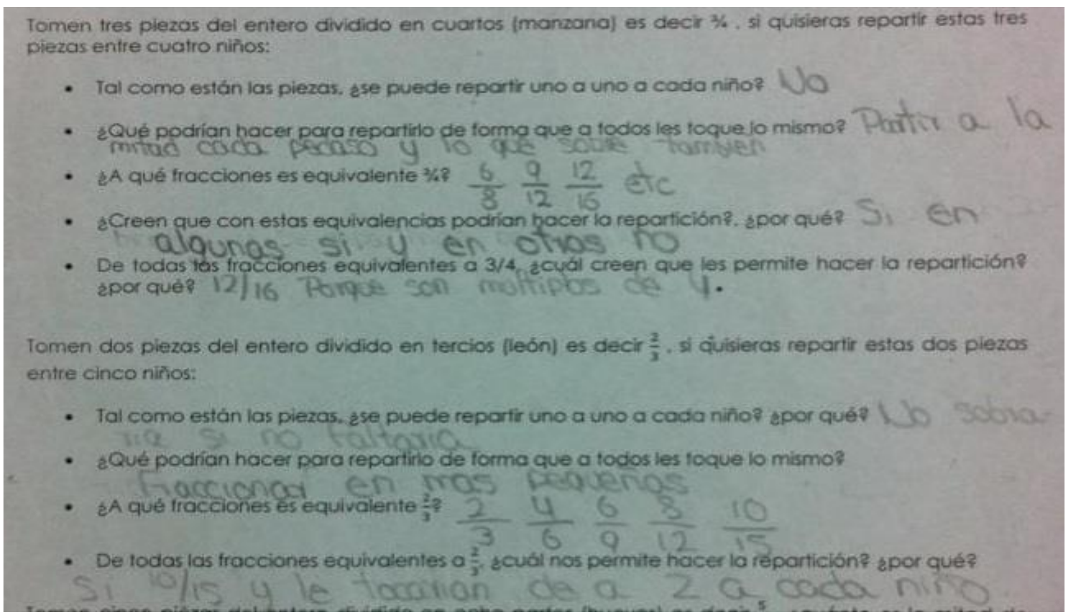
- Tal como están las piezas, ¿se puede repartir uno a uno a cada niño? ¿por qué? si porque es mas facil
- ¿Qué podrían hacer para repartirlo de forma que a todos les toque lo mismo? ver que no sobre ni falte
- ¿A qué fracciones es equivalente $\frac{2}{3}$? $\frac{4}{6}$ - $\frac{6}{9}$ - $\frac{8}{12}$ - $\frac{10}{15}$
- De todas las fracciones equivalentes a $\frac{2}{3}$, ¿cuál nos permite hacer la repartición? ¿por qué? $\frac{10}{15}$

Ilustración 6.21

Entonces se plantearon las preguntas sobre equivalencias. Cuando los alumnos se dieron cuenta que podían obtener equivalencias y además había algunas de estas que eran divisibles por cuatro (que era el número de niños) inmediatamente empezaron a compartir sus ideas.

Estudiantes: ¡Ya sabemos cómo hacer la repartición!
Docente: Ok, ¿qué idea tienen?

Estudiante: Bueno es que si vemos las fracciones equivalentes, con ellas sí se puede repartir.
Docente: Muy bien, ¿cuáles son las fracciones equivalentes a 3/4?
Estudiantes: 6/8, 9/12, 12/16…
Docente: Ok, ¿se puede hacer la repartición con cualquiera de ellas?
Estudiante: [lo piensan un momento] No, porque no todas se pueden dividir entre cuatro niños.
Docente: ¿Cómo es eso, puedes explicarlo?
Estudiante: Sí mire, por ejemplo si tuviéramos 6/8 y los repartimos entre cuatro niños no queda, sobran dos piezas.
Docente: Ok, entonces ¿cuál de las fracciones sirve para hacer la repartición?
Estudiante: Tenemos que hacer piezas más pequeñas, por ejemplo 12/16 si se pueden repartir a cuatro niños porque 12 se divide exacto entre 4.
Docente: Muy bien, ¿cuánto le toca a cada niño entonces?
Estudiante: Pues 3/16. (***Ilustración 6.22***)

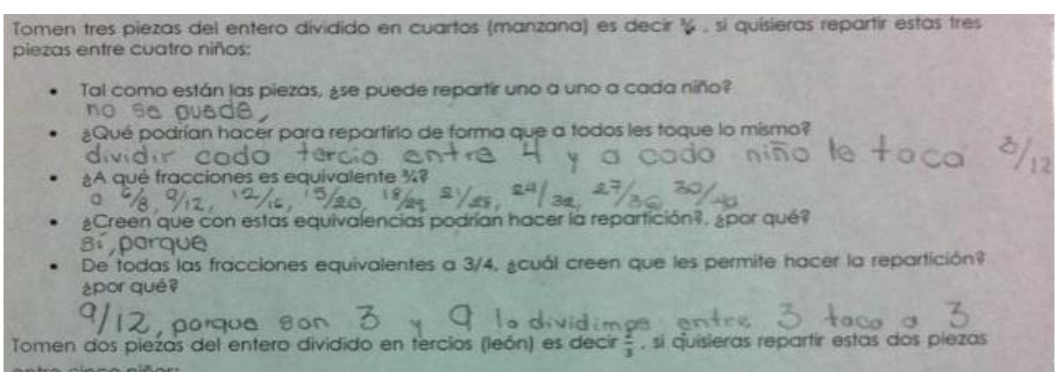


Tomen tres piezas del entero dividido en cuartos (manzana) es decir ¾ . si quisieras repartir estas tres piezas entre cuatro niños:

- Tal como están las piezas, ¿se puede repartir uno a uno a cada niño? No
- ¿Qué podrían hacer para repartirlo de forma que a todos les toque lo mismo? Partir a la mitad cada pedaso y lo que sobre tambien
- ¿A qué fracciones es equivalente ¾? $\frac{6}{8}$ $\frac{9}{12}$ $\frac{12}{16}$ etc
- ¿Creen que con estas equivalencias podrían hacer la repartición?, ¿por qué? Si en algunos si y en otros no
- De todas las fracciones equivalentes a 3/4, ¿cuál creen que les permite hacer la repartición? ¿por qué? 12/16 Porque son multiplos de 4.

Tomen dos piezas del entero dividido en tercios (león) es decir $\frac{2}{3}$. si quisieras repartir estas dos piezas entre cinco niños:

- Tal como están las piezas, ¿se puede repartir uno a uno a cada niño? ¿por qué? No sobraria si no faltaria
- ¿Qué podrían hacer para repartirlo de forma que a todos les toque lo mismo? fraccionar en mas pequeños
- ¿A qué fracciones es equivalente $\frac{2}{3}$? $\frac{2}{3}$ $\frac{4}{6}$ $\frac{6}{9}$ $\frac{8}{12}$ $\frac{10}{15}$
- De todas las fracciones equivalentes a $\frac{2}{3}$, ¿cuál nos permite hacer la repartición? ¿por qué? Si 10/15 y le tocarian de a 2 a cada niño



Tomen tres piezas del entero dividido en cuartos (manzana) es decir ¾ . si quisieras repartir estas tres piezas entre cuatro niños:

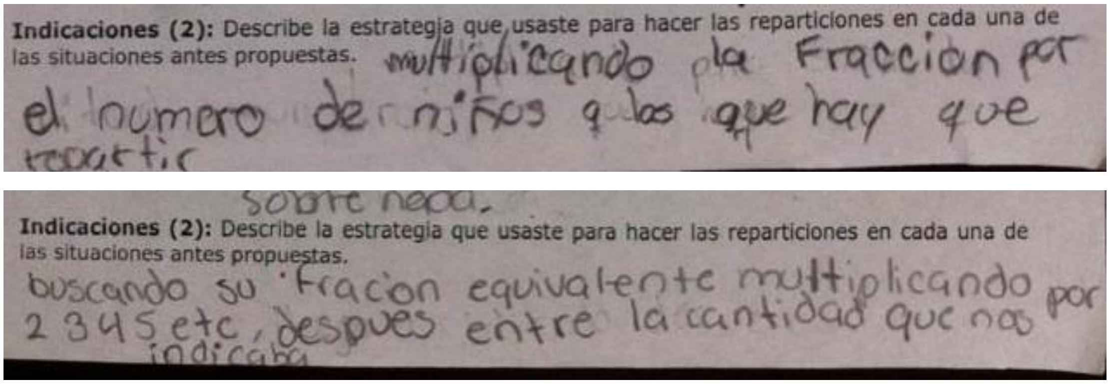
- Tal como están las piezas, ¿se puede repartir uno a uno a cada niño? no se puede,
- ¿Qué podrían hacer para repartirlo de forma que a todos les toque lo mismo? dividir cada tercio entre 4 y a cado niño le toca 3/12
- ¿A qué fracciones es equivalente ¾? a 6/8, 9/12, 12/16, 15/20, 18/24, 21/28, 24/32, 27/36, 30/40
- ¿Creen que con estas equivalencias podrían hacer la repartición?, ¿por qué? si, porque
- De todas las fracciones equivalentes a 3/4, ¿cuál creen que les permite hacer la repartición? ¿por qué? 9/12, porque son 3 y 9 lo dividimos entre 3 toca a 3

Tomen dos piezas del entero dividido en tercios (león) es decir $\frac{2}{3}$. si quisieras repartir estas dos piezas

Ilustración 6.22

Se propusieron dos actividades de la misma estructura, y en la segunda solamente un equipo no llegó a la respuesta correcta. Con la primera actividad los alumnos construyeron una idea de cómo poder resolver este tipo de situaciones, al concluir con esta hoja de trabajo ellos lograron describir una estrategia para resolver este tipo de planteamientos.

La tercera actividad propuesta en esta sesión se trataba de hallar la mitad de 5/8, lo cual tampoco puede hacerse de forma directa, por lo tanto, los estudiantes debían encontrar alguna equivalencia que les permitiera encontrar la mitad. En esta actividad solo dos equipos no llegaron a la respuesta correcta, escriben las fracciones equivalentes pero por algún motivo eligen una con numerador no divisible por dos. Cuando se confrontan sus respuestas con las de otros estudiantes ellos reconocen el error y explican cómo debían resolverlo de forma correcta. Para finalizar las actividades de esta hoja de trabajo se pidió a los estudiantes describir una estrategia que permitiera resolver ese tipo de planteamientos, la mayoría de los niños pudo explicar que es necesario hallar fracciones equivalentes, algunos si notan que puede multiplicarse numerador y denominador por el número de niños entre los que se desea repartir y después dividir, otros no pueden identificar esta relación aún, sin embargo les queda claro que es necesario encontrar una fracción equivalente que sea divisible por el número de niños. Estos razonamientos fueron muy importantes porque, aunque no asocian la solución de estos problemas con una operación de fracciones es muy valioso el hecho de que de una manera más reflexiva y analítica puedan dar respuesta a este tipo de planteamientos y poco a poco puedan construir una estrategia más formal (***Ilustración 6.23***).



Indicaciones (2): Describe la estrategia que usaste para hacer las reparticiones en cada una de las situaciones antes propuestas. multiplicando la Fraccion por el numero de niños q los que hay que repartir

sobre nada.

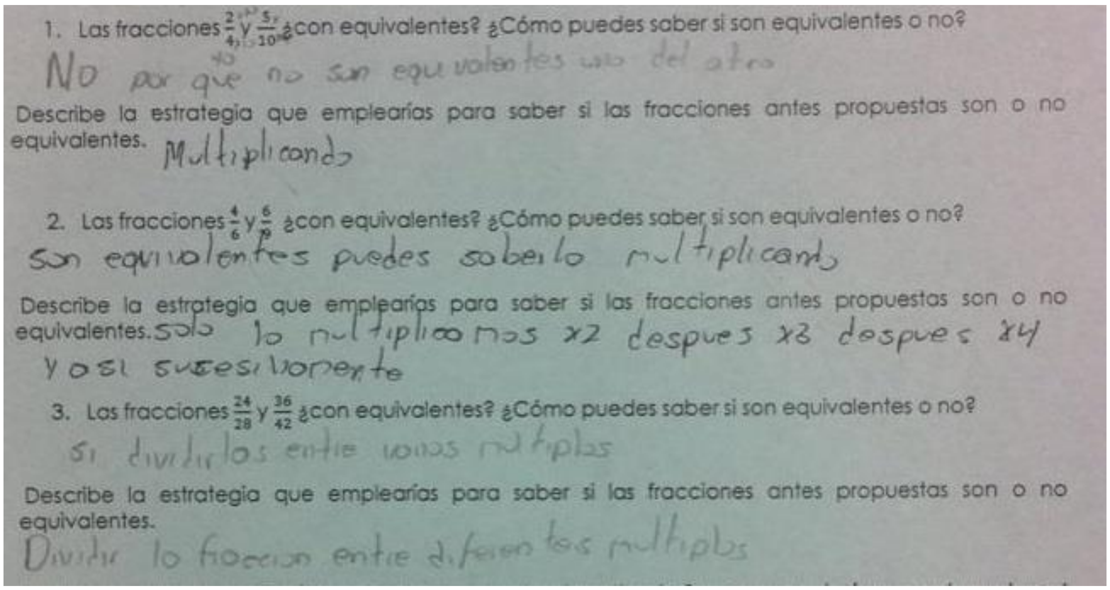
Indicaciones (2): Describe la estrategia que usaste para hacer las reparticiones en cada una de las situaciones antes propuestas. buscando su fracion equivalente multiplicando por 2 3 4 5 etc, despues entre la cantidad que nos indicaba

Ilustración 6.23

Hoja de trabajo 3

Las actividades de sesiones anteriores estuvieron enfocadas en reconocer fracciones equivalentes por medio de múltiplos. En esta hoja de trabajo las actividades propuestas buscaban ampliar la noción de equivalencia. Aquí la intención fue que los estudiantes reconocieran otras formas de comparar las fracciones y argumentaran si pueden ser o no equivalentes aun cuando a primera vista sus numeradores y denominadores no sean múltiplos entre sí.

Para empezar esta sesión se preguntó a los estudiantes si 2/4 y 5/10 eran equivalentes, y que explicaran su repuesta. Al principio los estudiantes respondieron que no, porque no había un número que multiplicado por dos resultara 5. Después se les pidió colorear en los discos de acetato 2/4 y 5/10 y comparar si eran o no equivalentes. Cuando realizaron esta consigna los estudiantes se pudieron percatar de que en realidad eran fracciones equivalentes a pesar de no ser múltiplos. Después de observar esto se les pidió explicar por qué, aunque no eran múltiplos, sí eran fracciones equivalentes. Los estudiantes explicaron que eran equivalentes porque ambos eran la mitad. Cuando ellos explicaron esto se les propusieron tareas análogas y se les pedía analizar si eran o no equivalentes. Aunque la primera actividad se comentó de forma grupal, y la consigna de colorear la hicieron todos en ese momento, en los trabajos de algunos equipos se pudo observar que en las actividades posteriores ellos tienen muy fijo que las fracciones equivalentes sólo se pueden obtener por múltiplos y en sus explicaciones (no muy claras) argumentan que multiplicaban para saber si eran equivalentes pero no muestran cómo llegaron a sus conclusiones (***Ilustración 6.24***).


