BENEMÉRITA UNIVERSIDAD
AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

“DESEMPEÑO DE ESTUDIANTES EN TAREAS CON FRACCIONES: DE SECUNDARIA A LICENCIATURA”.

Tesis que para obtener el grado de Maestra en Educación Matemática

PRESENTA
YOSSELYN ESPERANZA LÓPEZ CRUZ

DIRECTOR: MTRO. ADRIÁN CORONA CRUZ
CO-DIRECTOR: DR. JOSÉ ANTONIO JUÁREZ LÓPEZ

Puebla, Puebla. 2017.

AGRADECIMIENTOS

A Dios, por brindarme sabiduría, paciencia y fortaleza para concluir una de mis metas.

A mis padres, que con amor supieron guiarme y alentarme a seguir mis sueños, compartiendo mis triunfos y fracasos; forjando la persona que soy. Gracias por que esto se lo debo a ustedes.

A mi esposo, por su amor y apoyo incondicional; por acompañarme en este camino lleno de aprendizaje.

A mis hermanos y familia, por su confianza y aliento.

A mis amigas, por todas las vivencias, las enseñanzas, alegrías y tristezas compartidas.

Al colegio de profesores de la Maestría en Educación Matemática que condujeron mi formación académica y contribuyeron a nuevos aprendizajes.

Al Mtro. Adrián Corona Cruz y al Dr. José Antonio Juárez López por su orientación, paciencia y conocimientos.

A todos aquellos que con su apoyo hicieron posible la culminación de este trabajo.

Gracias al CONACYT por la beca otorgada.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN………………………………………………………………………. 4

CAPÍTULO I: ANTECEDENTES Y PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN…….. 7

1.1 Antecedentes de la investigación………………………………………………. 8

1.2 Las fracciones en el currículo mexicano……………………………………....... 10

1.3 Problema de la investigación y objetivo………………………………………. 17

CAPÍTULO II: MARCO TEÓRICO ……………………………………………… 18

2.1 Un panorama general……………………..……………………………………. 19

2.2 Noción de fracción y sus interpretaciones…………………………………….. 20

2.2.1 La fracción como parte-todo………………………………………….... 21

2.2.2 La fracción como medida……………………………………………..... 22

2.2.3 La fracción como medida……………………………………………… 23

2.2.4 La fracción como operador …………………………………………… 23

2.2.5 La fracción como razón……………………………………………….. 24

2.3 Sistemas de representaciones…………………………………………….…. 25

2.4 Fracciones equivalentes……………………………………………………….. 28

2.5 Orden y comparación entre fracciones (ordenamiento).................................... 29

2.6 Operatividad con fracciones…………………………………...…………. 31

CAPÍTULO III: METODOLOGÍA……………………………………………… 33

3.1 Población…………………………………………………………………... 34

3.2 Instrumento……………………………………………………………… 34

CAPÍTULO IV: ÁNALISIS DE RESULTADOS……………………………………42

CAPÍTULO V: CONCLUSIONES………………………………………………….. 69

BIBLIOGRAFÍA

INTRODUCCIÓN

El maestro de matemáticas en su práctica cotidiana se encuentra con dificultades relacionadas con la enseñanza y aprendizaje de conceptos matemáticos, como número, área, función, ecuaciones y sin duda alguna, uno de los que presenta mayores dificultades son las fracciones (Fandiño, 2009; Llinares, 2003; Perera y Valdemoros, 2007; entre otros).

Las fracciones, son uno de los contenidos fundamentales en la educación básica; sin embargo, resulta difícil para los estudiantes construir un significado para un concepto multifacético, y más aún lo es dotar de sentido a los algoritmos para operar con ellas. Los algoritmos tradicionales, suelen ser abreviaciones de procesos más extensos; por ello, con frecuencia los estudiantes sólo logran seguir pasos de manera mecánica que carecen de justificación. Usualmente en el sistema de enseñanza predomina una concepción en la que los conocimientos matemáticos son memorizados y por lo tanto, en determinado plazo llegan a ser olvidados.

El trabajo que se presenta a continuación tuvo como finalidad mostrar el desempeño de estudiantes de diferentes niveles educativos con respecto a los conocimientos sobre fracciones, adquiridos y desarrollados por estudiantes entre los 6 y 11 años, periodo en el cual el tema se considera enseñado, son conocimientos de largo plazo y que tales conocimientos al ser requeridos en problemas y/o situaciones que implican fracciones la mayoría de los estudiantes muestran dificultades, las cuales se encuentren asociados a la comprensión del problema; a las estrategias lógicas para resolverlos; al análisis de la solución; preferencia por las matemáticas, etc. Para el logro del objetivo se diseñaron y aplicaron “ocho tareas de selección”, basadas en la estrategia denominada “Ciclo de Aprendizaje”, a estudiantes que al momento cursaban respectivamente, secundaria, preparatoria, alumnos de nuevo ingreso a diferentes licenciaturas universitarias y estudiantes que cursaban licenciatura universitaria. Los resultados mostraron que independientemente de los métodos de enseñanza, tipo de escuelas, los estudiantes cometen los mismos errores (opciones incorrectas), y la cantidad de tareas resueltas correctamente incrementó conforme al nivel escolar de los estudiantes.

El documento que se presenta consta de cinco capítulos, organizados de la siguiente manera:

El primer capítulo incluye las componentes iniciales bajo las cuales se ha basado la investigación, tales como los antecedentes, el planteamiento del problema y el objetivo.

En el segundo capítulo se presenta la revisión realizada acerca de los fundamentos teóricos relacionados con la comprensión de la noción de fracción y las relaciones de equivalencia y orden.

El tercer capítulo muestra la organización del trabajo de investigación, detallando la población participante y el instrumento implementado.

En el capítulo cuatro analizamos, de forma detallada, los resultados de la aplicación del instrumento y mostrando el desempeño de los estudiantes de secundaria, preparatoria y universidad.

Finalmente, en el capítulo se establecen las conclusiones de la investigación.

CAPÍTULO I

ANTECEDENTES Y PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1 Antecedentes de la investigación

El trabajo teórico realizado durante las últimas décadas, constata que la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones han generado algunos conflictos tanto a estudiantes como a profesores. En la búsqueda de una explicación de dicha dificultad, las investigaciones alrededor del mundo en este tema son amplias (Fandiño, 2009; Flores, 2010; Lamon, 2001; Llinares y Sánchez, 1997; Perera y Valdemoros, 2007).

A continuación, se presentan de manera breve algunos de los trabajos de investigación relevantes:

Una de las dificultades para el aprendizaje de las fracciones es el saber operar con ellas, Kieren (1975), citado en Fandiño (2009) evidencia la existencia de por lo menos siete significados del término "fracción" y demuestra que en esta polisemia se oculta precisamente uno de los problemas del aprendizaje de este argumento, ya sea por cuanto se refiere al concepto general, como a las operaciones.

Freudenthal (1983) exterioriza que enfocar las fracciones desde el subconstructo de "parte– todo" es algo bastante limitado. La didáctica tradicional de la aritmética se limita a este enfoque, mayoritariamente incluso en el sentido restringido de la división del pastel. Tras estas divisiones concretas del pastel —en fracciones propias sólo— se introduce inmediatamente al estudiante en la división de cantidades y valores de magnitudes presentados de manera abstracta.

Lamon (2001) indica que el plan de estudios de fracción actual solo consiste en un conjunto específico de procedimientos o algoritmos para fines de cálculo que proporcionan una base para la manipulación de expresiones algebraicas, pero no ayuda a la mayoría de los niños a entender las fracciones.

Valdemoros (2004) explora los contenidos semánticos asignados por los escolares a las fracciones, como también los componentes sintácticos y de "traducción" del lenguaje "natural" al aritmético. Seleccionado el significado de cociente susceptible de ser asignado a la fracción, en situaciones concretas de reparto.

Brown y Quinn (2006), citado en Mahmoud (2013) llevaron a cabo un estudio para analizar los errores y concepciones erróneas de los estudiantes acerca de las fracciones. El estudio reveló que la mayoría de los estudiantes mostraron errores en la comprensión de los conceptos básicos de la fracción.

Perera y Valdemoros (2007) identificaron las dificultades para interpretar la fracción como operador multiplicativo, observando que la mayoría de los estudiantes no reconocieron el todo como divisible para efectuar la distribución de él en los problemas de reparto o en las situaciones donde se requería su partición.

Flores (2010) determinó que en el discurso matemático escolar mexicano están presentes al menos 11 significados asociados a la noción de fracción revisados. Demuestra las dificultades con la presencia de varios significados en un mismo problema; con los cambios de registro (geométrico, algebraico); y particularmente con los cambios de referente, cuando es preciso arribar a una "nueva unidad" para solucionar el problema. Por otra parte, se constata que los estudiantes recurren al trabajo con números decimales para evitar hacerlo con las fracciones.

Según lo informado por Mahmoud (2013) los estudiantes quieren memorizar los métodos y algoritmos en lugar de comprender los conceptos que subyacen detrás de fracciones.

Cabe señalar, que una de las autoras más reconocidas en la última década por sus trabajos relacionados sobre las fracciones es Martha Isabel Fandiño Pinilla; por su obra *"Las fracciones: Aspectos conceptuales y didácticos"*, quien, a través de su obra, señala que las dificultades que los estudiantes presentan se deben a argumentos precedentes, a formalismos o a conceptualizaciones aparentemente banales que tendrían que haber aprendido incluso en la escuela primaria. La revisión bibliográfica exhaustiva realizada por la autora; distingue tres periodos.

- En el primer periodo (1960 a 1980), las investigaciones se centraban en cuestiones generales sobre el concepto, las distintas interpretaciones y las operaciones entre fracciones.
- En el segundo periodo, el cual comprende de los años 80 a los 90; se incluyen además de estudios con los problemas relacionados con las distintas interpretaciones del término "fracción"; estudios relacionados con el aprendizaje general y el aprendizaje de las operaciones entre fracciones, así mismo, la relación entre las fracciones y los números decimales; destacándose el surgimiento de un grupo de investigadores: K. Cramer, T. Post, M. J. Behr, G. Harel y R. Lesh creando el proyecto "Número Racional" (The Rational Number Project).
- De manera que, en el último periodo, (1990 a 2005) las investigaciones se refieren a áreas más específicas: fracciones, números decimales, números racionales y algunas combinaciones, principalmente de nivel primaria y secundaria.

1.2 Las fracciones en el currículo mexicano

Las fracciones siempre han ocupado un amplio lugar en el currículo de la escuela básica en nuestro país, pero durante mucho tiempo y en la actualidad ha predominado una enseñanza bajo los esquemas tradicionales, donde el docente expone una serie de contenidos y, por último, se resuelven "problemas" relacionados con estos contenidos.

El enfoque didáctico que se sugiere para el estudio de las matemáticas en el Programa de Estudio de Matemáticas en Secundaria: "consiste en utilizar secuencias de situaciones problemáticas que despierten el interés de los alumnos y los inviten a reflexionar, a encontrar diferentes formas de resolver los problemas y a formular argumentos que validen los resultados" (SEP, 2011, p. 19).

Las fracciones se estudian desde tercer grado de primaria, continuando hasta al primer año de secundaria. De acuerdo con lo formulado en el Plan y Programas de Estudio de Secundaria 2011, se espera que los estudiantes de primero hayan alcanzado aprendizajes conceptuales significativos en lo relativo a las fracciones y sus diferentes significados; sin embargo, en el aula de clase cuando se propone ampliar al conjunto numérico de los racionales, se evidencian dificultades de comprensión principalmente en lo referente al concepto de fracción y al manejo procedimental de las operaciones con fracciones.

De acuerdo con la SEP (2011) "el conocimiento de reglas, algoritmos, fórmulas y definiciones sólo es importante en la medida en que los alumnos lo puedan usar para solucionar problemas" (p. 20); señalando que el razonamiento es la base de los procesos de estudio como el lenguaje, las representaciones y procedimientos. Sin embargo, en la experiencia nos podemos dar cuenta que la memorización es el proceso predominante en la mayoría de los estudiantes.

La reforma educativa al Plan de Estudio del 2011 de Educación Primaria, organiza los contenidos relacionados con las fracciones de la siguiente forma:

CUADRO 1: Aprendizajes esperados de la Educación Primaria

Grado	Aprendizajes Esperados
Tercero (a partir del tercer bloque)	• Uso de fracciones del tipo m/2n (medios, cuartos, octavos, etc.) para expresar oralmente y por escrito medidas diversas. • Uso de fracciones del tipo m/2n (medios, cuartos, octavos, etc.) para expresar oralmente y por escrito el resultado de repartos.

	• Identificación de escrituras equivalentes (aditivas, mixtas) con fracciones. • Comparación de fracciones en casos sencillos (con igual numerador o igual denominador). • Elaboración e interpretación de representaciones gráficas de las fracciones. Reflexión acerca de la unidad de referencia. • Resolución de problemas sencillos de suma o resta de fracciones (medios, cuartos, octavos).
Cuarto	• Resolución de problemas que impliquen particiones en tercios, quintos y sextos. • Análisis de escrituras aditivas equivalentes y de **fracciones mayores o menores que la unidad.** • Resolución de sumas o restas de números decimales en el contexto del dinero. • Análisis de **expresiones equivalentes.** • **Representación de fracciones de magnitudes continuas (longitudes, superficies de figuras).** • Identificación de la unidad, dada una fracción de la misma. • Identificación de fracciones equivalentes al resolver problemas de reparto y medición. • Resolución, con procedimientos informales, de sumas o restas de fracciones con diferente denominador en casos sencillos (medios, cuartos, tercios, etcétera). • Uso de las fracciones para expresar partes de una colección. Cálculo del total conociendo una parte. • Resolución de sumas o restas de números decimales en diversos contextos.

	• Obtención **de fracciones equivalentes** con base en la idea de multiplicar o dividir al numerador y al denominador por un mismo número natural. • Expresiones equivalentes y cálculo del doble, mitad, cuádruple, triple, etc., de las fracciones más usuales (1/2, 1/3, 2/3, 3/4, etcétera).
Quinto	• Resolución de problemas que impliquen sumar o restar fracciones cuyos denominadores son múltiplos uno de otro. • **Conocimiento de diversas representaciones de un número fraccionario: con cifras, mediante la recta numérica, con superficies, etc. Análisis de las relaciones entre la fracción y el todo.** • **Comparación de fracciones con distinto denominador**, mediante diversos recursos. • Uso del cálculo mental para resolver adiciones y sustracciones con números fraccionarios y decimales. • Resolución de problemas que impliquen sumas o restas de fracciones comunes con denominadores diferentes. • Uso de la expresión n/m para representar el cociente de una medida entera (n) entre un número natural (m): 2 pasteles entre 3; 5 metros entre 4, etcétera
Sexto	• Lectura, escritura y comparación de números naturales, fraccionarios y decimales. Explicitación de los criterios de comparación. • Resolución de problemas aditivos con números naturales, decimales y fraccionarios, variando la estructura de los problemas. • Estudio o reafirmación de los algoritmos convencionales.

	• Resolución de problemas multiplicativos con valores fraccionarios o decimales mediante procedimientos no formales. • Ubicación de fracciones y decimales en la recta numérica en situaciones diversas. Por ejemplo, se quieren representar medios y la unidad está dividida en sextos, la unidad no está establecida, etcétera • Identificación de una fracción o un decimal entre dos fracciones o decimales dados. • Acercamiento a la propiedad de densidad de los racionales, en contraste con los números naturales. • Conversión de fracciones decimales a escritura decimal y viceversa. Aproximación de algunas fracciones no decimales usando la notación decimal. • Resolución de problemas que impliquen calcular una fracción de un número natural, usando la expresión "*a*/*b* de *n*". • Resolución de problemas que impliquen una división de número fraccionario o decimal entre un número natural.

La organización que establece el Programa de Estudio, evidencia el énfasis que se da a la interpretación parte-todo y sus relaciones (equivalencia, orden-comparación) en la educación primaria; considerando de la misma forma, las representaciones en modelos continuos o discretos, así como en la recta numérica y número decimal. Sin embargo, autores como Freudenthal (1983) y Lamon (2001), demuestran que el enfoque que se da a las fracciones con base en esta interpretación; impide a los estudiantes relacionar los diferentes significados dado que sus representaciones llegan a ser un obstáculo para abordar otras interpretaciones.

1.3 Problema de investigación

Desde hace varios años, a través de diversas investigaciones y de las evaluaciones, tanto nacionales como internacionales, se ha demostrado que la mayoría de los estudiantes encuentran problemas significativos en la comprensión conceptual y la operatividad con fracciones; presentando en muchas ocasiones, concepciones erróneas cuando se aprende este tema, a pesar de que formalmente se introduce en la escuela primaria y se continúa a lo largo de varios ciclos escolares.

Por lo tanto, se espera que cuando los estudiantes lleguen a primer grado de secundaria tengan bases sólidas de estos conocimientos; sin embargo, podemos darnos cuenta que no es así y, por lo contrario, se identifican dificultades que han de ser superadas a través de los ciclos escolares posteriores.

Dado las dificultades al abordar las fracciones; Perera y Valdemoros (2007), concluyen que las fracciones es uno de los contenidos de las matemáticas que presentan mayores dificultades tanto para la enseñanza como para su aprendizaje. Siendo este contenido, uno de los más estudiados desde los inicios de la investigación en Educación Matemática.

Llinares (2003) menciona que la dificultad de los números fraccionarios a lo largo del proceso de la enseñanza y aprendizaje, radica básicamente en que:

- Están relacionados con diferentes interpretaciones o significados (como medida, con el significado de parte de un todo, o como parte de un conjunto de objetos, de reparto utilizadas como cociente, como índice comparativo usadas como razón y como un operador).
- Y, además, pueden representarse de varias maneras (3/4, fracciones; 75/100, fracciones decimales; 0.75, expresiones decimales; 75%, porcentajes, de manera gráfica).

Es a partir del tercer grado de primaria, con escasos 9 años de edad (aproximadamente) que los estudiantes entran al mundo de los números fraccionarios, bombardeados con diferentes interpretaciones, así como, las diversas formas de representarlos; provocando en muchas ocasiones desconciertos en los estudiantes.

