



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Maestría en Educación Matemática

**Representación de números enteros,
fraccionarios y decimales
en la recta numérica:**

**Propuesta didáctica mediante tecnología interactiva
como soporte a su aprendizaje**

Tesis presentada para obtener el título de:

Maestro en Educación Matemática

Presenta:

Lic. Irene María Herrera Zamora

Dirección de tesis:

Dr. José Dionicio Zacarías Flores

DICIEMBRE 2016

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Maestría en Educación Matemática

**Representación de números enteros,
fraccionarios y decimales
en la recta numérica:**

**Propuesta didáctica mediante tecnología interactiva
como soporte a su aprendizaje**

Tesis presentada para obtener el título de:

Maestro en Educación Matemática

Presenta:

Lic. Irene María Herrera Zamora

Dirección de tesis:

Dr. José Dionicio Zacarías Flores

Codirector: Dr. Josip Slisko Ignjatov

DICIEMBRE 2016

Dedicatoria

A mi esposo Juan A. y a mi hijo Juan Manuel quienes han sido una fuente de motivación y apoyo para continuar mejorando todos los días.

Agradecimientos

A Dios y a mi familia por apoyarme en todo momento.

A mi Asesor de Tesis por su guía y observaciones oportunas.

A los maestros y maestras de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas por sus consejos y enseñanzas que han contribuido al fortalecimiento de mi trabajo y al conocimiento adquirido durante este posgrado.

Al Consejo Nacional de Ciencia y tecnología por brindarme la beca, correspondiente a la convocatoria N°290840, que ha permitido solventar muchos de los gastos generados durante este posgrado.

A la Escuela Secundaria Agustín Melgar y a la Secundaria Técnica N° 60 por abrirme las puertas para realizar la aplicación de los instrumentos necesarios para mi tesis.

Al Dr. Hugo Cruz, por su apoyo en el acondicionamiento del laboratorio de Probabilidad y Estadística.

A los familiares y amigos que me apoyaron de muchas maneras.

TABLA DE CONTENIDO

TABLA DE CONTENIDO.....	iii
ÍNDICE DE FIGURAS.....	viii
ÍNDICE DE TABLAS	xii
ÍNDICE DE GRÁFICOS.....	xiii
INTRODUCCIÓN	1
Capítulo 1	3
EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN	3
1.1 Planteamiento del Problema.....	4
1.1.1 Consideraciones sobre el estudio de las gráficas cartesianas	4
1.1.2 La representación de números enteros, decimales y fraccionarios en la recta numérica en el currículo de secundaria de México	6
1.1.3 Dificultades en torno a la comprensión de la notación gráfica de los números racionales y uso de la recta numérica con diferentes escalas.	12
1.1.4 Dificultades que presentan estudiantes de tercer año de secundaria en dos instituciones educativas públicas de México.	15
1.1.5 Uso de las TIC para apoyar los procesos de aprendizajes.....	19
1.2 Formulación del Problema	20
1.3 Objetivos.....	21
1.3.1 Objetivo general:	21
1.3.2 Objetivos específicos:	21
1.4 Justificación de la Investigación	22
Capítulo 2	25
MARCO TEÓRICO	25
Introducción	26
2.1 La recta numérica y la representación de los valores numéricos.....	27
2.1.1 La recta numérica en la enseñanza secundaria.....	27
2.1.2 El concepto de recta numérica desde un punto de vista epistemológico	28
2.1.3 El concepto de recta numérica desde un punto de vista fenomenológico	30
2.1.4 Representación y comprensión	32
2.1.5 La representación en la recta numérica.....	34
2.2 Ejercitación y repetición como forma de aprendizaje elemental.....	34

2.2.1	Parte Didáctica.	35
2.3	Los objetos matemáticos (OM) dentro de la teoría de las representaciones semióticas	37
2.4	Uso de las TIC en el diseño de un medio didáctico para la enseñanza	42
2.4.1	La computadora como una herramienta cognitiva.	43
2.4.2	Objetos de Aprendizaje (OA).	47
2.4.3	Transposición de un objeto matemático (OM) en un objeto de aprendizaje (OA), en el sentido computacional.	49
2.4.4	Criterios para el diseño de un material didáctico web	55
2.5	Errores en el aprendizaje de las matemáticas	56
Capítulo 3		60
	MARCO METODOLÓGICO	60
	Introducción	61
3.1	Nivel de investigación	62
3.2	Diseño de la investigación	64
3.2.1	Primera fase	65
3.2.2	Segunda Fase	66
3.2.3	Tercera fase.....	67
3.2.4	Cuarta fase	68
3.2.5	Quinta fase.....	69
3.3	Población y muestra	69
3.3.1	Características de la institución	70
3.3.2	Razones de la selección.....	71
3.3.3	Participantes del estudio	73
3.3.4	Negociación de la entrada al campo	74
3.4	Técnicas e instrumentos de Recolección de datos	74
3.4.1.	Instrumentos para la recolección de información.....	75
3.4.2.	Técnicas para la recolección de la información.....	80
3.5	Técnicas, Procesamiento y Análisis de datos.....	81
3.5.1	Aporte de cada instrumento de acuerdo con cada uno de los enfoques de la investigación	81
3.5.2	Resultados e inferencias	84

3.5.3	Retos de los diseños mixtos.....	85
Capítulo 4		86
PROPUESTA DIDÁCTICA		86
4.1	Presentación.....	87
4.1.1	Aspectos que motivaron la creación de la propuesta	87
4.2	Fundamentación teórica de la propuesta didáctica	89
4.2.1	La recta numérica como medio didáctico.....	89
4.2.2	Ejercitación y repetición.....	93
4.2.3	Representación y comprensión en la recta numérica.....	97
4.2.4	Criterios para el diseño del material didáctico web diseñado durante esta investigación.	98
4.3	Propuesta didáctica mediante tecnología interactiva como apoyo al aprendizaje de la representación de números enteros, fraccionarios y decimales en la recta numérica. ...	99
4.3.1	Propuesta didáctica que utiliza un material didáctico web como recurso principal	100
4.3.2	Descripción de cada nivel.....	117
4.3.3	Prueba final.....	154
4.3.4	Recomendaciones para el docente	154
Capítulo 5		158
ANÁLISIS DE LOS DATOS		158
5.1	Información recolectada en la prueba diagnóstica preliminar.....	160
5.1.1	Resultados obtenidos por los estudiantes	160
5.1.2	Algunos tipos de errores hallados en las respuestas de los estudiantes.....	163
5.1.3	Puntajes obtenidos con mayor frecuencia por los estudiantes	170
5.2	Análisis de la información proporcionada por docentes de Secundaria	170
5.3	Análisis de la información recolectada en la prueba diagnóstica específica aplicada en Tlaxcala.....	173
5.3.1	Resultados obtenidos por los estudiantes	173
5.3.2	Puntajes obtenidos con mayor frecuencia por los estudiantes	176
5.3.3	Calificaciones obtenidas por los estudiantes en una escala del 0 al 10	178
5.4	Análisis de la información recolectada en la prueba diagnóstica específica aplicada a estudiantes secundaria en Puebla	179

5.5	Análisis de la información recolectada durante el laboratorio	182
5.5.1.	Información introductoria a la actividad en el laboratorio	183
5.5.2.	Observaciones generales realizadas por la investigadora durante el trabajo de laboratorio	185
5.5.3.	Diferencial semántico.....	190
5.5.4.	Análisis de las calificaciones obtenidas por los estudiantes en los seis primeros niveles del recurso web.	192
5.5.5.	Información de la prueba final.....	194
5.5.6.	Opinión de los estudiantes sobre el trabajo realizado en el laboratorio	196
5.5.7.	Análisis comparativo del desempeño de algunos estudiantes en la prueba diagnóstica (PD) y la prueba final (PF). Descripción de errores.	200
5.5.8.	Errores identificados en las respuestas dadas por los estudiantes.....	201
5.5.9.	Comparación de resultados obtenidos por los estudiantes que realizaron la prueba diagnóstica, el laboratorio y la prueba final.....	209
CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES		212
6.1	Conclusiones.....	213
6.1.1	Cumplimiento de los objetivos de investigación	213
6.1.2	Relación de los resultados con la literatura revisada.....	215
6.2	Recomendaciones	216
6.2.1	Recomendaciones para futuros estudios.....	216
6.2.2	Recomendaciones de mejora al recurso didáctico	216
6.2.3	Uso de este recurso web dentro de la planeación escolar.....	217
6.3	Limitaciones o implicaciones	217
BIBLIOGRAFÍA.		218
ANEXOS.....		224
ANEXO 1: CUESTIONARIO APLICADO A DOCENTES DE DIFERENTES INSTITUCIONES EDUCATIVAS: INSTRUMENTO Y RESUMEN DE LAS RESPUESTAS		225
ANEXO 2: PRUEBA DIAGNÓSTICA PRELIMINAR APLICADA EN TLAXCALA EN LA ESCUELA SECUNDARIA AGUSTÍN MELGAR (14 Y 15 DE ENERO DEL 2016)		232
ANEXO 3: SEGUNDA PRUEBA APLICADA EN TLAXCALA: ESCUELA SECUNDARIA AGUSTÍN MELGAR (04 DE MAYO DEL 2016).....		238

ANEXO 4: CUADRO DE RESULTADOS OBTENIDOS POR ESTUDIANTES EN EL DIAGNÓSTICO TLAXCALA (SEGUNDA PRUEBA): ESCUELA SECUNDARIA AGUSTÍN MELGAR (04 DE MAYO DEL 2016)	241
ANEXO 5: CUADRO DE RESULTADOS OBTENIDOS POR ESTUDIANTES EN EL DIAGNÓSTICO APLICADO EN PUEBLA A 35 ESTUDIANTES DE TERCERO DE SECUNDARIA: ESCUELA SECUNDARIA TÉCNICA N° 60	244
ANEXO 6: INSTRUCCIONES GENERALES E INSTRUMENTOS PARA OBSERVAR EL TRABAJO REALIZADO POR LOS ESTUDIANTES EN EL LABORATORIO.....	246
ANEXO 7: CUESTIONARIO APLICADO A ESTUDIANTES QUE REALIZARON LOS LABORATORIOS	254
ANEXO 8: RESULTADOS DE LABORATORIOS SECUNDARIA TÉCNICA #60 PUEBLA, PUE	257
ANEXO 9: PRUEBA FINAL APLICADA A ESTUDIANTES DE SECUNDARIA TÉCNICA #60 PUEBLA, PUE	259
ANEXO 10: BREVE DESCRIPCIÓN COMPARATIVA: DIAGNÓSTICO-PRUEBA FINAL.....	263
ANEXO 11: DIFERENCIAL SEMÁNTICO.....	265
ANEXO 12: CARTA DE NEGOCIACIÓN DE ACCESO A LA INSTITUCIÓN.....	268
ANEXO 13: COEFICIENTE DE CORRELACIÓN DE PEARSON	270
ANEXO 14: ALFA DE CRONBACH	272

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.1: Gráfica no representativa de la función: $y = (x-5)^2$ en el intervalo $[-3, 3]$	10
Figura 1.2: Gráfica adecuada de la función: $y = (x-5)^2$	10
Figura 1.3: Gráfica errónea de la función $y = 1/x$	11
Figura 1.4: Gráfica adecuada de la función $y = 1/x$	11
Figura 2.1: Representación de la medida del segmento OM en la recta numérica	30
Figura 2.2: Cálculo indirecto de la medida del segmento OM	31
Figura 2.3: Cálculo aproximado de la medida del segmento OM.....	32
Figura 2.4: Un concepto matemático es reconocible a través de sus diversos registros de representación semióticos (R1, R2,..) con lo que se puede representar.	39
Figura 2.5: Transformaciones en los registros de representación semiótica	40
Figura 2.6: Modelo de Situaciones de la Actividad Instrumentada.....	45
Figura 2.7: Proceso de enseñanza	51
Figura 2.8: Transposición de objetos matemáticos a objetos de aprendizaje.....	52
Figura 2.9: Transposición de objetos matemáticos a objetos de aprendizaje.....	53
Figura 2.10: Transposición de objetos matemáticos a objetos de aprendizaje.....	54
Figura 2.11: Algunos criterios pedagógicos para la elaboración de materiales didácticos en la web	55
Figura 4.1: La recta numérica como “medio” didáctico	90
Figura 4.2: Recta numérica con escala cuatro.....	97
Figura 4.3: Representación de números en la recta numérica.....	98
Figura 4.4: Recurso WEB. Inicio.	104
Figura 4.5: Recurso WEB. Capítulo “LA RECTA NUMÉRICA”	104
Figura 4.6: Presentación gradual de los ejercicios	105
Figura 4.7: Pantallas básicas de Niveles 1º, 3º y 5º	108
Figura 4.8: Ejercitación mediante identificación	109
Figura 4.9: Ejercicio de identificación.....	111
Figura 4.10: Esquema básico de los ejercicios de representación.....	112
Figura 4.11: Pantalla de inicio.....	113
Figura 4.12: Ciclo de los ejercicios de representación	115