1. Las fracciones $\frac{2}{4}$ y $\frac{5}{10}$ ¿con equivalentes? ¿Cómo puedes saber si son equivalentes o no?

No por que no son equivalentes uno del otro

Describe la estrategia que emplearías para saber si las fracciones antes propuestas son o no equivalentes. Multiplicando

2. Las fracciones $\frac{4}{6}$ y $\frac{6}{9}$ ¿con equivalentes? ¿Cómo puedes saber si son equivalentes o no?

son equivalentes puedes saberlo multiplicando

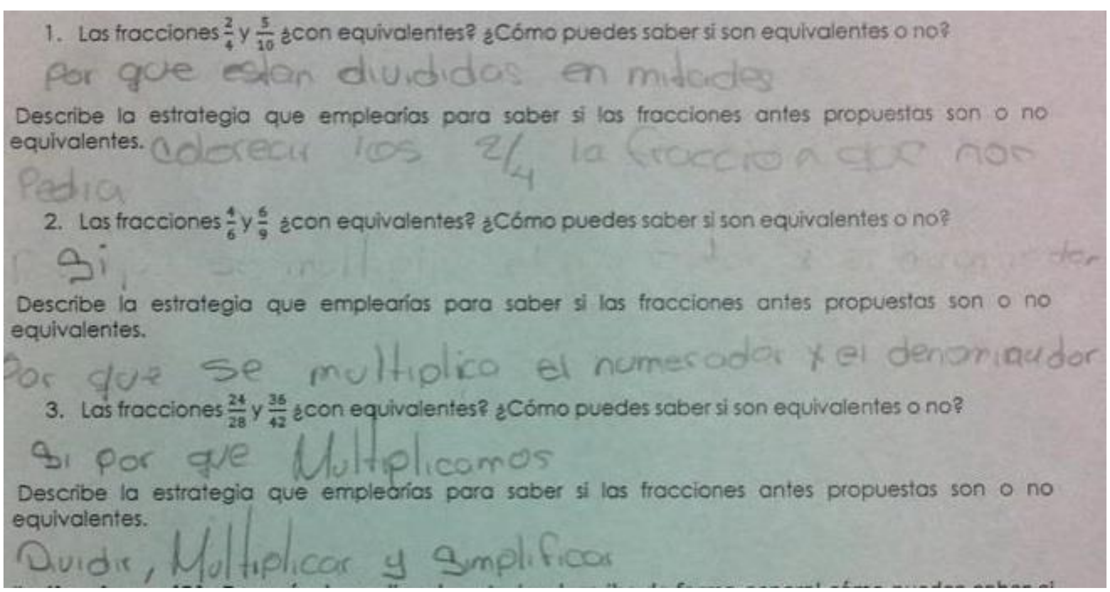
Describe la estrategia que emplearías para saber si las fracciones antes propuestas son o no equivalentes. solo lo multiplicamos x2 despues x3 despues x4 y asi sucesivamente

3. Las fracciones $\frac{24}{28}$ y $\frac{36}{42}$ ¿con equivalentes? ¿Cómo puedes saber si son equivalentes o no?

si dividirlos entre varios multiplos

Describe la estrategia que emplearías para saber si las fracciones antes propuestas son o no equivalentes.

Dividir la fraccion entre diferentes multiplos


1. Las fracciones $\frac{2}{4}$ y $\frac{5}{10}$ ¿con equivalentes? ¿Cómo puedes saber si son equivalentes o no?

Por que estan divididos en mitades

Describe la estrategia que emplearías para saber si las fracciones antes propuestas son o no equivalentes. coloreamos los 2/4 la fraccion que nos pedia

2. Las fracciones $\frac{4}{6}$ y $\frac{6}{9}$ ¿con equivalentes? ¿Cómo puedes saber si son equivalentes o no?

Si

Describe la estrategia que emplearías para saber si las fracciones antes propuestas son o no equivalentes.

Por que se multiplico el numerador y el denominador

3. Las fracciones $\frac{24}{28}$ y $\frac{36}{42}$ ¿con equivalentes? ¿Cómo puedes saber si son equivalentes o no?

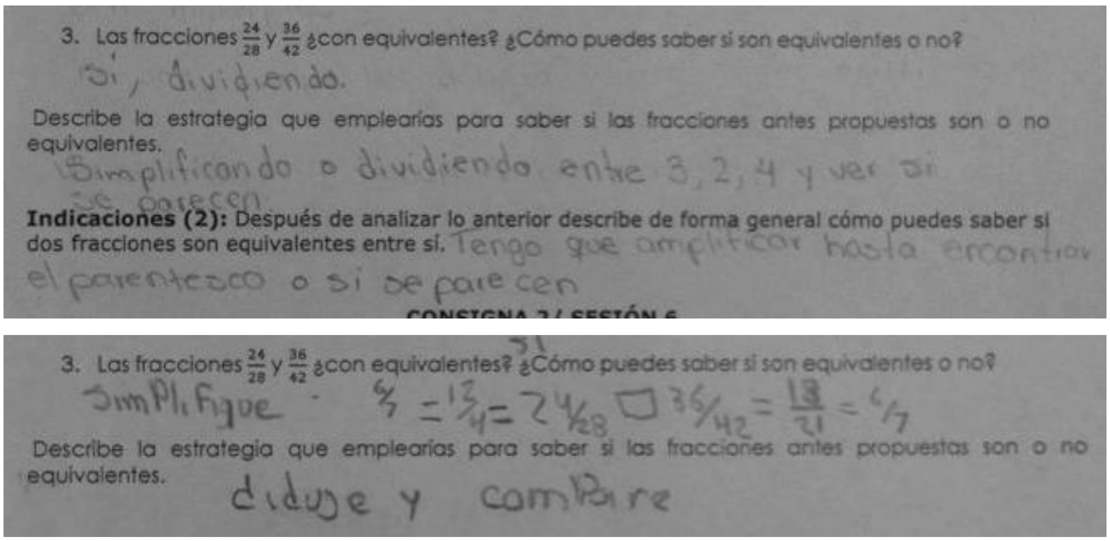
Si por que Multiplicamos

Describe la estrategia que emplearías para saber si las fracciones antes propuestas son o no equivalentes.

Dvidir, Multiplicar y simplificar

Ilustración 6.24

La mayoría de los equipos logró identificar que otra estrategia para comparar si dos fracciones son equivalentes entre sí es simplificar ambas a su expresión más simple y comparar si coinciden (***Ilustración 6.25***). Finalmente los estudiantes debían describir de forma general su estrategia, la mayoría de los estudiantes describió su estrategia de forma clara. (***Ilustración 6.26***).



3. Las fracciones $\frac{24}{28}$ y $\frac{36}{42}$ ¿con equivalentes? ¿Cómo puedes saber si son equivalentes o no?

Si, dividiendo.

Describe la estrategia que emplearías para saber si las fracciones antes propuestas son o no equivalentes.

Simplificando o dividiendo entre 3, 2, 4 y ver si se parecen.

Indicaciones (2): Después de analizar lo anterior describe de forma general cómo puedes saber si dos fracciones son equivalentes entre sí. Tengo que amplificar hasta encontrar el parentezco o si se parecen

CONSIGNA 2/ SESIÓN 6

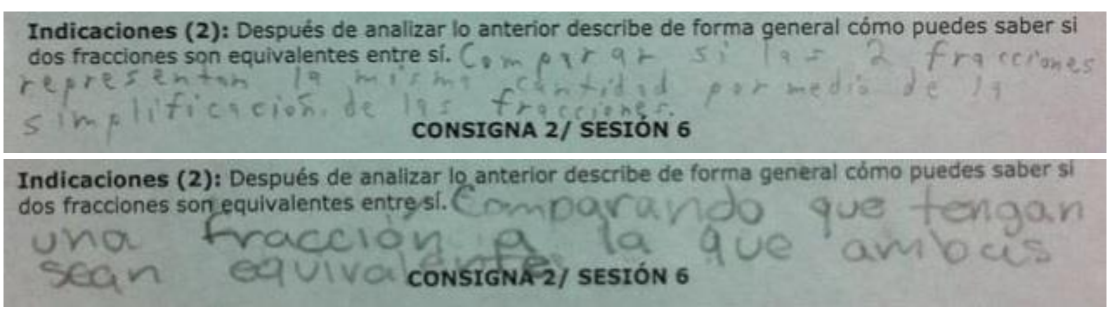
3. Las fracciones $\frac{24}{28}$ y $\frac{36}{42}$ ¿con equivalentes? ¿Cómo puedes saber si son equivalentes o no?

Simplifique $\frac{6}{7} = \frac{12}{14} = \frac{24}{28}$ $\frac{36}{42} = \frac{18}{21} = \frac{6}{7}$

Describe la estrategia que emplearías para saber si las fracciones antes propuestas son o no equivalentes.

diduje y compare

Ilustración 6.25



Indicaciones (2): Después de analizar lo anterior describe de forma general cómo puedes saber si dos fracciones son equivalentes entre sí. Comparar si las 2 fracciones representan la misma cantidad por medio de la simplificación de las fracciones.

CONSIGNA 2/ SESIÓN 6

Indicaciones (2): Después de analizar lo anterior describe de forma general cómo puedes saber si dos fracciones son equivalentes entre sí. Comparando que tengan una fracción a la que ambas sean equivalentes

CONSIGNA 2/ SESIÓN 6

Ilustración 6.26

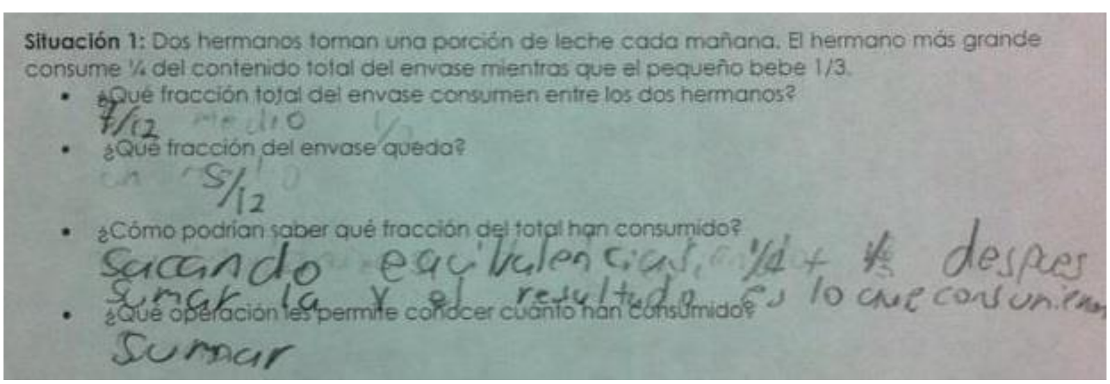
Hoja de trabajo 4

Con las actividades de esta sesión se pretendió que los estudiantes, una vez comprendida la noción de equivalencia y después de haber desarrollado estrategias para hallar fracciones equivalentes a otras, fueran capaces de utilizarlas para resolver situaciones que impliquen operar con fracciones.

La primera actividad propuesta era una tabla, donde los estudiantes debían escribir fracciones equivalentes a, por ejemplo, ½ y ¼ y reconocer en cuáles de ellas coincidían. Todos los estudiantes lograron completar la tarea con éxito, el único error que se encontró fue que, por ejemplo, en el caso de ½ y ¼ al obtener los múltiplos y encontrar la fracción en que ambas coinciden, no se dieron cuenta que coincidían en cuartos, la mayoría de los equipos empezó por octavos. Esta observación se les hizo al exponer sus respuestas en plenaria y no tuvieron dificultades para comprenderlo.

La tabla tenía la finalidad de servir como apoyo para resolver las siguientes actividades. En ellas se planteaba una situación problema asociada con la operatividad de las fracciones y se esperaba que los estudiantes pudieran resolverla empleando las equivalencias aportadas por la tabla.

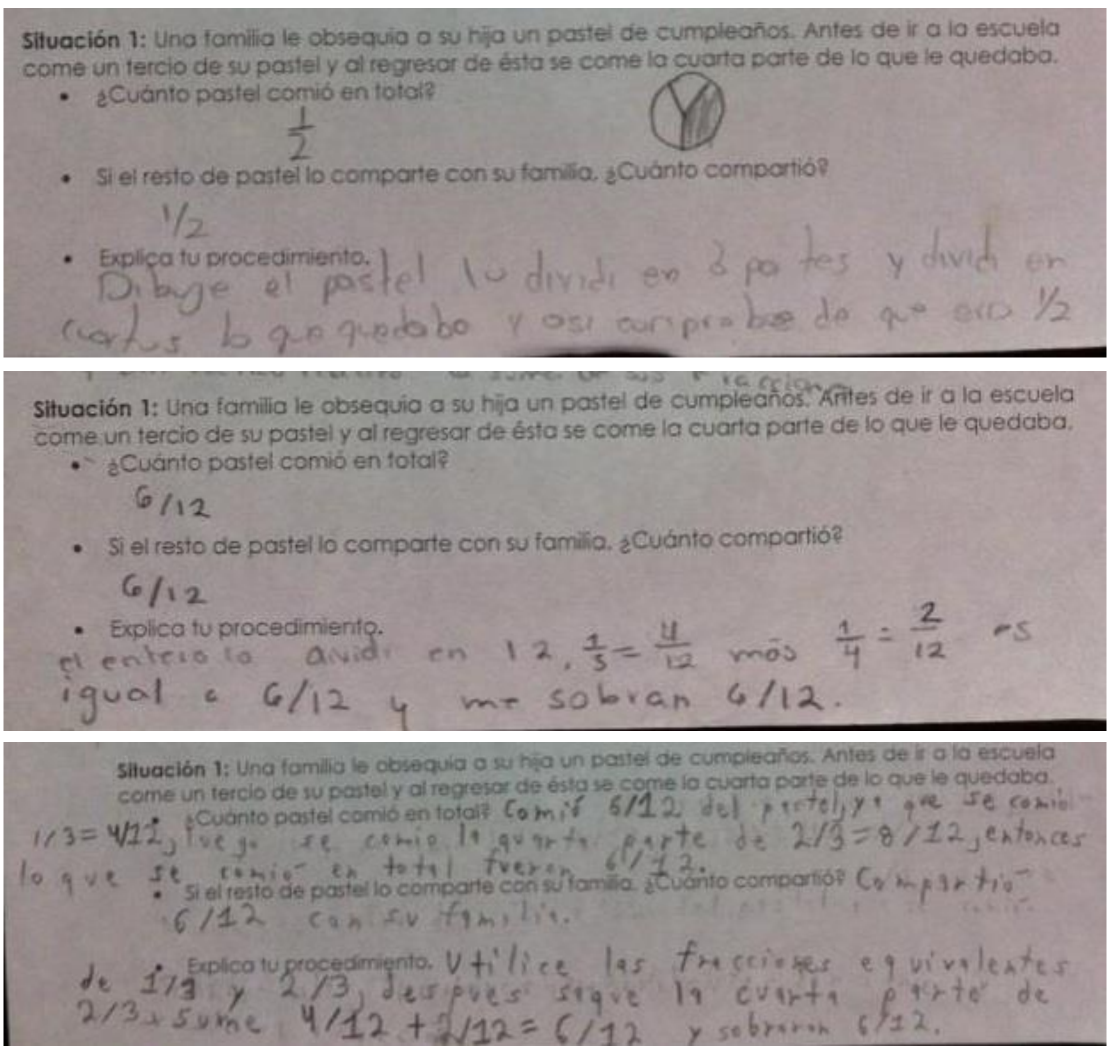
La primera situación propuesta implicaba una suma de fracciones, ocho equipos resolvieron el problema utilizando equivalencias, los tres equipos restantes dieron la respuesta correcta pero no hicieron evidente su procedimiento y sus explicaciones no fueron del todo claras (***Ilustración 6.27***).


Situación 1: Dos hermanos toman una porción de leche cada mañana. El hermano más grande consume ¼ del contenido total del envase mientras que el pequeño bebe 1/3.

- ¿Qué fracción total del envase consumen entre los dos hermanos?
  7/12
- ¿Qué fracción del envase queda?
  5/12
- ¿Cómo podrían saber qué fracción del total han consumido?
  Sacando equivalencias 1/4 + 1/3 despues sumarla y el resultado es lo que consumimos
- ¿Qué operación les permite conocer cuánto han consumido?
  Sumar

Ilustración 6.27

La segunda situación propuesta implicaba obtener una fracción de otra fracción, es decir; multiplicar dos fracciones, una suma y una resta. Dado que en la unidad didáctica no se trabaja con algoritmos de operaciones o reglas sintácticas para operar con fracciones los alumnos podían resolverlas por medio de equivalencias. Cuatro equipos no lograron dar la respuesta correcta debido a que no identificaron que debían obtener una fracción de otra fracción y redujeron la solución a una suma y resta. Los demás equipos lograron dar la respuesta correcta y explicar sus razonamientos mediante diagramas de equivalencia o comparaciones (***Ilustración 6.28***).


