BENEMÉRITA UNIVERSIDAD

AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

"APRENDIZAJE AUTORREGULADO Y METACOGNICIÓN PARA POTENCIAR LA TRADUCCIÓN DEL LENGUAJE NATURAL AL LENGUAJE ALGEBRAICO EN ESCOLARES DE SECUNDARIA"

"Tesis presentada como requisito para obtener el título de:

Maestría en Educación Matemática"

Presenta: José Hugo Lara Solís

Puebla, Pue. Mayo 2017

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

“APRENDIZAJE AUTORREGULADO Y METACOGNICIÓN PARA POTENCIAR LA TRADUCCIÓN DEL LENGUAJE NATURAL AL LENGUAJE ALGEBRAICO EN ESCOLARES DE SECUNDARIA”

“Tesis presentada como requisito para obtener el título de:

Maestría en Educación Matemática”

Presenta: José Hugo Lara Solís

Director de tesis: Dra. María Araceli Juárez Ramírez

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Mayo 2017

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

"APRENDIZAJE AUTORREGULADO Y METACOGNICIÓN
PARA POTENCIAR LA TRADUCCIÓN DEL LENGUAJE NATURAL
AL LENGUAJE ALGEBRAICO EN ESCOLARES DE SECUNDARIA"

Tesis que presenta:

José Hugo Lara Solís

Para obtener el Grado de Maestro en Educación Matemática

Mayo 2017

Agradecimientos

Agradezco a:

Mi directora de tesis Dra. María Araceli Juárez Ramírez.
A mi codirectora de tesis Dra. Lidia Aurora Hernández Rebollar.

Quiero agradecer a todos los Catedráticos de la Maestría en Educación Matemática, en especial al Dr. José Antonio Juárez López.

Asimismo, agradezco al CONACYT por su apoyo económico brindado durante los dos años de la Maestría.

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

Importantes cambios han surgido en la educación matemática. Un cambio importante sin duda es que la matemática ya no se concibe principalmente como un conjunto de conceptos abstractos y habilidades procedimentales que hay que dominar, sino sobre todo como un conjunto de construcciones con sentido humano y actividades de resolución de problemas basados en la modelización matemática de la realidad.

Este enfoque de las matemáticas como un proceso activo y constructivo, que se refleja en todo el mundo en los documentos de reformas que proponen nuevos estándares para la educación matemática (Cockcroft, 1982; National Council of Teachers of Mathematics, 1989), implica que los estudiantes asumen el control y la dirección sobre sus actividades de aprendizaje y de resolución de problemas propios. Esto significa que la autorregulación constituye una característica del aprendizaje efectivo y la resolución de problemas.

La autorregulación del aprendizaje y la solución de problemas son formas de control de acción que están caracterizadas por la regulación integrada de cognición, motivación, y emoción, además de los procesos metacognitivos, abarca los procesos de control y monitoreo del comportamiento (Boekaerts, 1997; Pintrich & DeGroot, 1990; Zimmerman, 1995; Snow, Corno, & Jackson, 1996). Situando la autorregulación dentro de un marco teórico de las matemáticas de la instrucción que afecta a cuatro componentes esenciales del aprendizaje: la adquisición de una disposición matemática como el objetivo final, los procesos de aprendizaje constructivo como el camino hacia la meta, potentes entornos de enseñanza-aprendizaje como apoyo y evaluación como una base para el control y retroalimentación.

Asimismo, se ha demostrado que los individuos que tienen la capacidad de evaluar sus propios conocimientos desarrollan conocimientos conceptuales más avanzados que aquellos que no los tienen (Carr, 2010; Kuhn, 2002). Una gran parte de la teoría del cambio conceptual refleja una importancia de la metacognición (Carr, 2010; Dole & Sinatra, 1998; Piaget, 1976).

Por lo tanto, se recurrió a la implementación tanto del modelo de aprendizaje autorregulado como al modelo metacognitivo debido a que la mayoría de estudiantes de la educación básica que se inician en el estudio del álgebra, particularmente en la traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico, no comprenden, del álgebra, sus conceptos, las estructuras, reglas, procedimientos y principios que rigen la manipulación de símbolos y cómo pueden usarse estos para registrar su comprensión de la situación en problemas verbales. En consecuencia, la mayoría de los alumnos cometen los mismos errores de forma reiterada, síntoma de las serias dificultades que tienen en su aprendizaje. El énfasis particular en esta intervención está en la introducción de estrategias metacognitivas en un dominio específico, el álgebra.

El presente estudio de investigación se refiere a la implementación de una intervención que puede afectar las experiencias de aprendizaje del estudiante del salón de clase y, tiene como propósito principal potenciar en los estudiantes del último grado de secundaria su conocimiento metacognitivo y el aprendizaje autorregulado para ayudarlos a ser autónomos en la traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico en problemas verbales.

Un elemento clave es que la educación conduce a la autoconciencia y está disponible para todos, independientemente de las experiencias educativas pasadas (Wright, 2001). Hay muchas posibilidades para que los estudiantes se involucren y se beneficien de la formación en la metacognición porque impacta la motivación (Mayer, 1987; Pintrich, 2000; Zimmerman, 2008).

Las estrategias metacognitivas son sugeridas como una técnica de instrucción para mejorar el aprendizaje de los estudiantes de matemáticas (Carr, 2010). Específicamente, se utilizó la instrucción de aprendizaje autorregulado en álgebra, en el cual los participantes son inducidos en actividades metacognitivas mientras participan en sesiones de aprendizaje de traducción del lenguaje natural al algebraico. Los procedimientos específicos para esta intervención con el fin de recopilar información en el aula regular para un grupo de 18 estudiantes en un rango de edad entre 14 y 16 años, se realizó a través de cuatro instrumentos: la prueba de razonamiento lógico (TOLT), dos cuestionarios auto-informe sobre estrategias metacognitivas (MAI) y estrategias de motivación y aprendizaje (MSLQ), y una prueba de álgebra utilizada como pre-test y post-test.

Asimismo, los estudiantes respondieron, durante seis meses, un conjunto de actividades con problemas verbales para traducirlos al lenguaje simbólico o algebraico. En este estudio se presenta el análisis y los resultados de los instrumentos aplicados. Los resultados obtenidos de este estudio revelaron que el trabajo con los modelos cíclicos de aprendizaje metacognitivo y autorregulado tuvo un impacto positivo en la traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico.

CAPÍTULO I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1 Descripción del problema

En el nuevo escenario de un ingente crecimiento de la información, así como las nuevas exigencias de un entorno globalizado y cambiante, se hace patente la urgencia de que el hombre desarrolle un aprendizaje autónomo que le permita responder a estas necesidades, con la finalidad de canalizar y rentabilizar mejor sus esfuerzos haciendo su trabajo más productivo y eficaz. El proceso educativo debe tender a lograr que los individuos sean capaces de seguir aprendiendo fuera de los ámbitos educativos formales, llámense escuela, universidad, instituto, etc., propiciando que cada sujeto pueda ser “maestro de sí mismo”, eligiendo la autorregulación como forma de vida.

Pero qué sucede si en el proceso de enseñanza aprendizaje surge la situación paradójica en la cual los alumnos se quejan de que la clase es poco interesante y, por otro lado, el docente se queja de la falta de interés de los alumnos. Lo que estamos presenciando en estos casos es una falta de motivación para el aprendizaje, algo que es muy común y conocido en el ámbito educativo, pero que sin embargo no se le termina de dar la importancia que debe tener en este proceso. Los docentes, padres de familia y autoridades educativas, damos generalmente por supuesto que los alumnos están dispuestos de manera natural y espontánea a aprender. Sin embargo, diversas experiencias nos han demostrado que esto no es así. Los sucesivos fracasos y frustraciones a los que se ven enfrentados tanto maestros, alumnos como padres de familia, así como los altos índices de deserción y repitencia, son indicadores de que algo no está funcionando adecuadamente.

Debemos partir del principio elemental que para que el aprendizaje sea fácil, es necesario que exista una motivación adecuada por parte del aprendiz y una vocación docente por parte del profesor. A partir de esta premisa, nos planteamos las siguientes inquietudes: ¿somos los docentes conscientes del nivel de motivación de nuestros alumnos al iniciar el proceso de enseñanza-aprendizaje?, ¿sabemos si tienen totalmente claro cuál es la meta que persiguen en su aprendizaje?, ¿conocemos el nivel de manejo que tienen de las estrategias de aprendizaje que los llevarán al éxito en su tarea académica? Y finalmente, ¿sabemos si son capaces de evaluar su desempeño y los logros obtenidos?

Justamente una de las principales causas del bajo rendimiento académico, según Zimmerman, es la incapacidad de los alumnos de controlar su propia conducta (Dembo & Eaton, 2000). Zimmerman (1995) se interesó en investigar cómo los alumnos pueden sentirse más motivados y capaces de asumir responsabilidad, controlar o autorregular su logro académico. De estas investigaciones se ha concluido que, las habilidades de aprendizaje autorregulado pueden conducir a un mayor logro académico e incrementar el sentido de eficacia, y que los cambios hacia una conducta más autorregulada no sólo están basados en procesos individuales o intrapsicológicos sino en procesos sociales e interpersonales. Revisando la literatura (Brockett & Hiemstra, 1993; Birenbaum, 2002; Linnenbrink & Pintrich, 2003; Merriam, Caffarella,, & Baumgartner, 2012), se encuentra que desde hace varias décadas se busca que los alumnos sean capaces de aprender por sí mismos, resolver sus propios problemas y enfrentar diferentes circunstancias dentro y fuera de la escuela. Esto ha sido denominado de diferentes maneras: metacognición, autorregulación y aprendizaje autorregulado.

El presente trabajo está enfocado en un área de las matemáticas que se ha considerado de suma importancia tanto en la educación como en la investigación en educación matemática, ya que, de su comprensión y dominio, depende el desempeño del estudiante en niveles posteriores de su carrera escolar, es decir, del álgebra.

Algunos investigadores (Küchemann, 1980; Matz, 1982; Wagner, 1983; Philipp, 1992, Warren, 1999; Ursini & Trigueros, 2001; Malara & Navarra, 2003) afirman que sólo se puede hablar de dominio del álgebra hasta que se comprende íntegramente el trabajo con la variable y sus distintas formas de uso. Por lo tanto, es necesario estudiar y conocer a profundidad cómo se desarrolla esta clase de pensamiento algebraico, y cómo se da el paso del pensamiento aritmético a éste.

Los profesores de matemáticas de la educación secundaria hemos sido testigos del intenso rechazo que muchos adolescentes manifiestan hacia el álgebra. ¿Se ha preguntado el porqué de ese rechazo? Habría que determinar cuál es la percepción que se tiene sobre qué es el álgebra escolar, qué objetivos persigue y cómo lograrlos. En los diferentes programas de matemáticas reformados y vigentes en nuestro país, tanto en sus objetivos como en las sugerencias metodológicas, se refleja una concepción del álgebra escolar que puede incidir en la percepción que un docente tenga sobre los puntos anteriores. Dicha percepción puede estar en total contradicción con las diferentes posturas que han tomado las comunidades de investigadores en educación matemática durante los últimos años.

La investigación en educación de la matemática se ha estado ocupando, entre otros aspectos, de los problemas relativos al aprendizaje (Rico, 1995) para lograr mayor comprensión de las dificultades y encontrar vías para superar estos problemas dentro del sistema educativo (Artigue, 2003). En el caso del álgebra, desde diferentes posturas teóricas, muchas de las investigaciones van dirigidas al estudio del pensamiento algebraico temprano, con especial interés en analizar las interrelaciones del lenguaje algebraico con el lenguaje natural y el de la aritmética (Filloy, Puig & Rojano, 2008). Un gran número de trabajos, como los reportados por Kieran (1980a), Booth y Johnson (1984), Filloy y Rojano (1989), establecen la necesidad de que exista una relación entre los sistemas de signos del álgebra, de la aritmética y de la lengua materna. También documentan cómo el arraigo al pensamiento numérico y a los significados coloquiales de las palabras no coadyuva a la interpretación, al uso de las letras y a la comprensión de expresiones algebraicas.

Como resultado, se obstaculiza el proceso de transición hacia conceptos de mayor nivel de abstracción como la relación entre variables. Existen dificultades para operar con cantidades desconocidas y para comprender la naturaleza de las relaciones existentes entre los datos y las incógnitas (Bednarz & Janvier, 1996). Otros resultados ponen de manifiesto que se recurre al uso de procedimientos aritméticos en lugar del método algebraico, derivado de una enseñanza que, por lo general, privilegia la sintaxis algebraica con énfasis en aspectos manipulativos y numéricos (Filloy & Rojano, 1985; Kieran & Filloy, 1989; Ursini, 1990; Radford, 1996). De este modo, el alumno se acostumbra a considerar las variables como etiquetas que se refieren a entidades específicas o a la inicial de las letras, como es el caso de la fórmula para calcular el área del rectángulo: $A = b \cdot h$, bien conocida por los estudiantes, pero desconectada del dominio geométrico (Ursini, Escareño, Montes & Trigueros, 2005).

Siguiendo las ideas anteriores, resulta significativo conocer, a través de las actuaciones de los estudiantes universitarios, cuáles competencias poseen para enfrentar los requerimientos algebraicos que permitan la comprensión significativa del concepto de variable. El estudio muestra que, efectivamente, existen dificultades para realizar una lectura analítica de los problemas verbales y serios obstáculos en el proceso de traducción de los lenguajes natural, aritmético y geométrico al lenguaje algebraico.

1.2 El problema de investigación

El interés por conocer en profundidad el pensamiento de los estudiantes que se inician en el aprendizaje del álgebra ha llevado a muchos investigadores a analizar las interrelaciones del lenguaje algebraico con el lenguaje natural y con el de la aritmética. Lo anterior, en razón de que, por lo general, en términos curriculares, la introducción del álgebra tiene como antecedentes más próximos a esos dos lenguajes, y también porque, desde los primeros estudios, se hizo evidente la enorme influencia que los mismos tienen en la construcción, por parte de los sujetos, de la sintaxis algebraica y en el uso que éstos hacen de dicha sintaxis en la resolución de problemas.

La transición desde lo que puede considerarse como un modo informal de representación y de resolver problemas, a uno formal resulta ser difícil para muchos de los que comienzan a estudiar álgebra. Un buen número de investigaciones dan cuenta de las maneras en que el arraigo al pensamiento numérico y a los significados coloquiales de las palabras permea la interpretación y uso de las letras y de las expresiones algebraicas en las etapas iniciales del aprendizaje del álgebra. Tal es el caso de la interpretación del signo = (Kieran, 1980b); los estudios de Booth (1984) y Matz (1982) sobre errores frecuentes en el álgebra; el análisis comparativo de la lengua materna con el lenguaje del álgebra de Freudenthal (1983); y el estudio sobre operación de la incógnita de Filloy y Rojano (1989).

1.3 Objetivo de la investigación

- Potenciar en los estudiantes de secundaria su conocimiento metacognitivo y el aprendizaje autorregulado para ayudarlos a ser autónomos en la traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico en problemas verbales.

1. 4 Preguntas de investigación

- ¿Cómo están relacionados los componentes de la metacognición y el aprendizaje autorregulado con la traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico?
- ¿Qué estrategias metacognitivas son las más utilizadas por los estudiantes de tercer grado de secundaria en la traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico en problemas verbales?
- ¿Cómo están relacionados los componentes motivacionales y del aprendizaje autorregulado con la traducción de los problemas verbales a lenguaje algebraico?

1.5 Justificación

Propio de la escuela es preparar para el cambio, capacitar para la innovación; entregar a quien estudia, desde la educación básica, un paquete de instrumentos y dispositivos que los entrenen para hacer frente, con ciertas oportunidades de éxito a los retos y desafíos de la nueva sociedad. Dos de estos instrumentos estratégicos son la metacognición y el aprendizaje autorregulado.

El aprendizaje autorregulado conlleva aprender de forma continua en los diversos contextos de la vida, pues implica que el aprendiz autorregulado identifique sus propias metas y qué recursos emplea para lograrlas, además de apropiarse de habilidades para planificar, ejecutar y evaluar sus propios procesos de aprendizaje, tomando decisiones propias acerca de lo que debe conocer, cómo aprender mejor, qué necesita aprender aún y qué estrategias emplear para conseguirlo (Pozo & Monereo, 2002).

Sanmartí y Jorba (1995) añaden que aprender es necesariamente un proceso de autorregulación dado que cada individuo construye su propio sistema personal de aprender y lo va mejorando progresivamente. Desde este punto de vista, la autonomía es una de las principales características de los estudiantes que tienen éxito o de los expertos en una determinada materia.

El conocimiento y manejo de los diferentes procesos de aprendizaje, basados en nuestra metacognición es una alternativa muy a la mano de los docentes, pues esto supone que en el trabajo de aula se podrían integrar dichos procesos para mejorar el aprendizaje y correspondiente reformulación del currículo acorde a las necesidades de nuestros estudiantes, partiendo de sus habilidades, destrezas, competencias, el manejo consciente de emociones personales e interpersonales, la utilización de los procesos cognitivos y su objetivación en el desarrollo de la palabra como instrumento de cambios en el individuo.

Por otra parte, la relación entre las actividades del estudio y el desempeño escolar varía según las características del curso y las características del alumno. Es decir, el éxito académico depende en parte de características individuales como la habilidad intelectual, la motivación y las experiencias previas del estudio. Las características del alumno toman mayor importancia mientras más autonomía se requiere en la selección, organización, transformación e integración de información.

Los alumnos que saben formular hipótesis, generar soluciones y comparar y analizar información, tendrán mejor desempeño escolar que los que se acostumbran a memorizar y reproducir detalles. En parte, la adquisición de estas habilidades depende de la calidad de su preparación escolar. Rara vez se exige que los alumnos piensen en forma crítica en los niveles más básicos del sistema educativo.

Es importante la forma de construir el conocimiento a partir de una serie de distintas operaciones, actividades y funciones cognitivas llevadas a cabo por una persona, mediante un conjunto interiorizado de mecanismos intelectuales que le permiten recabar, producir y evaluar información, a la vez que hacen posible que dicha persona pueda conocer, controlar y autorregular su propio funcionamiento intelectual.

En el caso del álgebra, muchos docentes coinciden en afirmar que la mayoría de los alumnos cometen los mismos errores de forma reiterada, síntoma de las serias dificultades que tienen en su aprendizaje. Estos problemas parecen estar relacionados con una serie de deficiencias en comprensión de conceptos y en la forma de enfocar el álgebra que traen como consecuencia inmediata una forma errónea de enfrentarse con su aprendizaje; en la mayoría de los casos los alumnos memorizan sin comprender las reglas y procedimientos de cálculo y las aplican automáticamente, lo que les lleva a cometer las mismas equivocaciones de manera persistente, además, los errores suelen ser considerados por el docente como falta de estudio o de atención, cuando en realidad indican una fuerte carencia de comprensión.

Ahora bien, si se compara la enseñanza de la aritmética con la del álgebra, esto implica indudablemente un cambio metodológico al pasar del cálculo con números de la aritmética al cálculo literal del álgebra, lo que significa un gran avance en el campo de la abstracción y la generalización. Se requiere por tanto un especial cuidado didáctico para que quede patente el nexo entre ambas materias, y que el alumno perciba que el simbolismo algebraico es solo una manera de generalizar ciertas propiedades aritméticas.

Además, los adolescentes, al comenzar el estudio del álgebra, traen consigo las nociones y los enfoques que usaban en aritmética. Sin embargo, el álgebra no es simplemente una generalización de la aritmética. El álgebra requiere un cambio en el pensamiento del estudiante de las situaciones numéricas concretas a proposiciones más generales sobre números y operaciones (Kieran, & Filloy, 1989).

En la mayoría de los países, la escuela tiene a su cargo la tarea de propiciar la adquisición de conocimientos, habilidades y actitudes por parte de los estudiantes de todos los niveles educativos, principalmente los considerados como básicos. Sin embargo, en muchas ocasiones esto no resulta sencillo, por lo cual se vuelve urgente investigar cuales son las principales deficiencias y proponer acciones remediales para superar las dificultades con éxito.

Con las recientes reformas educativas impulsadas en México, tanto en educación básica, media superior como superior, se han planteado lineamientos con un objetivo general, que los estudiantes adquieran conocimientos que les resulten significados. Los nuevos planes y programas han sido modificados para plantear estándares curriculares que garanticen la apropiación de las competencias esperadas (SEP, 2011).

Siguiendo este orden de ideas, una de las materias que requiere atención profunda es matemáticas, ya que en la última prueba PISA, aplicada en el 2012, México obtuvo resultados poco alentadores; el alumno promedio obtuvo 413 puntos, mientras que el puntaje promedio en la OCDE fue de 494, una diferencia que equivale a casi dos años de escolaridad (OCDE, 2013).

Además, el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000) afirma que los estudiantes necesitan comprender, del álgebra, sus conceptos, las estructuras y principios que rigen la manipulación de símbolos y cómo pueden usarse estos para registrar su comprensión de la situación. Según el NCTM en los últimos grados de la educación básica se debe estimular el desarrollo del pensamiento algebraico de los alumnos con actividades transitorias entre la aritmética y el álgebra, operar con símbolos en la simplificación de expresiones algebraicas o en la resolución de ecuaciones, es tan solo una dimensión de lo que significa aprender álgebra.

Debido a lo anterior, la presente investigación tiene como finalidad potenciar en los estudiantes de secundaria su conocimiento metacognitivo y el aprendizaje autorregulado para ayudarlos a ser autónomos en la traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico en problemas verbales.

CAPÍTULO II: FUNDAMENTO TEÓRICO Y REVISIÓN DE LITERATURA

2.1 ¿Qué es el álgebra escolar?

La conceptualización del álgebra escolar está relacionada con distintos factores. El primero de ellos es su relación con la aritmética y la definición de la misma como una aritmética generalizada, lo cual presenta ciertas dificultades para comprender los cambios de significado de los símbolos de la aritmética al álgebra, como es el caso del signo igual y de las operaciones. Otra acepción muy aceptada es la del álgebra como un lenguaje que sirve para comunicar las ideas de la matemática, para expresar generalizaciones a través de símbolos. También el álgebra se asocia con actividad, con herramienta que se utiliza para resolver problemas y diseñar modelos matemáticos.

Usiskin (1988) propone un enfoque para el álgebra a partir de lo que se hace con ella. Él sostiene que los propósitos para el álgebra son determinados por las diferentes concepciones y usos de las variables. Así pues Usiskin, (1988) desarrolla la concepción del álgebra como: 1) aritmética generalizada, en donde las variables pueden ser consideradas como patrones generalizadores; 2) estudio de procedimientos para la resolución de ciertos tipos de problemas en los que las variables aparecen como incógnitas o constantes; 3) el estudio de las relaciones entre las cantidades en que las variables varían; y 4) el estudio de la manipulación y justificación de las estructuras en las que la esencia se encuentra en las propiedades de las variables, en las relaciones entre una o varias x, y o n ya sean sumandos, factores, bases, o exponentes. Cabe señalar que, en esta percepción, la variable, se ha convertido en un objeto arbitrario, en una estructura abstracta relacionada con ciertas propiedades algebraicas.

Según Socas y Palarea (1997) la forma más convencional de concebir el álgebra es como la rama de las matemáticas que trata de la simbolización de las relaciones numéricas generales, las estructuras matemáticas y las operaciones de esas estructuras. En este sentido, el álgebra escolar se interpreta como “una aritmética generalizada” y como tal involucra a la formulación y manipulación de relaciones y a las propiedades numéricas. Sin embargo, las investigaciones ponen de manifiesto las implicaciones que tienen para el aprendizaje del álgebra, considerar la aritmética como su antecesora; el álgebra no es simplemente una generalización de la aritmética, supone un cambio en el pensamiento del estudiante y la dificultad para muchos principiantes en la transición desde lo que puede considerarse modo informal de representación y resolución de problemas, al modo formal (Socas & Palarea, 1997; Papini, 2003).

Para Papini (2003) el álgebra puede considerarse desde dos dimensiones. Desde la dimensión de instrumento, se usa como una herramienta para resolver problemas tanto intramatemáticos como extramatemáticos. Desde la dimensión de objeto como un conjunto estructurado (parámetros, incógnitas, variables, ecuaciones, inecuaciones y funciones) que tiene propiedades y que se trata de modo formal con distintas representaciones (escrituras algebraicas, gráficos, etc.).

Para MacGregor (2004) gran parte de la comunidad de educación matemática acepta que el álgebra:

1. Es una parte necesaria del conocimiento general de los miembros de una sociedad democrática y educada.
2. Es un prerrequisito para futuros estudios de matemáticas, ciertos cursos de una educación superior y muchos campos de empleo.
3. Es un componente crucial de la alfabetización matemática, en el cual se basa un futuro tecnológico y el progreso económico de la nación.
4. Es un camino eficiente para resolver ciertos tipos de problemas.
5. Promueve la actividad intelectual de generalización, pensamiento organizado y razonamiento deductivo.

2.2 Desarrollo del pensamiento algebraico

El objetivo del álgebra escolar es desarrollar el razonamiento o pensamiento algebraico. El razonamiento algebraico o pensamiento algebraico consiste en un proceso de generalización para formular expresiones algebraicas o patrones, ecuaciones y funciones, el cual utiliza el lenguaje algebraico y su simbología en busca de precisión; para luego resolver problemas y diseñar modelos matemáticos, tanto dentro de la propia matemática como fuera de ella en otras áreas del conocimiento y en situaciones reales de la vida cotidiana.

El razonamiento algebraico puede manifestarse de varias maneras. Kaput (1998) identificó cinco formas interrelacionadas de razonamiento algebraico, parafraseado a continuación:

- Álgebra como patrones y regularidades generalizadoras y formalizadoras, en particular, álgebra como aritmética generalizada.

- Álgebra como manipulación de símbolos sintácticamente guiada.
- Álgebra como el estudio de la estructura y los sistemas abstraídos de los cálculos y las relaciones.
- Álgebra como el estudio de funciones, relaciones y variación conjunta.
- Álgebra como el modelado.

Para MacGregor (2004) el razonamiento algebraico implica análisis de situaciones reales, formulación de relaciones críticas como ecuaciones, aplicación de técnicas para resolver las ecuaciones, e interpretación de los resultados; y en cambio lo que algunos estudiantes parcialmente aprenden es una colección de reglas a ser memorizadas y trucos a ser ejecutados, que no tienen coherencia lógica, muy poca conexión con aprendizajes aritméticos previos, y ninguna aplicación en otros asuntos escolares o en el mundo fuera de la escuela.

El lenguaje algebraico es un instrumento del pensamiento algebraico, el cual se desarrollará en la medida que se domine el lenguaje algebraico. La escuela, específicamente el docente, juega un rol fundamental al ofrecer oportunidades de interactuar con este lenguaje y de recibir retroacciones que permitan producir nuevos significados (Papini, 2003).

De manera análoga a como plantea Beyer (2006) la definición de lenguaje matemático, el lenguaje algebraico es aquel que una persona utiliza para transmitir las ideas algebraicas a otras personas y se caracteriza mediante diversas dimensiones como son la verbal, la simbólica y la gráfica. Los elementos de este lenguaje comúnmente son llamados expresiones algebraicas, fórmulas, ecuaciones, inecuaciones, funciones y sirven para resolver problemas y modelar matemáticamente distintas situaciones.

Filloy (1999) estudió la adquisición del lenguaje algebraico trabajando sobre dos estrategias globales: a) la de modelaje de situaciones "más abstractas" en lenguajes "más concretos", para desarrollar habilidades sintácticas; b) la de producción de códigos para desarrollar habilidades de resolución de problemas. Uno de los primeros resultados del estudio indica que hay una relación dialéctica entre los avances sintácticos y los semánticos, que el avance de una componente supone el avance de la otra.

Por otra parte, el desarrollo del pensamiento algebraico conlleva al desarrollo de ciertas competencias algebraicas:

1. Habilidad para pensar en un lenguaje simbólico, comprender el álgebra como una aritmética generalizada y como el estudio de las estructuras matemáticas.

2. Habilidad para comprender igualdades y ecuaciones de álgebra y aplicarlas dentro del conjunto de la solución de problemas del mundo real.
3. Habilidad para comprender relaciones de cantidades a través de patrones, definición de funciones y aplicación de modelos matemáticos" (Crawford, 2001), citado por MacGregor, 2004.

Los adolescentes, al comenzar el estudio del álgebra, traen consigo las nociones y los enfoques que usaban en aritmética. Sin embargo, el álgebra no es simplemente una generalización de la aritmética. Aprender álgebra no es meramente hacer explícito lo que estaba implícito en la aritmética. El álgebra requiere un cambio en el pensamiento del estudiante de las situaciones numéricas concretas a proposiciones más generales sobre números y operaciones. La transición desde lo que puede considerarse como un modo informal de representación y de resolver problemas, a uno formal resulta ser difícil para muchos de los que comienzan a estudiar álgebra. Estos estudiantes siguen usando los métodos que les funcionaban en aritmética. De hecho, un marco de referencia aritmético da cuenta de: a) su forma de ver el signo igual, b) sus dificultades con la concatenación y con algunas de las convenciones de notación del álgebra, y e) su falta de habilidad para expresar formalmente los métodos y los procedimientos que usan para resolver problemas. También da cuenta, en gran medida, de su interpretación de las variables.

De hecho, los estudiantes que comienzan con el álgebra no logran darse cuenta de que el procedimiento es a menudo la respuesta. Por ejemplo, el resultado de sumar 5 y b se enuncia como $5 + b$. Kieran (1983) informó que los estudiantes no sólo deben superar lo que Matz (1980) y Davis (1994) han llamado el dilema "proceso-producto" y adquirir lo que Collis (1974) ha llamado "aceptación de la falta de cierre", sino que también tienen que debilitar sus "expectativas aritméticas acerca de las respuestas bien formadas, es decir, que una respuesta es un número".

Un buen número de investigaciones dan cuenta de las maneras en que el arraigo al pensamiento numérico y a los significados coloquiales de las palabras permea la interpretación y uso de las letras y de las expresiones algebraicas en las etapas iniciales del aprendizaje del álgebra. Tal es el caso de la interpretación del signo = (Kieran, 1980b); los estudios de Booth (1988) y Matz (1982) sobre errores frecuentes en el álgebra; el análisis comparativo de la lengua materna con el lenguaje del álgebra de Freudenthal (1983); y el estudio sobre operación de la incógnita de Filloy y Rojano (1989).

2.3 Variables

La experiencia de los niños en la escuela elemental con las letras en ecuaciones se reduce a menudo a fórmulas como $A = b \cdot h$, y relaciones entre unidades de medida como $10\ mm = 1\ cm$. La primera supone reemplazar b y h por valores diferentes para encontrar el área de rectángulos dados; la segunda regla se usa para encontrar, por ejemplo, el número de milímetros a que corresponde a 5 centímetros. Este segundo uso de las letras como etiquetas es el que interfiere a menudo con la forma como los estudiantes llegan a entender el significado de los términos variables en las ecuaciones algebraicas. En la segunda "ecuación" de arriba, no sólo se leen las letras como etiquetas, sino que además el signo igual se lee como una preposición: "hay 10 milímetros en 1 centímetro". De hecho, incluso estudiantes mayores malinterpretan el sentido de las variables en las ecuaciones, por ejemplo, en la ecuación $3k = m$, k es mayor que m (Mevarech & Yitschak, 1983), Si los estudiantes consideraran el signo igual como un símbolo de equivalencia, probablemente serían capaces de evitar el cometer tales errores.

Otras interpretaciones que los estudiantes de álgebra asignan a las letras han sido estudiadas sistemáticamente por Küchemann (1981) en el proyecto de gran escala CSMS. Usando una clasificación desarrollada originalmente por Collis (1974), Küchemann (1981) encontró que la mayoría de los estudiantes trataban las letras en expresiones y ecuaciones como incógnitas específicas más que como números generalizados o como variables. Harper (1981) sugirió la existencia de etapas en la comprensión de un término literal como variable, y señaló que los estudiantes usan los términos literales mucho antes de que sean capaces de conceptualizarlos como variables, esto es, de percibir lo general en lo particular. En un experimento de enseñanza diseñado específicamente para favorecer la adquisición de la noción de letra como número generalizado, Booth (1982, 1983) encontró una fuerte resistencia por parte de los alumnos a asimilar esta parte del álgebra. Booth y Johnson (1984) sugieren que la obtención de este nivel de conceptualización está relacionada con el desarrollo de estructuras cognitivas de orden más alto.

En la enseñanza del álgebra escolar para Ursini et al. (2005) se caracteriza por la introducción de las variables para representar números; y si bien los estudiantes desde la escuela primaria han trabajado con las letras en fórmulas geométricas, es en la escuela secundaria cuando las letras surgen con mayor frecuencia en contextos algebraicos donde se espera que los estudiantes aprendan a interpretarlas como incógnitas o como números indeterminados dependiendo de la situación en que aparecen. Según ellos los resultados de numerosas investigaciones han reportado que la mayoría de los estudiantes tienen serias dificultades para desarrollar una comprensión y una manipulación adecuada del uso de las letras en álgebra. Desde esta perspectiva han trabajado en el álgebra de secundaria y han definido el modelo de tres usos de la variable, llamado modelo 3UV, el cual plantea:

1. La variable como número general, el cual representa una situación general. Se utiliza para reconocer patrones, hallar reglas, deducir métodos generales y describirlos; representan cantidades indeterminadas que no se pueden, ni es necesario, determinar, y se manipulan sin necesidad de asignarle valores específicos a la variable. Exige la simbolización de situaciones generales, reglas y métodos dados o construidos por quien aprende.
2. La variable como incógnita específica, la cual debe identificarse como algo desconocido que se puede determinar y operar para hallar su valor específico.
3. La variable en una relación funcional, en la cual hay que reconocer que existe una correspondencia entre los valores de dos variables involucradas. Esta relación puede involucrar información presentada en forma verbal, en una tabla, con una gráfica o en forma analítica.

Para que los estudiantes puedan usar las variables en estas tres formas deben desarrollar las siguientes capacidades básicas (Ursini et al., 2005): a) operar con las variables realizando cálculos sencillos; b) comprender las operaciones con las variables y el porqué de los resultados obtenidos; c) darse cuenta de la importancia de ser capaz de usar las variables para modelar matemáticamente distintas situaciones; d) diferenciar los distintos usos de las variables en álgebra; e) pasar con flexibilidad entre los distintos usos de las variables; f) integrar los diversos usos de las variables como caras distintas de un mismo objeto matemático, que se utilizan dependiendo de la situación particular.

Küchemann (1981) identificó seis diferentes maneras de interpretar los símbolos literales, a saber:

- Letra evaluada. A la letra se le asigna un valor numérico.
- Letra no utilizada. La letra es ignorada o su existencia es reconocida pero no se le atribuye ningún significado.
- Letra como objeto. Se considera la letra como una abreviación del nombre de un objeto o como a un objeto en sí.

- Letra como incógnita especifica. La letra representa un número particular pero desconocido y los alumnos son capaces de operar directamente sobre ella.
- Letra como número generalizado. Se considera que la letra representa o es capaz de asumir distintos valores.
- Letra como variable. Se considera que la letra representa un rango de valores no especificado y que existe una relación sistemática entre dos conjuntos de valores de este tipo.

Küchemann (1981) ha demostrado que la mayoría de los alumnos entre 13 y 15 años interpretan las letras como números desconocidos, incógnita, antes que como números generalizados o variables en relaciones funcionales.