Aunado a estas dificultades, Fandiño (2009) advierte de los errores típicos que comenten los estudiantes identificados por la literatura internacional, como son:

- ordenar y comparar fracciones,
- realizar operaciones entre fracciones,
- reconocer los diagramas más comunes,
- utilizar el adjetivo "igual",
- utilizar de manera autónoma o espontánea los diferentes esquemas, figuras o modelos,
- la manipulación de la equivalencia entre fracciones,
- la reducción a los mínimos términos de una fracción, etc…

Como se había mencionado anteriormente, las fracciones son estudiadas desde tercero de primaria, hasta primero de secundaria. Es en esta etapa en la que los estudiantes cognitivamente transitan del nivel cognitivo concreto al formal de acuerdo con Inhelder & Piaget (1958, citado en Lawson, 1994). Sin embargo, las dificultades y errores en la comprensión de las fracciones persisten a pesar del tiempo que se les dedica y del nivel educativo en el que se encuentre el estudiante.

A partir de aquí, definimos las **preguntas** que guían esta **investigación**:

¿El conocimiento sobre fracciones depende de las metodologías de enseñanza?

¿Los conocimientos sobre fracciones permanecen en el tiempo?

¿Cuál es el desempeño de los estudiantes en tareas con fracciones?

Objetivo general

- Caracterizar el desempeño de los estudiantes de secundaria, preparatoria y de universidad en las relaciones de equivalencia, comparación y orden, que se establecen en el significado de la fracción como parte-todo.

Objetivos específicos

- Identificar la habilidad de los estudiantes para identificar propiedades matemáticas de conjunto de fracciones.
- Identificar la permanencia de los conocimientos sobre fracciones.

CAPÍTULO II

MARCO TEÓRICO

2.1 Un panorama general

Resultados de varias investigaciones indican que la capacidad de razonamiento científico es necesario para la toma de decisiones, solución de problemas, comprensión de conceptos complejos de teorías y lo natural de la ciencia, y las matemáticas Chakkrapan, Niwat & Rekha (2014). Hargrove (2015), por su parte, cita la importancia que tiene el que los estudiantes se les instruya para ser capaces de resolver problemas que involucren un pensamiento matemático.

SEP (2011) señala que:

> La formación matemática que permite a los individuos enfrentar con éxito los problemas de la vida cotidiana depende en gran parte de los conocimientos adquiridos y de las habilidades y actitudes desarrolladas durante la Educación Básica. La experiencia que vivan los alumnos al estudiar matemáticas en la escuela puede traer como consecuencias: el gusto o el rechazo por ellas, la creatividad para buscar soluciones o la pasividad para escucharlas y tratar de reproducirlas, la búsqueda de argumentos para validar los resultados o la supeditación de éstos según el criterio del docente. (p. 19)

Arnett (2010) citado en Harrison (2015), señala que no todos los individuos llegan a ser capaces de realizar acciones clasificadas como operaciones formales, esto puede implicar que las personas tomen decisiones que los lleven al éxito o el fracaso, en particular los estudiantes de nivel escolar básico, según la OCDE (2010) y Mahmoud (2013); esto impacta directamente en estudiantes de educación superior al sentirse capaz de elegir, por ejemplo, una carrera universitaria. También, su capacidad cognitiva, los ayuda a identificar sus preferencias, como sus afinidades por las matemáticas. Todo esto, permite identificar el porqué, en particular, el aprendizaje de fracciones es un tema de las matemáticas básicas, identificado como el más problemático (Tanner, 2008) o sofisticado (Calhoon, Emerson, Flores & Houchins, 2007).

En cuanto a la didáctica de las fracciones; Post, Wachsmuth, Lesh & Berh (1985) señalan que el desarrollo de la comprensión de los números racionales de los niños parece estar relacionado a tres características del pensamiento:

(a) flexibilidad de pensamiento en la coordinación de las traducciones entre los modos de representación de los números racionales,
(b) la flexibilidad de pensamiento para las transformaciones dentro de un modo dado de la representación, y
(c) el razonamiento cada vez más libre de una dependencia de realizaciones concretas de los números racionales.

Fandiño (2009), derivado de su investigación global bibliográfica sobre las dificultades en el aprendizaje de las fracciones, señala que los docentes en lo general no son conscientes de la complejidad conceptual y cognitiva asociada al aprendizaje de las fracciones, y señala a través de la literatura que la conceptualización de las fracciones y los números racionales son un proceso que mediante acciones noéticas y semióticas evolucionan por necesidad humana.

2.2 Noción de fracción y sus interpretaciones

En general, la palabra "fracción" se define como un número de la forma a/b donde a y b, son números enteros y $b \neq 0$, esta forma es utilizada en diversos contextos y situaciones que muchas veces puede parecer que no tengan nada en común.

Cotidianamente un número a/b se entiende como el resultado de dividir una unidad o un todo en partes iguales (b) y luego tomar una cantidad (a) de esas partes. Donde a se conoce como numerador y b como denominador de la fracción.

Sin embargo, un número racional a/b tiene muchas interpretaciones, lo que determina como objetivo de enseñanza que los alumnos lleguen a dotar de significado a las diferentes representaciones, establecer relaciones (equivalencia y orden) y realizar operaciones entre ellas (Llinares, 2003).

En coincidencia con otros investigadores (Block, 2001; Valdemoros, 2007; Fandiño, 2009), se atribuye a T. Kieren haber sido el pionero en poner atención en los significados que puede tener la fracción, con la intención de superar una enseñanza caracterizada por el conocimiento estructural del concepto. Kieren inicialmente identificó cuatro subconstructos de fracciones: medida, razón, cociente y operador. Identificó un quinto subconstructo como una relación parte-todo, considerándola como la base para la construcción de los otros cuatro (Kieren, 1983; citado en Valdemoros, 2007).

2.2.1 La fracción como parte-todo.

Esta definición le da a la fracción el significado de división de un todo "continuo o discreto" en partes iguales, que comúnmente es denominada parte-todo o sub-área, donde el denominador indica las partes en que se divide la totalidad y el numerador las que se toman.

Ejemplo:

Se debe repartir un pastel entre 10 personas. ¿Qué fracción del pastel le corresponde a cada persona?

La relación parte-todo es un camino natural para la conceptualización de algunas propiedades (como la que conduce a la denominación "fracción propia" e "impropia"), algunas relaciones (como la de equivalencia), y algunas operaciones (como la suma y la resta).

Para una comprensión operativa de este subconstructo se necesita previamente el desarrollo de algunas habilidades como:

- la identificación de la unidad (qué «todo» es el que se considera como unidad en cada caso concreto);

- la de realizar divisiones (el todo se conserva aun cuando lo dividamos en trozos, conservación de la cantidad), y
- manejar la idea de área (en el caso de las representaciones continuas) (Llinares y Sánchez, 2000).

Las representaciones de esta relación son desarrolladas en contextos continuos, discretos y mediante la utilización de la recta numérica.

2.2.2 La fracción como medida.

El uso de las fracciones como expresión de una medida o de una cantidad es bastante común y es quizá el que más se utiliza en la vida cotidiana; expresiones del tipo $\frac{1}{4}$ kg de azúcar, $\frac{1}{2}$ litro de leche, etc. son de uso cotidiano y pueden contribuir a establecer un vínculo directo entre el conocimiento informal de los alumnos y la necesidad de su formalización.

Ejemplo:

Esmeralda se comió $\frac{1}{2}$ de barra de chocolate.

La fracción a/b aparece cuando se desea medir una determinada magnitud, en la cual la unidad no está contenida un número entero de veces en la magnitud que se quiere medir.

Para obtener la medida exacta se deben:

- Medir utilizando múltiplos y submúltiplos de la unidad.
- Realizar comparaciones con la unidad.

Al considerar las fracciones (número racional) en la interpretación de medida, se proporciona el contexto natural para la «suma» (unión de dos medidas), y para la introducción de los decimales (notación decimal) (Kieren, 1980; citado en Llinares y Sánchez, 2000).

2.2.3 La fracción como cociente.

La fracción como cociente es el resultado de dividir uno o varios objetos entre un número de personas o partes. También, se puede definir como el valor numérico de la fracción a/b. En este caso, la fracción es el resultado de una situación de reparto donde se busca conocer el tamaño de cada una de las partes resultantes al distribuir a unidades en b partes iguales.

Ejemplo:

Juan tiene que repartir 3 pizzas entre 5 amigos. ¿Qué fracción de pizza le corresponde a cada amigo?

Block y Solares (2001) a este respecto observan que la fracción como cociente puede concebirse así:

a) Una magnitud (dividendo) entre un escalar (divisor) y el cociente es una magnitud. Ejemplo: 3 metros entre 4 = $\frac{3}{4}$ metro
b) Una magnitud (dividendo) entre otra magnitud (divisor) es un escalar. Ejemplo: ¿Cuántas veces caben 3 metros en 4 metros? 3 metros entre 4 metros = $\frac{3}{4}$

2.2.4 La fracción como operador.

La fracción como un operador, se define como el resultado de la ejecución de dos operaciones la división y la multiplicación, en ese orden o el inverso. Es un número racional actuando sobre otro número, transformándolo. Así, la fracción a/b empleada como operador es el número que modifica un valor particular n multiplicándolo por a y dividiéndolo por b.

Ejemplo:

Encontrar los $\frac{4}{5}$ de 20 peras.

La comprensión de este significado les permitirá a los estudiantes resolver con mayor habilidad multiplicaciones de fracciones (Hincapié, 2011).

2.2.5 La fracción como razón.

Es una comparación entre dos cantidades o conjuntos de unidades (de igual o diferente magnitud). Las razones pueden ser comparaciones parte-parte en un conjunto (magnitud discreta) o comparaciones parte todo (magnitud continua y discreta). La generalidad de la interpretación de la fracción como razón consiste en que nos permite comparar cantidades de magnitudes diferentes, mientras que en la interpretación parte – todo en un contexto de medida sólo nos permite comparar cantidades del mismo tipo (Llinares, 2003).

Ejemplo:

Iván encesta 3 tiros de cada 6 lanzados.

Este significado se usa comúnmente con la idea de formar proporciones y permite también desarrollar o integrar los conceptos de fracciones equivalentes, probabilidad y porcentajes.

Para alcanzar el concepto de fracción con todas sus relaciones conlleva un proceso de aprendizaje a largo plazo. La variedad de estructuras cognitivas a las que las diferentes interpretaciones de las fracciones están conectadas condiciona este proceso de aprendizaje (Llinares y Sánchez, 2000).

Algunos errores conceptuales aparecen al relacionar distintas interpretaciones de la fracción. La identificación de la fracción con una cantidad es un obstáculo para interpretar y manejar la fracción como razón, y para el número racional.

2.3 Sistemas de representaciones

Durante la enseñanza se hace uso de diferentes materiales para representar la fracción (figuras geométricas, rectas numéricas, dibujos que representan a personas y objetos por repartir, etc.), Se sabe que las dificultades que presentan los estudiantes en el aprendizaje de las fracciones se deben a las diversas interpretaciones que se les asocian; sin embargo, durante los últimos años las investigaciones también han hecho énfasis en la influencia de las representaciones.

Además, se plantean problemas con diversos significados que no necesariamente se adaptan a estas formas de representación, por ejemplo, cuando se propone un problema de reparto, pero se ha modelado la fragmentación de una figura geométrica. La situación se agudiza cuando se utilizan, además, indiferenciadamente los tipos de cantidades en las que se puede presentar la fracción (discreta o continua, por ejemplo). Este uso arbitrario y confuso de los modelos se ha relacionado con la falta de dominio de las diferentes interpretaciones de la fracción (Piñón, 1995; citado en Parra y Flores; 2008).

Nos referimos al término representación como “el modo en que los sujetos expresan sus conocimientos con notaciones simbólicas o mediante algún tipo de gráfico”. Los modelos sirven para la presentación y el desarrollo de un concepto determinado.

Las diversas representaciones permiten establecer relaciones entre la situación concreta y la modelización matemática, éstas son mediadoras entre la situación empírica y el conocimiento matemático, de ahí su importancia. Esto lo reafirma Azcarate y Cardeñoso (1994) al expresar que cuando los alumnos realizan los procesos cognitivos propios del quehacer matemático, tales como, organizar, comparar, inferir, decidir y analizar, éstos necesitan de medios concretos de representación que les permitan elaborar su significado.

Las representaciones juegan una doble función:

a) actúan como estímulo para los sentidos en los procesos de construcción de nuevas estructuras mentales,
b) permiten la expresión de conceptos e ideas a los sujetos que las utilizan.

Rico (1995), por otro lado, clasifica las representaciones en dos grandes grupos:

- Discretas o sistema de representación simbólico, cuya sintaxis viene descrita mediante una serie de reglas de procedimiento.
- Continuas o sistema de representación gráfico, cuya sintaxis viene dada principalmente por reglas de composición y convenios de interpretación.

Lesh, Post y Behr (1987, citado en Maza, 1995) distinguen cinco representaciones. A continuación, se hará una breve descripción de cada uno de ellos.

- Los guiones, son los esquemas en los que el conocimiento se organiza alrededor de sucesos experimentados por el individuo.
- Los modelos manipulativos son objetos tridimensionales creados a partir de las ideas piagetianas, donde se entiende que las acciones cognitivas se van convirtiendo en esquemáticas y abstractas.
- Los diagramas o gráficos, llamados también representaciones icónicas; son modelos de figuras estáticas bidimensionales, que pueden ser internalizados como imágenes.

- El lenguaje hablado o escrito incluye el lenguaje formal e informal. Cuando se aprende matemática el individuo se ve inmerso en el lenguaje natural y científico, utilizando palabras propias de cada lenguaje y palabras que tienen significados distintos o iguales en el ámbito cotidiano y el científico.
- Las representaciones simbólicas son las que necesitan un esfuerzo mayor en el aprendizaje de los estudiantes. Su carácter arbitrario, propio de la comunidad científica, condiciona su relación con las representaciones internas y las hacen materia de aprendizaje, pues no evidencian las propiedades del referente, por lo que su transparencia no podrá medirse por preservar las propiedades del referente, sino por presentar la menor cantidad de significados adicionales de otros conceptos propios de la cultura particular.

Mientras tanto, Llinares y Sánchez (1988, citado en Moreno y Martínez, 2000) señalan que las fracciones pueden representarse de manera geométrica, discreta, numérica y literal.

- Las representaciones geométricas se realizan en un contexto continuo y las más frecuentes son los diagramas circulares, rectangulares y la recta numérica.
- En las representaciones discretas la unidad está formada por un conjunto discreto de objetos.
- Las representaciones numéricas encuentran distintas formas de utilizar los números para indicar una relación parte-todo: representación como división indicada ($\frac{3}{5}$), representación como razón (3:5), representación decimal (0.6), representación de porcentajes (60%).
- En las representaciones literales podemos distinguir distintas formas: tres quintos, tres de cinco y proporción de tres a cinco.

Entre los modelos usuales en el trabajo con números y operaciones se destacan los siguientes: Modelos lineales. Éstos utilizan la recta numérica como modelo de representación numérica. Modelos métricos, los cuales emplean longitudes, superficies, balanzas para el estudio de conceptos numéricos. Modelos geométricos, son los que utilizan figuras geométricas para representar partes de la unidad. Y los modelos funcionales, aunque no son los modelos habituales actualmente se emplean para operaciones con racionales, pero no con decimales, excepto algunos casos de porcentajes.

2.4 Fracciones equivalentes

Las investigaciones alrededor de las fracciones señalan como una de las principales dificultades el manejo de las equivalencias ya sea para obtenerlas o identificarlas en las diferentes representaciones del tipo continuo o discreto.

A manera de ejemplo, decimos que $\frac{2}{3}$ y $\frac{4}{6}$ son equivalentes, no porque contengan las mismas cantidades numéricas; la denominación "equivalentes", se debe a que representan al mismo número racional, aunque su representación simbólica o gráfica sea diferente.

Dickson (1991, citado en Maza, 1999) a través de varios estudios constatan que para los estudiantes es más fácil obtener fracciones equivalentes a partir de una fracción elemental que, por lo contrario, resulta ser complicado obtener una fracción simplificada de una fracción dada.

Arteaga (2016) reporta las dificultades que estudiantes de secundaria presentan al trabajar con equivalencias, en diferentes representaciones y la obtención de las mismas con diferente denominador.

Maza (1999), plantea que las fuentes principales de dificultad en el aprendizaje de la equivalencia de fracciones; en primer lugar, es el paso de las representaciones manipulativas o icónicas a las simbólicas y, en segundo lugar, las provenientes de las mismas manipulaciones simbólicas. Estableciendo que es indispensable que el alumno reconozca la equivalencia entre dos representaciones icónicas (gráficas) y trasladen la comparación a las representaciones simbólicas.

Cabe mencionar que la noción de equivalencia de fracciones es origen de errores también debido al manejo simultáneo de diversos sentidos de fracción y de equivalencia; es decir, se sabe que $\frac{5}{3}$ y $\frac{10}{6}$ son equivalentes; sin embargo, para ello hay diversas explicaciones:

- si las representamos en la recta numérica, les corresponde el mismo punto;
- si las representamos en dos rectángulos, las dos representan la misma sub-área;
- si las interpretamos como reparto donde el numerador indica las unidades y el denominador las personas a las cuales se le van a repartir estas unidades, obtenemos que a cada cinco o diez personas le corresponde la misma parte de la unidad;
- si las concebimos como operador, resulta lo mismo multiplicar por tres y dividir entre cinco que multiplicar por seis y dividir entre diez;
- si relacionamos los cuatro números que las conforman, se observa que son proporcionales (3 es a 5 como 6 es a 10) y si los dividimos los cocientes (0,6) son iguales;

y otras veces por los problemas originados ante la transitividad del signo igual.

Maza (1999), considera que la enseñanza de la equivalencia, es una herramienta indispensable para la construcción de conocimientos sobre fracciones como la ordenación, la simplificación y la operatividad (específicamente, suma y resta).

2.5 Orden y comparación entre fracciones (ordenamiento)

Una de las dificultades que diversos autores como Post, et. al. (1984; 1985); Maza (1999); Cubillo y Ortega (2003); Lamon (2006); Fandiño (2009); han identificado es el aprendizaje del orden en las fracciones; presentando dificultades tanto de tipo de comprensión conceptual como de destrezas de cálculo; señalando que la dificultad de la comparación de dos fracciones puede variar mucho dependiendo de los enteros que figuren en los numeradores y denominadores.