Situación 1: Una familia le obsequia a su hija un pastel de cumpleaños. Antes de ir a la escuela come un tercio de su pastel y al regresar de ésta se come la cuarta parte de lo que le quedaba.

- ¿Cuánto pastel comió en total?

$\frac{1}{2}$

- Si el resto de pastel lo comparte con su familia, ¿Cuánto compartió?

1/2

- Explica tu procedimiento.

Dibuje el pastel lo dividi en 3 partes y dividi en cuartos lo que quedaba y asi compruebe de que era 1/2

Situación 1: Una familia le obsequia a su hija un pastel de cumpleaños. Antes de ir a la escuela come un tercio de su pastel y al regresar de ésta se come la cuarta parte de lo que le quedaba.

- ¿Cuánto pastel comió en total?

6/12

- Si el resto de pastel lo comparte con su familia, ¿Cuánto compartió?

6/12

- Explica tu procedimiento.

el entero lo dividi en 12, $\frac{1}{3} = \frac{4}{12}$ más $\frac{1}{4} = \frac{2}{12}$ es igual a 6/12 y me sobran 6/12.

Situación 1: Una familia le obsequia a su hija un pastel de cumpleaños. Antes de ir a la escuela come un tercio de su pastel y al regresar de ésta se come la cuarta parte de lo que le quedaba.

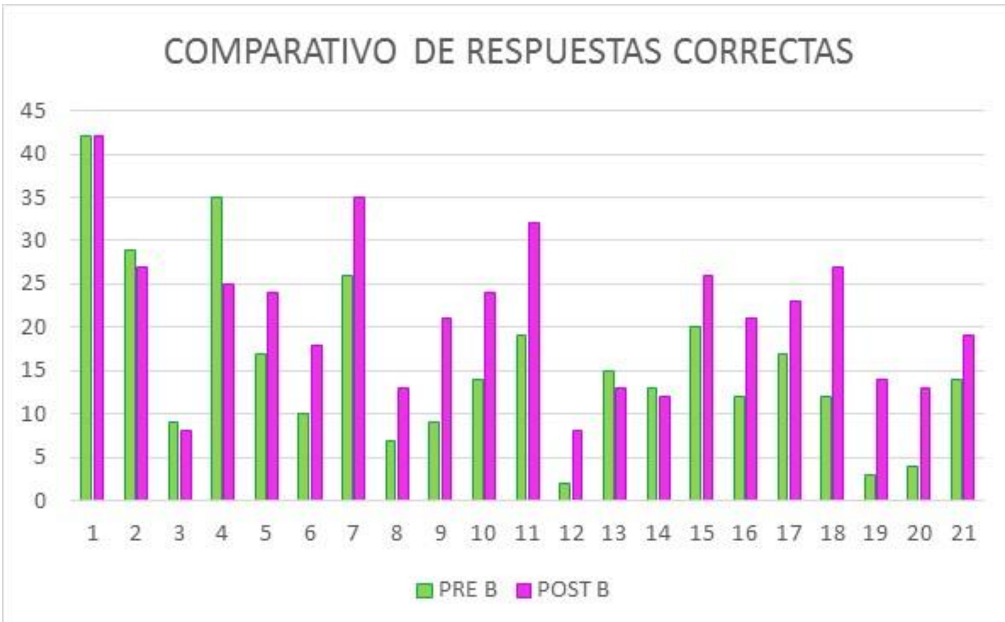
- ¿Cuánto pastel comió en total? Comió 6/12 del pastel, ya que se comió 1/3 = 4/12, luego se comio la cuarta parte de 2/3 = 8/12, entonces lo que se comio en total fueron 6/12.
- Si el resto de pastel lo comparte con su familia, ¿Cuánto compartió? Compartio 6/12 con su familia.
- Explica tu procedimiento. Utilice las fracciones equivalentes de 1/3 y 2/3, despues saque la cuarta parte de 2/3 y sume 4/12 + 2/12 = 6/12 y sobraron 6/12.

Ilustración 6.28

CAPÍTULO IX

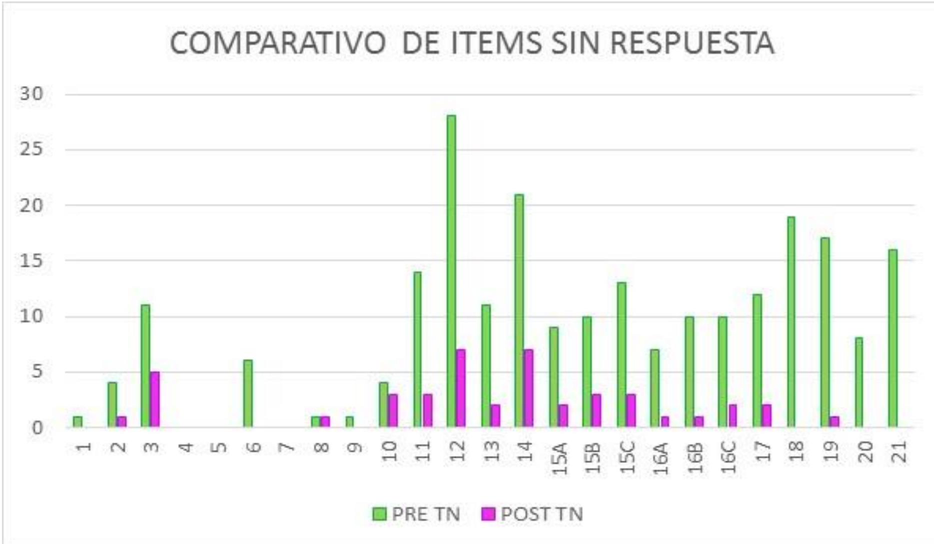
ANALISIS DE RESULTADOS DEL POST-TEST

La clasificación de las respuestas para el análisis del post-test, de la misma forma que se hizo con el pre-test, se realizó considerando cuatro tipos de respuesta; incorrectas, incompletas, sin contestar y correctas. Las gráficas que se exhiben a continuación tienen la intención de mostrar el avance más significativo que se obtuvo en el post-test en comparación con el pre-test.



Gráfica 1

La **gráfica 1** muestra un avance importante en las respuestas correctas y a pesar de que algunos estudiantes no lograron responder correctamente a todos los ítems muestran un poco más de confianza para responder lo que puede observarse en la **gráfica 2** ya que el número de ítems sin contestar en el pre-test se reduce considerablemente en el post-test. Algunos de los estudiantes cuyas respuestas se encontraban en esta clasificación pasaron a la clasificación de respuestas parciales, esto evidencia que se logró un nivel de comprensión mayor con respecto al pre-test, aunque no fue el desempeño deseable, los alumnos están avanzando en ese proceso.



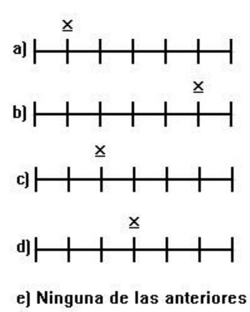
Gráfica 2

Como se mencionó en el diseño de los instrumentos, se utilizó la clasificación de Hasemann para describir el tipo de ítems, el nivel de exigencia y el significado de fracción que se necesita para resolver exitosamente cada ítem. En los ítems que reflejaron avance se muestra un comparativo entre lo que un estudiante hizo en el pre-test y lo que logra hacer en el post-test.

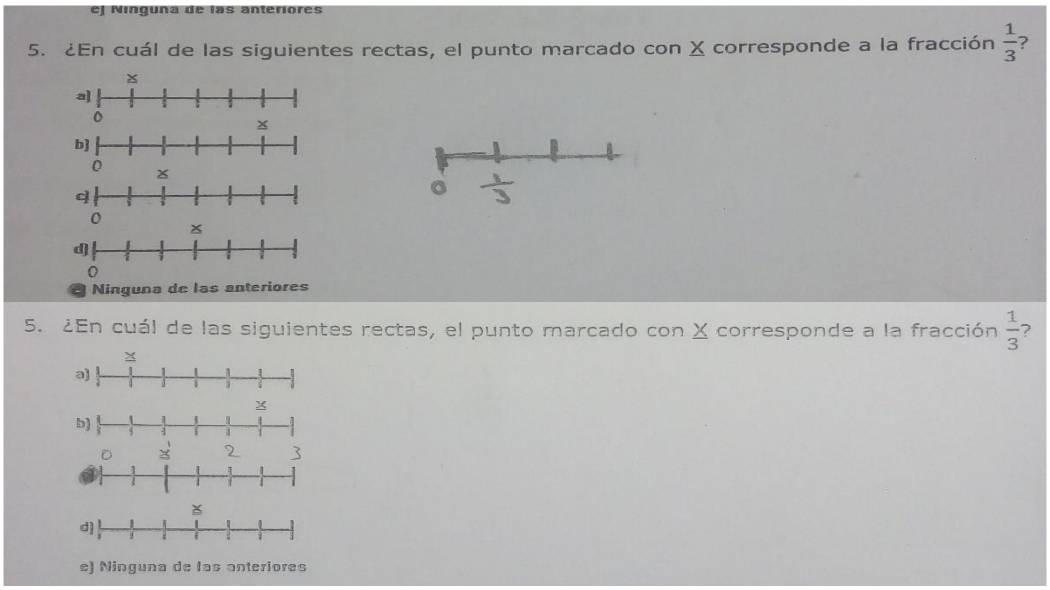
ÍTEMS EN LOS QUE HUBO AVANCE

<u>Ítem 5</u>

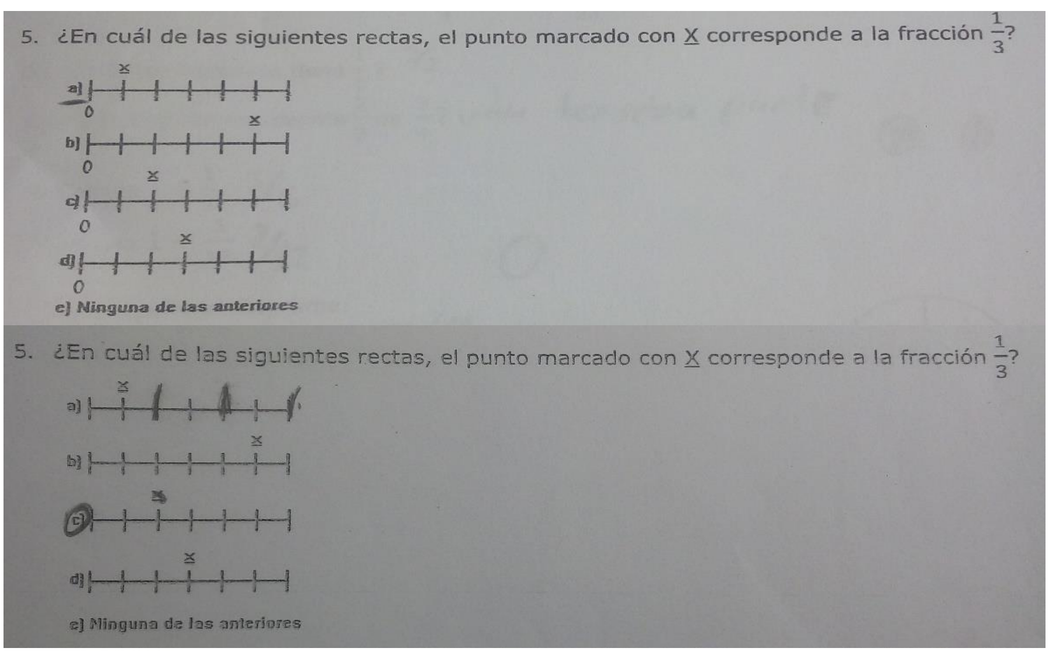
5. ¿En cuál de las siguientes rectas, el punto marcado con <u>X</u> corresponde a la fracción $\frac{1}{3}$?



En este ítem el significado que se aborda es el de equivalencias. Si se hace una comparación con el ítem 7 que es una situación análoga, se puede observar que para los alumnos es más fácil y familiar trabajar con figuras fraccionadas que con la recta numérica. En dicho ítem el porcentaje de respuestas correctas es mucho más alto tanto en el pre-test como en el post-test ya que se obtuvieron 60% y 83% respectivamente. No así en este ítem que, aunque hubo un ligero avance, el porcentaje de respuestas correctas fue de 39% y 57% respectivamente.



Comparativo estudiante 1



Comparativo estudiante 2

Ítem 6

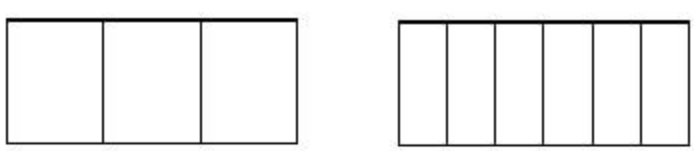
6. De las siguientes fracciones agrupa las que representan lo mismo, es decir, son equivalentes.

$$\frac{12}{16}, \quad \frac{2}{9}, \quad \frac{6}{8}, \quad \frac{3}{9}, \quad \frac{2}{6}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{3}{10}, \quad \frac{5}{10}$$

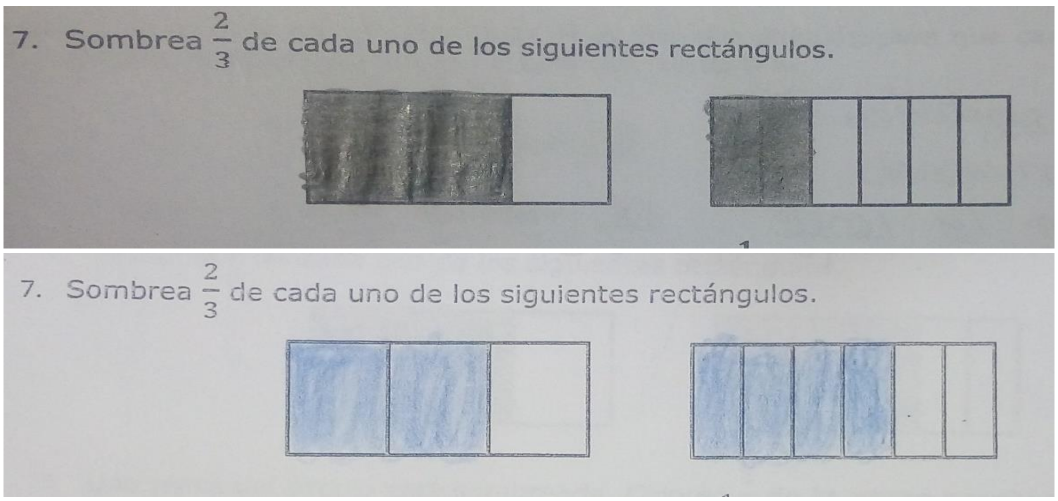
En este ítem el significado que se aborda es el de equivalencias de forma simbólica (representación numérica), en él se pidió a los estudiantes relacionar fracciones con sus equivalentes. En los resultados del pre-test los estudiantes que respondieron correctamente a este ítem sólo relacionaron las fracciones equivalentes que se obtenían por múltiplos, en cambio en las respuestas del post-test algunos alumnos lograron relacionar también por medio de simplificaciones. Aquí hubo un avance con respecto del pre-test del 12% en las respuestas correctas. Sin embargo es importante mencionar que cinco de los seis estudiantes que en el pre-test dejaron sin contestar dicho ítem, contestaron correctamente en forma parcial, es decir, lograron encontrar algunos pares de equivalencias.