2.4 El significado del signo igual

La idea extendida entre los estudiantes que comienzan con el álgebra de que el signo igual es la "señal de hacer algo" antes que un símbolo de la equivalencia entre los lados izquierdo y derecho de una ecuación (Kieran, 1980b) viene indicada por su renuencia inicial a aceptar proposiciones tales como $4 + 3 = 6 + 1$. El pensar que el lado derecho debería indicar el resultado, esto es, $4 + 3 = 7$, les permite dotar de significado a ecuaciones tales como $2x + 3 = 7$, pero no a ecuaciones tales como $2x + 3 = x + 4$. El que los estudiantes conciban el signo igual como un mero separador entre la secuencia de operaciones y el resultado les lleva a violar las propiedades simétrica y transitiva de la igualdad. Por ejemplo, al resolver el problema: "Si empiezo la semana con 75 dólares, luego gano otros 24 dólares, y luego gasto 37 dólares, ¿cuántos dólares tendré al final de la semana?", los estudiantes escriben $75 + 24 = 99 - 37 = 62$ (Vergnaud, 1985). Esta abreviatura de los pasos se observa también cuando estudiantes mayores resuelven ecuaciones:

$$2x + 3 = 5 + x$$
$$2x + 3 - 3 = 5 + x - 3$$
$$2x = 5 + x - x - 3$$
$$2x - x = 5 - 3$$
$$x = 2$$

El que estudiantes de grados mayores de álgebra continúan viendo el signo igual como una "señal de hacer algo" y, de hecho, extienden el conjunto de símbolos de operaciones matemáticas para incluir en él el signo igual se comprobó en un estudio con 150 estudiantes de primer ciclo de universidad (Mevarech & Yitschak 1983). Estos mismos estudiantes tuvieron éxito en un 90% al resolver un conjunto de ecuaciones lineales, lo que indica que una comprensión pobre de la equivalencia y del signo igual no está basada en falta de destreza o falta de familiaridad con las ecuaciones lineales.

El símbolo que se utiliza para demostrar la equivalencia, el signo igual, no siempre se interpreta en términos de equivalencia por parte del alumno. De hecho, como se verá, una interpretación de equivalencia del signo igual no parece venir fácil o rápidamente a muchos estudiantes.

2.4.1 Concepto de igualdad en preescolares

Una vez que los niños en edad preescolar comienzan a etiquetar objetos con palabras numéricas de una manera sistemática y consistente, parecen, en algún momento después de eso, ser capaces de determinar la igualdad numérica de dos conjuntos. Esto puede considerarse una noción comparativa de igualdad basada en la capacidad del niño para contar dos conjuntos diferentes y para comparar sus numerosidades (Kieran, 1981).

La adquisición de los niños de preescolar con la capacidad de contar dos conjuntos distintos generalmente es seguida por la adquisición de la capacidad de poner juntos dos conjuntos distintos y para contar el número de elementos en su "unión" (Brush, 1978; Fuson, 1979; Gelman & Gallistel, 1978). Este recuento del número de elementos en el conjunto combinado conduce a una noción de operador de igualdad que hace hincapié en el resultado de la operación aritmética. Así, podemos distinguir dos significados intuitivos de la igualdad entre los niños en edad preescolar: uno que implica una comparación entre dos conjuntos donde el niño cuenta los elementos de los dos conjuntos diferentes y, sobre la base de la misma cardinalidad, establece su igualdad; por otro parte, implica la adición de dos conjuntos donde el niño (puede o no contar con los elementos de los conjuntos individuales en primer lugar) combina los dos conjuntos y después cuenta los elementos en el conjunto resultante. Como se ve, es este último, la noción del operador de igualdad, que se hizo un llamamiento a cuando el signo igual se introduce en la escuela.

2.4.2 El uso del signo igual en la escuela primaria

Por el momento la mayoría de los niños que ingresan a la escuela, tienen intuiciones acertadas sobre la suma y la resta (Ginsburg, 1977). Son estas intuiciones que son simbolizadas en su primera aritmética escolar. Muchos niños aprenden con bastante rapidez para leer y escribir el simbolismo elemental por escrito de la aritmética simple, pero no necesariamente lo entienden de la misma manera que lo hacemos nosotros. Mientras que podemos mirar frases sobre la igualdad como las relaciones de equivalencia (que implican las propiedades, reflexiva, simétrica, y transitiva), los niños de primaria, Ginsburg (1977) señala que, interpretan el signo más + e igual = en cuanto a acciones a realizar. Una de las consecuencias de la interpretación del niño de igualdades en términos de acciones es que le resulta difícil leer expresiones aritméticas que no reflejan el orden de sus cálculos. Ginsburg (1977) también encontró que muchos niños no pueden leer expresiones que indican relaciones como 3 = 3. Se puede argumentar que estas nociones reflejen el tipo de instrucción que estos niños han recibido. Behr, Erlwanger, y Nichols (1976) hicieron hincapié en que no había evidencia para sugerir que los niños cambian en su forma de pensar acerca de la igualdad a medida que progresaban a grados superiores; de hecho, incluso los estudiantes de sexto grado parecían ver el signo igual como una "señal 'de hacer algo".

2.4.3 El uso del signo igual en secundaria y universidad

Para muchos preadolescentes de 13 años de edad, sin embargo, este es un período de transición, transición entre que requieren la respuesta después del signo igual y aceptar el signo igual como símbolo de equivalencia. Durante este período de transición, una buena cantidad de confusión existe, como se muestra por la investigación de Vergnaud, Benhadj, y Dussouet (1979). Ellos señalan que el tipo de errores cometidos por los estudiantes cuyo trabajo simplemente por escrito codifica sus procedimientos, produciendo de este modo las falsas igualdades, tales como, 1063 + 217 = 1280 - 425 = 1063.

Un enfoque alternativo, evitando las dificultades de traducción implícita en el uso de problemas de aplicación, se ha intentado con éxito en un experimento de enseñanza, la participación de seis estudios de caso, que investigaron la construcción de significado para las ecuaciones algebraicas no triviales (Herscovics & Kieran, 1980; Kieran 1979, 1980a). Se preguntó primero a los sujetos (de 12 a 14 años de edad) lo que el signo igual significaba para ellos, seguido de la solicitud de un ejemplo que mostrara el uso del signo igual. Es significativo que la mayoría de ellos describió el signo igual en términos de la respuesta y se limitaron a ejemplos, que implicaban una operación en el lado izquierdo y el resultado a la derecha. Las sesiones de enseñanza consiguientes enfocadas en extender el uso del signo igual de los sujetos para incluirlo en múltiples operaciones a ambos lados. Esto se logró haciendo que los estudiantes construyeran igualdades aritméticas, inicialmente con una sola operación en cada lado.

La razón para extender la noción del signo igual para incluir múltiples operaciones en ambos lados era proporcionar una base para la posterior construcción de lo que significa para las ecuaciones algebraicas no triviales (que tienen múltiples operaciones a ambos lados). Si esta expansión no se realiza en primer lugar, el estudiante estaría trayendo con él en el estudio de ecuaciones algebraicas la idea de que el resultado está siempre en el lado derecho del signo igual. Por lo tanto, las ecuaciones tales como $3x + 5 = 26$ podría encajar con sus nociones existentes, pero $3x + 5 = 2x + 12$ no lo haría.

No sólo la presencia de esta operación múltiple en el lado derecho sería ajena a él, sino que, también viéndola por primera vez en el contexto de una ecuación algebraica, se sumaría al esfuerzo cognitivo. Por lo tanto, extender la noción del signo igual en el marco de las igualdades aritméticas antes de la introducción de las ecuaciones algebraicas se consideró esencial en la construcción de significado para las ecuaciones no triviales.

Se puede argumentar que estos estudiantes poseen una noción de equivalencia subyacente del signo de igualdad y que sólo están usando atajos en su procedimiento. Sin embargo, también se puede afirmar que su procedimiento escrito refleja una falta básica de conocimiento del papel de equivalencia del signo de igualdad. Estos errores (atajos) sugieren que muchos estudiantes de secundaria todavía están interpretando el signo de igual como un símbolo de operador, como una señal para hacer algo con el fin de obtener la "respuesta". Incluso los estudiantes universitarios que toman cálculo, cuando se les pidió que encontraran la derivada de una función, con frecuencia parecen estar utilizando el signo igual meramente como un enlace entre los pasos.

La importancia del signo igual en el álgebra de la escuela secundaria no puede ser sobreestimada. La mayoría de los niños identifican el álgebra con ecuaciones. De hecho, la ausencia del signo igual parece crear enormes problemas conceptuales. En un curso de proyecto de investigación sobre el aprendizaje del álgebra con niños de 12 y 13 años de edad no podían asignar cualquier significado a las formas indeterminadas, tales como, $3a$, $a + 3$, $3a + 5a$ (Kieran, 1980a). Tal vez esto explica por qué los estudiantes tienen tanta dificultad en el trato con polinomios más tarde en la escuela secundaria cuando se introducen como formas indeterminadas.

2.5 Métodos de simbolizar

El harto documentado uso de métodos informales por parte de los niños en la escuela elemental les permite resolver problemas sin tener que ser muy específicos sobre los procedimientos que usan. Su confianza en métodos intuitivos no enseñados y el que se centren en conseguir la respuesta va en contra de que presten atención al método que usan. El álgebra les fuerza a formalizar procedimientos por los que puede que antes nunca se hayan preocupado.

La semántica y la sintaxis están íntimamente relacionadas, en cuanto a la simbolización algebraica se refiere, pues la significación de las expresiones algebraicas depende de las reglas de formación sintácticas de la misma y la sintaxis, sin semántica, es un proceso vacío de significado. Ambas forman parte de lo que Arcavi (1994) define como sentido simbólico (symbol sense), es decir, la capacidad de manipular e interpretar expresiones simbólicas, tomando conciencia de los diferentes roles que los símbolos pueden ostentar en distintos contextos y siendo capaces de evaluar la adecuación de una representación para expresar una información. Linchevski y Livneh (1999) hablan, además, del sentido estructural (structure sense) que incluye la capacidad de reconocer la estructura algebraica y aplicar estos conocimientos a otros contextos para elegir las operaciones apropiadas.

En cuanto al análisis sintáctico de las expresiones algebraicas, Kaput (1995) señala dos niveles:

- uno asociado con la escritura y el análisis de las expresiones y
- otro relacionado con las transformaciones y la manipulación de estas expresiones.

En cuanto al análisis semántico de las expresiones algebraicas son señalados tres niveles:

- Nivel 1º (Nivel de evaluación): dar sentido a una expresión algebraica mediante el reemplazo de valores en las variables y la realización del cálculo correspondiente.
- Nivel 2º (Nivel de tratamiento): transformar las expresiones en otras equivalentes. Implica conocer las transformaciones y saber justificarlas. Tal justificación reposa en el hecho de que una expresión y su transformación coinciden en toda evaluación.
- Nivel 3º (Nivel de resolución de los problemas): tener conocimiento de estrategias que permitan la elección de las transformaciones adecuadas para resolver un determinado problema, haciendo significativo el cálculo. Implica, necesariamente, saber anticipar el efecto de las transformaciones a realizar (Sessa, 2005).

Se puede afirmar que el niño es pura semántica, es decir, su conocimiento se desarrolla a partir de la formación de nuevos significados. En álgebra esto no es diferente. La construcción algebraica debe partir de esta construcción semántica que resulta natural para el alumno, a pesar de que los símbolos sean convencionales, lo que no implica una dificultad mayor que la del aprendizaje de la lengua materna.

Sin embargo, la sintaxis le cuesta porque es convencional y particular, distinta de la sintaxis de la lengua materna. El aprendizaje de la sintaxis debe enfocarse a partir de la significación de los símbolos y de las reglas de formación y transformación para que tenga sentido para los alumnos ya que, como sintaxis pura, está vacía de significado y no provoca desarrollo conceptual alguno en la mente de los mismos.

Desde la semántica de su intervención didáctica el profesor debe procurar este desarrollo del conocimiento algebraico en la mente del niño, asegurando la significación de las representaciones simbólicas y las relaciones entre ellas y procurando la formación de estructuras sólidas en las que las manipulaciones algebraicas adquieran el carácter pragmático que les corresponde.

2.6 Expresiones y ecuaciones

Los estudiantes son incapaces de aceptar las expresiones algebraicas como "soluciones de problemas" tal como $2x + 5x$ (Chalouh & Herscovics, 1984). Sin embargo, los estudiantes creen que estas expresiones estaban incompletas en algún sentido. Se sentían obligado a expresarlas como parte de una igualdad, tal como $Área = 2x + 5x$ o como $2x + 5x = algo$. En otro estudio (Kieran, 1983) se encontró que algunos de los estudiantes no podían asignar significado alguno a a en la expresión $a + 3$ porque la expresión carecía de un signo igual y un miembro de la derecha.

En la escuela elemental, los niños "resuelven" ecuaciones sencillas como $3 + 0 \ = 8$ o $3 + n = 8$ que a veces se llaman proposiciones de "sumando faltante". Sin embargo, estas ecuaciones se presentan a menudo fuera del contexto de auténticas situaciones de problemas verbales, con el resultado de que el niño carece de un apoyo en el "mundo real" para interpretarlas. De hecho, los niños casi nunca usan ecuaciones para representar los problemas aritméticos verbales y, si se les pide una ecuación, los niños resuelven primero el problema y luego intentan dar la ecuación. A menudo los niños que son capaces de resolver problemas verba les no pueden escribir las ecuaciones que representan las relaciones cualitativas de la situación del problema.

Cuando escriben una ecuación, ésta representa por regla general las operaciones que habían usado para resolver el problema, no contiene una incógnita y el resultado del cálculo está usualmente en el lado derecho del signo igual.

Se sabe que los procesos que usan los niños para resolver las proposiciones de sumando desconocido incluyen "contar hacia adelante", "contar hacia atrás", "sustitución" y "uso de hechos numéricos conocidos" (Booth, 1987; Nesher, 1980). Se presume que las concepciones primitivas de los niños de lo que es una ecuación no contienen en general, la idea de que tengan términos literales a ambos lados del signo igual. Las ecuaciones de ese estilo carecen probablemente de sentido, a la vista de la presunta concepción ingenua de los niños de una ecuación como un hecho numérico ligeramente disfrazado con la falta de algún componente. La concepción de que "una ecuación es una representación de una relación numérica en la que el lado izquierdo tiene el mismo valor que el lado derecho" fue objeto de un experimento de enseñanza con niños de 12 y 13 años. Ese estudio mostró que es posible cambiar la percepción de las ecuaciones que tienen los estudiantes que comienzan el álgebra como algo unidireccional y con la respuesta del lado derecho (Herscovics & Kieran, 1980; Kieran 1981).

2.6.1 Resolución de ecuaciones

Muchas investigaciones sobre álgebra hechas en el marco del PME se han centrado en la manera como los estudiantes enfocan la resolución de ecuaciones. Los enfoques usados se pueden clasificar en tres tipos: a) intuitivo, b) sustitución por tanteo, y e) formal.

Los enfoques de resolución intuitivos incluyen el uso de hechos numéricos, técnicas de recuento, y métodos de recubrimiento. Por ejemplo, resolver $5 + n = 8$ trayendo a colación el hecho numérico aditivo de que $5 + 3$ es 8 sería un uso de hechos numéricos conocidos. Resolver la misma ecuación contando $5, 6, 7, 8$ y dándose cuenta de que se nombraron tres números después del 5 para llegar a 8 sería un ejemplo de resolución por técnicas de recuento. Booth (1983) ha señalado el uso de ambos métodos entre estudiantes novicios de álgebra. Bell, O'Brien y Shiu (1980) han visto alumnos que usaban un método de "recubrimiento" para resolver ecuaciones tales como $2x + 9 = 5x$: "Ya que $2x + 9$ vale $5x$, el 9 debe ser lo mismo que $3x$ porque $2x + 3x$ también es igual a $5x$; así que x es 3". Petitto (1979) señaló que las técnicas intuitivas a menudo no se generalizan como en las ecuaciones en que aparecen números negativos-, y observó que los estudiantes que usaban una combinación de procesos formales e intuitivos tuvieron más éxito que los que usaron uno solo de esos procesos.

El uso de sustitución por tanteo como un método de resolución de ecuaciones (p. e., resolver $2x + 5 = 13$ probando valores diferentes como 2, 3, 5 y 4) consume mucho tiempo y coloca una carga pesada en la memoria de trabajo, excepto si todos los intentos se anotan de algún modo. Tan pronto como los estudiantes de álgebra aprenden a manejar un método formal de resolución de ecuaciones, tienden a abandonar el uso de la sustitución (Kieran, 1985). Desgraciadamente, parece que también lo abandonan como un mecanismo para verificar la corrección de su solución (Lewis, 1980). Sin embargo, hay pruebas de que los estudiantes que usan la sustitución como un mecanismo primerizo de resolución de ecuaciones y no todos lo hacen, poseen una noción más desarrollada del equilibrio entre los lados izquierdo y derecho de una ecuación y del papel del signo igual como equivalencia, que la que poseen los estudiantes que nunca usan la sustitución como un método de resolver ecuaciones (Kieran, 1988).

Los métodos formales de resolución de ecuaciones incluyen la transposición de términos (esto es, "cambiar de lado, cambiar de signo") y ejecutar la misma operación en ambos lados de la ecuación. Aunque la transposición esté considerada por muchos profesores de álgebra como una versión abreviada del procedimiento de realizar la misma operación en ambos lados, los estudiantes que empiezan con el álgebra parece que perciben de forma bastante diferente esos dos métodos de resolución de ecuaciones (Kieran, 1988). El procedimiento de ejecutar la misma operación en los dos lados de una ecuación pone el énfasis en la simetría de una ecuación; este énfasis está ausente en el procedimiento de transposición.

En un experimento de enseñanza diseñado para ayudar a los estudiantes a construir significado para el procedimiento de ejecutar la misma operación en los dos lados de la ecuación (Kieran, 1983), se encontró que los estudiantes que habían empezado el estudio teniendo preferencia por el método de transposición no fueron capaces, en general, de dotar de sentido al procedimiento que se les estaba enseñando. La secuencia de instrucción pareció tener su mayor impacto sobre aquellos estudiantes que habían empezado el estudio con una preferencia inicial por el método de substitución y que veían la ecuación como una balanza entre los lados izquierdo y derecho.

Filloy y Rojano (1985) han usado también modelos concretos en sus experimentos de enseñanza de resolución de ecuaciones. En su informe indican que muchos estudiantes tendían a anclarse en los modelos y parecían incapaces de ver los lazos entre las operaciones que ejecutaban en el modelo y las operaciones algebraicas correspondientes. Como resultado de ello, los estudiantes permanecían dependientes del modelo incluso cuando éste ya no era útil. De hecho, los estudiantes intentaban usar el modelo para ecuaciones sencillas que podían haber sido resueltas, más fácilmente, mediante los métodos intuitivos de resolución de ecuaciones que habían usado antes de que se les enseñara el nuevo método. Estaban hasta tal punto anclados en los procesos desarrollados en el modelo concreto que se les había enseñado, que parecían olvidar los métodos que usaban previamente.

Algunos otros estudios han encarado el asunto del conocimiento de los estudiantes de la estructura de las ecuaciones y la resolución de ecuaciones (Kieran, 1980a). Wagner, Rachlin y Jensen (1984) encontraron que los estudiantes de álgebra tienen dificultad en tratar expresiones con muchos términos como una sola unidad y no perciben que la estructura superficial de $4(2r + l) + 7 = 35$, por ejemplo, es la misma que la de $4x + 7 = 35$.

Otro aspecto estructural que los estudiantes que empiezan con el álgebra se supone que han de aprender concierne a la relación entre las operaciones y sus inversas y las expresiones equivalentes de esas relaciones. Asumimos que los estudiantes que entran en los primeros años de secundaria, hacia los doce años, saben por ejemplo que $3 + 4 = 7$ puede expresarse como $3 = 7 - 4$, y que serán capaces de generalizar este conocimiento a ecuaciones que comportan términos literales, llegando a ser conscientes por ello de que $x + 4 = 7$ y $x = 7 - 4$ son equivalentes y tienen, por tanto, la misma solución. Ahora bien, dos errores que cometen los aprendices de álgebra muestran que les es difícil juzgar las expresiones equivalentes de la relación adición/sustracción (Kieran, 1984): en el error "intercambio de sumandos", se juzga que $x + 37 = 150$ tiene la misma solución que $x = 37 + 150$ en el error "redistribución", se juzga que $x + 37 = 150$ tiene la misma solución que $x + 37 - 10 = 150 + 10$.

Greeno (1982) ha señalado que los estudiantes que empiezan en álgebra no son consistentes en la manera como dividen las expresiones algebraicas en sus partes constitutivas. Por ejemplo, pueden simplificar $4(6x - 3y) + 5x$ como $4(6x - 3y + 5x)$ en una ocasión, pero hacer algo distinto en otra ocasión. Un cambio en el contexto de la tarea puede conducir a una estructuración diferente de la expresión (Chaiklin & Lesgold, 1984).

Un estudio reciente con una componente de enseñanza ha mostrado que la instrucción puede mejorar la habilidad de los estudiantes para reconocer la forma o estructura superficial de una ecuación algebraica. Thompson y Thompson (1987) diseñaron un experimento de enseñanza que contenía dos formatos de instrucción: a) notación de ecuaciones algebraicas, y b) árboles de expresiones presentados en la pantalla de una computadora. Después de la instrucción, 8 estudiantes de séptimo no generalizaron las reglas más allá de su campo de aplicación, ni dejaron de percibir la estructura de las expresiones. Los estudiantes desarrollaron además una noción general de variable como "lugar para rellenar" dentro de una estructura y la opinión de que una variable puede ser reemplazada por cualquier cosa, un número, otra letra o una expresión.

Otro aspecto de conocimiento estructural que se considera importante en la resolución de ecuaciones supone el conocimiento de restricciones de equivalencia. Greeno (1982) ha señalado que los novicios en álgebra carecen del conocimiento de las restricciones que determinan si las transformaciones están permitidas. Por ejemplo, no saben cómo mostrar que una solución incorrecta está mal obtenida, excepto volviendo a resol ver la ecuación dada. No parecen ser conscientes de que una solución incorrecta, si se sustituye en la ecuación inicial, da origen a valores diferentes para el lado izquierdo y el lado derecho de la ecuación. Ni tampoco se dan cuenta de que sólo la solución correcta da origen a valores equivalentes para las dos expresiones en cualquiera de las ecuaciones de la cadena que resuelve la ecuación. Sin embargo, no son sólo los resolutores de ecuaciones novicios los que carecen del conocimiento de estas restricciones de equivalencia. Kieran (1984) encontró que también carecían de este conocimiento los resolutores de ecuaciones experimentados y competentes de la enseñanza secundaria obligatoria.

2.7 Funciones y sus gráficas

En una investigación sobre el aprendizaje del álgebra referente a las funciones y sus gráficas, Dreyfus y Eisenberg (1981) investigaron las bases intuitivas de los conceptos relacionados con las funciones. Se encontró que los estudiantes más capaces preferían el formato gráfico para todos los conceptos, mientras que los estudiantes menos capaces preferían el formato de tablas. Didácticamente, esto sugiere que los subconceptos de función deberían introducirse en formato de gráfica para los estudiantes de alto nivel y en formato de tablas para los estudiantes de bajo nivel.

2.8 Dificultades con las convenciones de notación

En aritmética, la concatenación denota adición (p. e., 37 significa $30 + 7$; $2\frac{1}{4}$ significa $2 + \frac{1}{4}$). Sin embargo, en álgebra, la concatenación significa multiplicación (p.e., $4b$ significa $4 \cdot b$). Extender la generalización sobre la base de lo que era correcto en aritmética puede conducir a los alumnos que empiezan con el álgebra a malinterpretar el sentido de los términos algebraicos. Así, se han encontrado estudiantes que interpretan 4p como 42 e incluso como "4 patatas".

Otra convención que los estudiantes parece que no usan en su aritmética escolar elemental es el uso de paréntesis y el orden de las operaciones. Incluso cuando se les introduce al uso de paréntesis en su curso de álgebra, los estudiantes a menudo no consideran que los paréntesis sean necesarios para denotar el orden en que se efectúan las operaciones (Kieran, 1979) el orden de izquierda a derecha en que están escritos los términos específica para esos estudiantes el orden del cálculo. De la misma manera, la jerarquía convencional de las operaciones parece ser un conjunto innecesario de reglas para los estudiantes que comienzan el álgebra.

No son sólo las convenciones numéricas lo que crea dificultades a los novicios en álgebra: tampoco es obvia para ellos la notación que ha de usarse para expresar respuestas algebraicas. Por ejemplo, uno de los ítems del test CSMS (Concepts in Secondary Mathematics and Science), a estudiantes de secundaria se les pedía que determinaran el área del rectángulo que se muestra en la figura l.

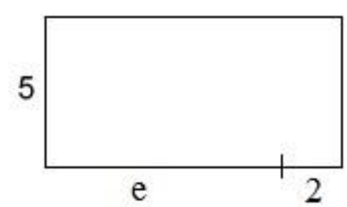


Figura 1: Ítem de álgebra.

Los alumnos de 13 años respondieron $5e2$, o $e10$, o $l0e$, o $e + 10$ (Küchemann, 1981). Las entrevistas con estudiantes que hicieron los mismos errores de notación que se han indicado antes indicaron que la habilidad para describir verbalmente un método no trae consigo necesariamente la habilidad para simbolizar ese método matemáticamente. Booth (1983) señaló también que los estudiantes pueden responder correctamente a ítems que requieren el uso de una cierta notación o unas ciertas convenciones y ser incapaces sin embargo de discriminar entre representaciones correctas e incorrectas. Esto sugiere, según Booth (1983), que la comprensión de las notaciones puede avanzar por etapas.

2.9 Errores comunes

Muchos alumnos, incluso algunos de los que se consideran más capacitados para las matemáticas, encuentran grandes dificultades cuando inician su aprendizaje del álgebra. Para el profesor, es importante conocer los errores básicos cometidos por los alumnos puesto que le provee de información sobre la forma en que éstos interpretan los problemas y sobre cómo utilizan los diferentes procedimientos algebraicos. Esta información permitirá al profesor arbitrar procedimientos y remedios efectivos para ayudar a los alumnos en la corrección de dichos errores.

El estudio de los errores cometidos en la enseñanza-aprendizaje del álgebra se puede apoyar en algunas teorías de la psicología cognitiva. En este sentido, la mente del alumno no es una página en blanco, el alumno tiene un conocimiento anterior que le parece suficiente y establece en su mente cierto equilibrio. Por ello, la principal razón para que se produzca la asimilación del nuevo conocimiento es que éste debe tener significado para el alumno, para lo cual, ha de responder a las preguntas que él mismo se ha formulado. En ningún caso, el nuevo conocimiento se añade al antiguo; al contrario, le crea un conflicto al alumno porque le provoca una reestructuración nueva del conocimiento total, produciéndose posteriormente una acomodación de la estructura anterior, que le permite recobrar el equilibrio perdido.

Los errores aparecen en el trabajo de los alumnos principalmente cuando se enfrentan a conocimientos novedosos que los obligan a hacer una revisión o reestructuración de lo que ya saben. Como señala Matz (1980), "los errores son intentos razonables, pero no exitosos de adaptar un conocimiento adquirido a una nueva situación". Entendemos que el error tendrá distintas procedencias, pero siempre se considerará como un esquema cognitivo inadecuado y no sólo como consecuencia de falta de conocimiento o de concentración.

El trabajo que Matz (1980) ha emprendido, tratando de dar una explicación teórica a la presencia tan frecuente, uniforme y persistente de los errores de sintaxis algebraica en poblaciones escolares de entre 15 y 18 años de edad, ha puesto de manifiesto que los procesos que generan las respuestas algebraicas incorrectas no son resultado de acciones arbitrarias o del azar, sino que son producto de procesos intelectuales razonables, generados por desafortunadas adaptaciones del conocimiento adquirido previamente. Muchos de los errores comunes, afirma, surgen de uno de los siguientes procesos: el uso de una regla conocida en una situación para la cual resulta inapropiada, o, la adaptación incorrecta de una regla conocida, de tal manera que pueda utilizarse para resolver un problema nuevo. Los errores aparecen en el trabajo de los alumnos, sobre todo, cuando se enfrentan a conocimientos novedosos que les obliga a hacer una revisión o reestructuración de lo que ya saben.

Abordando el estudio de los errores tomando como referencia el marco teórico descrito en Socas (1997), en el que se consideran tres ejes, no disjuntos, que permiten analizar el origen del error. De esta forma, se pueden situar los errores que cometen los alumnos en relación con tres orígenes distintos:

- Obstáculo.
- Ausencia de sentido.
- Actitudes afectivas y emocionales.

Considerando el obstáculo como un conocimiento adquirido, no una falta de conocimiento, que ha demostrado su efectividad en ciertos contextos. Cuando el alumno utiliza este conocimiento fuera de dichos contextos, origina respuestas inadecuadas (Bachelard, 1938; Brousseau, 1983).

La presencia de obstáculos epistemológicos, fuera de los obstáculos cognitivos, se justifica por la impresión de que los obstáculos epistemológicos deben su existencia a la aparición y resistencia de ciertos conceptos matemáticos a lo largo de la historia, así como a la observación de conceptos análogos en los alumnos, más que a la confirmación de la resistencia de esas concepciones en los alumnos de hoy. Esta condición parece esencial por la disparidad de las normas que rigen la construcción del conocimiento matemático en la historia y la construcción del conocimiento matemático en el contexto escolar. El análisis histórico puede ayudar al didáctico en su búsqueda de núcleos de resistencia al aprendizaje matemático, pero no puede, en ningún caso, aportar por sí solo la prueba de la existencia de tal o cual obstáculo para los alumnos de hoy. Esta diferenciación se indicará de manera explícita en algunos ejemplos.

Los errores que tienen su origen en una ausencia de sentido se originan en los distintos estadios de desarrollo (semiótico, estructural y autónomo) que se dan en los sistemas de representación, por lo que podemos diferenciarlos en tres etapas distintas:

1. Errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética. Para entender la generalización de las relaciones y procesos se requiere que éstos antes hayan sido asimilados en el contexto aritmético.
2. Errores de procedimiento en virtud de los cuales los alumnos usan de manera inapropiada fórmulas o reglas de procedimiento.

3. Errores del álgebra debidos a las características propias del lenguaje algebraico. Ejemplos de este tipo de error son el sentido del signo igual en álgebra y la sustitución formal.

Los errores que tienen su origen en actitudes afectivas y emocionales tienen distinta naturaleza: faltas de concentración (excesiva confianza), bloqueos, olvidos, etc.

Se debe señalar también que el hecho de atribuir una letra a un número desconocido o a un objeto matemático es necesariamente una sustitución formal y a su vez también una generalización. El hecho de establecer una relación entre letras y números es, obviamente, una modelización en la que la sustitución formal y la generalización están presentes. No obstante, a pesar de esta necesaria e implícita relación entre los tres procesos en la cultura matemática, considerando que se pueden diferenciarlos desde un punto de vista epistemológico.

2.10 El modelo cartesiano (CM)

Es el enfoque habitual para la resolución de problemas verbales de álgebra actuales. En este método, algunas de los elementos desconocidos (incógnitas) en el texto se representan por medio de expresiones perteneciente a un Sistema de Signos Matemáticos (MSS) más abstracto, y el texto del problema es entonces traducida a una serie de relaciones expresadas en ese MSS que conducen a uno o diversos textos, la decodificación de los cuales, a través de una regresión en la traducción al MSS original, se produce la solución del problema (Puig & Cerdán, 1990).

El Modelo Teórico Local (MTL) constituye un marco teórico metodológico para la observación experimental, para explicar y dar respuesta sobre los procesos que se desarrollan en una situación dada, con contenidos matemáticos específicos y con alumnos concretos. Tiene un carácter descriptivo, explicativo y predictivo, que no excluye que los mismos fenómenos puedan describirse, explicarse y predecirse mediante otro modelo (Puig, 2006). El modelo incluye cuatro componentes interrelacionados: (i) el componente de enseñanza o modelo de enseñanza, (ii) el componente de actuación o modelo de cognición, (iii) el modelo de competencia formal y (iv) el componente de comunicación o modelo de comunicación.

En este sentido, el modelo de cognición constituye un marco propicio para identificar, describir y categorizar las actuaciones de los estudiantes cuando se enfrentan a tareas contextualizadas que involucran la relación entre variables (Fernández & Puig, 2002; Filloy, Puig, & Rojano, 2008). De acuerdo con los autores, el aspecto fundamental en la solución del problema es el paso del lenguaje natural a una expresión en el lenguaje del álgebra: una ecuación. Por tanto, en la resolución de dichos problemas se hallan implicadas, tanto la competencia en ambos lenguajes, como la competencia en el proceso del paso de un texto escrito en lenguaje natural a un texto escrito en el lenguaje del algebra.

En un análisis del método cartesiano (MC) los autores presentan (Filloy et al., 2008) una serie de pasos que el resolutor ideal, de problemas con contenido heurístico, debería recorrer.

1. Un primer paso reposa sobre la competencia en el lenguaje natural, pero en especial sobre la competencia en este tipo especial de textos matemáticos que son los problemas aritmético-algebraicos del enunciado verbal.
2. Lectura analítica del enunciado del problema que lo reduce a una lista de cantidades y de relaciones entre cantidades. En los pasos segundo, tercero y cuarto están presentes, tanto las competencias de proceso propias del MC, como las competencias en el sistema de signos del algebra.
3. Elección de una cantidad que se va a representar con una letra (o de unas cuantas cantidades que se van a representar con letras distintas).
4. Representación de otras cantidades mediante expresiones algebraicas, que describen la relación (aritmética) que esas cantidades tienen con otras que ya han sido previamente representadas por una letra o una expresión algebraica.
5. Establecimiento de una ecuación (o tantas como letras distintas se haya decidido introducir en el segundo paso) igualando dos expresiones de las que se han escrito en el segundo paso, que representan la misma cantidad.

Los pasos quinto y sexto contienen competencias estrictamente algebraicas.

6. Transformación de la ecuación en una forma canónica.
7. Aplicación de la formula o algoritmo de solución a la ecuación en forma canónica.

Finalmente, el séptimo paso exige competencia en el contenido del problema que permite evaluar la adecuación del resultado.

8. Interpretación del resultado de la ecuación en términos del problema.

2.11 Modelo metacognitivo

Los investigadores han estado estudiando la metacognición durante más de veinte años. La mayoría está de acuerdo que cognición y metacognición difieren en que las habilidades cognitivas son necesarias para realizar una tarea, mientras que la metacognición es necesaria para comprender cómo la tarea fue realizada (Garner, 1987). La mayoría de los investigadores también hacen una distinción entre dos componentes de la metacognición, el conocimiento de la cognición y la regulación de la cognición (Flavell, 1987). El conocimiento de la cognición se refiere a lo que los individuos saben acerca de su propia cognición o sobre la cognición en general.

Incluye al menos tres tipos diferentes de conciencia metacognitiva: conocimiento declarativo, conocimiento procedimental y conocimiento condicional (Brown, 1987; Jacobs & Paris, 1987; Schraw & Moshman, 1995). El conocimiento declarativo se refiere al conocimiento "acerca de" las cosas. El conocimiento procedimental se refiere al conocimiento "cómo" hacer las cosas. El conocimiento condicional se refiere al conocimiento "por qué" y "cuándo" de los aspectos de la cognición.