Cubillo y Ortega (2003) evidenciaron dificultades de aprendizaje acerca del orden y representación de las fracciones en la recta, confirmando que la comparación de fracciones puede variar enormemente, dependiendo de las relaciones entre los números.

Post, et al. (1986, citado en Mancera, 1992) encontraron que inicialmente los conceptos sobre el orden en los números enteros influyen en la falta de comprensión del orden en las fracciones; las palabras "más" y "mayor", y sus contrapartes "menos" y "menor", causan dificultades en los niños al tratar con relaciones de orden; la falta de habilidad para pasar de un modo de representación a otro retarda la abstracción de relaciones matemáticas; los niveles de pensamiento concreto o formal con respecto al concepto de fracción parece estar relacionado con el buen desempeño en tareas de orden y equivalencia; los niños desarrollan o diseñan estrategias para abordar situaciones de orden o equivalencia de fracciones las cuales están muy ligadas a las propiedades de los enteros.

Maza (1999), establece que las dificultades al efectuar la relación de orden entre dos fracciones se deben a: la influencia de los números naturales, las características lingüísticas del orden entre fracciones y la constitución de la fracción como pareja de números.

Lamon (2006) resume las estrategias que utilizan los estudiantes para establecer el orden entre fracciones de la siguiente manera:

a) Partes de igual tamaño, es cuando la fracción es dividida en el mismo número de partes (mismo denominador); por lo tanto, establecen que la fracción es mayor por su numerador ($\frac{5}{8} < \frac{5}{8}$).
b) Igual número de partes; es decir, las fracciones tienen el mismo numerador, pero los denominadores son diferentes, indicando que el denominador más grande es la fracción más pequeña ($\frac{3}{4} > \frac{3}{7}$).

c) Comparando un punto de referencia; significa que se debe comparar tanto numeradores como denominadores utilizando una fracción o número de referencia, por ejemplo, 1, $\frac{1}{2}$ o $\frac{1}{3}$. Ejemplo: ($\frac{3}{5}$> $\frac{1}{2}$) ó ($\frac{1}{7}$< $\frac{1}{2}$).

En efecto, se puede afirmar que la ordenación de fracciones es un campo lleno de procedimientos intuitivos, incompletos, informales y de falsas generalizaciones. Es por ello, que los estudiantes tienen serias dificultades para entender la relación entre fracciones.

2.6 Operatividad con fracciones

La investigación en el tema de fracciones; señala que una de las dificultades que los estudiantes presentan al abordar este tema además de que el concepto es multifacético es que los estudiantes no pueden realizar operaciones entre fracciones. Siendo que los estudiantes prefieren memorizar los métodos en lugar de comprender los conceptos que subyacen detrás de fracciones.

Se ha encontrado (Nunes y Bryant, 1998) que alumnos de primaria, y varios de secundaria, poseen un conocimiento rudimentario de las fracciones, pero aparentan comprenderlas ampliamente porque utilizan la terminología de las fracciones y dominan ciertas partes de los procedimientos, aunque no reconocen los problemas en los que éstos pueden ser empleados. Además, los alumnos tratan de aplicar su conocimiento sobre los números enteros para realizar operaciones con fracciones sin comprender las propiedades de éstas.

Brown y Quinn (2006; citado en Mahmoud, 2013), encontró que la mayoría de los alumnos de 9 años tenían conocimiento fragmentado de fracciones y optaron por aplicar algoritmos con poca comprensión del significado. Además, señalaron que muchos de los errores que los estudiantes se debe a que aplican “atajos” en los algoritmos.

El cálculo algorítmico puede provocar confusiones en los estudiantes debido por la similitud entre las notaciones de los números naturales y las fracciones. En este sentido se puede considerar que las operaciones aprendidas con los números naturales son un obstáculo para las operaciones realizadas con racionales ya que, por ejemplo, la multiplicación no significa siempre un aumento de la cantidad. Estas dificultades se deben en gran medida a la persistencia de conocimientos de los números naturales.

CAPÍTULO III

METODOLOGÍA

La investigación es de tipo exploratorio enmarcado en un enfoque mixto. Se llevó a cabo el diseño de un instrumento denominado “Tarea de Selección”, posteriormente, se aplicó a estudiantes de diferentes niveles educativos (Secundaria, Preparatoria y Licenciatura). Una vez obtenido los datos, se llevó a cabo la organización de los mismos, realizándose el análisis de los porcentajes de las respuestas correctas por grupo y por nivel; los porcentajes con la que se resuelve cada tarea y el porcentaje con que es marcado cada opción de las tareas.

3.1 Población

Los participantes fueron 710 estudiantes con edades que oscilan entre 11 y 21 años; considerando a 103 estudiantes de primero de secundaria de escuelas oficiales y particulares, a 297 estudiantes que ingresaron a preparatorias BUAP y particular, 223 alumnos de nuevo ingreso a carreras universitarias (física, matemáticas, química, ingeniería y electrónica) y 87 alumnos que cursaban media carrera (química, matemáticas, electrónica).

3.2 Instrumento

El contexto de este reporte de investigación se apoya en la aplicación de una actividad basada en la estrategia de enseñanza “ciclo de aprendizaje”, actividad fundamentalmente de autorregulación, propuesta por Fuller, Karplus & Lawson (1977); en la que el estudiante basándose en su capacidad cognitiva y conocimientos previos, encuentra patrones con los que construye conceptos específicos (Lawson, 1994; Marek & Cavallo, 1997).

El método de enseñanza “Ciclo de Aprendizaje” se introduce inicialmente en el contexto de la enseñanza de la biología. Lawson (1967, citado en Lawson, 1994), diseñó una prueba mediante figuras de supuestas criaturas (bacterias u micro organismos), en la que los estudiantes debían identificar propiedades de un conjunto que denomina “mellinarks”, e identificar que en otro grupo las criaturas no presentan las propiedades antes identificadas y finalmente de otro conjunto, los estudiantes debían identificar las criaturas que los identifica como elementos del primer grupo.

El ciclo de aprendizaje tiene tres fases que consisten en exploración, introducción de términos y la aplicación de concepto. La exploración permite a los estudiantes investigar nuevos materiales y / o ideas para identificar patrones de regularidad y se planteen preguntas que los estudiantes intenten contestar. La introducción de términos permite al profesor introducir términos para etiquetar los patrones y explicar los conceptos recién inventados. La aplicación del concepto provoca que los estudiantes busquen los patrones en otros lugares y apliquen los nuevos conceptos a ejemplos adicionales, a menudo empleando técnicas de abstracción o generalización.

Lawson (2001), señala que el enfoque propuesto por el “ciclo de aprendizaje” ha demostrado ser eficaz para ayudar a los estudiantes a construir conceptos y sistemas conceptuales, así como desarrollar patrones de razonamiento más efectivos, principalmente porque permite a los estudiantes usar el razonamiento para probar sus propias ideas y participar en el proceso de construcción del conocimiento.

Los conocimientos básicos sobre fracciones que se demandan para resolver las tareas, y que para el propósito se consideran conocidas por los estudiantes, son sus diferentes representaciones principalmente las icónicas (gráficas, objetos, figuras, etc.) y simbólicas (fracciones equivalentes y la realización de operaciones directas como sumar, restar, multiplicar, reducir, comparar fracciones (mayor que (>), menor que (<) e igual que (=)), además de reconocer las diferentes interpretaciones que se asocian con las fracciones (como número decimal, porcentaje y parte-todo).

Se diseñaron ocho tareas en las que alumnos mediante conjeturas basadas en sus conocimientos previos sobre fracciones y poniendo en juego habilidades como: la observación, ordenación, comparación, análisis, la búsqueda de patrones los estudiantes identifiquen propiedades para resolver cada tarea. Cabe mencionar que se nombró al conjunto de elementos en cada una de las tareas de manera peculiar, con el objetivo de que el estudiante a través de la búsqueda de patrones infiera las características y propiedades de cada tarea y por lo tanto, el nombre no sea un obstáculo para resolverlas.

A continuación, se describe en que consiste cada tarea.

Tarea 1

Todos estos son números Promps

$\frac{1}{8}=\frac{2}{16}$ $\quad$ $\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$ $\quad$ $\frac{1}{3}=\frac{4}{12}$ $\quad$ $\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$

Ninguno de estos es número Promps

$\frac{1}{8}=\frac{2}{8}$ $\quad$ $\frac{9}{3}=\frac{1}{3}$ $\quad$ $\frac{3}{12}=\frac{9}{24}$ $\quad$ $\frac{10}{40}=\frac{1}{8}$

¿Cuál(es) de estos es (son) número(s) Promps?

(A) $\frac{6}{10}=\frac{2}{5}$ $\quad$ (B) $\frac{1}{5}=\frac{3}{15}$ $\quad$ (C) $\frac{5}{8}=\frac{4}{4}$ $\quad$ (D) $\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$

- Esta tarea se basa en el concepto de fracción equivalente, en ella se deberá específicamente; inferir, relacionar, seleccionar y realizar las reducciones para determinar las equivalencias; para que el alumno resuelva bien la tarea debe identificar que en primer renglón el signo de igualdad se cumple, y que no se cumple en las fracciones del segundo renglón. En consecuencia, se infirió que las fracciones deben cumplir la regla de igualdad, podrá identificar en el tercer renglón las fracciones que cumplen la igualdad (B y D).

Tarea 2

Todos estos son números Blomps

$\frac{2}{4}$ $\quad$ $\frac{8}{16}$ $\quad$ $\frac{1}{2}$ $\quad$ $\frac{10}{20}$

Ninguno de estos es número Blomps

$\frac{5}{12}$ $\frac{4}{20}$ $\frac{2}{16}$ $\frac{1}{8}$

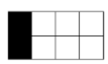
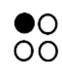
¿Cuál(es) de estos es (son) número(s) Blomps?

(A) $\frac{5}{10}$ (B) $\frac{5}{8}$ (C) $1\frac{1}{2}$ (D) $\frac{2}{10}$

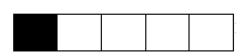
- Esta tarea se basa fundamentalmente en la identificación de fracciones equivalentes en una misma representación, el alumno deberá organizar la información, abstraer, clasificar e inferir que todas las fracciones son equivalentes y que de manera simplificada representa un medio; en el segundo reglón se presentan diversas fracciones que no cumplen con el primer reglón y que servirá para encontrar en el tercer renglón la única opción que cumple con la propiedad en el inciso D.

Tarea 3

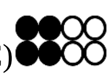
Todos estos son Snoops

$\frac{6}{24}$  0.25 

Ninguno de estos es Snoops

$\frac{3}{4}$  25 

¿Cuál(es) de estos es o son Snoops?

(A) 25% (B) $\frac{3}{12}$ (C)  (D) $\frac{1}{2} \div \frac{1}{2}$

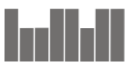
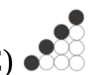
- En la tarea 3, se debe seleccionar, organizar e inferir qué representaciones equivalen a un cuarto. El alumno deberá identificar que las representaciones ya sean simbólicas y/o gráficas planteadas en el primer renglón son fracciones equivalentes, aunque en el segundo reglón se presentan diversas representaciones que no son equivalentes. Para esta tarea, en el tercer renglón los incisos A y B cumplen con estas propiedades que se encuentran inmersas en la misma.

Tarea 4

Todos estos son Xomps

Ninguno de estos es Xomps

¿Cuál(es) de estos es (son) Xomps?

(A)  (B)  (C)  (D) 

- En la tarea 4, se propone que los estudiantes sepan identificar en representaciones gráficas fracciones equivalentes; para ello se deberá relacionar y comparar los diversos esquemas (continuos o discretos) interpretados como parte-todo que se presentan en el primer renglón, en el segundo renglón solo se muestran diferentes representaciones sin ser equivalentes y para el tercer renglón se utiliza como distracción una opción gráfica la cual es interpretada como una razón; el valor equivalente es de un cuarto, correspondiendo a la opción B.

Tarea 5

Todos estos son números Glomps

$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}$ $\quad$ $\frac{1}{2}\div\frac{1}{2}$ $\quad$ $\frac{2}{5}\times\frac{5}{2}$ $\quad$ $\frac{5}{3}-\frac{4}{6}$

Ninguno de estos es número Glomps

$\frac{1}{2}\times 1$ $\quad$ $\frac{2}{5}-\frac{4}{2}$ $\quad$ $\frac{2}{3}+\frac{2}{3}$ $\quad$ $\frac{4}{2}\div\frac{2}{2}$

¿Cuál(es) de estos es (son) número(s) Glomps?

(A) $\frac{3}{6}-\frac{3}{6}$ $\quad$ (B) $\frac{2}{5}\times\frac{2}{1}$ $\quad$ (C) $\frac{2}{5}\div\frac{2}{5}$ $\quad$ (D) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$

- En el caso de esta tarea, se plantea que los estudiantes exploren las operaciones básicas entre fracciones. El alumno deberá efectuar las operaciones del primer renglón para inferir las propiedades que lo llevan a resolver la tarea; para todos los casos el resultado de las operaciones es 1. Mientras tanto, las operaciones con fracciones del segundo renglón no comparten el mismo resultado. En el inciso A del tercer renglón se puede inferir que el resultado de restar un mismo número a la misma cantidad, el resultado siempre será cero, la cual no cumple con la característica de la tarea; por otro lado, en la opción C también se puede inferir que dividir un número entre sí mismo, siempre será 1, opción que si cumple con la esta tarea.

Tarea 6

Todos estos son números Troomps ($\therefore$ puede ser: **>** (mayor que), o **<** (menor que), o = (igual)

$\frac{4}{5} \therefore \frac{3}{4}$ $\qquad$ $\frac{5}{8} \therefore \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\frac{10}{10} \therefore \frac{8}{9}$ $\qquad$ $\frac{2}{6} \therefore \frac{2}{8}$

Ninguno de estos es número Troomps

$\frac{1}{5} \therefore \frac{2}{4}$ $\qquad$ $\frac{4}{5} \therefore \frac{4}{4}$ $\qquad$ $\frac{1}{5} \therefore \frac{2}{4}$ $\qquad$ $\frac{2}{3} \therefore \frac{3}{4}$

¿Cuál(es) de estos es (son) número(s) Troomps?

(A) $\frac{4}{5} \therefore \frac{3}{8}$ $\qquad$ (B) $\frac{1}{3} \therefore \frac{3}{4}$ $\qquad$ (C) $\frac{3}{5} \therefore \frac{3}{7}$ $\qquad$ (D) $\frac{4}{9} \therefore \frac{2}{4}$

- La tarea 6, explora la comparación entre fracciones identificando que la primera fracción es mayor que la segunda independientemente de los denominadores; dentro del primer renglón se muestra esta característica particular, y en el segundo renglón el par de fracciones que se comparan no la cumplen; ya sea que los alumnos conviertan las fracciones a números decimales o utilicen algún otro proceso deben seleccionar una o más opciones que tengan esta propiedad; las opciones que tienen esta propiedad en el tercer renglón son los incisos A y C.

Tarea 7

Todos estos son números Shooms

$\frac{1}{10}$	0.125	15%	$2\frac{1}{5}$

Ninguno de estos es número Shooms

-452	π	$\sqrt{25}$	0

¿Cuál(es) de estos es (son) número(s) Shooms?

(A) 1.25 (B) $\sqrt[3]{12}$ (C) 3 (D) $\frac{9}{5}$

- En la tarea 7, se plantean diferentes representaciones simbólicas e interpretaciones de una fracción; el estudiante debe conocer e identificar que todas las representaciones en el primer renglón pertenecen al conjunto de los números fraccionarios; y que en el segundo renglón ninguna de las cantidades pertenece a este conjunto; así que los alumnos deberá reconocer que un número decimal y que una fracción impropia, pertenece a este conjunto.

Tarea 8

Todos estos son números Rhomps

$2\frac{1}{2}$	$1\frac{4}{6}$	$4\frac{2}{3}$	$3\frac{5}{8}$

Ninguno de estos son números Rhomps

$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{3}$	45%	$\frac{1}{10}$

¿Cuál(es) de estos es (son) números Rhomps?

(A) 8.5% (B) $1\frac{3}{9}$ (C) 2.750 (D) $4\frac{5}{10}$

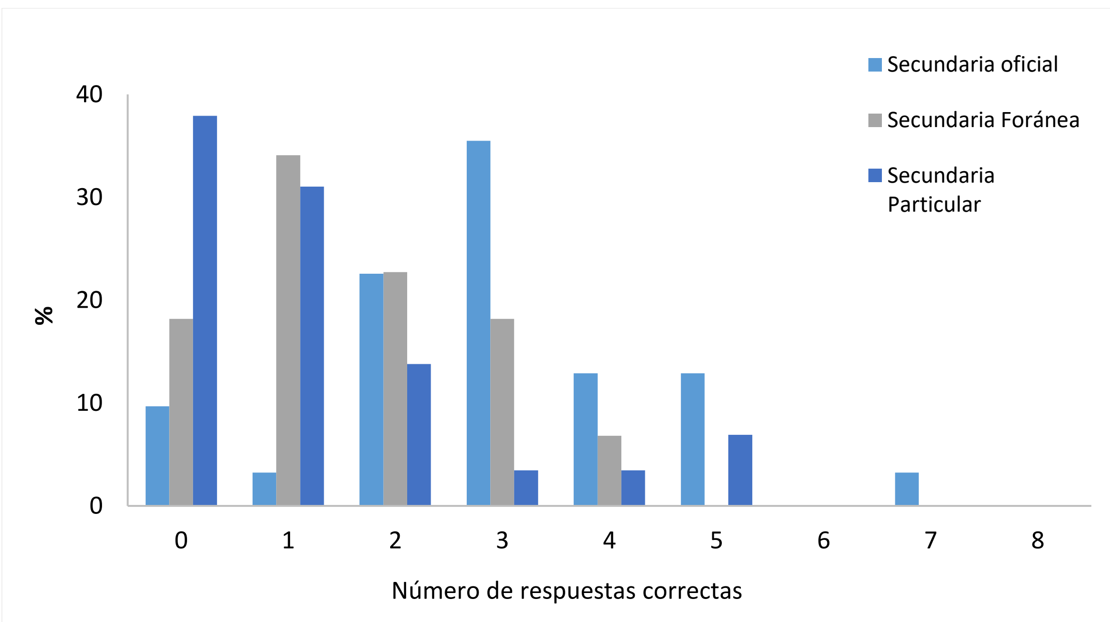
- Finalmente, la tarea 8 se refiere a la representación de una “fracción mixta”. El alumno deberá identificar las características de este tipo de fracciones en las que se encuentran en el primer renglón; para el segundo renglón solo se presentan fracciones menores a la unidad y un porcentaje que no comparten las características del primer renglón; y en el tercer renglón, se cuenta con una opción que es confusa, pues se pone en juego inferir que una fracción mixta se puede escribir como un número decimal, es decir, utilizando una representación diferente.