Ítem 7

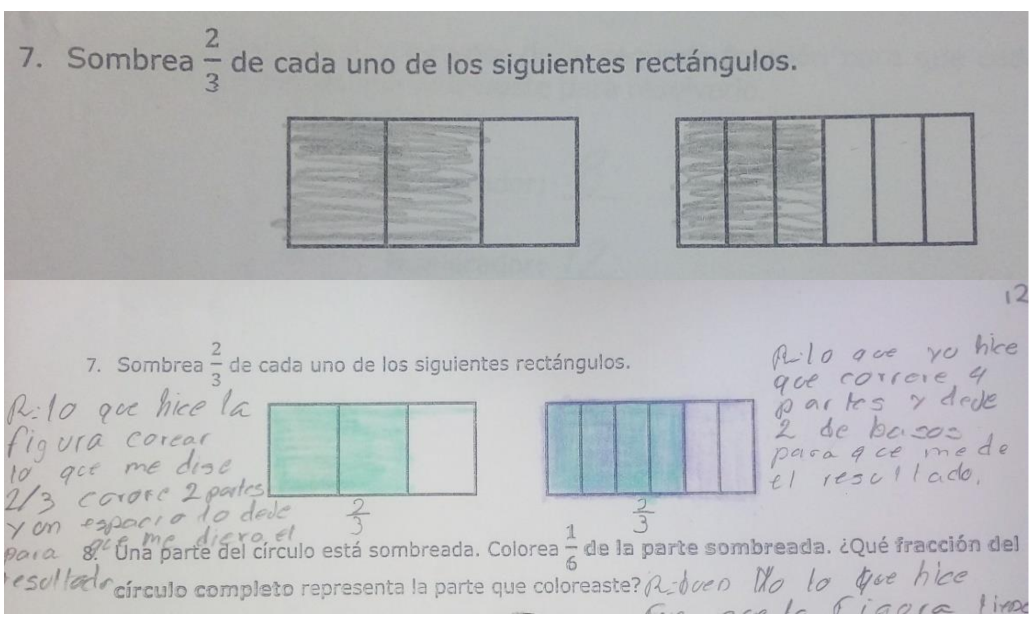
7. Sombrea $\frac{2}{3}$ de cada uno de los siguientes rectángulos. **(a_1, b_1)**



El ítem siete también trata de equivalencias, pero en este caso se pedía hallar equivalencias de forma gráfica (mediante la representación de un todo continuo). En tal ítem hubo un avance de 60% a 83% en las respuestas correctas. De los 15 estudiantes que dieron una respuesta incompleta en el pre-test, 12 completaron el ítem exitosamente en el post-test, esto es, en el pre-test solamente lograron sombrear la fracción 2/3 cuando la representación gráfica estaba fraccionada en tercios, sin embargo en el post-test lograron sombrear la fracción 2/3 aun cuando la representación gráfica estaba fraccionada en sextos; es decir debían hallar una equivalencia de 2/3 en sextos. Además, uno de los estudiantes que respondió incorrectamente a este ítem en el pre-test logró sombrear 2/3 correctamente en el post-test; esto es, pasó de una respuesta incorrecta a una respuesta incompleta.



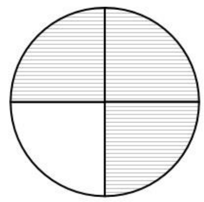
Comparativo estudiante 1



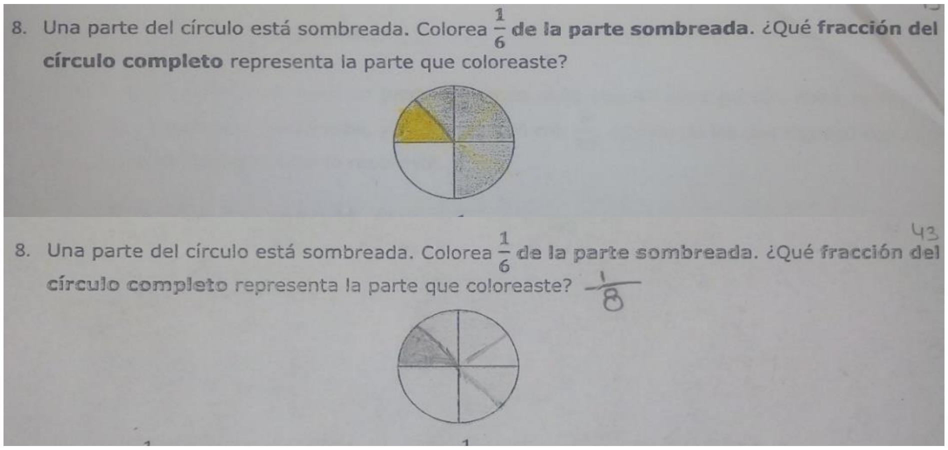
Comparativo estudiante 2

Ítem 8

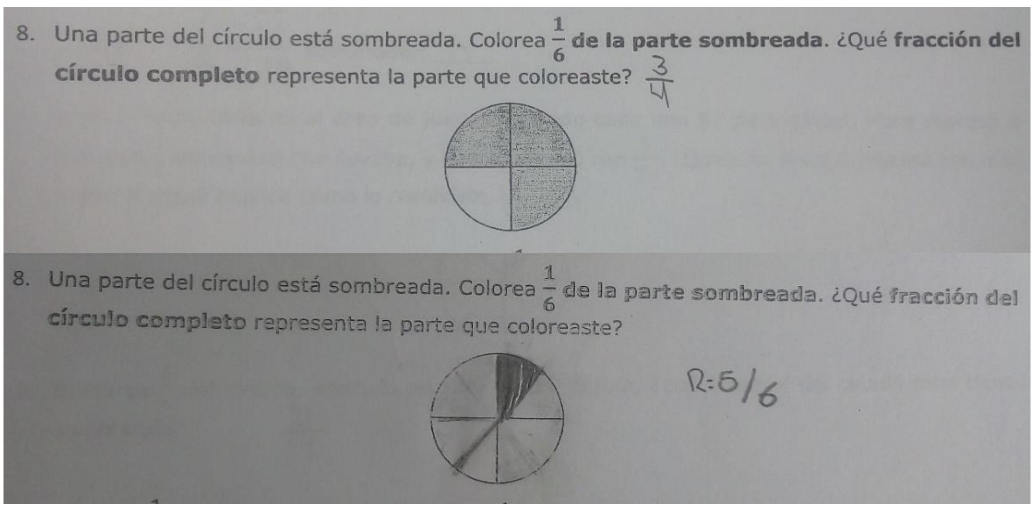
8. Una parte del círculo está sombreada. Colorea $\frac{1}{6}$ **de la parte sombreada**. ¿Qué **fracción del círculo completo** representa la parte que coloreaste? **(a_4, b_1, e_1)**



En el ítem ocho el grado de dificultad es mayor que en los anteriores debido a que implica representar una fracción de forma gráfica, también se debe encontrar una fracción de otra fracción por lo que es necesario realizar una multiplicación o establecer equivalencias y finalmente se pide expresar el resultado de forma simbólica. Los resultados en este ítem evidencian una mejor comprensión de los estudiantes con respecto a la noción de equivalencia. En él se tuvo un avance del 50% con respecto a las respuestas correctas. Además de los 18 estudiantes que dieron una respuesta incompleta en el pre-test, 8 lograron completar el ítem correctamente en el post-test, esto significa que además de sombrear la parte indicada fueron capaces de expresar la respuesta simbólicamente. De los 17 estudiantes que contestaron en el pre-test incorrectamente el ítem, 8 lograron sombrear la fracción indicada aunque no expresaron de forma simbólica la respuesta; lo que significa que pasaron de una respuesta incorrecta a una respuesta parcial o incompleta.



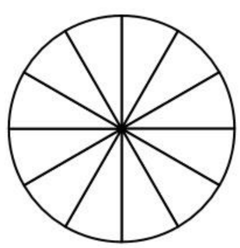
Comparativo estudiante 1



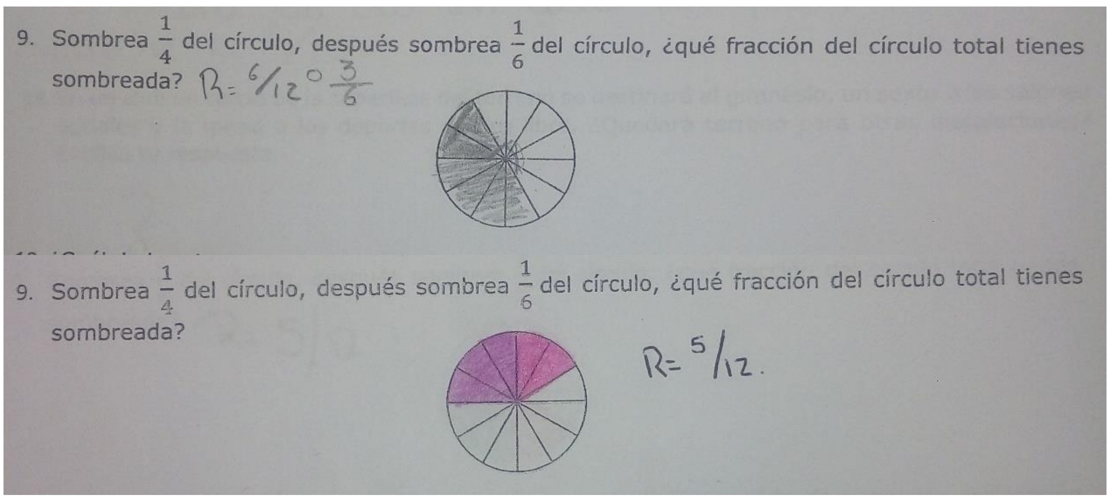
Comparativo estudiante 2

Ítem 9

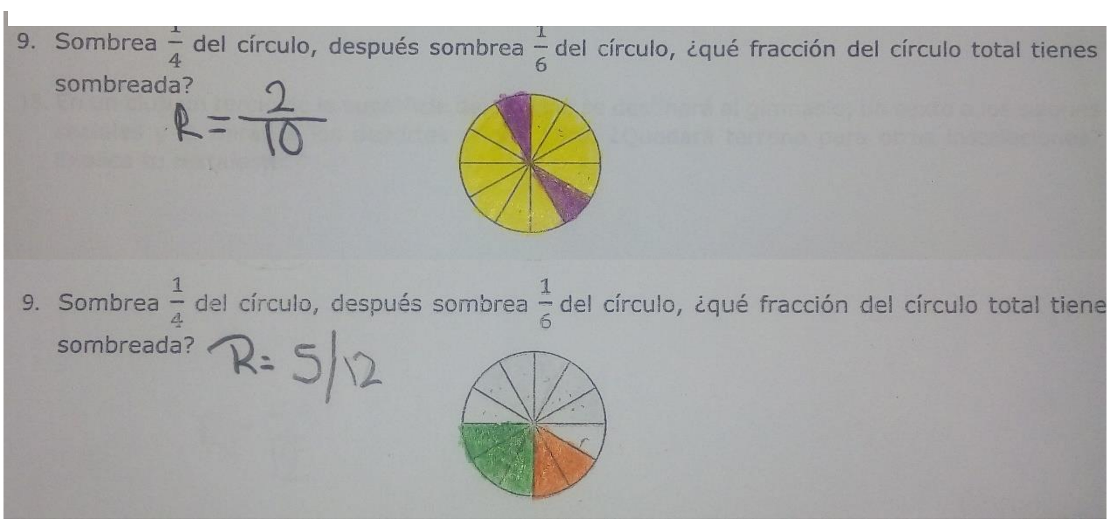
9. Sombrea $\frac{1}{4}$ del círculo, después sombrea $\frac{1}{6}$ del círculo, ¿qué fracción del círculo total tienes sombreada? **(a_3, b_1, d_1)**



El ítem nueve también tiene un nivel de exigencia alto debido a que en él se requiere conocer y utilizar la representación gráfica de las fracciones, determinar en ella equivalencias, además implica operar con fracciones y expresar de forma simbólica el resultado de dicha operación. En este ítem se pasó de 9 a 21 respuestas correctas, es decir del 20% se avanzó a un 50% de respuestas correctas. La mayoría de los estudiantes evolucionó al siguiente nivel de éxito, es decir; si en el pre-test dieron una respuesta incorrecta en el post-test avanzaron a dar una respuesta incompleta o bien, de dar una respuesta incompleta pasaron a dar una respuesta correcta.



Comparativo estudiante 1



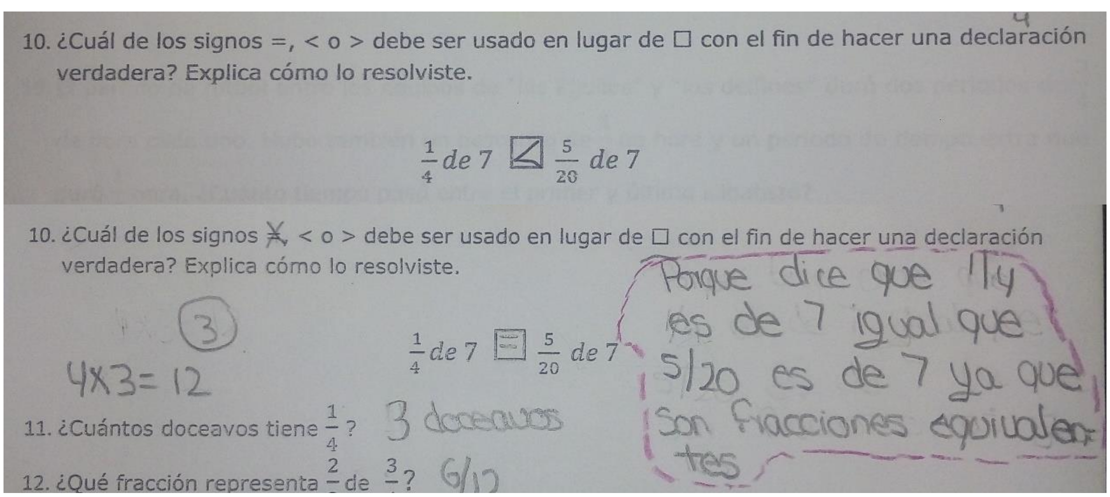
Comparativo estudiante 2

Ítem 10

10. ¿Cuál de los signos =, < o > debe ser usado en lugar de □ con el fin de hacer una declaración verdadera? Explica cómo lo resolviste. **$(\mathbf{a_2}, \mathbf{b_2}, \mathbf{c_1})$**

$$\frac{1}{4}\,de\ 7\ \square\ \frac{5}{20}\ de\ 7$$

En este ítem se pedía comparar dos fracciones de un mismo entero, las fracciones son equivalentes. En él de 32% de respuestas correctas obtenidas en el pre-test, se avanzó al 57%, esto es, de un total de 25 respuestas incorrectas en el pre-test 10 estudiantes lograron responder exitosamente al ítem en el post-test. Además de este avance cuantitativo se obtuvo un gran avance en cuanto a la capacidad de argumentación de los estudiantes, ya que en ambos instrumentos se solicitó explicar su respuesta y de sólo tres estudiantes que lo hicieron en el pre-test, 13 lo realizaron correctamente en el post-test, explicando que ambas fracciones son equivalentes y evidenciando su razonamiento.

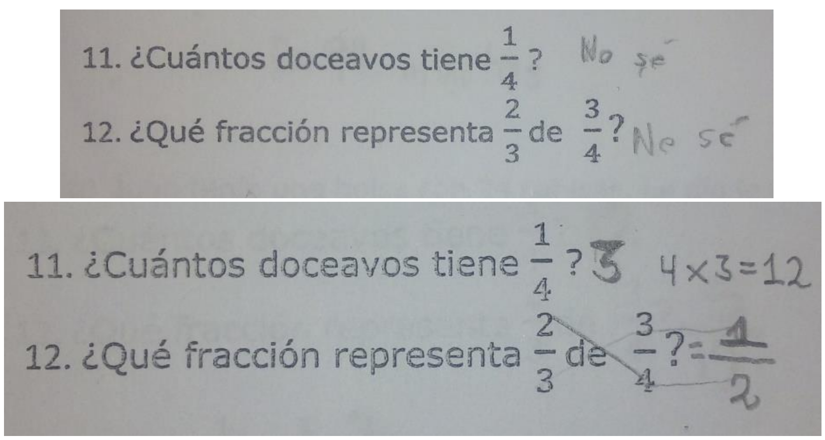


Comparativo estudiante 1

Ítem 11

11. ¿Cuántos doceavos tiene $\frac{1}{4}$?