Figura 4.13: Pantalla de inicio: Nivel 1	118
Figura 4.14: Pantalla de práctica: Nivel 1	119
Figura 4.15: Sugerencia en la pantalla de práctica: Nivel 1	119
Figura 4.16: Pantalla de práctica: Nivel 1	120
Figura 4.17: Comprobación de respuesta: Nivel 1	120
Figura 4.18: Fin de la práctica: Nivel 1	121
Figura 4.19: Aprovechamiento de la práctica: Nivel 1	122
Figura 4.20: Pantalla de inicio: Nivel 2	123
Figura 4.21: Identificación de la escala: Nivel 2	123
Figura 4.22: Ninguna opción ha sido seleccionada	124
Figura 4.23: La escala seleccionada es incorrecta	125
Figura 4.24: Pantalla de representación de valores dados: Nivel 2	126
Figura 4.25: Icono de ayuda y texto de sugerencia: Nivel 2	128
Figura 4.26: Punto ubicado fuera de la recta: Nivel 2	129
Figura 4.27: Valor representado incorrectamente: Nivel 2	129
Figura 4.28: Valor representado correctamente con el punto A: Nivel 2	130
Figura 4.29: Fin del primer ciclo de representación: Nivel 2	130
Figura 4.30: Fin de la práctica: Nivel 2	131
Figura 4.31: Pantalla final: Nivel 2	132
Figura 4.32: Pantalla final: Nivel 2	133
Figura 4.33: Pantalla de inicio: Nivel 3	136
Figura 4.34: Sugerencia: Nivel 3	137
Figura 4.35: Identificación de la escala: Nivel 4	139
Figura 4.36: Área de trabajo: Nivel 4	140
Figura 4.37: Sugerencia: Nivel 4	142
Figura 4.38: Pantalla de inicio: Nivel 5	144
Figura 4.39: Área de trabajo: Nivel 5	145
Figura 4.40: Sugerencia: Nivel 5	146
Figura 4.41: Pantalla de inicio: Nivel 6	148
Figura 4.42: Área de trabajo: Nivel 6	149
Figura 4.43: Visualización notación fraccionaria y decimal: Nivel 6	151

Figura 5.1: Estudiantes realizan la prueba diagnóstica preliminar	162
Figura 5.2: Respuesta de estudiante C10 en la pregunta N° 1	164
Figura 5.3: Respuesta del estudiante C10 en la pregunta N° 4	164
Figura 5.4: Respuesta del estudiante C4 en la pregunta N° 1	165
Figura 5.5: Respuesta del estudiante C16 en la pregunta N° 1	165
Figura 5.6: Respuesta del estudiante B6 en la pregunta N° 1	166
Figura 5.7: Respuesta del estudiante B10 en la pregunta N° 1.....	167
Figura 5.8: Respuesta del estudiante B3 en la pregunta N° 1.....	167
Figura 5.9: Respuesta del estudiante B24 en la pregunta N° 1.....	167
Figura 5.10: Respuesta del estudiante C17 en la pregunta N° 1.....	168
Figura 5.11: B20 realiza una lectura con escala uno, en la pregunta N° 4.....	168
Figura 5.12: Respuesta del estudiante B19 en la pregunta N° 4.....	168
Figura 5.13: Respuesta del estudiante B1 en la pregunta N° 1.....	169
Figura 5.14: Respuesta del estudiante B13 en la pregunta N° 3.....	169
Figura 5.15: Estudiantes de Tlaxcala realizan la prueba diagnóstica específica	174
Figura 5.16: Distribución de estaciones de trabajo/CROQUIS	182
Figura 5.17: Pantallas de inicio de los niveles 1 y 2	183
Figura 5.18: Los estudiantes reciben una introducción al trabajo que realizarían durante el laboratorio.....	185
Figura 5.19: Los estudiantes trabajan individualmente durante el laboratorio	189
Figura 5.20: El estudiante B9 resolviendo el cuarto nivel.....	194
Figura 5.21: Respuesta del estudiante B4 en la pregunta N° 3.....	202
Figura 5.22: Respuesta del estudiante B6 en la pregunta N° 3.....	203
Figura 5.23: Respuesta del estudiante B6 en la pregunta N° 3.....	203
Figura 5.24: Respuesta del estudiante B6 en la pregunta N° 4.....	203
Figura 5.25: Respuesta del estudiante B6 en la pregunta N° 4.....	204
Figura 5.26: Respuesta del estudiante B10 en la pregunta N° 1.....	204
Figura 5.27: Respuesta del estudiante B10 en la pregunta N° 1.....	204
Figura 5.28: Respuesta del estudiante B10 en la pregunta N° 2.....	205
Figura 5.29: Respuesta del estudiante B10 en la pregunta N° 2.....	205
Figura 5.30: Respuesta del estudiante B10 en la pregunta N° 3.....	205

Figura 5.31: Respuesta del estudiante B10 en la pregunta N° 3.....	206
Figura 5.32: Respuesta del estudiante B10 en la pregunta N° 4.....	206
Figura 5.33: Respuesta del estudiante B10 en la pregunta N° 4.....	206
Figura 5.34: Respuesta del estudiante B11 en la pregunta N° 3.....	207
Figura 5.35: Respuesta del estudiante B11 en la pregunta N° 3.....	207
Figura 5.36: Respuesta del estudiante B11 en la pregunta N° 4.....	207
Figura 5.37: Respuesta del estudiante B11 en la pregunta N° 4.....	208
Figura 5.38: Respuesta del estudiante B12 en la pregunta N° 1.....	208

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1.1: Conceptos y procedimientos requeridos para el estudio de las gráficas cartesianas	6
Tabla 3.1: Adjetivos bipolares del diferencial semántico	78
Tabla 3.2: Instrumentos utilizados en la investigación	82
Tabla 4.1: Escala dada y valor de referencia mostrado en cada recta representada	106
Tabla 4.2: Escalas menores o igual que la unidad	152
Tabla 5.1: Calificación obtenida en la prueba diagnóstica preliminar	162
Tabla 5.2: Calificación obtenida en la prueba diagnóstica, considerando sólo los ítems relativos a la recta numérica.	163
Tabla 5.3: Cálculo de la valoración de la media p en cada pareja de adjetivos	191
Tabla 5.4: Valoración de las parejas de adjetivos bipolares	191
Tabla 5.5: Calificación general obtenida por los estudiantes, mediante el recurso web.....	192
Tabla 5.6: Calificación obtenida por los estudiantes en la prueba final.	195
Tabla 5.7: Comparación de calificaciones obtenidas por los estudiantes en la prueba diagnóstica y la prueba final, utilizando una escala del 0 al 10.	209

ÍNDICE DE GRÁFICOS

Gráfico 5.1: Calificación obtenida en la prueba diagnóstica preliminar	161
Gráfico 5.2: Puntaje obtenido en los valores positivos o negativos de cada pregunta	170
Gráfico 5.3: Respuestas al cuestionario sobre dificultades en el uso del plano cartesiano...	172
Gráfico 5.4: Calificación obtenida, en la prueba diagnóstica específica.....	175
Gráfico 5.5: Resultados obtenidos en dos pruebas aplicadas a 57 alumnos en una escuela secundaria pública.	176
Gráfico 5.6: Porcentaje de aciertos en prueba diagnóstica específica	177
Gráfico 5.7: Frecuencia de las calificaciones obtenidas por los 70 estudiantes.....	178
Gráfico 5.8: Frecuencia de las calificaciones obtenidas por los 57 estudiantes que realizaron la dos pruebas aplicadas en Tlaxcala	178
Gráfico 5.9: Calificación obtenida por estudiantes de secundaria en Puebla.	179
Gráfico 5.10 : Porcentaje de aciertos por puntaje obtenido en la prueba diagnóstica específica aplicada en Puebla.	180
Gráfico 5.11: Porcentaje de aciertos, desde 0 hasta 3 puntos, en prueba diagnóstica específica aplicada en Puebla	181
Gráfico 5.12: Frecuencia de las calificaciones obtenidas por 35 estudiantes que realizaron el diagnóstico en Puebla	182
Gráfico 5.13: Calificación promedio obtenida por los estudiantes en los seis primeros niveles del recurso web	193
Gráfico 5.14: Calificación promedio obtenida en la prueba final, por los 16 estudiantes que participaron en el laboratorio.....	194
Gráfico 5.16: Calificación promedio obtenida en la prueba final, por los 16 estudiantes que participaron en el laboratorio.....	200
Gráfico 5.17: Comparación de porcentajes obtenidos por una muestra de 12 estudiantes en una escuela secundaria pública en Puebla.	210

INTRODUCCIÓN

Desde el primer bloque del primer año de secundaria, en el tema números y sistemas de numeración, del eje temático “Sentido numérico y pensamiento algebraico”, se tiene como un aprendizaje esperado la conversión de números fraccionarios a decimales y viceversa, así como conocer y utilizar las convenciones para representar los números en estas notaciones en una recta numérica. Aquí se asume que la recta puede estar graduada en diferentes escalas numéricas.

Los estudiantes de secundaria abordan en muchas ocasiones el concepto de número racional en distintas notaciones, realizan operaciones con valores enteros, decimales, fraccionarios, positivos y negativos, resuelven problemas, etc. Sin embargo, esto no garantiza que tengan claridad para interpretar estos mismos valores en el contexto gráfico de una recta numérica, a pesar de que se requiere este aprendizaje para su uso posterior en la lectura y construcción de gráficas cartesianas de funciones. Este trabajo intenta brindar a los estudiantes un soporte que les permita ejercitar e interiorizar la representación de números enteros, decimales y fraccionarios en una recta graduada. Además de dar respuesta a la pregunta que ha guiado la investigación: *¿Cómo diseñar una propuesta didáctica, mediante un recurso web interactivo que promueva el aprendizaje de la representación de números enteros, fraccionarios y decimales en una recta graduada en diferentes escalas, para estudiantes de secundaria?*

En el primer capítulo se presentan algunas consideraciones en torno a la representación gráfica de los números enteros, decimales y fraccionarios en la recta numérica, así como las dificultades que representa para algunos estudiantes de secundaria en México. También se menciona la importancia de las TIC para apoyar los procesos de aprendizaje. Además, se muestran los objetivos de la investigación y la justificación del trabajo realizado.

En el segundo capítulo se muestran algunos aspectos que fundamentan teóricamente lo que implica representar valores numéricos en una recta graduada. También se establecen las bases didácticas sobre las que se ha ideado la propuesta desarrollada en este trabajo. Por una parte, se ha considerado de manera importante la forma de aprendizaje basada en la ejercitación y repetición, propuesta por Aebli.

Por otra parte, se ha tomado de la Teoría de las representaciones semióticas de Duval, entre otras. Finalmente, se presentan algunas consideraciones teóricas sobre el diseño de material didáctico web.