El conocimiento declarativo incluye el conocimiento de uno mismo como aprendiz y sobre los factores que influyen en el desempeño de cada uno. Por ejemplo, la investigación que examina lo que los aprendices saben acerca de su propia memoria indica que los adultos tienen más conocimiento que los niños sobre los procesos cognitivos asociados con la memoria (Baker, 1989). Del mismo modo, los buenos aprendices parecen tener más conocimiento sobre diferentes aspectos de la memoria tal como limitaciones de la capacidad, ensayo, y aprendizaje distribuido (Garner, 1987; Schneider & Pressley, 1989).

El conocimiento procedimental se refiere de conocimiento acerca de hacer las cosas. Gran parte de este conocimiento está representado como heurísticas y estrategias. Los individuos con un alto grado de conocimiento procedimental realizan más tareas de forma automática, es más probable que posea un repertorio más amplio de estrategias, para secuenciar las estrategias con eficacia (Pressley, Borkowski & Schneider, 1987) y cualitativamente el uso de diferentes estrategias para resolver problemas (Glaser & Chi, 1988). Los ejemplos típicos incluyen la forma de fragmentar y categorizar la información nueva.

El conocimiento condicional se refiere al conocimiento de cuándo y por qué utilizar los conocimientos declarativo y procedimental (Garner, 1990). Por ejemplo, los aprendices eficaces conocen cuando y qué información ensayar. El conocimiento condicional es importante porque ayuda a los estudiantes de forma selectiva a asignar sus recursos y estrategias de uso de manera más eficaz (Reynolds, 1992). El conocimiento condicional también permite a los estudiantes adaptarse a las cambiantes demandas situacionales de cada tarea de aprendizaje.

La regulación de la cognición se refiere a un conjunto de actividades que ayudan a los estudiantes a controlar su aprendizaje. La investigación apoya la suposición de que la regulación metacognitiva mejora el desempeño en un número de maneras, incluyendo mejor uso atencional de los recursos, un mejor uso de las estrategias existentes, y una mayor conciencia de las fallas en la comprensión. Una serie de estudios informan una mejora significativa en el aprendizaje si las habilidades de regulación y de comprensión son incluidas de cómo utilizar estas habilidades como parte de la instrucción en el aula (Cross & París, 1988; Brown & Palincsar, 1989). Estos estudios son importantes porque sugieren que los estudiantes más jóvenes pueden adquirir habilidades metacognitivas a través de la instrucción. Aunque más investigación es necesaria, es probable que mejore un aspecto de la regulación (por ejemplo, planificación) puede mejorar otros (por ejemplo, el monitoreo).

Aunque se han descrito varias habilidades regulatorias en la literatura (Schraw & Dennison, 1994) para una descripción), tres habilidades esenciales se incluyen en todos los informes: planificación, monitoreo y evaluación (Jacobs & Paris, 1987). La planificación implica la selección de estrategias apropiadas y la asignación de recursos que afectan el desempeño. Ejemplos incluyen hacer predicciones antes de leer, secuenciar estrategias y asignar tiempo o atención selectivamente antes de comenzar una tarea. Por ejemplo, los estudios de escritores calificados revelan que la capacidad de planificar se desarrolla a lo largo de la infancia y la adolescencia, mejorando dramáticamente entre las edades de 10 y 14 (Bereiter & Scardamalia, 1987). Los escritores más viejos y más experimentados participan en una planificación más global que en la planificación local. Además, los escritores más experimentados son más capaces de planificar eficazmente independientemente del "contenido" de texto, mientras que los escritores no experimentados no pueden hacerlo. El monitoreo se refiere a la conciencia en línea de la comprensión y el desempeño de las tareas.

La capacidad de participar en auto-pruebas periódicas durante el aprendizaje es un buen ejemplo. La investigación indica que la capacidad de monitoreo se desarrolla lentamente y es bastante escasa en niños e incluso adultos (Pressley & Ghatala, 1990). Sin embargo, varios estudios recientes han encontrado un vínculo entre el conocimiento metacognitivo y la precisión de la monitorización (Schraw, 1994; Schraw, Dunkle, Bendixen, & Roedel, 1995). Los estudios también sugieren que la capacidad de monitoreo mejora con la capacitación y la práctica (Delclos & Harrington, 1991). La evaluación se refiere a la evaluación de los productos y la eficiencia de su aprendizaje. Ejemplos típicos incluyen la reevaluación de los objetivos y conclusiones. Varios estudios indican que el conocimiento metacognitivo y las habilidades reguladoras, como la planificación, están relacionadas con la evaluación (Baker, 1989). Con respecto a las revisiones de texto, Bereiter y Scardamalia (1987) encontraron que los escritores inexpertos eran menos capaces que los buenos escritores de adoptar la perspectiva del lector y tenían más dificultades para "diagnosticar" los problemas de texto y corregirlos.

Hay dos puntos principales que Schraw (Schraw, 1994) enfatiza sobre el conocimiento de la cognición y la regulación de la cognición. La primera es que los dos están relacionados entre sí. Swanson (1990) encontró que el conocimiento declarativo de la cognición facilitó la regulación de la resolución de problemas entre los estudiantes de quinto y sexto grado. Schraw (1994) informó que los juicios de los estudiantes universitarios acerca de su habilidad para monitorear su comprensión de lectura estaban significativamente relacionados con su exactitud de monitoreo observada y el desempeño de la prueba. Pintrich, Smith, Garcia, y McKeachie (1993) encontraron que el conocimiento de las estrategias estaba relacionado con el uso de la estrategias auto-informadas. Schraw, Horn, Thorndike-Christ y Bruning (1995) reportaron un hallazgo similar.

La segunda es que ambos componentes parecen abarcar una amplia variedad de áreas temáticas y dominios, es decir, son de dominio general en la naturaleza. Gourgey (1998) informó anecdóticamente que la metacognición en matemáticas es la misma que en la lectura. También revisó cuatro estrategias generales (es decir, identificando los objetivos principales, la automonitorización, el auto-cuestionamiento y la autoestima) que han demostrado mejorar el aprendizaje en todos los dominios. Schraw et al. (1995) proporcionaron evidencia empírica para apoyar la conclusión de que los estudiantes adultos poseen una habilidad de monitoreo general. Wolters y Pintrich (1998) informaron que el uso de la estrategia y la autorregulación se correlacionaron altamente en tres dominios separados.

Schoenfeld (1985) presentó una teoría comprensiva de la interacción de los procesos cognitivos y metacognitivos en la resolución de problemas matemáticos. Identificó cuatro categorías de conocimiento y comportamiento: recursos (conocimiento matemático), heurística (técnicas de resolución de problemas), control (metacognición) y sistemas de creencias (actitudes). Mientras que la instrucción tiende a centrarse en las dos primeras categorías, los fracasos estudiantiles en la resolución de problemas a menudo pueden atribuirse a malfuncionamientos en las dos últimas categorías. Es decir, los estudiantes pueden poseer el conocimiento requerido, pero no lo utilizan apropiadamente porque no saben cómo monitorear y evaluar sus decisiones ni se dan cuenta de que es ventajoso hacerlo.

Un patrón común de pobre metacognición se observa en los estudiantes principiantes que aprovechan una estrategia de solución y no se preguntan a sí mismos si la estrategia está llevándolos a su meta (Schoenfeld, 1987). Los estudiantes frecuentemente realizan operaciones inapropiadas porque no han aclarado las relaciones entre los hechos del problema, por lo que no consideran exactamente lo que hay que hacer y por qué. Esta falta de atención cuidadosa a el sentido común y la aclaración a menudo conduce a intentos de solución impulsivos e ilógicos, como el de afirmar que sólo un cargamento de nueces pesa más que las nueces y las cajas en las que están empacadas (Whimbey & Lochhead, 1986).

En resumen, la metacognición consiste en conocimientos y habilidades regulatorias que se utilizan para controlar la cognición de uno. Mientras que la metacognición se utiliza en un sentido general para subsumir una serie de componentes individuales, todos estos componentes son intercorrelacionados (Schraw & Dennison, 1994), y proporcionan dos componentes generales correspondientes al conocimiento sobre la cognición y la regulación de la cognición. La evidencia preliminar sugiere que estos dos componentes están intercorrelacionados en algún lugar en el rango de r = 0,50. En otras palabras, la metacognición se refiere tanto al conocimiento o conciencia que uno tiene acerca de sus propios procesos y productos cognitivos. La metacognición implica tanto al conocimiento metacognitivo como a las experiencias metacognitivas o regulación del conocimiento. El conocimiento metacognitivo alude al conocimiento adquirido acerca de procesos cognitivos, el conocimiento que puede ser utilizado para controlar los procesos cognitivos. Además, Flavell divide el conocimiento metacognitivo en tres categorías: el conocimiento sobre la variable de persona, sobre la variable de tarea y sobre la variable de estrategia (Flavell, J., 1987).

Las experiencias metacognitivas implican el uso de estrategias metacognitivas o la regulación metacognitiva. Las estrategias metacognitivas son procesos secuenciales que uno utiliza para controlar actividades cognitivas, y para asegurar que un objetivo cognitivo haya sido conseguido. Estos procesos ayudan a regular y a supervisar el aprendizaje, y consisten en actividades cognitivas de planeación y monitoreo, así como evaluar los resultados de esas actividades.

2.12 Modelos del aprendizaje autorregulado (SRL)

De acuerdo con una definición reciente (Zeidner, Boekaerts, & Pintrich, 2000), la autorregulación se concibe como una construcción general que abarca aspectos como el aprendizaje autorregulado (SRL), la regulación de la salud y la gestión del estrés, que a su vez cubren actividades de nivel inferior, como el uso de estrategias, la auto-observación y la automaticidad.

En los últimos quince años se han propuesto numerosas teorías y modelos que han intentado identificar los procesos que intervienen en la autorregulación del aprendizaje, y establecer las relaciones e interacciones entre ellos y con el rendimiento académico. Puustinen y Pukkinen (2001) han llevado a cabo una revisión de los modelos vigentes actualmente en este campo ya que existen muchos modelos sobre el aprendizaje autorregulado (SRL) de alta calidad en la literatura. Como los modelos desarrollados por Boekaerts (Boekaerts & Niemivirta, 2000), Borkowski (1996), Pintrich (2000), Winne (Winne & Hadwin, 1998) y Zimmerman (2000). Analizando sus principales similitudes y diferencias, dentro de ellos, estos autores destacan el modelo de Pintrich (Pintrich, 2000), como uno de los intentos de síntesis más importantes realizados sobre los diferentes procesos y actividades que ayudan a acrecentar la autorregulación del aprendizaje.

Se ha argumentado que cada persona intenta autorregular su funcionamiento de alguna manera para ganar metas en la vida y que es inexacto hablar de personas no autorreguladas o incluso la ausencia de autorregulación (Winne, 1996). Desde esta perspectiva, lo que distingue las formas ineficaces de autorregulación es la calidad y cantidad de los procesos de autorregulación. Una cuestión importante es comprender cómo estos procesos están estructuralmente interrelacionados y se sostienen cíclicamente. Desde una perspectiva cognitiva social, los procesos de autorregulación y Las creencias se dividen en tres fases cíclicas: la previsión o planificación, el rendimiento o el control volitivo, y los procesos de autorreflexión.

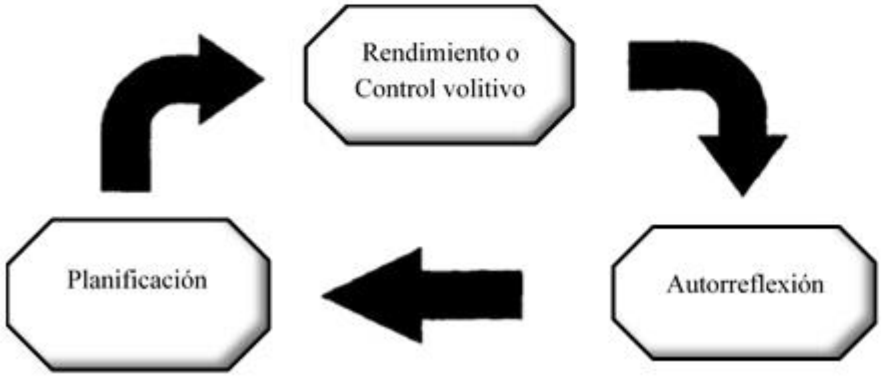


Figura 2: Fases cíclicas de la autorregulación.

La previsión se refiere a procesos influyentes que preceden a los esfuerzos para actuar y preparar el escenario para ello. El rendimiento o control volitivo implica procesos que ocurren durante los esfuerzos motores y afectan la atención y la acción. La auto-reflexión involucra procesos que ocurren después de los esfuerzos de desempeño e influyen en la respuesta de una persona a esa experiencia. Estas auto-reflexiones, en a su vez, influyen en la previsión de los esfuerzos motores subsecuentes completando así un ciclo de auto-regulación.

Fases de autorregulación cíclicas		
Planificación	Rendimiento / control volitivo	Autorreflexión
Análisis de tareas	Auto control	Auto-juicio
Establecimiento de metas	Auto-instrucción	Autoevaluación
Planificación estratégica	Imaginería	Atribución causal
	Atención enfocada	
	Estrategias de tareas	
Creencias de auto-motivación	Auto observación	Auto-reacción
Auto-eficacia	Auto-grabación	Auto-satisfacción / afecto
Expectativas de resultados	Auto-experimentación	Adaptativo-defensivo
Interés / valor intrínseco		
Orientación de la meta		

Tabla 1: Estructura de la fase y subprocesos de la autorregulación.

2.12.1 El modelo de Pintrich para el aprendizaje autorregulado (SRL)

Pintrich (2000) ha propuesto un marco teórico, basado en la perspectiva sociocognitiva, con el objetivo de clasificar y analizar los distintos procesos que, según la literatura científica, están implicados en el aprendizaje autorregulado. En dicho modelo, los procesos reguladores, se organizan en función de cuatro fases: a) la planificación, b) el monitoreo, c) el control, y d) la reflexión. A su vez, dentro de cada una de ellas, las actividades de autorregulación se enmarcan dentro de cuatro áreas: la cognitiva, la motivacional y afectiva, la conductual y la contextual. Pintrich (2000) desarrolló un marco general para el aprendizaje autorregulado y presentó su trabajo en forma de tabla.

	Áreas de regulación			
Fases	Cognición	Motivación/afecto	Comportamiento	Contexto
1. Preparación, planificación, y activación	Establecimiento de metas objetivo Activación del conocimiento previo del contenido Activación del conocimiento metacognitivo	Adopción de la orientación del objetivo Juicios de eficacia Facilidad de juicios de aprendizaje; percepciones de la Dificultad de la tarea Activación del valor de tarea Activación de intereses	[Planificación de tiempo y esfuerzo] [Planificación de la auto-observación del comportamiento]	[Percepciones de la tarea] [Percepciones del contexto]
2. Monitoreo	Conciencia metacognitiva y monitoreo de la cognición	Control y monitoreo de la motivación y el afecto	Monitoreo y control del esfuerzo, tiempo de uso, necesidad de ayuda Auto-observación del comportamiento	Monitoreo de la tarea cambiante y las condiciones del contexto
3. Control	Selección y adaptación de estrategias cognitivas para el aprendizaje, el pensamiento	Selección y adaptación de estrategias para el manejo de la motivación y el afecto	Incremento/decremento del esfuerzo Persistir, renunciar Comportamiento de búsqueda de ayuda	Cambiar y renegociar la tarea Cambiar o abandonar el contexto
4. Reacción y reflexión	Juicios cognitivos Atribuciones	Reacciones afectivas Atribuciones	Comportamiento de elección	Evaluación de la tarea Evaluación del contexto

Tabla 2: Fases y áreas del aprendizaje autorregulado.

Estas cuatro fases representan para Pintrich una secuencia general por donde el alumno avanza a medida que realiza la tarea, pero no están jerárquica o linealmente estructuradas. Según este investigador, tales fases pueden darse de forma simultánea y dinámica, produciéndose una múltiple interacción entre los diferentes procesos y componentes incluidos en ellas. Asimismo, indica que no todas las tareas académicas implican explícitamente autorregulación: a veces, la realización de ciertas tareas no exige que el alumno planifique, controle y evalúe estratégicamente lo qué va a hacer, sino que, más bien, su ejecución se puede llevar a cabo de forma más o menos automática (o implícita) en función de la experiencia previa de los alumnos en las mismas.

Como se puede observar en la tabla 2, los procesos autorreguladores se enumeran en cuatro áreas separadas, incluyendo áreas, cognitiva, de motivación y afectiva, conductual y contextuales. Las actividades de autorregulación que se llevan a cabo durante la fase de la planificación así incluye, entre otras cosas, el conocimiento previo de los contenidos y la activación de los conocimientos metacognitivos (área cognitiva), los juicios de eficacia y la adopción de una orientación de objetivos (motivación y área de afectiva), la planificación del tiempo y esfuerzo (área de comportamiento) y percepciones de tareas y contexto (área de contexto). Del mismo modo, el monitoreo consiste en la toma de conciencia y el monitoreo de la cognición, la motivación, el afecto, el uso del tiempo, el esfuerzo y las condiciones de la tarea y el contexto. Las actividades de control se refieren a la selección y adaptación de estrategias para la gestión del aprendizaje, el pensamiento, la motivación y el afecto; Para la regulación del esfuerzo y para la negociación de tareas. Finalmente, la reflexión incluye juicios cognitivos, reacciones afectivas, decisiones y tareas y evaluación de contexto. El marco se presenta como una heurística, ya que no se supone que todo el aprendizaje académico implica necesariamente una autorregulación explícita.

Además, incluso si se supone que el SRL, en general, sigue la secuencia ordenada en el tiempo antes mencionada, no se excluye una visión dinámica del proceso. Pintrich (2000) analizó además el papel de la motivación en la SRL. Más específicamente, él discutió la manera en que las orientaciones de la meta (dominio y orientación del funcionamiento en este caso) están relacionadas con SRL. Las orientaciones de dominio y desempeño fueron consideradas desde un enfoque contrario a un punto de vista de evasión o evitación. El enfoque de dominio orientado de los estudiantes tendría su enfoque en el aprendizaje, la comprensión y el dominio de las tareas. Desde el punto de vista de la autorregulación, estos estudiantes mostrarían los resultados más positivos, incluyendo el monitoreo y control de su cognición durante el uso de la estrategia, las creencias positivas y adaptables de auto-eficacia y el manejo del tiempo y esfuerzo. La hipotética orientación de la evasión-dominio, por otra parte, se relacionaría con la imperfección de escape; en lugar de centrarse en el aprendizaje y el progreso. Los estudiantes orientados a evitar el dominio buscan evitar situaciones en las que pueden cometer errores. En ausencia de investigaciones sobre la orientación de la evitación-dominio; Pintrich (2000) asumió que sería menos beneficioso para la SRL que el enfoque de orientación de dominio.

Los estudiantes orientados al rendimiento se centrarían en ser superiores, superar a los demás y ser los mejores en la tarea en comparación con otros. Los resultados empíricos son algo contradictorios, pero sugieren, globalmente, que la orientación del enfoque de desempeño podría tener alguna relación positiva con la cognición y la motivación. En cualquier caso, se juzga ser más beneficioso para SRL que la orientación de evitación-rendimiento, que se centraría en evitar la inferioridad y no parece estúpido en comparación con otros, un enfoque juzgado no adaptativo por Pintrich (Pintrich. 2000).

La investigación empírica realizada por Pintrich (Pintrich. 2000) refleja su preocupación por un alumno motivado y autorregulado. De hecho, la mayoría de sus estudios informaron de las relaciones entre la orientación motivacional de los estudiantes, el aprendizaje autorregulado y el logro académico. Además, Pintrich y sus colaboradores han desarrollado un cuestionario auto-reporte, el cuestionario de estrategias motivacionales para el aprendizaje (MSLQ), con el fin de evaluar las creencias motivacionales (por ejemplo, la autoeficacia, el valor intrínseco y la ansiedad ante los exámenes) así como estrategias de aprendizaje (es decir, estrategias cognitivas, metacognitivas y regulatorias o estrategias de gestión de recursos) en estudiantes universitarios. El MSLQ se ha utilizado y modificado en varios estudios empíricos. (Pintrich & De Groot, 1990; Pintrich, Smith, Garcia, & McKeachie, 1991; Pintrich et al., 1993).

2.12.2 El Modelo cognitivo social de autorregulación de Zimmerman

El modelo social cognitivo de autorregulación de Zimmerman (1989, 1990, 1998, 2000) se basa, como su nombre indica, en la teoría cognitiva social de Bandura (1986). Según este modelo, la autorregulación implica tres clases de determinantes. En este determinismo recíproco triádico, los eventos personales encubiertos (es decir, auto), conductuales y ambientales son vistos como factores separables, pero al mismo tiempo interdependientes influyendo en el funcionamiento de los individuos. La autorregulación implica el monitoreo y el ajuste de los estados cognitivos y afectivos. La autorregulación del comportamiento consiste en auto-observación y el ajuste estratégico de los procesos de desempeño. Por último, la autorregulación ambiental incluye la observación y el ajuste de las condiciones o resultados ambientales (Zimmermann, 1990, 1998).

Según Zimmerman (2000), la autorregulación es de naturaleza cíclica. Define la autorregulación como «pensamientos, sentimientos y acciones autogenerados que se planifican y se adaptan cíclicamente a la consecución de metas personales» (p.14). En otras palabras, la retroalimentación obtenida de la experiencia previa de aprendizaje se utiliza para hacer ajustes a las metas, la elección de la estrategia, etc., para los esfuerzos subsiguientes. Estos ajustes, que se supone reducen las discrepancias en el desempeño tanto proactiva como reactivamente, son necesarias porque los factores personales, conductuales y ambientales cambian constantemente durante el aprendizaje. Las fases cíclicas de la autorregulación incluyen una fase de previsión, una fase de rendimiento y una fase de autorreflexión (Zimmerman, 2000; Zimmerman, 1998).

La fase de previsión se refiere a procesos que preceden y preparan acciones. Se distinguen dos categorías de procesos: los procesos relativos al análisis de tareas (es decir, el establecimiento de objetivos y la planificación estratégica) y los relativos a las creencias de auto-motivación (es decir, autoeficacia, expectativas de resultados, motivación intrínseca o valoración). El rendimiento o la fase de control volitivo incluye dos tipos de procesos, a saber, el autocontrol (es decir, auto-instrucción, imágenes o formación de imágenes mentales, atención focalizada y estrategias de tareas) y auto-observación (es decir, auto-grabación y auto-experimentación). Los procesos de autocontrol ayudan a los estudiantes a concentrarse en la tarea ya optimizar sus esfuerzos; Por ejemplo, las estrategias de trabajo ayudan al aprendizaje reduciendo la tarea a sus componentes esenciales y reorganizándolos en una manera significativa (Zimmerman, 2000). Los procesos de auto-observación, por otro lado, se refieren a trazar aspectos específicos del propio desempeño. La última fase, la auto-reflexión, contiene dos categorías de procesos estrechamente relacionados con auto-observación, auto-juicio y auto-reacción. El auto-juicio se refiere a las autoevaluaciones de la propia actuación ya las atribuciones causales relativas a los resultados; La auto-reacción incluye la auto-satisfacción, es decir, las percepciones de (des)satisfacción y afección con respecto al desempeño e inferencias sobre lo que habrá que cambiar en futuras situaciones de autorregulación exigentes. Debido a la naturaleza cíclica de la autorregulación, la auto-reflexión influye aún más en los procesos de previsión.

Las habilidades de autorregulación, que se supone dependen del contexto, se desarrollan, de acuerdo con la teoría cognitiva social (Zimmerman, 1996, 2000), a través de cuatro niveles. El primer nivel corresponde al aprendizaje por modelación, es decir, inducción indirecta de una habilidad a través de la observación. Este nivel de observación se alcanzaría cuando el alumno pueda deducir las características principales de la habilidad o estrategia observando un modelo. El nivel imitativo de la autorregulación se define como el rendimiento emulativo de una habilidad modelada mientras recibe retroalimentación social. Se alcanza cuando el rendimiento del alumno se acerca a la forma general del modelo. El papel de la orientación social, esencial en estos dos primeros niveles, se hace menos evidente durante los dos últimos. El tercer paso se llama nivel de autocontrol y corresponde a la aplicación exitosa de una habilidad demostrada cuando el modelo ya no está presente y el cuarto y último nivel, autorregulación, se refiere al uso adaptativo de una habilidad en condiciones cambiantes. Se supone que los estudiantes que dominan cada nivel en secuencia tendrán más facilidad en el aprendizaje que otros. Sin embargo, poseer las capacidades no significa automáticamente que se usen; los elementos motivacionales y ambientales influyen en la decisión final.

Numerosos estudios empíricos se han realizado para probar este modelo. La autoeficacia es indudablemente el elemento individual que más ha sido estudiado (Schunk, 1990, 1994; Schunk & Zimmerman, 1996, 1998). Se refiere a percepciones sobre las capacidades de uno para alcanzar niveles de desempeño designados (Bandura, 1986; Zimmerman, 2000). Por otra parte, Zimmerman y Martinez-Pons (1986, 1988) han desarrollado un método de entrevista estructurada, la entrevista de aprendizaje autorregulado (SRLIS), para evaluar el uso de estrategias de aprendizaje autorregulado usadas por los estudiantes. Consiste en una entrevista estructurada que evalúa 14 clases de estrategias de aprendizaje autorregulado, como la autoevaluación, la organización y transformación, la planificación y monitoreo. Últimamente Zimmerman (2000) ha centrado su trabajo en algunos dominios específicos (Zimmerman & Bandura, 1994; Zimmerman & Risemberg, 1997), la adquisición de habilidades motoras complejas (Zimmerman & Kitsantas, 1997; Kitsantas & Zimmerman, 1998).

Zimmerman y Martinez-Pons (1990) utilizaron el SRLIS para examinar la relación entre el uso de estrategias de aprendizaje autorregulado usadas por los estudiantes y sus percepciones de autoeficacia verbal y matemática.

2.12.3 Comparación de los modelos de SRL

Los modelos fueron comparados en cuatro criterios: las teorías de fondo de los autores, las definiciones de SRL, los componentes incluidos en los modelos y la investigación empírica realizada por los autores. Desde el punto de vista de las teorías subyacentes, el modelo de Borkowski (1996), derivado de la obra de tales teóricos como Flavell (Flavell & Wellman, 1977), Brown (1978) y Sternberg (1985), es el representante más puro de la perspectiva del procesamiento de la información y de la tradición de la investigación metacognitiva. El modelo de Zimmerman, por otro lado, refleja la teoría social cognitiva de Bandura (1986), subrayando las bases sociales del pensamiento y el comportamiento (Zimmerman, 2000). El modelo de Pintrich (2000) también deriva principalmente del enfoque cognitivo social, mientras que Boekaerts (1997) ha sido sobre todo Influenciado por la Teoría de Control de Acción de Kuhl (1985) y por la Teoría de Estrés Transaccional de Lazarus y Folkman (1984). Finalmente, Winne (1996) parece tener antecedentes teóricos más heterogéneos. Su modelo ha sido influenciado, entre otros, por la obra de Bandura y Zimmerman (Zimmerman & Bandura, 1999), Carver y Scheier (1990), Kuhl (Kuhl & Goschke, 1994), Paris y Byrnes (1989).

Parecen surgir dos tipos de definiciones de SRL, una definición orientada a objetivos y una definición metacognitivamente ponderada. Boekaerts (1999), Pintrich (2000) y Zimmerman (2000) definen el SRL como un proceso orientado a objetivos. Enfatizan la naturaleza constructiva o auto-generada del SRL y coinciden en que controlar, regular y controlar el propio aprendizaje incluye factores cognitivos, pero también motivacionales, emocionales y sociales.
Por su parte, Borkowski (1996) y Winne (1996) definen el SRL como un proceso metacognitivamente gobernado que tiene como objetivo adaptar el uso de las tácticas y estrategias cognitivas a las tareas. Sin embargo, es importante agregar que, aunque Borkowski (1996) y Winne (1996) no incluyan orientaciones de objetivos en sus definiciones, ambos asumen que los estudiantes autorregulados o los usuarios de buena información y están intrínsecamente motivados y orientados hacia objetivos; además, se supone que los buenos usuarios de la información de tienen dominio de objetivos, como lo expresa Borkowski (Borkowski, 1996), y en el modelo de dominio de Winne (Winne, 1996), los objetivos se describen como estándares o criterios internos a los cuales todos se comparan con los logros alcanzados. Finalmente, tanto Borkowski (1996) como Winne (1996) asumen que el SRL incluye factores cognitivos, pero también motivacionales, emocionales y sociales. En suma, las diferencias en las definiciones se difuminan cuando se examinan los modelos con más detalle, lo que sugiere que es el peso relativo dado a las partes componentes, más que los componentes mismos, que varía de un modelo a otro.

Incluso si la terminología varía de un modelo a otro, todos los autores asumen que el SRL procede de algún tipo de fase preparatoria o preliminar, pasando por la fase real de ejecución o de finalización de la tarea, hasta una evaluación o fase de adaptación. La Tabla 3 resume los componentes correspondientes a estas fases para cada uno de los modelos. Se demuestra que la fase preparatoria de la SRL incluye la tarea de análisis, planificación y establecimiento de metas.

Se basa en el autoconocimiento, las creencias motivacionales y el conocimiento (meta) cognitivo sobre el yo, la tarea y la situación y prepara al individuo para la próxima situación. La fase de desempeño consiste en el uso de estrategias y actividades de autorregulación y monitoreo en línea, tales como monitoreo de comprensión y asignación de recursos. La última fase en el SRL es la fase de evaluación, incluida la evaluación de los resultados. La retroalimentación del rendimiento proporciona a los individuos información sobre la eficiencia de su actividad y sirve como base para atribuciones, comparaciones y adaptaciones. Así, todos los autores asumen que el SRL es de naturaleza cíclica, en la medida en que esas evaluaciones influyen en los procesos preparatorios posteriores.

	Proceso SRL		
Autor	Fase preparatoria	Fase de rendimiento	Fase de evaluación
Boekaerts	Identificación, interpretación, evaluación primaria y secundaria, el establecimiento de metas	Metas de esfuerzo	Retroalimentación del rendimiento
Borkowski	Análisis de tareas, selección de estrategias	Uso de la estrategia, revisión de la estrategia, monitoreo de estrategia	Retroalimentación de rendimiento
Pintrich	Preparación, planificación, activación	Monitoreo, control	Reacción y reflexión
Winne	Definición de tareas, establecimiento de metas, planificación	Aplicación de tácticas y estrategias	Adaptación de la metacognición
Zimmerman	Preparación (análisis de tareas, la auto-motivación)	Desempeño (autocontrol, auto-observación)	Auto-reflexión (auto-juicio, auto-reacción)

Tabla 3: Componentes de los modelos en función de las tres fases del proceso del SRL.

A pesar de la aparente similitud de los componentes a través de los modelos, algunos modelos presentan características que los distinguen de todos los demás modelos. Quizá el ejemplo más notable es la concepción de un omnipresente proceso de monitoreo metacognitivo, acompañado de retroalimentación interna. Esto distingue el modelo de Winne de todos los demás (Winne, 1996). De hecho, la mayoría de los autores asumen que el monitoreo tiene lugar durante la fase de desempeño y que la retroalimentación ocurre en la fase de evaluación, mientras que Winne (1996) sostiene que el SRL es recursiva y que el monitoreo metacognitivo puede producir retroalimentación interna durante cualquier fase del proceso del SRL.

Otro modelo que difiere de todos los demás es el de Boekaerts (1997). En su caso se trata de una cuestión de énfasis: se centra principalmente en la fase preparatoria del proceso de SRL y trata el desempeño y las fases de evaluación mucho más superficialmente. Boekaerts y Niemivirta

(2000) consideran incluso más allá del alcance de su trabajo discutir los procesos de resolución de problemas incluidos en la fase de rendimiento de la SRL. Esto podría reflejar la preocupación de Boekaerts (1997) por la distinción entre los conceptos de SRL y la resolución de problemas (Zeidner et al., 2000).

En lo que se refiere a la investigación empírica, parecen surgir dos grandes orientaciones, una orientación a la motivación y una orientación estratégica. Boekaerts (1999) y Pintrich (2000) están principalmente orientados a la motivación en su investigación. Ambos han estudiado las relaciones entre los factores motivacionales y el rendimiento académico y han desarrollado un cuestionario para evaluar los elementos motivacionales y cognitivos que influyen en el aprendizaje de los estudiantes. Sin embargo, las variables incluidas en los estudios han sido algo diferentes. Boekaerts y Niemivirta (2000) se ha centrado en las evaluaciones como un factor mediador en los niños, mientras que Pintrich (2000) ha examinado los efectos de varias variables, como la autonomía y la disciplina en el aula, sobre la motivación, el uso de la estrategia de aprendizaje y el rendimiento en los estudiantes universitarios.

La investigación de Borkowski (1996) y Winne (1996) está orientada principalmente a la estrategia. El enfoque de Borkowski (1996) ha sido instructivo, ya que ha comparado la efectividad de diferentes métodos de instrucción de estrategia (por ejemplo, el método de descubrimiento guiado versus instrucción de estrategia directa) en niños. Proporcionando instrucción formal sobre el aprendizaje de estrategias ha demostrado tener efectos beneficiosos sobre el uso y el rendimiento de la estrategia subsiguiente. Winnie (1996), por otra parte, ha utilizado una metodología de rastreo para explorar la relación entre los estudiantes universitarios auto-reportados, en contraste con su actual uso de tácticas de estudio.

Finalmente, la investigación de Zimmerman (Zimmerman, 2008)) ha sido orientada a la motivación y a la estrategia. Su investigación orientada a la motivación incluye su trabajo sobre autoeficacia y su investigación orientada a la estrategia consiste en el desarrollo y uso de una entrevista estructurada para probar el uso de estrategias de aprendizaje por parte de los estudiantes. Se ha encontrado que el uso de la estrategia de aprendizaje se correlaciona con las percepciones de autoeficacia.

La Tabla 4 resume los resultados anteriores comparando los modelos en los cuatro criterios: =, muy similar; (=), bastante similares (más similares que disímiles, diferencias menores); (≠), más bien disímiles (más disímiles que similares, diferencias principales); ≠, muy disímiles

	Criterios			
Autor	Background	Definición	Componentes	Investigación
Boekaerts–Borkowski	≠	≠	(≠)	≠
Boekaerts–Pintrich	≠	=	(≠)	(=)
Boekaerts–Winne	(≠)	≠	(≠)	≠
Boekaerts–Zimmerman	≠	=	(≠)	(≠)
Borkowski–Pintrich	≠	≠	(≠)	≠
Borkowski–Winne	(≠)	=	(≠)	(=)
Borkowski–Zimmerman	≠	≠	(≠)	≠
Pintrich–Winne	(≠)	≠	(≠)	≠
Pintrich–Zimmerman	=	=	=	=
Winne–Zimmerman	(≠)	≠	(≠)	(≠)

Tabla 4: Comparación dos a dos entre los cinco modelos del SRL.

CAPÍTULO III: METODOLOGÍA

En este trabajo se evalúa una intervención didáctica que se diseñó con la intención de potenciar en los estudiantes de secundaria su conocimiento metacognitivo para ayudarlos a ser autónomos en la traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico en problemas verbales a través de diez actividades que se desarrollaron siguiendo la metodología del aprendizaje autorregulado. Para la evaluación de esta intervención se utilizaron tres instrumentos los cuales se describirán más adelante.