El ítem 11 preguntaba cuántos doceavos tiene un cuarto. En el pre-test 10 estudiantes contestaron incorrectamente, 14 no respondieron el ítem y sólo 19 respondieron correctamente. . La dificultad del ítem se basa en que los estudiantes no están acostumbrados a comparar fracciones de esta forma, la mayoría emplea la multiplicación para hallar equivalencias pero no reflexionan el significado de dicho procedimiento; ¿cómo una fracción puede fraccionarse en más partes y ser representada por otras fracciones más pequeñas? En el post-test únicamente 7 estudiantes respondieron incorrectamente, 3 estudiantes dejaron sin respuesta dicho ítem y 32 contestaron correctamente, la mayoría utilizando fracciones equivalentes (***Comparativo estudiante 1***).


11. ¿Cuántos doceavos tiene $\frac{1}{4}$? No se
12. ¿Qué fracción representa $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$? No se
11. ¿Cuántos doceavos tiene $\frac{1}{4}$? 3 $4 \times 3 = 12$
12. ¿Qué fracción representa $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$? $= \frac{1}{2}$

Comparativo estudiante 1

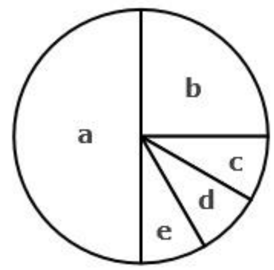
Ítem 12

12. ¿Qué fracción representa $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$?

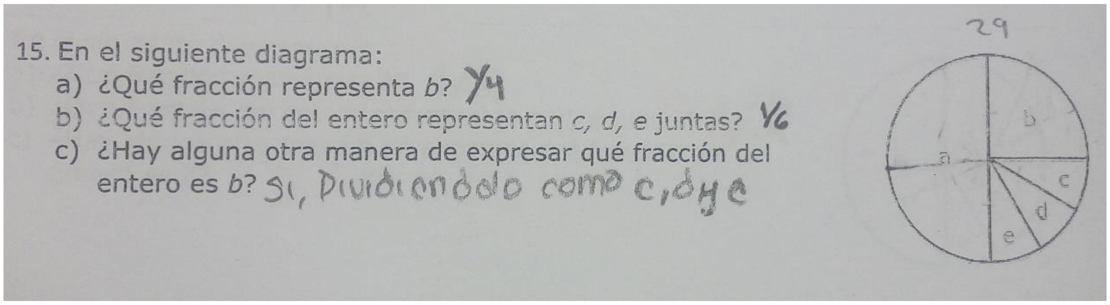
En el ítem doce pareciera que no hay un avance importante con respecto a las respuestas correctas ya que de 2 respuestas correctas en el pre-test se avanza a 8 en el post-test. Sin embargo en el pre-test, 28 estudiantes dejaron sin contestar dicho ítem, en cambio en el post-test solamente 7 lo dejaron sin respuesta. Esto puede mostrar que, por una parte los estudiantes tienen más confianza para tratar de resolver situaciones que implican trabajar con fracciones, aun cuando no lograron dar una respuesta exitosa, los estudiantes tratan de resolver.

<u>Ítem 15</u>

15. En el siguiente diagrama:
    d) ¿Qué fracción representa *b*?
    e) ¿Qué fracción del entero representan *c, d, e* juntas?
    f) ¿Hay alguna otra manera de expresar qué fracción del entero es *b*?

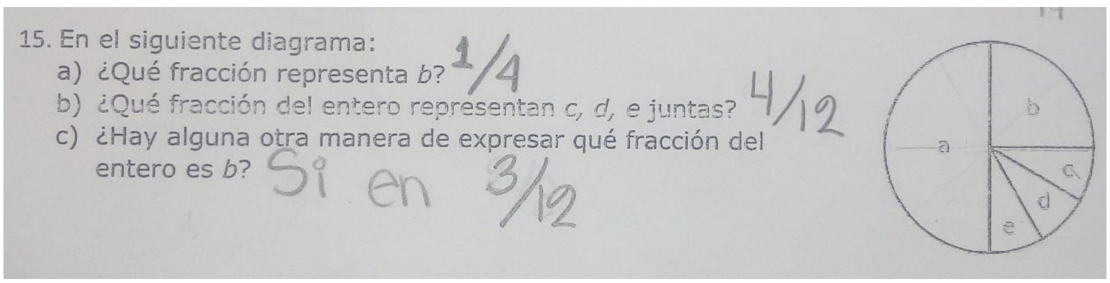


El ítem 15 está dividido en tres incisos, en él se pide observar una representación gráfica que está fraccionada de diferentes formas y responder a cada inciso. En el inciso *a* se pide indicar qué fracción representa la parte indicada con la letra b, que corresponde a ¼. En él 76% de los estudiantes contestaron correctamente. El inciso *b* pregunta la fracción del entero que está señalada con las letras c, d, e, juntas. En este inciso la fracción representada también es ¼ pero deben reconocerla mediante fracciones equivalentes. En este inciso no hubo avance cuantitativo ya que, igual que en el pre-test, el 40% contestó correctamente. Sin embargo, el inciso *c* que pregunta si existe otra forma de representar la parte señalada con la letra b muestra que si existe una comprensión del inciso anterior (el b), algunos estudiantes que contestaron incorrectamente al inciso *b* contestaron en el inciso *c* que podrían representarlo juntando c, d y e. Es decir respondían el inciso anterior (***Estudiante 1***) Otros estudiantes respondieron que 3/12 que es justamente la parte que representan las letras c, d y e juntas (***Estudiante 2***). Parece que la dificultad del inciso *b* es tener varias representaciones combinadas en un mismo diagrama (cuartos, medios, doceavos), y aunque pueden reconocer la equivalencia de forma simbólica, no pudieron reconocerla en la representación gráfica (diagrama). Otras respuestas al inciso *c* fueron fracciones equivalentes halladas por múltiplos. En total el inciso *c* tuvo 59% de respuestas correctas, mientras que en el pre-test sólo obtuvo el 33%.


29

15. En el siguiente diagrama:
a) ¿Qué fracción representa *b*? 1/4
b) ¿Qué fracción del entero representan *c, d, e* juntas? 1/6
c) ¿Hay alguna otra manera de expresar qué fracción del entero es *b*? Si, Dividiendolo como c,d y e

Estudiante 1


15. En el siguiente diagrama:
a) ¿Qué fracción representa *b*? 1/4
b) ¿Qué fracción del entero representan *c, d, e* juntas? 4/12
c) ¿Hay alguna otra manera de expresar qué fracción del entero es *b*? Si en 3/12

Estudiante 2

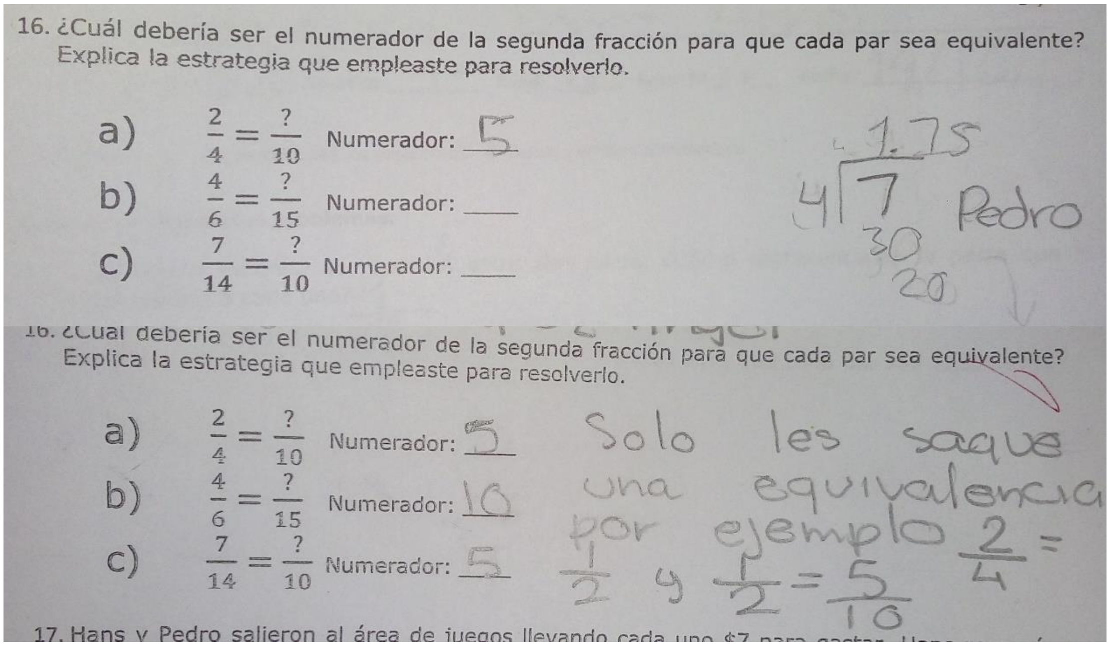
Ítem 16

16. ¿Cuál debería ser el numerador de la segunda fracción para que cada par sea equivalente? Explica la estrategia que empleaste para resolverlo.

d) $\frac{2}{4} = \frac{?}{10}$ Numerador: ____

e) $\frac{4}{6} = \frac{?}{15}$ Numerador: ____

f) $\frac{7}{14} = \frac{?}{10}$ Numerador: ____


16. ¿Cuál debería ser el numerador de la segunda fracción para que cada par sea equivalente? Explica la estrategia que empleaste para resolverlo.

a) $\frac{2}{4} = \frac{?}{10}$ Numerador: 5

b) $\frac{4}{6} = \frac{?}{15}$ Numerador: ____

c) $\frac{7}{14} = \frac{?}{10}$ Numerador: ____

1.75
4 | 7 Pedro
30
20

16. ¿Cuál debería ser el numerador de la segunda fracción para que cada par sea equivalente? Explica la estrategia que empleaste para resolverlo.

a) $\frac{2}{4} = \frac{?}{10}$ Numerador: 5

b) $\frac{4}{6} = \frac{?}{15}$ Numerador: 10

c) $\frac{7}{14} = \frac{?}{10}$ Numerador: 5

Solo les saque una equivalencia por ejemplo $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ y $\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$

17. Hans y Pedro salieron al área de juegos llevando cada uno $7 para

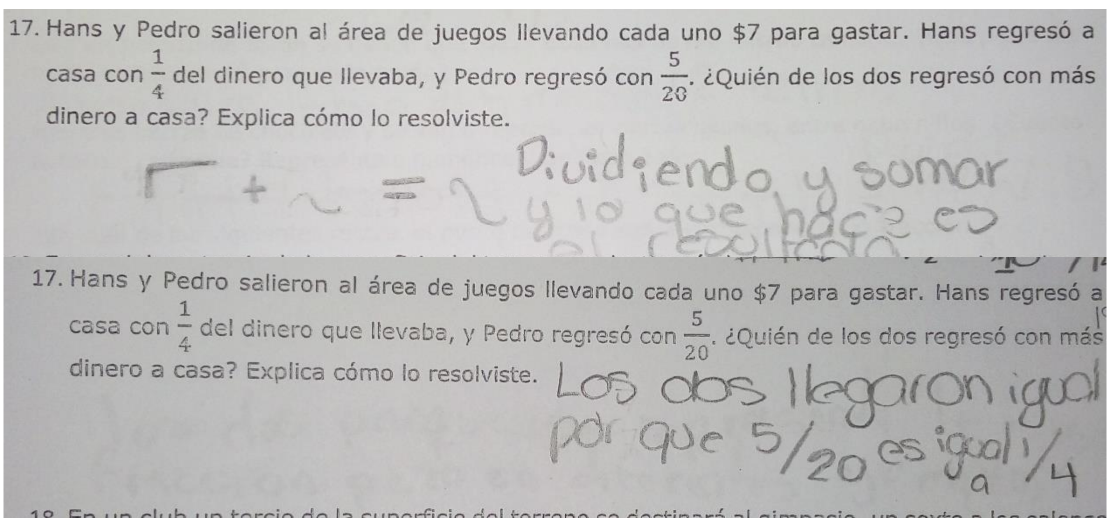
Comparativo estudiante 1

El ítem 16 igual que el ítem 15 está dividido en tres incisos, los cuales trataban de identificar si los alumnos podían reconocer fracciones equivalentes cuyos denominadores no son múltiplos entre sí e identificar las estrategias que emplean para hacerlo. Los resultados del post-test muestran un avance cuantitativo de aproximadamente 20% en cada inciso ya que se obtuvieron 61%, 30% y 52% de respuestas correctas, contra 39%, 16% y 32% que se obtuvieron el en pre-test. También es evidente un avance de forma cualitativa puesto que en el pre-test sólo 6 estudiantes trataron de explicar sus respuestas (aunque incorrectas) y en el post-test 18 estudiantes dieron explicación a sus respuestas. Sus explicaciones son variadas ya que unos trabajan más a nivel concreto o por medio de diagramas y otros a nivel simbólico; por medio de fracciones equivalentes. Empero todos trataron de argumentar de forma más clara y reflexiva.

Ítem 17

17. Hans y Pedro salieron al área de juegos llevando cada uno \$7 para gastar. Hans regresó a casa con $\frac{1}{4}$ del dinero que llevaba, y Pedro regresó con $\frac{5}{20}$. ¿Quién de los dos regresó con más dinero a casa? Explica cómo lo resolviste.

Este ítem es semejante al 10 ya que la tarea esencial es comparar dos fracciones del mismo entero. Sin embargo, aquí la comparación se plantea mediante una situación. De acuerdo con los resultados obtenidos en el post-test el nivel de argumentación en este ítem es más alto que en el pre-test. Ya que de los 42 estudiantes 23 argumentaron correctamente el ítem. Además de que el número de respuestas correctas se incrementa de 39% a 54%.



17. Hans y Pedro salieron al área de juegos llevando cada uno \$7 para gastar. Hans regresó a casa con $\frac{1}{4}$ del dinero que llevaba, y Pedro regresó con $\frac{5}{20}$. ¿Quién de los dos regresó con más dinero a casa? Explica cómo lo resolviste.

Dividiendo y somar
y lo que hace es

17. Hans y Pedro salieron al área de juegos llevando cada uno \$7 para gastar. Hans regresó a casa con $\frac{1}{4}$ del dinero que llevaba, y Pedro regresó con $\frac{5}{20}$. ¿Quién de los dos regresó con más dinero a casa? Explica cómo lo resolviste.