Este estudio se ha realizado bajo un diseño mixto, denominado “*Diseño anidado concurrente de modelo dominante*”. Esto ha permitido utilizar variadas fuentes de información y tipos de datos; aunque el enfoque que ha destacado ha sido el cuantitativo; mientras que el enfoque cualitativo se ha aprovechado como un medio para describir las dificultades que presentan los estudiantes en el tema abordado. A nivel cuantitativo corresponde con un diseño pre-experimental denominado “diseño de preprueba / posprueba con un solo grupo”. A nivel cualitativo, se toman algunos aspectos basados en un diseño fenomenológico, que busca principalmente describir algunas dificultades que muestran los estudiantes al realizar ejercicios de representación de valores en la recta numérica. Por lo tanto, el tercer capítulo describe las fases en que se llevó a cabo la investigación, los participantes, los instrumentos, las técnicas de recolección y análisis, utilizados durante el estudio en cuestión.

El capítulo cuatro presenta una propuesta didáctica que considera los aportes de Duval y Aebli, entre otros, además del tipo de interacción que debe proveer el medio con el que debe trabajar el estudiante. Este medio se presenta mediante un recurso web interactivo que permite al estudiante ejercitar de manera autónoma la representación gráfica de valores enteros, decimales y fraccionarios sobre una recta graduada.

En el quinto capítulo se lleva a cabo el análisis de los datos obtenidos. Este análisis considera los datos recabados desde la primera hasta la cuarta fase de la investigación. Interesa mostrar cuantitativamente la presencia de las dificultades en la representación de valores sobre una recta numérica, así como la descripción del tipo de errores que presentan los estudiantes. Además, se presentan los resultados de una prueba piloto con respecto a la efectividad del recurso web dinámico, diseñado bajo las ideas didácticas mencionadas.

Finalmente, se muestran algunas conclusiones y recomendaciones sobre la investigación realizada, así como algunas limitaciones en su realización.

Capítulo 1

EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

En este capítulo interesa resaltar que, a pesar de que el abordaje de los números enteros, fraccionarios y decimales negativos y positivos se realiza durante la secundaria, los estudiantes que están a punto de finalizar los tres años del programa de estudios, aún presentan dificultades en torno a la comprensión sobre la representación gráfica de estos valores en una recta numérica. Esta situación afecta la comprensión de las gráficas cartesianas de funciones, cuando los estudiantes fallan en la lectura y construcción de los gráficos que requieren el uso de valores en diferentes notaciones y escalas.

Se fundamenta la problemática en algunas investigaciones previas, que involucraban estudiantes de secundaria y grados superiores. Incluyendo, además, los datos obtenidos mediante algunas pruebas aplicadas, durante esta investigación, a estudiantes de tercer año de secundaria en dos instituciones educativas ubicadas en Puebla y Tlaxcala.

1.1 Planteamiento del Problema

Para preparar el estudio de las gráficas cartesianas de funciones, se requiere abordar una serie de conceptos y habilidades matemáticas que se suponen conocidos y dominados por los estudiantes en la secundaria. Por ejemplo, es necesario abordar algunos conocimientos y habilidades relativas a la recta numérica, el plano cartesiano, lectura e interpretación del plano cartesiano y conversión del lenguaje gráfico a otros registros de representación de una función. Sin embargo, se ha observado que estos conceptos y habilidades aún representan fuertes dificultades para los estudiantes que han cursado los tres años de enseñanza secundaria. Específicamente, el interés de esta investigación se centra en la representación de valores numéricos en notaciones decimal, fraccionaria y entera en la recta numérica.

1.1.1 Consideraciones sobre el estudio de las gráficas cartesianas

Se ha encontrado que los estudiantes presentan ciertas dificultades relacionadas con las gráficas. El conocimiento de este lenguaje, es decir, la capacidad para leer, interpretar y construir gráficas cartesianas, permite establecer la relación existente entre las dos magnitudes representadas. Deulofeu (1991) resalta la idea de la

importancia del lenguaje gráfico en la enseñanza de las matemáticas. Propone que en el campo de investigación de didáctica de las matemáticas se ha ido introduciendo la idea de la importancia del lenguaje gráfico, tanto a nivel interno de las matemáticas, como en su utilización en el mundo actual. Señala que los estudiantes al iniciar el estudio de los procedimientos básicos para interpretar y construir gráficas cartesianas presentan algunas dificultades en la graduación de los ejes, cambios de unidad e inversión de positivos y negativos, inversión del orden de las coordenadas, lectura y representación de puntos con coordenadas racionales, ya sean en notación fraccionaria o decimal, etc. Plantea que estas dificultades influyen en diferente manera cuando se interpreta o se construye la gráfica de una situación funcional.

Leinhardt, Zaslavsky, Stein (1990) declaran que se requiere centrar la atención en el trabajo realizado en el lenguaje gráfico, ya sea en tareas de interpretación o de construcción. Señala que las tareas de interpretación y construcción de gráficos inciden en el proceso de aprendizaje del mismo concepto de función, de manera que pueden ser un obstáculo para el aprendiz. Leinhardt et al., indican que en los estudios sobre funciones y gráficas se prueba que las intuiciones, presentes en los alumnos con base en su conocimiento de situaciones del mundo real, funcionan exitosamente si son razonadas en un entorno gráfico.

Sin embargo, la lectura, construcción e interpretación de gráficas en el plano cartesiano requiere reforzar conocimientos y habilidades con respecto a la representación gráfica de valores racionales positivos y negativos sobre una gráfica lineal. Por lo tanto, antes de iniciar el estudio de gráficas en el plano cartesiano se puede reforzar la habilidad para identificar y representar gráficamente valores ya mencionados sobre una recta numérica. Se puede decir que el trabajo con las gráficas cartesianas requiere, entre otros, los conceptos y procedimientos mencionados en la tabla 1.1.

Tabla 1.1: Conceptos y procedimientos requeridos para el estudio de las gráficas cartesianas

Conceptos	Procedimientos
Números enteros, fraccionarios, decimales. Medida. Recta de los números. Ordenación temporal de los hechos	Asociación longitud-número. Graduación de ejes. Lectura y situación de puntos dados por sus coordenadas. Elección e interpretación del origen y de la unidad. Dimensionar la gráfica. Relación longitud-tiempo. Uso de papel blanco, cuadriculado, milimetrado.

Fuente: Azcárate y Deulofeu (1996)

Lacasta y Rodríguez (c.a. 1999), en su investigación, centraron su observación en el problema específico de las dificultades que provienen del cambio de escala, para detectar errores en el uso de los gráficos cartesianos de funciones asociados a la escala utilizada en cada momento. El problema didáctico-matemático que se presentaba consistía en que el cambio de relación entre las escalas de los ejes provoca un cambio en el ideograma. El rango de valores de las abscisas y ordenadas, incluyendo las escalas utilizadas, tienen en la mayoría de los casos un uso como ideograma del gráfico cartesiano.

1.1.2 La representación de números enteros, decimales y fraccionarios en la recta numérica en el currículo de secundaria de México

La importancia del estudio y comprensión de los números enteros, fraccionarios y decimales radica en el hecho de que sirven para el abordaje de muchos otros contenidos dentro del currículo, incluyendo la resolución de problemas, la comunicación de información matemática, el estudio de los gráficos cartesianos, entre otros, dentro de los tres ejes temáticos del programa de estudios de la SEP (2011).

Uno de los contenidos del programa de secundaria, que es de interés para el presente estudio es el que sigue: *“Representación de números fraccionarios y*

decimales en la recta numérica a partir de distintas informaciones, analizando las convenciones de esta representación” (SEP, 2011, p. 31). Este contenido pertenece al tema números y sistemas de numeración, el cual se halla en el eje sentido numérico y pensamiento algebraico. También interesan, en esta investigación, los números con signo, los cuales son abordados desde el cuarto bloque del primer año, dentro del contenido *“Planteamiento y resolución de problemas que impliquen la utilización de números enteros, fraccionarios o decimales positivos y negativos”* (p. 34). De acuerdo con el programa de secundaria, a partir del cuarto bloque de primer año, se espera que los estudiantes sean capaces de utilizar los números enteros, fraccionarios o decimales, tanto positivos como negativos, para plantear y resolver operaciones y problemas, correspondientes a contenidos que aparecen en los tres ejes temáticos del plan de estudios de secundaria (pp. 31-51).

En el libro para el maestro (SEP, 2001, p. 107) se plantea que los alumnos se han habituado a manejar los números naturales, por lo que el trabajo con números negativos y la forma de operar con ellos les implica cierta dificultad. El libro propone que desde que se inicia el abordaje de los números con signo los alumnos deben darse cuenta que los números negativos pueden presentarse en diversas notaciones: enteras, fraccionarias, decimales. Evitando separar las diferentes clases de números con signo. Sin embargo, indica que al principio se puede operar con números enteros o decimales sencillos. Además, con respecto a los números con signo, propone que *“debe haber actividades que les permitan utilizar desde el principio los números con signo para ubicar puntos en la recta numérica y los cuatro cuadrantes del plano cartesiano”* (p. 106). Por otra parte, con respecto a los números fraccionarios, y sus diferentes representaciones, también reconocen que presentan dificultades que tardan en dominar los estudiantes (p. 87).

Bruno (1997) expresa que los maestros y muchas investigaciones “han puesto de manifiesto determinadas dificultades de los alumnos” al trabajar con los números negativos (p. 5). Por su parte, Gallardo (2010) habla de la *“la emergencia de los números negativos y el cero”* (p. 303) para referirse a dificultades que poseen los estudiantes para la interpretación de los números negativos y el cero. Además, Gallardo y Saavedra (2011) aportan aspectos teóricos que revelan la necesidad de

que los estudiantes dominen el significado de fracción positiva para darle sentido al uso de fracciones negativas en problemas no rutinarios. En esta investigación se incluye el uso de la recta numérica como herramienta didáctica.

Parte de la importancia sobre abordar los números racionales en diferentes notaciones sobre la recta numérica radica en el uso posterior para la lectura e interpretación de la gráfica cartesiana de funciones. La cual se introduce de manera informal desde el primer año de secundaria a través de actividades como, por ejemplo, la representación gráfica de los datos de una tabla y las gráficas de variación proporcional entre dos cantidades. Más adelante en segundo y tercer grado de secundaria, los estudiantes deben localizar en el plano cartesiano regiones y conjuntos de puntos que cumplan ciertas condiciones algebraicas dadas (SEP, 2001, p. 146). Esta habilidad para reconocer y representar valores racionales puede ser de utilidad para abordar situaciones problemáticas que requieran la construcción o lectura de gráficas cartesianas donde deban considerarse valores en notación decimal para comprender y dar respuesta satisfactoria al problema propuesto. Por ejemplo, en el problema *“Se va a cercar una parte de un terreno que colinda con un río y sólo se dispone de material para construir 90 m de barda. Si se quiere que la parte cercada tenga forma rectangular, ¿cuáles serán las dimensiones del terreno de mayor área que se puede bardar?”*, en un primer paso, los estudiantes pueden obtener la fórmula que expresa el área del terreno en términos de sus lados x y $90 - 2x$ y utilizarla para elaborar una tabla con algunos de los valores posibles del área. Con el cuidado de que no conviene tomar como valores de x los números 1, 2, 3, 4, 5, sino que es necesario considerar valores más espaciados entre sí como $x = 5, 10, 15, \dots$. Luego, pueden representarse los valores de la tabla en un gráfico cartesiano y ayudarse con la gráfica que se obtiene para estimar algunos valores del área que no aparecen en la tabla. Gracias a la simetría de la tabla y de la gráfica, los alumnos podrán darse cuenta de que el área del terreno es máxima cuando sus lados miden 22.5 m y 45 m, respectivamente (conviene que al resolver el problema se exploren los valores del área correspondiente a valores de x entre 20m y 25m). (p. 154). Se puede ver que es necesaria una correcta comprensión de la representación gráfica de valores racionales, así como tener criterio para seleccionar los valores que se

requiere asignar a la variable independiente, al explorar o construir la gráfica cartesiana.