CAPÍTULO IV

ANÁLISIS DE RESULTADOS

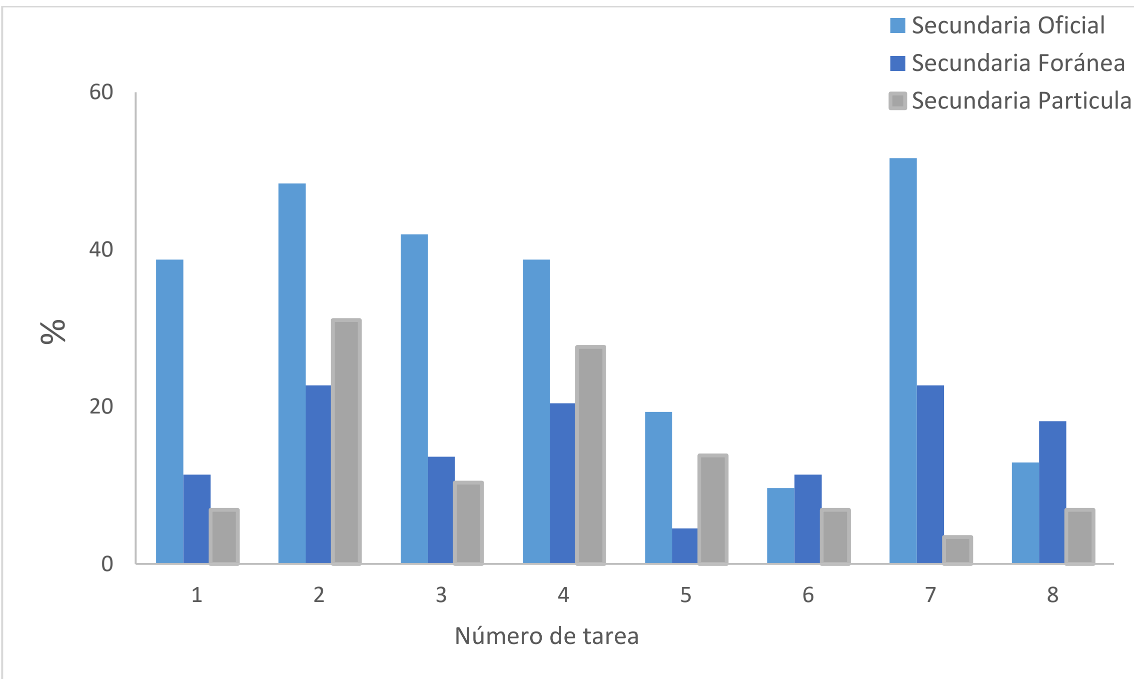
Los resultados se fundamentan en el análisis de los porcentajes de las respuestas correctas, los porcentajes con la que se resuelve cada tarea y el porcentaje con que es marcada cada opción de las tareas realizadas por alumnos que en el momento cursaban, el primer año de secundaria, alumnos que en primaria ya habían sido instruidos para expresar cocientes de una medida entera entre un número natural, números fraccionarios y decimales, representaciones como porcentajes y gráficas, comparar y operar con fracciones, etc.; respecto a los alumnos que ingresaron a preparatorias con diferentes perfiles, fueron instruidos durante los dos primeros años de secundaria en resolución de problemas que implican convertir números fraccionarios a decimales y viceversa, operar con fracciones: suma, resta, multiplicación y división de fracciones; y alumnos que ya no estudian explícitamente fracciones e ingresan a carreras universitarias (física, matemáticas, actuaria, química, ingeniería y electrónica) y alumnos que cursaban media carrera (química, matemáticas, electrónica).

Alumnos de 1° de secundaria (edad promedio: 13 años)



GRÁFICA 1. Número de "tareas" resueltas por estudiantes de Secundaria.

En la gráfica 1, se muestran los porcentajes con los cuales los alumnos que egresaron de la primaria (primer grado de secundaria) resolvieron las tareas. Se puede ver que los mayores porcentajes de cada uno de los grupos, el 38% de los estudiantes de la secundaria particular no fueron capaces de resolver alguna tarea, el 35% los de la secundaria foránea pudieron resolver una actividad y el 37% de los estudiantes de la secundaria oficial resolvieron por lo menos tres tareas. En éste nivel la selección de las opciones depende fuertemente de los conocimientos previos. Sin embargo, como era de esperarse hubo alumnos que fueron capaces de identificar las propiedades y resolvieron cinco tareas.



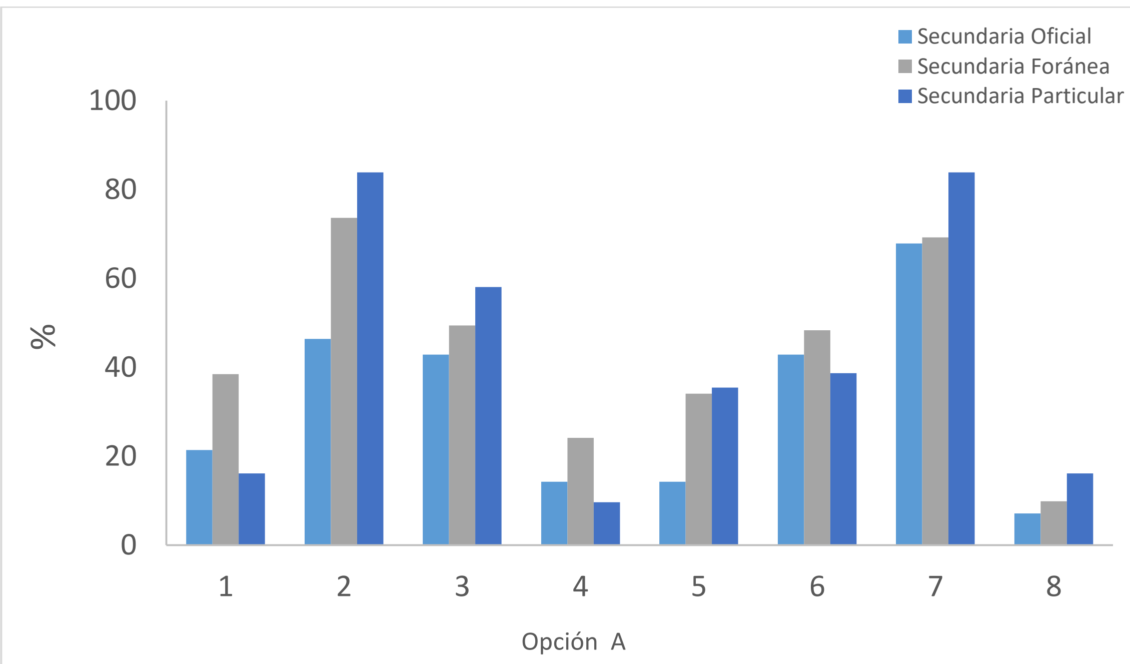
GRÁFICA 2. Porcentaje de estudiantes de Secundaria que responden correctamente por cada "Tarea".

Respecto al porcentaje con que los estudiantes resuelven cada una de las tareas, en la gráfica 2, se puede ver que los estudiantes de la escuela oficial, resolvieron más tareas (35% en promedio), mientras que los estudiantes de la escuela foránea y particular, en promedio sólo logran resolver en promedio el 18%. Se puede observar que dependiendo de los conocimientos previos, los alumnos que egresaron de primaria resuelven las tareas, como ocurrió en la tarea 7, los alumnos de la escuela oficial la resolvieron el 50%, mientras que los alumnos de la particular no rebasaron el 5%.

Tomando como suficiente, el resolver cinco o más tareas, los alumnos de la secundaria oficial fue del 24%, los de la particular de 13% y la foránea el 16%. Resultado que constata que la mayoría de los estudiantes que egresan de primaria, se encuentran con un nivel cognitivo concreto y que se encuentran en el proceso de aprendizaje del tema de fracciones.

Las gráficas que se presentan a continuación, muestran los porcentajes de estudiantes que eligieron cada una de las cuatro opciones en las diferentes tareas.

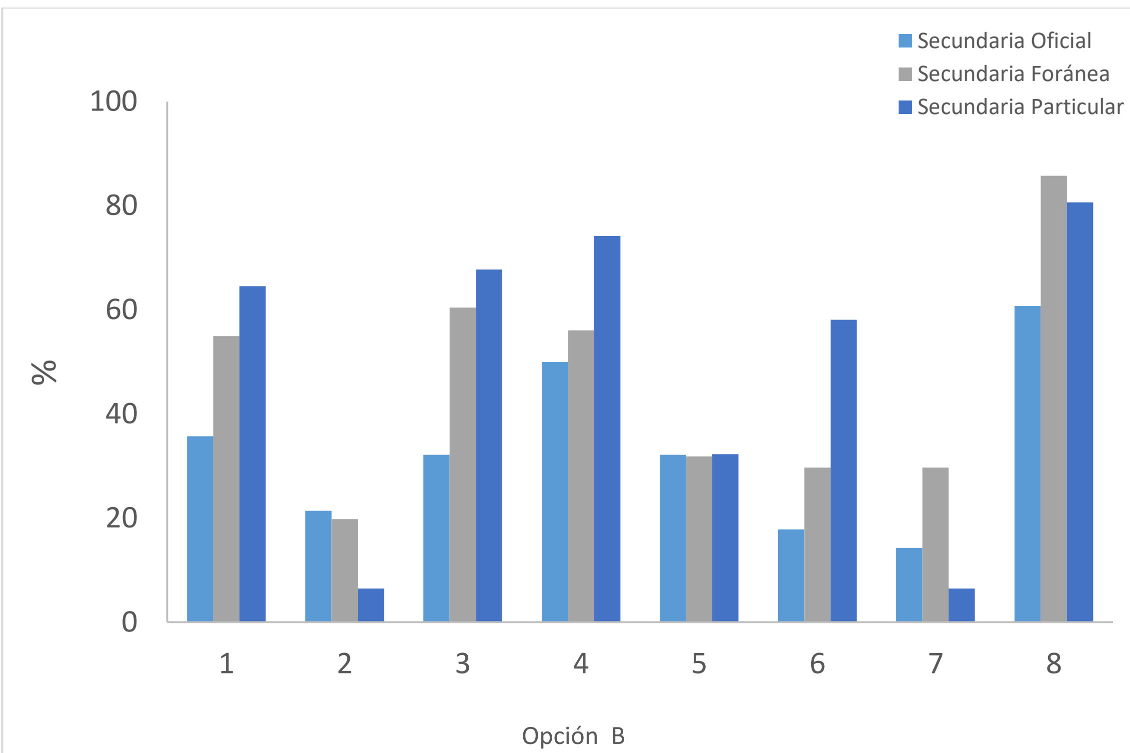
Opción a.



GRÁFICA 3. Porcentaje de estudiantes de Secundaria que contestó la Opción A en cada "Tarea".

Para la tarea 2; los estudiantes de la secundaria particular y foránea eligen como opción esta respuesta en más del 70%, ellos pudieron identificar e inferir que el conjunto de elementos estaba definido por fracciones equivalentes; sin embargo, sólo el 42% aproximadamente de los estudiantes de la escuela oficial identifica esta característica. En la tarea 3, los alumnos de las diferentes secundarias en promedio del 47% reconocen que el porcentaje es una manera de representar una fracción además de identificar que las diferentes representaciones se muestran equivalentes. En la tarea 6, sólo el 40% en promedio de los estudiantes reconocen y realizan una comparación entre dos fracciones, identificando que la primera fracción es mayor que la segunda. En la tarea 7, el 67% de estudiantes asocia la representación de un número decimal como una manera de representar una fracción.

Opción b.

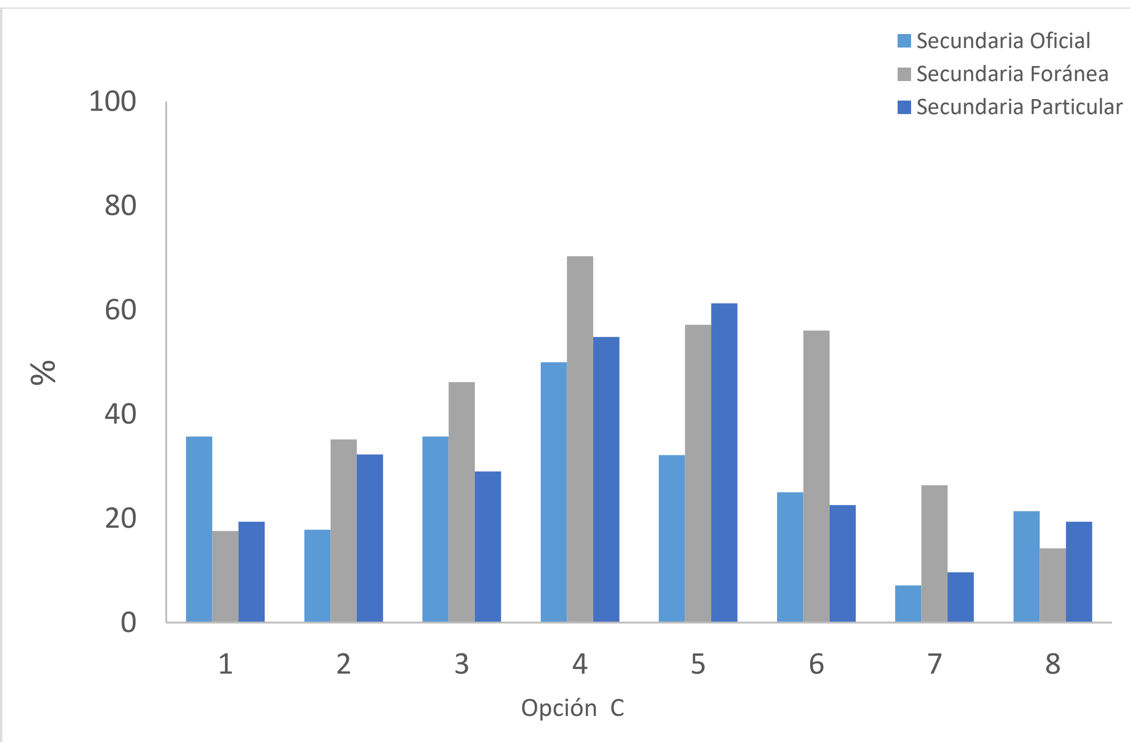


GRÁFICA 4. Porcentaje de estudiantes de Secundaria que contestó la Opción B en cada "Tarea".

En la tarea 1, aproximadamente en un 60% los estudiantes de la escuela particular y foránea reconocen que 1/5 y 3/15 son fracciones equivalentes; sin embargo, sólo el 40%

de los estudiantes de la escuela oficial pueden identificar la obtención de la equivalencia entre las dos fracciones. Para la tarea 3; de la misma manera que en la tarea 1, identificar una fracción equivalente en diferentes representaciones se torna con mayor dificultad para estudiantes de la secundaria oficial, dado que menos del 40% señala que 3/12 es equivalente a ¼. En la tarea 5, los estudiantes de las diferentes secundarias respondieron en un porcentaje igual; considerando que 2/5 x 2/1 se obtiene 1; debido a la incomprensión del algoritmo o al desconocimiento en que forma proceder a resolverlo. Finalmente, en la tarea 8 más del 60% de los estudiantes identificaron correcta de las características de una fracción mixta.

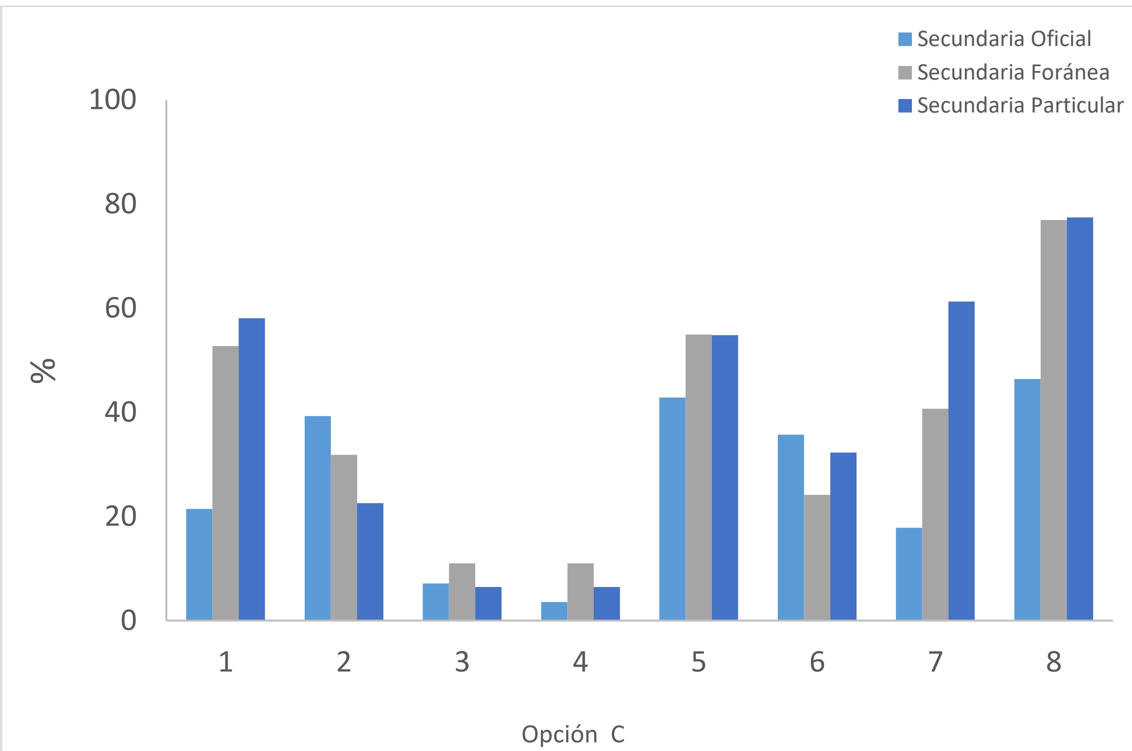
Opción c.