3.1 Sujetos

Los participantes de estudio fueron 18 adolescentes, siete mujeres y once hombres, de tercer grado de secundaria de la escuela particular Colegio Internacional Puebla S.C., ubicada en la ciudad de Puebla. El rango de edad de los estudiantes comprende de 14 a 16 años. Dos estudiantes no concluyeron su participación en este estudio.

3.2 Instrumentos

Tres instrumentos se utilizaron en este estudio. El primero fue el cuestionario evaluación metacognitiva (MAI – Metacognitive Assessment Inventory) de Schraw y Dennison (1994) el cual consta de 52 ítems. El MAI mide, por una parte, el conocimiento sobre la cognición que incluye los tres tipos de conciencia o cognición, el conocimiento declarativo, el conocimiento procedimental y conocimiento condicional y, por otra parte, mide la regulación del conocimiento, éste comprende cinco procesos metacognitivos: planificación, monitoreo, evaluación, depuración y gestión de la información, con ítems en una escala Likert de 5 puntos (1 = nunca o casi nunca es cierto en mí a 5 = siempre o casi siempre cierto en mí).

El cuestionario de estrategias de motivación y aprendizaje (MSLQ – Motivated Strategies for Learning Questionnaire) de Pintrich (Pintrich et al., 1991), el cual consta de 81 ítems; el MSLQ es un instrumento diseñado para evaluar las orientaciones motivacionales de los estudiantes y su uso de las diferentes estrategias de aprendizaje para los cursos escolares. El MSLQ tiene dos secciones, una sección acerca de actitudes y motivación, y una sección de estrategias de aprendizaje. La primera sección consiste en 31 ítems que evalúan las metas de los estudiantes y las creencias de valor para un curso, sus creencias acerca de su habilidad para tener éxito en un curso y la ansiedad acerca de las pruebas en un curso. La segunda sección incluye 31 ítems concernientes al uso de las diferentes estrategias cognitivas y metacognitivas. Además, esta sección incluye 19 ítems referente a las estrategias de gestión de los diferentes recursos de los estudiantes. Los 81 ítems en una escala Likert de 7 puntos (1 = no es cierto en mí, 7 = cierto en mí).

La prueba de razonamiento lógico (TOLT –Test of Logical Thinking) que evalúa cinco habilidades de razonamiento; tienen relevancia para la enseñanza de las ciencias como las matemáticas y la física; es un examen de opción múltiple, que brinda múltiples justificaciones para la respuesta seleccionada, la prueba TOLT comprende en total diez ítems, considerando dos ítems de cada uno de los siguientes tipos de razonamiento: razonamiento proporcional, el razonamiento probabilístico, el control de variables, el razonamiento correlacional, y el razonamiento combinatorio (Tobin & Capie, 1984). La puntuación obtenida oscila entre 0 y 10. Se ha usado una versión en español validada por Acevedo y Oliva (1995). Este instrumento cuyo fin es medir la capacidad cognitiva de los participantes, permite clasificar a los sujetos en tres niveles de pensamiento: concreto, transición y formal.

El tercer instrumento fue un test con 20 preguntas el cual se utilizó como pre-test y post-test con el fin de medir el desempeño académico de los estudiantes en la traducción de problemas verbales a lenguaje algebraico. Los ítems fueron tomados de diferentes fuentes (Küchemann, 1978; Arya & Lardner, 2002; Baldor, 2008).

3.3 Procedimiento

En primer lugar, el profesor aplicó el pre-test a los estudiantes de grupo quienes tuvieron 40 minutos para responderlo. Al día siguiente, en una sesión, de duración igual a la anterior, los alumnos contestaron la prueba de razonamiento lógico (TOLT). En segundo lugar, el maestro aplicó a los estudiantes el cuestionario de evaluación metacognitiva (MAI). Posteriormente, el maestro explicó a los estudiantes los beneficios que las estrategias metacognitivas podrían brindarles para su aprendizaje si las sabían utilizar apropiadamente y conocían en qué consistían cada una de ellas. En tercer lugar, cada estudiante recibió una hoja de trabajo con varios problemas verbales impresos, los cuales fueron traducidos a lenguaje algebraico de forma individual durante 30 minutos. Después, se reunieron en pares para compartir y discutir sus respuestas.

Posteriormente, el profesor organizaba una discusión grupal invitando a sus alumnos a escribir en el pizarrón la expresión algebraica o ecuación de los problemas. Si la respuesta era correcta, no era necesaria la intervención del experto. En caso contrario, el experto los invitaba a reflexionar mediante un interrogatorio verbal hasta llegar a la solución correcta.

Finalmente, los estudiantes registraban sus reflexiones en la parte posterior de la hoja de actividades para ser entregadas al final de cada sesión. Para esto, el profesor les indicó que se preguntaran a sí mismos: ¿qué habían aprendido en esa sesión?, ¿qué dificultades tuvieron en la traducción del lenguaje materno al lenguaje simbólico?, ¿en qué se habían errado para no volver a incurrir en el mismo error?, ¿qué estrategias cognitivas y metacognitivas utilizaron para traducir los problemas verbales a lenguaje algebraico?, ¿cómo se sentían después de haber realizado la actividad?

Cabe mencionar que el grupo completó un conjunto de diez actividades en el aula, las cuales contienen varios ejercicios (véase anexo E), dosificadas semanalmente. Todas estas actividades forman parte de las consignas de las planificaciones de la SEP (2012) referentes al eje sentido numérico y pensamiento algebraico. Asimismo, el profesor proporcionaba retroalimentación sobre las estrategias cognitivas, metacognitivas y de autorregulación para reforzar el aprendizaje de algunos participantes.

CAPÍTULO IV: ANÁLISIS Y RESULTADOS

La mayoría de los 18 participantes en este estudio de investigación mostraron una actitud positiva hacia el aprendizaje del álgebra, en específico, en la traducción algebraica de problemas verbales. En el trabajo individual, en pares y en plenaria, generalmente se sintieron motivados para participar, compartir, opinar y discutir sus puntos de vista. Logrando casi siempre obtener la solución en plenaria.

Como resultado del trabajo durante seis meses de la aplicación de esta metodología del aprendizaje autorregulado, en sus tres fases: planificación, desempeño y, auto-reflexión; el desempeño de la mayoría de los estudiantes fue mejorando significativamente, ya que en esta intervención didáctica se diseñaron actividades que incluían problemas verbales y, con base en ellos, los estudiantes tenían que traducirlos a una expresión algebraica o ecuación de primer grado, enteras y fraccionarias, sistemas de ecuaciones en dos variables y ecuaciones de segundo grado que los explicara.

En la fase de planificación hay dos categorías distintivas, pero estrechamente vinculadas: el análisis de tareas y las creencias de auto-motivación. Un formulario clave del análisis de tareas implica el establecimiento de metas. Durante las actividades desarrolladas, los estudiantes aplicaron la estrategia el establecimiento de metas que se refiere tanto a decidir sobre resultados específicos de aprendizaje o desempeño, como resolver un grupo de problemas, es decir, la meta fue traducir un conjunto de enunciados y problemas verbales escritos en lenguaje natural a lenguaje algebraico durante todas las sesiones de estudio, resultando automático para las últimas sesiones. Como resultado se obtuvieron evidencias de progreso a medida que los estudiantes perseguían y alcanzaban metas proximales en la traducción algebraica y, desarrollaron mayor autoeficacia e interés intrínseco en este tema.

Para que una habilidad sea dominada o realizada de manera óptima, los estudiantes necesitaron métodos apropiados para la tarea y el entorno. Por lo tanto, como resultado de las diversas y cambiantes condiciones intrapersonales, interpersonales y contextuales, los estudiantes debían ajustar continuamente sus metas y opciones de estrategias. En caso contrario, las estrategias de auto-regulación eran de poco valor si los estudiantes no se podían motivar ellos mismos para usarlas.

Asimismo, la planificación y selección de estrategias requiere ajustes cíclicos debido a fluctuaciones en los componentes personales, conductuales y ambientales. Ninguna estrategia de autorregulación funcionó igualmente bien para todas los estudiantes, y pocas estrategias funcionaron de manera óptima para un estudiante en todas las tareas u ocasiones. A medida que se desarrolla una habilidad, la efectividad de una estrategia de adquisición a menudo se reduce al punto en que otra estrategia se hace necesaria

Las creencias de autoeficacia influyeron en el establecimiento de metas de la siguiente manera: los estudiantes más capaces eran los que establecían metas más altas y se comprometían firmemente a seguir esas metas.

En la fase de desempeño, los procesos de autocontrol, como la auto-instrucción, la imaginación, la atención enfocada las estrategias de tarea, ayudaron a los estudiantes a centrarse en la tarea y a optimizar su esfuerzo. El método más utilizado fue la auto-instrucción que consistía en describir abiertamente o encubiertamente cómo se podía proceder mientras se ejecutaba una tarea, cómo se traducía un problema verbal a lenguaje algebraico, como se resolvía un problema de álgebra, o se memorizaba una fórmula algebraica, y la investigación mostró que tales verbalizaciones lograron mejorar el aprendizaje de los estudiantes.

La imaginería o la formación de imágenes mentales fue otra técnica de autocontrol utilizada por los estudiantes, en el momento de compartir la solución en plenaria, para asistir en la codificación de los problemas verbales y mejorar el desempeño.

Para mejorar su control atencional los propios estudiantes creaban un ambiente inteligente, de manera que, sabían concentrarse y eliminar otros procesos encubiertos y eventos externos la cual era una estrategia esencial para un estudio efectivo.

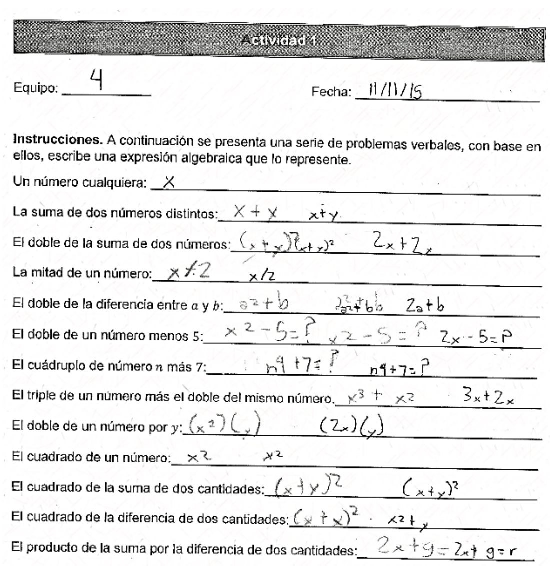
Algunos estudiantes, a pesar de su auto-retroalimentación sobre la traducción de algunos problemas verbales, malinterpretaban o distorsionaban sus acciones o traducciones algebraicas en actividades similares y no podían corregirlos apropiadamente, posiblemente porque no habían adquirido la estrategia de auto-observación. Ésta se refiere al seguimiento de un estudiante de aspectos específicos de su propio desempeño, las condiciones que lo rodean y los efectos que produce.

En la fase de auto-reflexión, cuando algunos estudiantes recibían una evaluación negativa por su desempeño en la traducción algebraica de un problema verbal, eran más propensos a atribuirlo a un esfuerzo insuficiente o una estrategia de tarea deficiente que los que dudan de sí mismos. Esto podría ser porque los primeros habían logrado un cierto grado de auto-eficacia. Alternativamente, los estudiantes quienes sentían que la evaluación se producía durante circunstancias atípicas, podría atribuirlo a mala suerte en lugar de incapacidad.

Los estudiantes que planeaban usar una estrategia específica durante la planificación e implementar su uso durante el desempeño tuvieron más probabilidades de atribuir fallas a esa estrategia en lugar de una capacidad baja, lo cual puede ser un devastador personal. Debido a que las estrategias son percibidas como causas corregibles, las atribuciones a su uso protegen contra las auto-reacciones negativas y fomentan un curso estratégico adaptativo de acción subsiguiente.

Finalmente, la motivación de la mayoría de los estudiantes no provenía de las propias metas, sino más bien de las reacciones auto-evaluativas a los resultados del comportamiento. Se sentían motivados al compartir sus traducciones algebraicas con sus pares, corrigiéndose entre ellos mismos, de modo que, se sentían más seguros de sí mismos para exponer sus respuestas en plenaria.

A continuación, cito algunas de las reflexiones de los estudiantes que participaron en este esta investigación de las diez actividades aplicadas siguiendo las tres fases cíclicas del aprendizaje autorregulado y el método cartesiano:



Actividad 1

Equipo: 4 Fecha: 11/11/15

Instrucciones. A continuación se presenta una serie de problemas verbales, con base en ellos, escribe una expresión algebraica que lo represente.

Un número cualquiera: X

La suma de dos números distintos: X + X x+y

El doble de la suma de dos números: (x + x)²(x+x)² 2x+2x

La mitad de un número: ~~x÷2~~ x/2

El doble de la diferencia entre *a* y *b*: a² + b a²+b b 2a+b

El doble de un número menos 5: x² − 5 = ? x2 − 5 = ? 2x − 5 = P

El cuádruplo de número *n* más 7: n4 + 7 = ? n4+7=?

El triple de un número más el doble del mismo número. x³ + x² 3x+2x

El doble de un número por *y*: (x²)(y) (2x)(y)

El cuadrado de un número: x² x²

El cuadrado de la suma de dos cantidades: (x + y)² (x+y)²

El cuadrado de la diferencia de dos cantidades: (x + x)² x²+y

El producto de la suma por la diferencia de dos cantidades: 2x + 9 = 2x+ 9 = r

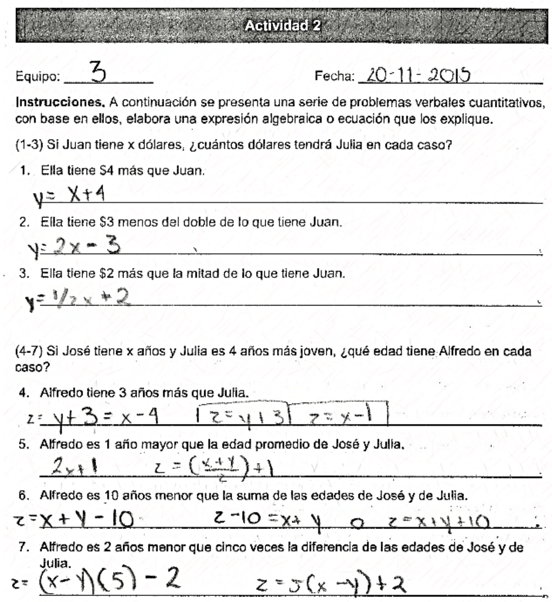
Figura 3: Actividad 1.

“Lo que aclaré o comprendí a no confundir el doble de un número y el cuadrado de un número”

“No entendía que muy bien que a^2 no es lo mismo que $2a$, y ya entendí la diferencia entre a^2 y $2a$ es que a^2 se multiplica y $2a$ se suma”

“Me ayudó a aclarar la diferencia de $a\ y\ b$”

“No sabía que la suma de dos números distintos se representa como: x + y”



Actividad 2

Equipo: 3 Fecha: 20-11-2015

Instrucciones. A continuación se presenta una serie de problemas verbales cuantitativos, con base en ellos, elabora una expresión algebraica o ecuación que los explique.

(1-3) Si Juan tiene x dólares, ¿cuántos dólares tendrá Julia en cada caso?

1. Ella tiene $4 más que Juan.

$y = x + 4$

2. Ella tiene $3 menos del doble de lo que tiene Juan.

$y = 2x - 3$

3. Ella tiene $2 más que la mitad de lo que tiene Juan.

$y = 1/2x + 2$

(4-7) Si José tiene x años y Julia es 4 años más joven, ¿qué edad tiene Alfredo en cada caso?

4. Alfredo tiene 3 años más que Julia.

$z = y + 3 = x - 4$ $\boxed{z = y + 3}$ $\boxed{z = x - 1}$

5. Alfredo es 1 año mayor que la edad promedio de José y Julia.

$2x + 1$ $z = \left(\frac{x+y}{2}\right) + 1$

6. Alfredo es 10 años menor que la suma de las edades de José y de Julia.

$z = x + y - 10$ $z - 10 = x + y$ o $z = x + y + 10$

7. Alfredo es 2 años menor que cinco veces la diferencia de las edades de José y de Julia.

$z = (x - y)(5) - 2$ $z = 5(x - y) + 2$

Figura 4: Actividad 2

“Aprendí que, al cambiar de signos, al pasarlos antes de la igualdad cambia el signo”

“Aprendí a resolver problemas y elaborar una ecuación que las explicara”

“Los ejercicios que se me facilitaron fueron los de arriba ya que eran los más fáciles y los que se me complicaron fueron los ejercicios de abajo ya que me confundí en los signos”

En la actividad 3:

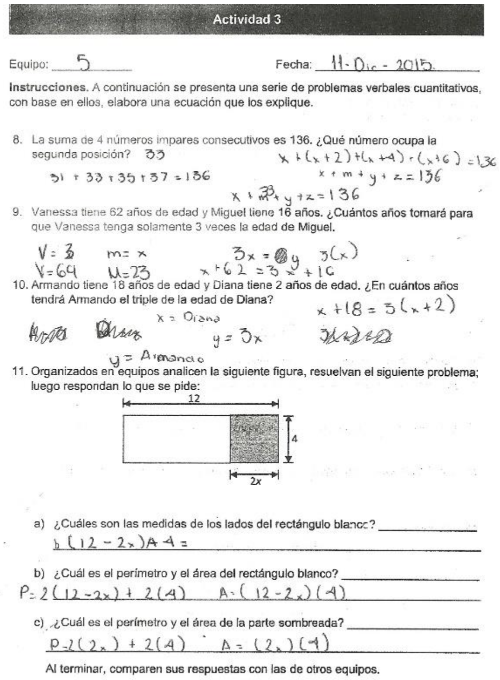
“Lo haré en la próxima ocasión, sería razonar mejor la situación y expresarlo en forma algebraica”

“Estuve correcta en la pregunta 1, aprendí que todo no es número” “También, aprendí a poner más atención porque confundo los valores”

“Aprendí a analizar más detenidamente”

“Estuve incorrecto, pero entendí como sacar el perímetro”

“No estuve bien, pero cuando pasé al pizarrón estuve bien, no debo poner tantas incógnitas”



Actividad 3

Equipo: 5 Fecha: 11-Dic-2015

Instrucciones. A continuación se presenta una serie de problemas verbales cuantitativos, con base en ellos, elabora una ecuación que los explique.

8. La suma de 4 números impares consecutivos es 136. ¿Qué número ocupa la segunda posición? 33

$x+(x+2)+(x+4)+(x+6)=136$

$31+33+35+37=136$

9. Vanessa tiene 62 años de edad y Miguel tiene 16 años. ¿Cuántos años tomará para que Vanessa tenga solamente 3 veces la edad de Miguel.

10. Armando tiene 18 años de edad y Diana tiene 2 años de edad. ¿En cuántos años tendrá Armando el triple de la edad de Diana?

$x = \text{Diana}$ $y = 3x$ $y = \text{Armando}$ $x+18=3(x+2)$

11. Organizados en equipos analicen la siguiente figura, resuelvan el siguiente problema; luego respondan lo que se pide:

a) ¿Cuáles son las medidas de los lados del rectángulo blanco?

$b\ (12-2x)\ A\ 4 =$

b) ¿Cuál es el perímetro y el área del rectángulo blanco?

$P = 2(12-2x)+2(4)$ $A = (12-2x)(4)$

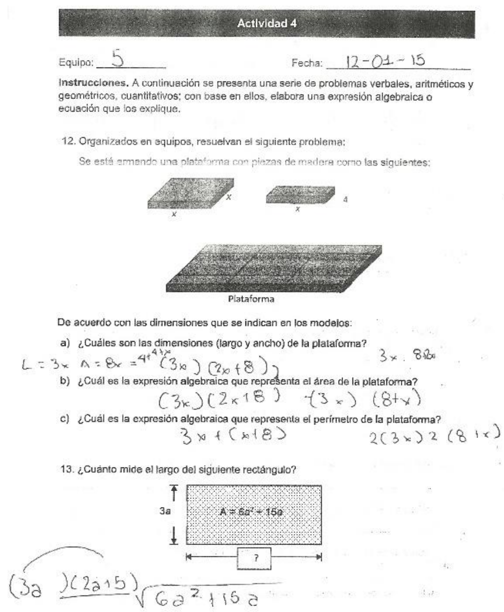
c) ¿Cuál es el perímetro y el área de la parte sombreada?

$P = 2(2x)+2(4)$ $A = (2x)(4)$

Al terminar, comparen sus respuestas con las de otros equipos.

Figura 5: Actividad 3.

En la actividad 4.



Actividad 4

Equipo: 5 Fecha: 12-01-15

Instrucciones. A continuación se presenta una serie de problemas verbales, aritméticos y geométricos, cuantitativos; con base en ellos, elabora una expresión algebraica o ecuación que los explique.

12. Organizados en equipos, resuelvan el siguiente problema:

Se está armando una plataforma con piezas de madera como las siguientes:

Plataforma

De acuerdo con las dimensiones que se indican en los modelos:

a) ¿Cuáles son las dimensiones (largo y ancho) de la plataforma?

b) ¿Cuál es la expresión algebraica que representa el área de la plataforma?

$(3x)(2x+8)$ $(3x)(8+x)$

c) ¿Cuál es la expresión algebraica que representa el perímetro de la plataforma?

$3x+(x+8)$ $2(3x)2(8+x)$

13. ¿Cuánto mide el largo del siguiente rectángulo?

$A = 6a^2 + 15a$

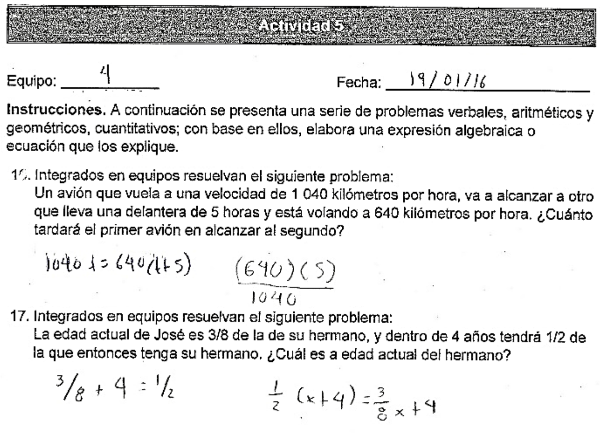
$(3a)(2a+5)$

Figura 6: Actividad 4.

“Es más fácil cuando se analiza con detenimiento. Estuve bien en todo”

“No me equivoqué en ninguna pregunta, pero me confundí un poco en el área del rectángulo, pero ya se cómo se puede sacar la medida del largo”

“Estuvimos bien, utilizamos la factorización y binomios. Hice bien la resolución y fueron fáciles los problemas, sólo tenías que usar la lógica”



Actividad 5

Equipo: 4 Fecha: 19/01/16

Instrucciones. A continuación se presenta una serie de problemas verbales, aritméticos y geométricos, cuantitativos; con base en ellos, elabora una expresión algebraica o ecuación que los explique.

16. Integrados en equipos resuelvan el siguiente problema:
Un avión que vuela a una velocidad de 1 040 kilómetros por hora, va a alcanzar a otro que lleva una delantera de 5 horas y está volando a 640 kilómetros por hora. ¿Cuánto tardará el primer avión en alcanzar al segundo?

1040 t = 640(t+5) $\frac{(640)(5)}{1040}$

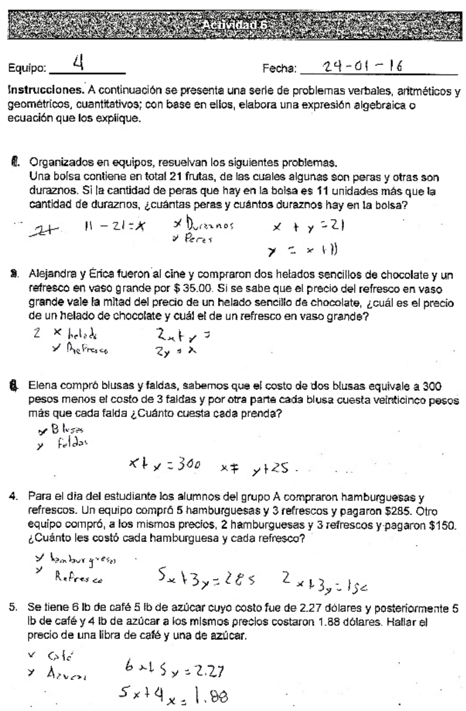
17. Integrados en equipos resuelvan el siguiente problema:
La edad actual de José es 3/8 de la de su hermano, y dentro de 4 años tendrá 1/2 de la que entonces tenga su hermano. ¿Cuál es a edad actual del hermano?

$3/8 + 4 = 1/2$ $\frac{1}{2}(x+4) = \frac{3}{8}x + 4$

Figura 7: Actividad 5.

“La ecuación para resolver los problemas no estuvieron muy difíciles, el primero fue el más fácil, pero el de los medios se me dificultó más, buscaré otras maneras de resolverlo”

“En la primera me equivoque por no colocar las variables de t. pero el procedimiento estuvo bien; me costó el segundo, Paola me lo explicó, pero sí se me dificultó”



Actividad 6

Equipo: 4 Fecha: 24-01-16

Instrucciones. A continuación se presenta una serie de problemas verbales, aritméticos y geométricos, cuantitativos; con base en ellos, elabora una expresión algebraica o ecuación que los explique.

1. Organizados en equipos, resuelvan los siguientes problemas.
Una bolsa contiene en total 21 frutas, de las cuales algunas son peras y otras son duraznos. Si la cantidad de peras que hay en la bolsa es 11 unidades más que la cantidad de duraznos, ¿cuántas peras y cuántos duraznos hay en la bolsa?

~~21~~ 11 − 21 = x x Duraznos y Peras $x + y = 21$ $y = x + 11$

2. Alejandra y Érica fueron al cine y compraron dos helados sencillos de chocolate y un refresco en vaso grande por $ 35.00. Si se sabe que el precio del refresco en vaso grande vale la mitad del precio de un helado sencillo de chocolate, ¿cuál es el precio de un helado de chocolate y cuál el de un refresco en vaso grande?

2 x helado y Refresco $2x + y =$ $2y = x$

3. Elena compró blusas y faldas, sabemos que el costo de dos blusas equivale a 300 pesos menos el costo de 3 faldas y por otra parte cada blusa cuesta veinticinco pesos más que cada falda ¿Cuánto cuesta cada prenda?

x Blusas y Faldas

$x + y = 300$ $x = y + 25$

4. Para el día del estudiante los alumnos del grupo A compraron hamburguesas y refrescos. Un equipo compró 5 hamburguesas y 3 refrescos y pagaron $285. Otro equipo compró, a los mismos precios, 2 hamburguesas y 3 refrescos y pagaron $150. ¿Cuánto les costó cada hamburguesa y cada refresco?

x hamburguesa y Refresco $5x + 3y = 285$ $2x + 3y = 150$

5. Se tiene 6 lb de café 5 lb de azúcar cuyo costo fue de 2.27 dólares y posteriormente 5 lb de café y 4 lb de azúcar a los mismos precios costaron 1.88 dólares. Hallar el precio de una libra de café y una de azúcar.

x Café y Azúcar $6x + 5y = 2.27$ $5x + 4x = 1.88$

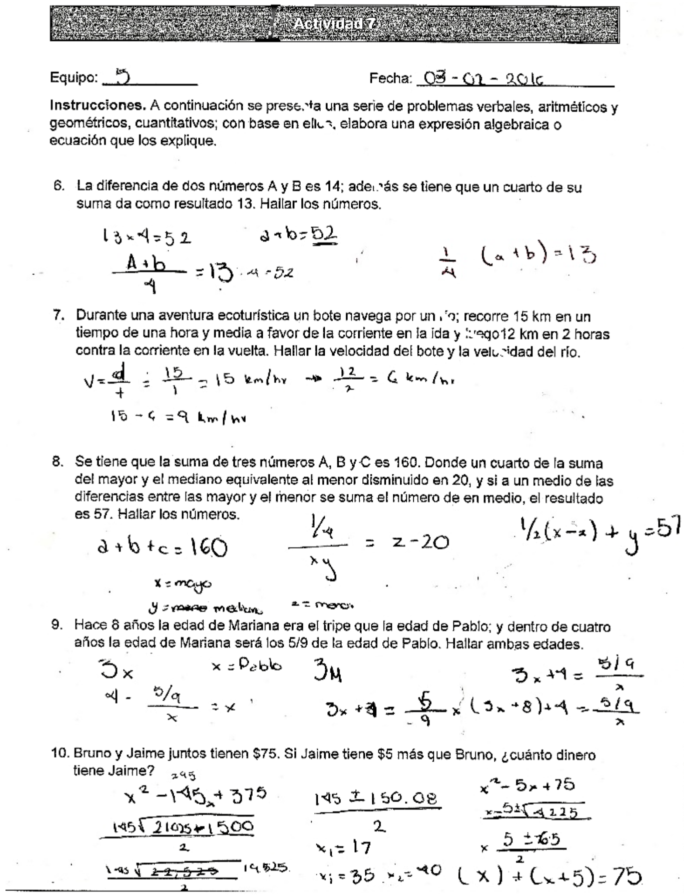
Figura 8: Actividad 6.

“Esto es más sencillo, siempre y cuando nos den una relación de diferencia o similitud entre los valores establecidos”

”Debo hacerlas, y debo emplear o mejorar mis técnicas”

“Aquí aprendí las nuevas fórmulas ya que no me acordaba bien cómo se hacían”

“Se necesita estudiar mucho y usar las simultáneas”



Actividad 7

Equipo: 5 Fecha: 03 - 02 - 2016

Instrucciones. A continuación se presenta una serie de problemas verbales, aritméticos y geométricos, cuantitativos; con base en ellos, elabora una expresión algebraica o ecuación que los explique.

6. La diferencia de dos números A y B es 14; además se tiene que un cuarto de su suma da como resultado 13. Hallar los números.

$13 \times 4 = 52$ $a + b = 52$ $\frac{A+b}{4} = 13$ $\frac{1}{4}(a+b) = 13$

7. Durante una aventura ecoturística un bote navega por un río; recorre 15 km en un tiempo de una hora y media a favor de la corriente en la ida y luego 12 km en 2 horas contra la corriente en la vuelta. Hallar la velocidad del bote y la velocidad del río.

$v = \frac{d}{t} = \frac{15}{1} = 15$ km/hr $\rightarrow \frac{12}{2} = 6$ km/hr

$15 - 6 = 9$ km/hr

8. Se tiene que la suma de tres números A, B y C es 160. Donde un cuarto de la suma del mayor y el mediano equivalente al menor disminuido en 20, y si a un medio de las diferencias entre las mayor y el menor se suma el número de en medio, el resultado es 57. Hallar los números.

$a + b + c = 160$ $\frac{1/4}{xy} = z - 20$ $1/2(x - z) + y = 57$

x = mayor

y = mediano

z = menor

9. Hace 8 años la edad de Mariana era el tripe que la edad de Pablo; y dentro de cuatro años la edad de Mariana será los 5/9 de la edad de Pablo. Hallar ambas edades.

$3x$ x = Pablo $3x + 4 = \frac{5/9}{x}$

$(3x + 8) + 4 = \frac{5/9}{x}$

10. Bruno y Jaime juntos tienen \$75. Si Jaime tiene \$5 más que Bruno, ¿cuánto dinero tiene Jaime?

$x^2 - 145x + 375$ $\frac{145 \pm 150.08}{2}$ $x^2 - 5x + 75$

$x_1 = 17$ $x_1 = 35$ $x_2 = 40$

$(x) + (x + 5) = 75$

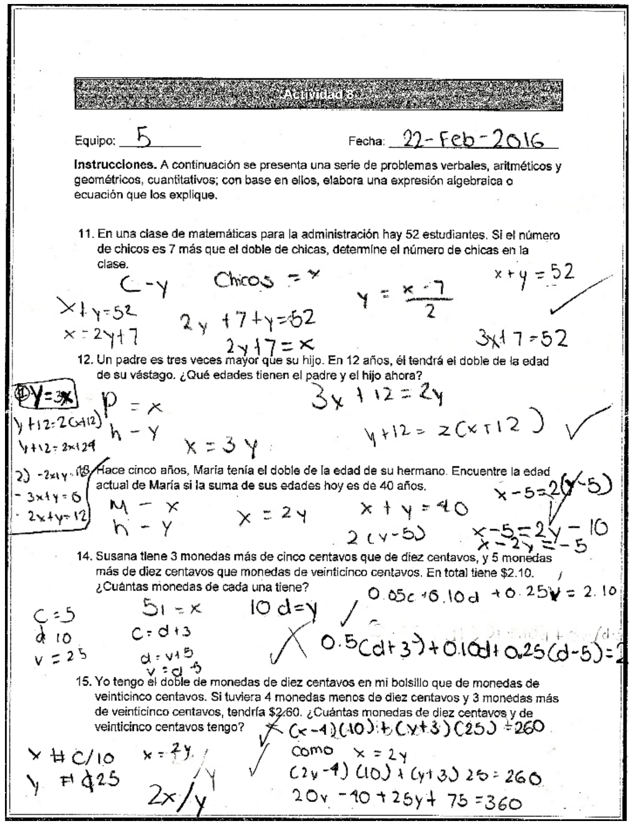
Figura 9: Actividad 7.

“Ya estoy mejorando mis técnicas de plantear fórmula, pero me falta aprender muchas cosas. Necesito mejorar cómo acomodar los factores y hacer las 2 fórmulas en todos los problemas no en algunos”

“En la primera ecuación no tuve problemas, tampoco en la segunda. En las últimas tres no pude resolverlas, pero después obtuve las ecuaciones de las últimas y pude entender mejor”

“Descubrí que tengo que leer mejor el problema para expresarlo algebraicamente y para llegar al resultado correcto y que las letras las debo escribir mejor”

“En esta ocasión se dificultó el segundo problema, pero lo demás no ya que solo hay que expresarlo algebraicamente y antes lo que hacía era resolverlo aritméticamente, me ayuda a leer claro y lento las situaciones para poder expresarla”



Actividad 8

Equipo: 5 Fecha: 22-Feb-2016

Instrucciones. A continuación se presenta una serie de problemas verbales, aritméticos y geométricos, cuantitativos; con base en ellos, elabora una expresión algebraica o ecuación que los explique.

11. En una clase de matemáticas para la administración hay 52 estudiantes. Si el número de chicos es 7 más que el doble de chicas, determine el número de chicas en la clase.

12. Un padre es tres veces mayor que su hijo. En 12 años, él tendrá el doble de la edad de su vástago. ¿Qué edades tienen el padre y el hijo ahora?

13. Hace cinco años, María tenía el doble de la edad de su hermano. Encuentre la edad actual de María si la suma de sus edades hoy es de 40 años.

14. Susana tiene 3 monedas más de cinco centavos que de diez centavos, y 5 monedas más de diez centavos que monedas de veinticinco centavos. En total tiene $2.10. ¿Cuántas monedas de cada una tiene?