Por otra parte, existe una tendencia por parte de los docentes a limitar el uso de los números en estas notaciones cuando se abordan los contenidos referidos a tablas y gráficas cartesianas. El libro para el maestro (SEP, 2001) menciona que muchos de los problemas propuestos para el bosquejo de la gráfica de una función, pueden resolverse con la aplicación de un “*esquema básico de graficación punto a punto*” donde se asignan valores a la variable x , luego se sustituyen en la fórmula de la función para obtener los valores de la variable dependiente. Finalmente se unen los puntos anteriores mediante un trazo continuo para lograr un bosquejo de la gráfica de la función. Sin embargo, cuestiona que según los resultados de investigaciones se observa que la aplicación exclusiva de este esquema no favorece un buen aprendizaje

“Muchos alumnos, aun de grados avanzados y con más experiencia en graficar funciones, siguen los pasos anteriores de manera automática y rutinaria, sin cuestionarse sobre el posible aspecto de la gráfica y su relación con la expresión algebraica de la función. Así, se limitan a asignar a la variable independiente valores enteros cercanos a 0, olvidando muchas veces tomar valores negativos y sin considerar valores fraccionarios o decimales.” (p. 160)

Un ejemplo se da cuando se les solicita bosquejar la gráfica de la función: $y = (x - 5)^2$ donde con cierta frecuencia sólo sustituyen los valores $x = -3, -2, -1, 0, 1, 2$ y 3 (ver figura 1.1). De manera que no exploran lo que sucede en valores alrededor de $x = 5$, quedando así una representación pobre que no permite visualizar la forma de gráfica (SEP, 2001, p. 160).

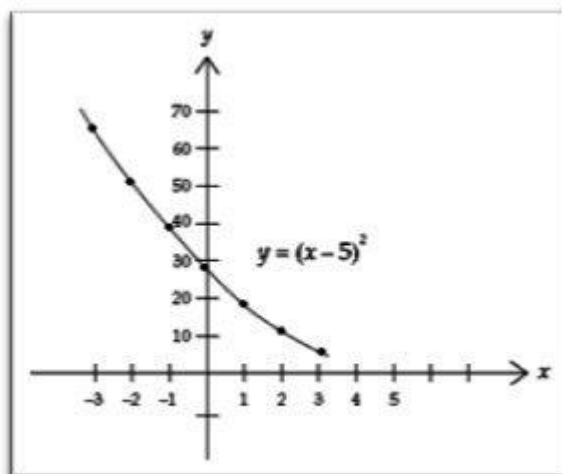


Figura 1.1: Gráfica no representativa de la función: $y = (x-5)^2$ en el intervalo $[-3, 3]$

La figura 1.2 muestra cómo debería ser la forma aproximada del gráfico que se espera que esboce el estudiante.

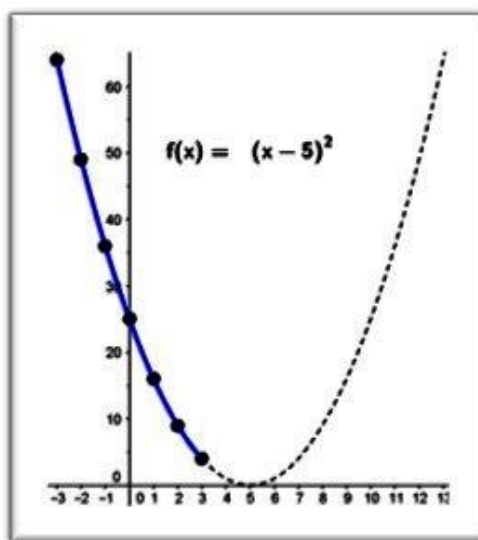


Figura 1.2: Gráfica adecuada de la función: $y = (x-5)^2$

Otro ejemplo se da cuando se les pide graficar la función: $y = 1/x$, donde al no saber cómo trabajar el valor 0 en el denominador tienden a realizar una gráfica similar a la figura 1.3 (SEP, 2001, p. 160).

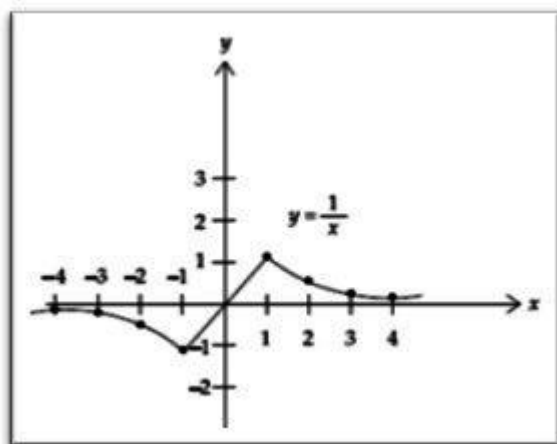


Figura 1.3: Gráfica errónea de la función $y = 1/x$

Sin embargo, si utilizan apropiadamente valores racionales cercanos al 0 negativos y positivos podrían obtener mejor aproximación a la forma de la gráfica de la figura 1.4

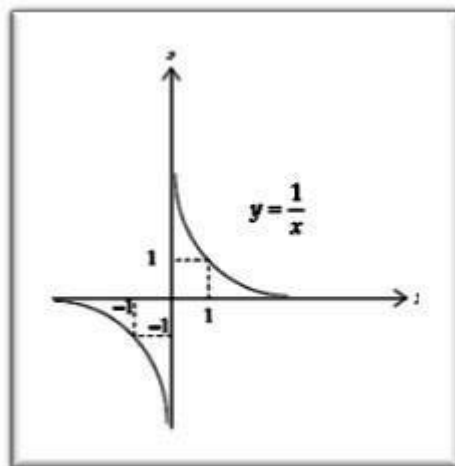


Figura 1.4: Gráfica adecuada de la función $y = 1/x$

Concluyen que estos errores revelan las dificultades que tienen los estudiantes “para visualizar el comportamiento de la gráfica de una función...”, hacen hincapié en que con esto las gráficas pierden su valor intuitivo, y su utilidad para el aprendizaje de las matemáticas disminuye o desaparece (SEP, 2001, p. 160).

1.1.3 Dificultades en torno a la comprensión de la notación gráfica de los números racionales y uso de la recta numérica con diferentes escalas.

Con base en una experiencia realizada con estudiantes de tercero de secundaria, sobre las concepciones iniciales y resultantes de la interpretación y representación de funciones, Hernández (2008) recomienda que se haga más énfasis en la graduación de los ejes, la escala y la ubicación de puntos en el eje cartesiano.

Durante una entrevista que involucraba a 15 docentes de matemáticas se discutía la pregunta: *¿qué estrategias o actividades y conceptos involucran ustedes como profesores de matemáticas, al construir con sus alumnos los conjuntos infinitos?* (Valdivé, 2006). Los docentes coincidieron en la inclusión de la recta numérica como un concepto matemático en la enseñanza de los conjuntos **N**, **Z**, **Q** y **R**; sin embargo, los profesores no expresaron en sus comentarios sobre la representación de cada conjunto en la recta numérica y de cómo se van incorporando nuevos elementos, a medida que se van introduciendo otros conjuntos numéricos.

Las dificultades relacionadas con la representación de números en la recta numérica se pone de manifiesto en varias investigaciones, por ejemplo, en Scaglia (2001) se menciona un trabajo dirigido a caracterizar obstáculos epistemológicos relacionados con la representación de números reales en la recta, en un cuestionario dirigido a alumnos de Bachillerato (16-17 años) y de 1º de Licenciatura en Matemáticas (18 años en adelante) durante la realización de tareas de representación de números reales en la recta. Para detectar dificultades en los sujetos. Uno de los focos de atención del trabajo fue la representación en la recta, donde se plantearon tres opciones: en el primer caso, dada la representación simbólica de un número, obtener la representación gráfica, en segundo lugar, dado el punto de la recta que corresponde a un número dado, obtener su representación simbólica y, en tercer lugar, expresar opiniones sobre representaciones ajenas. Coriat y Scaglia (2000), conjeturan que *“la representación de números reales en la recta es más compleja que otras representaciones de estos números, al menos en la educación secundaria”*. Plantea que en la escuela se ve la recta numérica

[...] como un soporte de números que progresivamente se va completando. En primaria se comienza poniendo naturales y en bachillerato se acaba situando reales, que ya no dejarían huecos en ella: fijados dos puntos distintos, que representan respectivamente el cero y la unidad, se establece una aplicación biyectiva entre el conjunto de números reales y el conjunto de puntos de la recta. (p. 25).

Esta práctica escolar es sancionada por muchos libros. Un ejemplo de ello se presenta en un conocido diccionario de matemáticas de Bouvier et al (1984) citado por Coriat y Scaglia (2000, p. 25), donde se define la recta numérica como “*conjunto ordenado de los números reales R* ”.

Pruzzo (2012) en un estudio realizado con 433 estudiantes de primer año de secundaria en Argentina, encuentra que el 66% no ha construido los aprendizajes sobre números fraccionarios que son prioritarios desde la primaria. Muchos de ellos no logran representar números fraccionarios, operar con ellos o establecer equivalencias. Además, analiza los errores post instruccionales donde observa que no han construido el concepto de “fracción” centrado en las relaciones “parte-todo”. Por lo que considera que esto afecta todos los aprendizajes sobre números racionales subsiguientes. Uno de los errores detectados consiste en no poder pensar en un único todo (la unidad dividida en cierta cantidad de partes) del que se sacan algunas partes. Menciona que las representaciones gráficas de las fracciones se complejizan con el uso de la recta numérica. Manifiesta que muchos alumnos se han estancado en esquemas asimiladores previos, como los números naturales.

Usualmente, la manera de impartir el tema de los números reales en el bachillerato, se basa por lo general en la presentación de los diversos números y sus conjuntos correspondientes, tales como los números naturales, enteros, racionales e irracionales, para después ilustrar algunas de sus características más importantes y operar con ellos (Crespo, 2009). Este autor menciona que durante un diálogo suscitado en el aula de matemática con estudiantes de primer año de profesorado se observa la tendencia o necesidad de los estudiantes hacia el trabajo con números en notación decimal, no considerando el mismo valor en notación fraccionaria como un resultado válido. En el diálogo, los estudiantes (A) le hacen ver al profesor (P) que

cuando pone un resultado en forma fraccionaria, el cálculo se encuentra sin terminar.

Este es un fragmento del diálogo:

[...]

A5: A veces usted deja cuentas sin hacer en el resultado

P: ¿Cuentas sin hacer?

A5: Sí, esto es lo mismo que cuando en el ejercicio de principio de la guía usted dejó $\frac{1}{2}$ en vez de hacer la cuenta y poner 0,5 que es el resultado

P: $\frac{1}{2}$ y 0,5 son el mismo número en un caso expresado como fracción y en el otro con su expresión decimal

A4: Pero el que está bien es 0,5, porque está terminado

P: No, los dos están bien

A4: La calculadora da 0,5, ese debe ser el resultado, o ¿no?

P: Si colocás 0,5 o dejás $\frac{1}{2}$, los dos están bien. Son dos formas de expresar el mismo número.

[...]

Kieran y Filloy (1989) mencionan que de acuerdo con varias investigaciones se ha observado que “muchos estudiantes tienen problemas en establecer la conexión entre los datos numéricos y los datos gráficos que involucra el plano cartesiano. Se han identificado dificultades similares con respecto a la recta numérica, especialmente al tratar con escalas” (p. 233). Lo cual se evidencia en las dificultades que muestran los estudiantes para comprender el significado de las representaciones gráficas de las funciones.