GRÁFICA 5. Porcentaje de estudiantes de Secundaria que contestó la Opción C en cada "Tarea".

Aproximadamente un 60% de los estudiantes de la secundaria foránea y particular responden que 2/5 ÷ 2/5 corresponde con la característica de la tarea 5; es decir, que realizando la operación da como resultado 1. Ya sea que porque algunos de los estudiantes saben dividir una fracción o porque infieren una regla de los números enteros en las fracciones; en otras palabras, una fracción dividida entre sí misma siempre dará 1.
Sin embargo; para la tarea 6 sólo el 22% de los estudiantes de secundaria oficial y particular, señalan que la fracción 3/5 resulta ser mayor al compararla con 3/7. Pero, cabe señalar que los estudiantes de la secundaria foránea señalan esta opción en un 60%.

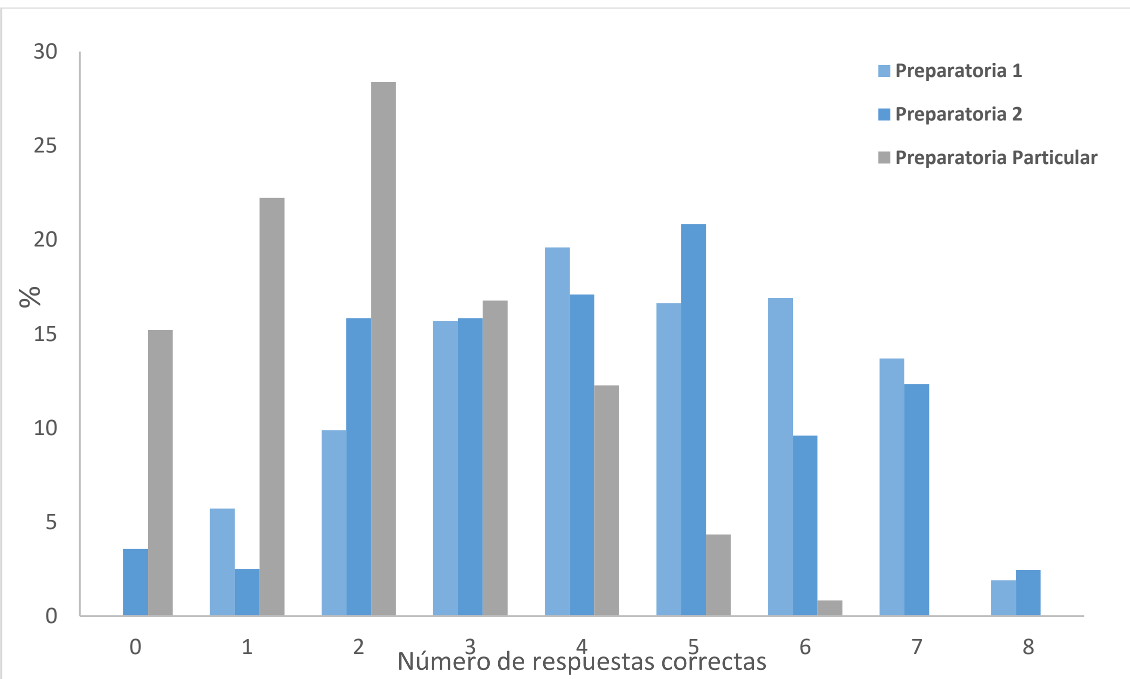
Opción d.



GRÁFICA 6. Porcentaje de estudiantes de Secundaria que contestó la Opción D en cada "Tarea".

En más del 50% los estudiantes tanto de la secundaria foránea como los de la particular, saben simplificar fracciones para la obtención de fracciones equivalentes; sin embargo, sólo el 20% de los estudiantes de la oficial logran realizar e identificar las propiedades de la tarea 1. Entre un 40% y 50% de los estudiantes, además de realizar la operación de suma entre fracciones con el mismo denominador, señalada como operación sencilla entre fracciones; pudieron identificar la característica de la tarea 5, era que realizando una operación cual fuera el resultado diera 1. Para la tarea 7, sólo el 20% de los estudiantes de la secundaria oficial lograron reconocer que una fracción impropia pertenece al conjunto de las diversas representaciones de una fracción, los estudiantes de la secundaria foránea solo lo hace en 40% y en un 60% responde correctamente los estudiantes de la secundaria particular.

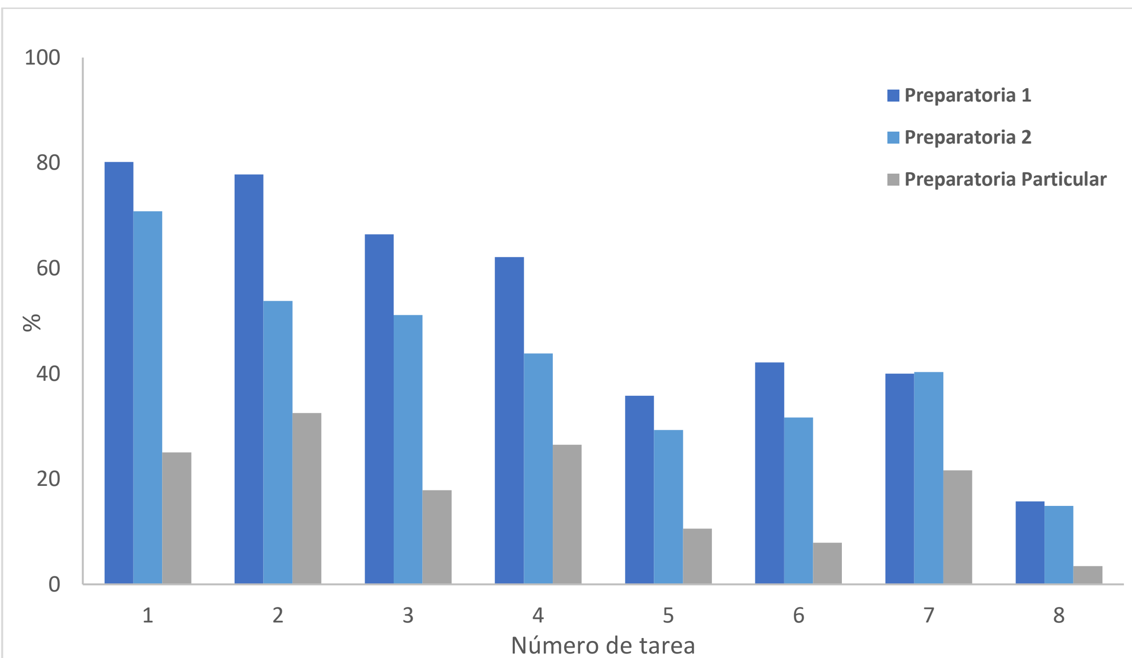
Alumnos de 1° de Preparatoria (edad promedio: 15 años, con 6 meses)



GRÁFICA 7. Número de "tareas" resueltas por estudiantes de Preparatoria.

La aplicación de la prueba fue con estudiantes que ingresaron a tres preparatorias, a la preparatoria denominada 1, los estudiantes son admitidos mediante una evaluación aplicada por CENEVAL, además la comunidad la reconoce por la calidad de sus egresados. La preparatoria 2, los estudiantes también son admitidos por el mismo examen, mientras que los estudiantes admitidos a la preparatoria particular, en su mayoría no fueron admitidos en las preparatorias oficiales.

Considerando que el error es del 5%, que corresponde a ± 2 alumnos, es posible considerar que los alumnos que ingresaron a las preparatorias oficiales, resolvieron las tareas en promedio con los mismos porcentajes, mientras que los estudiantes que no fueron admitidos, obtuvieron resultados similares a los obtenidos por los estudiantes de primero de secundaria.

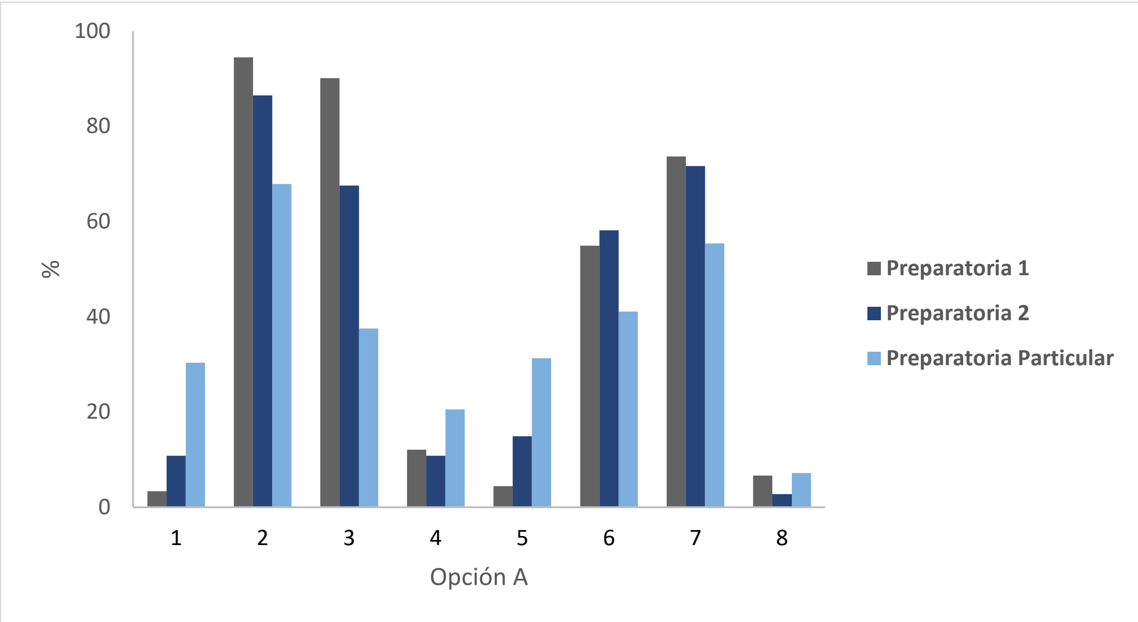


GRÁFICA 8. Porcentaje de estudiantes de Preparatoria que responden correctamente por cada "Tarea".

Respecto al promedio de respuestas correctas por tarea, el 55% y 48% respectivamente obtuvo la preparatoria 1 y 2, mientras que alumnos de la preparatoria particular fue de 25%.

Las cuatro gráficas que se muestran a continuación, indican el porcentaje de estudiantes que eligieron cada una de las cuatro opciones en las diferentes tareas.

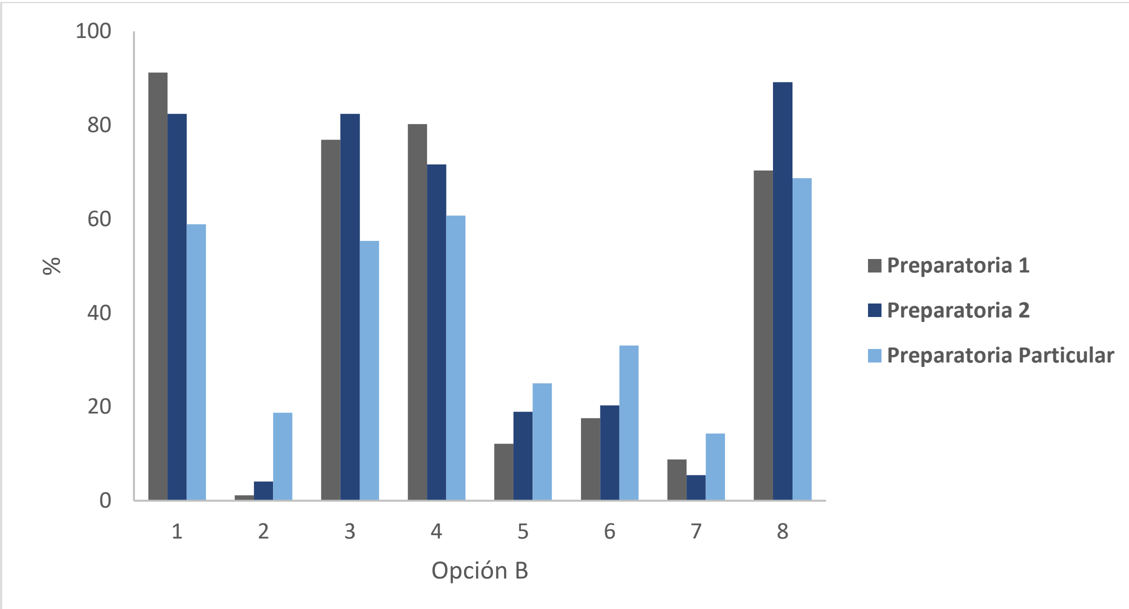
Opción a.



GRÁFICA 9. Porcentaje de estudiantes de Preparatoria que contestó la Opción A en cada "Tarea".

Considerando que aproximadamente el 78% de los alumnos de la preparatoria 1 y 2 responden correctamente la tarea 1 el margen de error al elegir esta opción es pequeño, debido a que los estudiantes identificaron que las fracciones no eran equivalentes; sin embargo, el 30% de los estudiantes de la preparatoria particular eligen esta opción respondiendo incorrectamente esta tarea. En la tarea 3, los estudiantes de la preparatoria 1 responden en un 95% de manera correcta, identificando y señalando que el porcentaje es una forma de representar una fracción equivalente. Por su parte, los de la preparatoria 2 lo hacen en un 70%; sin embargo, sólo el 40% de los estudiantes de la preparatoria particular responde correctamente evidenciando que presentan mayores dificultades. Para la tarea 7, más del 50% los estudiantes de las tres preparatorias identifica que un número decimal es una forma de representación e interpretación de las fracciones.

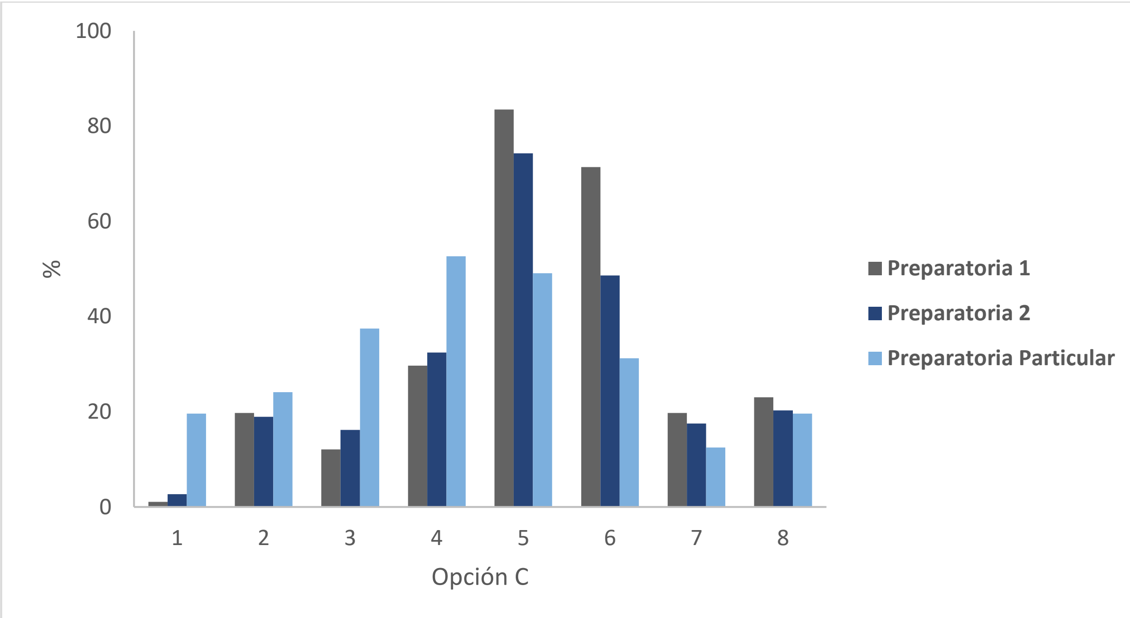
Opción b.



GRÁFICA 10. Porcentaje de estudiantes de Preparatoria que contestó la Opción B en cada "Tarea".

En la tarea 1, más del 80% de los estudiantes de la preparatoria 1 y 2, identificaron que las fracciones presentadas son equivalentes, señalando esta última como la característica de la tarea. En un porcentaje menor, lo hacen los estudiantes de la preparatoria particular, es decir, en un 60%, porcentaje similar al de los estudiantes de secundaria. Más del 60% de los estudiantes de las tres preparatorias, en la tarea 4, reconocen en representación gráfica (contextos continuos y discretos) fracciones equivalentes. En la tarea 8, como era de esperarse por abordar y que los estudiantes reconozcan las características de las fracciones impropias, el 70% de los estudiantes las preparatorias 2 y particular responden correctamente y el 80% de la preparatoria 1.

