BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

POSTGRADO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

El uso de la balanza para el aprendizaje de las ecuaciones de primer grado en secundaria: el caso de los libros de texto autorizados

Tesis

que para obtener el grado de:

MAESTRA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

PRESENTA:

LIC. YOLANDA ZAMORA CORONA

director de tesis:

DR. Josip Slisko Ignjatov

co-director de tesis:

MC. Adrian Corona Cruz

Junio 2017

Agradecimientos

Agradezco a la Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla el haberme brindado las facilidades y el apoyo necesario para realizar mis estudios de la Maestría en Educación Matemática. También doy gracias por la beca otorgada por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) de agosto de 2015 a diciembre de 2016, y a la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla por haberme apoyado económicamente para asistir y participar en los Congresos..... realizados en la Universidad Autónoma de Oaxaca y Nayarit del .. al.. de Octubre del año 2016.

Agradezco de manera especial a mi director de tesis, Dr. Josip Slisko Ignjatov, por su constante apoyo, por guiarme en mis avances durante la realización de este trabajo de investigación. Al Dr. .....(codirector) por sus oportunos consejos en relación al trabajo de tesis. También les doy las gracias a mis sinodales, al Dr. ..... y a las Dras. ..... e ..... por el tiempo empleado y sus valiosos comentarios que me permitieron enriquecer el contenido y la presentación de este escrito.

Yolanda Zamora Corona
junio, 2017.

Dedicatorias

A mis hijas Jessica y Tamara ....

A mis padres: ..... con todo cariño y amor que han luchado junto a mí toda la vida para lograr cada una de mis metas.

A mi èsposo Carlos ...

A todas aquellas personas importantes en mi vida que siempre estuvieron dispuestas a ayudarme. Esta tesis se las dedico a todos Ustedes con mucho cariño.

Resumen

Existen varios libros de texto oficiales de educación secundaria en México que utilizan el método de la balanza para la enseñanza de las ecuaciones de primer grado. Como estos libros inciden de manera directa en un gran número de estudiantes, es pertinente realizar un análisis del impacto que este método tiene sobre su aprendizaje. Con este propósito y con el objetivo de reconocer que tipo de uso de la balanza existe, y si hay casos en que su uso no es cognitivamente adecuado, se revisaron 96 libros de matemáticas I, II y III a nivel secundaria (CONALITEG) en los ciclos escolares 2015-2016 y 2016-2017. En esta revisión se encontraron 168 problemas que utilizan la balanza, distribuidos en los libros de los tres niveles de secundaria, la mayoría en primero y segundo grado. Adicionalmente se propone una clasificación de los problemas en 9 grupos: I) los que aplican el método de la balanza, II) los que se clasifican por el número de ecuaciones, III) los que tratan el aspecto DATOS, IV)los que tienen como objetos expresiones algebraicas o números, V) los que tratan el aspecto EVENTO, VI) los de errores de concepto, VII) los de acertijos, VIII) los de balanza de Arquímides (palanca) y IX) los que utilizan a la balanza como artefacto. Para verificar la autenticidad de los problemas nos apoyamos en la teoría de Palm. Con relación a la medida del impacto en el aprendizaje de los estudiates, se diseñó y aplicó una hoja de trabajo con dos problemas elegidos de los 168 de manera que uno de ellos es auténtico y el otro no. La hoja de trabajo se implementó en 113 estudiantes de tercer año de secundaria y en 125 estudiantes de primer año de preparatoria.

Índice general

Agradecimientos I

Dedicatorias II

Introducción III

1. Marco teórico **5**
1.1. El modelo de la balanza en el aprendizaje inicial del álgebra 5
1.2. Teoría de Palm: marco para las tareas auténticas 7
1.2.1. El marco: Aspectos de importancia 8
1.2.2. Clasificación de las contextualizaciones 14
1.3. Libro del maestro de secundaria 2011 15
1.3.1. El modelo de la balanza 19

2. Investigaciones anteriores **24**

3. Objetivos de la investigación y Metodología **29**
3.1. Objetivos de la investigación 29
3.2. Metodología 30

4. Investigación Documental **31**
4.1. Plan de estudios 31
4.2. Resultados de la revisión de los libros 32
4.2.1. Libros de primer nivel (ciclos 2015-2016 y 2016-2017) 32
4.2.2. Libros nivel segundo (ciclos 2015-2016 y 2016-2017) 35
4.2.3. Libros nivel tercero (ciclos 2015-2016 y 2016-2017) 37
4.3. Clasificación de Problemas 39
4.3.1. Problemas que aplican el método de la balanza 40

4.3.2. Problemas clasificados por el número de ecuaciones 44
4.3.3. Problemas que tratan sólo el aspecto DATOS 48
4.3.4. Problemas de balanza con expresiones algebraicas o números . . 51
4.3.5. Problemas se intentan dar la idea de casos reales (EVENTO) 52
4.3.6. Problemas con errores de concepto 55
4.3.7. Problemas con acertijos 57
4.3.8. Problemas con balanza de Arquímedes (palanca) 59
4.3.9. Problemas con balanza como artefacto (báscula) 60

5. Investigación con los alumnos **62**
5.1. Hoja de trabajo 62
5.2. Resultados 65

Bibliografía **69**

Introducción

El método de la balanza para la enseñanza de las ecuaciones de primer grado es un modelo frecuentemente estudiado por diversos autores como Figueira-Sampaio, dos Santos y Carrijo (2009), Turmudi y Haryanto(2011) entre otros, esto se debe a que se ha reconocido que el uso de las diferentes formas representacionales pueden contribuir en el aprendizaje de los estudiantes y además estimular el pensamiento relacional (Suh y Moyer, 2007). Autores reconocidos, como Greenes y Findell (1999) y Gardner (1993) recomiendan el uso de la balanza para representar expresiones algebraicas con el objeto de promover el pensamiento relacional de los estudiantes. Dichos autores también establecen que los estudiantes desarrollan el razonamiento matemático en álgebra cuando son capaces de interpretar las ecuaciones algebraicas usando dibujos, gráficos y representaciones simbólicas (elementos que aparecen en el modelo de la balanza). La importancia de estas representaciones es determinada por estándares internacionales como lo señalan Suh y Moyer (2007). En la presente investigación se revisó el currículo de la SEP, para verificar si toma en cuenta el uso de la balanza en la enseñanza de ecuaciones de primer grado. También se consultó el manual o libro del maestro de secundaria SEP para saber cómo aborda el tema de ecuaciones de primer grado. Como resultado encontramos que en los programas de estudio de secundaria SEP, se propone estudiar las ecuaciones de primer grado en segundo año, en el bloque IV en las orientaciones didácticas y planes de clase 8.4.2. En su plan de clase se sugiere utilizar el método de la balanza como un apoyo concreto para dar sentido a las propiedades de la igualdad. Liga de información: www.curriculobasica.sep.gob.mx/index.php/prog-secundaria En el manual para el maestro se sugiere que el método para entender ecuaciones de primer grado se aprende mejor si se introduce con modelos como el de la balanza. Liga de información: http://www.uv.mx/personal/grihernandez/files/2011/04/libromaestro.pdf

También se recopilaron y analizaron 168 problemas distribuidos en 96 libros de matemáticas a nivel secundaria (ciclo escolar 2015-2016 y 2016-2017)) que se pueden consultar en la página de la comisión nacional de libros de texto gratuitos CONALITEG(http://www.conaliteg.gob.mx/). Se identifican los problemas que no son auténticos desde la perspectiva de la teoría de Palm (2006,2008), analizando los siguientes 3 aspectos para visualizar detalles más finos en la contextualización del problema: even-

to (que no sea absurdo), datos (que sean reales) y preguntas (que sean pertinentes). Asimismo se realizó el diseño una hoja de trabajo (con un problema auténtico y otro problema no auténtico) que se aplica a 113 estudiantes de la Secundaria Técnica N. 60 y a 125 estudiantes de la preparatoria Benito Juárez García de la BUAP. Los objetivos de estas actividades exploratorias son investigar que hacen los alumnos cuando se les presenta un problema auténtico y averiguar si los alumnos cuando se les presenta un problema no auténtico son capaces de detectar el error o se encuentran totalmente desorientados. Finalmente se presentan resultados de las prácticas realizadas con estudiantes de secundaria y con estudiantes de nivel medio superior, con el fin de determinar el funcionamiento y el impacto de dicho modelo.

Nuestro trabajo se encuentra organizado de la siguiente manera: En el primer capítulo presentamos el marco teórico, en el segundo capítulo las investigaciones previas relacionadas, el tercer capítulo contiene la investigación documental y finalmente en el cuarto capítulo la investigación realizada con los estudiantes.

Capítulo 1

Marco teórico

Para alcanzar nuestros objetivos de investigación tomamos en cuenta el modelo de la balanza propuesto por Filloy, el cual es considerado por varios autores como uno de los principales para los aspectos didácticos. Para el análisis de la autenticidad de los problemas modelados con el método de la balanza se consideran tres aspectos de la teoría de Palm: evento (real), datos (no contradictorios) y pregunta (sensata). Para la no autenticidad de un problema basta con que se incumpla un sólo aspecto de la teoría de Palm, para su autenticidad, en un sentido riguroso tendrían que cumplirse 16 aspectos (incluidos los sub-aspectos). En nuestra investigación convenimos en que un problema es auténtico si cumple con los tres aspectos considerados y es no auténtico en otro caso. También es importante para nuestra investigación la revisión del libro para el maestro de Matemáticas de Secundaria que propone la SEP. Este libro que se propone como una guía para el profesor de secundaria, sustenta la razón de nuestra investigación debido a que se presentan sugerencias de cómo abordar el tema de la solución de ecuaciones lineales a través del método de la balanza. Este capítulo consiste de 3 secciones; en la sección 1.1, presentamos el modelo de la balanza de Filloy, en la sección 1.2, se presentan los aspectos de la teoría de Palm y finalmente en la sección 1.3 se muestra la parte correspondiente al tema de las ecuaciones lineales por el método de la balanza del libro del maestro.

1.1. El modelo de la balanza en el aprendizaje inicial del álgebra

En el aprendizaje inicial del álgebra (Filloy, 1999) recomienda utilizar el método de la balanza para la enseñanza de las ecuaciones de primer grado. El punto de partida para establecer su modelo se basa en una de las primeras operaciones sobre la incógnita

para la resolución de ecuaciones lineales "no aritméticas" y la introducción semántica de dicha operación mediante la utilización de modelos concretos, básicamente utiliza el método de la balanza para enseñar a operar la incógnita en una ecuación de primer grado de la forma

$$Ax + B = Cx, \tag{1.1}$$

donde A, B, y C son enteros positivos dados y $C > A$.

La propuesta de Filloy puede ser explicada a través de 5 pasos fundamentales los cuales describimos a continuación.

Paso 1. Reproducción del modelo (la traducción de ecuación al modelo)

En la figura 1 se muestra la balanza que utiliza Filloy para resolver ecuaciones de primer grado de la forma (1). En lado izquierdo observamos que los cuadros huecos representan a los objetos cuyo peso no se conoce, es decir el coeficiente que acompaña a la variable x, los cuadros rellenos representan a la constante B, del lado derecho también observamos cuadros huecos que representan a los objetos cuyo peso no se conoce del coeficiente C.

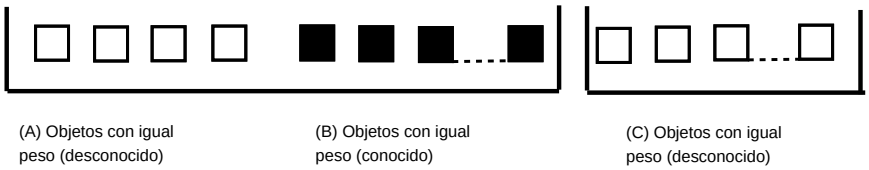


Figura 1.1: Modelo de la balanza de Filloy.

Paso 2. Situación de equilibrio

Se realiza la manipulación de los objetos en ambos lados de los platillos reduciendo de manera iterada los objetos de peso desconocido, manteniendo el equilibrio, hasta eliminar todos los objetos de este tipo de uno de los platillos (ver figura 1.2).

Paso 3. Elaboración de la ecuación simplificada

Después de la eliminación de los objetos desconocidos la ecuación (1) queda reducida a una ecuación aritmética de la forma

$$(C - A)x = B. \tag{1.2}$$

Aquí debemos observar que si $C - A = 1$ el problema se resuelve de manera exitosa con el modelo de la balanza. En el caso $C - A > 1$, el modelo pierde sentido ya que la

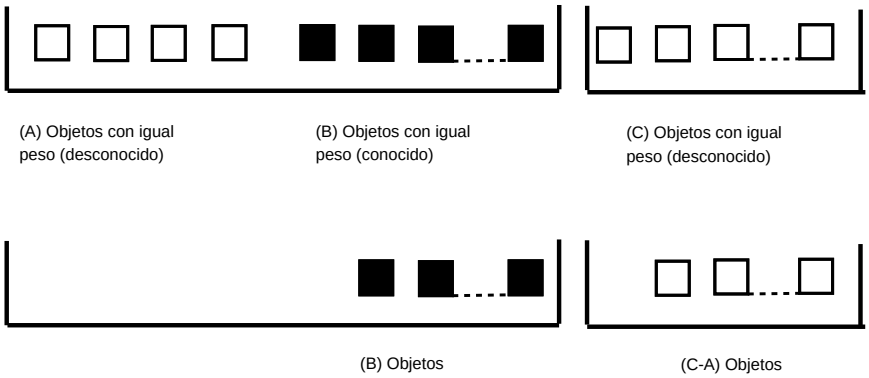


Figura 1.2: Esta imagen muestra el resultado de la eliminación de objetos desconocidos en la imagen de la Figura 1.1.

balanza es un artefacto concreto, cuyo objetivo es la comparación de las masas con la manipulación de los objetos de tal manera que ésta nunca pierda el equilibrio. La salida de Filloy a este problema se reduce a la solución aritmética debido a que los objetos en la balanza no pueden ser divididos para manipularlos, de aquí la distinción entre una ecuación aritmética y una ecuación algebraica.

Paso 4. Resolución de la ecuación simplificada

En este caso como se ha mencionado anteriormente se procede a dar una solución aritmética al problema inicialmente planteado en el caso de que $C - A > 1$.

Paso 5. Verificación de la respuesta

Finalmente se le da el valor correspondiente al objeto con masa desconocida y se verifica si la suma de las masas de los objetos del platillo izquierdo coincide con la suma de las masas de los objetos del platillo derecho.

1.2. Teoría de Palm: marco para las tareas auténticas

Muchas situaciones del mundo real son "interpretadas" como problemas verbales, es natural preguntarse sobre el significado de esta interpretación o concordancia. El marco hace alusión a dicho significado, el desarrollo de actividades que nos conducen a tal concordancia se puede considerar como la simulación de una situación real a través de esquemas en un problema verbal.

El marco parte de la suposición de que si una medida del funcionamiento en un problema verbal es interpretada como relevante al funcionamiento de una situación real, entonces hay condiciones representativas de los estímulos y las respuestas que se producen en la vida real (Fitzpatrick y Morrison, 1971, p. 239).

Forman parte fundamental para la simulación de una situación real los siguientes conceptos:

i) Comprensión (gama de diversos aspectos de la situación que se simula).

ii) Fidelidad (grado de aproximación a una representación).

iii) Representatividad (combinación de comprensión y de fidelidad).

El marco abarca un conjunto de aspectos de las situaciones de la vida real que son importantes en la simulación de situaciones del mundo real. En muchas situaciones del mundo real es imposible simular todos los aspectos implicados, por lo que se hace necesario establecer restricciones sobre la comprensión.

Dentro de la teoría de Palm se proponen aspectos que puedan hacer que la fidelidad de éstos impacte en:

a) La medida en que los estudiantes relacionan las actividades matemáticas con las situaciones verdaderas que se simulan.

b) Las capacidades requeridas para crear un modelo matemático basado en una situación en el mundo real y, a la vez, en las competencias requeridas para interpretar los resultados matemáticos obtenidos en relación a la situación real.

A continuación se presentan todos los aspectos importantes de la teoría.

1.2.1. El marco: Aspectos de importancia

Para la simulación de situaciones de la vida real los aspectos enlistados a continuación son considerados por la Teoría de Palm como los más importantes.

A EVENTO

B PREGUNTA

C INFORMACIÓN/DATOS

- C1 Existencia
- C2 Realismo

D PRESENTACIÓN

- D1 Modo
- D2 Lenguaje

E ESTRATEGIAS DE SOLUCIÓN

- E1 Disponibilidad
- E2 Experiencia plausible

F CIRCUNSTANCIAS

- F1 Disponibilidad de herramientas externas
- F2 Dirección
- F3 Consulta y colaboración
- F4 Oportunidades de la discusión
- F5 Tiempo
- F6 Consecuencias

G REQUISITOS DE LA SOLUCIÓN

H PROPÓSITO EN EL CONTEXTO FIGURADO

A. EVENTO. El aspecto evento hace referencia al evento que describe la tarea. Un requisito fundamental para la simulación de una situación real es que el acontecimiento ha ocurrido o tiene una ocasión justa de ocurrir extraescolarmente. Para ejemplificar, problemas verbales comunes en probabilidad son:

a) Seleccionar canicas en una urna y observar sus colores.

b) Lazar dos dados y observar la suma de los valores de las caras.

Estos acontecimientos no suceden normalmente, por lo que se consideran eventos no verdaderos. Como ejemplos de eventos que ocurren justificadamente podemos citar:

1. Un hombre observa el número de personas en una fila en un cajero automático.
2. Una persona escucha por la radio el pronóstico del tiempo.
3. Una costurera observa la superficie de una tela.