15. Yo tengo el doble de monedas de diez centavos en mi bolsillo que de monedas de veinticinco centavos. Si tuviera 4 monedas menos de diez centavos y 3 monedas más de veinticinco centavos, tendría $2.60. ¿Cuántas monedas de diez centavos y de veinticinco centavos tengo?

Figura 10: Actividad 8.

“En este caso se dificultó un poco en la situación de los centavos, pero en los demás no; lo único que tengo que mejorar es la simplificación. Tengo que aprender a plantear mejor una ecuación y después simplificarla. Estoy consciente de que a veces se me complican algunas situaciones, pero las pondré en práctica; lo que hago al principio es leer y reunir datos, después los expreso y al final busco la ecuación. El 14 y el 15 fueron los que más se me dificultaron”

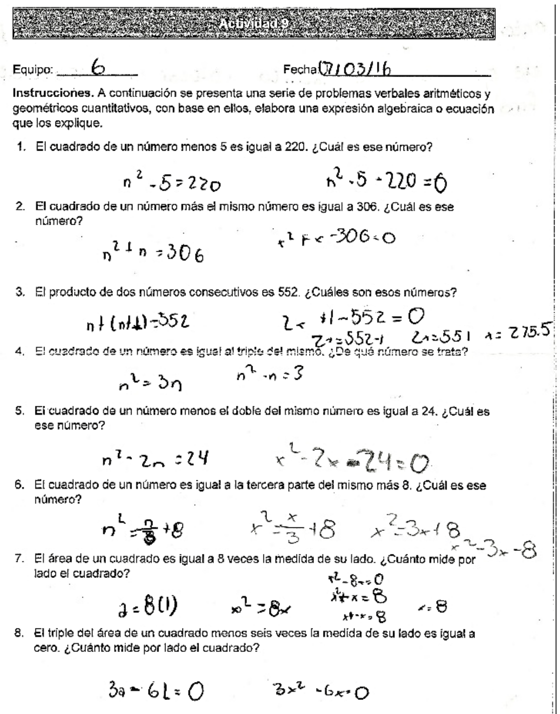
“Paro y vuelvo a leer el problema cuando no entiendo”

“Aprendí a expresar una ecuación, del lenguaje natural al lenguaje algebraico”

“Pues la clave es leer y ordenar todos los elementos, pero aún se me dificulta bastante. Le intento de una y otra, pero a veces no me sale… y tengo que leer y a la de 1000 y medio sale, pero le hace falta algo. Si he estado aprendiendo poco a poco, pero voy aprendiendo”

En la actividad 9, algunos estudiantes mencionaron sus reflexiones muy parecidas a las de otros estudiantes:

“Esta vez tuve la mayoría correctas, solo me equivoqué en una. Siento que voy mejorando. Y espero tener más o todas bien para la próxima”


Actividad 9

Equipo: 6 Fecha: 07/03/16

Instrucciones. A continuación se presenta una serie de problemas verbales aritméticos y geométricos cuantitativos, con base en ellos, elabora una expresión algebraica o ecuación que los explique.

1. El cuadrado de un número menos 5 es igual a 220. ¿Cuál es ese número?

   $n^2 - 5 = 220$ $n^2 - 5 - 220 = 0$

2. El cuadrado de un número más el mismo número es igual a 306. ¿Cuál es ese número?

   $n^2 + n = 306$ $x^2 + x - 306 = 0$

3. El producto de dos números consecutivos es 552. ¿Cuáles son esos números?

   $n + (n+1) = 552$ $2x + 1 - 552 = 0$ $2x = 552 - 1$ $2x = 551$ $x = 275.5$

4. El cuadrado de un número es igual al triple del mismo. ¿De qué número se trata?

   $n^2 = 3n$ $n^2 - n = 3$

5. El cuadrado de un número menos el doble del mismo número es igual a 24. ¿Cuál es ese número?

   $n^2 - 2n = 24$ $x^2 - 2x - 24 = 0$

6. El cuadrado de un número es igual a la tercera parte del mismo más 8. ¿Cuál es ese número?

   $n^2 = \frac{n}{3} + 8$ $x^2 = \frac{x}{3} + 8$ $x^2 = 3x + 8$ $x^2 - 3x - 8$

7. El área de un cuadrado es igual a 8 veces la medida de su lado. ¿Cuánto mide por lado el cuadrado?

   $a = 8(l)$ $x^2 = 8x$ $x^2 - 8x = 0$ $x^2 + x = 8$ $x^2 + x = 8$ $x = 8$

8. El triple del área de un cuadrado menos seis veces la medida de su lado es igual a cero. ¿Cuánto mide por lado el cuadrado?

   $3a - 6l = 0$ $3x^2 - 6x = 0$

Figura 11: Actividad 9.

“Los ejercicios se me facilitaron más porque ya le entendí mejor a la ecuación cuadrática, además de que se me facilitó colocar el resultado final”

“Ya es mucho más sencillo ya entiendo casi al 100% las cuadráticas y ya las resuelvo muy bien…”

“Cambiar de estrategia porque se me dificultó mucho”

En la actividad 10:

“Aprendí algo que no sabía y mi compañera me explicó”

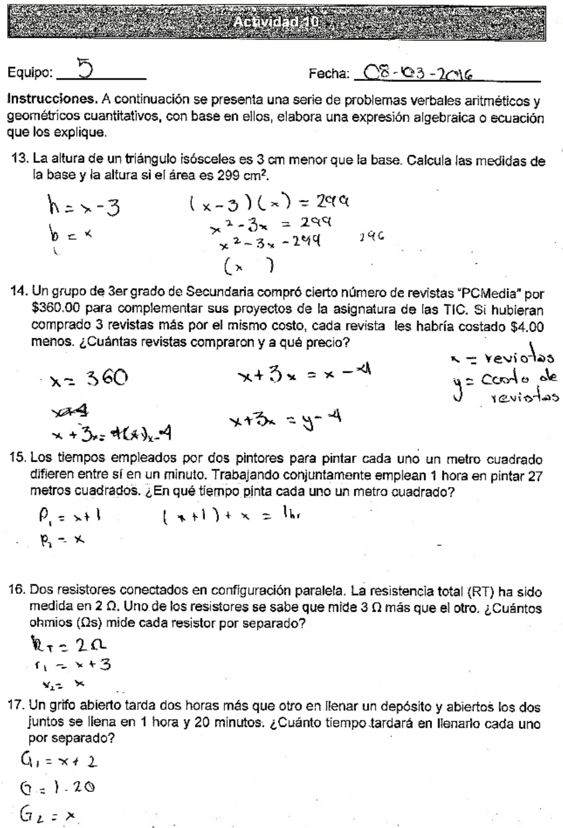
“Estuve incorrecta y ya capté como identificar un binomio, para el siguientes o los siguientes problemas prestaré más atención”

“Estuve en la primera y aprendí a manejar los binomios y para la próxima cambiar mi método”

“Esta práctica me ayudó a corregir mis errores que no sabía. Cuando tenía la 1s correctas me ponía feliz porque demostré que estoy aprendiendo poco a poco y de mis errores me ayuda a “aprender de ellos para no volverme a equivocar”

“¿Qué aprendí? A expresar y mejorar expresiones algebraicas, basado en una situación, y a usar las incógnitas en cada expresión”

“Necesito aprender más con este tipo de problemas porque se me dificulta demasiado resolverlos”



Actividad 10

Equipo: 5 Fecha: 08-03-2016

Instrucciones. A continuación se presenta una serie de problemas verbales aritméticos y geométricos cuantitativos, con base en ellos, elabora una expresión algebraica o ecuación que los explique.

13. La altura de un triángulo isósceles es 3 cm menor que la base. Calcula las medidas de la base y la altura si el área es 299 cm².

$h = x - 3$ $(x-3)(x) = 299$

$b = x$ $x^2 - 3x = 299$

$x^2 - 3x - 299$ 296

$(x \quad)$

14. Un grupo de 3er grado de Secundaria compró cierto número de revistas "PCMedia" por $360.00 para complementar sus proyectos de la asignatura de las TIC. Si hubieran comprado 3 revistas más por el mismo costo, cada revista les habría costado $4.00 menos. ¿Cuántas revistas compraron y a qué precio?

x = revistas

y = costo de revistas

$x = 360$ $x + 3x = x - 4$

~~x-4~~ $x + 3x = y - 4$

$x + 3x = 4(x)x - 4$

15. Los tiempos empleados por dos pintores para pintar cada uno un metro cuadrado difieren entre sí en un minuto. Trabajando conjuntamente emplean 1 hora en pintar 27 metros cuadrados. ¿En qué tiempo pinta cada uno un metro cuadrado?

$P_1 = x + 1$ $(x+1) + x = 1hr$

$P_2 = x$

16. Dos resistores conectados en configuración paralela. La resistencia total (RT) ha sido medida en 2 Ω. Uno de los resistores se sabe que mide 3 Ω más que el otro. ¿Cuántos ohmios (Ωs) mide cada resistor por separado?

$R_T = 2\Omega$

$r_1 = x + 3$

$r_2 = x$

17. Un grifo abierto tarda dos horas más que otro en llenar un depósito y abiertos los dos juntos se llena en 1 hora y 20 minutos. ¿Cuánto tiempo tardará en llenarlo cada uno por separado?

$G_1 = x + 2$

$G = 1.20$

$G_2 = x$

Figura 12: Actividad 10.

Cabe mencionar que la reflexión de cada estudiante fue registrada en la parte posterior de cada actividad después de concluida la sesión.

4.1 Relación entre el MAI y el test de álgebra.

La primera pregunta de investigación de este estudio hace referencia a las relaciones entre la traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico de problemas verbales y los componentes de la metacognición y el aprendizaje autorregulado. Los resultados fueron en general como se esperaban. La Tabla 5 muestra las correlaciones de orden cero de los 20 ítems del post-test y las variables metacognitivas del conocimiento sobre la cognición y la regulación del conocimiento. Se considera que los valores cercanos a 0 denotan una relación débil, mientras que los que se aproximaron a + 1 o a –1 indican una relación más fuerte. Como se puede observar, existe una correlación mayor que cero y menor que 1 entre los resultados del post-test y el uso de las estrategias metacognitivas. La regulación de la cognición –planeación (r = .51), evaluación (r = 0.50), monitoreo o control (r = 0.41), depuración (r = 0.39) y gestión de la información (r = 0.38). Paralelamente a estos hallazgos, los niveles más altos para el conocimiento de la cognición, corresponden a el conocimiento declarativo (r = 0.42), el conocimiento condicional (r = 0.32) y el conocimiento procedimental (r = 0.30).

	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
Estrategias de planeación	1							
Estrategias de monitoreo	0.9516	1						
Estrategias de evaluación	0.9218	0.9145	1					
Conocimiento declarativo	0.9470	0.9084	0.8552	1				
Conocimiento procedimental	0.8009	0.8387	0.7849	0.7392	1			
Conocimiento condicional	0.9304	0.9056	0.8380	0.9161	0.8858	1		
Estrategias de gestión de la Información	0.9341	0.9438	0.8472	0.9466	0.8116	0.9100	1	
Estrategias de depuración	0.9119	0.8682	0.8430	0.9466	0.7457	0.9178	0.8887	1
Post-test	0.5132	0.4133	0.5050	0.4228	0.3047	0.3281	0.3897	0.3959
Media	3.33	3.38	3.23	4.23	2.63	4.14	3.39	4.11

Tabla 5: Resumen estadístico y correlacional de variables metacognitivas y post-test.

4.2 Relación entre el MSLQ y el test de álgebra.

El MSLQ se centra en los aspectos de control y autorregulación de la metacognición, no en el aspecto del conocimiento. Existen tres procesos generales que conforman las actividades auto-reguladoras metacognitivas: la planificación, el monitoreo y la regulación. Las actividades de planificación, como la fijación de metas y el análisis de tareas, ayudan a activar o mejorar aspectos relevantes del conocimiento previo que facilitan la organización y la comprensión del material. Las actividades de monitoreo incluyen el seguimiento de la atención como se lee, y el auto-examen y el cuestionamiento: estos ayudan al alumno en la comprensión del material y la integración con el conocimiento previo. La regulación se refiere al ajuste fino y continuo de las actividades cognitivas individuales. Las actividades reguladoras se asumen para mejorar el desempeño ayudando a los estudiantes a revisar y corregir su comportamiento a medida que avanzan en una tarea.

Las doce estrategias de la autorregulación metacognitiva están correlacionadas con el post-test de álgebra r = 0.67942. Este resultado confirma que las estrategias autorregulación metacognitivas del MSLQ y las estrategias de la regulación del conocimiento del MAI fueron usadas por los participantes en la traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico de manera significativa. Los participantes opinaron que cuando se confundían acerca de algo que estaban leyendo para la clase de matemáticas, retrocedían y trataban de entenderlo; trataban de pensar a través de un tema y decidir lo que se suponía que debían aprender de él en lugar de simplemente leerlo al estudiar; si se confundían tomando notas en la clase, se aseguraban de resolverlo después y, si los materiales de matemáticas eran difíciles de entender, cambiaban la forma en que leían el material.

	1	*2*
Auto-Regulación Metacognitiva	1	
Post-test	0.67942	1

Tabla 6: Correlación entre las estrategias de autorregulación metacognitva y el test de álgebra.

4.3 Uso de estrategias metacognitivas y de aprendizaje autorregulado

La segunda pregunta de investigación concierne a qué estrategias metacognitivas y de aprendizaje autorregulado son las más utilizadas por los estudiantes de tercer grado de secundaria en la traducción de lenguaje natural al lenguaje algebraico de problemas verbales. Las categorías ordenadas de mayor a menor promedio se listan a continuación: el conocimiento declarativo, es el conocimiento de las habilidades, recursos intelectuales y habilidades como aprendiz ($\bar{X}$ = 4.23); conocimiento condicional, conocimiento que permiten conocer sobre cuándo y por qué utilizar los procedimientos de aprendizaje ($\bar{X}$ = 4.14); estrategias de depuración, estrategias utilizadas para corregir los errores de comprensión y rendimiento. ($\bar{X}$ = 4.11); gestión de la información ($\bar{X}$ = 3.39), son secuencias de estrategias y habilidades utilizadas para procesar la información de manera más eficiente (por ejemplo, organización, elaboración, resumen, enfoque selectivo); monitoreo utilizadas para la evaluación de su aprendizaje o uso de estrategias. ($\bar{X}$ = 3.38); planeación consiste en la planificación, establecimiento de metas y asignación de recursos antes del aprendizaje ($\bar{X}$ = 3.33); evaluación, análisis del rendimiento y efectividad de la estrategia después de un episodio de aprendizaje ($\bar{X}$ = 3.23); y el conocimiento procedimental ($\bar{X}$ = 2.63), conocimientos sobre cómo implementar procedimientos de aprendizaje (por ejemplo, estrategias).

De las estrategias con mayor media aritmética por categoría se mencionan a continuación: planeación – “Leo las instrucciones con cuidado antes de empezar una tarea.”; monitoreo – “Considero varias alternativas a un problema antes que conteste.”; evaluación – “Me pregunto si aprendí tanto como lo que podría haber aprendido una vez terminada una tarea.”; depuración – “Paro y vuelvo a leer cuando estoy confundido.”; estrategias de gestión de la información – “Voy más despacio cuando me encuentro con información importante.”;

conocimiento declarativo – “Aprendo más cuando estoy interesado en el tema.”; conocimiento procedimental – “Trato de utilizar estrategias que me han funcionado en el pasado.”; y conocimiento condicional – “Aprendo mejor cuando sé algo acerca del tema.”. La tabla 7, presenta el resumen estadístico (media y desviación estándar) de las 52 estrategias correspondientes al modelo metacognitivo, clasificadas en ocho categorías.

Asimismo, la media aritmética de cada estrategia en su mayoría se encuentra por arriba de 2.5 en una escala de 5. Es decir, los estudiantes tienden a entrelazar las estrategias metacognitivas con las estrategias cognitivas para la traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico.

Categoría	Estrategias	Media	SD
PL	Auto-regulo la velocidad de los tiempos al aprender para tener suficiente tiempo.	2.8	1.0
PL	Pienso lo que debo realmente aprender antes de empezar una tarea	2.7	0.8
PL	Establezco objetivos específicos antes de empezar una tarea.	3.1	1.2
PL	Me pregunto yo mismo acerca del material antes de empezar.	3.4	1.0
PL	Pienso en varias maneras de resolver un problema y escoger la mejor.	3.5	1.2
PL	Leo las instrucciones con cuidado antes de empezar una tarea.	3.8	0.8
PL	Organizo mi tiempo para lograr mejor mis objetivos.	3.1	1.3
MO	Me pregunto periódicamente si conozco mis objetivos.	3.3	1.1
MO	Considero varias alternativas a un problema antes que conteste.	3.5	0.9
MO	Me pregunto si he considerado todas las opciones al resolver un problema.	3.3	1.3
MO	Reviso periódicamente para ayudarme a comprender las relaciones importantes.	3.1	1.3
MO	Me doy cuenta analizando la utilidad de las estrategias mientras estudio.	3.2	1.2
MO	Me doy cuenta deteniéndome para verificar regularmente mi comprensión.	3.3	1.0
MO	Me pregunto yo mismo acerca de cuán bien lo hago mientras aprendo algo nuevo.	3.4	1.3
EV	Sé cuán bien lo hice una vez que termino un examen.	3.3	1.0
EV	Me pregunto si había una manera más fácil de hacer las cosas después de haber terminado una tarea.	3.0	1.3
EV	Resumo lo que he aprendido después de terminar.	2.9	1.1
EV	Me pregunto cuán bien logro mis objetivos una vez que he finalizado.	3.2	1.1
EV	Me pregunto si he considerado todas las opciones después de resolver un problema.	3.1	1.1
EV	Me pregunto si aprendí tanto como lo que podría haber aprendido una vez terminada una tarea.	3.4	0.9
DS	Solicito ayuda a otros cuando no comprendo algo.	3.5	0.9
DS	Cambio de estrategias cuando fallo al comprender.	3.6	1.2
DS	Reevalúo mis suposiciones cuando estoy confundido.	3.5	1.3
DS	Paro y vuelvo a leer sobre la nueva información que no es clara.	4.2	1.0
DS	Paro y vuelvo a leer cuando estoy confundido.	4.5	0.9
IMS	Voy más despacio cuando me encuentro con información importante.	3.9	1.1
IMS	Enfoco conscientemente mi atención en la información importante.	3.6	1.1

IMS	Me centro en el significado y el significado de la nueva información.	3.5	1.1
IMS	Creo mis propios ejemplos para hacer la información más significativa.	3.6	1.5
IMS	Hago dibujos o esquemas para ayudarme a comprender al aprender.	2.9	1.2
IMS	Trato de traducir la nueva información en mis propias palabras.	3.7	1.0
IMS	Utilizo la estructura organizativa del texto para ayudarme a aprender.	3.6	0.9
IMS	Me pregunto si lo que leo está relacionado con lo que yo ya sé.	3.7	1.1
IMS	Trato de romper estudiando abajo en pasos más pequeños.	2.9	1.3
IMS	Me centro en el significado general en lugar del significado detallado.	3.3	0.9
DK	Comprendo mis fortalezas y debilidades intelectuales.	3.4	0.9
DK	Sé qué clase de información es más importante aprender.	3.8	1.0
DK	Soy bueno en organizar información.	3.4	1.0
DK	Sé lo que el maestro espera que aprenda.	3.5	0.9
DK	Soy bueno en recordar información.	3.3	1.2
DK	Tengo control sobre cuán bien aprendo.	3.2	0.8
DK	Soy un buen juez de cuán bien comprendo algo.	3.2	1.1
DK	Aprendo más cuando estoy interesado en el tema.	4.2	0.8
PK	Trato de utilizar estrategias que han funcionado en el pasado.	3.8	1.1
PK	Tengo un propósito específico para cada estrategia que utilizo.	3.5	0.9
PK	Estoy consciente de qué estrategias utilizo cuando estudio.	3.5	1.3
PK	Me doy cuenta del uso de estrategias de aprendizaje útiles automáticamente.	3.0	1.3
CK	Aprendo mejor cuando sé algo acerca del tema.	4.5	0.6
CK	Utilizo diferentes estrategias de aprendizaje dependiendo de la situación.	3.0	1.1
CK	Puedo motivarme para aprender cuando lo necesito.	3.6	1.0
CK	Utilizo mis fortalezas intelectuales para compensar mis debilidades.	3.4	1.2
CK	Sé cuándo cada estrategia que utilizo será más efectiva.	3.5	1.2

Tabla 7: Estadística descriptivo general del MAI.

Además, se seleccionaron las diez estrategias metacognitivas más utilizadas por los estudiantes. Estas estrategias pertenecen a las diferentes categorías del modelo metacognitvo, planeación (PL), monitoreo (MO), evaluación (EV), gestión de la información (IMS), depuración (DS), conocimiento declarativo (DK), conocimiento procedimental (PK) y conocimiento condicional (CK). Éstas fueron ordenadas por la media aritmética y fueron enlistadas de la siguiente manera: «15. Aprendo mejor cuando sé algo acerca del tema» (CK), «52. Me detengo y vuelvo a leer cuando estoy confundido» (DS), «51. Me detengo y vuelvo a leer sobre la nueva información que no me es clara» (DS), "46. Aprendo más cuando estoy interesado en el tema» (DK), «9. Voy más despacio cuando me encuentro con información importante» (IMS). «42. Leo las instrucciones con cuidado antes de empezar una tarea» (P), «3. Trato de utilizar estrategias que han funcionado en el pasado» (PK), «10. Sé qué clase de información es más importante aprender» (DK), «39. Trato de traducir la nueva información en mis propias palabras» (IMS) y, «43. Me pregunto si lo que leo está relacionado con lo que yo ya sé» (IMS).

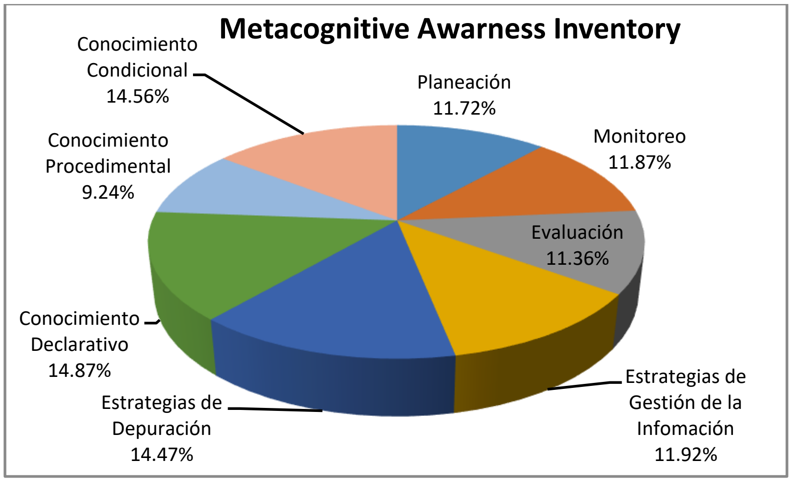


Figura 13: Componentes de la conciencia metacognitiva

4.4 El TOLT y su vinculación con el test algebraico

4.4.1 Prueba TOLT

Los resultados del test de razonamiento lógico (TOLT) muestran una puntuación media inicial de 2.778 y una final de 5.187. Teniendo en cuenta que la puntuación máxima en este test es de 10 puntos. Como se muestra en la tabla 8.

	TOLT-1	TOLT-2
Media	2.777	5.1875

Tabla 8: Medias aritméticas del TOLT inicial y final

Raviolo, Siracusa, Herbel, & Schnersch (2000) comprobaron que los resultados del TOLT tenían una correlación positiva con el rendimiento académico en dos áreas de conocimiento: Ciencias Naturales y Matemáticas. El TOLT mostraba ser un buen predictor del éxito de los estudiantes, pero no del fracaso, dado que todo alumno que obtenía un puntaje mayor a 5 aprobaba. En otras palabras, todo estudiante que obtuvo un puntaje igual o mayor que 5 en el TOLT obtuvo un porcentaje igual o mayor al 50% en los exámenes parciales considerados, para cada área en primera instancia.

Considerando lo anterior, en el pre-TOLT, la media alcanzada por los estudiantes representó que no podrían enfrentar exámenes de matemáticas con una puntuación satisfactoria, en este caso, para traducir problemas verbales del lenguaje natural al lenguaje algebraico. Sin embargo, después de haber aplicado la propuesta, los estudiantes lograron una media de 5.1875, es decir, la mayoría de los estudiantes, según Raviolo et al. (2000) estaban en condiciones para superar exitosamente cuestiones planteadas en matemáticas, en este caso, cuestiones planteadas en álgebra.

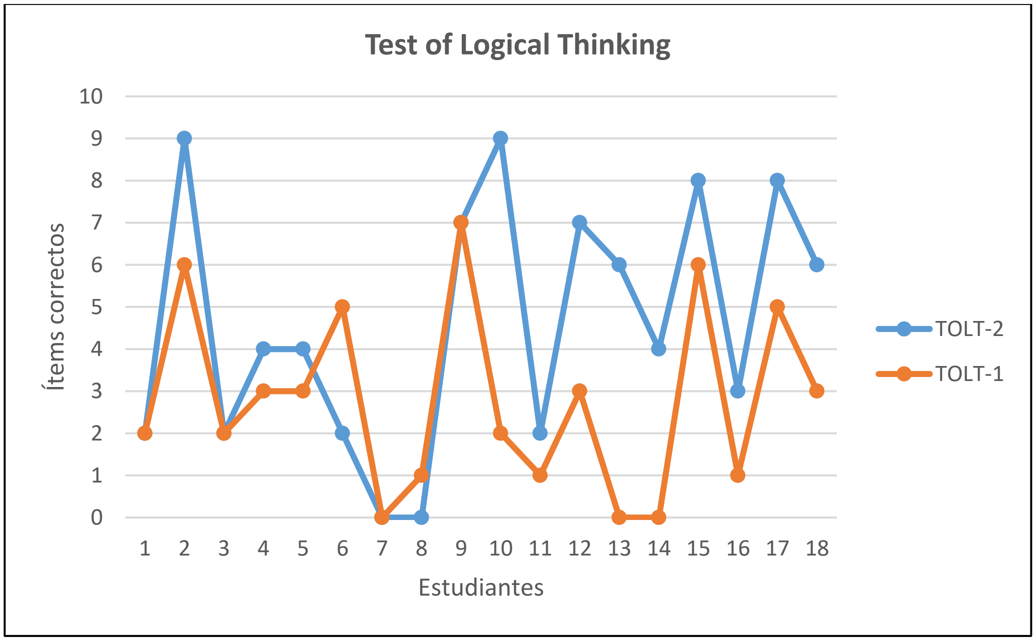


Figura 14: Comparativo de calificaciones entre TOLT-1 y TOLT-2

También estos resultados se pueden observar en la figura 4. Los resultados de la prueba TOLT-1 inicial aplicada para medir la capacidad cognitiva de los participantes revelaron que el 77.22% de ellos tenía pensamiento concreto; el 11.11%, pensamiento en transición, y solamente el 16.67% tenía pensamiento formal. Mientras que en la prueba TOLT-2 final el 55.55% de los participantes tenían pensamiento concreto y 44.44% pensamiento formal. Los participantes que tenían pensamiento en transición, el 5.55% se definió con pensamiento concreto; mientras que el 5.55% superó la etapa transitoria para lograr la capacidad cognitiva formal.

4.4.2 El test de álgebra

En cuanto a las puntuaciones obtenidas en los tests de álgebra, el valor medio alcanzado por el grupo de participantes fue para el pre-test de 5.437 y para el pos-test, 12.375. Teniendo en cuenta que la puntuación máxima en este test es de 20 puntos. Como se muestra en la tabla 9.

	Pre-test	Post-test
Media	5.1667	12.375

Tabla 9: Media de los pre-test, post-test

Los resultados obtenidos en el post-test, el 88.89% de los estudiantes logró superar el puntaje obtenido en el pre-test, y el 11.11%, en lugar de superar el puntaje logrado en el pre-test, obtuvo un puntaje por debajo del mismo. Esto fue debido a que estos dos estudiantes causaron baja y por tanto no presentaron el post-test. Sin embargo, uno de ellos con puntaje bajo, manifestó que "si estudiaba de manera apropiada, entonces podría aprender el material del curso", añadió "Prefiero el material del curso que despierte mi curiosidad, incluso si es difícil de aprender", "Además, teniendo en cuenta la dificultad del curso, del maestro y de mis habilidades, pienso que trabajaré bien en mis tareas académicas". Sin embargo, parece que este estudiante no tomó en cuenta su asistencia y el trabajo en el aula.

Analizando los resultados el 5.55% consiguió 18 ítems correctos, 11.11% logró obtener 16 ítems correctos, 22.22% alcanzó 15 ítems, 5.55% registró 14 ítems correctos, es decir, 44.43% tuvo un puntaje aprobatorio. El 55.57% estuvo un puntaje menor o igual a 11 en una escala de 0 a 20 puntos.

Los resultados de este estudio mostraron que el trabajo con el modelo cíclico del aprendizaje autorregulado tuvo un impacto positivo en la traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico. En la figura 5 se muestran los resultados obtenidos antes y después de haber aplicado test de álgebra.

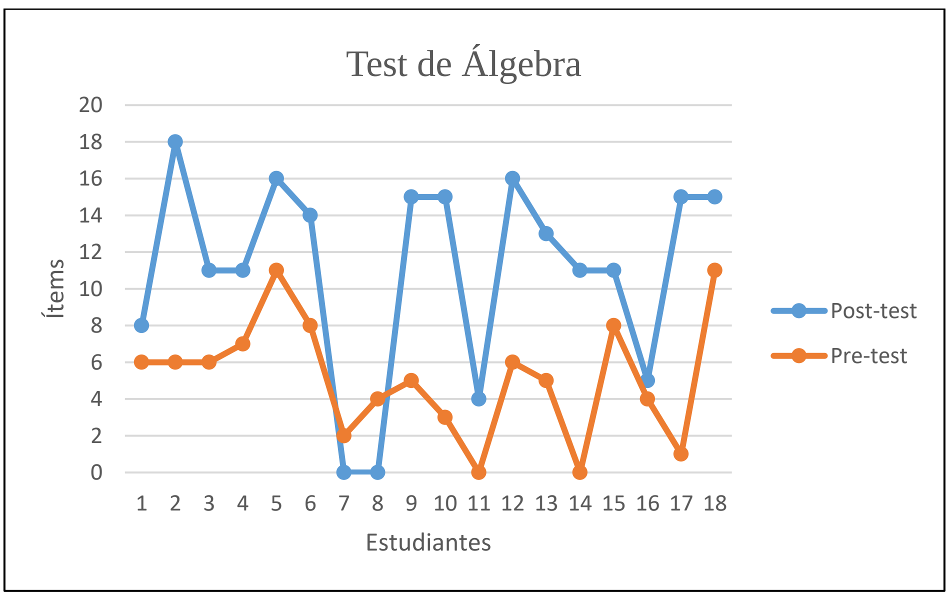


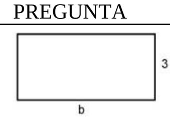
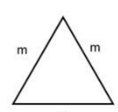
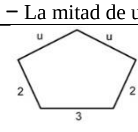
Figura 15: Comparativo del pre-test y post-test

4.4.3 Análisis de los ítems del test de álgebra

El test fue construido dentro de un marco piagetiano, y un intento ha sido hecho para clasificar los ítems en términos de las etapas del pensamiento operatorio concreto y formal de Piaget. Esto fue pensado para verificar los resultados obtenidos en la prueba de razonamiento lógico (TOLT) y, en consecuencia, para dar soporte al post-test de álgebra.

La tabla 10 lista los 20 ítems del post-test, y muestra las sub-etapas piagetianas de cada ítem, el nivel de interpretación en el cual el ítem puede ser resuelto exitosamente, y también algunas respuestas erróneas comunes. Como puede observarse, los ítems clasificados dentro de las sub-etapas concreta temprana y concreta tardía registraron los más altos porcentajes de ítems contestados correctamente. Mientras que los ítems clasificados en as sub-etapas formal tempana y formal tardía registraron los porcentajes más bajos en ítems contestados correctamente, excepto los ítems B, E y T. Los porcentajes de ítems incorrectos en las sub-etapas concreta temprana y concreta tardía fueron minimizados. Sin embargo, en las sub-etapas formal temprana y formal tardía algunos errores comunes continuaron. El error más común fue el del ítem N con el 56.25%.

El 100% de los ítems del pre-test fueron superados por los ítems del post-test. Sin embargo, el 55.55% de los ítems del post-test fueron contestados correctamente (véase figura 17).

Sub-Etapa Piagetiana	Ítem	Número de Pregunta en el test	% Correctos	EVALUATED	IGNORADO	OBJETO	INCÓGNITA ESPECÍFICA	NÚMERO GENERAL	PREGUNTA	Respuestas equivocadas comunes	%
Concreta Temprana	A	I. a	93.7			x			 P =		
	C	I. c	87.7			x			 P =		
	F	II.1	87.5					x	– Un número cualquiera		
	G	II.2	87.5					x	– La suma de dos números		
	I	II.4	87.5					x	– La mitad de un número		
Concreta Tardía	D	I. d	68.7			x			 P =		
	K	III.1	93.7						Si Juan tiene x pesos, ¿cuántos pesos tendrá Julia?		
	L	III.2	56.2					x	– Ella tiene $4 más que Juan		
	M	III.3	87.5					x	– Ella tiene $3 menos del doble de lo que tiene Juan		
								x	– Ella tiene $2 más que la mitad de lo que tiene Juan		

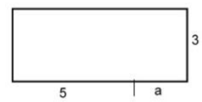
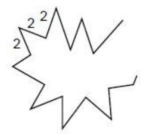
Formal Temprana	H	II.3	56.2					x	– El doble de la suma de dos números		
	J	II.5	68.7					x	– El doble de la diferencia entre a y b		
Formal Tardía	B	I. b	93.7			x			 P =		
	E	I. e	87.5					x	 Parte de esta figura no está dibujada. Hay n lados todos juntos, cada uno de longitud 2. El perímetro es P =	n+2	31.25
	N	III.4	6.25				x		– La suma de 4 números impares consecutivos es 136. ¿Qué número ocupa la segunda posición?	x + y + z + w = 136	56.25
	O	III.5	12.5				x		– La edad actual de José es 3/8 de la de su hermano, y dentro de 4 años tendrá 1/2 de la que entonces tenga su hermano. ¿Cuál es a edad actual del hermano?	$\frac{3}{8}x + 4 = \frac{1}{2}x$ $\frac{3}{8} + 4 = \frac{1}{2}x$	43.75 25
	P	III.6	56.2				x		– Dos números suman 25 y el doble de uno de ellos es 14. ¿Qué números son?		
	Q	III.7	18.7				x		– En una granja hay gallinas y conejos. En total hay 19 cabezas y 60 patas. ¿Cuántas gallinas y cuántos conejos hay?		
	R	III.8	12.5				x		– El producto de dos números consecutivos es 552. ¿Cuáles son esos números?		
	S	III.9	18.7				x		– La altura de un triángulo isósceles es 3 cm menor que la base. Calcula las medidas de la base y la altura si el área es 299 cm^2		
	T	III.10	62.5				x		– Un terreno rectangular mide 2 m más de largo que de ancho y su área es de 80 m^2 ¿Cuáles son sus dimensiones?		

Tabla 10: Análisis de los ítems del post-test.