En una prueba realizada en el 2001 (Ramírez & Porcel, 2006), se investigó una muestra de 776 alumnos que realizaron una prueba diagnóstica para ingresar a la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura (FACENA) en la Universidad Nacional del Nordeste en Argentina, con respecto a ejercicios sobre diversos contenidos; entre ellos, uno sobre los conjuntos numéricos, **N**, **Z**, **Q**, **I** y **R**, donde se incluía, entre otros, la representación de números en la recta real. Luego, en el análisis de los resultados obtenidos se revisaron las deficiencias de conocimientos y errores frecuentes de los postulantes en la representación de números en la recta real. Concluyeron que los errores en la representación en la

recta denotan deficiencias y en muchos casos, ausencia de conocimientos acerca de la representación de números reales, en particular, de números fraccionarios y radicales. Consideraban que las deficiencias detectadas en los conocimientos de los estudiantes corresponden a conocimientos previos necesarios para el aprendizaje de contenidos de los primeros cursos de Álgebra, Geometría y Cálculo diferencial e integral. De modo que los tipos de error identificados conllevan fuertes obstáculos para la utilización de este recurso matemático (la recta numérica), por lo cual, los errores y dificultades en el aprendizaje de este recurso deben ser tenidos en cuenta *“al impartir la enseñanza, principalmente en los primeros cursos, a fin de contribuir a lograr una mejor articulación Nivel Medio/ Nivel Superior, como así también atender al manejo de la notación decimal sin la cual la representación en la recta sería casi imposible, coincidiendo en esto con Coriat y Scaglia (2000).”*

1.1.4 Dificultades que presentan estudiantes de tercer año de secundaria en dos instituciones educativas públicas de México.

Según Azcárate y Deulofeu (1996, p. 64), para introducir el concepto función a través del estudio de las gráficas cartesianas de funciones debe tenerse en cuenta que previamente es importante abordar numerosos conceptos y habilidades propias de las matemáticas, que a menudo se olvidan en el trabajo escolar, y que conceptos supuestamente conocidos como son los de número racional, fracciones y decimales, o de medida, deben ser complementados puesto que presentan todavía numerosas dificultades.

Para contextualizar esta situación con estudiantes de secundaria mexicanos, se procedió a aplicar una prueba diagnóstica diseñada con base en algunos ítems adaptados de Hernández (2014), los cuales se basan en la propuesta que realizan Azcárate y Deulofeu (1996) en su libro. Con el fin de evidenciar la presencia de algunas dificultades, se administró esta prueba preliminar a una muestra de 80 estudiantes de tercer año, en una escuela secundaria en el estado de Tlaxcala. Las dificultades que se pretendieron observar eran referidas a algunos contenidos que se supone que ya dominaban los estudiantes, necesarios para lograr una lectura e

interpretación de las gráficas en el plano cartesiano. Este instrumento fue aplicado antes de que los estudiantes abordaran el tema de función cuadrática.

La prueba incluyó ítems relacionados con el uso de la recta numérica para representar e identificar valores numéricos en diferentes notaciones positivos y negativos, ubicación de puntos sobre un plano cartesiano y la lectura e interpretación de gráficas cartesianas de funciones. Específicamente, los ejercicios presentados en la prueba abordaron la identificación y representación de valores enteros, decimales y fraccionarios en una recta numérica con una determinada escala, la identificación y representación de pares ordenados en el plano cartesiano, la lectura y comprensión de gráficas de funciones.

Esta prueba mostró diferentes dificultades en cada uno de los ejercicios planteados por parte de los estudiantes. Se encontraron diferentes errores en las respuestas dadas por los estudiantes. Estos errores evidenciaron dificultades con respecto a todos los ítems de la prueba. Sin embargo, el estudio se enfocó en los errores referidos a la identificación y representación de números enteros, fraccionarios y decimales, negativos y positivos en una recta graduada. Algunos de los errores observados, por ejemplo, son: omitir el uso del signo “-” en los números negativos, la ubicación de valores negativos a la derecha del cero de la recta y los positivos al lado izquierdo; entre otros. Otros errores se derivan de una inadecuada lectura de la escala, como asumir que la escala está graduada de uno en uno, o el asumir que había diferentes escalas a la derecha e izquierda de la recta. Muchos estudiantes omiten poner una marca en el lugar de la recta donde ubican un valor que se pide representar gráficamente; además, en algunos casos que sí realizan la marca para representar gráficamente un determinado valor, la ponen muy alejada del sitio donde debería representarse dicho valor. Algunos estudiantes no consideran los valores de referencia dados en las rectas para calcular la escala correspondiente, y con ello determinar la ubicación de los valores dados o identificar el valor correspondiente a los puntos representados. Otros, confunden la raya fraccionaria con el punto decimal y viceversa, etc. Se analizan los resultados en el apartado 5.2. El instrumento aplicado puede consultarse en el anexo 2.

Al observar estos errores se procedió a realizar un sondeo a docentes, en su mayoría, de secundaria, mediante la aplicación de un cuestionario (ver anexo 1). El cuestionario se administró a 19 docentes de diferentes instituciones educativas. El instrumento aplicado presentaba una serie de afirmaciones con respecto al logro de los estudiantes en ejercicios que requerían comprensión de la escala, reconocimiento y representación de puntos con coordenadas en diferentes notaciones (positivas y negativas) sobre el plano cartesiano, entre otros. Las preguntas se clasificaron de acuerdo a los temas: escalas de los ejes, orden de las coordenadas cartesianas, coordenadas en notación de números enteros, coordenadas en notación decimal o fraccionarias, y reconocimiento o comprensión de los conceptos presentados en los libros de texto. Las respuestas al cuestionario muestran que la mayoría de docentes encuestados consideran que hay más dificultad en contenidos que involucran las escalas de los ejes del gráfico cartesiano, el uso de notación fraccionaria y decimal en las coordenadas y en la comprensión de los conceptos hallados en los ejercicios presentes en los textos de matemáticas escolar (Ver apartado 5.3). Se han evidenciado algunas dificultades debidas a conocimientos previos en torno a la comprensión de los estudiantes con respecto a la representación gráfica de números en diferentes notaciones.

Posteriormente, se diseñó y aplicó otra prueba diagnóstica (ver anexo 3) enfocada en las dificultades presentadas en torno al reconocimiento y representación de números enteros, fraccionarios y decimales positivos y negativos sobre rectas que variaban su escala y los valores propuestos en cada ejercicio. Esta segunda prueba se aplicó a 70 estudiantes de la misma población estudiada previamente, luego de que fue abordado el tema de función cuadrática, algunas semanas antes de realizar esta segunda prueba. Los resultados fueron muy similares a los obtenidos en la primera prueba.

Este instrumento se elaboró para recolectar información sobre algunos errores que cometen los estudiantes en la identificación y representación de números enteros, fraccionarios y decimales, negativos y positivos en una recta graduada. Los ejercicios presentan rectas con diferentes escalas. Algunos solicitan al estudiante que identifique valores enteros positivos y negativos dados sobre una misma recta.

Otros, piden ubicar los valores enteros sobre una recta graduada con una determinada escala. Por otro lado, dos de los ejercicios de identificación y representación respectivamente trabajan con valores en notación fraccionaria y decimales positivos y negativos.

Con esta prueba se pretendía determinar si los estudiantes, aún después de trabajar contenidos referidos al gráfico cartesiano, siguen mostrando dificultades en los conceptos y habilidades básicas necesarias para una correcta lectura e interpretación de una gráfica cartesiana de funciones. Los resultados muestran la persistencia de serias dificultades para identificar y representar valores numéricos en diferentes notaciones en una recta graduada (ver anexo 4). El análisis de estos resultados se puede consultar en el apartado 5.4. Se debe recordar que en la educación primaria y secundaria, los estudiantes han recibido en las clases de matemáticas, contenidos que incluyen el aprendizaje de la recta numérica y la representación de valores en diferentes notaciones. El instrumento aplicado se presenta en el anexo 3.

A modo de comparación, la misma prueba fue aplicada en otra escuela secundaria técnica ubicada en el estado de Puebla, a 35 estudiantes de un grupo de tercero, que según las palabras del director, eran el grupo con más dificultades de aprendizaje, por lo que solicitamos trabajar con ellos y los resultados obtenidos muestran que se siguen observando dificultades similares, en la mayoría de estudiantes, sobre los contenidos abordados (ver anexo 5). El análisis de estos resultados se puede consultar en el apartado 5.5. De este grupo se ha seleccionado al azar una muestra de 16 alumnos que asistieron al laboratorio de Probabilidad y Estadística de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la BUAP, con el fin de realizar una serie de actividades durante un lapso de aproximadamente dos horas. Entre ellas, se incluía una prueba individual del recurso web, con el respectivo registro fotográfico de los resultados logrados por los estudiantes durante su ejecución, y una prueba final escrita; así como algunos instrumentos adicionales.

1.1.5 Uso de las TIC para apoyar los procesos de aprendizajes

Según la SEP (2011) Un ambiente de aprendizaje debe considerar que las tecnologías de la información y la comunicación cambian el entorno en el que los alumnos aprenden. De modo que *“si antes podía usarse un espacio de la escuela, la comunidad y el aula como entorno de aprendizaje, ahora espacios distantes pueden ser empleados como parte del contexto de enseñanza.”* (p. 65). Entonces, los materiales educativos, impresos, audiovisuales y digitales son recursos que se complementan con las posibilidades que ofrecen los espacios y propician la diversificación de los entornos de aprendizaje.

Díaz (2013), señala entre los aspectos cruciales para la comprensión del concepto de función, la interpretación de funciones representadas por gráficas y la aplicación de la tecnología para representar las funciones. Así, las TIC pueden “apoyar al profesor en el desarrollo de nuevas prácticas de enseñanza y la creación de ambientes de aprendizaje dinámicos y conectados”, que permiten a los usuarios, entre otras posibilidades: *“Acceder a programas que simulan fenómenos, permiten la modificación de variables y el establecimiento de relaciones entre ellas, diversificar las fuentes de información; atender la diversidad de ritmos y estilos de aprendizaje de los alumnos.”* (p. 67). “...el profesor puede utilizar también materiales educativos digitales, que ofrecen propuestas didácticas que toman como punto de partida los aprendizajes esperados del programa de estudio.” (p.87). La tecnología utilizada como un recurso didáctico, tiene un enorme potencial en el espacio escolar.

Con respecto al uso de las computadoras, Kieran y Filloy (1989) citan estudios que se refieren al uso de las computadoras centrados en la comprensión de los estudiantes en la identificación de puntos en la recta numérica y el plano cartesiano. Un ejemplo mencionado de evidencia *“el hecho de que los estudiantes fueron capaces de desarrollar una comprensión de escalas e intervalos a partir de lo que ocurría en la pantalla...Parece más difícil que se adquiriera esta conciencia de lo que ocurre en un entorno sin computadoras”* (p. 233).

1.2 Formulación del Problema

Se ha evidenciado en los estudiantes algunos errores y dificultades debidos a la confusión con respecto a la representación e identificación de valores numéricos en diferentes notaciones sobre una recta graduada; sobre todo cuando se utiliza notación decimal o fraccionaria.

El contenido relacionado con esta problemática se encuentra en el primer bloque de primer año de secundaria del programa de estudio de Matemáticas (SEP, 2011), en el tema números y sistemas de numeración del eje temático sentido numérico y pensamiento algebraico. Específicamente, el contenido referido es: “*Representación de números fraccionarios y decimales en la recta numérica a partir de distintas informaciones, analizando las convenciones de esta representación*” (p. 31). Se debe considerar el hecho de que el uso y representación de valores numéricos en diferentes notaciones es abordado en numerosas ocasiones durante todo el programa de secundaria de la SEP (2011). Por otra parte, en la propuesta que se realiza, también interesa el concepto de número con signo, el cual se aborda, por primera vez, durante el cuarto bloque del primer año de secundaria. Por ello, para delimitar un primer abordaje de las dificultades observadas se procedió al diseño de un recurso web que permitiera al estudiante trabajar actividades de representación e identificación de valores numéricos racionales sobre rectas graduadas con diferentes escalas.

Además, a raíz de los resultados obtenidos en la prueba diagnóstica mencionada anteriormente, este trabajo de investigación ha tenido como principal objetivo el desarrollo de una propuesta didáctica que disminuya algunas de las dificultades observadas y promueva un mejor aprendizaje en los conceptos ya mencionados, mediante el diseño y validación de un recurso web (incluyendo la evaluación del impacto pedagógico en el aprendizaje) que permita al estudiante de secundaria superar algunas dificultades que muestran en torno a la comprensión de la representación gráfica de valores racionales en diferentes notaciones sobre una recta graduada. Por esta razón, se plantea la siguiente pregunta de investigación:

¿Cómo diseñar una propuesta didáctica, mediante un recurso web interactivo que promueva el aprendizaje de la representación de números enteros, fraccionarios y decimales en una recta graduada en diferentes escalas, para estudiantes de secundaria?