B. PREGUNTA. El aspecto pregunta se enfoca en la concordancia entre la asignación dada en la tarea escolar y la situación del mundo real correspondiente. Una pregunta pertinente es aquella que se pudo presentar realmente en una situación del mundo real. Por ejemplo, en los eventos a y b cualquier posible pregunta probablemente no sería hecha en el acontecimiento descrito, mientras que las preguntas en los otros problemas verbales podrían ser:

1. El hombre del cajero quisiera saber, cuánto tiempo le llevará realizar su retiro de efectivo.

2. El radio-escucha quisiera saber cuál es la vestimenta adecuada para la ocasión.

3. La costurera desea saber cuántas camisas se pueden confeccionar con la superficie de tela.

C. INFORMACIÓN/DATOS. El aspecto datos contempla la información y los datos en la tarea: valores, modelos y las condiciones dadas en la situación correspondiente. Este aspecto se divide en los siguientes tres sub-aspectos:

C1. Existencia. El sub-aspecto existencia hace referencia a la adecuación entre dos tipos de información:

- Información disponible en la tarea escolar.
- Información disponible en la situación simulada.

Por ejemplo, si en determinado evento escolar se da como información la desviación estándar y la media, esta información no estaría disponible en la situación del mundo real correspondiente. Por lo que puede haber una gran discrepancia entre las matemáticas aplicables en la situación escolar y las matemáticas aplicables en la situación extraescolar correspondiente.

C2. Realismo. Un aspecto importante en simulaciones de la vida real es el realismo. Gran parte de las estrategias de solución de los estudiantes, se basan en juicios de carácter razonable de sus respuestas y con referencia a la realidad (Stillman, 1998). El realismo de los valores dados en las tareas escolares es entendido en el sentido idéntico o aproximado a los valores en la situación que se simula.

C3. Especificidad. El sub-aspecto especificidad alude a la adecuación entre:

- la especificidad de la información disponible en la situación escolar y
- la situación simulada.

Por lo regular, esta adecuación es importante en el razonamiento de los estudiantes, en las situaciones escolares y extraescolares la carencia de la especificidad puede producir un contexto diferente que impacte en la elección de la estrategia y el éxito de la solución (Baranes, Perry, y Stiegler, 1989; Taylor, 1989).

Por ejemplo, el razonamiento de los estudiantes puede ser diferente ante los eventos:

- Compartir una rebanada de pan.
- Compartir un pastel. (Taylor, 1989).

También por ejemplo si el precio de una clase específica de caramelo es la cuestión en la situación de la vida real y en la situación escolar no se sabe que el precio se refiere a este objeto, entonces los estudiantes no tendrán las mismas oportunidades (que en la situación real tendrían) de juzgar el carácter razonable de sus respuestas.

D. PRESENTACIÓN La presentación es el aspecto que hace alusión a la forma o manera en la que la tarea se trasmite a los estudiantes. Este aspecto se divide en dos sub-aspectos:

D1. Modo. El sub-aspecto modo se refiere a la manera en que el problema y la información se transmiten a los estudiantes, esto es, si la tarea se comunica oralmente o por escrito y si la información se presenta en palabras, diagramas o tablas. En dependencia de la simulación de este aspecto están las matemáticas que se requieren.

D2. Uso del Lenguaje. De acuerdo a análisis lingüísticos existen diferencias de los aspectos semánticos, de referencia y estilísticos entre:

- Textos escolares donde tratan problemas verbales.
- Textos que describen situaciones de la vida real.

Las tareas escolares requieren diversas capacidades en la interpretación de las tareas extraescolares correspondientes, y el uso de la lengua puede impedir las posibilidades del mismo uso de las matemáticas en las situaciones escolares y extraescolares (Nesher, 1980).

Impactan en las capacidades de interpretación:

- Los términos difíciles.
- La estructura de la oración.

- La cantidad de texto.(Foxman, 1987; Mousley, 1990).

Para las simulaciones, es importante que el lenguaje usado en la tarea escolar, no sea tan diferente de una situación de tarea extraescolar correspondiente, ya que una diferencia considerable afecta las posibilidades de los estudiantes utilicen las mismas matemáticas que utilizarían en la situación que se simula. Como ejemplo, podemos mencionar que el término "disección"puede impedir la comprensión en un problema verbal escolar.

E. ESTRATEGIAS DE SOLUCIÓN. Para la simulación de una situación es importante incluir el papel y el propósito de la persona que se dispone a solucionar la tarea. El aspecto estrategias de solución se divide en dos sub-aspectos:

E1. Disponibilidad. La disponibilidad de las estrategias de solución se refiere a la adecuación entre las estrategias de soluciones:

- disponibles para los estudiantes que solucionan tareas y
- las disponibles para las personas descritas para la resolución de las tareas correspondientes en la vida real más allá de la escuela.

Si estas estrategias no coinciden, los estudiantes no tendrán las mismas posibilidades de usar las mismas matemáticas que usarían en la situación simulada. Hay ejemplos donde suponen a los estudiantes tomar el papel de sí mismos, mientras que en otros no se sabe en qué papel los estudiantes solucionan la tarea.

E2. Experiencia plausible. El sub-aspecto experiencia plausible hace alusión a la adecuación en las estrategias de experiencia como:

- plausible para la resolución de la tarea en la situación de la escuela y
- esta experiencia como plausible en la situación simulada.

Para ejemplificar, es común que en algunos libros de texto comiencen con una descripción de un método particular para solucionar tareas, seguido por un conjunto de tareas, esto se puede experimentar como un requerimiento para utilizar este método y que otros métodos aplicables en la situación extraescolar no aplicarán para estas tareas.

F. CIRCUNSTANCIAS. Este aspecto alude a las circunstancias bajo las cuales debe ser solucionada una tarea. Dichas circunstancias son factores del contexto social (Clarke y Helme, 1998). Este aspecto se subdivide en los 6 sub-aspectos siguientes:

F1. Disponibilidad de herramientas externas. Este sub-aspecto hace referencia a las herramientas concretas fuera de la mente, como por ejemplo una calculadora, un

mapa o una regla.

Para visualizar la importancia de este aspecto, pensemos por ejemplo en la diferencia de las capacidades matemáticas requeridas para calcular el costo mensual de un préstamo hipotecario mediante software especializado y las capacidades matemáticas para hacer este cálculo mediante una calculadora.

F2. Dirección. El sub-aspecto dirección es dado en forma de sugerencias que pueden ser explícitas o implícitas. Por ejemplo, en una tarea escolar puede sugerirse que el estudiante empiece calculando el costó máximo, si esta sugerencia no es dada en la situación simulada, puede causar una gran diferencia en lo que se espera que los estudiantes logren en ambas situaciones.

F3. Consulta y colaboración. En este sub-aspecto se señala que las situaciones de tarea extraescolares son solucionadas con la colaboración dentro de grupos, o con la posibilidad de ayuda. En tales circunstancias se debe considerar que en las simulaciones la entrada de otras personas puede afectar las habilidades y competencias necesarias para resolver una tarea (Resnick, 1987).

F4. Oportunidades de la discusión. Aquí se hace referencia a las posibilidades que tienen los estudiantes para preguntar o discutir sobre el significado y la comprensión de la tarea. La falta de concordancia entre las situaciones escolares y extraescolares puede causar diferencias en las matemáticas usadas, se ha demostrado que esta comunicación que tiene el poder de afectar al significado experimentado de la tarea y de las estrategias de solución aplicadas (Christiansen, 1997).

F5. Tiempo. Este aspecto la presión del tiempo pude resultar un impedimento para resolver una determinada tarea. Por lo que resulta importante para la simulación que las restricciones de tiempo no causen diferencias significativas en las posibilidades de resolver la tarea escolar en comparación con las situaciones que se simulan.

F6. Consecuencias de la solución de éxito de la tarea (o fracaso). Las consecuencias para los solucionarios dependen de la solución de éxito o fracaso de la tarea, por lo que un aspecto a considerar para la simulación es el de las consecuencias. Este sub-aspecto puede contemplar los esfuerzos para promover la motivación para la solución de problemas verbales (en muchos casos extraescolarmente se observa que en la vida real las personas son motivadas en la resolución de problemas). Esta situación puede aterrizarse en proyectos escolares con consecuencias reales que impacten en beneficios sociales, un ejemplo de tales proyectos es el que se describe en Tate (1995). En este proyecto los estudiantes utilizan las matemáticas en sus esfuerzos para que las

licorerías sean reubicadas lejos de la escuela de su vecindario.

G. REQUISITOS DE LA SOLUCIÓN. En este aspecto la solución a un problema es interpretada en un sentido amplio, esto es, debe ponerse atención tanto en el método de solución como en la respuesta final a una tarea. Así que pueden constituirse como requisitos para las soluciones a las tareas escolares los siguientes:

- Los juicios en la validez de respuestas.
- La discusión de los métodos de solución.
- Frases en el texto de la tarea.

Estos requisitos deben ser coherentes con lo que se considera una solución adecuada en una situación simulada correspondiente (los cálculos y respuestas deben estar vinculados con la realidad), y se espera que el estudiante deba tomar consciencia de esto para evitar se vea obligado a pensar de manera diferente de lo que se corresponde en situaciones extraescolares (Cooper, 1992).

H. PROPÓSITO EN EL CONTEXTO FIGURADO. En ocasiones en la simulación, es fundamental que el estudiante tenga la claridad que el solucionador tiene del propósito de la tarea en el contexto figurado. La conveniencia de la respuesta a una tarea y las consideraciones necesarias de ser hecho así, dependen a veces del propósito de encontrar la respuesta. En muchas tareas, el método entero de la solución depende del propósito (Palm, 2002).

1.2.2. Clasificación de las contextualizaciones

Los aspectos contemplados en la teoría de Palm han sido tomados como un referente para muchos investigadores en el área educativa [Refs]. Una parte muy importante de la teoría es que podemos distinguir dos clases de contextualizaciones: las auténticas y las artificiales.

Las contextualizaciones auténticas son aquellas que cumplen con el marco teórico, elaborado por Palm (2002, 2006), en el que se define el término autenticidad y las contextualizaciones artificiales son aquellas en que se incumple uno o varios elementos de las contextualizaciones auténticas.

Debido a la cantidad de problemas analizados en este trabajo de investigación (capítulo 3) y a las limitaciones de tiempo, hemos convenido en esta investigación en hacer nuestra clasificación de las contextualizaciones de la siguiente manera:

Un problema se clasifica como **auténtico** si cumple con cada uno de los siguientes aspectos:

A EVENTO

B PREGUNTA

C INFORMACIÓN/DATOS

C1 Existencia

C2 Realismo

Un problema se clasifica como no auténtico o artificial si incumple alguno de los aspectos anteriores. En un sentido estricto los problemas que se ubican en esta clase coinciden con la clasificación que se haría de estos mismos problemas tomando en cuenta todos los aspectos de la teoría de Palm.

En el caso de los problemas clasificados como auténticos de acuerdo a nuestra convención se tendrían que verificar los 4 aspectos restantes para estar completamente seguros de su autenticidad según Palm.

1.3. Libro del maestro de secundaria 2011

El Libro para el maestro. Matemáticas. Educación secundaria desde su primera edición (1994) hasta la más reciente (2004) se propone por la Secretaría de Educación Pública como un material de apoyo dirigido a los profesores de la asignatura, de los tres grados de la educación secundaria con la intención de fortalecer el trabajo docente de los profesores y con el propósito principal de enriquecer sus recursos para ayudar a sus alumnos a estudiar matemáticas.

A partir de la segunda edición (2001) se le han incorporado nuevos materiales como Secuencia y organización de contenidos. Matemáticas. Educación secundaria y el Fichero. Actividades didácticas. Matemáticas. Educación secundaria. En su edición más reciente del Libro para el maestro (Educación básica. Secundaria 2004), se enriquece el capítulo referido al enfoque didáctico para el estudio, la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, propuesto en el Plan y programas de estudio correspondientes. En la última edición (2004) se proponen orientaciones concretas respecto al tratamiento de los contenidos matemáticos para cada una de las áreas:

1 Aritmética

2 Álgebra

3 Geometría (en el tercer grado se agrega trigonometría)

4 Presentación y tratamiento de la información

5 Nociones de probabilidad

Las orientaciones cubren sólo los temas donde consideran que el alumno presenta frecuentemente dificultades. También se proponen actividades y problemas diseñados especialmente para los alumnos de secundaria. El libro en su edición 2004, se encuentra estructurado en 6 capítulos, todos los capítulos excepto el primero corresponden a las áreas antes mencionadas.

El primer capítulo, se reserva para explicar los propósitos del estudio de las matemáticas en la educación secundaria y algunos aspectos del enfoque didáctico. Para comprender el tipo de orientación que se propone en el libro, presentamos a continuación algunos de los aspectos contemplados en este capítulo.

El primer capítulo titulado Enfoque, se refiere al enfoque didáctico para el estudio, la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. El capítulo es motivado resaltando la importancia de las matemáticas en la vida diaria, aquí vale la pena señalar que los ejemplos presentados en esta motivación corresponden a actividades que surgen en los ámbitos científicos y tecnológicos.

Los propósitos del estudio, la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria están enfocados (en este libro) principalmente en la formación de los estudiantes. Esencialmente en **desarrollar habilidades, promover actitudes positivas y adquirir conocimientos matemáticos**.

Las habilidades que se pretenden desarrollar son:

- **Calcular** (establecer relaciones entre las cifras o términos de una operación o de una ecuación para producir o verificar resultados).
- **Inferir** (posibilidad de establecer relaciones entre los datos explícitos e implícitos que aparecen en un texto, una figura geométrica, una tabla, gráfica o diagrama, para resolver un problema).
- **Comunicar** (utilizar la simbología y los conceptos matemáticos para interpretar y transmitir información cualitativa y cuantitativa).
- **Medir** (establecer relaciones entre magnitudes para calcular longitudes, superficies, volúmenes, masa, etcétera).

- **Imaginar** (trabajo mental de idear trazos, formas y transformaciones geométricas planas y espaciales).
- **Estimar** (encontrar resultados aproximados de ciertas medidas, de operaciones, ecuaciones y problemas).
- **Generalizar** (descubrir regularidades, reconocer patrones y formular procedimientos y resultados).
- **Deducir** (establecer hipótesis y encadenar razonamientos para demostrar teoremas sencillos (H. Balbuena 1998)).

Dentro de la promoción de actitudes positivas se persigue fomentar actitudes como:

- **Colaboración** (asumir la responsabilidad de un trabajo en equipo).
- **Respeto** (al expresar ideas y escuchar las de los demás).
- **Investigación** (buscar y verificar diferentes estrategias para resolver problemas).
- **Perseverancia** (llevar a buen término el trabajo aun cuando los resultados no sean los óptimos).
- **La autonomía** (al asumir la responsabilidad de la validez de los procedimientos y resultados).
- **Sana autoestima** (reconocer el valor del trabajo propio, para fortalecer la seguridad personal).

La adquisición de conocimientos matemáticos tiene como tarea específica el estudio de las disciplinas en las cinco áreas mencionadas. Esta pretende consolidar el proceso de formación básica con el objeto de obtener una cultura matemática significativa y funcional. Aquí por çultura matemática significativa y funcional"los autores se refieren a que **los estudiantes puedan usar los conocimientos adquiridos de matemáticas en las diversas actividades que realizan cotidianamente**. Otro aspecto que se busca con la adquisición de los conocimientos matemáticos es **consolidar el proceso de estudio de las matemáticas iniciado en la educación preescolar y primaria**.

Otro aspecto importante del enfoque didáctico es **el papel de los problemas en el estudio de las matemáticas**. Por **problema** los autores se refieren a

"*una situación que presenta un reto, un desafío, ante el cual, el alumno que intenta responderlo no dispone de un recurso expedito y, por tanto, debe buscar, ensayar, establecer relaciones, analizar sus efectos, elaborar conjeturas, probarlas y validarlas*".

Con base en esta concepción los autores sugieren que los problemas propuestos a los estudiantes cumplan con:

- Ser un reto interesante que fomente en el estudiante una actitud de búsqueda, orientada a proponer conjeturas y posibles estrategias de resolución.
- El problema debe permitirle al estudiante explorar las relaciones entre nociones conocidas y posibilitarle el avance hacia la comprensión y asimilación de nuevos conocimientos.
- El problema debe contener los elementos que permitan validar sus propias conjeturas, procedimientos y soluciones, o desecharlas cuando sean incorrectas.

Otros aspectos del enfoque que no detallaremos aquí son: El ambiente de estudio en el aula, el tipo de situaciones problemáticas propuesto, el juego como recurso didáctico, materiales manipulables y las nuevas tecnologías, las tareas en casa, la confrontación, los errores en la resolución de problemas y la validación de resultados, las secuencias didácticas y la formalización del conocimiento, organización del trabajo en el aula, el tiempo para resolver un problema, las tareas del profesor, selección de las actividades, organización de la clase, organización del curso, el trabajo colegiado, la evaluación, y los exámenes escritos individuales.

Para nuestra investigación, nos interesa conocer la orientación, propuesta por el libro del maestro (edición 2004), respecto al tratamiento del tema de ecuaciones de primer grado correspondiente al capítulo de álgebra del segundo grado de secundaria. En términos más específicos, nuestra atención se centra en la orientación que se le da al uso del modelo de la balanza en este libro.

En la parte introductoria del capítulo correspondiente al tema de Álgebra los autores advierten que para afrontar con éxito la resolución de ecuaciones lineales, se deben tomar en cuenta los temas de pre álgebra vistos en el primer año de secundaria (elementos introductorios del lenguaje simbólico). También aseguran que para **lograr un aprendizaje significativo del álgebra, es necesario que los símbolos y las operaciones algebraicas se introduzcan a partir de situaciones familiares**. Al mismo tiempo pronostican que al final del segundo año y durante el tercero, el alumno tendrá la oportunidad de adquirir destreza y seguridad en el manejo de los procedimientos algebraicos y utilizarlos para resolver problemas cada vez más complejos.