Los ítems 1, 2, 7 y 11 registraron la mayor frecuencia como ítems contestados correctamente. Los ítems 1 y 2 consistieron en encontrar el perímetro de dos rectángulos $P = 2b + 6$ y $P = 2a + 16$ respectivamente.

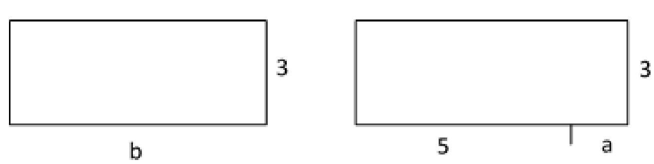


Figura 16

En el ítem 7 los participantes tenían que escribir una expresión algebraica para: “La suma de dos números distintos:” y el ítem 11, “¿Si Juan tiene x pesos, cuántos pesos tendrá Julia en cada caso?” “Ella tiene $4 más que Juan”.

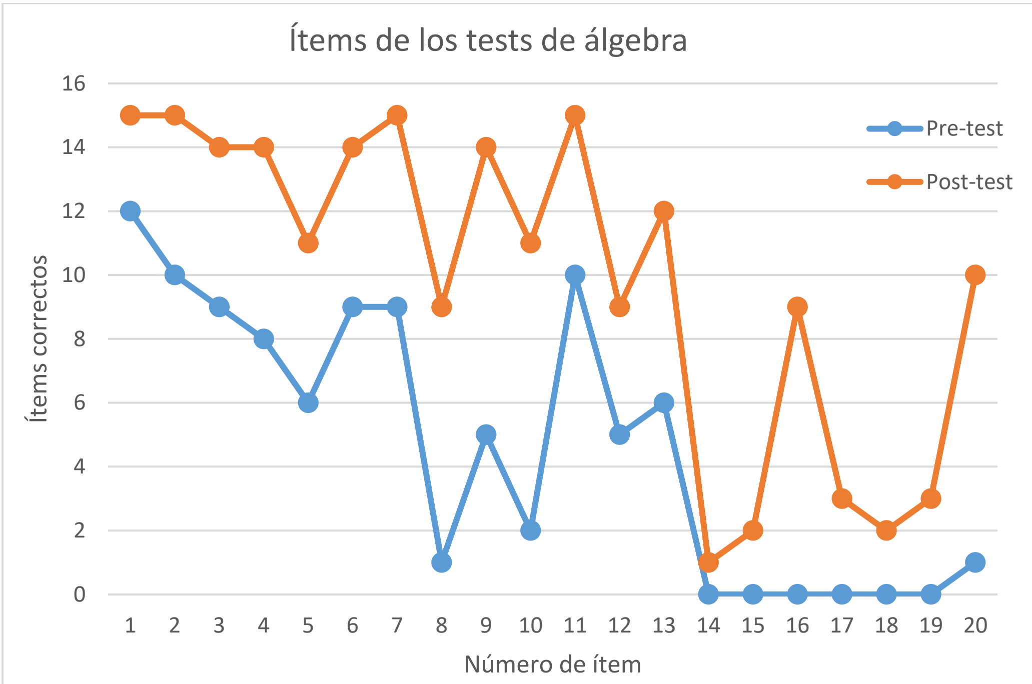


Figura 17: Comparación de ítems correctos entre el pre-test y el post-test

No obstante, los ítems 14, 15 y 18 registraron la menor frecuencia, estos ítems son “La suma de cuatro números impares consecutivos es 138. ¿Qué número ocupa la segunda posición?”, “La edad actual de José es $^{3}/_{8}$ de la de su hermano, y dentro de 4 años tendrá $^{1}/_{2}$ de la que entonces tenga su hermano. ¿Cuál es a edad actual del hermano?” y “El producto de dos números consecutivos es 552. ¿Cuáles son esos números?” respectivamente.

Los ítems 9, 16 y 20 presentaron la mayor diferencia en frecuencia de ítems contestados correctamente, los ítems se mencionan a continuación: “Escribe una expresión algebraica para: La mitad de un número”, “Dos números suman 25 y el doble de uno de ellos es 14. ¿Qué números son?”, y “Un terreno rectangular mide 2 m más de largo que de ancho y su área es 80 m^2. ¿Cuáles son sus dimensiones?”. Basándose en el trabajo de Bandura, Zimmerman (1986) definió el aprendizaje autorregulado como el grado en el que los estudiantes son, metacognitiva, motivacional y conductualmente, participantes activos en su propio proceso de aprendizaje. Los resultados de este estudio indican que el trabajo con los modelos cíclicos de la metacognición y el aprendizaje autorregulado tuvieron un impacto positivo en el conocimiento de los estudiantes en la traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico.

4.4.4 Correlación TOLT y test de álgebra

Con la finalidad de comprobar si el post-test estaba correlacionado con el TOLT se obtuvo el factor de correlación, éste fue de 0.7859 (r = 0.7859) como se muestra en la tabla 11, el cual indicó que existe una fuerte correlación entre ambas pruebas. Esto se puede interpretar como la mayoría de los estudiantes participantes en este estudio, se encuentran en la etapa de pensamiento formal, soportado por la prueba de razonamiento lógico, el cual permite medir el pensamiento formal.

	Post-test
TOLT-2	0.785912382

Tabla 11. Factor de correlación entre TOLT-2 y Post-test

Generalmente cuando se estudian las relaciones entre pensamiento formal y resolución de problemas, se suele utilizar una medida de la resolución de problemas en cuya estructura se encuentran algunos de los esquemas operatorios formales (combinatoria, proporcionalidad, etc.). Son menos los trabajos en los que se relaciona pensamiento formal y problemas matemáticos de corte más curricular. Por ello, para la vinculación del TOLT y la prueba de álgebra se incluyó observar la relación existente entre los niveles de pensamiento formal y el rendimiento en resolución de problemas que contengan esquemas operatorios formales; en este caso, ítems que implican la traducción de lenguaje natural al lenguaje algebraico en función del nivel de pensamiento formal.

4.5 Análisis de los componentes del MSLQ

4.5.1 Correlación entre la motivación de los estudiantes y el post-test de álgebra.

La tercera pregunta de investigación concierne a cómo están relacionados los componentes de la motivación y los componentes del aprendizaje autorregulado con la traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico en problemas verbales. La tabla 12 muestra los factores de correlación entre los diferentes componentes de la motivación: los componentes de valor, los componentes de expectación y los componentes afectivos y, el post-test.

	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
Metas Intrínsecas	1						
Metas Extrínsecas	0.94912	1					
Importancia de la Tarea	0.96169	0.93492	1				
Control de Creencias	0.89583	0.81721	0.92521	1			
Auto-Eficacia para el Aprendizaje y el Desempeño	0.97513	0.96317	0.9618	0.85234	1		
Prueba de Ansiedad	0.91444	0.9107	0.93120	0.86870	0.87768	1	
Post-test	0.84222	0.82617	0.84591	0.73196	0.85519	0.75972	1

Tabla 12: Correlación entre la motivación de los estudiantes y los ítems del test de álgebra.

El componente autoeficacia para el aprendizaje registró el factor de correlación más alto, r = 0.85519, es decir, este componente está fuertemente relacionado con el post-test de álgebra. Los niveles más altos de la autoeficacia para el aprendizaje y el desempeño y el valor de la tarea fueron asociados con niveles más altos de rendimiento estudiantil; mientras que los niveles más altos de la prueba de ansiedad (0.75972) y control de creencias para el aprendizaje de las matemáticas (r = 0.73196) sólo se relacionaron significativamente con menores niveles de rendimiento. Los participantes expresaron que, estaban seguros de que podían hacer un trabajo excelente en las tareas y evaluaciones en matemáticas, ($\bar{X} = 6.067$) y, también de que podrían entender los conceptos básicos enseñados en álgebra, ($\bar{X} = 5.933$) .

El componente el control de creencias para el aprendizaje el cual hace referencia a las creencias de aprendizaje de las matemáticas de los estudiantes de que sus esfuerzos para aprender se reflejarán en resultados positivos. Se refiere a la creencia de que los resultados son contingentes en el propio esfuerzo, en contraste con factores externos como el maestro. Si los estudiantes creen que sus esfuerzos para estudiar hacen una diferencia en su aprendizaje, deberían ser más propensos a estudiar más estratégica y efectivamente. Es decir, si los estudiantes pueden sentir que pueden controlar su desempeño académico, es más probable que presenten lo que se necesita estratégicamente para hacer realidad los cambios deseados. En el MSLQ, los participantes mencionaron que, si se esforzaban lo suficiente, entonces entenderían el material de matemáticas, ($\bar{X} = 6.2667$); si estudiaban de manera apropiada, entonces podrían aprender el material de álgebra, ($\bar{X} = 6.067$) y, si no entendían el material de matemáticas, era porque no se esforzaron lo suficiente, $\bar{X} = 6.0$).

La prueba de ansiedad está relacionada negativamente con las expectativas, así como con el desempeño académico. La prueba de ansiedad tiene dos componentes: un componente cognitivo o preocupación y, un componente de la emocionalidad. El componente de la preocupación se refiere a los pensamientos negativos de los estudiantes que interrumpen el rendimiento, mientras que el componente de emotividad se refiere a los aspectos afectivos y fisiológicos de excitación de la ansiedad. Se ha encontrado que el componente preocupación o cognitivo por el desempeño es la mayor fuente de desempeño. Los participantes en este estudio expresaron en el MSLQ que tenían una sensación incómoda y molesta cuando presentaban un examen ($\bar{X} = 6.2667$); así como, cuando presentaban exámenes pensaban en las consecuencias del fracaso ($\bar{X} = 5.4667$), componentes con la mayor media aritmética de la prueba de ansiedad. No obstante, la capacitación en el uso de estrategias de aprendizaje eficaces y habilidades para tomar exámenes debería ayudar a reducir el grado de ansiedad.

Asimismo, el valor de la tarea estuvo fuertemente relacionado con el post-test de álgebra, r = 0.84591, éste se refiere a la evaluación del estudiante de lo interesante, lo importante y útil que es la tarea ("¿Qué pienso de estas tareas?"). En este caso, un valor de la tarea alto condujo a una mayor participación en el aprendizaje en el MSLQ, el valor de la tarea se refiere a las percepciones de los estudiantes sobre el material del curso en términos de interés, y la utilidad. Los participantes dijeron que, creían que podrían utilizar lo que aprendían en matemáticas en otros cursos, ($\bar{X} = 6.267$), y creían que el material de matemáticas en esa clase era útil para que ellos aprendieran, ($\bar{X} = 6.067$).

No obstante, la orientación de la meta intrínseca que se refiere al grado en que el estudiante se percibe a sí mismo participando en una tarea por razones tales como desafío, curiosidad, dominio registró un nivel muy significativo de correlación con el post-test algebraico, r = 0.84222. Tener una orientación de la meta intrínseca alta hacia una tarea académica indica que la participación del estudiante en la tarea sea un fin para sí mismo, en lugar de que la participación sea un medio para un fin. La orientación de la meta en ese valor de la tarea se refiere a las razones por las cuales el estudiante está participando en la tarea ("¿Por qué estoy haciendo esto?"). En el MSLQ, los participantes contestaron que, en una clase de matemáticas, preferían un material del curso que despertara su curiosidad, aunque fuese difícil de aprender, ($\bar{X} = 6..00$),

Además, la orientación de la meta extrínseca complementa la orientación de la meta intrínseca y se refiere al grado en que el estudiante se percibe a sí mismo participando en una tarea por razones tales como calificaciones, recompensas, desempeño, evaluación por otros y competencia. Este componente también registró un nivel significativo de correlación con el post-test algebraico, r = 0.82617. Cuando éste es alto en la orientación de la meta extrínseca, participar en una tarea de aprendizaje es el medio para un fin. La principal preocupación del estudiante se relaciona con temas que no están directamente relacionados con la participación en la tarea en sí (como calificaciones, recompensas, comparar el desempeño de uno con el de otros). Una vez más, esto se refiere a la orientación general del curso como un todo. En el MSLQ, los participantes respondieron que, si ellos querían, podían obtener mejores calificaciones en la clase de matemáticas que la mayoría de los otros estudiantes, ($\bar{X} = 6.067$) y, que lo más importante para ellos en esos momentos era mejorar su promedio general de calificaciones, por lo que su principal preocupación en la clase de matemáticas era conseguir una buena calificación, ($\bar{X} = 5.933$). Las medias aritméticas de los componentes de la motivación se visualizan en la tabla.

Listado de Escalas de Motivación	**Media**
Componentes de Valor	
Metas Intrínsecas	4.7656
Metas Extrínsecas	5.2813
Importancia de la Tarea	5.1667
Componentes de la Expectativa	
Control de Creencias	5.5625
Auto-Eficacia para el Aprendizaje y el Desempeño	5.1016
Componentes Afectivos	
Prueba de Ansiedad	4.4625

Tabla 13: Escalas de Motivación del MSLQ.

CAPÍTULO V: CONCLUSIONES

5.1 Conclusiones

Con base en los resultados de este estudio, hubo una significativa diferencia positiva entre la media aritmética del post-test y el pre-test, soportado también, por la prueba de razonamiento lógico. De manera que se logró potenciar en los estudiantes del último grado de secundaria su conocimiento metacognitivo (conocimiento declarativo, procedimental y condicional, procesos de planificación, monitoreo y evaluación) y su control metacognitivo (planificación, ejecución o desempeño y autorreflexión) para ayudarlos a ser autónomos en la traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico en problemas verbales. Esta investigación reveló que existe una correlación media entre los componentes metacognitivos, los componentes del aprendizaje autorregulado con la traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico. Por lo tanto, los modelos cíclicos metacognitivo y del aprendizaje autorregulado contribuyeron significativamente al conocimiento algebraico de la mayoría de los participantes en este estudio.

Zimmerman (1989) encontró que los estudiantes autorregulados en la escuela son capaces de administrar y monitorear sus propios procesos de adquisición de conocimientos y habilidades; es decir, dominan y aplican estrategias autorreguladoras de aprendizaje y resolución de problemas sobre la base de percepciones de autoeficacia con vistas a alcanzar metas académicas valiosas.

Asimismo, la perspectiva constructivista sobre el aprendizaje implica que los alumnos se convierten en estudiantes autorregulados y solucionadores de problemas; es decir, "participantes metacognitiva, motivacional y conductualmente activos en sus propios procesos de aprendizaje" (Zimmerman, 1989; Boekaerts, 1997).

Al igual que en todas las áreas del aprendizaje de las matemáticas, los estudiantes aprendieron a comentar lo que aprendieron, a valorar las tareas de otros compañeros, y discutir problemas y estrategias con ellos. Esto llevó tiempo y esfuerzo, pero las recompensas merecieron la pena. Los estudiantes tuvieron que ajustar continuamente sus metas y opciones de estrategias para las tareas. Durante la evaluación entre compañeros, hablaban de ideas matemáticas enfocadas al álgebra (por ejemplo: “…sólo hay que expresarlo algebraicamente mediante una ecuación y no aritméticamente…”), de esta manera, compartían definiciones y estrategias. Estas estrategias de auto-regulación fueron de mucho valor porque los estudiantes se motivaban ellos mismos para usarlas.

Asimismo, en la planificación y selección de estrategias se requieren ajustes cíclicos debido a fluctuaciones en los componentes personales, conductuales y ambientales. Ninguna estrategia de autorregulación funcionó igualmente bien para todas los estudiantes, y pocas estrategias funcionaron de manera óptima para un estudiante en todas las tareas u ocasiones. Los estudiantes más capaces eran los que establecían metas más altas y se comprometían firmemente a seguir esas metas.

En la fase de desempeño o ejecución, los procesos de autocontrol, como la auto-instrucción, la imaginación, la atención enfocada, las estrategias de tarea, ayudaron a los estudiantes a centrarse en la tarea y a optimizar su esfuerzo. El método más utilizado fue la auto-instrucción que consistía en describir abiertamente o encubiertamente cómo se podía proceder mientras se ejecutaba una tarea, cómo se traducía un problema verbal a lenguaje algebraico, como se resolvía un problema de álgebra, o se memorizaba una fórmula algebraica, y la práctica diaria mostró que tales verbalizaciones lograron mejorar el aprendizaje de los estudiantes.

La autorregulación permite a los alumnos orientarse hacia nuevas tareas de aprendizajes y participar en la búsqueda de objetivos de aprendizaje adecuados; facilita la toma de decisiones apropiada durante el aprendizaje y la resolución de problemas, así como el monitoreo de un proceso continuo de aprendizaje y resolución de problemas, proporcionando sus propios comentarios y evaluaciones de desempeño y manteniéndose concentrados y motivados.

Veenman, Kok, & Blöte (2005) argumentan que los estudiantes que usan estrategias metacognitivas, en particular, identificando metas, estrategias de autocontrol, auto-cuestionamiento, elección razonada de comportamientos y autoevaluación, tienen más éxito académico que los estudiantes que no usan estas estrategias. Además, se puede enseñar a los estudiantes a mejorar la competencia metacognitiva a través de la práctica guiada repetida.

En la fase de auto-reflexión, cuando algunos estudiantes recibían una evaluación negativa por su desempeño en la traducción algebraica de un problema verbal, eran más propensos a atribuirlo a un esfuerzo insuficiente o a una estrategia de tarea deficiente que, los que dudaban de sí mismos. Esto era porque habían logrado un cierto grado de auto-eficacia.

Otros estudiantes que planeaban usar una estrategia específica durante la planificación e implementar su uso durante el desempeño tuvieron más probabilidades de atribuir fallas a esa estrategia en lugar de una capacidad baja, lo cual puede ser un devastador personal. Debido a que las estrategias son percibidas como causas corregibles, las atribuciones a su uso protegen contra las auto-reacciones negativas y fomentan un curso estratégico adaptativo de acción subsiguiente.

Algunos estudiantes, a pesar de su auto-retroalimentación sobre la traducción de algunos problemas verbales, malinterpretaban o distorsionaban sus acciones o traducciones algebraicas en actividades similares y no podían corregirlos apropiadamente, posiblemente porque no habían adquirido la estrategia de auto-observación. Es decir, algunos estudiantes no fueron capaces de dar seguimiento a aspectos específicos de su propio desempeño, las condiciones que los rodeaban y los efectos que les producían.

Se ha registrado que los estudiantes con malas habilidades metacognitivas no sólo son pasivos sino dependientes de otros. Una estrategia de aclaración frecuente tanto en lectura como en matemáticas es pedir ayuda a alguien más; si la ayuda no está fácilmente disponible, abandonarán a menudo el esfuerzo. Tal vez la falta de un diálogo interno impulsado por el auto-cuestionamiento está en la raíz de esta dependencia, ya que carecen de un método para construir e internalizar su propia comprensión (Hartman & Sternberg, 1993).

Hartman (1994) expresó que las observaciones informales de las reacciones de los estudiantes a la formación metacognitiva en lectura y matemáticas, en específico en álgebra, plantean algunas cuestiones sobre la adquisición de estas habilidades. Los estudiantes que no están acostumbrados a pensar metacognitivamente a veces se resisten a tener que hacerlo, especialmente si han sido aprendices pasivos durante muchos años. No entienden cómo ser más activos en su aprendizaje o por qué es importante sentirse competentes. Mejorar las habilidades metacognitivas de estos estudiantes es posible, pero se requiere paciencia y persistencia por parte del instructor y de los estudiantes. Los investigadores han señalado que los estudiantes necesitan andamios, instrucciones que proporcionan un apoyo inicial fuerte que se retira gradualmente a medida que se vuelven más competentes en la autorregulación.

Cuando combinamos este enfoque con los de la motivación para asumir la responsabilidad, los valores y la autoeficacia, podemos apreciar la complejidad de las interrelaciones entre los componentes cognitivos, metacognitivos y afectivos del aprendizaje (Hartman & Sternberg, 1993; Palincsar & Brown, 1989).

Cuando algunos estudiantes recibían una evaluación negativa en la traducción algebraica de un problema verbal por parte de sus compañeros, sentían que la evaluación se había producido durante circunstancias atípicas, lo atribuían a la mala suerte, en lugar de su incapacidad para comprender el problema verbal y traducirlo apropiadamente. Además, se resistían a manifestar sus respuestas en plenaria ya que temían a las críticas que sus compañeros les pudieran exteriorizar.

Para tomar esto más lejos, los estudiantes que son reacios a usar las habilidades metacognitivas pueden tener miedo de probar los límites de su inteligencia, o pueden reaccionar defensivamente a la crítica de su conducta habitual (Schoenfeld, 1987). Este temor puede explicar en parte la prisa por calcular las respuestas matemáticas sin tomar tiempo para entender el problema. La conciencia de la ansiedad de los estudiantes sobre la supervisión de su aprendizaje es esencial para ayudarlos a superar la resistencia a los cambios que son difíciles, pero en última instancia beneficioso. Esto también apoya la importancia del contexto afectivo (Hartman & Sternberg, 1993).

Finalmente, los componentes motivacionales estaban vinculados de manera importante (una correlación fuerte con la traducción de los problemas verbales a lenguaje algebraico.) al compromiso cognitivo del estudiante y al rendimiento académico en el aula. La autoeficacia se relacionó positivamente con el compromiso y el desempeño cognitivo del estudiante. Los estudiantes que creían que eran capaces tenían más probabilidades de reportar el uso de estrategias cognitivas, de ser más autorregulados en términos de reportar más uso de estrategias metacognitivas, y de persistir más a menudo en tareas académicas difíciles o poco interesantes.

Asimismo, la motivación de la mayoría de los estudiantes no provenía de las propias metas, sino más bien de las reacciones auto-evaluativas a los resultados del comportamiento. Se sintieron motivados al compartir sus traducciones algebraicas con sus pares, corrigiéndose entre ellos mismos, de modo que, se sintieron más seguros de sí mismos para exponer sus respuestas en plenaria.

Para estos estudiantes, el desarrollo metacognitivo podría beneficiar no sólo su logro, sino su autoeficacia y motivación para aprender también, ya que les da poder con las herramientas para confiar en sus propios recursos intelectuales y descubrir nuevas capacidades intelectuales (Efklides, 2001).

5.1 Directrices

Finalmente, además, de este estudio se pueden extraer las siguientes directrices para capacitar en el aprendizaje autorregulado: a) si queremos que nuestros alumnos aprendan a aprender, es preciso enseñarles a autorregular su aprendizaje a través de estrategias oportunas, b) las metas u objetivos de aprendizaje propuestos deben caracterizar por su proximidad y nivel óptimo de dificultad, c) la evaluación formativa debe ser el eje central de la orientación educativa, d) los alumnos deben desenvolverse en ambientes educativos cooperativos, e) la educación debe favorecer la autonomía y la orientación de los alumnos durante todo el proceso de aprendizaje, f) los profesores pueden ayudar a sus alumnos a utilizar adecuadamente las estrategias metacognitivas para facilitar el aprendizaje no solamente del algebra sino de otras áreas y, g) ambos, estudiantes y profesores necesitan estar más conscientes de los estilos de aprendizaje y las estrategias de aprendizaje a través de la instrucción de estrategias.

Por otra parte, De Corte, Greer, y Versehaffel (1996) concluyeron que las directrices principales que han surgido de la literatura con el enfoque constructivista del aprendizaje autorregulado y el aprendizaje matemático son las siguientes:

1. Inducir y apoyar procesos de adquisición constructivos, acumulativos y orientados a objetivos en los estudiantes.
2. Mejorar la auto-regulación de los estudiantes de sus propios procesos de aprendizaje.
3. Insertar el aprendizaje tanto como sea posible en contextos auténticos que sean ricos en recursos y ofrezcan amplias oportunidades de interacción y colaboración.
4. Permitir la adaptación flexible del apoyo educativo y emocional, teniendo en cuenta las diferencias individuales entre los estudiantes.
5. Facilitar la adquisición de estrategias generales de aprendizaje y la resolución de problemas de habilidades integradas en el currículo de matemáticas.

REFERENCIAS

Acevedo, J. A. & Oliva. J. M. (1995). Validación y aplicación de un test de razonamiento lógico. *Revista de Psicología General y Aplicada, 48*, 339-351.

Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. *For the learning of Mathematics, 14(3)*, 24-35.

Artigue, M. (2003). ¿Qué se puede aprender de la investigación educativa en el nivel universitario? *Boletín de la asociación matemática venezolana, 10(2)*, 117-134.

Arya, J. C., & Lardner, R. W. (2002). *Matemáticas aplicadas: a la administración ya la economía*. Pearson Educación.

Bachelard, G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique*. Paris: De Vrin.

Baker, L. (1989). Metacognition, comprehension monitoring, and the adult reader. *Educational Psychology Review, I*, 3-38.

Baldor, A. (2008). *Álgebra de Baldor*. Madrid: Ediciones y Distribuciones CODICE.

Bandura, A. (1986). *Social foundations of thought and action: A social cognitive theory*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.

Bednarz, N., & Janvier, B. (1996). Emergence and development of algebra as a problem-solving tool: continuities and discontinuities with arithmetic. In N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra*, pp. 115-136. Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers.

Behr, M., Erlwanger, S., & Nichols, E. (1976). How children view equality sentences. Florida State University: *PMDC Technical Report No. 3. (ERIC Document Reproduction Service No. ED144802).*

Bereiter, C., & Scardamalia, M. (1987). *The psychology of written composition*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Beyer, W. (2006). El Laberinto del significado: La comunicación en el aula de matemáticas. En David M., & Wladimir, S. (Eds.), *Lenguaje, Comunicación y Significado en Educación Matemática.* La Paz: Grupo de Investigación y Difusión en Educación Matemática.

Birenbaum, M. (2002). Assessing self-directed active learning in primary schools. *Assessment in Education: Principles, Policy & Practice, 9(1)*, 119-138.

Boekaerts, M. (1987). Situation specific judgments of a learning task versus overall measures of motivational orientation. In E. De Corte, H. Lodewijks, R. Parmentier, & P. Span (Eds.), *Learning and instruction* (pp. 169-179). Oxford/Leuven: Pergamon Press/Leuven University Press.

Boekaerts, M. (1995). The interface between intelligence and personality as determinants of classroom learning. In D. H. Saklofske, & M. Zeidner (Eds.), *International Handbook of Personality and Intelligence.* New York, NY: Plenum Press.

Boekaerts, M. (1997). Self-regulated learning: A new concept embraced by researchers, policy makers, educators, teachers, and students. *Learning and instruction, 7(2),* 161-186.

Boekaerts, M. (1999). Motivated learning: Studying student situation transactional units. *European journal of psychology of education, 14(1),* 41-55.

Boekaerts, M., & Niemivirta, M. (2000). Self-regulated learning: finding a balance between learning goals and ego-protective goals. In M. Boekaerts, P. R. Pintrich, & M. Zeidner (Eds.), *Handbook of Self-regulation.* San Diego, CA: Academic Press.

Booth, L. R. (1982). Developing a teaching module in beginning algebra. In *Proceedings of the 6th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 280-285).

Booth, L. R. (1983). A diagnostic teaching programme in elementary algebra: Results and implications. In *Proceedings of the 7 st Conference of the PME*. Israel.

Booth, L. (1987). Equations revisited. In J. C, Begeron, N. Herscovics, & C, Kieran (Eds.), *Proceedings of the 11th International Conference for the Psychology of Mathematics Education, (*Vol. 1, pp. 301–307*).* Montreal, Canada*: Université de Montréal, Canada.*

Booth, L. R. (1988). Children's difficulties in beginning algebra. *The ideas of algebra, K-12, 19,* 20-32.

Booth, L. R., & Johnson, D. C. (1984). Algebra: *Children'Strategies and Errors: A Report of the Strategies and Errors in Secondary Mathematics Project*. Nfer Nelson.

Borkowski, J. G. (1996). Metacognition: theory or chapter heading? *Learning and Individual differences, 8,* 391–402.

Brockett, R., & Hiemstra, R. (1993). *El aprendizaje auto-dirigido en la educación de adultos.* Madrid: Paidós educador.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 4(2),* 165-198.

Brown, A. L. (1978). Knowing when, where, and how to remember: a problem of metacognition. In R. Glaser (Ed.), *Advances in Instructional Psychology*: Vol. 1. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Brown, A. L, (1987). Metacognition, executive control, self-regulation, and other more mysterious mechanisms. *Metacognition, motivation, and understanding,* 65-116.

Brown, A. L., & Palincsar, A. S. (1989). Guided, cooperative learning and individual knowledge acquisition. *Knowing, learning, and instruction: Essays in honor of Robert Glaser,* 393-451.

Brush, L. (1978). Preschool children's knowledge of addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education 9,* 44-54.

Carr, M. (2010). The importance of metacognition for conceptual change and strategy use in mathematics. In H. S. Waters, & W. Schneider (Eds.) *Metacognition, Strategy Use, and Instruction* (pp. 176-197), NY: Guilford.

Carver, C. S., & Scheier, M. F. (1990). Origins and functions of positive and negative affects: A control–process view. *Psychological Review, 97*, 19–35.

Chaiklin, S., & Lesgold, S. B. (1984). *Prealgebra students' knowledge of algebraic tasks with arithmetic expressions* (No. UPITT/LRDC/ONR/APS-16). Pittsburgh Univ. PA. Learning Research and Development Center.

Chalouh, L., & Herscovics, N. (1984). From letter representing a hidden quantity to letter representing an unknown quantity. *Proceedings of PME-NA-VI, Madison, Wisconsin, 71, 76.*

Cockcroft, W. H. (1982). *Mathematic Counts-Report of the Committee of Inquiry into the Teaching of Mathematics.*

Collis, K. (1974). *Cognitive development and mathematics learning. Paper presented at Psychology of Mathematics Education Workshop. Centre for Science Education.* London: Chelsea College.

Crawford, A. (2001). Developing algebraic thinking: Past, present, and future. In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, & J. Vincent (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra* (*Proceedings of the ICMI Study Conference*, pp. 192-193). Melbourne, Australia: The University of Melbourne.

Cross, D., & Paris, S. (1988). Developmental and instructional analyses of children's metacognition and reading comprehension. *Journal of Educational Psychology, 80,* 131-142.

Davis, R. B. (1994). What mathematics should children learn? *Journal of Mathematical Behavior, 13,* 3-33.

De Corte, E., Greer, B., & Versehaffel, L. (1996). Mathematics teaching and learning. In D. C. Berliner, & R. C. Calfee (Eds.), *Handbook of educational psychology* (pp. 491-549). New York: Macmillan.

Delclos, V., & Harrington, C. (1991). Effects of strategy monitoring and proactive instruction on children's problem solving performance. *Journal of Educational Psychology, 83(1),* 35.

Dembo, M. H., & Eaton, M. J. (2000). Self-regulation of academic learning in middle-level schools. *The Elementary School Journal, 100(5),* 473-490.

Dole, J. A., & Sinatra, G. M. (1998). Reconceptualizing change in the cognitive construction of knowledge. *Educational Psychologist, 33,* 109–128.

Dreyfus, T., & Eisenberg, T. (1981). Function concepts: Intuitive baseline. In *Proceedings of the Fifth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 183-188).

Efklides, A. (2001). Metacognitive experiences in problem solving: Metacognition, motivation, and self-regulation. In A. Efklides, J. Kuhl, & R. M. Sorrentino (Eds.), *Trends and prospects in motivation research* (pp. 297–323). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Filloy, E. (1999). *Aspectos Teóricos del Álgebra Educativa.* México: Iberoamérica.

Filloy, E., & Rojano, T. (1985). Operating the unknown and models of teaching (a clinical study with 12–13 year olds with high proficiency in pre-algebra). In *Proceedings of the Seventh Annual Meeting for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter. Columbus, Ohio.*

Filloy, E., & Rojano, T. (1989). Solving equations: *The transition from arithmetic to algebra for the learning of mathematics, 9(2),* 19–25.

Filloy, E., Rojano, T., & Puig, L. (2008). *Educational algebra: A theoretical and empirical approach* (Vol. 43). Springer Science & Business Media.

Fernández, A., & Puig, L. (2002). Una actividad matemática organizada en el marco de los modelos teóricos locales: razón y proporción en la escuela primaria. *España: Actas del VI Simposio de la SEIEM. Logroño.*

Flavell, J. H. (1987). Metacognition and cognitive monitoring: A new area of cognitive-developmental inquiry. *American Psychologist, 34,* 906-911.

Flavell, J. H., & Wellman, H. M. (1977). Metamemory. In R.V. Kail, & J. W. Hagen (Eds.), *Perspectives on the Development of Memory and Cognition.* Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* Dordrecht: Reidel.

Fuson, K. C. (1979). Counting solution procedures in addition and subtraction. In *Wingspread Conference on the Initial Learning of Addition and Subtraction Skills*. Racine, Wisconsin.

Garner, R. (1987). *Metacognition and reading comprehension.* Norwood, NJ: Ablex Publishing.

Garner, R. (1990). When children and adults do not use learning strategies: Toward a theory of settings. *Review of Educational Research, 60,* 517-529.

Gelman, R., & Gallistel, C. (1978). *The Child's Understanding of Number*. Cambridge: Harvard University Press.

Ginsburg, H. (1977). *Children's Arithmetic.* New York: Van Nostmnd.

Glaser, R., & Chi, M. (1988). Overview. In M. Chi, R. Glaser, & M. Farr (Eds.), *The nature of expertise* (pp. 15-28). Hillsdale, NJ: Erlbaum Oxford University Press.

Gourgey, A. (1998). Metacognition in basic skills instruction. *Instructional science, 26(1-2),* 81-96.

Greeno, J. G. (1982). A cognitive learning analysis of algebra. In *annual meeting of the American Educational Research Association, Boston, MA.*

Harper, E. (1981). Psychological changes attending a transition from arithmetical to algebraic thought. *In Proceedings of the 5th International Conference for PME Grenoble, France.*

Hartman, H. J. (1994). From reciprocal teaching to reciprocal education. *Journal of Developmental Education, 18(1).* 2-8, 32.

Hartman, H. J., & Sternberg, R. J. (1993). A broad BACEIS for improving thinking. *Instructional Science, 21,* 401-425.

Herscovics, N., & Kieran, C. (1980). Constructing meaning for the concept of equation. *The Mathematics Teacher 73,* 572-580.

Jacobs, J., & Paris, S. (1987). Children's metacognition about reading: Issues in definition, measurement, and instruction. *Educational psychologist, 22*, 255-278.

Kaput, J. J. (1995). A Research Base Supporting Long Term Algebra Reform?.

Kaput, J. J. (1998). Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K–12 curriculum. In National Council of Teachers of Mathematics & Mathematical Sciences Education Board (Eds.), *The nature and role of algebra in the K–14 curriculum: Proceedings of a national symposium*. Washington, DC: National Academy Press.

Kieran, C. (1979). Children's operational thinking within the context of bracketing and the order of operations. In Tall, D. (Ed.), *Proceedings of the Third International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Mathematics Education Research Centre. Coventry, England: Warwick University.

Kieran, C. (1980a). Constructing meaning for non-trivial equations. Boston: *Paper presented at annual meeting of American Educational Research Association.*

Kieran, C. (1980b). The interpretation of the equal sign: Symbol for an equivalence relation vs. an operator symbol. In R. Karplus (Ed.), *Proceedings of the Fourth Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 163–169). Berkeley, CA, University of California.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational studies in Mathematics, 12(3)*, 317-326.

Kieran, C. (1983). Relationships between novices' views of algebraic letters and their use of symmetric and asymmetric equation-solving procedures. In *Proceedings of the Fifth Annual Meeting of PME-NA* (Vol. 1, pp. 161-168).