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo general:

Diseño de una propuesta didáctica mediante tecnología digital en la web, que minimice algunas dificultades y apoye el aprendizaje de la representación gráfica de los números enteros, fraccionarios y decimales sobre una recta graduada para nivel secundaria como recurso principal.

1.3.2 Objetivos específicos:

- Evidenciar algunas dificultades en la representación gráfica de números enteros, fraccionarios y decimales en una recta graduada con distintas escalas, en estudiantes de secundaria.
- Efectuar una revisión de algunos aportes teóricos de la Didáctica de la Matemática, con el propósito de definir la estrategia didáctica que supervisará y orientará el trabajo a realizar para la propuesta a crear.
- Efectuar una revisión sobre aspectos de la tecnología digital aplicables a la propuesta que facilite la interacción del estudiante con un medio didáctico que le apoye para el aprendizaje de la representación gráfica de los números enteros, fraccionarios y decimales sobre una recta graduada.
- Diseñar y crear un recurso web dinámico que permita al estudiante (de secundaria) disminuir algunas dificultades en torno a la comprensión de la representación gráfica de valores racionales sobre una recta graduada, así como el promover el aprendizaje de los conceptos ya mencionados.
- Implementar y validar la propuesta didáctica en un ambiente de laboratorio con una muestra de estudiantes de tercero de secundaria.
- Evaluar el proceso de aprendizaje de los estudiantes con la aplicación de una prueba final (post-test).

1.4 Justificación de la Investigación

Uno de los aprendizajes esperados por la SEP de acuerdo con el programa de estudios de matemáticas en secundaria (SEP, 2011, p. 31), desde primer año es que el estudiante conozca y utilice las convenciones para representar números fraccionarios y decimales en la recta numérica. Las actividades elaboradas con la recta y el plano cartesiano están ligadas al estudio de los distintos tipos de números, pero, se evidencian ciertas dificultades cuando los números son enteros negativos, y, sobre todo, resulta compleja para fracciones y decimales especialmente si son negativos. Es importante variar las graduaciones de la recta, porque inicialmente los alumnos tienden a considerar que cada graduación corresponde a una unidad. Entonces, la lectura, construcción e interpretación de gráficas cartesianas requieren que el estudiante conozca y utilice las convenciones para representar números fraccionarios y decimales en la recta numérica. El recurso web desarrollado intenta ayudar a los estudiantes en el desarrollo de sus conocimientos y habilidades en la comprensión de la representación gráfica de los números racionales, como una forma de contribuir a su uso posterior en la preparación para el estudio de las gráficas cartesianas de funciones. Además, una buena comprensión de la representación gráfica de valores racionales es necesaria para posteriores estudios relacionados con el análisis de funciones en cálculo en la preparatoria. Además, su dominio es básico para variadas asignaturas a nivel universitario. También se considera que el recurso web que se genera en esta propuesta puede beneficiar a estudiantes desde primero hasta tercer año de secundaria. Este recurso podrá ser utilizado a partir del abordaje de los números con signo, esto es, a partir del cuarto bloque del primer año. Este recurso podría significar una mejora para el estudio o sea aprendizaje de la matemática que sigue después del cuarto bloque del primero de secundaria.

Por otra parte, el recurso web derivado de este trabajo tiene un alcance social para una comunidad no solamente regional, debido al alcance que tiene internet a nivel mundial. Además, de que este tipo de recursos son también un objeto de aprendizaje que puede ser reutilizable, ampliado en una propuesta didáctica con

mayores alcances a futuro. Por eso la comunidad que desarrolla este tipo de recursos se puede beneficiar potencialmente porque ya no empezarían desde cero este tipo de aplicaciones.

La SEP plantea la importancia del medio o situación problemática que requieren el uso de ciertas herramientas matemáticas que se pretenden estudiar, así como los procesos que realizan los alumnos para construir conocimientos y superar las dificultades que surgen durante su aprendizaje. Por ello, con base en algunas de las dificultades detectadas se diseñan algunas herramientas con apoyo del software libre GeoGebra, las cuales permiten a los estudiantes trabajar dinámicamente con ejercicios interactivos la identificación y ubicación de números en distintas notaciones sobre rectas graduadas con diferentes escalas. La intención de estas herramientas es generar en los estudiantes la habilidad de identificar y representar gráficamente, con precisión, valores numéricos racionales. De manera que estas dificultades no constituyan un obstáculo para el estudio de las gráficas cartesianas.

Se pretende que el alumno desarrolle la capacidad de utilizar sus conocimientos previos para resolver la situación que se le plantea. La SEP indica que

“El conocimiento de reglas, algoritmos, fórmulas y definiciones sólo es importante en la medida en que los alumnos lo puedan usar para solucionar problemas ...de ahí que su construcción amerite procesos de estudio más o menos largos, que van de lo informal a lo convencional, tanto en relación con el lenguaje como con las representaciones y procedimientos...La actividad intelectual fundamental en estos procesos de estudio se apoya más en el razonamiento que en la memorización; sin embargo, esto no significa que los ejercicios de práctica o el uso de la memoria para guardar ciertos datos... no se recomienden; al contrario, estas fases son necesarias para que los alumnos puedan invertir en problemas más complejos” (SEP, 2011, pp19-20)

Este trabajo se justifica en la intención de generar una propuesta didáctica, aplicable mediante un recurso web dinámico, que pueda enmarcarse en el programa

de secundaria de la SEP, posibilitando al docente de matemática acceder a este software para utilizarlo en un navegador web tanto dentro como fuera de línea.

Capítulo 2

MARCO TEÓRICO

Introducción

En este capítulo se consideran los aportes de la Teoría de las Representaciones Semióticas de Duval y el uso de las TIC disponibles en internet, con los cuales se puede interactuar dentro y fuera de línea. Este segundo enfoque se halla en estrecha relación con las Tecnologías Cognitivas para la Educación Matemática de Pea (1986). Además, se toman algunas ideas de la Psicología orientada a la enseñanza, mediante los aportes de Aebli (1988). La matemática que se maneja, considera contenidos presentes en el programa de secundaria de la SEP (2011), que son conocimientos previos al estudio de las gráficas cartesianas de funciones. Incluye la representación de números enteros, decimales y fraccionarios en la recta numérica.

Primero, se pretende destacar algunas bases teóricas sobre el concepto de recta numérica y la representación de valores numéricos de diferentes notaciones en una recta graduada. Interesa, especialmente, explicar en forma breve lo que se entiende sobre los términos “Representación” y “Comprensión”, y en qué consiste la representación de valores sobre una recta numérica.

En un segundo momento, se toma como referencia a Aebli, para exponer cómo la *ejercitación y repetición* pueden ser utilizadas a nivel didáctico, dentro de un proceso de enseñanza, para la consolidación del aprendizaje de un determinado conocimiento.

En tercer lugar, se presenta la idea de objeto matemático (OM). Básicamente, se realiza una discusión de lo que se entiende por objeto matemático; y se relaciona con la teoría de las representaciones semióticas de Duval.

Luego, se consideran algunas ideas que muestran a la tecnología como un soporte en la creación de un “medio” que sirva para promover el aprendizaje de algunos conocimientos matemáticos. Se explica lo que se entiende por objeto de aprendizaje (OA) y cómo se realiza la conversión de un objeto matemático a un objeto de aprendizaje.

Se termina el capítulo con algunos aspectos conceptuales, tomados de Rico (1995), sobre la importancia del estudio de los errores que cometen los estudiantes al resolver tareas matemáticas.

2.1 La recta numérica y la representación de los valores numéricos.

2.1.1 La recta numérica en la enseñanza secundaria

El Diccionario Ilustrado de Conceptos Matemáticos de Soto (2011) considera a la recta numérica como un sinónimo de la recta real. Indica que en la recta real “se elige un punto fijo al cual se llama origen y al que se le asigna el cero, y utilizando una unidad de medida se marcan puntos con esa unidad de distancia entre ellos para marcar los números enteros positivos hacia la derecha y los negativos a la izquierda del origen. También menciona que a cada número real puede asignarse un punto de la recta real y a cada punto de la recta numérica le corresponde exactamente un número real (p. 132). El concepto de recta numérica se utiliza para describir otros conceptos como coordenada (p. 26), número negativo (p. 101), intervalo, entre otros.

La recta numérica constituye una representación básica en la enseñanza de los números, pues sirve para ordenarlos, entre otros usos. Está presente en el currículo de enseñanza del programa de secundaria en el primer año. Su conocimiento es necesario para la adquisición y comprensión de otros conceptos más amplios, como es el concepto de función (Cabrera y Bruno, 2006).

En los currículos de diferentes países el conocimiento de la recta numérica conlleva tres usos específicos: para ordenar los números, para operar con los números y como concepto en sí mismo (Cabrera y Bruno, 2006, p. 126). Estos autores realizan un análisis de la forma en que varias editoriales abordan el uso de la recta numérica en los libros de texto, como contenido matemático, como modelo para representar las operaciones, y como base para ordenar números. Encuentran que el trabajo con la recta numérica para abordar el concepto de número supera a su utilización para las operaciones y el orden. Hacen ver que el conocimiento de la recta numérica es importante, dado que sirve de representación común a todos los sistemas numéricos y sirve para desarrollar el sentido numérico. Mencionan varios autores, que refieren dificultades de los estudiantes al trabajar con la recta numérica. Por una parte, se dice que la recta es un modelo geométrico que realiza un intercambio entre la representación geométrica y la aritmética. Por otro lado, se habla de una doble representación de los números en una recta numérica; como

posiciones sobre la recta o como desplazamientos sobre la misma. También se menciona la dificultad para trabajar con números negativos en la recta. Además se señalan dificultades de los alumnos para trabajar con números negativos, en rectas que presentan escalas diferentes a la unidad. Otro aspecto importante se refiere a la diferencia en la cantidad de tratamiento que se le da a la recta numérica, según el autor del libro de texto, el nivel escolar y el sistema numérico abordado. Se asume que quizás, cuando se aborda el sistema de números reales, los estudiantes poseen una mayor capacidad de abstracción, de manera que no se requiere el uso de la recta numérica. Finalmente, plantean que el conocimiento numérico requiere la identificación de la recta con los números reales, y proponen que un tratamiento más adecuado requiere actividades que complementen el trabajo que se realiza con los libros, donde el estudiante vea que la recta puede representar cualquier sistema numérico, además que en ella se pueden reflejar las operaciones y el orden.

El interés de la presente investigación se centra en la dimensión geométrica donde los números se pueden representar como puntos sobre una recta graduada; también se consideran aspectos relativos al orden entre los valores representados en una recta dada en forma horizontal, con una escala determinada.

2.1.2 El concepto de recta numérica desde un punto de vista epistemológico

Para hablar sobre el concepto de recta numérica, se puede realizar una reflexión teórica apoyada en Coriat y Scaglia (2000), desde un punto de vista epistemológico, fenomenológico y de representación gráfica. Epistemológicamente se puede hallar una controversia en torno a la «naturaleza» de la recta geométrica y algunas interpretaciones diferentes de la recta de origen matemático. La controversia se refiere a la aceptación de una correspondencia uno a uno entre los números reales y los puntos de la recta, esto implica “*tomar partido*” con respecto a la estructura de la recta. Coriat y Scaglia citan varios autores (Crossley (1987, p. 152), (Belna, 1996, p. 134), Dedekind (1998, pp. 84-85), Solomon (1991), Keisler (1976), Veronese (1994)) que aportan al respecto. Se dice que Cantor fue el primero en estar en desacuerdo con la idea de relacionar los puntos de la recta con el sistema de números, aduciendo que no podía ser demostrada. Sin embargo, introduce un axioma para

garantizar la correspondencia entre los puntos de la recta y los números reales. Procede ubicando un punto origen sobre la recta y una unidad de medida, de modo que cada cantidad numérica tiene un punto determinado sobre la línea recta, cuya coordenada es igual a esta cantidad. Por otro lado, según Dedekind, la continuidad de la recta debe expresarse mediante algún axioma, como *“Si todos los puntos de la recta se descomponen en dos clases tales que todo punto de la primera clase está a la izquierda de cada punto de la segunda clase, entonces existe uno y sólo un punto que produce esta partición de todos los puntos en dos clases, este corte de la recta en dos partes.”* (p. 26).