Para determinar el momento en que los autores consideran necesario introducir el modelo de la balanza mostramos a continuación una descripción de los temas tratados previamente.

El álgebra en la educación secundaria. Aquí se da una motivación de la importancia del estudio del álgebra y se hace la observación de la conveniencia de que los alumnos utilicen expresiones con literales y se acostumbren a las primeras reglas sencillas de escritura algebraica. También proponen que las actividades enfaticen el uso de situaciones concretas y su representación por medio de tablas y gráficas, con el objetivo de que el alumno explore regularidades y patrones, aprendiendo a expresarlos simbólicamente, **sin intentar llegar a la manipulación algebraica de los símbolos.**

Primeras reglas de escritura algebraica. Para introducir estas reglas se propone aprovechar las fórmulas geométricas para calcular el perímetro y el área de figuras sencillas. También se sugiere plantear problemas y actividades donde se solicite a los alumnos expresar de manera breve el perímetro o el área de algunas figuras sencillas.

Ecuaciones de un paso. Aquí los autores proponen problemas de ecuaciones aritméticas como:

1) $237.45 + [\ ] = 513.25$,
2) $809.60 - [\ ] = 579.85$,
3) $12.5 \times [\ ] = 92.5$
4) $[\ ]/5.5 = 13.5$

A estas ecuaciones las hacen llamar ecuaciones de paso, ya que se resuelven en un sólo paso invirtiendo las operaciones. Recomiendan involucren números decimales relativamente grandes y el uso de la calculadora para agilizar la resolución de este tipo de ecuaciones.

Ecuaciones de primer grado o lineales. En este tema, para introducir los elementos de lenguaje simbólico, los autores proponen retomar los temas de pre-álgebra vistos en el primer grado. También plantean la necesidad de introducir los símbolos y las operaciones algebraicas a partir de situaciones familiares y la importancia de planear actividades y problemas que contemplen las nociones de ecuación, de incógnita y procedimiento para despejar la incógnita. Y que fomenten en los estudiantes la capacidad de darse cuenta de la forma como las condiciones de un problema se traducen en una ecuación.

1.3.1. El modelo de la balanza

Para introducir el tema los autores consideran que **un paso importante hacia el pensamiento algebraico es que los alumnos sean capaces de resolver ecuaciones donde la técnica de invertir operaciones ya no sea suficiente**, como es

el caso de las ecuaciones lineales donde la incógnita aparece en ambos miembros de la ecuación. Las ecuaciones a las que se refieren tienen formas como:

$$ax + b = cx + d,\ ax + bx + c = dx + ex + f$$

Es en este punto donde ellos consideran que l**os modelos de enseñanza para la resolución de ecuaciones lineales juegan un papel fundamental**. La importancia de estos modelos la basan en la observación de que los estudiantes aprenden mejor los métodos para la solución de ecuaciones lineales **si se usan modelos como el de la balanza** en lugar de acudir a las explicaciones basadas en las propiedades estructurales de los números.

La base del modelo de la balanza se presenta como la analogía entre la manipulación de quitar o poner objetos en ambos platillos de una balanza manteniendo su equilibrio y las operaciones que puedan realizarse en ambos miembros de una ecuación.

	Analogías	
Balanza	$\longleftrightarrow$	Ecuación
Manipular	$\longleftrightarrow$	Realizar operaciones
Ambos platillos de la balanza	$\longleftrightarrow$	Ambos miembros de la ecuación
Mantener equilibrio	$\longleftrightarrow$	La igualdad no se pierde

Para ilustrar el uso de la balanza los autores plantean el problema de resolver la ecuación

$$7x + 5 = 4x + 20$$

Mediante las siguientes acciones:

Acción 1. Quitar pesos desconocidos e iguales a x como se ilustra en los siguientes gráficos:
La acción 1 se realiza hasta obtener una balanza con pesos desconocidos sólo en uno de los lados:
Acción 2. Interpretar la balanza del gráfico 3 como la ecuación

$$3x + 5 = 20$$

Acción 3. Aplicar el procedimiento para ecuaciones de un paso para obtener que

$$x = \frac{20 - 5}{3} = \frac{15}{3} = 5$$

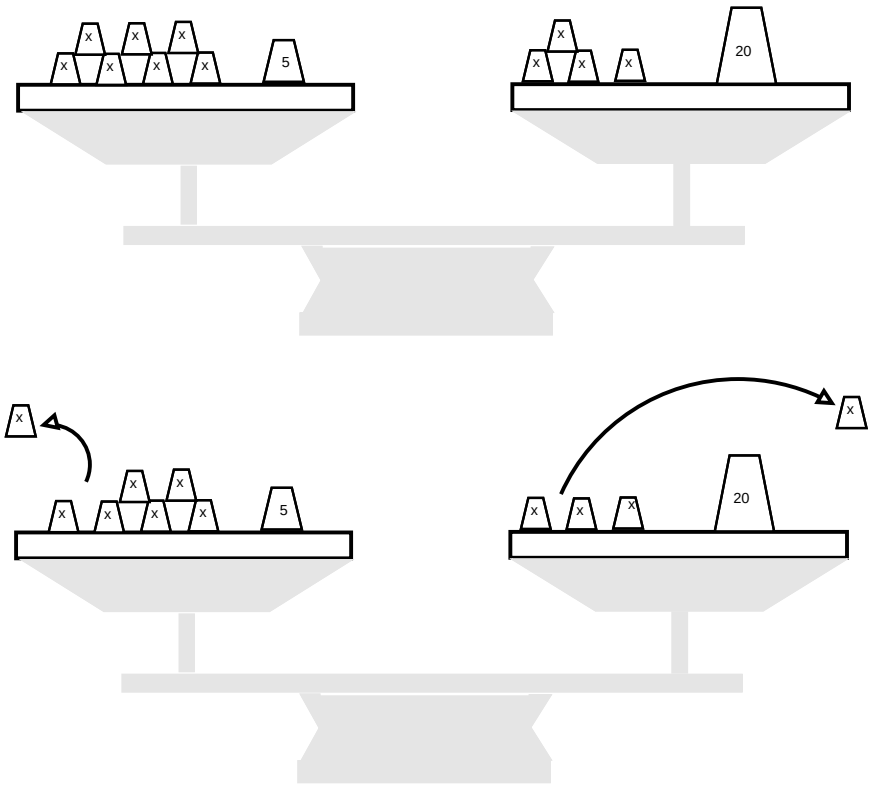


Figura 1.3: Figura

Después de la ilustración del uso de la balanza los autores recomiendan que **las acciones de la balanza sean referidas a los miembros de la ecuación con el fin de conducir a los alumnos a los procedimientos algebraicos que sirven para operar con ambos miembros de una ecuación para resolverla**.

Cuando el estudiante ha adquirido la experiencia suficiente sugieren comenzar a trasmitir las ideas de **pasar sumando o restando o multiplicando o dividiendo de un lado a otro de la ecuación**.

Distinguen dos clases de procedimientos sobre una ecuación:

i. Los que consisten en realizar las mismas operaciones en ambos miembros de la ecuación.

ii. Los que consisten en aplicar las reglas para pasar de un miembro a otro.

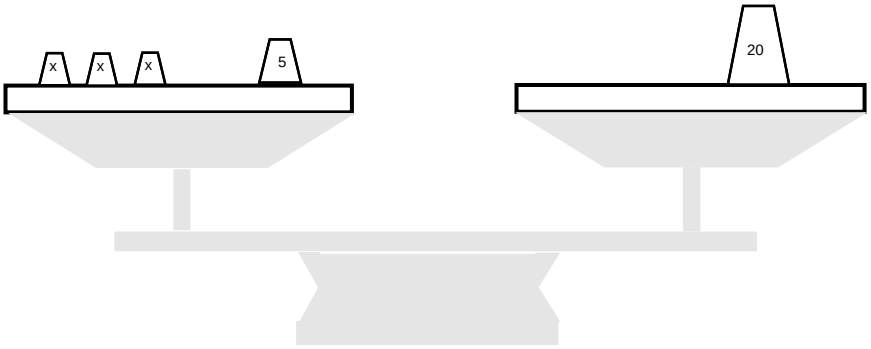


Figura 1.4: Figura

Para establecer la siguiente correspondencia que representa una evolución del modelo de la balanza.

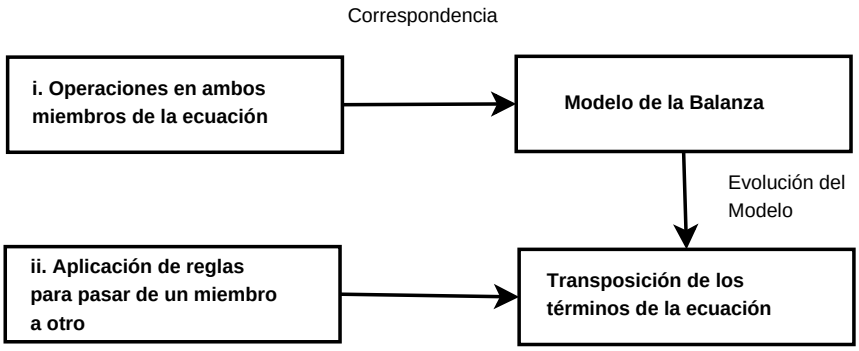


Figura 1.5: Figura

Sobre los alcances y limitaciones del modelo de la balanza observan lo siguiente:

Alcances. Existe una gran variedad de ecuaciones diferentes que pueden resolverse a partir del modelo de la balanza.

Limitaciones. El modelo no resulta adecuado utilizarlo directamente, por ejemplo, en ecuaciones como:

$$ax - b = cx, ax + b = cx - d, ax - b = cx - d, a - bx = cx$$

entre otras.

Otras ecuaciones lineales que no pueden modelarse directamente sobre la balanza son aquellas que dan lugar a soluciones negativas.

Los autores le dejan al profesor la decisión del momento conveniente para introducir las ecuaciones con coeficientes decimales sencillos y las que tienen soluciones negativas (ya no tratados directamente con el modelo de la balanza).

Capítulo 2

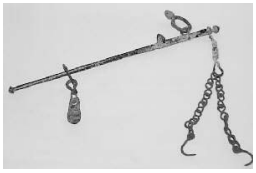
Investigaciones anteriores

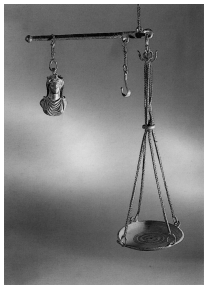
Se tienen indicios de que las balanzas en forma de báscula de brazos iguales han sido utilizadas desde el año 4000 A. C. La idea básica de un palo con las cacerolas en cada extremo a través de un Pivote fue concebida durante el siglo XVI [ref]. Los egipcios alrededor del 3500 A. C. con el desarrollo del comercio tuvieron la necesidad de pesar y medir productos para su venta, de ahí el surgimiento de un instrumento para estos fines. Desde entonces el instrumento de la balanza ha ido evolucionando hasta llegar a las básculas electrónicas que conocemos hoy en día (ver fig).

A la par de ese desarrollo la balanza ha sido utilizada como un modelo de representación para resolver problemas (cuya solución nos conduce a una ecuación). Por ejemplo, Arquímedes (250 A. C.) descubre el principio de la palanca, a partir de este momento se considera empieza el uso tecnológico y consciente de esta máquina. El principio físico de equilibrio, conocido como ley de la palanca de Arquímedes, consiste en considerar dos cuerpos cuyos pesos denominamos w_1 y w_2, colocados a una distancia d_1 y d_2 respectivamente, del punto de apoyo, de tal forma que la balanza se equilibre, veamos para ello la figura 2.2 cuya condición de equilibrio es:

$$d_1 w_1 = d_2 w_2$$

Los problemas tipo balanza aparecen por primera vez como acertijos y años después se usarían para la educación matemática en particular para la enseñanza aprendizaje de las ecuaciones de primer grado. Como un ejemplo del uso consciente que se le empezó a dar a la balanza podemos citar a Samuel Loyd, nacido en 1841 el más grande creador de acertijos de los Estados Unidos. En sus columnas de acertijos aparecieron en numerosos periódicos y revistas (1904-1911) plantea el acertijo de las balanzas (fig. 2.3) que utiliza ecuaciones para resolverse. Loyd introdujo los acertijos de balanza para dar a los alumnos la oportunidad de resolver estos problemas de álgebra sólo con la manipulación de los símbolos, es decir usando razonamiento lógico.





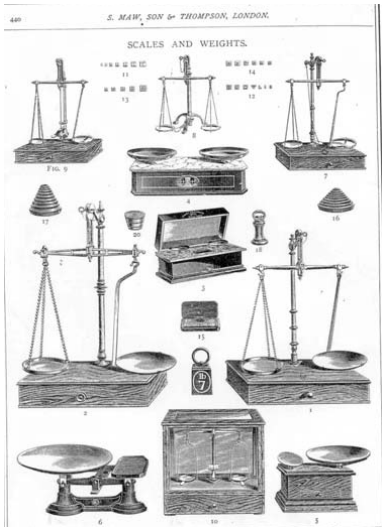


Figura 2.1: Imágenes tomadas de Museum of the Royal Pharmaceutical Society of Great Britain, Gary Castro et. al. Basic Weighing and Measuring Principles, Training for the Weights and Measures Official Division of Measurement Standards. MAX- PLANC K- INST I TUT FÜ R WI S S ENSCHAFTS G E S C H ICHTE Max Planck Institute for the History of Science

A continuación presentamos los trabajos más relevantes relacionados con el uso de la balanza para resolver ecuaciones.

Con el objetivo de mejorar el conocimiento de los maestros de matemáticas de la Escuela Secundaria Junior en Bandung, West Java, Turmundi y Dwi Haryanto [ref.] presentan un estudio cualitativo, desde una perspectiva realista, donde parte de las experiencias trasmitidas para la introducción de las ecuaciones lineales es el diseño de una balanza para pesar cosas. Sus resultados indican que los estudiantes y maestros ponen más atención a estos métodos de enseñanza y motivan el entendimiento del concepto de variable.

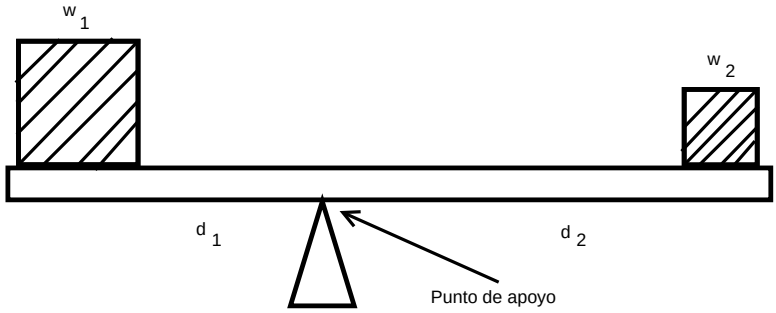


Figura 2.2: Ley de la palanca de Arquímedes.

Por otra parte, existen diversos autores reconocidos, que plantean la importancia de las representaciones múltiples en matemáticas para contribuir en el aprendizaje de los estudiantes y estimular el pensamiento relacional. Por ejemplo, Jennifer Suh y Patricia S. Moyer en [ref.] muestran como el uso de diversas formas representacionales pueden estimular el pensamiento relacional. Greenes y Findell en [ref], recomiendan experiencias como usar balanzas de escalas para representar expresiones algebraicas y así promover el pensamiento relacional de los estudiantes. Ellos establecen que los estudiantes desarrollan el razonamiento matemático en álgebra cuando son capaces de interpretar ecuaciones algebraicas usando dibujos, gráficos y representaciones simbólicas.

Lesh, Landau y Hamiltoniano en [ref], destacan la manipulación de la balanza entre cinco tipos distintos de sistemas de representación: Experiencia de la vida real, modelos de manipulación (balanza), dibujos y diagramas, lenguaje verbal, lenguaje escrito. Arrieta M. en [ref], plantea el uso de material (objetos concretos), como punto de partida para la construcción del conocimiento, ya que, al referirse a un soporte físico, facilitan la comprensión y la comunicación, favoreciendo la visualización, la motivación y la actitud positiva hacia las matemáticas.

Los autores Figueira-Sampaio, dos Santos, Carrijo en [ref], expresan que el aprendizaje es un proceso en el cual los individuos construyen conocimientos y que la investigación en educación matemática busca formas de hacer la educación matemática menos seca y más atractiva. Argumentan que al resolver ecuaciones de primer grado, **es muy común para los profesores trabajar con la idea errónea de "cambiar el signo" al "mover el miembro"**. Para minimizar este problema plantean la idea de equilibrio (igualdad).

Figura 2.3: El acertijo de las balanzas de Samuel Loyd.

Se han hecho otras investigaciones donde se han propuesto diferentes modelos para el razonamiento algebraico inicial, por ejemplo Cáceres y Suárez en [ref], establecen que los programas dan a los estudiantes retroalimentación inmediata sobre sus acciones en la computadora, y frecuentemente simulan situaciones que son difíciles de reproducir o experimentar en el salón de clases. Debido a esto ellos promueven un programa al que llaman el interactivo La balanza que reproduce una situación problemática en la que distintas balanzas necesitan ser equilibradas usando números fraccionarios. Con esto, se pretende que los alumnos trabajen con la equivalencia de fracciones, así como con la suma y resta de las mismas. El programa tiene la ventaja de que da retroalimentación al usuario al indicarle de manera visual y auditiva cuando los brazos de la balanza están en equilibrio. Otra ventaja es que pueden utilizarse también numeros enteros negativos y decimales.