Kieran, C. (1984). A comparison between novice and more-expert algebra students on tasks dealing with the equivalence of equations. In *Proceedings of the Sixth Annual Meeting of PME-NA* (pp. 83-91).

Kieran, C. (1985). Use of substitution procedure in learning algebraic equation solving. In *Proceedings of the 7th PME–NA Annual Meeting* (Vol. 1, pp. 145-152).

Kieran, C. (1988). Two different approaches among algebra learners. *The ideas of algebra, K-12,* 91-96.

Kieran, C., & Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias, 7(3),* 229-240.

Kitsantas, A., & Zimmerman, B. J. (1998). Self-regulation of motoric learning: a strategic cycle view. *Journal of Applied Sport Psychology, 10,* 220–239.

Küchemann, D. (1978). Children's understanding of numerical variables. *Mathematics in school, 7(4)*, 23-26.

Küchemann, D. (1980). *The understanding of generalised arithmetic by secondary school children.* (Unpublished doctoral dissertation, Chelsea College, University of London).

Küchemann, D. (1981). Algebra. In K. Hart (Ed.). *Children's Understanding of Mathematics,* 102–119. London: Murray.

Kuhl, J. (1985). From cognition to behavior: perspectives for future research on action control. In J. Kuhl, & J. Beckmann (Eds.), *Action Control: from cognition to behavior.* Berlin, Germany: Springer-Verlag.

Kuhl, J., & Goschke, T. (1994). A theory of action control: mental subsystems, modes of control, and volitional conflict-resolution strategies. In J. Kuhl, & J. Beckmann (Eds.), *Volition and Personality: action versus state orientation*. Seattle, WA: Hogrefe & Huber.

Kuhn, D. (2002). A multi-component system that constructs knowledge: Insights from microgenetic study. In N. Granott, & J. Parziale (Eds.), *Microdevelopment: Transition processes in development and learning* (pp. 109–130). New York: Cambridge University Press.

Lazarus, R. S., & Folkman, S. (1984). *Stress, appraisal, and coping*. New York, NY: Springer.

Lewis, C. (1980). *Kinds of Knowledge in Algebra.*

Linchevski, L., & Livneh, D. (1999). Structure sense: The relationship between algebraic and numerical contexts. *Educational studies in mathematics, 40(2),* 173-196.

Linnenbrink, E., & Pintrich, P. (2003). The role of self-efficacy beliefs in student engagement and learning in the classroom. *Reading & Writing Quarterly, 19(2),* 119-137.

MacGregor, M. (2004). Goals and Content of an Algebra Curriculum for the Compulsory Years of Schooling. In K. Stacey, H. Chick, & M. Kendal (Eds.), *The Future of the Teaching and Learning of Algebra The 12th ICMI Study*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Malara, N., & Navarra, G. (2003). *ArAl Project: Arithmetic pathways towards favouring pre-algebraic thinking.*

Matz, M. (1980). Towards a computational theory of algebraic competence. *Journal of Children's Mathematical Behaviour, 3(1),* 93-166.

Matz, M. (1982). Towards a process model for high school algebra errors. In D. Seeman & J. S. Brown (Eds.), *Intelligent Tutoring Systems* (pp. 25–50). New York: Academic Press.

Mayer, R. E. (1987). Learnable aspects of problem solving: Some examples. In D. E. Berger, K. Pezdek, & W. P. Banks (Eds.), *Applications of cognitive psychology: Problem solving, education, and computing* (pp. 109–122). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Mevarech, Z. R., & Yitschak, D. (1983). Students' misconceptions of the equivalence relationship. In *Proceedings of the seventh international conference for the psychology of mathematics education* (pp. 313-318).

Merriam, S. B., Caffarella, R. S., & Baumgartner, L. M. (2012). *Learning in adulthood: A comprehensive guide*. John Wiley & Sons.

National Council of Teachers of Mathematics (Ed.). (2000). *Principles and standards for school mathematics* (Vol. 1). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Nesher, P. (1980). The internal representation of open sentences in arithmetic. In *Proceedings of the fourth International Conference for Psychology of Mathematics Education, University of California, Berkeley* (pp. 271-278).

OCDE (2013). Informe de resultados de PISA 2012.

Palincsar, A. S., & Brown, A. L. (1989). Instruction for self-regulated reading. In L. B. Resnick, & L. E. Klopfer (Eds.), *Toward the thinking curriculum: Current cognitive research Alexandria,* VA: Association for Supervision and Curriculum Development Yearbook.

Papini, M. C. (2003). Algunas explicaciones vigotskianas para los primeros aprendizajes del álgebra. *RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 6(1),* 41-72.

Paris, S. G., & Byrnes, J. P. (1989). The constructivist approach to self-regulation and learning in the classroom. In B. J. Zimmerman, & D. H. Schunk (Eds.), *Self-regulated Learning and Academic Achievement: theory, research, and practice.* New York, NY: Springer-Verlag.

Philipp, R. A. (1992). The many uses of algebraic variables. The Mathematics *Teacher, 85(7),* 557-561.

Piaget, J. (1976). *The grasp of consciousness.* Cambridge, MA: Harvard University Press

Pintrich, P. R. (2000). The role of goal orientation in self-regulated learning. In M. Boekaerts, P. R. Pintrich, & M. Zeidner (Eds.), *Handbook of Self-regulation.* San Diego, CA: Pintrich, P. R., Smith, D. A., Garcia, T., & McKeachie, W. J. (1993) Academic Press.

Pintrich, P. R., & DeGroot, E. (1990). Motivational and self-regulated learning components of classroom academic performance. *Journal of Educational Psychology, 82,*33-40.

Pintrich, P. R., Smith, D. A., Garcia, T., & McKeachie, W. J. (1991). A manual for the use of the Motivated Strategies for Learning Questionnaire (MSLQ).

Pintrich, P. R., Smith, D. A., Garcia, T., & McKeachie, W. J. (1993). Reliability and predictive *Educational and psychological measurement, 53(3),*of the Motivated Strategies for Learning Questionnaire (MSLQ). 801-813.

Pozo, J., & Monereo, C. (2002). *El aprendizaje estratégico.* Madrid: Santillana.

Pressley, M., & Ghatala, E. S. (1990). Self-regulated learning: Monitoring learning from text. *Educational Psychologist, 25,* 19-33.

Pressley, M., Borkowski, J. G., & Schneider, W. (1987). Cognitive strategies: Good strategy users coordinate metacognition and knowledge. In R. Vasta, & G. Whitehurst (Eds.), *Annals of Child Development* (Vol. 5, pp. 89-129). Greenwich, CT: JAI Press.

Puig, L. (2006). La resolución de problemas en la historia de las matemáticas En *Aymerich, José V. & Macario, Sergio (Eds.), Matemáticas para el siglo XXI* (pp. 39-57) Castellón: Publicacions de la Universitat Jaume I.

Puig, L., & Cerdán, F. (1990). La estructura de los problemas aritméticos de varias operaciones combinadas. *Cuarta Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa,* 8-10.

Puustinen, M., & Pulkkinen, L. (2001). Models of self-regulated learning: A review. *Scandinavian Journal of Educational Research, 45(3),* 269-286.

Radford, L. (1996). The roles of geometry and arithmetic in the development of algebra: Historical remarks from a didactic perspective. In *Approaches to algebra* (pp. 39-53). Springer Netherlands.

Raviolo, A., Siracusa, P., Herbel, M., & Schnersch, A. (2000). Desarrollo de razonamientos científicos en la formación inicial de maestros. *Revista Interuniversitaria de Formación de Profesorado, 38,* 129-140.

Reynolds, R. (1992). Selective attention and prose learning: Theoretical and empirical research. *Educational Psychology Review, 4,* 345-391.

Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En J. Kilpatrick, P. Gómez, & L. Rico (Eds.), *Educación Matemática*, pp. 69-96. Bogotá, Grupo Editorial Iberoamérica.

Sanmartí, N., & Jorba, J. (1995). Autorregulación de los procesos de aprendizaje y construcción de conocimientos. *Alambique, 4,* 59-77.

Schneider, W., & Pressley, M. (1989). *Memory development between 2 and 20.* New York: Springer Verlag.

Schoenfeld, A. H. (1985). Metacognitive and epistemological issues in mathematical understanding. Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives, 361-380.

Schoenfeld, A. H. (1987). What's All the Fuss About Metacognitlon. *Cognitive science and mathematics education,* 189.

Schraw, G., & Dennison, R. (1994). Assessing metacognitive awareness. *Contemporary Educational Psychology, 19,* 460-475.

Schraw, G., & Moshman, D. (1995). Metacognitive theories. *Educational Psychological Review, 7,* 351-371.

Schraw, G., Dunkle, M., Bendixen, L., & Roedel, T. (1995). Does a general monitoring skill exist? *Journal of Educational Psychology, 87,* 433-444.

Schraw, G., Horn, C., Thorndike-Christ, T., & Bruning, R. (1995). Academic goal orientations and student classroom achievement. *Contemporary Educational Psychology, 20(3),* 359-368.

Schunk, D. H. (1990). Goal setting and self-efficacy during self-regulated learning. *Educational Psychologist, 25,* 71–86.

Schunk, D. H. (1994). Self-regulation of self-efficacy and attributions in academic settings. In D. H. Schunk & B. J. Zimmerman (Eds.), *Self-regulation of Learning and Performance: Issues and educational applications*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Schunk, D. H., & Zimmerman, B. J. (1996). Modeling and self-efficacy influences on children's development of self-regulation. In J. Juvonen, & K. R. Wentzel (Eds.), *Social Motivation:*

understanding children's school adjustment. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Schunk, D. H., & Zimmerman, B.J. (Eds.) (1998). *Self-regulated Learning: from teaching to self-reflective practice.* New York, NY: Guilford.

SEP. (2011). *Guía para el maestro.* Educación Básica. Secundaria. Matemáticas. México: SEP

SEP. (2012). *Planificaciones para tercer grado*. Educación Básica. Secundaria. Matemáticas. México: SEP

Sessa, C. (2005). *Iniciación al estudio didáctico del álgebra: orígenes y perspectivas* (Vol. 2). Libros del Zorzal.

Snow, R. E., Corno, L., & Jackson, D., III. (1996). Individual differences in affeetive and conative functions. In D. C. Berliner, & R. C. Calfee (Eds.), *Handbook of Educational Psychology* (pp. 243-310). New York: Macmillan.

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. *La educación matemática en la enseñanza secundaria,* 125-154.

Socas, R., M., Camacho, Machín, M., Palarea, M., & Hernandez, D., J. (1996). Iniciación al álgebra. *Colección: Matemáticas: Cultura y Aprendizaje*. Madrid, España: Editorial Síntesis.

Socas, R., M., & Palarea, M. (1997). Las fuentes del significado, los sistemas de representación y errores en el álgebra escolar. *Uno Revista de Didáctica de las Matemáticas. 14,* 7-24.

Sternberg, R. J. (1985). *Beyond IQ: A triarchic theory of human intelligence.* Cambridge, MA: Cambridge University Press.

Swanson, H. L. (1990). Influence of metacognitive knowledge and aptitude on problem solving. *Journal of educational psychology, 82(2),* 306.

Thompson, P. W., & Thompson, A. G. (1987). Computer presentations of structure in algebra. In *Proceedings of the Eleventh Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 248-254).

Tobin, K., & Capie, W. (1984). The Test of Logical Thinking. *Journal of Science and Mathematics Education in Southeast Asia, 7(1),* 5-9.

Ursini, S. (1990). El lenguaje aritmético-algebraico en un ambiente computacional. *Cuadernos de Investigación, 15,* 149-156.

Ursini, S., & Trigueros, M. (2001). A model for the uses of variable in elementary algebra. In *PME CONFERENCE (*Vol. 4, pp. 4-327*).*

Ursini, S., Escareño, F., Montes, D., & Trigueros, M. (2005). *Enseñanza del algebra Elemental: Una propuesta alternativa.* México: Trillas.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. *The ideas of algebra, K-12, 8-19.* Reston, VA: NCTM.

Veenman, M., Kok, R., & Blöte, A. (2005). The relation between intellectual and metacognitive skills in early adolescence. *Instructional Science*, *33*, 193–211.

Vergnaud, G. (1985). *Understanding mathematics at the secondary-school level. Theory, research & practice in mathematical education,* 27-45.

Vergnaud, G., Benhadj, J., & Dussouet, A. (1979). La coordination de l'enseignement des mathématiques entre le cours moyen 2e année et la classe de sixième. *Institut National de Recherche Pedagogique, Paris.*

Wagner, S. (1983). What are these things called variables. *Mathematics Teacher, 76(1),* 474.

Wagner, S., Rachlin, S. L., & Jensen, R. J. (1984). *Algebra learning project: Final report. Department of Mathematics Education, University of Georgia*.

Warren, E. (1999). The concept of a variable: gauging students' understanding. In *PME CONFERENCE* (Vol. 4, pp. 4-313).

Whimbey, A., & Lochhead, J. (1986). Problem solving and comprehension. Hillsdale, NJ: Lawrence.

Winne, P. H. (1996). A metacognitive view of individual differences in self-regulated learning. *Learning and Individual Differences*, *8,* 327–353.

Winne, P. H., & Hadwin, A. F. (1998). Studying as self-regulated learning. *Metacognition in educational theory and practice, 93,* 27-30.

Wolters, C. A., & Pintrich, P. R. (1998). Contextual differences in student motivation and self-regulated learning in mathematics, English, and social studies classrooms. *Instructional science, 26(1-2),* 27-47.

Wright, R. R. (2001). Coaching critical thinking: Tutoring athletes toward self-sufficiency. *Journal of College Reading and Learning, 31(2),* 157-70.

Zeidner, M., Boekaerts, M., & Pintrich, P. R. (2000). Self-regulation: directions and challenges for future research. In M. Boekaerts, P. R. Pintrich, & M. Zeidner (Eds.), *Handbook of Self-regulation.* San Diego, CA: Academic Press.

Zimmerman, B. J. (1986). Development of self-regulated learning: Which are the key subprocesses? *Contemporary Educational Psychology, 16(3),* 307-313.

Zimmerman, B. J. (1989). A social cognitive view of self-regulated academic learning. *Journal of Educational Psychology, 81*, 329–339.

Zimmerman, B. J. (1990). Self-regulating academic learning and achievement: the emergence of a social cognitive perspective. *Educational Psychology Review, 2,* 173–201.

Zimmerman, B. J. (1994). Dimensions of academic self-regulation: A conceptual framework for education. In D. H. Schunk, & B. J. Zimmerman (Eds.), *Self-regulation of learning and performance: Issues and educational applications* (pp. 3-21). Hillsdalr NJ: Erlbaum.

Zimmerman, B. J. (1995). Self-regulation involves more than metacognition: A social cognitive perspective. *Educational Psychologist, 30(4),* 217-221.

Zimmerman, B. J. (1996). Enhancing student academic and health functioning: a self-regulatory perspective. *School Psychology Quarterly, 11,* 47–66.

Zimmerman, B. J. (1998). Academic studying and the development of personal skill: a self-regulatory perspective. *Educational Psychologist, 33,* 73–86.

Zimmerman, B. J. (2000). Attaining self-regulation: a social cognitive perspective. In M. Boekaerts, P. R. Pintrich, & M. Zeidner (Eds.), *Handbook of Self-regulation.* San Diego, CA: Academic Press.

Zimmerman, B. J. (2008). Investigating self-regulation and motivation: Historical background, methodological developments, and future prospects. *American Educational Research Journal*, 45(1), 166-183.

Zimmerman, B. J., & Bandura, A. (1994). Impact of self-regulatory influences on writing course attainment. *American Educational Research Journal, 31,* 845–862.

Zimmerman, B. J., & Kitsantas, A. (1997). Developmental phases in self-regulation: shifting from process goals to outcome goals. *Journal of Educational Psychology, 89,* 29–36.

Zimmerman, B. J., & Martinez-Pons, M. (1986). Development of a structured interview for assessing student use of self-regulated learning strategies. *American Educational Research Journal, 23,* 614–628.

Zimmerman, B. J., & Martinez-Pons, M. (1988). Construct validation of a strategy model of student self-regulated learning. *Journal of Educational Psychology, 80,* 284–290.

Zimmerman, B.J., & Martinez-Pons, M. (1990). Student differences in self-regulated learning: relating grade, sex, and giftedness to self-efficacy and strategy use. *Journal of Educational Psychology*, *82,* 51–59.

Zimmerman, B. J., & Risemberg, R. (1997). Becoming a self-regulated writer: a social cognitive perspective. *Contemporary Educational Psychology, 22*, 73–101.

ANEXO A

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ciencias Físico-Matemáicas
Maestría en Educación Matemática

Prueba Diagnóstica de Pensamiento Algebraico

Nombre de la escuela:_____________________________ Grado:_______ Grupo: ___

Nombre del alumno: ___________________________________ Fecha: ____/____ / ______.

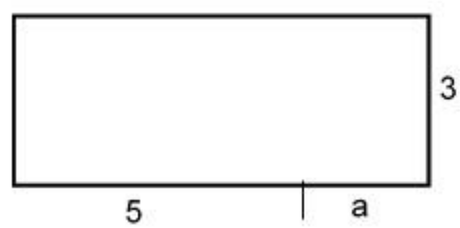
Instrucciones: A continuación se les presentan una serie problemas verbales los que tienen que traducir únicamnete a lenguaje algebraico – o simbólico, en forma clara y ordenada por escrito.

I. El perímetro de una figura geométrica es la suma de las longitudes de cada uno de sus lados. Encuentra el perímetro de las siguientes figuras

a)

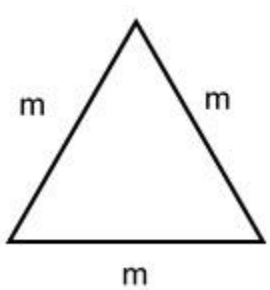
P = ____________________

b)



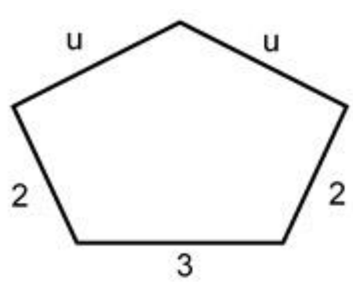
P = ____________________

c)



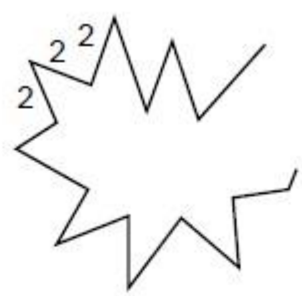
P = ____________

d)



P = _____________

e)



Parte de esta figura no está dibujada. Hay n lados en total, cada uno de longitud 2.

P = _____________

II. Escribe una expresión algebraica para las siguientes cantidades.

1. Un número cualquiera ______________________
2. La suma de dos números distintos ______________________
3. El doble de la suma de dos números ______________________
4. La mitad de un número ______________________
5. El doble de la diferencia entre a y b ______________________

III. A continuación, se presenta una serie de problemas verbales, con base en ellos, elabora una expresión algebraica o ecuación que los explique

Si Juan tiene x pesos, ¿cuántos pesos tendrá Julia en cada caso? (1 al 3)

1. Ella tiene $4 más que Juan ____________
2. Ella tiene $3 menos del doble de lo que tiene Juan ____________
3. Ella tiene $2 más que la mitad de lo que tiene Juan ____________
4. La suma de 4 números impares consecutivos es 136. ¿Qué número ocupa la segunda posición? ______________________________________
5. La edad actual de José es $3/8$ de la de su hermano, y dentro de 4 años tendrá $1/2$ de la que entonces tenga su hermano. ¿Cuál es a edad actual del hermano? ______________________________________
6. Dos números suman 25 y el doble de uno de ellos es 14. ¿Qué números son? ____________ ______________________________________
7. En una granja hay gallinas y conejos. En total hay 19 cabezas y 60 patas. ¿Cuántas gallinas y cuántos conejos hay? ______________________________________
8. El producto de dos números consecutivos es 552. ¿Cuáles son esos números? ______________________________________
9. La altura de un triángulo isósceles es 3 cm menor que la base. Calcula las medidas de la base y la altura si el área es 299 cm^2. ______________________________________
10. Un terreno rectangular mide 2 m más de largo que de ancho y su área es de 80 m^2 ¿Cuáles son sus dimensiones? ______________________________________

ANEXO B

Test de Razonamiento Lógico, versión en español del TOLT

INSTRUCCIONES

El cuestionario que te presentamos tiene por finalidad poder comprender mejor la lógica que usas para pensar. El razonamiento que elijas para cada respuesta se considera tan importante como la respuesta misma.

Para responder cada pregunta marca la respuesta en la hoja que se te entrega. Por favor, no escribas nada sobre las preguntas del cuestionario.

Para responder cada una de las preguntas sigue los siguientes pasos.

1. Lee con cuidado el enunciado de cada pregunta.
2. Piensa detenidamente la respuesta haciendo los cálculos que estimes oportunos.
3. Escribe la respuesta en el recuadro correspondiente de la hoja de respuestas.

Ej. 12. $\boxed{b}$ Razón $\boxed{}$

4. Lee todos los razonamientos que se presentan como posibles explicaciones de la respuesta que has elegido.
5. Selecciona cuidadosamente la opción que consideres oportuna teniendo en cuenta el razonamiento que utilizaste en tu respuesta.
6. Señala en el recuadro correspondiente de la hoja de respuestas la letra que indique la opción que has elegido.

Ej. 12. $\boxed{b}$ Razón $\boxed{4}$

7. Si en algún momento quieres modificar la respuesta ofrecida, táchala y señala la nueva de la forma que se te indica a continuación.

Ej. 12. $\boxed{b}$ Razón 3 $\boxed{\cancel{4}}$

No olvides escribir tu nombre en la hoja de respuestas.

PREGUNTA 1:

Se necesita exprimir 4 naranjas para obtener seis vasos de jugo. ¿Qué cantidad de jugo se podría obtener con seis naranjas? (Considera que todas las naranjas son del mismo tamaño)

a. 7 vasos
b. 8 vasos
c. 9 vasos
d. 10 vasos
e. Otra respuesta

Razón

1. El número de vasos y el número de naranjas estarán siempre en la relación 3 a 2.
2. Con más naranjas, las diferencias serán menores.
3. La diferencia entre las cantidades será siempre de dos.
4. Con cuatro naranjas la diferencia era dos. Con seis naranjas la diferencia sería dos más.
5. No se podría predecir.

PREGUNTA 2:

Usando las mismas naranjas de la pregunta 1. ¿Cuántas naranjas se necesitarían para hacer 15 vasos de jugo?

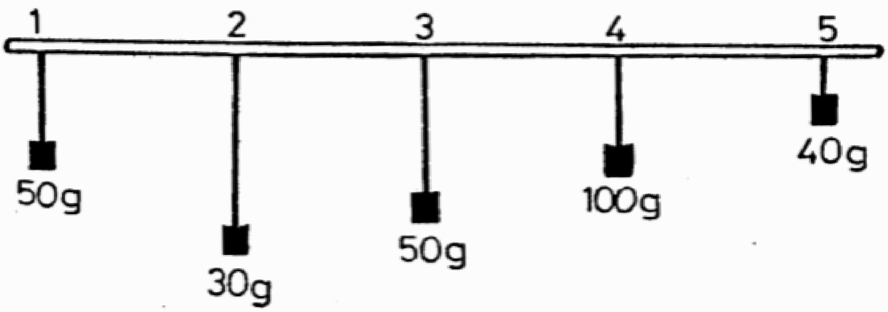
a. 7 naranjas y media
b. 9 naranjas
c. 10 naranjas
d. 13 naranjas
e. Otra respuesta

Razón

1. El número de naranjas y el número de vasos de jugo estarán siempre en la relación 2 a 3.
2. El número de naranjas será siempre menor que el número de vasos de jugo.
3. La diferencia entre las cantidades será siempre de dos.
4. El número de naranjas necesarias será la mitad del número de vasos de jugo
5. No se podría predecir

PREGUNTA 3:

Supongamos que queremos hacer un experimento para averiguar si al modificar la longitud de un péndulo cambia también la cantidad de tiempo que tarda en oscilar de un lado a otro. ¿Qué péndulos deberíamos usar para realizar dicho experimento?



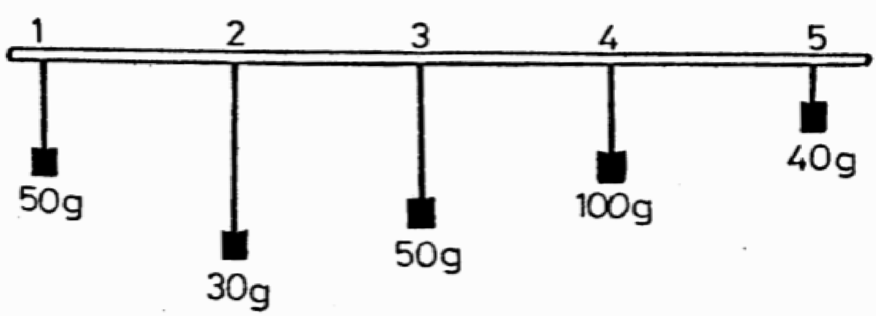
a. 1 y 4
b. 2 y 4
c. 1 y 3
d. 2 y 5
e. Todos

Razón

1. Compararíamos el péndulo más largo con el más corto.
2. Necesitaríamos comparar todos los péndulos entre sí.
3. Al aumentar la longitud tendríamos que disminuir el peso.
4. Los péndulos elegidos tendrían que tener todas las mismas longitudes y distinto peso.
5. Los péndulos elegidos tendrían que tener todos distinta longitud e igual peso.

PREGUNTA 4:

Supongamos que queremos realizar un experimento para averiguar si al cambiar el peso del péndulo cambia también la cantidad de tiempo que tarda en oscilar de un lado a otro. ¿Qué péndulos tendríamos que usar para realizar dicha experiencia?



a. 1 y 4
b. 2 y 4
c. 1 y 3
d. 2 y 5
e. Todos

Razón

1. Compararíamos el péndulo más pesado con el más ligero.
2. Necesitaríamos comparar todos los péndulos entre sí.
3. Al aumentar el peso tendríamos que disminuir la longitud.
4. Los péndulos elegidos tendrían que tener diferente peso y la misma longitud.
5. Compararíamos péndulos de igual peso y distinta longitud.

Pregunta 5:

Un jardinero compró un paquete que contenía 3 semillas de calabaza y 3 semillas de frijol. Si se extrae una semilla del paquete, ¿Cuál es la probabilidad de que ésta sea de frijol?

a. 1 de cada 2
b. 1 de cada 3
c. 1 de cada 4
d. 1 de cada 6
e. 4 de cada 6

Razón

1. Se necesitarían cuatro extracciones dado que las tres semillas de calabaza podrían suceder que se extrajesen seguidas.
2. Hay seis semillas entre las cuales ha de extraerse una de frijol.
3. De las tres semillas de frijol que hay se necesita extraer una.
4. La mitad de las semillas son de frijol.
5. Del total de seis semillas, además de la de frijol se podrían extraer tres de calabaza.

PREGUNTA 6:

Un jardinero compró un paquete que contenía 21 semillas de diversas clases. La composición era la siguiente:

3 de flores pequeñas rojas
4 de flores pequeñas amarillas
5 de flores pequeñas naranjas
4 de flores grandes rojas
2 de flores grandes amarillas
3 de flores grandes naranjas

Si sólo ha de plantar una semilla, ¿cuál es la probabilidad de que la planta resultante tenga flores rojas?

a. 1 de cada 2

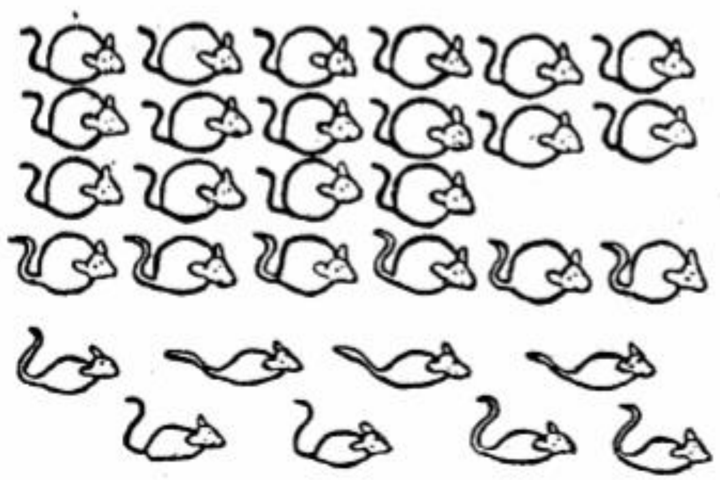
b. 1 de cada 3
c. 1 de cada 7
d. 1 de cada 21
e. Otra respuesta

Razón

1. Ha de elegir una semilla entre aquellas que dan flores rojas, amarillas o naranjas.
2. 1/4 de las pequeñas y 4/9 de las grandes son rojas.
3. No importa que sean pequeñas o grandes. De las siete semillas rojas que hay se ha de elegir una.
4. Ha de seleccionar una semilla roja de un total de 21 semillas.
5. Siete de las 21 semillas darán flores rojas.

PREGUNTA 7:

La siguiente figura representa una muestra de los ratones que viven en un campo. A partir de la figura, indica si es más probable que tengan cola negra los ratones gordos que los delgados.



a. Sí. Los ratones gordos tienen mayor probabilidad de tener cola negra que los delgados.
b. No. Los ratones gordos no tienen más probabilidad de tener cola negra que los delgados.

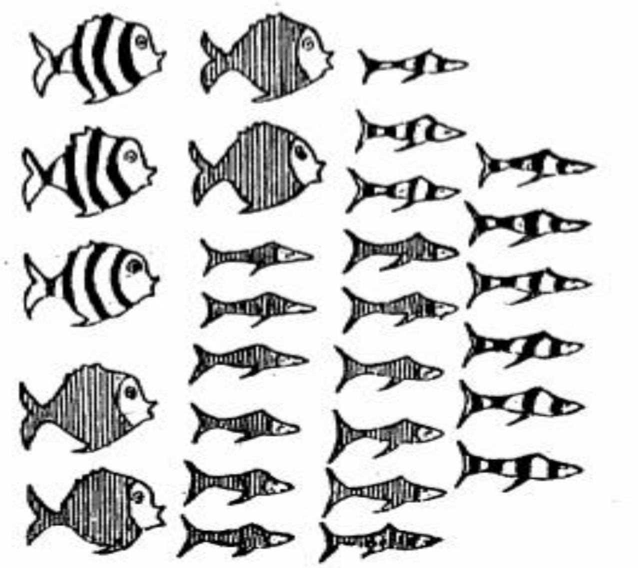
Razón

1. 8/11 de los ratones gordos tienen cola negra y 3/4 de los ratones delgados tienen cola blanca.
2. Tanto alguno de los ratones gordos como alguno de los ratones delgados tienen cola blanca.
3. De los treinta ratones, 18 tienen cola negra y 12 cola blanca.
4. Ni todos los ratones gordos tienen cola negra, ni todos los delgados tienen cola blanca.

5. 6/12 de los ratones con cola blanca son gordos.

PREGUNTA 8:

¿Es más probable que tengan rayas anchas los peces gordos que los peces delgados?



a. Sí
b. No

Razón

1. Unos peces gordos tienen rayas anchas y otros estrechas.
2. 3/7 de los peces gordos tienen rayas anchas.
3. 12/28 tienen rayas anchas y 16/28 las tienen estrechas.
4. 3/7 de los peces gordos y 9/21 de los peces delgados tienen rayas anchas.
5. Algunos de los peces con rayas anchas son delgados y otros son gordos.

PREGUNTA 9:

Tres estudiantes de cada uno de los cursos de 1^0, 2^0 y 3^0 de preparatoria son candidatos al consejo escolar. La representación estará constituida por un estudiante de cada curso. Cada votante debe considerar todas las combinaciones posibles antes de decidir su voto.

Dos posibles combinaciones serían Tomas, José y Pedro (TJP); e Isabel, Carmen y María (ICM).

Has una lista con todas las combinaciones posibles usando los espacios que se ofrecen en la hoja de respuestas. Hay más espacios de los necesarios.

CONSEJO ESCOLAR

1^0 DE PREPA	2^0 DE PREPA	3^0 DE PREPA
Tomás (T)	José (J)	Pedro (P)
Isabel (I)	Carmen (C)	María (M)

Antonio (A)   Beatriz (B)   Luís (L)

PREGUNTA 10:

Se prevé abrir en breve 4 tiendas en un nuevo centro comercial.

Optan por comprar los locales una peluquería (P), una farmacia (F), un supermercado (S) y una cafetería (C).

Cada uno de los negocios mencionados ha de ocupar uno de los locales previstos.

Una posible forma de ocupación sería PFSC.

Has una lista con todas las formas posibles de ocupación de los locales.

Hay más espacios en la hoja de respuestas de los que son necesarios.

1	2	3	4

HOJA DE RESPUESTAS

APELLIDOS…………………………………………………………….
NOMBRE…………………………………….

ESCUELA……………………………………………….GRADO Y GRUPO…………

1._ **RAZON._**

2._ **RAZON._**

3._ **RAZON._**

4._ **RAZON._**

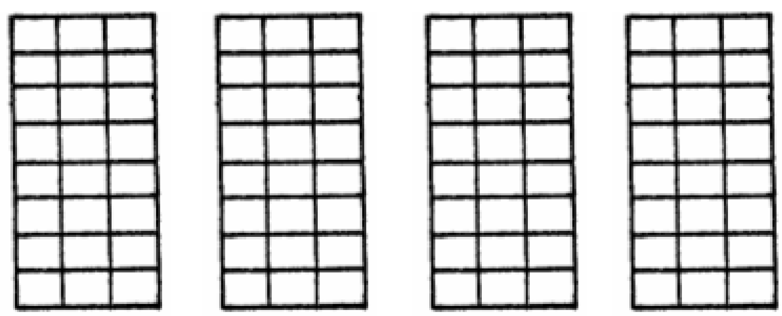
5._ **RAZON._**

6._ **RAZON._**

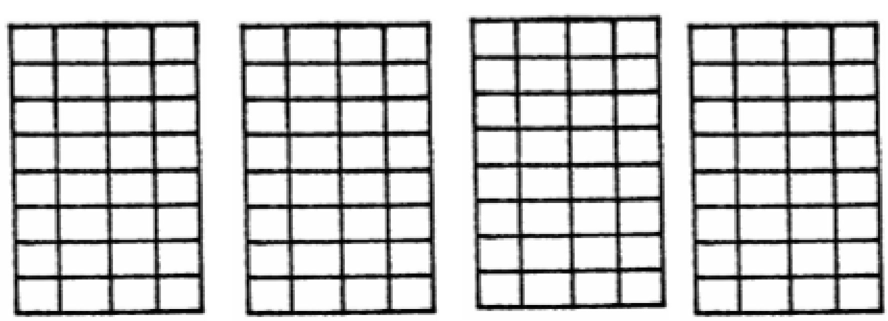
7._ **RAZON._**

8._ RAZON._

9._



10._



ANEXO C

Metacognitive Awareness Inventory (MAI)

Cuestionario sobre Estrategias Metacognitivas

El propósito de este proyecto de investigación educativo es conocer qué estrategias metacognitivas utilizas en tu proceso de aprendizaje de las matemáticas.