Crossley afirma que no hay un modo de verificar cuál es la estructura “real” de la recta geométrica. Solomon habla de formalizar propiedades de la recta de tal modo que sean consistentes con las propiedades de la matemática, para obtener una “verdad” sobre la naturaleza de la recta. Keisler aborda la controversia acerca de la interpretación de la recta afirmando que

El sistema de números reales es una creación puramente matemática que puede o no dar una imagen precisa de una línea recta en el espacio físico. El hecho es que, mientras que nuestros sentidos nos dan una muy buena idea de cómo son los segmentos de recta de tamaño medio, sabemos muy poco acerca de cómo son, en el espacio físico, segmentos de recta muy grandes o muy pequeños. Por otro lado, hasta dónde podemos contar, la recta real es bastante como una recta en el espacio físico para todos los propósitos prácticos, y es fácil trabajar con ella. La recta real es, por lo tanto un, “modelo matemático” de una recta en el espacio” (Coriat y Scaglia, 2000, p. 27).

Continuando con la interpretación de la recta, Veronese afirma:

“El postulado según el cual un punto corresponde a cada número racional no está verificado en la práctica y, si se idealiza el punto y el segmento de tal manera que este último siempre contenga puntos distintos de sus extremos, la correspondencia uno a uno entre los puntos de la línea recta y los números reales ordinarios no está ya justificada.” (Coriat y Scaglia, 2000, p. 27).

De manera ilustrativa Coriat y Scaglia (2000) plantean una pregunta: La recta, ¿se compone de puntos o no? Propone que la respuesta es resultado de una intuición: en caso de negarlo, se puede referenciar a Aristóteles, quien dice que “[...] es

imposible que algo continuo esté hecho de indivisibles, como, por ejemplo, que una línea esté hecha de puntos, si damos por supuesto que la línea es un continuo y el punto un indivisible” (p. 28). En caso de afirmarlo, puede verse la aportación de Dedekind cuando la justifica mediante un axioma, según se mencionó anteriormente.

2.1.3 El concepto de recta numérica desde un punto de vista fenomenológico

Se puede analizar la asignación concreta de números reales a puntos de la recta. Coriat y Scaglia (2000) aceptan que hay limitaciones de la propia asignación punto-número y la necesidad de ampliar la noción de *número constructible* si se quiere dar más seguridad a la creencia vivida en secundaria, donde la biyección punto-número es realizable para todo número real. Se hace necesario aceptar que la recta se compone de puntos y que la linealidad geométrica se describe mediante la estructura de espacio vectorial de dimensión uno sobre el cuerpo R .

Tradicionalmente, la ley que rige la correspondencia números reales - puntos de la recta se apoya en la medida de longitudes: fijados dos puntos cualesquiera, O e I , designados con los números 0 y 1 , respectivamente, a todo número real r le corresponde un único punto M de la recta, tal que $OM = r \cdot OI$. El vector OM es igual al producto del real r por el vector OI ; r se llama abscisa del punto M y $|r|$ corresponde a la medida del segmento OM según la unidad OI . (Coriat & Scaglia, 2000, p. 28). (Ver figura 2.1)

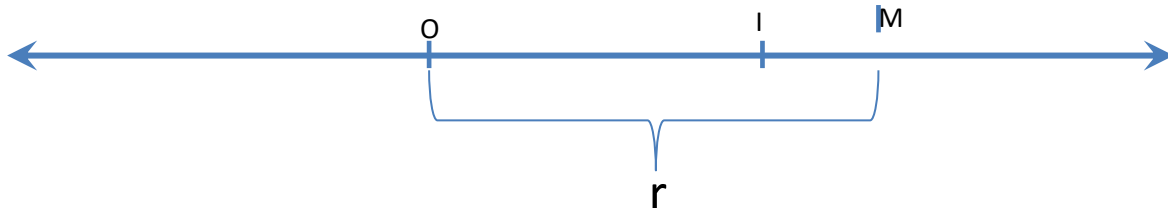


Figura 2.1: Representación de la medida del segmento OM en la recta numérica

Fowler (1992) citado por Scaglia expone la biyección números reales-puntos de la recta por medio de etiquetas, representando dos puntos con 0 y 1 respectivamente. En el sentido en que se trabaja en la escuela el término “*etiqueta*” remite al emparejamiento de puntos y números a través de alguna medición. “Una estrategia sencilla consiste en analizar cómo, dado un punto de la recta, se llega a «su» abscisa y cómo, dado un número real, se llega a su «marca» puntual” (Coriat & Scaglia, 2000, p. 28).

Cuando se tiene que determinar un número real a partir de un punto dado supone dos actuaciones: primero, determinar una marca de la recta que representa ese punto y suponer otras dos marcas que representen al cero y a la unidad. En ese caso, el objetivo es determinar r a partir de O , I y M . En el segundo caso, si se pretende determinar M , se requiere conocer O , I y r . En ese caso r debe ser un número específico.

Para determinar un punto que corresponda con un valor real dado, el trabajo con diferentes instrumentos de medición, tal como una regla graduada, produce siempre un resultado aproximado. Pero si consideramos una regla y compás ideales, además de algunos procedimientos geométricos que involucren estos instrumentos, entonces se pueden determinar con exactitud algunos números constructibles (Carrega, 1981) citado por Coriat y Scaglia (2000). Por otra parte, aunque la identificación de un número real correspondiente a un punto dado M desde un punto de vista físico siempre es aproximado, cuando se conoce alguna relación entre los puntos correspondientes a la unidad, el origen y el punto M , entonces se puede calcular una medida indirecta, lo cual derivará en una medida “ideal” exacta. Por ejemplo, en la figura 2.2 si la distancia entre I y M es el triple de la distancia entre O e I , entonces se puede determinar que la abscisa M vale 4



Figura 2.2: Cálculo indirecto de la medida del segmento OM

Pero, si no se conoce alguna relación entre los puntos correspondientes al origen, la unidad y el punto M , entonces se tiene que recurrir a instrumentos de medición para obtener una medida aproximada; en este caso la medición es directa. Primero se tratará de ubicar M en un intervalo de extremos enteros, si M corresponde con alguno de estos intervalos, ya se ha encontrado el valor de la abscisa M . Si no es así, se tendrá que realizar subdivisiones sucesivas del intervalo y estimar el valor real correspondiente. En la figura N° 2.3 se conoce que O e I corresponden con el origen y la unidad. Se puede decir que M es un valor que se halla entre 1 y 2. Luego, con algún instrumento de medición se puede proceder a subdividir el intervalo entre 1 y 2

para aproximar el valor de la abscisa de M. Si es necesario se puede subdividir el intervalo donde se ubique el punto M y estimar con mayor precisión el valor buscado. Y así sucesivamente, hasta aproximar del modo más exacto posible el valor correspondiente con M.

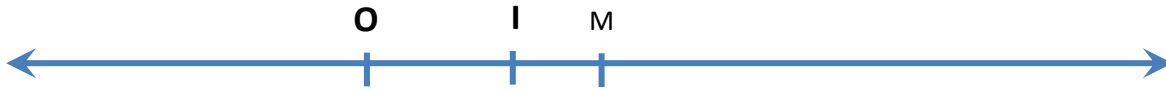


Figura 2.3: Cálculo aproximado de la medida del segmento OM

En todo caso, en el plano físico (grosor de la recta, características de los instrumentos de medida, etc.) la posibilidad de encontrar con exactitud el valor ideal buscado está limitada a unas cuantas cifras decimales.

Coriat y Scaglia (2000) resumen en tres ideas lo anterior:

1. La identificación punto-número «para cualquier número real» es esencialmente aproximada o exige un buen conocimiento de R .
2. «Físicamente», la identificación punto-número nunca es exacta.
3. Para que la representación sea «idealmente» exacta, es necesario que se dé una condición suplementaria: o bien el número dado es constructible con regla y compás; o bien el tercer punto dado se relaciona con los correspondientes a 0 y 1 mediante una relación explícita, que es equivalente a la constructibilidad con regla y compás.

Consideran que se puede afirmar que en educación secundaria la asignación de punto-número se apoya en el supuesto de que la recta está formada por números y que cada número real está en correspondencia con un punto de la recta y viceversa. Luego, generalizan la posibilidad de construir cualquier número real en la recta.

2.1.4 Representación y comprensión

Hablando sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en Didáctica de la Matemática, Rico (2009) plantea que la comprensión es una forma destacada del conocimiento. Mientras que el conocimiento es lo principal en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Considera que la representación se halla entre el sujeto y un objeto que desea comprender y hacer suya la representación.

Básicamente, en Educación Matemática, se considera a la representación como una señal que hace presente a un objeto matemático, como un signo, marca, esquema o imagen mental utilizada por un sujeto para trabajar con ideas matemáticas. Las representaciones matemáticas se describen como todas las herramientas con las que los sujetos registran y comunican el conocimiento matemático, de modo que les asignan significados y comprenden su estructura. Rico menciona al concepto de número racional como parte de los estudios y análisis de sus diferentes sistemas de representación.

El concepto de representación se ha asociado a ciertos significados. Uno de ellos es la representación como la sustitución de un ausente. Es decir, en este caso, el objeto matemático ausente se sustituye o se hace presente mediante una representación suya. La representación se esfuerza por llegar al conocimiento que desea hacer presente, sin que llegue a ser el objeto de conocimiento mismo. Por lo tanto, la representación u objeto representante, y el concepto que se representa u objeto representado, están relacionados y a la vez separados funcionalmente. Las ideas matemáticas requieren ser pensadas y comunicadas de alguna manera, por lo que sus representaciones pueden hacer uso de símbolos escritos, dibujos u objetos físicos, entre otros. Las representaciones verdaderas pueden corresponder a una imagen visual que puede explicar algún aspecto del concepto representado Rico (2009).

Se plantea que existen dos familias de sistemas de representación, que son las representaciones simbólicas y las representaciones gráficas. Las representaciones simbólicas pueden realizarse de modo alfanumérico, mientras los gráficos pueden constituir representaciones de tipo figurativo, analógico con ciertas reglas de composición y convenios de interpretación. En matemáticas, el trabajo con distintas representaciones, bajo ciertas reglas, permite expresar diversas propiedades y relaciones en la estructura de los conceptos e ideas representados. Sin embargo, cada una de estas representaciones y sus reglas no abarcan todo el concepto, pero sí ponen de manifiesto algunas de sus propiedades más importantes. En general, el estudio de un concepto requiere diferenciar varias representaciones del mismo Rico (2009).

2.1.5 La representación en la recta numérica

La recta numérica representa a todo el conjunto de los números reales. Cuando se representa un número real en correspondencia con un punto de la recta se debe recurrir a una representación simbólica, que puede ser fraccionaria, decimal, radical, etc. de modo que la marca sobre la recta se pueda interpretar con el número correspondiente. Pues aunque un número acepta diferentes representaciones equivalentes, los puntos son idénticos e indiferenciados. Es decir, en la recta se necesita una pareja (punto resaltado- representación simbólica) para que se exprese la asociación simbólica punto-número. La representación en la recta numérica requiere algún tipo de etiqueta para identificar los puntos resaltados en ella; exceptuando algunos enteros. La notación fraccionaria y la notación de radical se pueden apoyar en la notación decimal para aproximar el valor que se quiere representar sobre la recta. Sin embargo, su representación se relaciona con un único número identificado. Algunas características de la representación en la recta apoyan la idea de que en secundaria *“la representación de números reales en la recta es más compleja que otras representaciones de estos números”* (Coriat & Scaglia, 2000):

1. El axioma de Cantor permite representar todos los números reales sobre la recta mediante puntos.
2. La representación de un número sobre la recta se apoya en la medición de longitudes que permite resaltar un punto y darle una representación simbólica.
3. Existe una ausencia de exactitud en las representaciones de reales en la recta, realizadas con diferentes instrumentos.
4. Cada segmento de la recta sobre los que se representan unos pocos números está simbolizando el conjunto de los números reales en total.