Los mismos autores también consideran que el aprendizaje ocurre a través de interacciones y por lo que recomiendan el trabajo colaborativo con actividades que incluyan discuciones grupales. Otro de los aspectos que promueven el uso de materiales concretos antes del contacto con ideas matemáticas abstractas. Debido a que contemplan a la

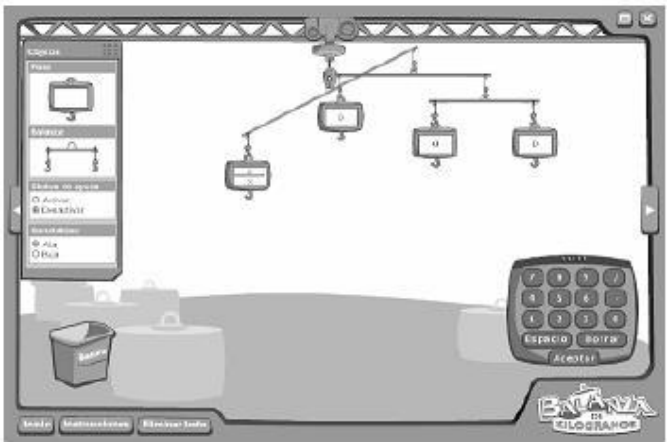


Figura 2.4: Programa interactivo La Balanza.

enseñanza y el aprendizaje como actividades complejas ya que consideran a cada sálon de clases como un contexto único, las sugerencias didácticas deben servir únicamente como guías y no como una manera única de utilizar los recursos. El uso de la balanza invita a los estudiantes a actuar matemáticamente de diferentes maneras.

Capítulo 3

Objetivos de la investigación y Metodología

3.1. Objetivos de la investigación

1. Investigar si los planes de estudio de matemáticas del nivel de educación secundaria contemplan el método de la balanza para la enseñanza-aprendizaje de las ecuaciones de primer grado.

2. Identificar los problemas que utilizan el método de la balanza en los libros oficiales del nivel secundaria.

3. Verificar la autenticidad de los problemas encontrados y determinar si el modelo de la balanza en los libros de texto de secundaria se utiliza en problemas auténticos.

4. Clasificar los problemas encontrados.

5. Partiendo de una muestra aleatoria de estudiantes determinar si estos son capaces de identificar la autenticidad o no autenticidad de algunos problemas.

6. Analizar la reacción del estudiante ante problemas auténticos y no auténticos, es decir cómo responde un alumno cuando el modelo de la balanza le permite resolver un problema, y qué hace cuando no se lo permite debido al mal planteamiento del problema.

3.2. Metodología

1. Revisión de los libros de matemáticas I, II y III a nivel secundaria (CONALITEG) en los ciclos escolares 2015-2016 y 2016-2017.

2. Del contenido de cada libro se visualizan gráficos del modelo dibujado de la balanza.

3. Se utilizan 3 aspectos de la teoría de Palm:

   i. evento (real),

   ii. datos (datos no contradictorios reales),

   iii. pregunta (pertinente).

4. Se toman en cuenta 9 clases: los que aplican de manera correcta el método de la balanza, los que se resuelven con ecuaciones, los que se clasifican por el aspecto datos, los que tienen como objetos expresiones algebraicas o números, los que se clasifican por el aspecto evento, problemas con errores de concepto, por acertijos, por balanza de Arquímedes (palanca) y finalmente los de balanza como artefacto (báscula).

5. Se diseña, se aplica y se analizan los resultados de una hoja de trabajo con dos problemas; uno auténtico y otro no auténtico.

6. Se revisa cada hoja de trabajo y se categorizan las respuestas dadas por el estudiante en cada reactivo de los dos problemas.

Capítulo 4

Investigación Documental

En este capítulo se muestran resultados sobre la investigación documental; específicamente presentamos el plan de estudios de educación secundaria, los libros oficiales de matemáticas (CONALITEG) a nivel secundaria que se revisaron con el objetivo de identificar los problemas que tratan el modelo de la balanza, y en las últimas secciones del capítulo se presenta una clasificación en 9 grupos de los problemas encontrados de acuerdo a diferentes aspectos tratados en la teoria de Palm, la propuesta de Filloy y el libro del maestro de la SEP.

4.1. Plan de estudios

Dentro de los programas de estudio de educación secundaria de la SEP (2011) se propone introducir en primer año en el bloque III, las ecuaciones de primer grado de las formas

$$x + a = b,\ ax = b\ y\ ax + b = c$$

En segundo año, en el bloque IV en las orientaciones didácticas y planes de clase 8.4.2., se contemplan las ecuaciones de primer grado de la forma

$$ax + b = cx + d$$

En su plan de clase se sugiere utilizar el método de la balanza como un apoyo concreto para dar sentido a las propiedades de la igualdad. En tercer año se propone la aplicación de las ecuaciones de primer grado en la resolución de problemas, esta propuesta se encuentra en el bloque V.

El motivo por el cual se toman los planes de estudio 2011 se debe a que continuamente se están haciendo modificaciones de estos programas. Por ejemplo, las fechas en

que entrarán en vigor los nuevos planes de estudio son: para el ciclo escolar 2016-2017, entra el plan primero de secundaria, para el ciclo escolar 2017-2018 el de segundo de secundaria y para el ciclo escolar 2018-2019 el plan tercero de secundaria. En la liga $http://ediciones-sm.com.mx/$?q=blog$-Los-nuevos-programas-de-estudio-estaran-listos-para-el-ciclo-escolar-2016-2017-SEP$, se pueden verificar de manera detallada las fechas de los nuevos planes, incluso para la educación preescolar.

4.2. Resultados de la revisión de los libros

En esta sección fue necesario hacer una revisión de los libros de texto de matemáticas en los tres niveles de secundaria (primero, segundo y tercer año) avalados por la SEP en los ciclos escolares 2015-2016 y 2016-2017, con el objetivo de identificar cuántos de problemas utilizan el método de la balanza para la enseñanza-aprendizaje de las ecuaciones de primer grado y si son cognitivamente adecuados para los estudiantes.

En el ciclo escolar 2015 - 2016 se revisaron 72 libros de matemáticas por los tres niveles; en la revisión de estos libros encontramos 99 problemas que utilizan el método de la balanza o la balanza como artefacto. En el ciclo escolar 2016-2017 se revisaron 96 libros por los tres niveles; en esta revisión encontramos 168 problemas que utilizan el método de la balanza o la balanza como artefacto; cabe aclarar que los problemas del ciclo escolar 2015-2016 están incluidos en los problemas del ciclo escolar 2016-2017.

En las tablas 3.1, 3.2 y 3.3 se muestran todas las referencias de los libros revisados de los tres niveles respectivos, para facilitar la clasificación, cada problema se etiqueta con la clave asignada por la SEP del libro correspondiente. Cuando aparecen varios problemas en un mismo libro se adiciona al final de la etiqueta una letra minúscula del alfabeto, por ejemplo, S12005, S12005a y S12005b son 3 problemas en el libro con clave SEP S12005. También en las 2 últimas columnas de cada tabla se muestra el nùmero de problemas encontrados con el método de la balanza o el artefacto balanza y las páginas del libro donde se encontraron dichos problemas.

4.2.1. Libros de primer nivel (ciclos 2015-2016 y 2016-2017)

En el primer nivel de educación secundaria se revisaron un total de 30 libros de ambos ciclos escolares (Tabla 3.1), entre estos libros se encontraron un total de 86 problemas relacionados con la balanza. También, se identificaron 3 libros que sufrieron cambio de portada, sin embargo los problemas relacionados con la balanza permanecieron sin cambio alguno, las claves SEP que corresponden a estos libros son: S12005, S12016 y S12007.

Clave	Referencia	#P.	Páginas
S00136	Explora. C. Baltazar, E. Ruiz, L. F. Ojeda. Edit. Catillo, (2013)	8	18,23,120, 124,132, 133,134
S12010	Construyo y aprendo matemáticas. M. Pérez, S. A. Pérez. Edit. EDE,(2012,2017)	4	139, 137, 138,
S12014	Conect@estrategias. David Block Sevilla. Edit. SM, (2013,2016)	8	18,19,20, 154,263,
S12013	Comunidad matemática. A. Castrejón, A. Vicuña, M. Reyes,O. Castrejón. Edit. SM, (2013)	11	150-155,
S00139	Matemáticas 1. M. Hernández, G. Magallanes., Edit. EDITORES (2014, 2015, 2016, 2017)	3	143, 210
S12009	Matemáticas 1. R. M. Farfán, R. Cantoral, M. G. Cabañas, M. Ferrari. Edit. Mc Graw Hill (2016)	3	131, 132
S00185	Desafíos Matemáticos. M. Ramírez, R. Castillo, D. Vergara, M. E. Flore, J. Azpeitia. Edit. Fernández editores. (2015, 2017)	1	123,74
S12011	Construcción del pensamiento. F. Sánchez. Edit. FERNANDEZ Educación (2016,2017)	2	134, 139
S12001	Matemáticas 1. S. Valiente, S. I. Valiente. Edit. NORIEGA. (2017)	2	148
S12004	Contexto Matemático. A. Olea, E. Basurto, M. A. Rivera. Edit. Norma. (2016)	5	15, 121, 135,139
12007	Matemáticas 1. Emilio Covián Rué. Edit. Nuevo México. (2016)		
S00135	Trabajo en proceso. R. Arteaga , A. Sánchez. Edit. Oxford. (2013, 2017)	7	30, 137, 138,139 143
S12021	Matemáticas 1. C. A. Cuevas et al., Edit. Ríosdetinta. (20115, 2017)	0	
S12003	Matemáticas 1. F. Escareño, O. L. López. Edit. Mc Graw Hill (2012, 2016)	2	137, 139

Tabla 3.1: Libros nivel primero, ciclos 2015-2016, 2016-2017.

Clave.	Referencia	#P.	Páginas
S12017	Matemáticas por competencias. Arriaga, Benítez. Edit. PEARSON (2016)	1	132
S12016	Matemáticas 1. García M. V., R. Villaseñor , M. D. Montes H., Edit. Mc Graw Hill (2016)	4	14, 25, 30,34
S12002	Matemáticas 1. G. Almaguer et al., Edit. Limusa Noriega (2017)	2	26,140
S12006	Todos juntos. De Icaza Peña, A. Edit. Santillana (2016)	0	
S12012	Retos matemáticos 1. C. Apolo y R. I. González Edit. SM (2014, 2016)	0	
S12022	Jaque Mate 1. Xique Anaya J. C. Edit. Larousse (2012)	11	85,90, 142,143, 144, 145
S12018	Matemáticas 1. Iturralve Ramírez, F. Edit. Terracota-Cengage (2014)		
S12005	Serie Fundamental. S. P.Romero, J. C. Aguilar. Edit. Castillo (2016)	4	33,141, 142,143
S12000	Series Saberes. E. Mancera M. y E. Basurto H. Edit. Pearson Educación (2016)	0	
S12020	Matemáticas 1. Reyes García Lidia Edit. Terracota-Cengage (2012, 2016)	0	
S12019	Matemáticas 1. L. Jiménez M. et al., Edit. Grupo Editorial Patria (2012,2016)	2	20, 127
S00138	Secuencia Matemática 1. Hernández Moreno G. Edit. Oxford (2013, 2017)	0	
S00137	Matemáticas 1 Integral. G. Carrasco Licea P. Martínez T. Edit. Santillana (2014,2016)	4	18, 95, 152
S12015	Matemáticas 1. E. Sánchez,M. Sáiz, V. Hoyos, J. Guzmán. Edit. Oxford (2006-2008,2011,2012)	0	
S12008	Matemáticas 1 Horizontes. M. Trigueros et al., Edit. Santillana (2016)	0	
S00251	Matemáticas 1. López Calderón J. Carlos Edit. Cervante (2016)	2	118, 120

Tabla 3.1: Libros nivel primero, ciclos 2015-2016, 2016-2017.

4.2.2. Libros nivel segundo (ciclos 2015-2016 y 2016-2017)

En el nivel segundo de secundaria se revisaron un total de 31 libros correspondientes a los ciclos 2015-2016 y 2016-2017 (Tabla 3.2), en estos libros se encontraron 72 problemas relacionados con la balanza.

Clave.	Referencia	#P.	Páginas
S00174	Habilidades y competencias. J. Ángeles et al., Edit. Ángeles editores (2015)	1	166
S22017	Secundaria Fundamental. C. Baltazar, E. Ruiz, L. F. Ojeda. Edit. Castillo.(2012)	4	184, 185, 186,263
S22003	Jaque Mate 2. J Carlos Xique Anaya. Edit. LAROUSSE (2012)	7	181-184, 187,188, 214
S22005	Matemáticas 2. David Block Sevilla. Edit. LAROUSSE (2012)	1	207
S22006	Comunidad matemática. A. Castrejón, A. Vicuña, M. Reyes, O. Castrejón. Edit. SM (2012)	11	180,181, 185,192, 222,226, 227, 230
S22015	Construcción del pensamiento. F. Sánchez S. Edit. Fernández editores. (2013)	4	109, 180, 181
S22002	Convive con las matemáticas. M. del C. Quijano, A. González, J. Castillo. Edit. MC editores. (2012)	1	182, 183
S22021	Contexto Matemático. A. Olea, E. Basurto, M. A. Rivera. Edit. Norma. (2012)	2	182, 185
S00141	Trabajo en proceso 2. R. Arteaga G., A. Sánchez M. A. Sánchez M. Edit. Oxford. (2013)	2	187,211
S00142	Matemáticas 2. Carlos A. cuevas, O. González, Carolina R., A. Rodríguez. Edit. Norma. (2012)	5	187, 188, 189,190, 191
S00196	Matemáticas 2 Integral. G. Carrasco, L. Contreras, p. Martínez. Edit. Santillana (2015)	1	148
S22013	Matemáticas 2 Por competencias. A. Arriaga, M. Benítez. Edit. Pearson Educación (2013)	1	181, 182
S22020	Matemáticas 2 Serie Saberes. E. Mancera, E. Basurto. Edit. Pearson Educación (2013)	4	175, 178, 179,181
S22007	Matemáticas 2. A. Sánchez, M. Sanz, V. Hoyos. Edit. Grupo Editorial Patria (2013)	4	186, 187, 188,192

Tabla 3.2: Libros nivel segundo, ciclos 2015-2016, 2016-2017.

Clave.	Referencia	#P.	Páginas
S22012	Matemáticas 2. E Filloy, O. Figueras, M. Ojeda, T. Rojano, G. Zubieta. Edit. Esfinge (2013)	0	
S00175	Matemáticas 2. G. Balderas, A. Palmas. Edit. Correo del Maestro (2015)	2	188, 222,224
S22018	Matemáticas 2. Alejandro del caza Edit. Santillana (2012)	0	
S22016	Matemáticas 2 Horizontes. M. Trigueros et al., Edit. Santillana (2012)	1	181
S22014	Matemáticas 2. M. Farfán et al. Edit. EPSA / McGraw-Hill (2013)	0	
S22000	Matemáticas 2. F. Escareño, L. López. Edit. Trillas (2016)	3	193, 196, 226
S00144	Matemáticas 2. Desafíos matemáticos. M. Ramírez, R. Castillo, D. Vergara, E. Flores, G. Azpeitia. Edit. EPSA / McGraw-Hill (2013)	0	
S22008	Matemáticas 2. Lidia Reyes Edit. Terracota-Cengage (2014)	4	174, 175
S22019	Matemáticas 2. Emilio Covián. Edit. Nuevo México (2012)	0	
S22011	Matemáticas 2 Serie Terra. V. García, R. Villaseñor, D. Montes. Edit. Esfinge (2013)	0	
S00143	Matemáticas 2 Construyo y aprendo. C. Manrique. Edit. Ediciones de Excelencia (2013)	0	
S22009	Matemáticas 2 Estrategias del pensamiento. M. Hernández, H. Solano, L. Jiménez Edit. Grupo Editorial Patria (2013)	0	
S00140	MatemáticaMente 2. Desarrollo y fortalecimiento de competencias. Serie Alternativas. A. Arriaga et al. Edit. Pearson Educación (2014)	2	156, 157
S22001	Secuencia Matemáticas 2. G. Hernández Moreno. J. Gutiérrez. Edit. Oxford University Press (2012)	1	210
S00145	Matemáticas 2. L. Raull, M. Fernández. Edit. Esfinge (2014)	5	78, 182, 183,186, 212
S22010	Matemáticas 2. Fernando Iturralve Edit. Terracota-Cencage (2014)	5	186, 187, 188,220, 221

Tabla 3.2: Libros nivel segundo, ciclos 2015-2016, 2016-2017.

4.2.3. Libros nivel tercero (ciclos 2015-2016 y 2016-2017)

En este nivel se revisaron 35 libros de los ciclos 2015-2016 y 2016-2017 (Tabla 3.3). En estos libros se identificaron 10 problemas relacionados con la balanza, esta reducción era de esperarse debido a los temas tratados en este nivel, ya que éstos sólo contemplan algunas aplicaciones de las ecuaciones de primer grado.