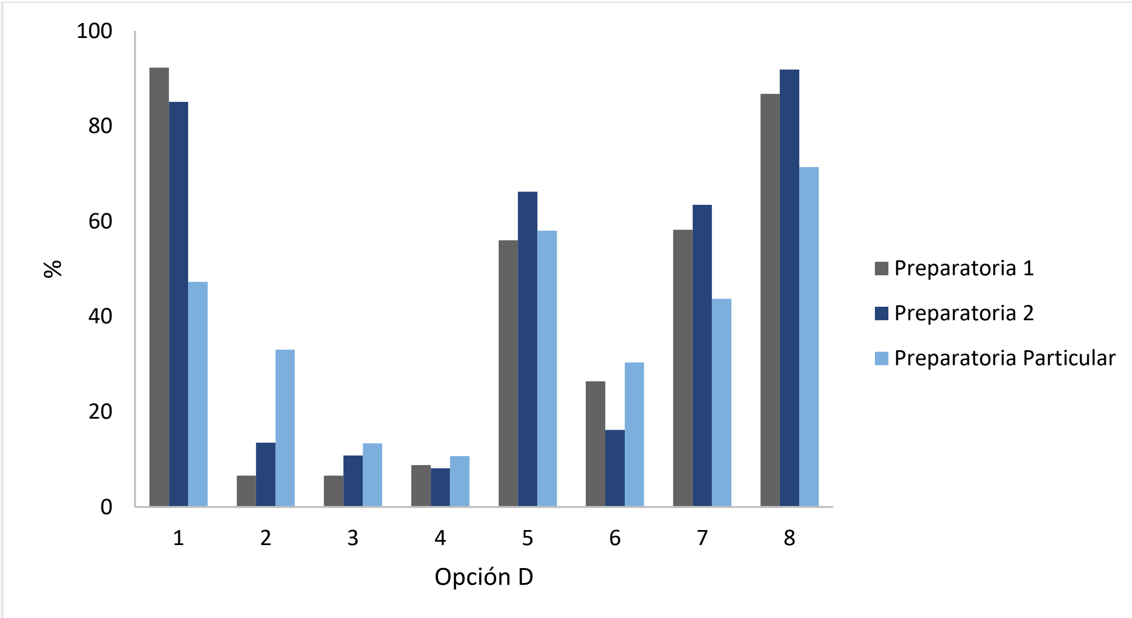
Opción c.



GRÁFICA 11. Porcentaje de estudiantes de Preparatoria que contestó la Opción C en cada "Tarea".

En la tarea 4, los estudiantes de las diferentes preparatorias presentan mayor margen de error en comparación con las otras tareas. Mientras tanto; en la tarea 5, la preparatoria 1 y 2 responden en un porcentaje similar en un 80% y 77%, respectivamente; por otro lado, los estudiantes de la preparatoria particular apenas en un 50% responden correctamente, realizando la división de fracciones sin ningún problema e identificando que el resultado es 1, característica común en las operaciones. Para la tarea 6, la mayoría de los estudiantes de la preparatoria 1 responden adecuadamente; sin embargo, para los estudiantes de la preparatoria 2 y preparatoria particular les resultó difícil identificar que 3/5 es mayor que 3/7, alcanzando en promedio solo un 45%, por debajo de la mitad.

Opción d.

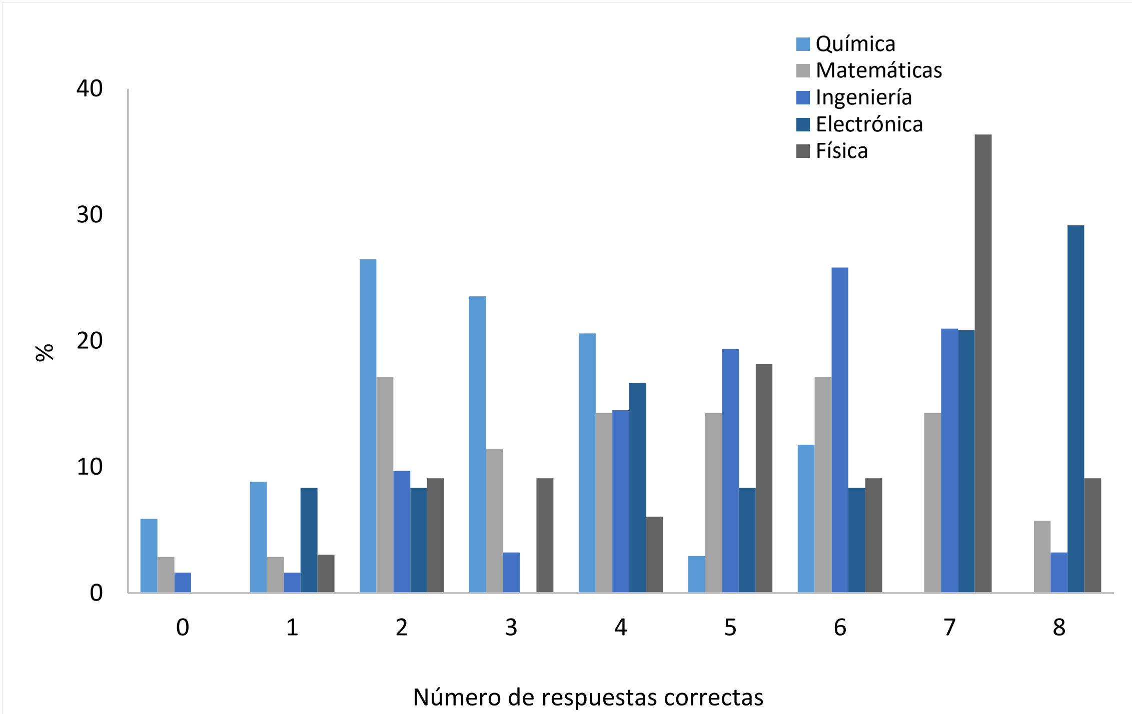


GRÁFICA 12. Porcentaje de estudiantes de Preparatoria que contestó la Opción D en cada "Tarea".

En estudiantes de la preparatoria particular se presentaron mayores dificultades para identificar una fracción equivalente en una simplificación de fracciones debido a que sólo el 50% lo reconoció. Mientras que el 90% de las preparatorias 1 y 2 lograron identificar la propiedad de la tarea 1. Sin embargo, para la tarea 5 (operaciones con fracciones), 7 (representaciones simbólicas de las fracciones) y 8(características de las fracciones impropias); estudiantes de las tres preparatorias responden en un porcentaje similar en un 60%, 55% y 80% aproximadamente, de manera respectiva.

Tomando como suficiente, el resolver cinco o más tareas, los estudiantes de la preparatoria 1, el 50% en promedio lo hicieron correctamente, los de la preparatoria 2 en un 44%, mientras que los de la preparatoria particular sólo fue el 5%.

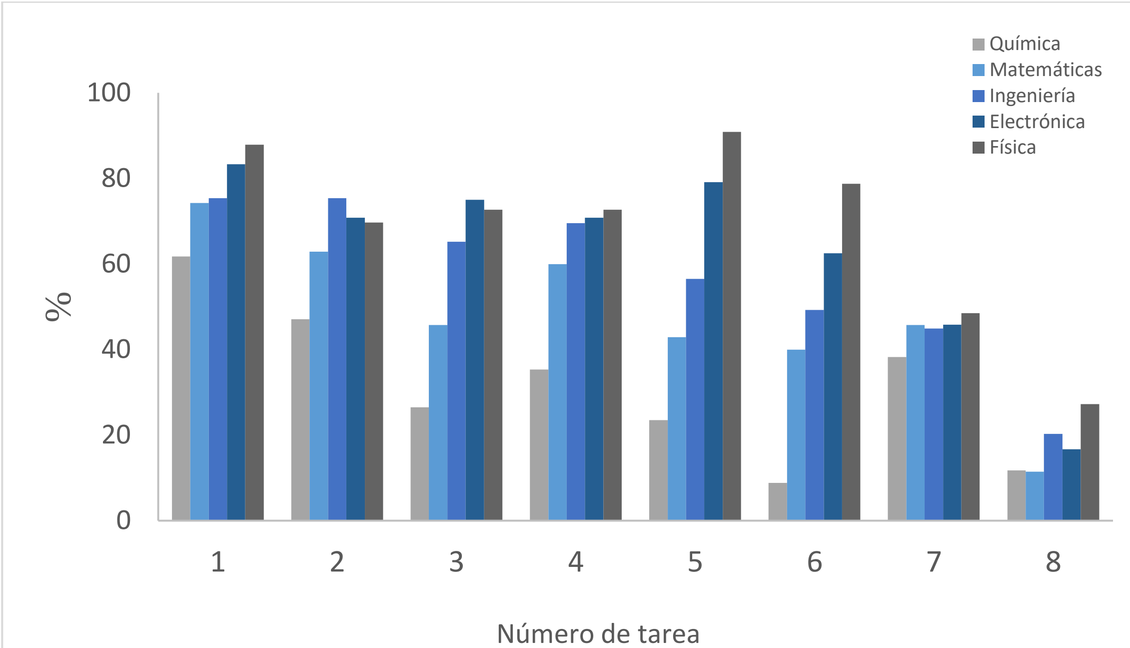
Alumnos Universitarios de nuevo ingreso (edad promedio: 18 años, con 11 meses)



GRÁFICA 13. Número de "tareas" resueltas por estudiantes de nuevo ingreso a la Universidad.

Las tareas se aplicaron a alumnos aceptados en el primer periodo de electrónica, ingeniería, física y, alumnos de química y matemáticas, quienes ingresaron en el segundo periodo.

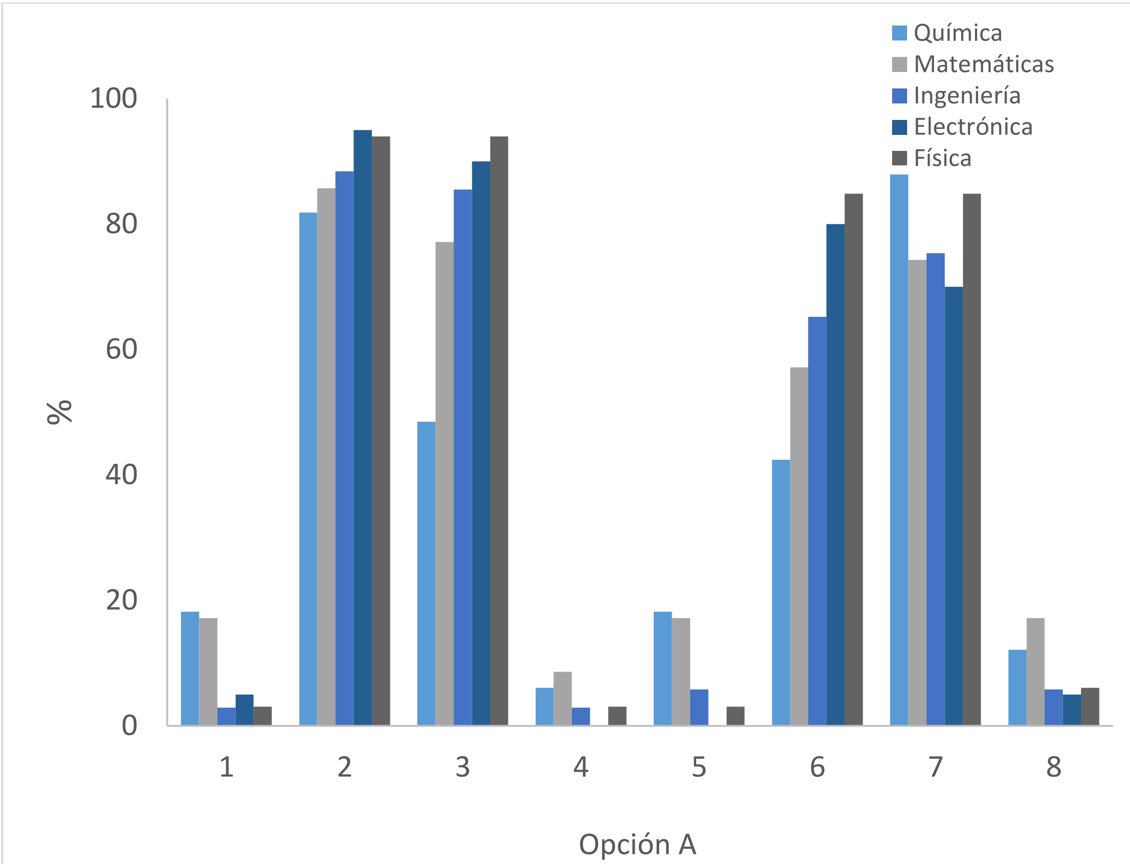
Con el criterio antes establecido, relacionado con el porcentaje de alumnos que fueron capaz de resolver cinco o más tareas, se tiene que los de Química obtuvieron el 15%, los Matemáticas el 51%, los de Ingeniería el 69%, los Electrónica 67%, mientras que los de Física un 73%.



GRÁFICA 14. Porcentaje de estudiantes de nuevo ingreso a la Universidad que responden correctamente en cada "Tarea".

Se encontró que los estudiantes de Química, resolvieron en promedio el 30% las tareas 2, 3 y 4, mientras que los de matemáticas en promedio resolvieron de 2 a 7 tareas, éstos dos grupos corresponden a alumnos que, aunque es posible que tengan afinidad por las matemáticas, no acreditaron en la primera oportunidad su ingreso, respecto a los estudiantes de química, son alumnos que también, ingresaron en una segunda oportunidad. Respecto a los estudiantes de física e ingeniería el 35% pudieron resolver siete y seis tareas respectivamente. Finalmente se encontró que 20%, de estudiantes de electrónica pudieron resolver las ocho tareas, estos alumnos acreditan su inscripción, quienes obtienen los mayores puntajes de una población el 80% fueron rechazados.

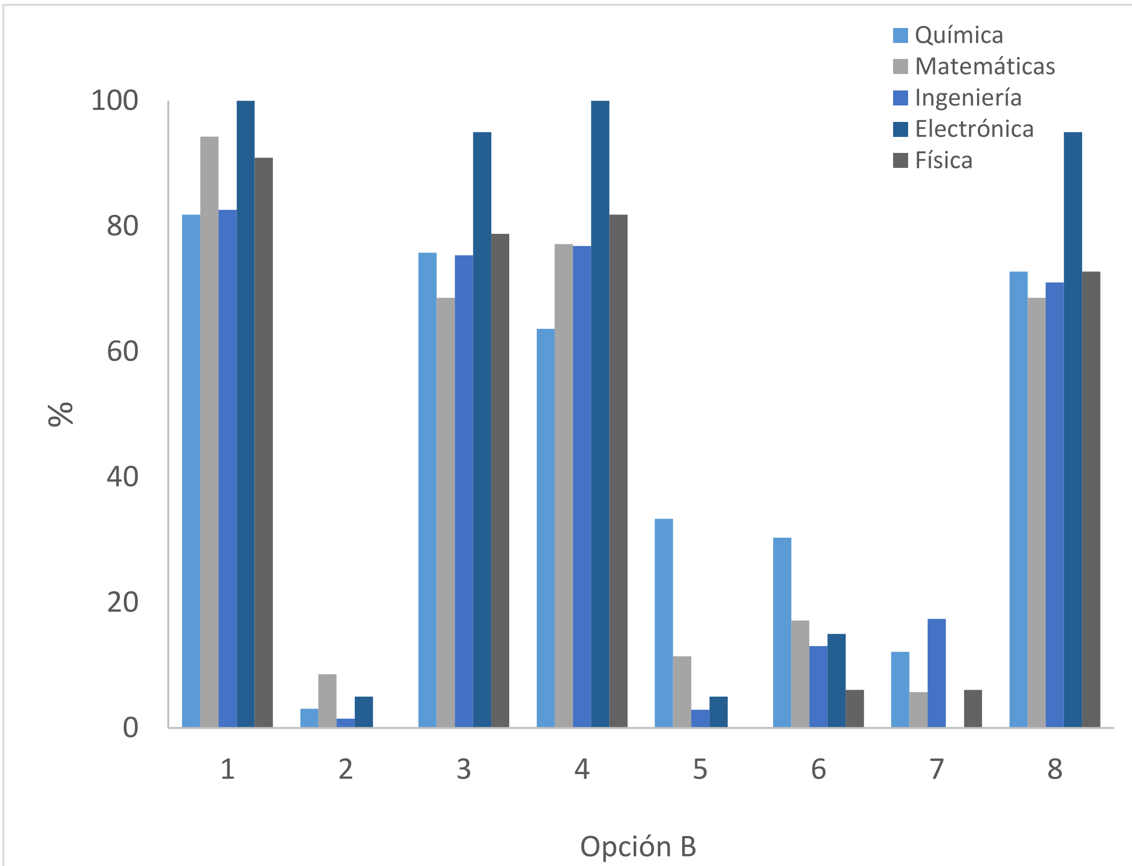
Opción a.



GRÁFICA 15. Porcentaje de estudiantes de nuevo ingreso a la Universidad que contestó la Opción A en cada "Tarea".

En la tarea 2, con un porcentaje mayor al 80% de los estudiantes de las diferentes carreras responden correctamente identificando que 5/10 pertenece al conjunto de fracciones equivalentes de ½; cabe señalar, que es la tarea que responden correctamente en un alto porcentaje. Estudiantes de las diferentes carreras excepto los pertenecientes a la facultad de química, responden correctamente la tarea 3 respondiendo en un 78% de manera correcta e identificando fracciones equivalentes de un conjunto de diversas representaciones simbólicas y gráficas la fracción ¼; mientras tanto, los de la facultad de química apenas si sólo el 48% lo hace correctamente. Para la tarea 6, estudiantes de la facultad de matemáticas y química realizando la comparación entre fracciones señalan que la primera fracción es mayor que la segunda identificando como característica particular de esta tarea en un porcentaje promedio del 52%; mientras tanto, estudiantes de la facultad de electrónica, física e ingenierías contestan bien en un 80%.