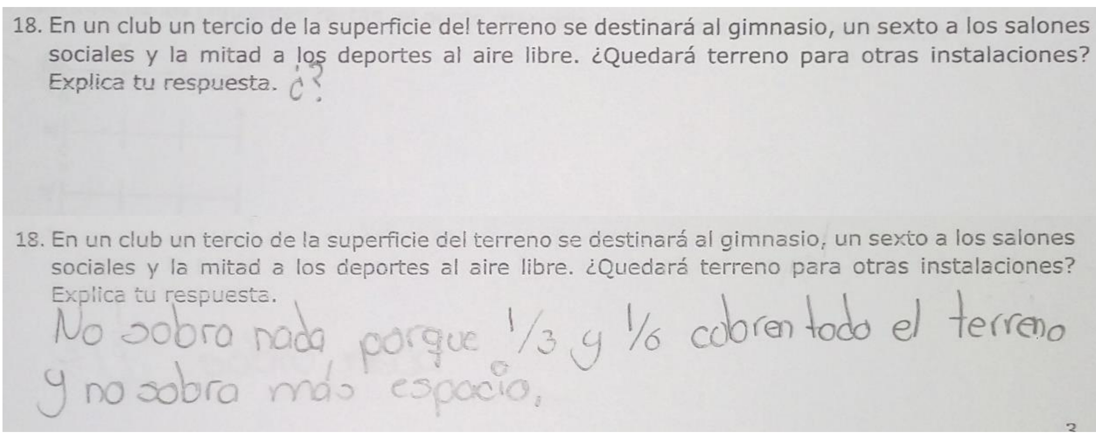
Los dos llegaron igual
por que 5/20 es igual a 1/4

Comparativo estudiante 1

Ítem 18

18. En un club un tercio de la superficie del terreno se destinará al gimnasio, un sexto a los salones sociales y la mitad a los deportes al aire libre. ¿Quedará terreno para otras instalaciones? Explica tu respuesta. **(a_3, b_3, d_2)**

El ítem 18 plantea un problema que se resuelve por medio de una suma de fracciones. En el pre-test 11 estudiantes respondieron incorrectamente a dicho ítem pero lo más preocupante es el hecho de que casi el 50% del total de estudiantes no lo contestó. A diferencia del post-test el número de estudiantes que responde correctamente incrementó de 12 a 27 y en oposición al pre-test ningún estudiante dejo de resolver el problema. Aun cuando las respuestas fueron incorrectas los alumnos trataron de explicar su razonamiento.


18. En un club un tercio de la superficie del terreno se destinará al gimnasio, un sexto a los salones sociales y la mitad a los deportes al aire libre. ¿Quedará terreno para otras instalaciones? Explica tu respuesta. ¿?

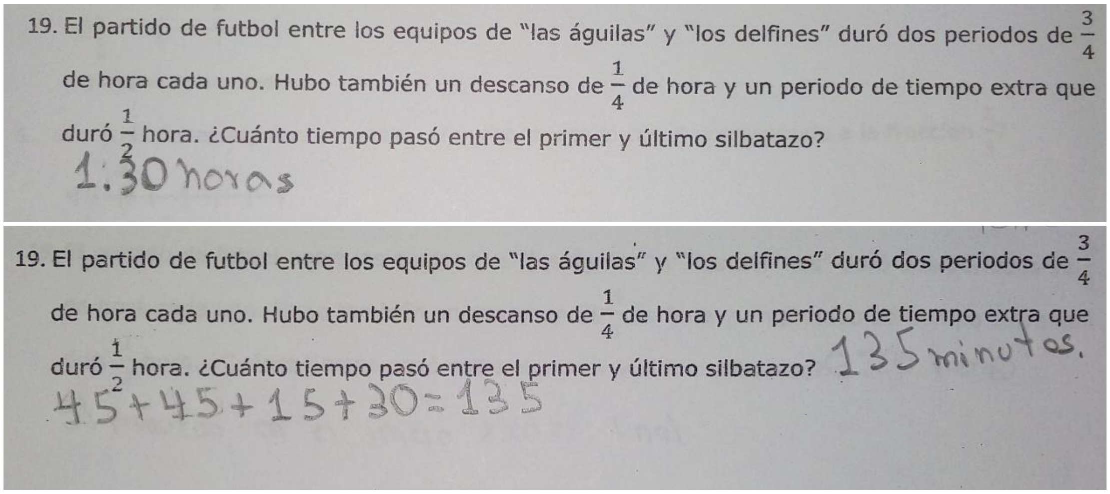
18. En un club un tercio de la superficie del terreno se destinará al gimnasio, un sexto a los salones sociales y la mitad a los deportes al aire libre. ¿Quedará terreno para otras instalaciones? Explica tu respuesta.
No sobro nada porque 1/3 y 1/6 cobren todo el terreno y no sobra más espacio,

Comparativo estudiante 1

Ítem 19

19. El partido de futbol entre los equipos de "las águilas" y "los delfines" duró dos periodos de $\frac{3}{4}$ de hora cada uno. Hubo también un descanso de $\frac{1}{4}$ de hora y un periodo de tiempo extra que duró $\frac{1}{2}$ hora. ¿Cuánto tiempo pasó entre el primer y último silbatazo?

De tres estudiantes que respondieron correctamente a este ítem en el pre-test catorce lo resolvieron correctamente en el post-test. Aunque solo tres estudiantes respondieron al ítem con fracciones, la mayoría de los que convirtieron a minutos hicieron uso de la fracción como operador de forma correcta. Sus respuestas se argumentaron precisa y claramente. En el comparativo del estudiante 2 se puede observar que su razonamiento es correcto, sin embargo tiene un error en la suma.



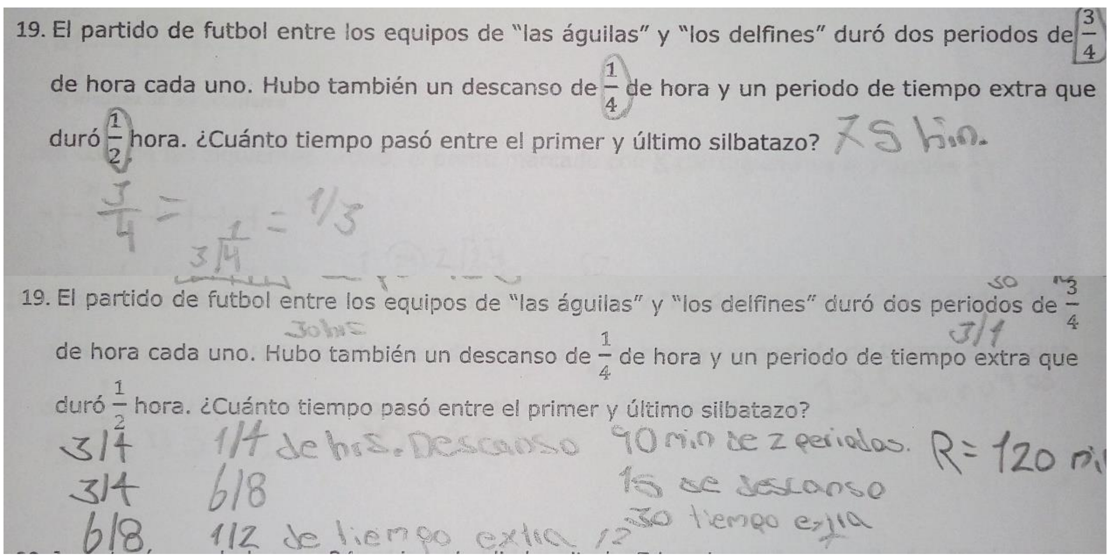
19. El partido de futbol entre los equipos de "las águilas" y "los delfines" duró dos periodos de $\frac{3}{4}$ de hora cada uno. Hubo también un descanso de $\frac{1}{4}$ de hora y un periodo de tiempo extra que duró $\frac{1}{2}$ hora. ¿Cuánto tiempo pasó entre el primer y último silbatazo?

1.30 horas

19. El partido de futbol entre los equipos de "las águilas" y "los delfines" duró dos periodos de $\frac{3}{4}$ de hora cada uno. Hubo también un descanso de $\frac{1}{4}$ de hora y un periodo de tiempo extra que duró $\frac{1}{2}$ hora. ¿Cuánto tiempo pasó entre el primer y último silbatazo? 135 minutos.

45+45+15+30=135

Comparativo estudiante 1



19. El partido de futbol entre los equipos de "las águilas" y "los delfines" duró dos periodos de $\boxed{\frac{3}{4}}$ de hora cada uno. Hubo también un descanso de $\frac{1}{4}$ de hora y un periodo de tiempo extra que duró $\frac{1}{2}$ hora. ¿Cuánto tiempo pasó entre el primer y último silbatazo? 75 min.

$\frac{3}{4} = \frac{1}{3|4} = 1/3$

19. El partido de futbol entre los equipos de "las águilas" y "los delfines" duró dos periodos de $\frac{3}{4}$ de hora cada uno. Hubo también un descanso de $\frac{1}{4}$ de hora y un periodo de tiempo extra que duró $\frac{1}{2}$ hora. ¿Cuánto tiempo pasó entre el primer y último silbatazo?

3/4 1/4 de hrs. Descanso 90 min de 2 periodos. R= 120 mi

3/4 6/8 15 de descanso

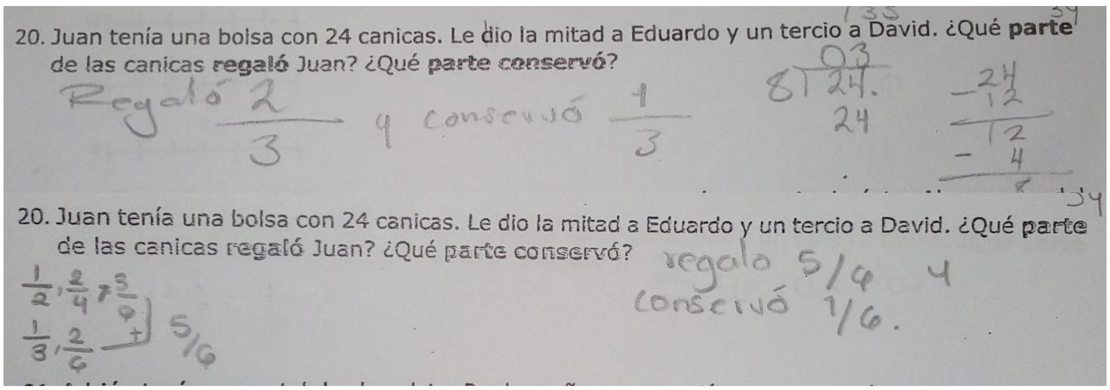
6/8 1/2 de tiempo extra 30 tiempo extra

Comparativo estudiante 2

Ítem 20

20. Juan tenía una bolsa con 24 canicas. Le dio la mitad a Eduardo y un tercio a David. ¿Qué **parte** de las canicas **regaló** Juan? ¿Qué **parte** **conservó**?

Del mismo modo que sucede con el ítem 19, los alumnos hicieron uso de la fracción como operador, sí establecen la relación entre la fracción y el número de canicas que corresponde a esta, sin embargo sus respuestas las dieron en número de canicas y no en fracciones (ya que la pregunta es ¿qué parte…?) como se esperaría que respondieran. Aquí se incrementan las respuestas correctas de 9% a 30%. Además de que todos los estudiantes argumentaron sus respuestas.

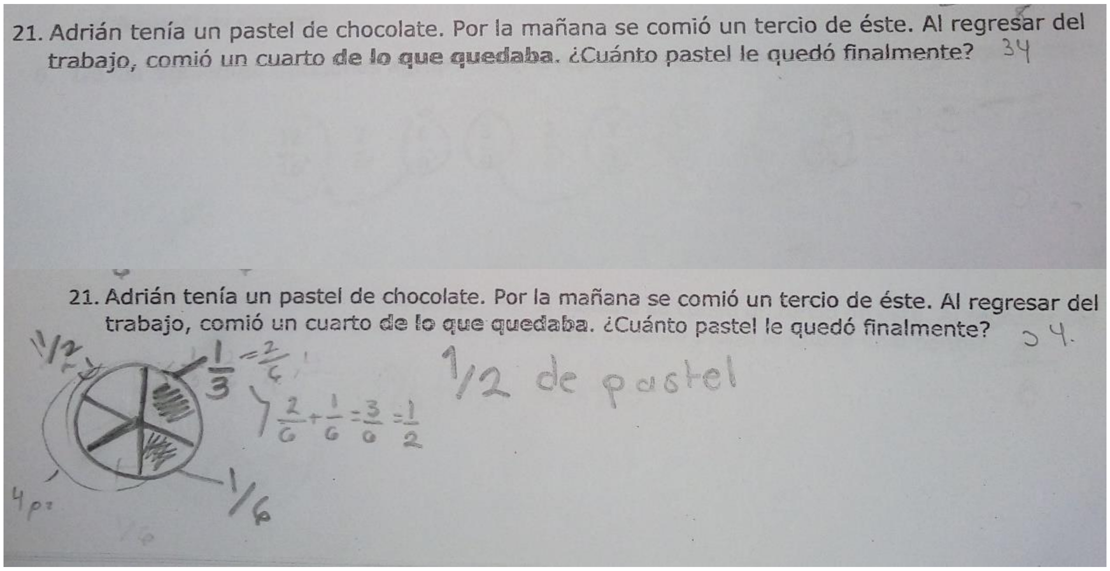


Comparativo estudiante 1

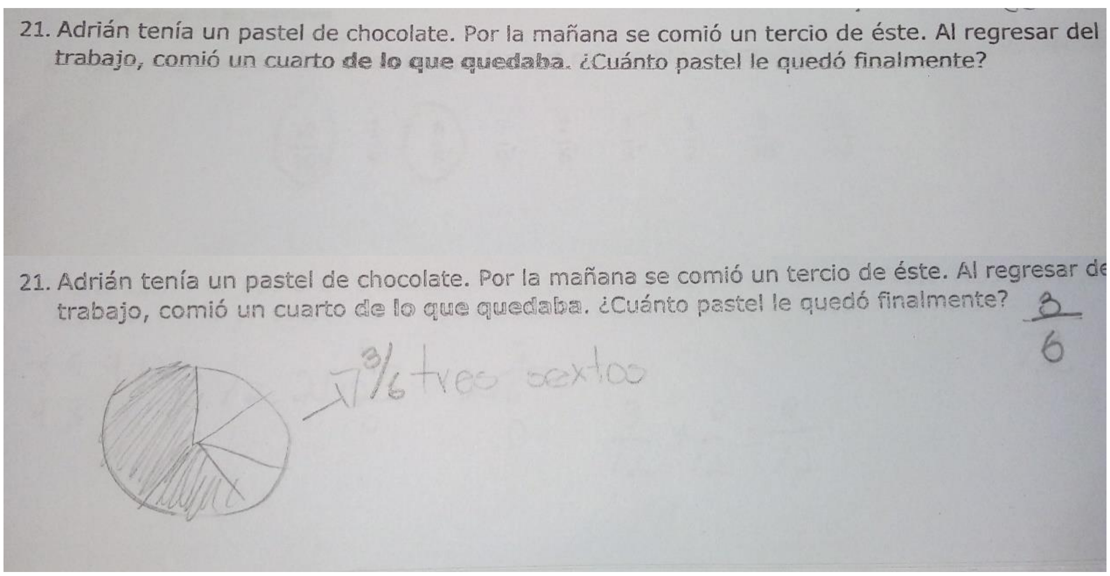
<u>Ítem 21</u>

21. Adrián tenía un pastel de chocolate. Por la mañana se comió un tercio de éste. Al regresar del trabajo, comió un cuarto **de lo que quedaba**. ¿Cuánto pastel le quedó finalmente?

En este ítem hubo un ligero incremento de respuestas correctas, porque de 14 estudiantes que acertaron en el pre-test, 19 lo hicieron en el post-test. Sin embargo si es evidente que este tipo de problema les resultó más complejo a los estudiantes ya que en él las explicaciones se hicieron más de forma gráfica que de forma escrita. Aunque los estudiantes comprenden el ítem y pueden dar respuesta no explicaron con palabras su razonamiento, en cambio hicieron una representación gráfica para expresarlo.



Comparativo estudiante 1



Comparativo estudiante 2

ÍTEMS EN LOS QUE NO HUBO AVANCE

<u>Ítem 1</u>

1. Una galleta redonda se repartirá entre dos niños. ¿Cómo representarías la parte que le corresponde a cada uno?

Debido al tipo de tarea que se propone en este ítem no hubo dificultad desde la aplicación del pre-test ya que en este solo un estudiante contestó incorrectamente y el post-test tuvo el 100% de respuestas correctas.

ÍTEMS EN LOS HUBO RETROCESO

Ítem 2

2. Con un pedazo de listón se tienen que hacer ocho moños del mismo tamaño. ¿Qué parte del listón se necesitará para cada moño?

En este ítem 29 alumnos respondieron correctamente en el pre-test, de estos solo 27 contestaron correctamente en el post-test. Esto podría deberse a que algunos estudiantes siguen pensando que se requiere la medida del listón para hacer la repartición. Aún tienen dificultad para comprender la noción de fracción.