Clave.	Referencia	#P.	Páginas
S00195	Matemáticas 3. C. A. Cuevas et al., Edit. Ríos de Tinta, (2014, 2017).	1	256, 257
S00186	Matemáticas 3. F. Sánchez. Edit. Fernández editores (2017).	0	
S00186	Matemáticas 3. F. Sánchez. Edit. Fernández editores (2017).	0	
S00167	Matemáticas 3. S. Romero et al., Edit. Fernández editores (SA).	0	
S00193.	Matemáticas 3. Emilio Covián. Edit. Nuevo México. (SA).	0	
S00161	Retos Matemáticos 3. J. Moreno Barrera. Edit. SM (SA).	0	
S00166	Matemáticas 3. L. Reyes García. Edit. Terracota-Cengage. (SA).	0	
S00151	Matemáticas 3. M. Farfán et al., Edit. Fernández editores (2014).	0	
S00171	Jaque Mate 3. L. Barriendos, L. Sánchez. Edit. Larousse. (2014,2017).	0	
S00150.	Conect@ Estrategias. Matemáticas 3. S. García, T. Mendoza, J. Cruz, David Block. Edit. SM (2014,2016).	0	
S00164	Matemáticas 3. A. Palmas, G. Balderas Edit. Correo del Maestro (2014).	0	
S00169	Matemáticas 3. A. Sánchez, V. Hoyos. Edit. Grupo Editorial Patria (SA).	0	
S00158	Matemáticas 3. Estrategias del pensamiento. L. Jiménez, M. Hernández. Edit. Grupo Editorial Patria (2014).	0	
S00146	Matemáticas 3 Habilidades y Competencias J. Ángeles, R. Guerrero Edit. Ángeles Editores (20113).	0	

Tabla 3.3: Libros nivel tercero, ciclos 2015-2016, 2016-2017.

Clave.	Referencia	#P.	Páginas
S00165	Matemáticas 3. Desafíos matemáticos M. Ramírez, R. Castillo. Edit. Fernández Educación (2013).	0	
S00182	Matemáticas 3. L. Raull, A. González Edit. Esfinge (2015).	0	
S00149	Matemáticas 3 Explora. C. Baltazar, E. Ruiz. Edit. Ediciones Castillo (2013).	1	247
S00160	Fortalezco mis competencias matemáticas 3. D. Mata, F. Nebbia. Edit. SM (2013).	0	
S00155	Convive con las Matemáticas 3. H.Flores, Edit. A. Gómez, Méndez Cortés Editores (2014).	0	
S00170	Matemáticas 3 Horizontes. M. Trigueros, Edit. D. Lozano, Santillana (2013).	0	
S00194	MatemáticaMente 3 Consolidación de competencias. Serie Alternativas. A. Arriaga, S. Sesma Edit. Pearson Educación (2015).	0	
S00152	Matemáticas 3. Todos juntos. A. de Icaza Edit. Santillana (2013).	0	
S00162	Matemáticas 3. E. Núñez, D. García Edit. Terracota-Cengage (2014).	0	
S00189	Matemáticas 3. G. Almaguer, F. Cantú Edit. Limusa Noriega Editores (2015).	0	
S00154	Matemáticas 3. E. Filloy, O. Figueras Edit. Esfinge (2014).		
S00180	Comunidad matemática 3 A. Castrejón, A. Vicuña. Edit. SM (2015).	0	
S00153	Matemáticas 3. F. Escareño, O. Leticia Edit. Trillas (2015).	1	207
S00159	Matemáticas 3. Serie Saberes. E. Mancera, E. Basurto. Edit. Pearson Educación (2014).	0	
S00148	Trabajo en proceso 3. Matemáticas. R. Arteaga,A. Sánchez A. Sánchez. Edit. Oxford University Press (2013).	5	223, 226, 230
S00190	Matemáticas 3. O. Vigueras, R. Bañuelos Edit. Macmillan Publishers (2015).	0	
S00163	Contexto Matemático 3. A. Olea, E. Basurto Edit. Norma Ediciones (2014).	1	73

Tabla 3.3: Libros nivel tercero, ciclos 2015-2016, 2016-2017.

Clave.	Referencia	#P.	Páginas
S00168	Matemáticas 3 Enlaces. Olga Saiz. Edit. Ediciones Castillo (2015).	0	
S00157	Matemáticas 3. E. García, S. Villegas Edit. Norma Ediciones (2014).	1	105
S00177	Matemáticas 3 Construyo y aprendo Matemáticas. M. Pérez, S. Pérez. Edit. Ediciones de Excelencia (2015).	0	
S00156	Matemáticas 3. V. García, R. Villaseñor Edit. Esfinge (2013).	0	
S00147	Matemáticas 3. Por competencias. A. Arriaga, M. Benítez. Edit. Pearson Educación (2014).	0	

Tabla 3.3: Libros nivel tercero, ciclos 2015-2016, 2016-2017.

4.3. Clasificación de Problemas

En esta sección proponemos una clasificación de los problemas en 9 grupos: en el primer grupo se encuentran los problemas que aplican paso a paso el método de la balanza; en el segundo grupo se encuentran los problemas clasificados por el número de ecuaciones lineales que utilizan para resolverse ; en el tercer grupo se encuentran los problemas clasificados por el aspecto DATOS; en el cuarto grupo estan los problemas que colocan expresiones algebraicas o números en los platillos de la balanza; en el quinto grupo se clasifican los problemas por el aspecto EVENTO; en el sexto grupo colocamos los problemas con errores de concepto; en el séptimo grupo se encuentra la clasificación de acertijos; en el octavo grupo se colocaron los problemas que utilizan la balanza de Arquímedes y finalmente en el noveno grupo colocamos los ejercicios que utilizan la balanza sólo como artefacto (báscula).

Por un lado esta clasificación fue elegida tomando en cuenta los aspectos de la teoría de Palm considerados en nuestro estudio, por otro lado se tomaron en cuenta la propuesta de Filloy y las recomendaciones del libro del maestro sobre el método de la balanza para la solución de ecuaciones lineales.

Para la clasificación hemos designado una sección para cada grupo (secciones de la 3.3.1 a la 3.3.9), en cada sección se explica detalladamente las características de los problemas que pertenecen al grupo correspondiente. También se ilustran algunos ejemplos que resaltan en su grupo y se dejan los restantes para ser consultados en los anexos de este documento.

4.3.1. Problemas que aplican el método de la balanza

Este grupo se pude decir que es el más importante porque contiene los problemas que son la razón de ser de la balanza, es decir los problemas que usan de manera correcta este método. En estos problemas se va quitando el mismo objeto de cada platillo de la balanza de tal manera que se siga manteniendo el equilibrio en la balanza y así continua hasta llegar al valor de la incógnita. Sobre los datos se puso especial atención en los objetos que representan el coeficiente de la variable en la ecuación y en el resultado númerico, para asegurar que éste correspondiera con números enteros positivos (como lo plantean Filloy y el libro para el maestro SEP). Estos problemas en el aspecto DATOS de la teoría de Palm pueden resultar no auténticos debido a que puede darse el caso de que los objetos utilizados en el problema no sean reales.

Ejemplo I.1

- **Contexto**: Se observa una balanza y arriba de sus platillos se encuentran figuras geométricas. Abajo para su solución se muestra la misma balanza pero con diferentes representaciones equivalentes.
- **Texto original:** En el modelo de la balanza, cada platillo actúa como un miembro de la ecuación de primer grado con una incognita; platillo izquierdo para el primer miembro y platillo derecho para el segundo miembro, y el pedestal como el signo = . Cada paso que se realiza en la balanza debe mantener el equilibrio de ésta. En este ejemplo la incognita está representada por los rectángulos naranja y cada unidad numérica por un circulito relleno. En este modelo se puede manejar la incognita en ambos platillos, y es recomendable sólo usar valores enteros.
- **Tareas matemáticas**: Encontrar el valor de la incógnita observando las diferentes representaciones de la balanza mostradas en el dibujo. Ir eliminando las figuras de la balanza hasta llegar a una equivalencia de las figuras geométricas.

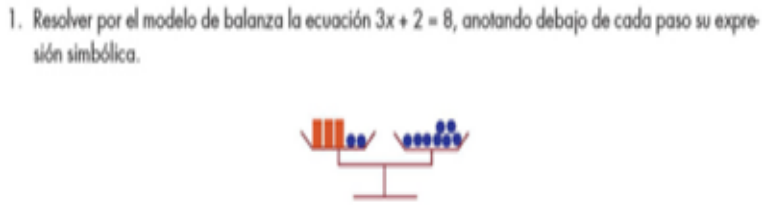


Figura 4.1: S12001a

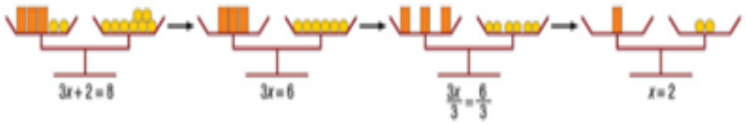


Figura 4.2: S12001b

Ejemplo I.2

- **Contexto**: En este problema se observa una balanza con 5 representaciones equivalentes. En dichas representaciones los objetos que equilibran esas balanzas son botes y pesas de 5 kg. Se observa que en cada representación se van quitando elementos de ambos lados de la balanza (para mantener el equilibrio) hasta llegar a la solución.
- **Tareas matemáticas**: Relacione cada balanza con su respectiva ecuación y calcular el peso de cada bote.

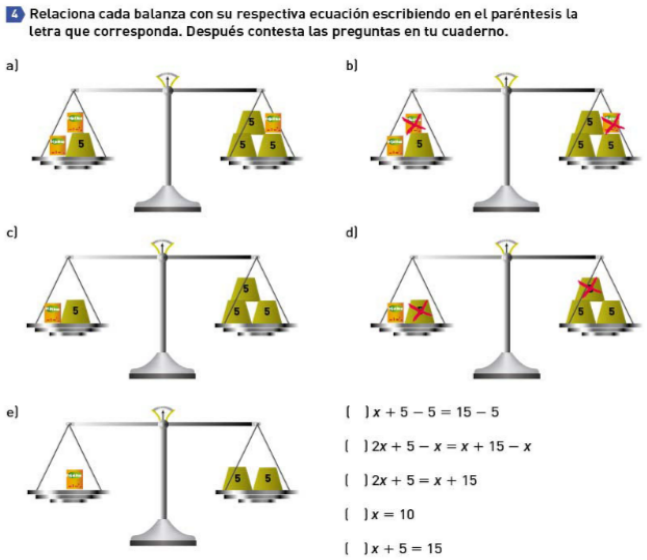
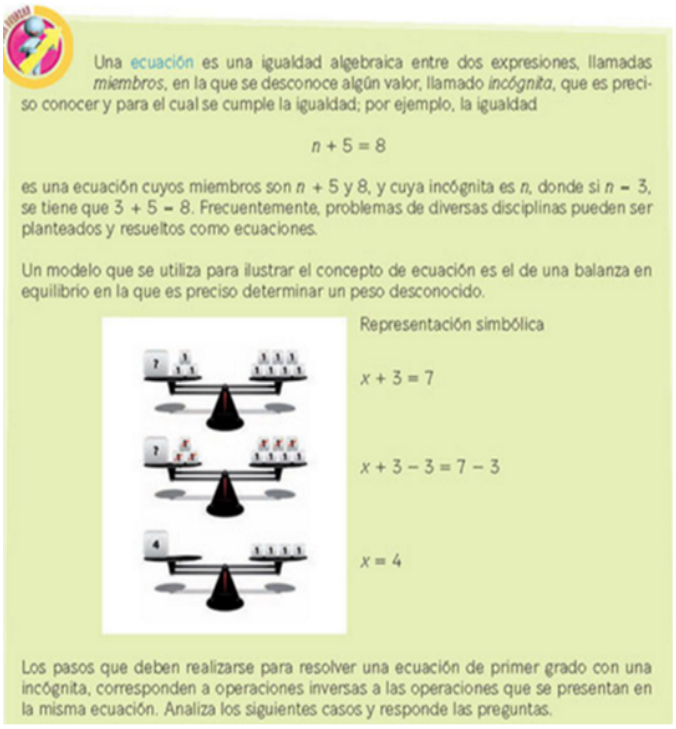


Figura 4.3: S22006c

Ejemplo I.3

- **Contexto**: Se observa una balanza con tres representaciones diferentes (equivalentes), los objetos que se encuentran en los platillos de cada representación de la balanza son cubos grandes y chicos, los grandes de peso desconocido y los chicos que no tienen unidad de peso (sólo marca 1). También se muestran algunos ejemplos de resolución de ecuaciones meramente algebraicas.
- **Tareas matemáticas**: Ir quitando elementos de ambos lados de los platillos hasta encontrar el valor de la incógnita.


Una ecuación es una igualdad algebraica entre dos expresiones, llamadas *miembros*, en la que se desconoce algún valor, llamado *incógnita*, que es preciso conocer y para el cual se cumple la igualdad; por ejemplo, la igualdad

$$n + 5 = 8$$

es una ecuación cuyos miembros son $n + 5$ y 8, y cuya incógnita es n, donde si $n = 3$, se tiene que $3 + 5 = 8$. Frecuentemente, problemas de diversas disciplinas pueden ser planteados y resueltos como ecuaciones.

Un modelo que se utiliza para ilustrar el concepto de ecuación es el de una balanza en equilibrio en la que es preciso determinar un peso desconocido.

Los pasos que deben realizarse para resolver una ecuación de primer grado con una incógnita, corresponden a operaciones inversas a las operaciones que se presentan en la misma ecuación. Analiza los siguientes casos y responde las preguntas.

Figura 4.4: S12004e

Ejemplo I.4

- **Contexto**: Se presentan una balanza con 4 representaciones equivalentes (cambian al ir quitando objetos de ambos lados) equilibradas con bolas de peso x y con objetos de 4, 12 y 16 unidades desconocidas.

- **Tareas matemáticas**: En cada transformación de las representaciones (después de aplicar propiedades de igualdad) escribir las acciones que se efectuaron y la ecuación resultante.

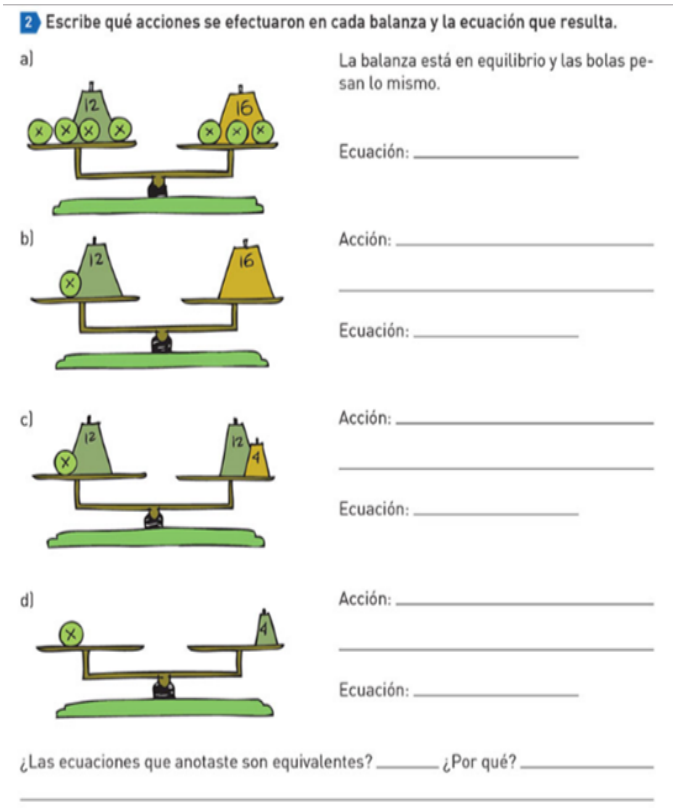


Figura 4.5: S12013i

Ejemplo I.5

- **Contexto**: Se presentan una balanza con diferentes representaciones equilibradas con cubos verdes de peso desconocido y cubos naranja los cuales tampoco tienen un peso específico.
- **Tareas matemáticas**: Ir quitando elementos de manera simultánea de ambos lados de la balanza hasta encontrar el valor de la incógnita.

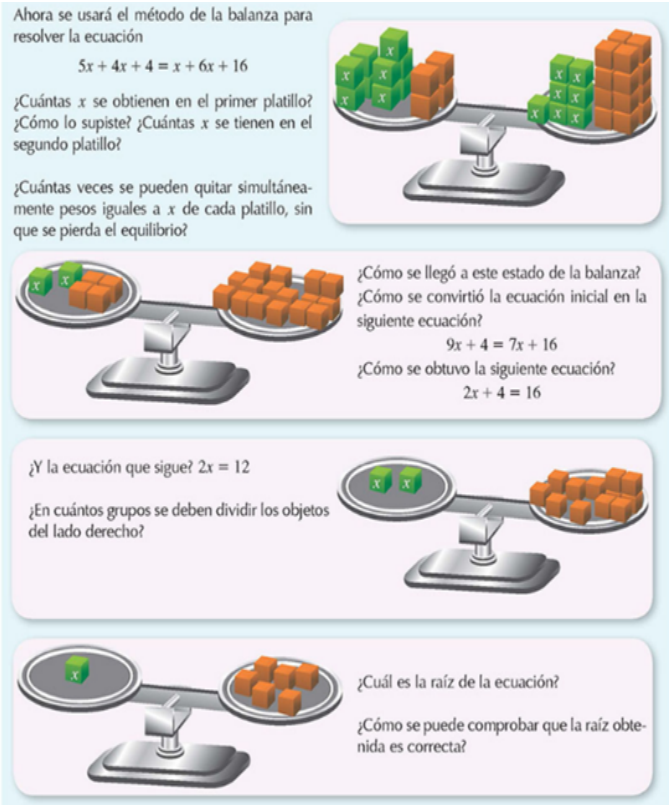


Figura 4.6: S22015

4.3.2. Problemas clasificados por el número de ecuaciones

El tercer grupo se clasifica respecto al número de representaciones diferentes de la balanza, en otras palabras la clasificación es respecto al número de ecuaciones lineales que se utilizan para resolver el problema, pueden ser 0, 1 , 2, o hasta 3 ecuaciones. Las balanzas seleccionadas con 0 ecuaciones son las que nos ejemplifican el concepto de equilibrio y este concepto es fundamental para hacer la analogía con la igualdad en una ecuación lineal.