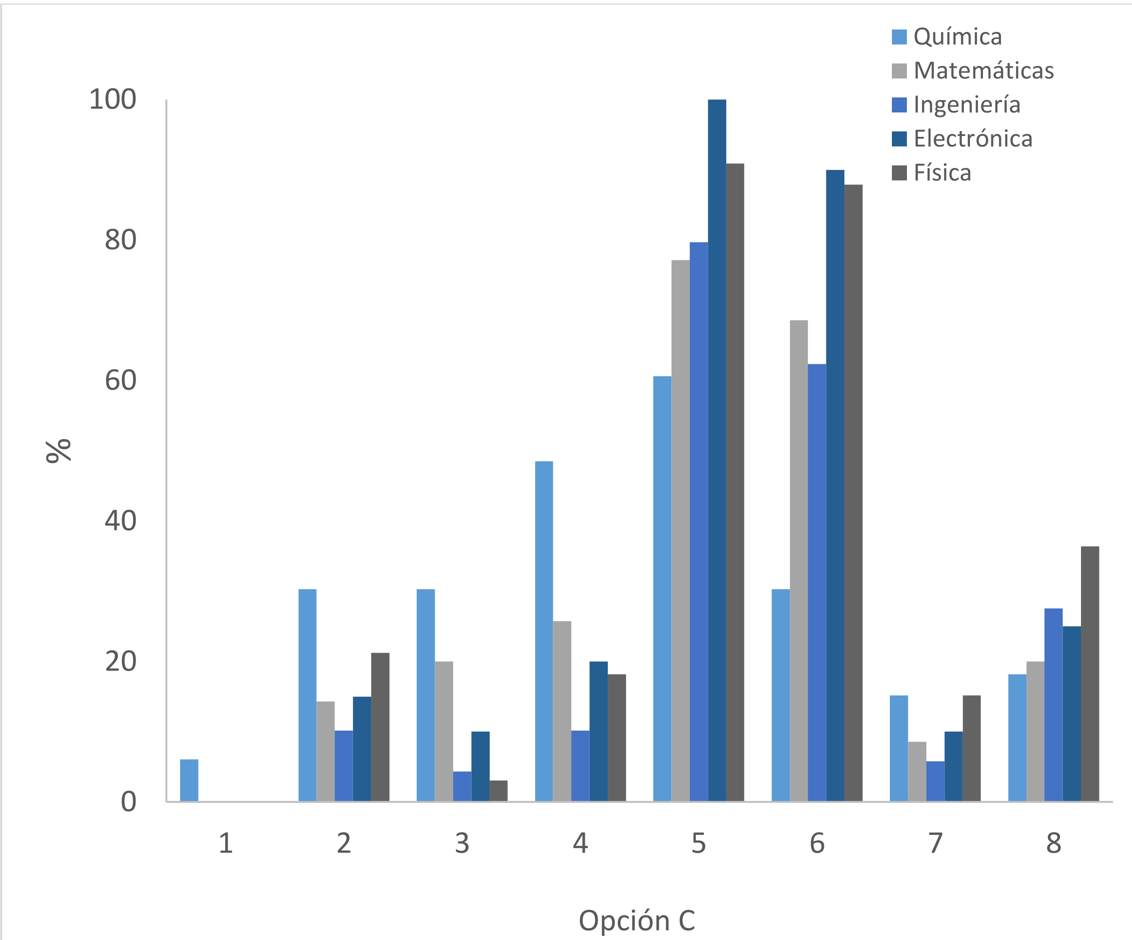
Opción b.



GRÁFICA 16. Porcentaje de estudiantes de nuevo ingreso a la Universidad que contestó la Opción B en cada "Tarea".

Para la tarea 1, sin mayores dificultades en identificar y obtener fracciones equivalentes los estudiantes que han ingresado a las diferentes licenciaturas, responden mayor al 80% de manera correcta. En la tarea 3 (fracciones equivalentes en diferentes representaciones simbólicas y gráficas) y 4 (fracciones equivalentes en representaciones gráficas), estudiantes de la facultad de electrónica sobre salen de las demás debido a que responden de manera correcta en un porcentaje mayor al 95% en ambas tareas; mientras tanto, los otros estudiantes responden en un porcentaje que oscila entre el 65% y el 80%. Resultados similares suceden en la tarea 8 (características y representaciones de las fracciones impropias), al responder en un 92% de manera correcta por parte de los estudiantes de la facultad de electrónica y sólo un 70% para alumnos de las demás facultades.

Opción c.



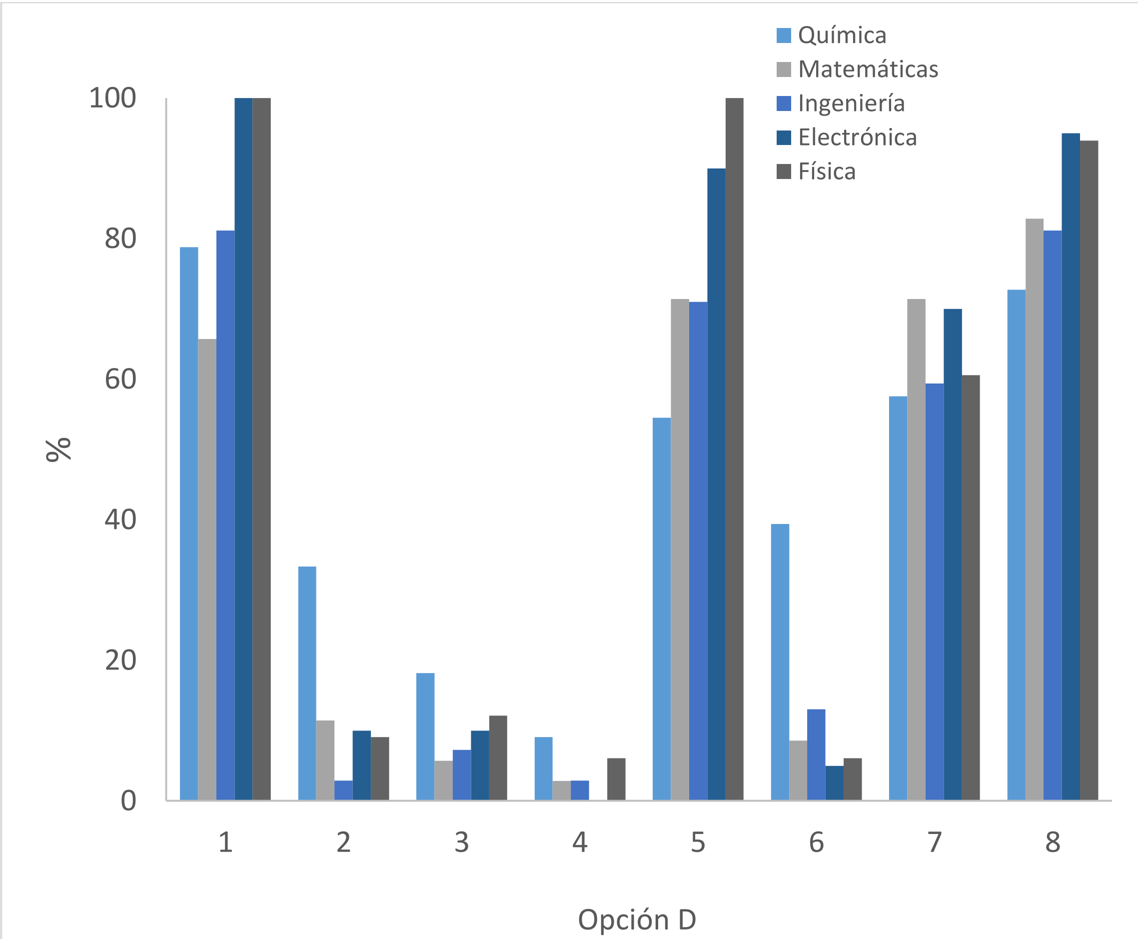
GRÁFICA 17. Porcentaje de estudiantes de nuevo ingreso a la Universidad que contestó la Opción C en cada "Tarea".

Estudiantes de la facultad de química presentan mayores dificultades en comparación de las demás, al identificar y conocer la propiedad de la tarea 5 y por lo tanto, elegir la opción como respuesta correcta sólo el 60% de los estudiantes de esta facultad;

por otra parte, los de la facultad de matemáticas e ingenierías logran identificar la propiedad en un 78% aproximadamente y más del 90% los de física y electrónica.

En una forma similar, son los resultados para la tarea 6; sin embargo, con porcentajes menores al comparar e identificar que la primera fracción es mayor que la segunda. Los estudiantes de física y electrónica responden correctamente en un 88%, los de la facultad de matemáticas e ingenierías en un 70% y los de química apenas alcanzando un 35%.

Opción d.



GRÁFICA 18. Porcentaje de estudiantes de nuevo ingreso a la Universidad que contestó la Opción D en cada "Tarea".

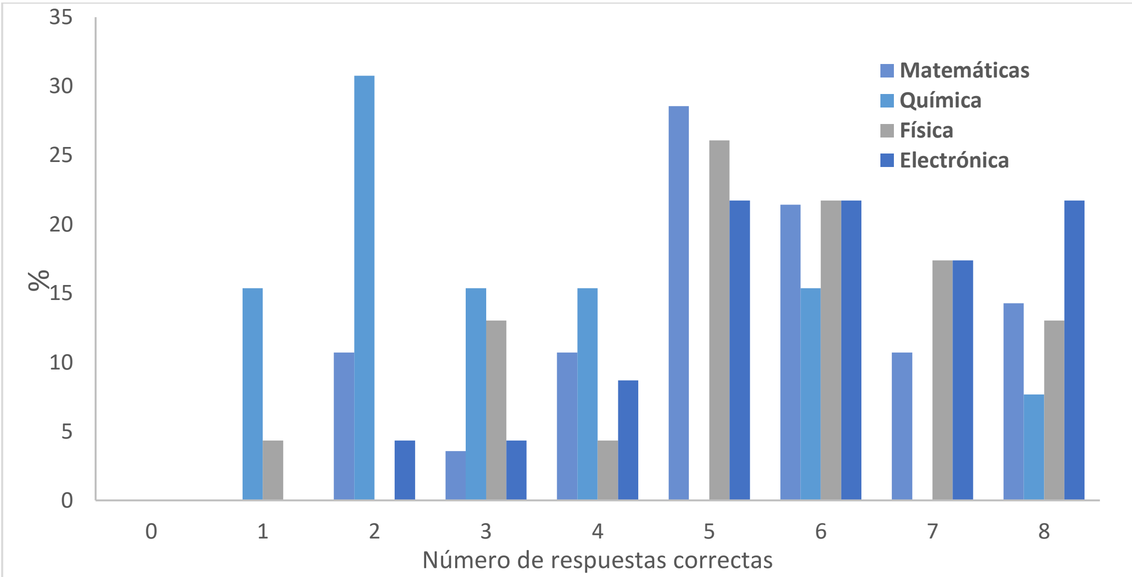
En la tarea 1, más del 60% de los estudiantes no presentan dificultades en identificar fracciones equivalentes a partir de la simplificación de fracciones. Para la tarea 5, a pesar que de manera generaliza más del 55% de los estudiantes de las diferentes facultades responden correctamente pueden realizar una operación sencilla al ser una suma de fracciones con el mismo denominador, no le es tan sencillo identificar la propiedad del conjunto de operaciones de fracciones. Se esperaría que el porcentaje fuera mayor.

Hasta el momento, dentro de las diferentes opciones estudiantes de la facultad de química son los que mayores errores han tenido y como consecuencia los que tienen menores porcentajes de respuestas correctas en las diferentes tareas; para demostrarlo se encuentra la tarea 6, debido a que el margen no solo mayor a los estudiantes de las diferentes facultades si no con respecto a la tarea y opción en sí mismo al obtener un 40% y señalar que esta opción cumple con la característica de la tarea que hace referencia con comparar fracciones.

Tomando como suficiente, el resolver cinco o más tareas, los estudiantes que entraron a: La facultad de Física (F) lograron el 71%, Ingenierías (I) lograron el 69%, La facultad de Electrónica (FE) lograron el 54%, los que entraron a la facultad de físico matemáticas, carrera de matemáticas (FM) obtuvieron el 48% y los que entraron a la facultad de química (FQ), solo el 15%.

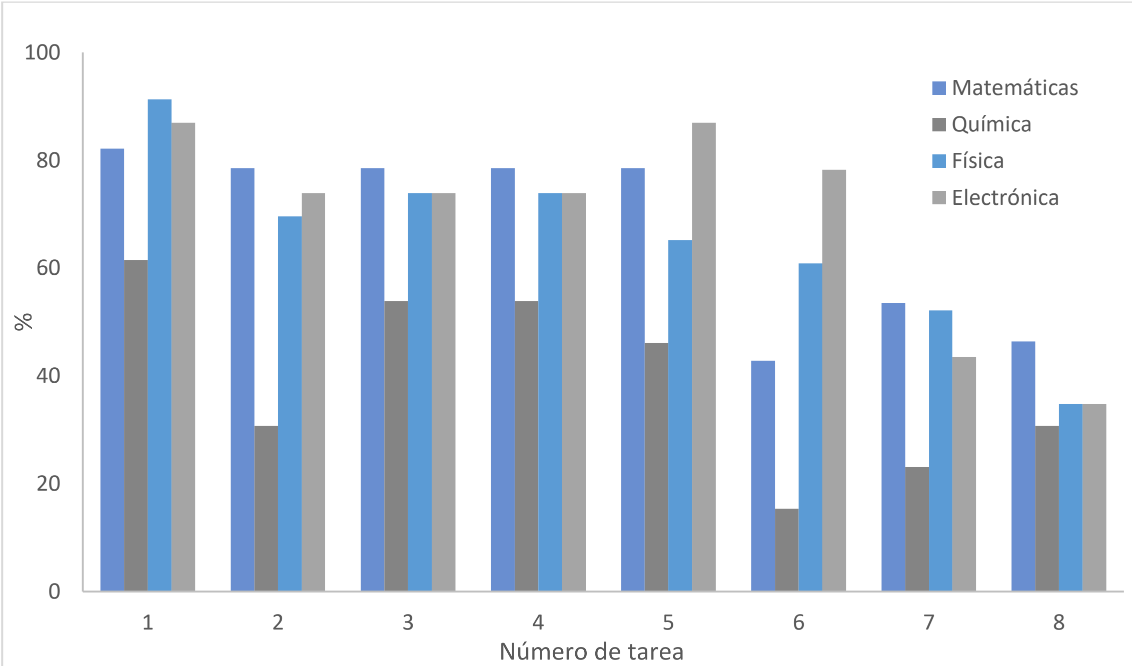
Respecto al promedio de respuestas correctas por tarea, los de física F obtuvieron el 69°, los de FM obtuvieron el 52%, y los FQ, el 38%

Alumnos Universitarios de Licenciatura (edad promedio: 21 años)



GRÁFICA 19. Número de "tareas" resueltas por estudiantes universitarios.

Los siguientes resultados se derivan de la aplicación de las tareas a estudiantes que en promedio habían cursado de cinco a siete semestres en las licenciaturas; Física (F), Matemáticas (M), Química (Q) y Electrónica (E), por lo tanto, fueron alumnos cuya edad oscila en el rango de 21 a 23 años. Con el criterio antes establecido, relacionado con el porcentaje de alumnos que fueron capases de resolver más de cinco tareas, se tiene que los F obtuvieron el 75%, los M el 70%, los E, 69%, mientras que los Q, solo el 23%.

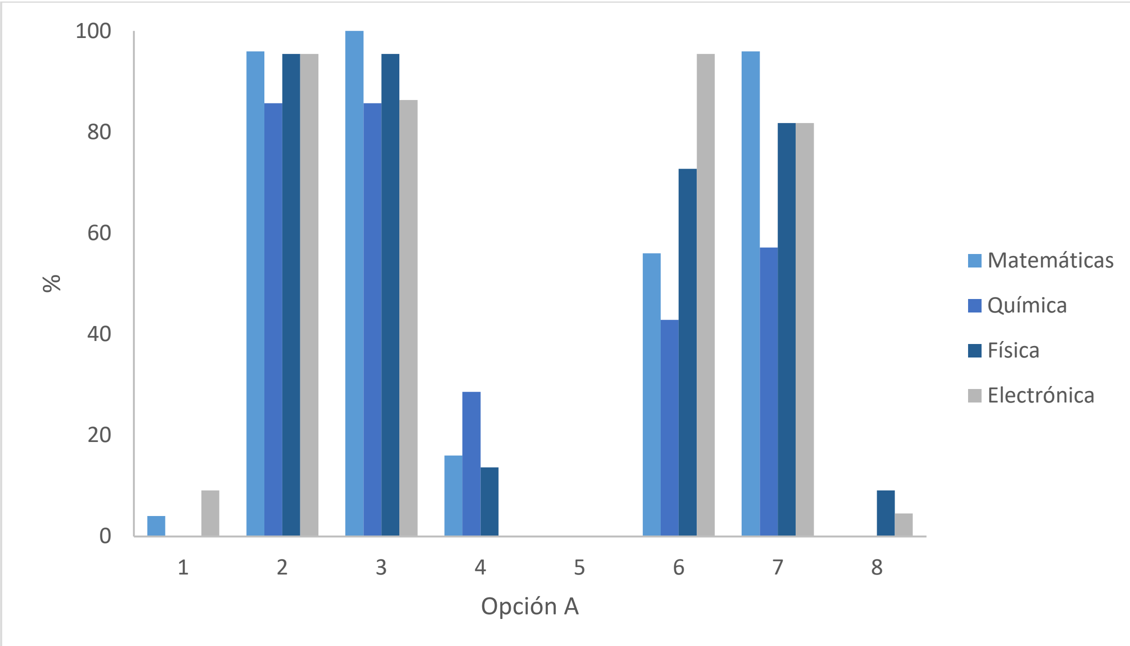


GRÁFICA 20. Porcentaje de estudiantes universitarios que responden correctamente cada "Tarea".

Respecto al promedio de respuestas correctas por tarea, los F obtuvieron el 67%, los M el 71%, los E, 73%, mientras que los Q, sólo 41%

Se esperaría que los porcentajes fueran mayores con respecto a los diferentes niveles educativos o grados. También se puede señalar que los márgenes de error son menores, aunque los estudiantes siguen presentando dificultades para resolver las diversas tareas.

Opción a.