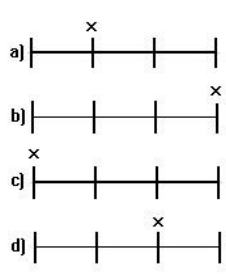
Ítem 3

3. Hay tres barras de chocolate y se van a repartir, en partes iguales, entre ocho niños. ¿Cuánto le toca a cada uno? Represéntalo numérica y gráficamente.

Este ítem siguió representando dificultad para los estudiantes. A pesar de que durante la unidad didáctica se trabajó varias veces con tareas análogas aún les cuesta trabajo ver a la fracción como el resultado de la repartición.

Ítem 4

2. ¿En cuál de las siguientes rectas, el punto marcado con X corresponde a la fracción $\frac{1}{3}$?



e) Ninguna de las anteriores

En este ítem hubo un retroceso de 35 a 25 respuestas correctas. Esto puede deberse a que en primer año de secundaria el contenido de ubicación de fracciones en la recta numérica es uno de los primeros en abordarse y el pre-test se aplicó pocos días después de que los estudiantes revisaron dicho contenido.

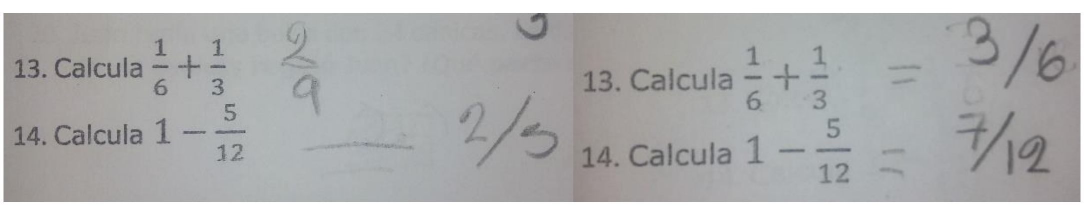
Durante la aplicación de la unidad didáctica no se revisó ninguna tarea de orden de fracciones porque la principal intención fue la comprensión de equivalencias pero quizá esto influyó en los resultados.

Ítem 13 y 14

Es interesante observar que en la resolución de problemas la mayoría de los estudiantes relaciona las fracciones equivalentes para operar (en mayor proporción de forma gráfica que simbólica). No obstante, cuando se trataba de resolver operaciones aisladas como es el caso de los ítems 13 y 14, sólo uno de los estudiantes uso las equivalencias, procedimiento que no utilizó en el pre-test (***Estudiante 1***). En estos ítems no hubo avance y puede deberse a que durante la aplicación de la unidad didáctica no se trabajó con operaciones aisladas, la principal preocupación era que los estudiantes comprendieran la noción de fracción y pudieran utilizarla de forma más reflexiva.

13. Calcula $\frac{1}{6} + \frac{1}{3}$

14. Calcula $1 - \frac{5}{12}$



Estudiante 1

CONCLUSIONES

IMPLICACIONES DIDÁCTICAS

En la presentación de los antecedentes de este trabajo se señala que en la mayoría de los materiales del currículo se trata al número racional como objeto de cálculo. Y a pesar de que en educación básica se dedica un tiempo considerable al tema de fracciones los estudiantes siguen presentando dificultades para trabajar con ellos.

El instrumento de diagnóstico aplicado a alumnos de primero de secundaria aportó información sobre los conocimientos previos que los estudiantes tienen con relación al tema. Estos resultados pusieron en evidencia las dificultades que los estudiantes presentan al trabajar con algunas nociones de fracción, se muestran poco diestros al resolver problemas asociados a la operatividad con fracciones y en general no reflejan una comprensión real del tema.

Con la implementación de la unidad didáctica propuesta se obtuvieron avances importantes en cuanto a la comprensión y argumentación de tareas que implican el uso de las fracciones. Con tales resultados surgieron las siguientes reflexiones y conclusiones.

REFLEXIONES

Es bien sabido que la cuestión de operatividad con fracciones resulta de gran importancia, no solo como un contenido académico sino como un conocimiento para resolver situaciones del contexto real. Es comprensible además, que la mayoría de los materiales del currículo y las estrategias de enseñanza centren sus esfuerzos en el dominio de algoritmos que permita a los estudiantes resolver operaciones exitosamente. Sin embargo, valdría la pena preguntarse si todos estos esfuerzos tienen el efecto que se esperaría en los estudiantes. Si realmente los aspectos a los que se da importancia con respecto al tema de fracciones y la forma de abordar los contenidos ha dado los resultados deseables en los estudiantes.

En mi experiencia como docente, es bastante común encontrarse con que una de las principales preocupaciones de muchos docentes es cubrir en tiempo y forma con un programa. Y en ocasiones, por la premura del tiempo, se pasa demasiado pronto de las actividades concretas a la abstracción, esto impide que los estudiantes construyan paulatinamente el conocimiento y en cambio se ven obligados a memorizar procedimientos que les permitan resolver operaciones de forma inmediata aunque poco reflexiva y con una comprensión parcial o nula de lo que se está haciendo.

Uno de los principales objetivos de diseñar y aplicar esta secuencia fue determinar el impacto que tenía el dominio de la gestión de equivalencias en la resolución de problemas. Después de transitar por la unidad didáctica que en el presente trabajo se describe, los estudiantes superaron algunas de las dificultades que inicialmente mostraban. Su capacidad argumentativa tuvo un avance considerable, además, las respuestas que proporcionan a la mayoría de los ítems son más reflexivas. Gran parte de las tareas relacionadas con equivalencias fueron resueltas exitosamente. En el pre-test pocos estudiantes resuelven los problemas propuestos, no así en el post-test, donde la mayoría de los estudiantes reflejó un progreso. Es interesante observar que después de transitar por la unidad didáctica los estudiantes pudieron resolver situaciones que implicaban alguna operación con fracciones, sin embargo cuando se propusieron operaciones aisladas, los estudiantes no respondieron correctamente. Aquí convendría detenerse a reflexionar sobre lo que se espera que los estudiantes sean capaces de realizar. Si realmente es útil resolver operaciones cuando este conocimiento no se transfiere a la resolución de problemas o es deseable que los estudiantes aprendan y comprendan una estrategia que les permita dar respuesta a problemas que implican operatividad de fracciones aun cuando no hayan mecanizado un algoritmo para ello.

Desde mi perspectiva sería deseable que los estudiantes dominaran los algoritmos de una forma más comprensiva y que esto les permitiera resolver situaciones de operatividad exitosamente. Pero es importante reconocer que todos los alumnos tienen un ritmo de aprendizaje diferente, y que debe permitirse paulatinamente la construcción del conocimiento. La formalización de las ideas matemáticas debe provenir de una práctica reflexiva, de otra manera se limitará la solución de tareas de forma mecánica produciendo *huecos conceptuales*, comprensiones parciales y en consecuencia un rendimiento imperfecto.

Post, Behr y Lesh (1982) hicieron un estudio con niños de cuarto de primaria y explicaron que después de transitar por una instrucción adecuada y por un periodo prolongado los niños desarrollaron un pensamiento adecuado para hacer frente a tareas de orden y equivalencia de fracciones. En el presente trabajo se obtuvo un avance considerable en cuanto a la resolución de problemas, empero no se logró avance en la operatividad de forma aislada. Aunque es razonable porque sólo se trabajaron 9 sesiones con la noción de equivalencia. Para que los estudiantes desarrollen un pensamiento adecuado que les permita resolver operaciones sería muy interesante asociar esta noción con la operatividad en un nuevo trabajo, de tal forma que los alumnos dispongan de nuevas prácticas para reflexionar sobre cómo operar con fracciones y construyan los algoritmos desde su propia experiencia.

También resulta conveniente expresar que gracias a la experiencia vivida en el programa de maestría, mi perspectiva de la didáctica en matemáticas y mi visión de la enseñanza, tuvo un cambio eminente. Es muy frecuente encontrarse con la necesidad docente de buscar *recetas infalibles* que permitan superar las dificultades que se encuentran cotidianamente en el aula. Pero la realidad es que cada generación que pasa por nuestras manos, proviene de una sociedad cambiante, donde las necesidades, intereses, experiencias etc. también siguen ese curso. No hay recetas únicas si consideramos la diversidad de los individuos, de momentos, de aulas y de contexto, donde cada uno tiene su propia particularidad. Lo que para unos podría resultar óptimo con otros no funciona. La investigación es el medio que nos permite reconocer las formas para dirigir en algún sentido los procesos de enseñanza y el aprendizaje de los estudiantes.

CONCLUSIONES FINALES

Los resultados obtenidos en la presente investigación revelan que si existe una incidencia positiva de la unidad didáctica en la resolución de problemas por parte de los estudiantes. Considero que uno de los aspectos trascendentes de la unidad didáctica fue la posibilidad de confrontación y retroalimentación sobre la comprensión que tenían los estudiantes de una tarea ya que tal como lo menciona Pruzzo (2012) la evaluación como custodia del aprendizaje, permite el empleo constructivo del error.

Después de transitar por la intervención didáctica, los estudiantes reflejaron un avance en la mayoría de los ítems, desarrollaron una mejor comprensión sobre la noción de equivalencia y transfirieron este conocimiento para resolver problemas asociados a la operatividad de fracciones. Aunque no lograron establecer las operaciones de manera formal describen un razonamiento adecuado en la solución. Disponen de más formas de exponer sus ideas y por lo tanto consiguieron dar respuestas más reflexivas y argumentadas cuando se les proponen situaciones problemáticas que cuando se les proponen tareas aisladas de la realidad o que exigen un procedimiento mecánico por parte del estudiante.

El trabajo con las equivalencias les permitió resolver los problemas, aun cuando muchos estudiantes no dominan el algoritmo para resolver operaciones este no fue una limitante para enfrentar exitosamente la tarea.

Esta investigación es una propuesta de intervención cuya intención trasciende al dominio de procedimientos mecánicos y apunta a la construcción de conocimientos reflexivamente. Además es una invitación a cambiar las prácticas docentes que se centran en el aprendizaje de reglas que no tienen ningún significado para el estudiante y que pueden provocar, como se menciona líneas previas *huecos conceptuales* y comprensiones parciales, además de la consecuencia ineludible de que al enfrentarse a tareas más complejas los estudiantes muestren un desempeño deficiente.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Acevedo, Y. (2014). Tres significados de fracciones equivalentes en la formación de profesores. En J. C. Arboleda (Ed.), Tomo XVIII de la Colección Pedagogía Iberoamericana. Escenarios de la Educación, la enseñanza y el aprendizaje (pp. 25-33). Madrid: Editorial Redipe.

Charalambous, C. Y. & Pitta-Pantazi, D. (2006). Drawing on a Theoretical Model to Study Students' understandings of fractions. *Educational Studies in Mathematics,* 64, 293-316.

Fandiño, M. (2009). Las fracciones: aspectos conceptuales y didácticos. *Bogotá: Magisterio.*

Freudenthal, H. (1983). Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas. Dordrecht, The Netherlands: D. Reidel.

Hasemann, K. (1981). On difficulties with fractions. *Educational Studies in Mathematics,* 12, 71-87.

Hernández, R., Fernández, C. & Baptista, P. (2003). *Metodología de la investigación.* Chile: McGraw-Hill.

Kamii, C. & Clark, F. (1995). Equivalent Fractions: Their difficulty and Educational Implications. *Journal of Mathematical Behavior,* 14, 365-378.

Kerslake, D. (1986). *Fractions: Children's strategies and errors. A report of the strategies and errors in secondary mathematics project.* Windsor: NFER-Nelson.

Kieren, T. E. (1976). On the mathematical, cognitive and instructional foundations of rational numbers. In R. A. Lesh & D. A. Bradbard (Eds.), *Number and measurement: Papers from a research workshop* (pp. 101-144). Columbus, OH: ERIC Information Analysis Center for Science, Mathematics and Environmental Education.

Nunes, T. & Bryant, P. (1997). Las Matemáticas y su Aplicación: La perspectiva del niño. México: Siglo veintiuno Editores.

Perera, B. & Valdemoros, M. (2009). Enseñanza experimental de las fracciones en cuarto grado. *Educación Matemática*, 21 (1), 29-61.

Post, T., Wachsmuth, I., Behr, M. & Lesh, R. (1984). Order and Equivalence of rational numbers: A Clinical Teaching Experiment. *Journal for Research in Mathematics Education,* 15 (5), 323-341.

Post, T., Behr, M., & Lesh, R. (1982). Interpretations of Rational Number Concepts. In L. Silvey & J. Smart (Eds.), Mathematics for grades 5-9, Yearbook, 59-72. Reston, Virginia: NCTM.

SEP (2011). *Programas de estudio 2011. Guía para el maestro. Educación básica primaria. Sexto grado.* México: SEP.

Schmelkes, C. & Elizondo, N. (2012). *Manual para la presentación de anteproyectos e informes de investigación (tesis).* México: Oxford University Press.

Pruzzo, V. (2012). Las fracciones: ¿problema de aprendizaje o problemas de la enseñanza? *Pilquen-Sección Psicopedagogía, (8), 6.*

Wong, M., & Evans, D. (2007). Students' conceptual understanding of equivalent fractions. In *Mathematics: Essential Research, Essential Practice (Proceedings of the 30th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia)* (Vol. 2, 824-833).

ANEXOS

ANEXO I. PRE-TEST (POST-TEST)

Nombre: ____

Nivel: _______ **Grado:** ____ **Edad:** ____ **Sexo: M**__ **F**__ **Fecha:** ______________

Instrucciones
- Lee atentamente los problemas
- Trabaja en forma individual

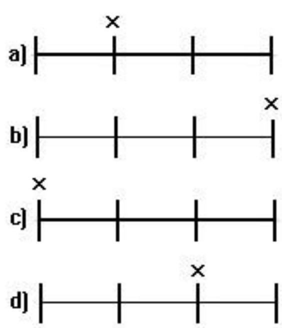
Resuelve los siguientes problemas:

1. Una galleta redonda se repartirá entre dos niños. ¿Cómo representarías la parte que le corresponde a cada uno?

2. Con un pedazo de listón se tienen que hacer ocho moños del mismo tamaño. ¿Qué parte del listón se necesitará para cada moño?

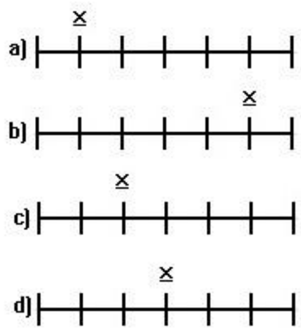
3. Hay tres barras de chocolate y se van a repartir, en partes iguales, entre ocho niños. ¿Cuánto le toca a cada uno? Represéntalo numérica y gráficamente.

4. ¿En cuál de las siguientes rectas, el punto marcado con X corresponde a la fracción $\frac{1}{3}$?



e) Ninguna de las anteriores

5. ¿En cuál de las siguientes rectas, el punto marcado con X corresponde a la fracción $\frac{1}{3}$?



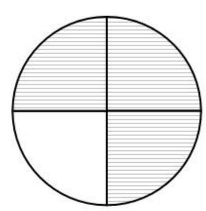
e) Ninguna de las anteriores

6. De las siguientes fracciones agrupa las que representan lo mismo, es decir, son equivalentes.

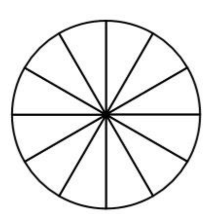
$$\frac{12}{16}, \quad \frac{2}{9}, \quad \frac{6}{8}, \quad \frac{3}{9}, \quad \frac{2}{6}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{3}{10}, \quad \frac{5}{10}$$

7. Sombrea $\frac{2}{3}$ de cada uno de los siguientes rectángulos.

8. Una parte del círculo está sombreada. Colorea $\mathbf{\frac{1}{6}}$ **de la parte sombreada**. ¿Qué **fracción del círculo completo** representa la parte que coloreaste?