II.1 Los problemas con 0 ecuaciones

El concepto de equilibrio cuando se habla de balanzas es de suma importancia ya que los platillos de la balanza de entrada estàn en equilibrio; para hacer la analogía de las

ecuaciones lineales con la balanza es indispensable que los estudiantes entiendan este concepto. Los siguientes ejemplos ayudan al estudiante a entender esta definición.

Ejemplo II.1.1

- **Contexto**: Se presenta una balanza con 4 configuraciones diferentes y sobre los platillos de las balanzas se observan cubos de diferentes pesos, en la primera configuración se observa un cubo de 1.5kg, en otra se observa otro cubo de 1.25kg., en otra un cubo de 0.75kg., y en la última se observa un cubo de 0.125kg. También se observan varias pesas de diferentes tamaños debajo de cada configuración de la balanza.
- **Tareas matemáticas**: Subrayar la pesa que equilibre cada balanza. Sólo puedes usar una vez cada pesa.

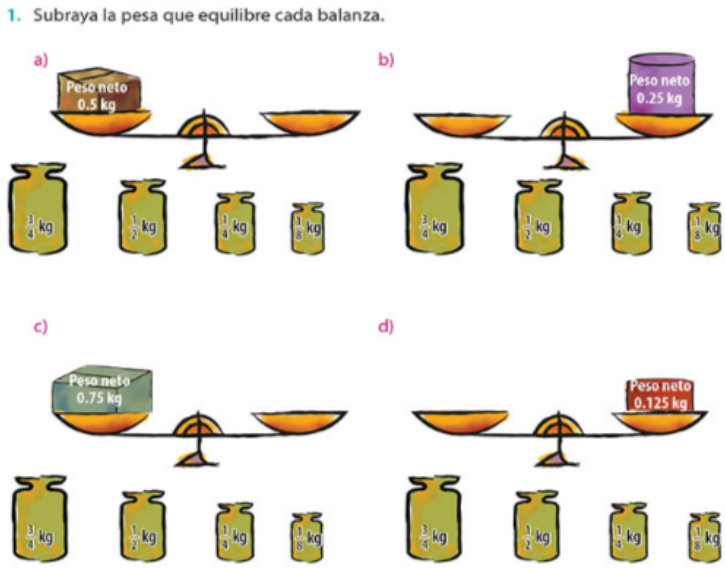


Figura 4.7: S12014

Ejemplo II.1.2

- **Contexto**: Se observa una balanza con pesas de diferentes tamaños (de 0.5 kg y 0.25 kg) en su platillo izquierdo y el platillo derecho vacio, por otro lado se observan pesas de 1kg, 1/2 kg, 1/4 kg y 1/5 kg.
- **Tareas matemáticas**: Colocar en el platillo derecho las pesas que equilibran la balanza.

Figura 4.8: S00137b

II.2 Los problemas con 1 ecuación

Como sabemos una ecuación lineal es una igualdad que puede tener una o mas variables o incognitas cuyo exponente es igual a 1. Aquí mostraremos algunos ejemplos de balanza que se resuelven con una ecuación de primer grado.

Ejemplo II.2.1

- **Contexto**: Se observa una balanza con un prisma color rojo y 6 cubos color naranja en su platillo izquierdo y 8 cubos color naranja en su platillo derecho.
- **Tareas matemáticas**: Encontrar cuántos cubos de color naranja pesarán igual que un prisma de color rojo. Responder preguntas que nos reafirman las propiedades de igualdad y equilibrio en las ecuaciones y las balanzas respectivamente.

Figura 4.9: S12004c

Ejemplo II.2.2

- **Contexto**: Se observa una balanza con dos gatos y seis ladrillos en el platillo izquierdo, y en el platillo derecho se colocaron 15 ladrillos
- **Tareas matemáticas**: ¿Qué pesa más un gato o tres ladrillos? ¿Cuál de las siguientes ecuaciones representan la situacón?. $6+2x = 10$; $2x*6 = 15$; $2x-6 = 15$. Resuelve la ecuación y determina el peso del gato.

Figura 4.10: S00135f

II.3 Los problemas con 2 ecuaciones

Las ecuaciones lineales o sistemas de ecuaciones son un conjunto de igualdades algebraicas en las que aparecen una o varias incognitas elevadas a la potencia 1. Los ejemplos de balanza que se muestran a continuacion se pueden resolver con un sistema de ecuaciones lineales. El resto de los ejemplos los pueden encontrar en el anexo B.

Ejemplo II.3.1

- **Contexto**: Se observa una balanza con 3 representaciones diferentes, los objetos que equilibran la balanza y se encuentran en los platilos son: naranjas,sandias y piñas.
- **Tareas matemáticas**: Se pide equilibrar las balanzas con las naranjas.

Figura 4.11: S00148d

Ejemplo II.3.2

- **Contexto**: Se observa una balanza con 2 representaciones diferentes, los objetos que equilibran la diferentes representaciones de la balanza y se encuentran en los platilos son: calabazas, melones y peasa de 1kg.
- **Tareas matemáticas**: Encontrar el peso de cada calabaza y cada melón.

Figura 4.12: S22006i

4.3.3. Problemas que tratan sólo el aspecto DATOS

La clasificacion de estos problemas se hace con base a los datos, es decir los que tienen datos reales, datos irreales, datos contradictorios. Esta clasificación de los problemas se enfoca especificamente en el aspecto DATOS de la teoria de Palm. En este aspecto cuando tenemos datos reales estos nos ayudan mucho al análisis del problema porque se pueden hacer comparaciones con objetos reales, caso contrario es cuando los datos son irreales ya que todo el problema se contradice.

Ejemplo III.1

- **Contexto**: Se presenta una balanza equilibrada con cabezas de personas, las cuales pesan 3kg cada una y otros objetos desconocidos pero iguales.
- **Tareas matemáticas**: Plantear la ecuación que corresponde a la balanza, también determinar el valor del objeto desconocido para que la balanza se mantenga en equilibrio.

  Esto no ocurre en la vida real, es algo fuera de contexto, no se pueden poner cabezas de personas en una balanza así como cualquier cosa (para enseñar ecuaciones) no entiendo el mensaje que quiere dar el autor. Los elementos de la balanza son muy reales, al menos las cabezas pero asustan, el peso de una cabeza de un recién nacido es en promedio de 2.5kg y de 6 a 7 kilogramos aproximadamente la de un adulto promedio. Así que el autor habla de cabezas de niños.

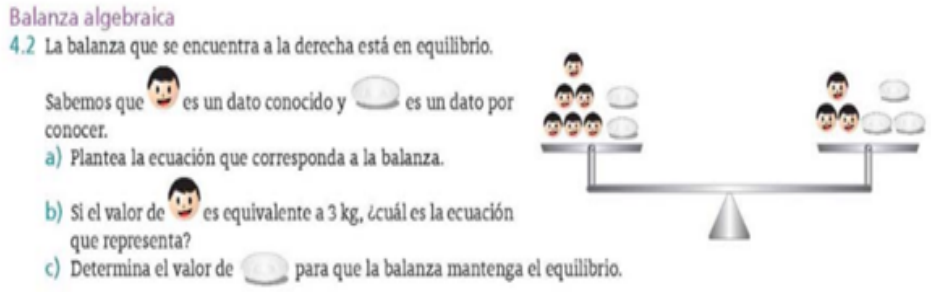


Figura 4.13: S00141

Ejemplo III.2

- **Contexto**: Se presenta una balanza con tres representaciones diferentes, los objetos que se encuentran en los platillos de cada representación de la balanza son peras, piñas y limones.
- **Tareas matemáticas**: Las dos primeras representaciones de la balanza están en equilibrio y pide encontrar cuantos limones se necesitan para equilibrar una piña, en la tercera representación de la balanza.

  Los datos nos llevan a una solución con fracciones. Además una pera más 2 limones no es normal que pesen igual que una piña por más pequeña que esta sea. Específicamente: Una piña pesa en promedio de 1 a 2.5 kg. Una pera pesa

en promedio de 150 a 220g Un limón pesa en promedio de 50 a 200g. Si tomamos la piña más pequeña y la pera y los limones mas grandes tendríamos que: Piña=Pera+Limon+Limon 1kg = 220g+200g+200g 1kg=620g lo cual es falso, por lo tanto la segunda representación de la balanza no es correcta.

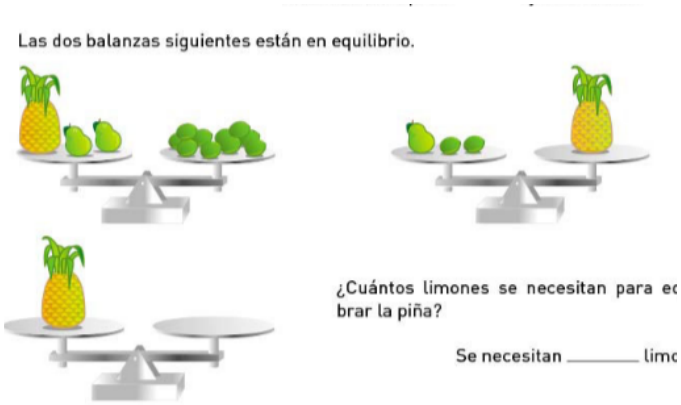


Figura 4.14: S22006

Ejemplo III.3

- **Contexto**: Se observa una balanza equilibrada con 10 barras de metal, una pesa de 1.14kg y otra de 3.84 kg.
- **Tareas matemáticas**: Escribir la expresion algebraica que represente a la balanza, escribir cuantas barras de metal se pueden quitar como máximo de cada lado de la balanza y finalmente determinar la masa de cada barra de metal.
- Los datos de este problema no son recomendados para aplicar el método de la balanza, Filloy y el libro del maestro de secundaria recomiendan que los coeficientes de la ecuacion y el resultado sean enteros positivos. Por otro lado no se conoce que vendan pesas con esa masa en especifico y por lo tanto serian objetos (datos) que no son reales lo cual contradice la teoría de Palm.

b) Los pesos de la balanza de la figura 4.2 son iguales, por lo que dicha balanza está en equilibrio.

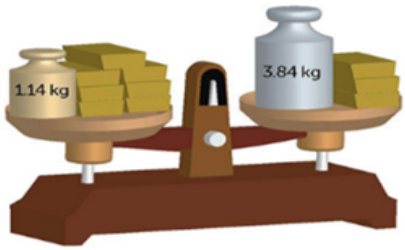


Fig. 4.2

- Escriban una expresión algebraica que represente que la balanza está en equilibrio. _____.
- ¿Cuántas barras de metal se pueden quitar como máximo de cada lado de la balanza para que siga en equilibrio? Escriban una expresión algebraica que represente la balanza después de quitar esas barras de metal. _____.
- Comparen las dos expresiones algebraicas anteriores e indiquen cómo se obtiene una a partir de la otra. _____.
- A partir de lo que hasta ahora se ha visto, determinen cuál es la masa de cada barra. _____.

los procedimientos que se usan en la página con tus compañeros y con tu profesor, ¿les sirvieron para aclarar dudas? Fecha y hora de consulta: 5 de octubre de 2012 a las 20:16 h.

185

Figura 4.15: S220017b

4.3.4. Problemas de balanza con expresiones algebraicas o números

Este grupo también se clasifica por el aspecto DATOS, pero con la característica especial de que los objetos que se colocan en la balanza pueden ser de diferentes tipos, por ejemplo: en un platillo de la valanza pueden aparecer variables y números y en el otro sólo números o en un platillo variables y objetos, y en el otro objetos y números o en ambos platillos expresiones algebraicas.

Ejemplo IV.1

- **Contexto**: Se presentan una balanza con expresiones algebraicas en los platillos.
- **Tareas matemáticas**: Encontrar el valor de x que hace que la balanza este equilibrada. Para empezar una balanza nos sirve para compara masas de objetos, en esta balanza no se observan objetos se observan expresiones algebraicas lo cual confunde al estudiante, y por supuesto que este es un evento que jamás ocurrirá en la vida real. Respecto a los datos estos son abstractos, no tiene sentido escribir expresiones algebraicas (menos con coeficientes negativos) en los platillos de la balanza porque no existe relación alguna entre el método de la balanza y la solución de este problema.

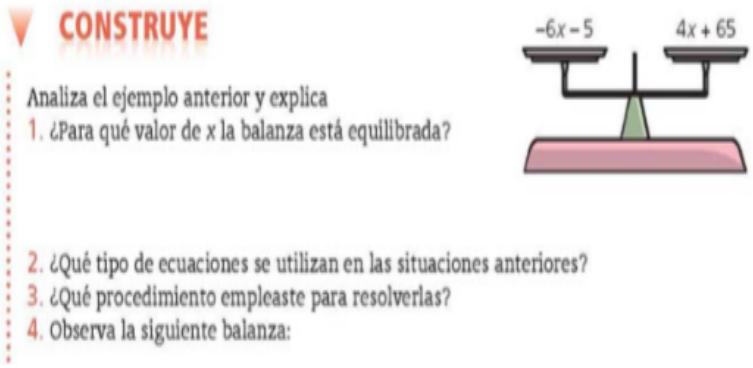


Figura 4.16: S00148

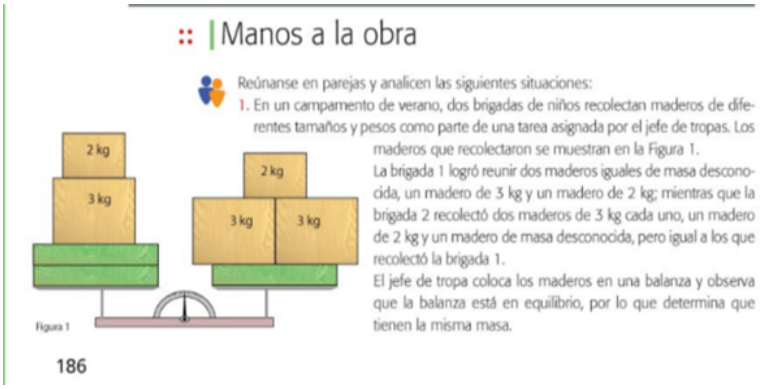
4.3.5. Problemas se intentan dar la idea de casos reales (EVENTO)

Los problemas que aparecen en este grupo son aquellos donde los autores intentan dar la idea al estudiante de que pueden utilizar el modelo de la balanza para resolver directamente un problema, dado en un evento de la vida real o extraescolar. De acuerdo a nuestro marco teórico esto es un error, ya que el método de la balanza es sugerido al profesor en el tema de ecuaciones para facilitar en el estudiante el aprendizaje del concepto de variable, ecuación y de las propiedades de igualdad. Esto nos lleva a que todos los problemas ubicados en este grupo no cumplan con el aspecto EVENTO propuesto en la teòria de Palm y por lo tanto resultaran ser problemas no auténticos.

Ejemplo V.1

- **Contexto**: Se presentan una balanza equilibradas con maderas de diferentes pesos, de 3 kg, de 2 kg y otras de peso desconocido.
- **Tareas matemáticas**: Encontrar el peso de las maderas color verde (peso desconocido).

- **Evento:** No es posible ya que si los niños están en campamento, se encuentran en el bosque o en algún lugar al aire libre y en esos lugares es imposible recolectar maderas de forma y tamaño perfecto como se muestran en la balanza.
- **Justificación:** Como existe una confusión con el peso y el color de las esferitas (DATOS) se concluye que el problema es NO auténtico.



:: Manos a la obra

Reúnanse en parejas y analicen las siguientes situaciones:

1. En un campamento de verano, dos brigadas de niños recolectan maderos de diferentes tamaños y pesos como parte de una tarea asignada por el jefe de tropas. Los maderos que recolectaron se muestran en la Figura 1.

La brigada 1 logró reunir dos maderos iguales de masa desconocida, un madero de 3 kg y un madero de 2 kg; mientras que la brigada 2 recolectó dos maderos de 3 kg cada uno, un madero de 2 kg y un madero de masa desconocida, pero igual a los que recolectó la brigada 1.

El jefe de tropa coloca los maderos en una balanza y observa que la balanza está en equilibrio, por lo que determina que tienen la misma masa.

Figura 1

186

Figura 4.17: S22010

Ejemplo V.2

- **Contexto**: Se observa una balanza con dos representaciones equilibradas, las representaciones de esta balanza están equilibradas con gallinas, cerdos y una pesa de 13 (sin especificar unidades de peso).
- **Tareas matemáticas**: Encontrar la masa de cada cerdo y cada gallina.

4. En una granja hay cerdos y gallinas. Si las balanzas están en equilibro, plantea las ecuaciones y encuentra mediante tablas la masa de cada cerdo y de cada gallina.

Figura 4.18: S00148e

- **Evento:** No es algo que la gente hace en la vida extraescolar. Además los cerdos y las gallinas no se quedarían estáticos en los platillos. Es algo sin sentido.

- **Justificación:** Como existe una confusión con el peso y el color de las esferitas (DATOS) se concluye que este es un problema NO auténtico.

Ejemplo V.3

- **Contexto**: Se observa una balanza en uno de los platillos hay un bloque de 32 sillas más 3 bloquesde x sillas, en el otro platillo hay un gran bloque de 152 sillas (todo esto según el problema).
- **Tareas matemáticas**: Encontrar el valor de la incógnita la cual representa a un número de sillas.