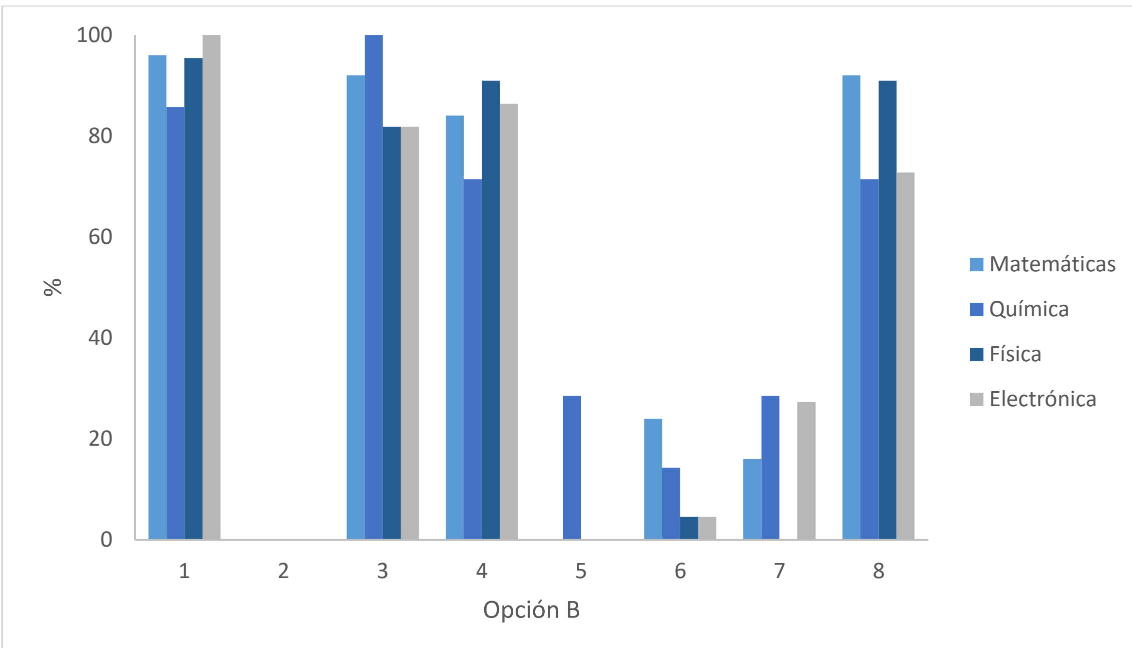
GRÁFICA 21. Porcentaje de estudiantes universitarios que contestó la Opción A en cada "Tarea".

Para la tarea 2 y 3, estudiantes de las cuatro facultades respondieron correctamente en un porcentaje mayor del 82%; identificando fracciones equivalentes con respecto a ½ e identificando y reconociendo fracciones equivalentes en diferentes representaciones ya sean simbólicas o gráficas, respectivamente.

Sin embargo, para la tarea 6; se pudo observar que hay mayores diferencias entre estudiantes de las diversas facultades siendo los de electrónica que responden correctamente con el mayor puntaje correspondiente al 92%, los de física responden en un porcentaje menor con un 70%, los de matemáticas presentando mayores dificultades con apenas el 55% y por último, los de química que de manera deficiente solo el 40% identifica que el comparar un par de fracciones, la primera fracción debía ser más grande que la segunda.

Ya en la tarea 7, aunque incrementa el porcentaje de respuestas correctas al reconocer la pertenencia de un número decimal como una representación simbólica de las fracciones. Estudiantes de química solo lo hacen el 60%, los de electrónica y física en un 81% y en un 95% los de matemáticas.

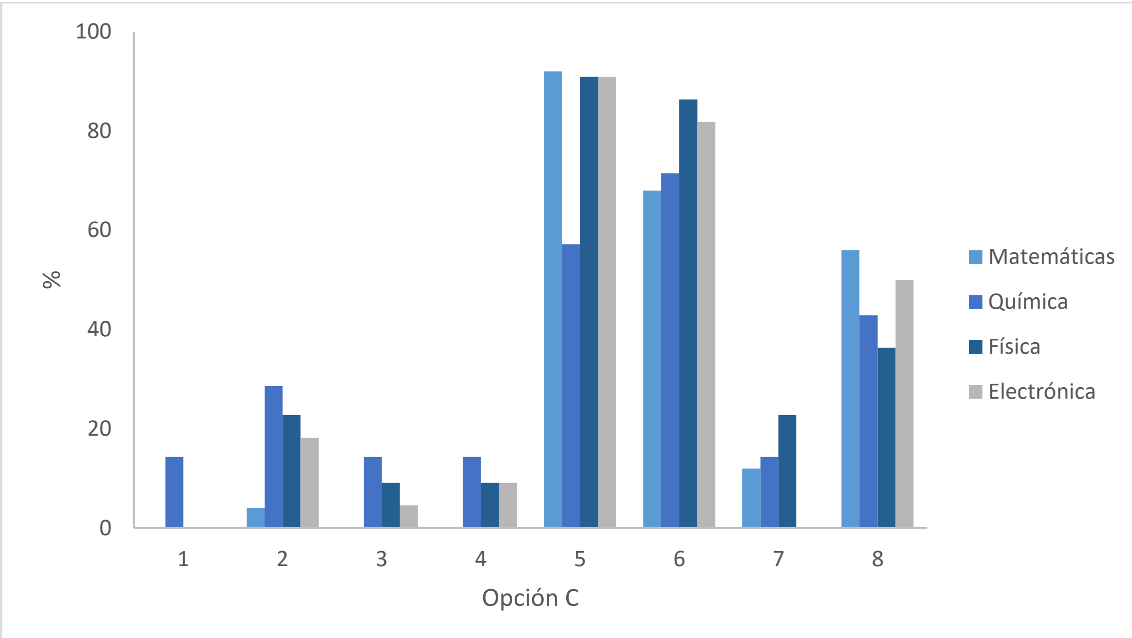
Opción b.



GRÁFICA 22. Porcentaje de estudiantes universitarios que contestó la Opción B en cada "Tarea".

Cabe señalar que esta opción es correcta para la tarea 1, 3, 4 y 8, siendo que estudiantes de las diversas carreras señalan de manera correcta en más del 70% para todas. Mientras tanto, para la tarea 1(reconocer la equivalencia entre dos fracciones dadas) como para la 3 (identificar fracciones equivalentes en diferentes representaciones), estudiantes de las cuatro licenciaturas identifican las características particulares de ambas tareas en más del 80%. Por otra parte, para la tarea 4(fracciones equivalentes en representaciones gráficas) y 8 (características de las fracciones impropias), los porcentajes de respuestas correctas oscilan entre 70% y el 90%, siendo los porcentajes menores para los estudiantes de química y los mayores para los de matemáticas y electrónica.

Opción c.



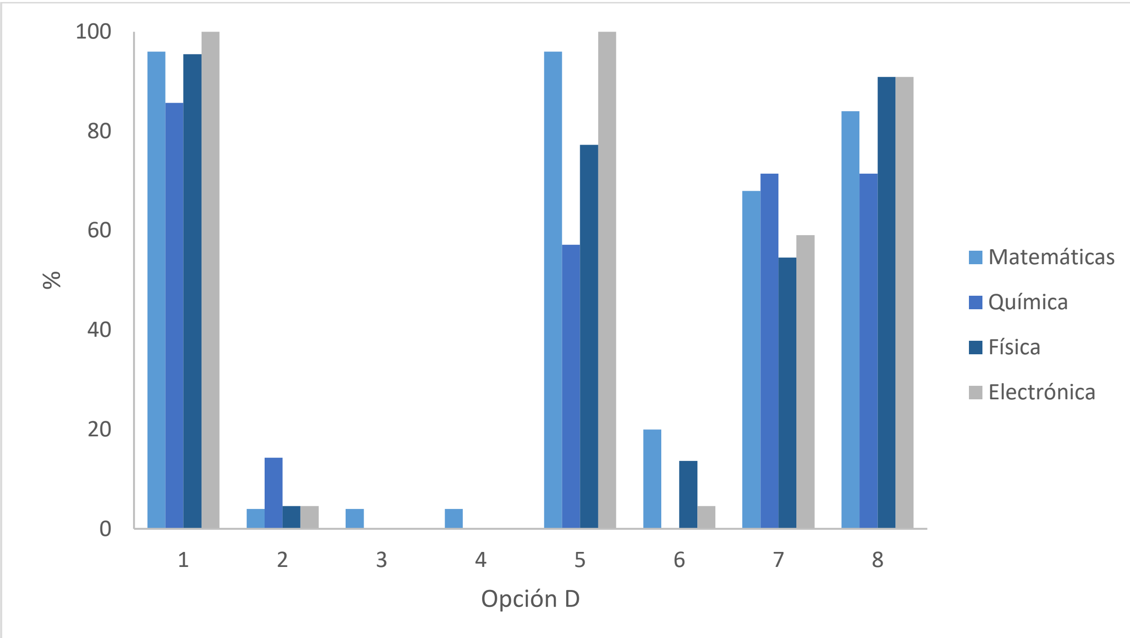
GRÁFICA 23. Porcentaje de estudiantes universitarios que contestó la Opción C en cada "Tarea".

En la tarea 5, los estudiantes de matemáticas, física y electrónica en un 90% señalan e identifican que una división de una fracción entre sí misma es 1. Sin embargo, sólo el 55% de los estudiantes de química logran identificar las características en juego.

Para la tarea 6, en un promedio del 76% de los estudiantes identifican que el comparar fracciones, la primera fracción es más grande que la segunda sin importar que el numerador sea el mismo.

Cabe señalar, que en la tarea 8 con un porcentaje promedio del 50%, los estudiantes de las diferentes licenciaturas señalan esta opción como correcta siendo un número decimal una forma de representar una fracción, pero la característica de la tarea es reconocer e identificar fracciones mixtas en una sola representación.

Opción d.



GRÁFICA 24. Porcentaje de estudiantes universitarios que contestó la Opción D en cada "Tarea".

En la tarea 1, más del 85% de los estudiantes no presentaron mayores problemas al identificar fracciones equivalentes a partir de la simplificación de fracciones.

En la tarea 5, hay mayor discrepancia a la hora de responder los estudiantes de las diferentes facultades; sólo el 55% de química, el 75% de los de física responden correctamente realizando una operación sencilla como lo es una suma de fracciones con el mismo denominador; sin embargo, para los alumnos de matemáticas y electrónica no le fue tan difícil de identificar que el resultado del conjunto de operaciones de fracciones siempre era 1.

Aunque al parecer eran sencillas las tareas 7 y 8, el porcentaje promedio solo fue del 60% para la tarea 7 identificando las diferentes representaciones simbólicas de las fracciones suponiendo que al ver diversos símbolos no pudieron asociar las características de cada uno de los números y sólo un 80% de los estudiantes reconocen las características de las fracciones impropias como propiedad de la tarea 8, siendo esta una de las más sencillas, pero a la vez confusa.

CAPÍTULO V

CONCLUSIONES

Las investigaciones en el tema de fracciones se han incrementado a través del tiempo, es evidente que a pesar de los años sigue siendo un tema complejo debido al conjunto de elementos teóricos que las involucran.

Los resultados obtenidos en la presente investigación, utilizando el instrumento denominado “Tarea de Selección”, evidencia que los estudiantes de los diferentes niveles educativos obtienen porcentajes similares en cada una de las tareas; siendo la tarea número 2 (fracciones equivalentes) la que se responde en mayor porcentaje de forma correcta, mostrando mayor dominio y presentando las mayores dificultades en la tarea número 6 (comparación entre fracciones) y 8 (las diferentes representaciones de un fracción).

Mientras tanto, el número de tareas resueltas correctamente incrementa de acuerdo al nivel educativo en el que se encuentran los estudiantes; resaltando la diferencia entre los puntajes obtenidos por los estudiantes que se encuentran en carreras relacionadas específicamente con las matemáticas, debido a que son mayores en comparación, con los puntajes de los estudiantes de la licenciatura de Química que muestran porcentajes bajos de respuestas correctas, tanto en alumnos de nuevo ingreso y aquellos que ya se encontraban cursando la carrera.

Se puede identificar que siempre hay un 10% de estudiantes capaces de resolver las ocho tareas y un 15% de estudiantes que independientemente de la edad, no fueron capaces de resolver más de una tarea.

Finalmente, es importante mencionar que los resultados obtenidos son independientes a la metodología de enseñanza, del docente, y que el aprendizaje de las fracciones a largo plazo parece ser en promedio iguales. El enfoque de enseñanza de las fracciones, haciendo mayor énfasis en la interpretación como parte-todo, ha provocado la comprensión parcial de este contenido; por lo tanto, aquello que no tiene sentido ni significado para los estudiantes solo se puede mecanizar.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arteaga, M. (2016). *El aprendizaje de las fracciones: Operatividad mediante gestión de equivalencias y su incidencia en la resolución de problemas* (Tesis de Maestría). Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla.

Azcarate, P. y Cardeñoso, J. (1994). La naturaleza de la matemática escolar: un problema fundamental de la Didáctica de la Matemática. *Revista Investigación en la Escuela, 23*, 79-88.

Block, D. y Solares, D. (2001). Las fracciones y la división en la escuela primaria: análisis didáctico de un vínculo. *Educación Matemática*, *13*(2), 5-30.

Calhoon, M., Emerson, R., Flores, M. & Houchins, D. (2007). Computational fluency performance profile of high school students with mathematics disabilities. *Remedial arid Special Education*, 28, 292-303.

Chakkrapan, P., Niwat, S. & Rekha, K. (2014). Exploring Scientific Reasoning Ability in Thai University Students: A Case Study of Khon Kaen University, Thailand. *Procedia-Social and Behavioral Sciences, 116*,486-491. https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2014.01.245

Cubillo, C. y Ortega, T. (2003). Análisis de un modelo didáctico para la enseñanza/aprendizaje del orden de las fracciones. *Educación Matemática*, *15*(2), 55-75.

Fandiño, M.I. (2009). *Las fracciones: Aspectos Conceptuales y Didácticos*. Bogotá, Colombia: Cooperativa Editorial Magisterio.

Flores, G. (2010). *Significados asociados a la noción de fracción en la escuela secundaria* (Tesis de Maestría). Recuperado de: http://www.matedu.cicata.ipn.mx/tesis/maestria/flores_2010.pdf

Freudenthal, H. (1983). *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas.* Dordrecht, The Netherlands: D. Reidel.

Fuller, R., Karplus, R. & Lawson, A. E., (1977). "Can physics develop reasoning?”. *DigitalCommons@University of Nebraska - Lincoln*, 2(1), 23-28. Recuperado de: http://digitalcommons.unl.edu/physicsfuller/31

Hargrove, D. L. (2015). Developing Primary (K-2) Teachers’ Understanding of High Cognitive Demand Mathematical Tasks. Recuperado de: http://digilib.gmu.edu/jspui/bitstream/handle/1920/9814/Hargrove_gmu_0883E_10800.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Harrison, D. (2015). Factors correlated with students’ scientific reasoning ability in an introductory university physics course. Recuperado de http://www.upscale.utoronto.ca/PVB/Harrison/CTSR_Factors/CTSR_Factors.pdf

Hincapié, C. (2011). Construyendo el concepto de fracción y sus diferentes significados, con los docentes de primaria de la institución educativa San Andrés de Girardota (Tesis de Maestría). Recuperado de http://www.bdigital.unal.edu.co/6084/1/43701138.2012.pdf

Lamon, S. (2001). Presenting and representing: From fractions to rational numbers. En Cuoco, A. (Ed.), *The roles of representation in school* mathematics. 2001 Yearbook ofthe National Council of Teacher of Mathematics (pp.146-165) Reston, VA: National Council of Teacher of Mathematics.

Lamon, S. (2006). Teaching fractions and ratios for understanding (2nd ed.). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Lawson, A. (1994). Uso de los ciclos de aprendizaje para la enseñanza de destrezas de razonamiento científico y de sistemas conceptuales. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, *12*(2), 165-187.

Lawson, A. (2001). Using the learning cycle to teach biology concepts and reasoning patterns. *Journal of Biological Education*, 35(4), 165-169.

Llinares, S. (2003). Fracciones, decimales y razón. Desde la relación parte - todo al razonamiento proporcional. En M. d. Chamorro. (Ed.), *Didáctica de las matemáticas* (pp. 187 - 220). Madrid, España: Pearson Educación.

Linares, S. y Sánchez, M. V. (2000). *Fracciones*. Madrid, España: Editorial Síntesis.

Mahmoud, Y. (2013). *The Relationship Between the Learning Styles of Students in Grades Five and Six and Their Held Misconceptions About Dividing Fractions Based on Kolb's Model* (Thesis Doctoral). Recuperado de https://bspace.buid.ac.ae/bitstream/1234/511/1/90015.pdf

Mancera, E. (1992). Significados y significantes relativos a las fracciones. *Educación Matemática. 4*(2). 30-54.

Maza, C. (1995). *Aritmética y representación: De la comprensión del texto al uso de materiales.* Barcelona: Paidos.

Maza, C. (1999). Equivalencia y orden: la enseñanza de la comparación de las fracciones. *Revista Suma, 31*, 87-95.

Marek, E. & Cavallo, A. (1997). *The Learning Cycle and Elementary School Science*, Portsmuth, NH: Heinemann.

Moreno, A. y Flores, P. (2000). Conocimiento profesional del profesor de matemáticas. Un acercamiento a los números racionales. En Gámez y otros (Eds.) *IX Congreso sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas "THALES"* (211-214). Cádiz, España: SAEM THALES.

Nunes, T. & Bryant, P. (2008). Key understanding in mathematics learning. Paper 3: Understanding rational numbers and intensive quantities. Recuperado de: http://www.nuffieldfoundation.org/sites/default/files/P3_amended_FB2.pdf

OCDE (2010). Mejorar las escuelas. Estrategias para la acción en México. París: OCDE. Recuperado de: http://www.oecd.org/education/school/47101613.pdf

Parra, M. y Flores, R. (2008). Aprendizaje cooperativo en la solución de problemas con fracciones. *Educación Matemática, 20* (1), 31-52.

Perera, B. y Valdemoros, M. (2007). Propuesta didáctica para la enseñanza de las fracciones en cuarto grado de educación primaria. *Investigación en Educación Matemática XI*, 209-218.

Post, T., Wachsmuth, I., Behr, M. & Lesh, R. (1984). Order and Equivalence of Rational Numbers: A Clinical Teaching Experiment. *Journal for Research in Mathematics Education, 15*(5), 323-341.

Post, T., Wachsmuth, I., Lesh, R. & Behr, M. (1985). Order and Equivalence of Rational Numbers: A Cognitive Analysis. *Journal for Research in Mathematics Education, 16* (1), 18-36.

Rico, L. (1995). Conocimiento Numérico y Formación del Profesorado. Granada: Universidad de Granada.

Tanner, K. (2008). Working with Students to Help Them Understand Fractions. *Australian Primary Mathematics Classroom, 13*(3), 28-31.

SEP (2011). Programas de estudio 2011. Guía para el maestro. Educación Básica Primaria. Tercero a Sexto grado. México: SEP.

SEP (2011). Programas de estudio 2011. Guía para el maestro. Educación Básica Secundaria. Matemáticas. México: SEP.

Valdemoros, M. (2004). Lenguaje, fracciones y reparto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 7*(3), 235-256.