9. Sombrea $\frac{1}{4}$ del círculo, después sombrea $\frac{1}{6}$ del círculo, ¿qué fracción del círculo total tienes sombreada?



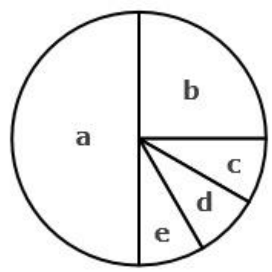
10. ¿Cuál de los signos =, < o > debe ser usado en lugar de ☐ con el fin de hacer una declaración verdadera? Explica cómo lo resolviste.

$$\frac{1}{4}de\ 7\ \square\ \frac{5}{20}\ de\ 7$$

11. ¿Cuántos doceavos tiene $\frac{1}{4}$?
12. ¿Qué fracción representa $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$?

13. Calcula $\frac{1}{6}+\frac{1}{3}$
14. Calcula $1-\frac{5}{12}$

15. En el siguiente diagrama:
    g) ¿Qué fracción representa *b*?
    h) ¿Qué fracción del entero representan *c, d, e* juntas?
    i) ¿Hay alguna otra manera de expresar qué fracción del entero es *b*?



16. ¿Cuál debería ser el numerador de la segunda fracción para que cada par sea equivalente? Explica la estrategia que empleaste para resolverlo.

g) $\frac{2}{4}=\frac{?}{10}$ Numerador: ____

h) $\frac{4}{6}=\frac{?}{15}$ Numerador: ____

i) $\frac{7}{14}=\frac{?}{10}$ Numerador: ____

17. Hans y Pedro salieron al área de juegos llevando cada uno $7 para gastar. Hans regresó a casa con $\frac{1}{4}$ del dinero que llevaba, y Pedro regresó con $\frac{5}{20}$. ¿Quién de los dos regresó con más dinero a casa? Explica cómo lo resolviste.

18. En un club un tercio de la superficie del terreno se destinará al gimnasio, un sexto a los salones sociales y la mitad a los deportes al aire libre. ¿Quedará terreno para otras instalaciones? Explica tu respuesta.

19. El partido de futbol entre los equipos de "las águilas" y "los delfines" duró dos periodos de $\frac{3}{4}$ de hora cada uno. Hubo también un descanso de $\frac{1}{4}$ de hora y un periodo de tiempo extra que duró $\frac{1}{2}$ hora. ¿Cuánto tiempo pasó entre el primer y último silbatazo?

20. Juan tenía una bolsa con 24 canicas. Le dio la mitad a Eduardo y un tercio a David. ¿Qué **parte** de las canicas **regaló** Juan? ¿Qué **parte conservó**?

21. Adrián tenía un pastel de chocolate. Por la mañana se comió un tercio de éste. Al regresar del trabajo, comió un cuarto **de lo que quedaba**. ¿Cuánto pastel le quedó finalmente?

ANEXO II. HOJAS DE TRABAJO DE LA UNIDAD DIDÁCTICA

HOJA DE TRABAJO 1/SECUENCIA NUMERO 1
SESIÓN 1

Nombre: ____

Indicaciones: Saca las piezas de las bolsas y arma los discos de acuerdo con la imagen que tienen impresa. Posteriormente analiza lo que se te pide a continuación y completa la tabla.

Imagen impresa en el disco	¿En cuántas partes está dividido cada disco?	¿Cómo podrían nombrar cada una de las partes?	Numéricamente, ¿cómo se puede representar cada una de las partes?	¿Qué magnitud puede atribuirse a cada figura?

HOJA DE TRABAJO 2/SECUENCIA NUMERO 1
SESIÓN 2

Nombre: ____

Indicaciones: En equipo observen las imágenes impresas en los discos y completen la siguiente tabla. Al finalizar expliquen al reverso qué consideran que significa una fracción.

Imagen representada	Nombre de las partes del disco	Representación de los pedazos (fracción) del disco	Magnitud asociada	Magnitud que representan los pedazos
Listones				1/5 representa: ________ 3/5 representan: ________
Situación Problema:				
León		1/3		1/3 representa: ________ 2/3 representan: ________
Situación Problema:				
Situación Problema:				

HOJA DE TRABAJO 1/SECUENCIA NUMERO 2
SESIÓN 3

Nombre: ____

Indicaciones (1): Integrados en equipo analicen las situaciones propuestas y apoyándose en el material didáctico respondan las siguientes preguntas.

Tomen el discos que tiene las manzanas dibujadas imagina que tienen tres discos de éstos y deseas repartirlos entre cuatro niños. (Voltéenlos de forma que se vea la parte lisa):

¿Cuántos discos debes repartir?	¿En cuántas partes están fraccionadas las manzanas?	¿Entre cuántos niños debes repartir?	¿Cómo podrías hacer para repartir las manzanas entre los cuatro niños?	¿Qué fracción le tocaría a cada niño?

Ahora toman 2 discos con la imagen de la caja de chocolates, esta vez se quieren repartir las dos cajas entre 6 niños:

¿Cuántos discos debes repartir?	¿En cuántas partes están fraccionadas las cajas?	¿Entre cuántos niños debes repartir?	¿Cómo lo repartirías de forma que a cada niño le toque lo mismo?	¿Qué fracción de las cajas de chocolate le tocará a cada niño?

¿Crees que es necesario saber cuántos chocolates tiene la caja para saber qué parte le corresponde a cada niño?, ¿Por qué?

Toma tres discos de los que tienen impreso la imagen de los dulces. Imagina que deseas repartir éstos entre 8 niños:

¿Cuántos discos debes repartir?	¿En cuántas partes está fraccionada la bolsa?	¿Entre cuántos niños debes repartir?	¿Cómo lo repartirías de forma que a cada niño le toque lo mismo?	¿Qué fracción de la bolsa de listón le tocará a cada niño?

¿Crees que es necesario conocer cuántos dulces tiene la bolsa o cuál es el peso para saber qué parte se le debe dar a cada niño? ¿Por qué?

Indicaciones (2): Describe la estrategia que usaste para hacer las reparticiones en cada una de las situaciones antes propuestas.

HOJA DE TRABAJO 2/SECUENCIA NUMERO 2
SESIÓN 4

Nombre: ____

Indicaciones (1): Integrados en equipo analicen las situaciones propuestas y apoyándose en el material didáctico respondan las siguientes preguntas.

Tomen 2 discos de los que tiene la imagen de los listones (Voltéenlos de forma que se vea la parte lisa). Si necesitaras repartir estos listones entre 5 niños:

¿Cuántos discos debes repartir?	¿En cuántas partes están fraccionadas los manzanas?	¿Entre cuántos niños debes repartir?	¿Cómo podrías hacer para repartir las manzanas entre los cuatro niños?	¿Qué fracción le tocaría a cada niño?

Ahora toman 2 discos con la imagen de la caja de chocolates, esta vez se quieren repartir las dos cajas entre 6 niños:

¿Cuántos discos debes repartir?	¿En cuántas partes están fraccionadas las cajas?	¿Entre cuántos niños debes repartir?	¿Cómo lo repartirías de forma que a cada niño le toque lo mismo?	¿Qué fracción de las cajas de chocolate le tocará a cada niño?

¿Crees que es necesario saber cuántos chocolates tiene la caja para saber qué parte le corresponde a cada niño?, ¿Por qué?

Toma tres discos de los que tienen impreso la imagen de los dulces. Imagina que deseas repartir éstos entre 8 niños:

¿Cuántos discos debes repartir?	¿En cuántas partes está fraccionada la bolsa?	¿Entre cuántos niños debes repartir?	¿Cómo lo repartirías de forma que a cada niño le toque lo mismo?	¿Qué fracción de la bolsa de listón le tocará a cada niño?

¿Crees que es necesario conocer cuántos dulces tiene la bolsa o cuál es el peso para saber qué parte se le debe dar a cada niño? ¿Por qué?

Indicaciones (2): Describe la estrategia que usaste para hacer las reparticiones en cada una de las situaciones antes propuestas.

HOJA DE TRABAJO 3/SECUENCIA NUMERO 2
SESIÓN 5

Nombre: ____

Indicaciones (1): Integrados en equipo analicen las situaciones propuestas y apoyándose en el material didáctico respondan las siguientes preguntas.

ACTIVIDAD 1

Tomen el disco que tiene la bolsa de dulces (decimos). Se quiere repartir esta caja entre cinco niños:

¿Cuántos discos debes repartir?	¿En cuántas partes está fraccionada la caja?	¿Entre cuántos niños debes repartir?	¿Cómo podrías hacer para repartir la caja entre los tres niños?	¿Qué fracción le tocaría a cada niño?

Ahora tomen 3 discos con la imagen del trozo de carne, esta vez deben repartirlos entre cuatro niños:

¿Cuántos discos debes repartir?	¿En cuántas partes están fraccionados?	¿Entre cuántos niños debes repartir?	¿Cómo lo repartirías de forma que a cada niño le toque lo mismo?	¿Qué fracción de los trozos de carne le tocará a cada niño?

Si cada disco representa 1 kilogramos de carne, ¿cuánto le tocará a cada niño? Explica tu respuesta.

Toma dos discos de los que tienen impreso la imagen de las uvas (novenos). Si se desea repartir entre tres niños:

¿Cuántos discos debes repartir?	¿En cuántas partes están fraccionados?	¿Entre cuántos niños debes repartir?	¿Cómo lo repartirías de forma que a cada niño le toque lo mismo?	¿Qué fracción de uvas le tocará a cada niño?

Si cada disco representa 2 kilogramos de uvas, ¿cuánto le tocará a cada niño? Explica tu respuesta.

Indicaciones (2): Describe la estrategia que usaste para hacer las reparticiones en cada una de las situaciones antes propuestas.

HOJA DE TRABAJO 1/SECUENCIA NUMERO 3
SESIÓN 6

Nombre: ____

Indicaciones (1): Apoyándote de los discos de acetato observa las relaciones que guardan las fracciones y contesta lo que a continuación se te pide.

ACTIVIDAD 2

FRACCION	EQUIVALENCIAS									Fracciones equivalentes
	Medios	Tercios	Cuartos	Quintos	Sextos	Séptimos	Octavos	Novenos	Décimos	
$\frac{1}{2}$										
$\frac{1}{3}$										
$\frac{1}{4}$										
$\frac{1}{5}$										
$\frac{1}{6}$										
$\frac{1}{7}$										
$\frac{1}{8}$										
$\frac{1}{9}$										
$\frac{1}{10}$										
$\frac{1}{12}$										

¿Cómo podrías hallar una o varias fracciones equivalentes a otras si no contaras con el material concreto? Describe tu estrategia.

Indicaciones (1): De acuerdo con la estrategia descrita anteriormente, encuentra fracciones equivalentes a las siguientes.

FRACCIÓN	FRACCIONES EQUIVALENTES
$\frac{2}{5}$	
$\frac{2}{6}$	
$\frac{7}{10}$	
$\frac{3}{8}$	
$\frac{4}{12}$	

¿Cuántas fracciones equivalentes a otra crees que es posible hallar? Explica tu respuesta.

HOJA DE TRABAJO 2/SECUENCIA NUMERO 3
SESIÓN 7

Nombre: ____

Indicaciones (1): Integrados en equipo analicen las situaciones propuestas y apoyándose en el material didáctico respondan las siguientes preguntas.

ACTIVIDAD 3

Tomen tres piezas del entero dividido en cuartos (manzana) es decir ¾ , si quisieras repartir estas tres piezas entre cuatro niños:

- Tal como están las piezas, ¿se puede repartir uno a uno a cada niño?
- ¿Qué podrían hacer para repartirlo de forma que a todos les toque lo mismo?
- ¿A qué fracciones es equivalente ¾?
- ¿Creen que con estas equivalencias podrían hacer la repartición?, ¿por qué?
- De todas las fracciones equivalentes a 3/4, ¿cuál creen que les permite hacer la repartición? ¿por qué?

Tomen dos piezas del entero dividido en tercios (león) es decir $\frac{2}{3}$, si quisieras repartir estas dos piezas entre cinco niños:

- Tal como están las piezas, ¿se puede repartir uno a uno a cada niño? ¿por qué?
- ¿Qué podrían hacer para repartirlo de forma que a todos les toque lo mismo?
- ¿A qué fracciones es equivalente $\frac{2}{3}$?
- De todas las fracciones equivalentes a $\frac{2}{3}$, ¿cuál nos permite hacer la repartición? ¿por qué?

Tomen cinco piezas del entero dividido en ocho partes (huevos) es decir $\frac{5}{8}$, ¿cuánto es la mitad de ésta fracción?

- Tal como están las piezas, ¿se puede encontrar la mitad de $\frac{5}{8}$? ¿por qué?
- ¿Qué podrían hacer para encontrar la mitad de ésta fracción?
- ¿A qué fracciones es equivalente $\frac{5}{8}$?
- De todas las fracciones equivalentes a $\frac{5}{8}$, ¿cuál nos permite expresar la mitad de ésta? ¿por qué?

Indicaciones (2): Describe la estrategia que usaste para hacer las reparticiones en cada una de las situaciones antes propuestas.

HOJA DE TRABAJO 3/SECUENCIA NUMERO 3
SESIÓN 8

Nombre: ____

Indicaciones (1): Integrados en equipo analicen las situaciones propuestas y apoyándose en el material didáctico reflexionen lo siguiente.

ACTIVIDAD 4

1. Las fracciones $\frac{2}{4}$ y $\frac{5}{10}$ ¿son equivalentes? ¿Cómo puedes saber si son equivalentes o no?

Describe la estrategia que emplearías para saber si las fracciones propuestas son o no equivalentes.

2. Las fracciones $\frac{4}{6}$ y $\frac{6}{9}$ ¿son equivalentes? ¿Cómo puedes saber si son equivalentes o no?

Describe la estrategia que emplearías para saber si las fracciones propuestas son o no equivalentes.

3. Las fracciones $\frac{24}{28}$ y $\frac{36}{42}$ ¿son equivalentes? ¿Cómo puedes saber si son equivalentes o no?

Describe la estrategia que emplearías para saber si las fracciones propuestas son o no equivalentes.

Indicaciones (2): Después de analizar lo anterior describe de forma general cómo puedes saber si dos fracciones son equivalentes entre sí.

Indicaciones (3): Completa la siguiente tabla como se indica.

Fracción 1	Equivalencia	Fracción 2	Equivalencia	Fracción en la que coinciden
$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{4}$		
$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$		
$\frac{1}{3}$		$\frac{3}{5}$		
$\frac{2}{7}$		$\frac{1}{3}$		
$\frac{6}{9}$		$\frac{2}{6}$		

HOJA DE TRABAJO 4/SECUENCIA NUMERO 3
SESIÓN 9

Nombre: ____

Indicaciones (3): Completa la siguiente tabla como se indica.

Fracción 1	Equivalencia	Fracción 2	Equivalencia	Fracción en la que coinciden
$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{4}$		
$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$		
$\frac{1}{3}$		$\frac{3}{5}$		
$\frac{2}{7}$		$\frac{1}{3}$		
$\frac{6}{9}$		$\frac{2}{6}$		

Situación 1: Dos hermanos toman una porción de leche cada mañana. El hermano más grande consume $\frac{1}{4}$ del contenido total del envase mientras que el pequeño bebe $\frac{1}{3}$.

- ¿Qué fracción del envase queda?
- ¿Cómo podrían saber qué fracción del total han consumido?
- ¿Qué operación les permite conocer cuánto han consumido?
- ¿De qué forma podrían utilizar la información que les proporciona la tabla anterior para resolver el problema?
- Explica tu procedimiento

Situación 2: Una familia le obsequia a su hija un pastel de cumpleaños. Antes de ir a la escuela come un tercio de su pastel y al regresar de ésta se come la cuarta parte de lo que le quedaba. ¿Cuánto pastel comió en total?

- Si el resto del pastel lo comparte con su familia, ¿Cuánto compartió?
- Explica tu procedimiento