INSTRUCCIONES: Marque la opción elegida con una cruz X. Todas las preguntas tienen cinco opciones de respuesta, elige la que mejor describa lo que piensas. Solamente una opción. No hay respuestas correctas o incorrectas. Estas simplemente reflejan tu opinión personal. Tus respuestas serán anónimas y absolutamente confidenciales. De antemano: ¡MUCHAS GRACIAS POR TU COLABORACIÓN!

Utiliza la siguiente escala:

1 = Nunca o casi nunca
2 = La mayoría de las veces no.
3 = Algunas veces
4 = La mayoría de las veces si
5 = Siempre o casi siempre

N° Estrategias	1	2	3	4	5
1. Me pregunto periódicamente si conozco mis objetivos.	○	○	○	○	○
2. Considero varias alternativas a un problema antes que conteste.	○	○	○	○	○
3. Trato de utilizar estrategias que han funcionado en el pasado.	○	○	○	○	○
4. Auto-regulo la velocidad de los tiempos al aprender para tener suficiente tiempo.	○	○	○	○	○
5. Comprendo mis fortalezas y debilidades intelectuales.	○	○	○	○	○
6. Pienso lo que debo realmente aprender antes de empezar una tarea	○	○	○	○	○
7. Sé cuán bien lo hice una vez que termino un examen.	○	○	○	○	○
8. Establezco objetivos específicos antes de empezar una tarea.	○	○	○	○	○
9. Voy más despacio cuando me encuentro con información importante.	○	○	○	○	○
10. Sé qué clase de información es más importante aprender.	○	○	○	○	○
11. Me pregunto si he considerado todas las opciones al resolver un problema.	○	○	○	○	○
12. Soy bueno en organizar información.	○	○	○	○	○
13. Enfoco conscientemente mi atención en la información importante.	○	○	○	○	○
14. Tengo un propósito específico para cada estrategia que utilizo.	○	○	○	○	○
15. Aprendo mejor cuando sé algo acerca del tema.	○	○	○	○	○

16. Sé lo que el maestro espera que aprenda. ○ ○ ○ ○ ○
17. Soy bueno en recordar información. ○ ○ ○ ○ ○
18. Utilizo diferentes estrategias de aprendizaje dependiendo de la situación. ○ ○ ○ ○ ○
19. Me pregunto si había una manera más fácil de hacer las cosas después de haber terminado una tarea. ○ ○ ○ ○ ○
20. Tengo control sobre cuán bien aprendo. ○ ○ ○ ○ ○
21. Reviso periódicamente para ayudarme a comprender las relaciones importantes. ○ ○ ○ ○ ○
22. Me pregunto yo mismo acerca del material antes de empezar. ○ ○ ○ ○ ○
23. Pienso en varias maneras de resolver un problema y escoger la mejor. ○ ○ ○ ○ ○
24. Resumo lo que he aprendido después de terminar. ○ ○ ○ ○ ○
25. Solicito ayuda a otros cuando no comprendo algo. ○ ○ ○ ○ ○
26. Puedo motivarme para aprender cuando lo necesito. ○ ○ ○ ○ ○
27. Estoy consciente de qué estrategias utilizo cuando estudio. ○ ○ ○ ○ ○
28. Me doy cuenta analizando la utilidad de las estrategias mientras estudio. ○ ○ ○ ○ ○
29. Utilizo mis fortalezas intelectuales para compensar mis debilidades. ○ ○ ○ ○ ○
30. Me centro en el significado y el significado de la nueva información. ○ ○ ○ ○ ○
31. Creo mis propios ejemplos para hacer la información más significativa. ○ ○ ○ ○ ○
32. Soy un buen juez de cuán bien comprendo algo. ○ ○ ○ ○ ○
33. Me doy cuenta del uso de estrategias de aprendizaje útiles automáticamente. ○ ○ ○ ○ ○
34. Me doy cuenta deteniéndome para verificar regularmente mi comprensión. ○ ○ ○ ○ ○
35. Sé cuando cada estrategia que utilizo será más efectiva. ○ ○ ○ ○ ○
36. Me pregunto cuán bien logro mis objetivos una vez que he finalizado. ○ ○ ○ ○ ○
37. Hago dibujos o esquemas para ayudarme a comprender al aprender. ○ ○ ○ ○ ○
38. Me pregunto si he considerado todas las opciones después de resolver un problema. ○ ○ ○ ○ ○
39. Trato de traducir la nueva información en mis propias palabras. ○ ○ ○ ○ ○
40. Cambio de estrategias cuando fallo al comprender. ○ ○ ○ ○ ○
41. Utilizo la estructura organizativa del texto para ayudarme a aprender. ○ ○ ○ ○ ○
42. Leo las instrucciones con cuidado antes de empezar una tarea. ○ ○ ○ ○ ○

43. Me pregunto si lo que leo está relacionado con lo que yo ya sé.	○	○	○	○	○
44. Reevalúo mis suposiciones cuando estoy confundido.	○	○	○	○	○
45. Organizo mi tiempo para lograr mejor mis objetivos.	○	○	○	○	○
46. Aprendo más cuando estoy interesado en el tema.	○	○	○	○	○
47. Trato de romper estudiando abajo en pasos más pequeños.	○	○	○	○	○
48. Me centro en el significado general en lugar del significado detallado.	○	○	○	○	○
49. Me pregunto yo mismo acerca de cuán bien lo hago mientras aprendo algo nuevo.	○	○	○	○	○
50. Me pregunto si aprendí tanto como lo que podría haber aprendido una vez terminada una tarea.	○	○	○	○	○
51. Paro y vuelvo a leer sobre la nueva información que no es clara.	○	○	○	○	○
52. Paro y vuelvo a leer cuando estoy confundido.	○	○	○	○	○

ANEXO D: MSLQ

Motivated Strategies for Learning Questionnaire (MSLQ)

Cuestionario de Estrategias de Aprendizaje y Motivación

Parte A: Motivación (preguntas 1-31)
El primer conjunto de preguntas es para obtener información acerca de tus actitudes y motivación ante tus cursos, específicamente de matemáticas. No hay respuestas correctas ni equivocadas. Utiliza la escala para contestar las preguntas. Si piensas que la declaración es verdadera en ti, selecciona 5; si la declaración no es verdadera en ti, selecciona 1. Si la declaración es más o menos verdadera en ti, selecciona el número entre 1 y 5 que mejor te describe.

Parte B: Estrategias de aprendizaje (preguntas 32-81)
Estas preguntas son para obtener información acerca de tus estrategias de aprendizaje y habilidades de estudio. No hay respuestas correctas ni equivocadas. Contesta las preguntas tan exactamente como te sea posible, es la misma escala usada para las preguntas 1 hasta 31.

	1	2	3	4	5	6	7
1. Prefiero el material del curso que realmente me desafíe de modo que pueda aprender nuevas cosas.	○	○	○	○	○	○	○
2. Si estudio de manera apropiada, entonces podré aprender el material del curso.	○	○	○	○	○	○	○
3. Cuando presento un examen, pienso cuán mal lo estoy haciendo comparado con otros estudiantes.	○	○	○	○	○	○	○
4. Pienso que podré utilizar lo que aprendo en el curso en otros cursos que tomo.	○	○	○	○	○	○	○
5. Creo que recibiré una calificación excelente en el curso.	○	○	○	○	○	○	○
6. Estoy seguro que puedo comprender el material más difícil presentado en las lecturas para el curso.	○	○	○	○	○	○	○
7. Conseguir buenas calificaciones en el curso es lo más satisfactorio para mí en este momento.	○	○	○	○	○	○	○
8. Cuando presento un examen, pienso en las preguntas de otras partes del examen que no puedo contestar.	○	○	○	○	○	○	○
9. Es mi culpa si no aprendo el material del curso.	○	○	○	○	○	○	○
10. Es importante para mí aprender el material del curso.	○	○	○	○	○	○	○
11. Lo más importante para mí ahora mismo es mejorar mi promedio general, así que mi principal preocupación es obtener buenas calificaciones en mis cursos.	○	○	○	○	○	○	○
12. Estoy seguro que puedo aprender los conceptos básicos enseñados en el curso.	○	○	○	○	○	○	○

13. Si puedo y quiero, obtengo mejores calificaciones en el curso que la mayor parte de los otros estudiantes.	○	○	○	○	○	○	○
14. Cuando presento los exámenes, pienso en las consecuencias de no aprobar.	○	○	○	○	○	○	○
15. Estoy seguro que puedo comprender el material más complejo presentado por el profesor en el curso.	○	○	○	○	○	○	○
16. Prefiero el material del curso que despierte mi curiosidad, incluso si es difícil de aprender.	○	○	○	○	○	○	○
17. Estoy muy interesado en el contenido del curso.	○	○	○	○	○	○	○
18. Si me esfuerzo lo suficiente, entonces comprenderé el material del curso.	○	○	○	○	○	○	○
19. Me siento ansioso y preocupado cuando presento un examen.	○	○	○	○	○	○	○
20. Estoy seguro que puedo hacer un excelente trabajo en las tareas y exámenes del curso.	○	○	○	○	○	○	○
21. Espero trabajar bien en el curso.	○	○	○	○	○	○	○
22. Lo más satisfactorio para mí en el curso es comprender totalmente el contenido tanto como sea posible.	○	○	○	○	○	○	○
23. Pienso que el material del curso es generalmente útil para aprender.	○	○	○	○	○	○	○
24. Cuando tengo la oportunidad, escojo las tareas del curso de las que puedo aprender, incluso si no garantizan una buena calificación.	○	○	○	○	○	○	○
25. Si no comprendo el material del curso, es porque no me he esforzado lo suficiente.	○	○	○	○	○	○	○
26. A mí me gustan generalmente los temas de la asignatura.	○	○	○	○	○	○	○
27. Comprender el tema del curso es muy importante para mí.	○	○	○	○	○	○	○
28. Siento latir mi corazón rápidamente cuando presento un examen.	○	○	○	○	○	○	○
29. Estoy seguro que puedo dominar las habilidades enseñadas en el curso.	○	○	○	○	○	○	○
30. Quiero trabajar bien en el curso porque es importante mostrar mi capacidad a mi familia, a mis amigos, o a otros.	○	○	○	○	○	○	○
31. Teniendo en cuenta la dificultad del curso, del maestro, y de mis habilidades, pienso que trabajaré bien en mis tareas académicas.	○	○	○	○	○	○	○

32. Cuando estudio las lecturas para el curso, resumo el material para ayudarme a organizar mis pensamientos.
33. Durante la clase a menudo pierdo los puntos importantes porque estoy pensando en otras cosas.
34. Al estudiar, a menudo, trato de explicar el material a un compañero de clase o a un amigo.
35. Estudio generalmente en un lugar donde puedo concentrarme en mis trabajos.
36. Al leer, me hago preguntas para ayudar a concentrarme en la lectura.
37. A menudo me siento tan perezoso o aburrido cuando estudio un tema que dejé antes de terminar lo que planeé hacer.
38. A menudo me encuentro preguntándome cosas que oigo o leo en el curso para decidir si lo encuentro convincente.
39. Cuando estudio, practico diciendo el material a mí mismo una y otra vez.
40. Aun cuando tuviese problemas en aprender el material del curso, trato de hacer el trabajo solo, sin ayuda de alguien.
41. Si llego a estar confundido acerca de algo de lo que estoy leyendo del curso, vuelvo a leer y trato de resolverlo.
42. Cuando estudio, repaso las lecturas y mis notas y trato de encontrar las ideas más importantes.
43. Hago buen uso de mi tiempo de estudio para mis cursos.
44. Si las lecturas del curso son difíciles de comprender, cambio la manera con la que leí el material.
45. Trato de trabajar con otros estudiantes del curso para realizar las tareas.
46. Al estudiar, leo mis notas de clase y las lecturas del curso, una y otra vez.
47. Cuando una teoría, una interpretación, o una conclusión es presentada en la clase o en las lecturas, trato de decidir si hay una buena evidencia de apoyo.
48. Trabajo con ahínco para hacer bien el curso incluso si no me gusta lo que hacemos en él.

49. Hago gráficos sencillos, esquemas, o tablas para ayudarme organizar el material del curso.
50. Al estudiar, a menudo establezco tiempos para discutir el material del curso con un grupo de estudiantes de la clase.
51. Tomo el material del curso como un punto de partida y trato de desarrollar mis propias ideas acerca de ello.
52. Encuentro difícil cumplir con un horario de estudio.
53. Cuando estudio, saco información de fuentes diferentes.
54. Antes de estudiar totalmente el nuevo material del curso, a menudo lo examino para ver cómo está organizado.
55. Me pregunto a mí mismo para asegurarme de que comprendo el material que he estado estudiando en el curso.
56. Trato de cambiar la manera en la que estudio para ajustarme a los requisitos del curso y el estilo de enseñanza del profesor.
57. A menudo encuentro que he estado leyendo, pero no sé todo acerca de lo que leí.
58. Pido al profesor que clarifique los conceptos que no comprendo bien.
59. Memorizo palabras clave para acordarme de conceptos importantes del curso.
60. Cuando los trabajos del curso son difíciles, ya sea, los dejo o sólo estudio las partes fáciles.
61. Trato de pensar de que trata un tema y decidir lo que supongo aprender de ello antes de sólo leerlo rápidamente al estudiar.
62. Trato de relacionar ideas de una asignatura con las de otros cursos siempre que sea posible.
63. Cuando estudio, repaso mis notas de clase y hago un resumen de conceptos importantes.
64. Al leer, trato de relacionar el material con lo que ya sé.
65. Tengo un lugar habitual para estudiar.
66. Trato de representar mis propias ideas relacionadas con lo que aprendo en el curso.

67. Cuando estudio, escribo resúmenes breves de las principales ideas de las lecturas y mis notas de clase.

68. Cuando no puedo comprender el material del curso, solicito la ayuda a otro estudiante.

69. Trato de comprender el material del curso haciendo conexiones entre las lecturas y los conceptos de las clases.

70. Me aseguro de estar al ritmo con las lecturas y tareas semanales del curso.

71. Siempre que leo o escucho una afirmación o la conclusión en un curso, pienso en alternativas posibles.

72. Hago listas de importantes ítems del curso y memorizo las listas.

73. Asisto al curso regularmente.

74. Aun cuando los materiales del curso son poco interesantes, logro mantenerme trabajando hasta terminar.

75. Trato de identificar a los estudiantes del curso a quienes puedo pedir ayuda si es necesario.

76. Al estudiar, trato de determinar qué conceptos no comprendo bien.

77. A menudo encuentro que no invierto mucho tiempo en el curso a causa de otras actividades.

78. Cuando estudio matemáticas, establezco objetivos para dirigir mis actividades en cada período de estudio.

79. Si estoy confundido al tomar apuntes en la clase, yo me aseguro de arreglarlo después.

80. Tengo raramente tiempo para revisar mis notas o mis lecturas antes de un examen.

81. Trato de aplicar las ideas de las lecturas del curso a otras actividades de la clase como conferencias y debates.

NEXO E. ACTIVIDADES

Actividad 1

Equipo: _____________ Fecha: ___________________________

Instrucciones. A continuación, se presenta una serie de problemas verbales, con base en ellos, escribe una expresión algebraica que lo represente.

Un número cualquiera: ____

La suma de dos números distintos: ____

El doble de la suma de dos números: ____

La mitad de un número: ____

El doble de la diferencia entre a y b:____

El doble de un número menos 5:____

El cuádruplo de número n más 7:____

El triple de un número más el doble del mismo número. ______________________________

El doble de un número por y:____

El cuadrado de un número: ____

El cuadrado de la suma de dos cantidades: _______________________________________

El cuadrado de la diferencia de dos cantidades: ___________________________________

El producto de la suma por la diferencia de dos cantidades : __________________________

Actividad 2

Equipo: ____________ Fecha: _________________________

Instrucciones. A continuación, se presenta una serie de problemas verbales cuantitativos, con base en ellos, elabora una expresión algebraica o ecuación que los explique.

(1-3) Si Juan tiene x pesos, ¿cuántos pesos tendrá Julia en cada caso?

1. Ella tiene $4 más que Juan.

   ____

2. Ella tiene $3 menos del doble de lo que tiene Juan.

   ____

3. Ella tiene $2 más que la mitad de lo que tiene Juan.

   ____

(4-7) Si José tiene x años y Julia es 4 años más joven, ¿qué edad tiene Alfredo en cada caso?

4. Alfredo tiene 3 años más que Julia.

   ____

5. Alfredo es 1 año mayor que la edad promedio de José y Julia.

   ____

6. Alfredo es 10 años menor que la suma de las edades de José y de Julia.

   ____

7. Alfredo es 2 años menor que cinco veces la diferencia de las edades de José y de Julia.

   ____

Actividad 3

Equipo: ____________ Fecha: _________________________

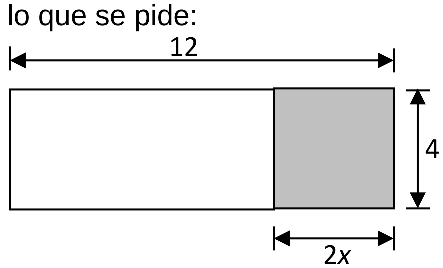
Instrucciones. A continuación, se presenta una serie de problemas verbales cuantitativos, con base en ellos, elabora una ecuación que los explique.

1. La suma de 4 números impares consecutivos es 136. ¿Qué número ocupa la segunda posición?

2. Vanessa tiene 62 años de edad y Miguel tiene 16 años. ¿Cuántos años tomará para que Vanessa tenga solamente 3 veces la edad de Miguel?

3. Armando tiene 18 años de edad y Diana tiene 2 años de edad. ¿En cuántos años tendrá Armando el triple de la edad de Diana?

4. Organizados en equipos analicen la siguiente figura, resuelvan el siguiente problema; luego respondan lo que se pide:



a) ¿Cuáles son las medidas de los lados del rectángulo blanco? _______________

____

b) ¿Cuál es el perímetro y el área del rectángulo blanco? _____________________

____

c) ¿Cuál es el perímetro y el área de la parte sombreada? ____________________

____

Al terminar, comparen sus respuestas con las de otros equipos.

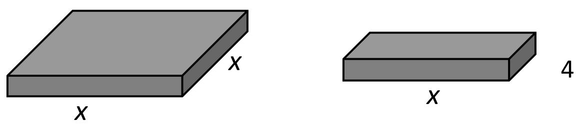
Actividad 4

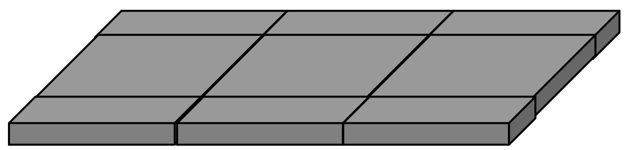
Equipo: ____________ Fecha: _________________________

Instrucciones. A continuación, se presenta una serie de problemas verbales, aritméticos y geométricos, cuantitativos; con base en ellos, elabora una expresión algebraica o ecuación que los explique.

1. Organizados en equipos, resuelvan el siguiente problema:

   Se está armando una plataforma con piezas de madera como las siguientes:





Plataforma

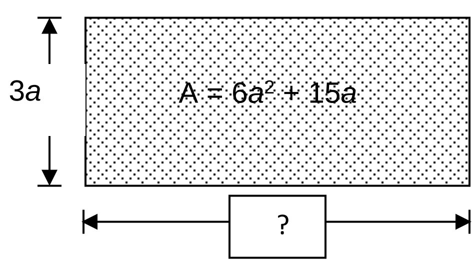
De acuerdo con las dimensiones que se indican en los modelos:

a) ¿Cuáles son las dimensiones (largo y ancho) de la plataforma?

b) ¿Cuál es la expresión algebraica que representa el área de la plataforma?

c) ¿Cuál es la expresión algebraica que representa el perímetro de la plataforma?

2. ¿Cuánto mide el largo del siguiente rectángulo?



Actividad 4ª

Equipo: ____________   Fecha: _________________________

Instrucciones. A continuación, se presenta una serie de problemas verbales, aritméticos y geométricos, cuantitativos; con base en ellos, elabora una expresión algebraica o ecuación que los explique.

1. En equipos, resuelvan el siguiente problema:

   De un cuadrado cuyo lado mide x, (Fig. A), se recortan algunas partes y queda un cuadrado más pequeño, como se muestra en la figura B. ¿Cuál es el área de la parte sombreada de la Fig. B?

Fig. A

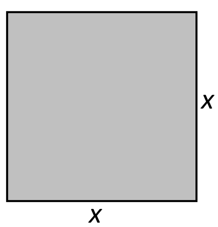
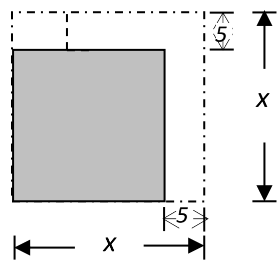
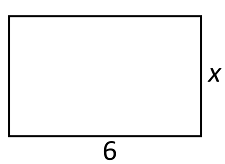
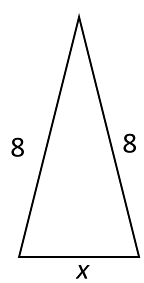


Fig. B



2. Integrados en equipos resuelvan el siguiente problema:
   Considerando que las siguientes figuras tienen igual perímetro, ¿cuál es el valor de x?





Actividad 5

Equipo: ____________ Fecha: _________________________

Instrucciones. A continuación, se presenta una serie de problemas verbales, aritméticos y geométricos, cuantitativos; con base en ellos, elabora una expresión algebraica o ecuación que los explique.

1. Integrados en equipos resuelvan el siguiente problema:
   Un avión que vuela a una velocidad de 1 040 kilómetros por hora, va a alcanzar a otro que lleva una delantera de 5 horas y está volando a 640 kilómetros por hora. ¿Cuánto tardará el primer avión en alcanzar al segundo?

2. Integrados en equipos resuelvan el siguiente problema:
   La edad actual de José es 3/8 de la de su hermano, y dentro de 4 años tendrá 1/2 de la que entonces tenga su hermano. ¿Cuál es a edad actual del hermano?

Actividad 6

Equipo: ____________ Fecha: _________________________

Instrucciones. A continuación, se presenta una serie de problemas verbales, aritméticos y geométricos, cuantitativos; con base en ellos, elabora una expresión algebraica o ecuación que los explique.

1. Organizados en equipos, resuelvan los siguientes problemas.
   Una bolsa contiene en total 21 frutas, de las cuales algunas son peras y otras son duraznos. Si la cantidad de peras que hay en la bolsa es 11 unidades más que la cantidad de duraznos, ¿cuántas peras y cuántos duraznos hay en la bolsa?

2. Alejandra y Érica fueron al cine y compraron dos helados sencillos de chocolate y un refresco en vaso grande por $ 35.00. Si se sabe que el precio del refresco en vaso grande vale la mitad del precio de un helado sencillo de chocolate, ¿cuál es el precio de un helado de chocolate y cuál el de un refresco en vaso grande?

3. Elena compró blusas y faldas, sabemos que el costo de dos blusas equivale a 300 pesos menos el costo de 3 faldas y por otra parte cada blusa cuesta veinticinco pesos más que cada falda ¿Cuánto cuesta cada prenda?

4. Para el día del estudiante los alumnos del grupo A compraron hamburguesas y refrescos. Un equipo compró 5 hamburguesas y 3 refrescos y pagaron $285. Otro equipo compró, a los mismos precios, 2 hamburguesas y 3 refrescos y pagaron $150. ¿Cuánto les costó cada hamburguesa y cada refresco?

5. Se tiene 6 lb de café 5 lb de azúcar cuyo costo fue de 2.27 dólares y posteriormente 5 lb de café y 4 lb de azúcar a los mismos precios costaron 1.88 dólares. Hallar el precio de una libra de café y una de azúcar.

Actividad 7

Equipo: ____________ Fecha: _________________________

Instrucciones. A continuación, se presenta una serie de problemas verbales, aritméticos y geométricos, cuantitativos; con base en ellos, elabora una expresión algebraica o ecuación que los explique.

1. La diferencia de dos números A y B es 14; además se tiene que un cuarto de su suma da como resultado 13. Hallar los números.

2. Durante una aventura ecoturística un bote navega por un río; recorre 15 km en un tiempo de una hora y media a favor de la corriente en la ida y luego12 km en 2 horas contra la corriente en la vuelta. Hallar la velocidad del bote y la velocidad del río.

3. Se tiene que la suma de tres números A, B y C es 160. Donde un cuarto de la suma del mayor y el mediano equivalente al menor disminuido en 20, y si a un medio de las diferencias entre las mayor y el menor se suma el número de en medio, el resultado es 57. Hallar los números.

4. Hace 8 años la edad de Mariana era el tripe que la edad de Pablo; y dentro de cuatro años la edad de Mariana será los 5/9 de la edad de Pablo. Hallar ambas edades.

5. Bruno y Jaime juntos tienen $75. Si Jaime tiene $5 más que Bruno, ¿cuánto dinero tiene Jaime?

Actividad 8

Equipo: ____________ Fecha: _________________________

Instrucciones. A continuación, se presenta una serie de problemas verbales, aritméticos y geométricos, cuantitativos; con base en ellos, elabora una expresión algebraica o ecuación que los explique.

1. En una clase de matemáticas para la administración hay 52 estudiantes. Si el número de chicos es 7 más que el doble de chicas, determina el número de chicas en la clase.

2. Un padre es tres veces mayor que su hijo. En 12 años, él tendrá el doble de la edad de su vástago. ¿Qué edades tienen el padre y el hijo ahora?

3. Hace cinco años, María tenía el doble de la edad de su hermano. Encuentre la edad actual de María si la suma de sus edades hoy es de 40 años.

4. Susana tiene 3 monedas más de cinco centavos que de diez centavos, y 5 monedas más de diez centavos que monedas de veinticinco centavos. En total tiene \$2.10. ¿Cuántas monedas de cada una tiene?

5. Yo tengo el doble de monedas de diez centavos en mi bolsillo que de monedas de veinticinco centavos. Si tuviera 4 monedas menos de diez centavos y 3 monedas más de veinticinco centavos, tendría \$2.60. ¿Cuántas monedas de diez centavos y de veinticinco centavos tengo?

Actividad 9

Equipo: ____________ Fecha: _________________________

Instrucciones. A continuación, se presenta una serie de problemas verbales aritméticos y geométricos cuantitativos, con base en ellos, elabora una expresión algebraica o ecuación que los explique.

1. El cuadrado de un número menos 5 es igual a 220. ¿Cuál es ese número?

2. El cuadrado de un número más el mismo número es igual a 306. ¿Cuál es ese número?

3. El producto de dos números consecutivos es 552. ¿Cuáles son esos números?

4. El cuadrado de un número es igual al triple del mismo. ¿De qué número se trata?

5. El cuadrado de un número menos el doble del mismo número es igual a 24. ¿Cuál es ese número?

6. El cuadrado de un número es igual a la tercera parte del mismo más 8. ¿Cuál es ese número?

7. El área de un cuadrado es igual a 8 veces la medida de su lado. ¿Cuánto mide por lado el cuadrado?

8. El triple del área de un cuadrado menos seis veces la medida de su lado es igual a cero. ¿Cuánto mide por lado el cuadrado?

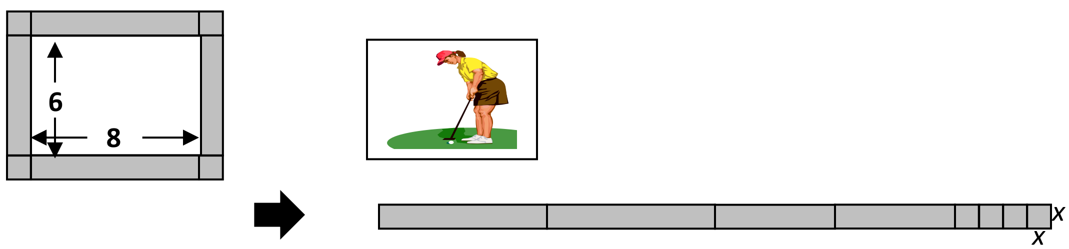
Actividad 9ª

Equipo: ____________ Fecha: _________________________

Instrucciones. A continuación, se presenta una serie de problemas verbales aritméticos y geométricos cuantitativos, con base en ellos, elabora una expresión algebraica o ecuación que los explique.

1. La edad de Luis multiplicada por la de su hermano, que es un año mayor, da como resultado cinco veces la edad del primero. ¿Cuáles son las edades de Luis y de su hermano?

2. Al desarmar las piezas que forman el marco de una fotografía y colocarlas alineadamente, como se muestra en el dibujo, se forma un rectángulo cuya área es 72 cm^2. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo que se forma?



3. Un terreno rectangular mide 2 m más de largo que de ancho y su área es de 80 m^2 ¿Cuáles son sus dimensiones?

4. Erick es dos años mayor que su hermano. Si la suma de los cuadrados de sus edades es 340, ¿cuántos años tiene Erick?

Actividad 10

Equipo: ____________ Fecha: _________________________

Instrucciones. A continuación, se presenta una serie de problemas verbales aritméticos y geométricos cuantitativos, con base en ellos, elabora una expresión algebraica o ecuación que los explique.

1. La altura de un triángulo isósceles es 3 cm menor que la base. Calcula las medidas de la base y la altura si el área es 299 cm^2.

2. Un grupo de 3er grado de Secundaria compró cierto número de revistas "PCMedia" por $360.00 para complementar sus proyectos de la asignatura de las TIC. Si hubieran comprado 3 revistas más por el mismo costo, cada revista les habría costado $4.00 menos. ¿Cuántas revistas compraron y a qué precio?

3. Los tiempos empleados por dos pintores para pintar cada uno un metro cuadrado difieren entre sí en un minuto. Trabajando conjuntamente emplean 1 hora en pintar 27 metros cuadrados. ¿En qué tiempo pinta cada uno un metro cuadrado?

4. Dos resistores conectados en configuración paralela. La resistencia total (RT) ha sido medida en 2 Ω. Uno de los resistores se sabe que mide 3 Ω más que el otro. ¿Cuántos ohmios (Ωs) mide cada resistor por separado?

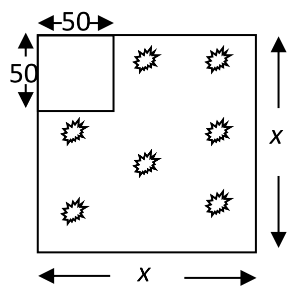
5. Un grifo abierto tarda dos horas más que otro en llenar un depósito y abiertos los dos juntos se llena en 1 hora y 20 minutos. ¿Cuánto tiempo tardará en llenarlo cada uno por separado?

Actividad 10a

Equipo: ____________ Fecha: _________________________

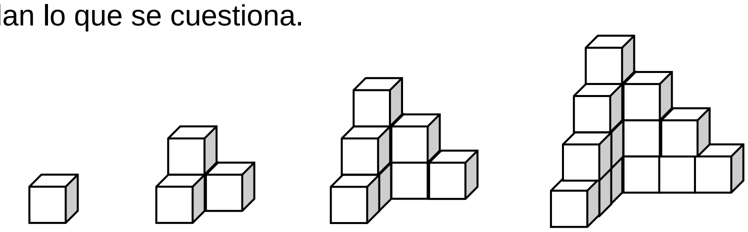
Instrucciones. A continuación, se presenta una serie de problemas verbales aritméticos y geométricos cuantitativos, con base en ellos, elabora una expresión algebraica o ecuación que los explique.

1. En equipo resuelvan los siguientes problemas. Para ello, planteen y resuelvan una ecuación para cada caso. Si consideran necesario, utilicen su calculadora.
   El parque de una colonia está ubicado en un terreno cuadrado. Una parte cuadrada del terreno de 50 m por lado se ocupa como estacionamiento y el resto es el jardín con un área de 14 400 m^2. Calculen cuánto mide por lado todo el terreno.



Ecuación: _______________

2. Organizados en equipos, observen y analicen la siguiente sucesión de figuras y respondan lo que se cuestiona.



   a) Construye (con los cubos o mediante dibujos) las figuras 5 y 6 que siguen en la sucesión. ¿Cuántos cubos se necesitan para formar la figura 5? ¿Y para la figura 10? ¿Y para la figura 100? ____
   b) ¿Cuál es la expresión algebraica que permite conocer el número de cubos de cualquier figura que esté en la sucesión? ________________________________
   c) Se sabe que una de las figuras que forman la sucesión tiene 2 704 cubos, ¿qué número corresponde a esa figura en la sucesión? _________
   d) Una figura con 2 346 cubos, ¿pertenece a la sucesión? _______ ¿Por qué?_____
   ____

3. En la figura 1 de la siguiente sucesión se ven tres caras del cubo, en la figura 2 se ven nueve caras. Determinen lo siguiente:

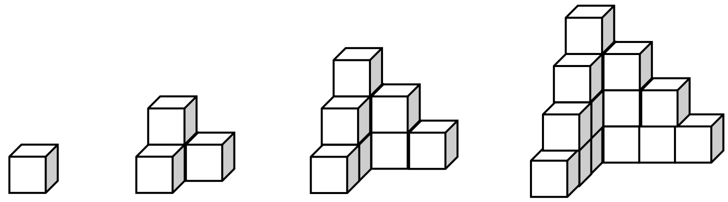
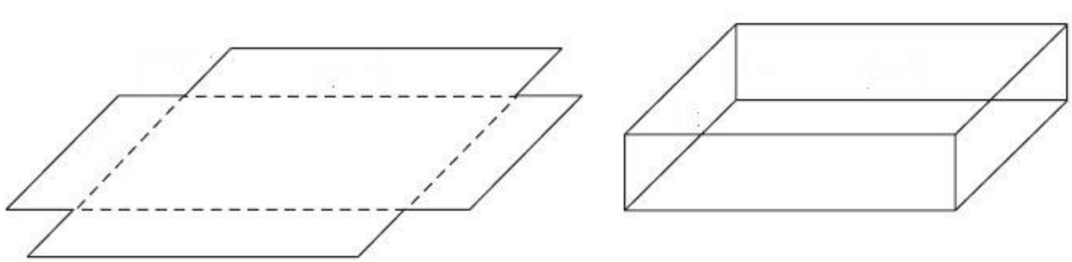


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3 Fig. 4

a) ¿Cuántas caras se ven en la figura 5? _______¿Cuántas se verán en la figura 6?______
b) Si la sucesión de figuras continúa en la misma forma, ¿cuántas caras es posible ver en la figura que ocupa el lugar 15? _______
c) ¿Cuál es la expresión algebraica que permite conocer el total de caras que es posible ver en cualquier figura que esté en la sucesión?

4. Una caja sin tapa se fabricará a partir de una hoja rectangular de hoja de lata cortando, cuadrados de 4 pulgadas de cada esquina y doblando los lados hacia arriba. Si el ancho de la caja es de 3 pulgadas menos que el largo y la caja contiene 280 pulgadas cúbicas, encuentre las dimensiones de la hoja de lata.



5. Esteban es propietario de un edificio de apartamentos que tiene 60 departamentos. Él puede rentar todos los departamentos si cobra una renta de $1800 mensuales. A una renta mayor, algunos de los departamentos permanecerán vacíos; en promedio, por cada incremento de $50 en la renta, 1 departamento quedará vacante sin posibilidad de rentarlo. Encuentre la renta que debe cobrar por cada departamento para obtener un ingreso total de $114,750.

6. Encuentra las dimensiones de un rectángulo cuya área es 204 cm^2 y cuyo perímetro es 58 cm.