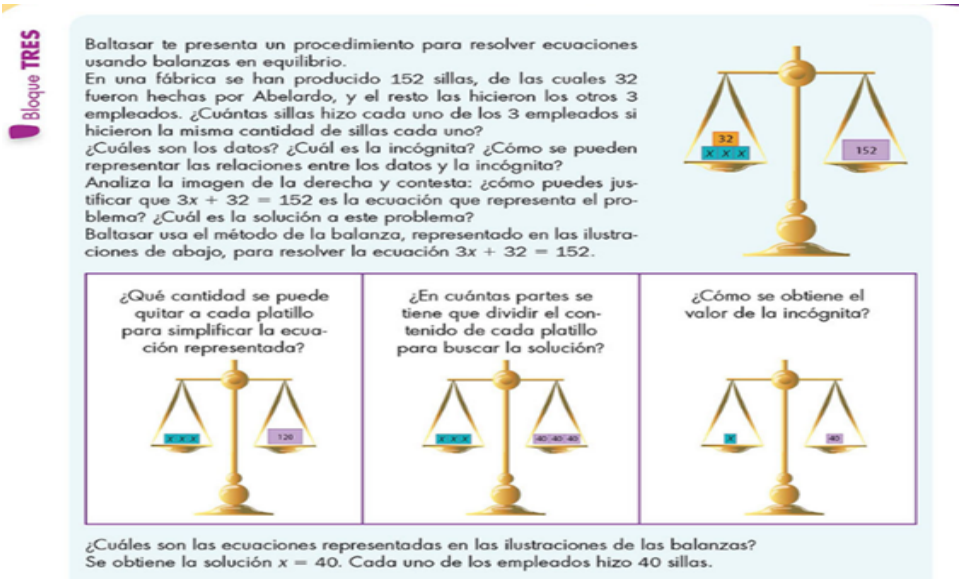


Figura 4.19: S12011

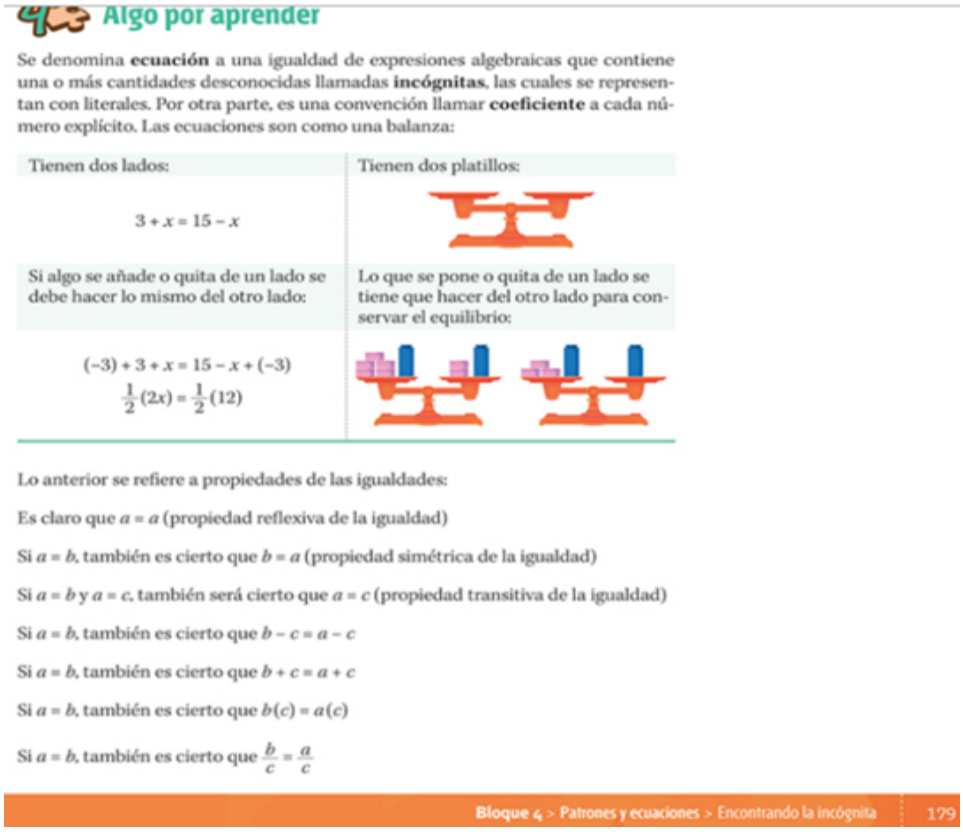
- **Evento:** El evento no es posible, esto no ocurre en la vida real, jamás un empresario va a utilizar una balanza para saber la productividad de sus trabajadores, además es imposible apilar 152 sillas en cada lado de la balanza. La balanza es un artefacto concreto que se utiliza para comparar masas de objetos, en este caso no se habla de unidad de peso, es decir no se utiliza la balanza de manera correcta. Se puede saber cuántas sillas hizo cada trabajador, pero no por el método de la balanza si no resolviendo la ecuación de manera algebraica.

4.3.6. Problemas con errores de concepto

Los problemas presentados aquí son los que tienen errores pincipalmente de concepto, es decir se maneja mal el término equilibrio, o se llega a sistemas de ecuaciones sin solución como es el caso del problema no auténtico presentado en la hoja de trabajo.

Ejemplo VI.1

- **Contexto**: Se observa una balanza con dos representaciones diferentes, puede notarse que los objetos que están en los platillos de la balanza son cubos y cilindros.
- **Tareas matemáticas**: Poner y quitar objetos de ambos platillos de la representación, ya que lo que se pone o quita de un lado se tiene que hacer del otro lado para conservar el equilibrio.



Algo por aprender

Se denomina **ecuación** a una igualdad de expresiones algebraicas que contiene una o más cantidades desconocidas llamadas **incógnitas**, las cuales se representan con literales. Por otra parte, es una convención llamar **coeficiente** a cada número explícito. Las ecuaciones son como una balanza:

Tienen dos lados:	Tienen dos platillos:
$3 + x = 15 - x$	
Si algo se añade o quita de un lado se debe hacer lo mismo del otro lado:	Lo que se pone o quita de un lado se tiene que hacer del otro lado para conservar el equilibrio:
$(-3) + 3 + x = 15 - x + (-3)$ $\frac{1}{2}(2x) = \frac{1}{2}(12)$	

Lo anterior se refiere a propiedades de las igualdades:

Es claro que $a = a$ (propiedad reflexiva de la igualdad)

Si $a = b$, también es cierto que $b = a$ (propiedad simétrica de la igualdad)

Si $a = b$ y $a = c$, también será cierto que $a = c$ (propiedad transitiva de la igualdad)

Si $a = b$, también es cierto que $b - c = a - c$

Si $a = b$, también es cierto que $b + c = a + c$

Si $a = b$, también es cierto que $b(c) = a(c)$

Si $a = b$, también es cierto que $\frac{b}{c} = \frac{a}{c}$

Bloque 4 > Patrones y ecuaciones > Encontrando la incógnita 179

Figura 4.20: S22020

Error: No es posible mostrar una balanza que según el autor está en equilibrio y que al irle quitando objetos del mismo peso en ambos lados de los platillos se supone que debe seguir manteniendo el equilibrio (por las propiedades de igualdad). Pero en la segunda representación de la balanza si quitamos un cilindro de cada lado nos quedarían tres bloques de un lado y 0 del otro, lo cual inclinaría a la balanza y esto contradice la afirmación del autor de que la primera representación de la balanza estaba en equilibrio.
Datos: Son contradictorios en la representación de las balanzas ya que el autor dice que están en equilibrio y no es verdad.
Pregunta: Se practican las propiedades de igualdad para las ecuaciones de primer grado (reflexiva, simétrica, transitiva). El problema es que la representación de la balanza que se usa nos lleva a una contradicción.

Ejemplo VI.2

- **Contexto**: Se observa una balanza con tres representaciones diferentes, puede notarse que los objetos que están en los platillos de la balanza son pesas se 3kg, 5kg y cilindros.

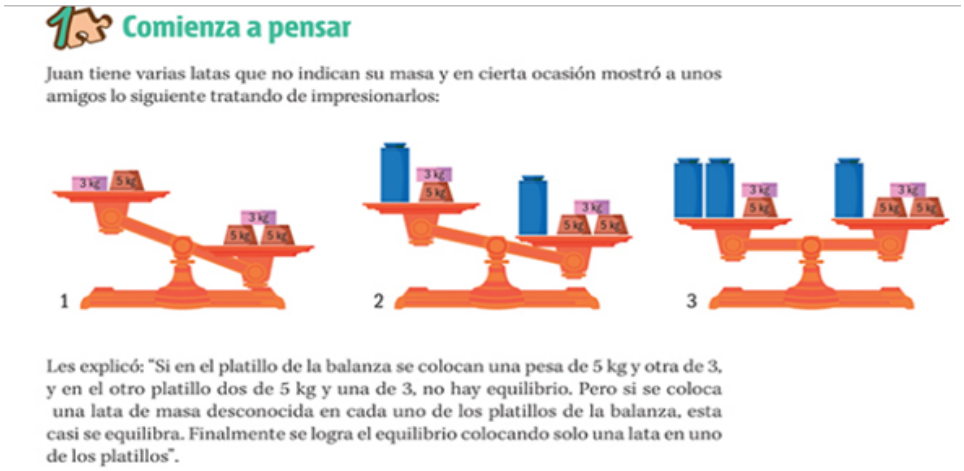


Figura 4.21: S22020a

- **Texto original:** Si en el platillo de la balanza se coloca una pesa de 5kg y otra de 3kg, y en el otro platillo dos de 5kg y una de 3kg, no hay equilibrio. **Pero si se coloca una lata de masa desconocida en cada uno de los platillos de**

lablanza, esta casi se equilibra. Finalmente se logra el equilibrio colocando solo una lata en uno de los platillos.

- **Tareas matemáticas**: Juan tiene varias latas que no indican su masa y en cierta ocasión mostró a unos amigos las tres representaciones de la balanza tratando de impresionarlos.

Error: En la segunda representacion de la blanza se encuentra un error de concepto que tiene que ver con las propiedades de equilibrio en la balanza e igualdad en las ecuaciones lineales, es decir que si en la primera representacion de la balanza se coloca un cilindro del mismo peso en ambos platillos de la balanza ésta no debe sufrir ningun movimiento, sin embargo el autor dice que la balanza casi se equilibra.

4.3.7. Problemas con acertijos

Aquí se clasifican los acertijos encontrados, los acertijos están presentes desde hace muchos años (1904) y publicados en el libro de Samuel Loyd. Los problemas tipo balanza aparecen por primera vez como acertijos y años después se usarían para la educación matemática en particular para la enseñanza aprendizaje de las ecuaciones de primer grado. Samuel Loyd introdujo los acertijos de balanza para dar a los alumnos la oportunidad de resolver estos problemas de álgebra sólo con la manipulación de los símbolos, es decir usando razonamiento lógico.

Los dos ejemplos que pondremos a continuación (gatitos y balón a la mitad) fueron encontrados en los libros de secundaria, y a pesar de haber sido tomados; uno del libro de Samuel Loyd y el otro del libro de Garner (donde éste hizo modificaciones al problema de Loyd), no fueron referenciados.

Ejemplo VII.1

- **Contexto**: Se observa una balanza con dos representaciones diferentes, puede notarse que los objetos que están en los platillos de la balanza son pesas se 3kg, 5kg, 10kg, gatos grandes y gatos pequeños.
- **Texto original: Animalirretos**, los gatos grandes pesan más que los pequeños, pero todos los grandes pesan lo mismo,igual que todos los pequeños.
- **Tareas matemáticas**: Encontrar el peso de cada gato.

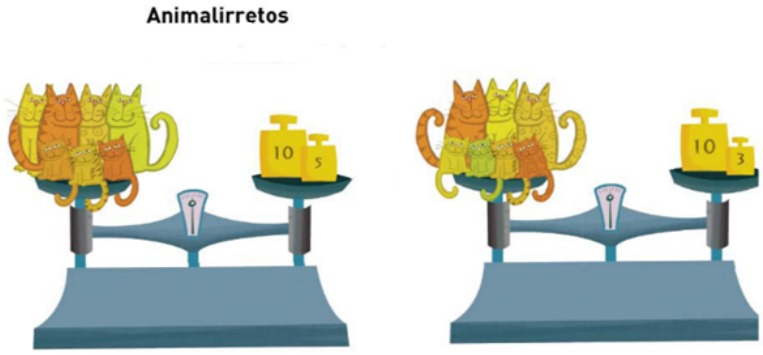


Figura 4.22: S22006f

Ejemplo VII.2

- **Contexto**: Se observa una balanza con medio balón y una pesa de 1/2 kg en el platillo izquierdo, y en el platillo derecho un balón.
- **Texto original: El fiel de la balanza**, un balón de fútbol pesa 1/2 kilogramo más la mitad de su propio peso.
- **Tareas matemáticas**: Encontrar el peso del balón y proporcionar argumentos que validen tu respuesta.

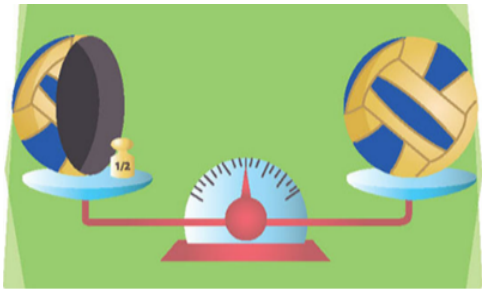


Figura 4.23: S00163

4.3.8. Problemas con balanza de Arquímedes (palanca)

El método de la balanza (palanca) de Arquímedes es utilizado para resolver problemas de una ecuación con dos incógnitas; una la masa del objeto y la otra la distancia a la que se encuentra colocado el objeto a partir del punto de referencia. Con este método se encontraron algunos problemas a pesar de que este tema no esta contemplado en el plan de estudios de secundaria SEP.

Ejemplo VIII.1

- **Contexto**: Se observa una balanza de Arquímedes con dos representacines diferentes, las cuales están equilibradas de la siguiente manera: en la primera el objeto de 10kg está colocado a 30cm del punto de apoyo y el objeto de 5kg está colocado a 60 cm del punto de apoyo. En la segunda representación de la palanca el objeto de 2kg está colocado a 32cm del punto d apoyo yel objeto de 8kg está colocado a 8cm del punto de apoyo.
- **Texto original:** Cuando los brazos de la palanca son diferentes, el equilibrio se logra considerando dos cantidades inversamente proporcionales.
- **Tareas matemáticas**: Analiza las dos figuras en equilibrio y descubre cual es la igualdad que se tiene que cumplir para lograr el equilibrio.

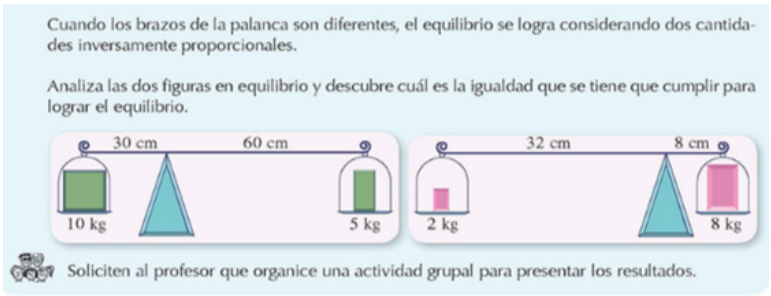


Figura 4.24: S22015a

Ejemplo VIII.2

- **Contexto**: Se observa una balanza la cual esta equilibrada de la siguiente manera; en el lado izquierdo 3 objetos de peso desconocido más una pesa de 2kg, en el lado derecho un objeto de peso desconocido más una pesa de 10kg.

- **Texto original:** Pedro colocó en una balanza pesos de distintos tamaños hasta equilibrarla.
- **Tareas matemáticas**: Si las pesas marcadas con x son idénticas, encontrar su peso.

Este problema fue colocado en este grupo porque la balanza no tiene platillos en sus extremos, y para poder quitar y poner elementos en ella y que se mantenga el equilibrio necesitariamos saber la distancia a la que se deben colocan los objetos con referencia al punto de apoyo.

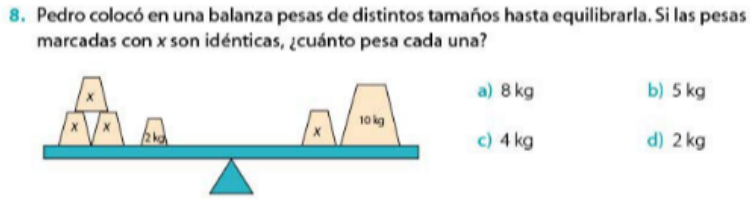


Figura 4.25: S22005

4.3.9. Problemas con balanza como artefacto (báscula)

Finalmente en esta clasificación tenemos los problemas que sólo utilizan la balanza como artefacto, es decir en una báscula pesando papas, tortillas, jamón, bolas de masa para hacer pan y otros productos más, lo único que se pide al estudiante es hacer conversiones del peso marcado en la báscula.

Ejemplo IX.1

- **Contexto**: Se observan cinco básculas con diferente representación y sobre cada una de ellas una bola de masa, las bolas de masa son de diferente tamaño.
- **Texto original:** Un panadero pesa distintas bolas de masa y anota en etiquetas el peso en forma de fracción. Escriban la fracción que corresponda a cada bola de masa y después respondan.
- **Tareas matemáticas**: hacer las conversiones de decimal finito a fracción, escribir que tipo de fracciones de las conversiones hechas, hacer la simplificación de las fracciones.

Es posible que en algún momento un panadero necesite pesar las bolas de masa para prepar panes de diferente tamaño y estilo. La representación de los datos no son proporcionales, por ejemplo el tamaño de la masa en la representación de la primera báscula no es proporcional con la segunda tercera y cuarta ya que según los datos:

La bola de masa de la segunda báscula cabe 3.75 veces en la bola de masa de la primera. La bola de masa de la tercera báscula cabe 4.26 veces en la bola de masa de la primera. La bola de masa de la cuarta báscula cabe 10.24 veces en la bola de masa de la primera. Pero en el dibujo no se ve así, las masas pequeñas caben mucho más veces en la grande respectivamente.

Figura 4.26: S12019

La clasificación completa de los problemas puede consultarse en las tablas del anexo A.

Capítulo 5

Investigación con los alumnos

Uno de nuestros objetivos es estudiar el efecto que tiene el uso del método de la balanza en los estudiantes de secundaria, específicamente explorar cuál es su reacción cuando se le presentan dos tipos de problemas; los auténticos y los no auténticos. Para este fin, seleccionamos dos muestras de estudiantes, una de tercero de secundaria y la otra de primero de preparatoria. La razón de la elección de los estudiates de preparatoria se debe a que el tema de ecuaciones lineales se aborda nuevamente en este nivel, además del hecho de ser egresados recientes del nivel secundaria. También nos interesa hacer comparaciones entre ambos niveles.

En la primera sección de este capítulo presentamos la hoja de trabajo diseñada para nuestro estudio experimental y en la segunda sección mostramos el análisis de los resultados de la aplicación de la hoja de trabajo.

5.1. Hoja de trabajo

La hoja de trabajo (Figuras 4.1 y 4.2), consiste de dos problemas distribuidos en dos cuartillas y seleccionados de los libros de texto *Matemáticas 2. Secundaria Fundamental, C. Baltazar, E. Ruiz, L. F. Ojeda. Editorial Castillo (2002)* y *Matemáticas 2. Fernando Iturralve, Editorial Terracota-Cencage (2014).*

El primer problema, que corresponde a la primera referencia, fue elegido para utilizar de manera correcta el método de la balanza y el segundo problema, de la segunda referencia, tiene la caractéristica de no autenticidad. Para simular lo que podría pasar normalmente en las aulas se respetó textualmente la propuesta de los autores, salvo la adición de la pregunta A ubicada al inicio del primer problema, donde se pregunta al estudiante cuándo considera que una balanza se encuentra en equilibrio. La idea de adicionar esta pregunta es motivada de nuestra revisión donde encontramos varios

autores que dan por hecho que los estudiantes tienen claro el concepto de equilibrio.

La hoja de trabajo se implementó en 113 estudiantes del tercer año de la Secundaria Técnica No. 60 y en 125 estudiantes de primer año de la preparatoria Lic. Benito Juárez García de la BUAP.

Balanzas en equilibrio: Método de la balanza para resolver ecuaciones

Apellidos_____ Nombre_____ Edad ___ años y ___meses
Escuela _____Población _____ Sexo (F __) (M__)

1) La balanza de la figura 4.1 esta en equilibrio. La masa de los jarrones no se conoce pero se sabe que es la misma.

Figura4.1. Balanza en equilibrio.

A.En general, ¿Cuándo crees que una balanza se encuentra en equilibrio?

_____
_____
_____

B. Subrayen, de las siguientes acciones , las que mantendran la balanza en equilibrio

(a) Pasar uno de los jarrones del lado derecho al lado izquierdo.
(b) Quitar un jarrón de cada lado.
(c) Cambiar uno de los jarrones por una barra de 500g en el lado derecho.
(d) Quitar el mismo número de barras de 500g en ambos lados.
(e) Quitar una pesa de 700g de ambos lados.
(f) Quitar dos pesas de 500g de ambos lados.

C.Completen la siguiente ecuación que representa la balanza en equilibrio.
El miembro de la izquierda representa las pesas del lado izquierdo de la balanza y el miembro de la derecha representa el lado derecho. Se utilizará la letra **j** para representar la masa de un jarrón.
j + 1950 + _____ = _____ +1100+700

¿Qué sucede con la igualdad si se restan 1800g en ambos miembros de la ecuación?

_____
_____.

Dr. Josip Slisko/ Yolanda Zamora Página 1

Figura 4.1: Hoja de trabajo,problema 1.

2) Al estudiar el tema de propiedades de la materia en la clase de ciencias, Rocío y sus compañeros trataron de calcular la masa de algunos cuadernos y libros. Para evitar errores consiguieron cuadernos nuevos y libros iguales. Lograron en la balanza los arreglos que se muestran en la Figura2.

Figura 2.

Analicen la **Figura 2** y a partir de ella respondan:

A.¿Qué procedimiento pueden emplear para saber el peso de cada objeto de la balanza?

_____

_____

B.¿Cuánto pesa cada libro y cada cuaderno?
Peso de cada libro:_____
Peso de cada cuaderno:_____

C .Ahora, simbolicen algebraicamente lo que se tiene en cada balanza.
Balanza 1:_____
Balanza 2:_____

D.Resuelva algebraicamente el sistema de ecuaciones obtenido.

Conclusion:_____
_____
_____
_____
_____

Dr. [illegible]/Yolanda Zamora Página 2

Figura 4.1: Hoja de trabajo, problema 2.

5.2. Resultados

Las respuestas de los estudiantes a la pregunta

A. ¿Cuándo crees que una balanza se encuentra en equilibrio?

pudieron ser clasificadas en los siguientes grupos:

(A) Igualdad de masas (pesos) + descripción correcta de la posición de los platos.
(B) Igualdad de masas.
(C) Descripción correcta de la posición de los platos.
(D) Respuestas confusas o sin respuestas.

Un ejemplo de las respuestas que dieron los estudiates a cada grupo es el siguiente.

(A) Cuando ambos platones que sostiene los objetos se encuentran a la misma altura o nivel. El peso de los objetos es el mismo de cada lado.
(B) Cuando se tiene el mismo peso en ambos lados de la balanza.
(C) Cuando se encuentran las dos bases en la misma altura.
(D) Cuando los objetos de cada lado de la balanza se encuentran iguales.

Del análisis de todas las respuestas podemos observar que los estudiantes que dieron respuestas ubicadas en el grupo A tienen muy claro lo que significa que una balanza se encuentre en equilibrio y se espera que tengan los mejores resultados en el resto de las preguntas.

Los alumnos que dieron respuestas en el grupo B tienen idea de lo que significa el equilibrio en la balanza, y se espera que estos alumnos puedan contestar bien el resto de las preguntas.

Los alumnos que escribieron respuestas tipo C no manejan los conceptos de la masa o del peso. Se espera que sus resultados posteriores no sean del todo correctos. Los estudiantes que dieron respuestas tipo D no tienen idea de lo que significa que una balanza se encuentre en equilibrio, por lo tanto se espera que el resto de las respuestas no sean correctas.

La tabla 4.1 nos muestra los resultados de los estudiantes con respecto a la primera pregunta que tiene que ver con el concepto de balanza en equilibrio.

Respuesta	Secundaria	Preparatoria
A: Igualdad de masas + descripción correcta de la posición de los platos	2	6
B: Igualdad de masas	66	88
C: Descripción correcta de la posición de los platos	12	18
D: Respuestas confusas o sin respuestas	33	13
TOTAL	**113**	**125**

Tabla 4.1 Tabla comparativa secundaria-preparatoria (pregunta 1).

En los resultados de secundaria obtuvimos sólo 2 alumnos (1.76 %) que tienen claro lo que significa que una balanza se encuentre en equilibrio; 66 alumnos (58.40 %) tienen idea de lo que significa el equilibrio en la balanza; 12 alumnos (10.61 %) no manejan los conceptos de masa o peso; 33 alumnos (29.20 %) no tienen idea del significado del equilibrio de la balanza.

En el caso de preparatoria tenemos 6 alumnos (4.8 %) que tienen claro el significado del equilibrio en la balanza; 88 alumnos (70.4 %) tienen sólo una idea de lo que significa; 18 alumnos (14.4 %) no manejan los conceptos de masa o peso y 13 alumnos (10.4 %) no tienen idea de lo que significa el equilibrio de la balanza. De estos resultados concluimos que los estudiantes de preparatoria tienen mayor claridad del concepto de equilibrio en la balanza lo que se ve reflejado en los resultados finales.

La tabla 4.2 nos muestra el resto de los resultados de los estudiantes sobre la hoja de trabajo. Como podemos observar en la tabla, el problema auténtico lo resolvieron de manera correcta 11 estudiantes de secundaria y 56 de preparatoria, y de manera incorrecta 102 de secundaria y 69 de preparatoria. En el caso del problema no auténtico 1 alumno de secundaria y 15 de preparatoria se dieron cuenta del sistema sin solución o se confundieron, por otro lado 102 de secundaria, y 110 de preparatoria no se dieron cuenta de la no autenticidad del problema. A continuación vamos a mostrar algunos de los resultados sobre el problema no auténtico.

Por ejemplo, el alumno de secundaria que identificó el error del problema no auténtico, al pasar del método de la balanza a las ecuaciones, primero escribe las expresiones algebraicas sin hacer reducciones de términos semejantes y posteriormente va eliminando una a una las variables o términos iguales de ambos lados de la ecuación de tal manera que se mantenga la igualdad. Esta forma de escribir las ecuaciones y de ir operando, es idéntica a la forma de representar los objetos en la balanza y de ir quitando objetos en ambos platillos. A continuación se describe la respuesta de este estudiante.

PRIMER PROBLEMA (AUTÉNTICO)				SEGUNDO PROBLEMA (AUTÉNTICO)			
ALUMNOS QUE RESOLVIERON O NO EL PROBLEMA				ALUMNOS QUE IDENTIFICARON LA INCOMPATIBILIDAD DEL SISTEMA O SE CONFUNDIERON			
SECUNDARIA		PREPARATORIA		SECUNDARIA		PREPARATORIA	
SI	NO	SI	NO	SI	NO	SI	NO
11	102	55	69	1	102	15	110

Tabla 4.2: Tabla comparativa secundaria-preparatoria

Expresa las dos ecuaciones de manera algebraica como sigue.

- $L + L + C + C = L + L + L + L + 125$,
- $L + L + C + C + C + 50 = C + C + C + C + C$,

Ecuaciones simplificadas:

- $C + C = L + L + 125$,
- $L + L + 50 = C + C$

Texto original del estudiante:

El resultado no se logra obtener porque se contradice, si $L + L + 50 = C + C$, *dice que es equivalente* $C + C$ *a* $L + L + 50$ *pero en el primero es* $C + C = L + L + 125$ *dice que* $L + L + 125$ *equivale a* $C + C$ *se contradicen los términos.*

Los resultados en preparatoria nos muestran que el 44.8 % de los estudiantes pudieron resolver bien el problema auténtico, sin embargo el 88 % de estos alumnos no pudieron resolver el problema no auténtico y en el 12 % se encuentran los estudiantes que pudieron identificar la no autenticidad del problema y los que se mostraron confundidos. Los siguientes son algunos ejemplos de las reacciones de los estudiantes.

En preparatoria un estudiante responde al problema no auténtico expresando las dos ecuaciones lineales de manera algebraica como sigue.

- $2L + 2C = 4L + 125g$

- $2L + 3C + 50g = 5C$

Para simplificar las ecuaciones en este paso el estudiante resta a cada miembro de la primera ecuación el término $2L$ y de esta manera mantiene la igualdad en la ecuación. Por otro lado, resta el término $3C$ de cada miembro de la segunda ecuación.

- $2L + 2C - 2L = 4L + 125g - 2L$
- $2L + 3C + 50g - 3C = 5C - 3C$

Ecuaciones simplificadas:

- $2C = 2L + 125g$
- $2L + 50g = 2C$

Texto original del alumno:

Es imposible responder un problema que nos da datos contradictorios como éste, lo único que es seguro es que un cuaderno pesa más que un libro pero no se puede calcular ningún peso preciso.

Los siguientes alumnos contestaron bien el primer problema y plantearon el sistema de ecuaciones del segundo problema de manera correcta. Sin embargo, sus conclusiones para el segundo problema fueron las siguientes:

a) *El problema me confundió un poco, sobre todo en la ecuación, creo que no la planteé de manera correcta y al resolverlo me confundió.*

b) *En este problema se me dificultó un poco la resolución del sistema de ecuaciones ya que en mis resultados me da por ejemplo:* $0 = 75$.

c) *No se puede resolver porque en la primera balanza 2 libretas equivalen a 2 libros y* $125g$ *y en la segunda 2 libretas equivalen a 2 libros y* $50g$*. No se llega a una igualdad y por ello no tiene solución.*

Comparando los resultados de la primera y la segunada tabla, los estudiantes que dieron respuestas ubicadas en el grupo A tienen muy claro lo que significa que una balanza se encuentre en equilibrio y el 50 % (1) de los alumnos de secundaria contesto bien los dos problemas y el 100 % de los de preparatoria también respondieron de manera correcta toda la hoja de trabajo.

Los alumnos que dieron respuestas en el grupo B tienen idea de lo que significa que una balanza se encuentre en equilibrio, y respecto al primer problema solamente el 16.66 % de los alumnos de secundaria lo contestaron adecuadamente y en preparatoria el 63.63 % también respondió correctamente la pregunta.

Conclusiones

En nuestra revisión encontramos que la mayoría de los problemas de balanza no son auténticos de acuerdo a la teoría de Palm. Los factores principales de la no autenticidad de estos problemas, se deben a que algunos autores tratan de resolver problemas reales aplicando directamente el modelo de la balanza y otros utilizan datos que no corresponden a la realidad. Desde el punto de vista, de varios expertos, el modelo de la balanza es un recurso para la enseñanza de las ecuaciones de primer grado, específicamente para facilitar el entendimiento de los conceptos de variable y ecuación. Ellos recomiendan el uso de la balanza para la comprensión del modelo matemático que resuelve el problema, dejando la solución del problema a la ecuación algebraica.

En la muestra seleccionada de estudiantes, cuando se les presentó un problema auténtico, una cantidad considerable pudo resolverlo adecuadamente. Sin embargo, cuando a los mismos estudiantes se les presentó un problema no auténtico, pocos fueron capaces de detectar el error y otros se mostraron totalmente desorientados (ocasionandose así conflictos cognitivos). Esto nos conduce a poner especial atención en los ejemplos y problemas que los autores de los libros de texto proponen para la enseñanza de las ecuaciones lineales a través del método de la balanza. También nos encontramos que a pesar de que los libros de texto sufren continuas actualizaciones varios problemas mantienen su estatus de no autenticidad. Por estos motivos consideramos que es importante que los profesores y los autores de libros de texto tomen en cuenta el aspecto de la autenticidad en sus problemas y ejemplos propuestos.

Puesto que existe un estrecho margen de problemas que pueden ser resueltos con el artefacto balanza (en sustitución de las ecuaciones lineales), consideramos que la mayoría de los ejemplos que revisamos deberían ser sustituidos por otros que esten enfocados a la balanza como un recurso didáctico para la enseñanza de las ecuaciones.

Bibliografía

Arrieta, M. (2006). *Medios materiales en la enseñanza de las matemáticas*, Revista de psicodidáctica/Journal of Psychodidactics,1(5), 107-114.

Balbuena, H. (1998), ponencia presentada en el foro *Las matemáticas: educación y desarrollo.*

Baranes, R., Perry, M., & Stiegler, J. W. (1989). *Activation of real-world knowledge in the solution of word problems.* Cognition and Instruction 6, 287-318.

Cantoral, R., & Farfán, R. (2004). *Desarrollo conceptual del cálculo.* México: Thomson Editores.

Cáceres, I. T. S., & Suárez, M. D. L. (2008). Enciclomedia: *una herramienta tecnológica para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en primaria.* investigaciones y propuestas, 41.

Da Silva Figueira-Sampaio, A., dos Santos, E. E. F., & Carrijo, G. A. (2009). *A constructivist computational tool to assist in learning primary school mathematical equations.*Computers & Education, 53(2), 484-492.

Filloy Yague, E. (1999). *Aspectosteóricos del álgebra educativa.* Colección Sociedad Mexicana de Matemática Educativa. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Fitzpatrick & Morrison (1971). *Performance and product evaluation.* In R.L: Thorndike (Ed), Educational measurement (2nd ed., pp237-270). Washintong, DC: American Council on Education.

Gardner, H. (1994). *Estructuras de la mente.* Journal La teoría de las inteligencias múltiples, vol. 2.

Gardner, M. (1995). *Acertijos de Sam Loyd*. Edit. Sugarto.

Greenes, C., & Findell, C. (1999). *Developing studentsálgebraic reasoning abilities*. In L.V. Stiff & F.R. Curico (Eds.), Developing mathematical reasoning in grades K-12, 1999 yearbook. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Lesh, R. & Landau, M. (1983). *Acquisition of Mathematics Conceots and Processes*. Academic Press: London.

Lesh, R., Landau, M. & Hamilton (1983). *Conceptual models and Applied Mathematical Problem Solving Research*,Academic Press: London.

Loyd, S. & Gardner, M.(1959). *Mathematical puzzles*. Courier Corporation. vol. 1.

Palm, T. (2006). *Word problems as simulations of real-world situations: A proposed framework*. Forthelearning of mathematics, 26(1), 42-47.

Palm, T. (2008). *Impact of authenticityonsensemaking in wordproblemsolving*.Educational Studies in Mathematics, 67(1), 37-58.

Riojano Ceballos, M. T.(2010). *Modelación concreta en álgebra: balanza virtual, ecuaciones y sistemas matemáticos de signos*. Números revista de didáctica de las matemáticas, v75,pp5-20.

Stillman, G. (1998). Engagement with task contex of aplications task: Student performance and teacher beliefs. Nordic Studies in Mathematics Education, 6(3-4), 51-70.

Suth, J., & Moyer-Packenham, P. S. (2007). *Developing students'representational fluency using virtual and physical álgebra balances*. Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching, 26(2), 155.

Secretaria de Educación Pública (2011). *Programas de estudio de secundaria*. México D.F.: Secretaría de Educación Básica de http://www.curriculobasica.sep.gob.mx/index.php/prog-secundaria.

Turmudi, T. (2011). *Creating And Solving Model Of Linear Equation Through The Balance At Junior Secondary Class*. In PROCEEDINGS International Seminar and the Fourth National Conference on Mathematics Education.Department of Mathematics Education, Yogyakarta State University.

Yague, E. F. (1999). *Aspectos teóricos del álgebra educativa*. Grupo Editorial Iberoamérica.