2.2 Ejercitación y repetición como forma de aprendizaje elemental

De acuerdo con Aebli (1988, pp. 280-300), ejercitar y repetir es una forma de aprendizaje que se sitúa entre otras dos formas de aprendizaje básicas, las cuales se denominan elaboración y aplicación. Plantea que *“ejercitándose y repitiendo se*

consolida lo aprendido” (p. 280). Propone una consolidación de naturaleza elemental que graba el aprendizaje, para ser manejado con mayor facilidad y seguridad. Con ello se logra la consolidación y la automatización de una idea o procedimiento aprendido previamente, de modo que pueda ser aplicado a nuevos objetos y situaciones.

Antes de realizar la descripción de esta forma básica de aprendizaje, cabe aclarar que, en palabras de Aebli, se tiene por supuesto que los *“procesos de aprendizaje superiores, tales como solución de problemas, la formación de conceptos y la búsqueda y el hallazgo de reglas y leyes se sitúan al principio”* (Aebli, 1988, p. 298), de modo que la consolidación y automatización de los mismos, se debe llevar a cabo hasta que *“las estructuras encontradas se han construido y elaborado”*.

Continuando con la ejercitación y repetición, Aebli propone una parte psicológica y una parte didáctica. En cuanto a la parte didáctica, se exponen algunas reglas generales para caracterizar la tarea del ejercicio. Interesa, por lo tanto, explicar esta segunda componente propuesta por Aebli, para esta forma de aprendizaje.

2.2.1 Parte Didáctica.

Para aplicar los conocimientos o habilidades aprendidas a nuevos conocimientos o situaciones es importante asegurar la disponibilidad de los conceptos o de las operaciones necesarias en la tarea. Esto requiere de la consolidación de los conceptos, y la automatización de los procedimientos involucrados. La idea es que el ejercicio permita que el concepto y la operación a aplicar estén disponibles de forma clara, segura y automática en la mente del que requiere utilizarlos en alguna situación. Para llevar a cabo esta forma de aprendizaje hay que tener en cuenta la importancia de aspectos tales como el número de repeticiones de los ejercicios, la motivación al realizarlos y la posibilidad de éxito que experimenten los estudiantes con respecto a tal ejercitación.

Un primer aspecto a considerar es que ejercitar implica repetir, que existe una dependencia del progreso del aprendizaje relacionada con el número de repeticiones. Se plantea que el material y la organización del ejercicio deben permitir la presentación ágil de un variado número de ejemplos a resolver. Donde el

profesor debe considerar algunas reglas. En primer lugar, una vez realizada la introducción de los aprendizajes, las tareas que se propongan deben presentarse de manera tan sencilla, que se evite la aparición de errores. Luego, podrá incrementarse de modo gradual el nivel de exigencia en cuanto a los resultados esperados. Además, las faltas se deben corregir y rectificar por el alumno, de inmediato, para generar el aprendizaje. En segundo lugar, se considera el aprendizaje individual, de forma tal que se planeen los ejercicios de modo que cada alumno pueda participar plenamente, y obtener cierto rendimiento. Así la ejercitación se efectúa con frecuencia, para retener los conocimientos adquiridos.

Un segundo aspecto a considerar es que se debe motivar la realización del ejercicio. Sin motivación, el alumno se ejercita sin hacer un esfuerzo por progresar. Debe haber una finalidad explícita del propósito de la ejercitación que se realiza. Al principio, la motivación puede darse de forma extrínseca, por medio del reconocimiento o corrección que haga el docente por el esfuerzo y por los resultados que obtiene el estudiante. La meta pedagógica ideal es que el estudiante logre generar una motivación intrínseca, realizando con entusiasmo y convicción la ejercitación que se le propone, sin que haya que recordarle constantemente la utilidad de la práctica que realiza. Para ello, los rendimientos que se presentan, deben ser adecuados a la capacidad del alumno y a su experiencia previa. *“Es preferible que los ejercicios... de matemáticas sean estimulantes y ricos en variaciones, sin que haya que elegirlos de manera tan exigente que distraigan del mecanismo que se pretende automatizar”* (Aebli, 1988, p. 296).

Por último, se debe hacer posible el éxito. Esto no impide la posibilidad de que el estudiante fracase en algunos ejercicios. Aunque la idea es proponer la ejercitación de modo que el estudiante realice exitosamente cada tarea, es necesario que perciba la posibilidad de equivocarse y superarlo en un próximo intento. Al principio las exigencias se deben dosificar para *“que se sitúen en la zona límite de la capacidad de rendimiento del alumno”* (p. 296). Se menciona la ley del efecto, que el éxito invita a una persona a continuar con una actividad y a incrementarla, mientras que racionalmente, la mayoría de la gente no encuentra motivos para seguir con una actividad que no le augura ningún éxito. Se reconoce el poder de los elogios y

gratificaciones simbólicas que reciben los alumnos por la actividad desarrollada, de modo que refuerzan y estimulan su continuación. En este caso se subraya que es un truco didáctico, en los ejercicios propuestos, que el estudiante vea el resultado de su trabajo. Mientras más rápido conozcan las respuestas correctas y las erróneas, además de la corrección de las equivocadas, mayor interés por la ejercitación será generado en los estudiantes.

2.3 Los objetos matemáticos (OM) dentro de la teoría de las representaciones semióticas

La noción de objeto, en matemáticas, no se puede dejar de utilizar, en cuanto nos preguntamos sobre las condiciones de validez o sobre el valor que tiene el conocimiento. Por ello, se hace referencia con mucha frecuencia a “objetos matemáticos” más que a “conceptos matemáticos”, dado que en matemáticas, se estudian *“preferentemente objetos más que conceptos”* (D’Amore, 2009, p. 152). Se considera que los objetos matemáticos son elementos que se usan en matemáticas; pueden ser aritméticos, geométricos, estadísticos, etc. Cuando se estudian las matemáticas *“se introduce a los estudiantes en un mundo nuevo, tanto conceptual como simbólico, sobre todo representativo”* (p. 156).

“En matemáticas, la adquisición conceptual de un objeto pasa necesariamente a través de la adquisición de una o más representaciones semióticas. Lo dice por primera vez Duval, proponiendo la problemática de los registros” (D’Amore, 2009, p. 156).

Se parte del supuesto que para lograr la comprensión de un objeto matemático, es indispensable el manejo de distintas representaciones del mismo. Al respecto, un buen número de investigadores han abordado la idea de representación en sus estudios (Kaput, 1991; Castro y Castro, 1997; Duval, 1999; Moreno, 1999; D’Amore, 2006 y D’Amore, 2009, entre otros), donde interesa la comprensión de los objetos matemáticos, su enseñanza y aprendizaje. De manera que se considera, cómo el uso de diferentes representaciones incide en el razonamiento de los estudiantes. Los autores coinciden en que no se debe confundir al objeto matemático con cualquiera de sus representaciones. Para ello, Raymond Duval en su obra *Sémiosis et pensée*

humaine (1995), así como en su artículo de 1993, brinda ciertos elementos de respuesta precisos.

“Todo concepto matemático se ve obligado a servirse de representaciones, dado que no se dispone de “objetos” para exhibir en su lugar; por lo que la conceptualización debe necesariamente pasar a través de registros representativos” (D’Amore, 2009, p. 152).

Se llama Paradoja de Duval a la idea que indica que el aprendizaje de los objetos matemáticos sólo puede darse como un aprendizaje conceptual; y sin embargo, son necesarias las representaciones semióticas para realizar actividades sobre los objetos matemáticos (D’Amore, 2009). Duval (1993, p. 176) explica, dentro de la teoría de sistemas semióticos de representación, que *“la aprehensión de un objeto matemático es una aprehensión conceptual y la actividad sobre los objetos matemáticos se da sólo por medio de las representaciones semióticas.”* Además propone que *“Si se llama semiosis a la aprehensión o a la producción de una representación semiótica, y noesis a la aprehensión conceptual de un objeto, es necesario afirmar que la noesis es inseparable de la semiosis”* (D’Amore, 2009). Se define a la semiótica como la adquisición de una representación realizada por signos; mientras la noética se considera como la adquisición conceptual de un objeto.

Se afirma que es necesaria la coordinación de diferentes registros para lograr un entendimiento conceptual del objeto (Duval, 1988, pp. 176, 181, 185, 189). Duval demuestra que las tres actividades cognitivas principales referidas a la semiótica (representación, tratamiento y conversión) son diferentes (D’Amore, 2009). Duval da a la conversión mayor centralidad que a las otras actividades. Debido que, considerando lo cognitivo, se debe dar mayor importancia a la conversión, más que al tratamiento; aunque, desde un punto de vista matemático, se ha acostumbrado a dar mayor relevancia al tratamiento. Las investigaciones demuestran que los estudiantes presentan grandes dificultades en tres aspectos: para conceptualizar el contenido a partir de una representación, para verificar si entre dos representaciones se ha dado una conversión o sólo un tratamiento. Se plantea que *“la construcción de los conceptos matemáticos depende estrechamente de la capacidad de usar más*

registros de representaciones semióticas de esos conceptos” (p. 158) para representarlos en un registro determinado, para realizar tratamientos o conversiones de un registro dado a otro. Debe mencionarse que los registros se complementan, dado que cada registro de representación brinda algunas de las características del objeto matemático (ver figura 2.4), por lo que *“toda representación es cognitivamente parcial con respecto a lo que ella representa”* (Duval, 1988, p.185). Aunque, Vernaug (1987) plantea que en la conversión de un sistema a otro, puede no ser posible la traslación de los procesos internos de cada uno. D’Amore (2009) plantea que al cambiar el registro semiótico, también cambia la representación semiótica; mientras que puede cambiar la representación semiótica, manteniéndose el mismo registro semiótico. Por su parte, Piaget propone, para adquirir un concepto, que se presenten ejercicios que hagan posible el traslado de un registro a otro en ambas direcciones. Asimismo, deben ser discriminadas las variables visuales significativas en cada uno de los registros, de modo que al cambiar una de ellas tenga reflejo en los otros registros asociados (Cuevas, 2005). Por lo tanto, el abordaje de un objeto matemático mediante sus registros de representación semiótica y la conversión entre uno y otro, propiciará el conocimiento del objeto matemático estudiado.

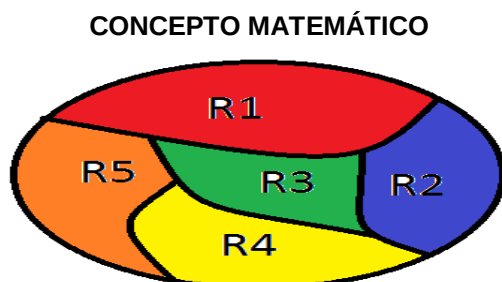


Figura 2.4: Un concepto matemático es reconocible a través de sus diversos registros de representación semióticos (R1, R2,..) con los que se puede representar.

Tres funciones fundamentales asociadas durante el uso de representaciones semióticas en las matemáticas son la *función de comunicación*, la *función de transformación* y la *función de objetivación*. La transformación que se da dentro de un mismo registro se denomina tratamiento; o en registros diferentes, se llama conversión (ver figura 2.5). La conversión entre diferentes registros se realiza en ambas direcciones en los registros gráfico y simbólico-numérico. Por ejemplo:

- Dado un punto dibujado en una recta numérica, el mismo debe ser identificado (registro gráfico→registro simbólico).
- Dado un valor, debe ser representado en la recta mediante un punto. (registro simbólico→registro gráfico).

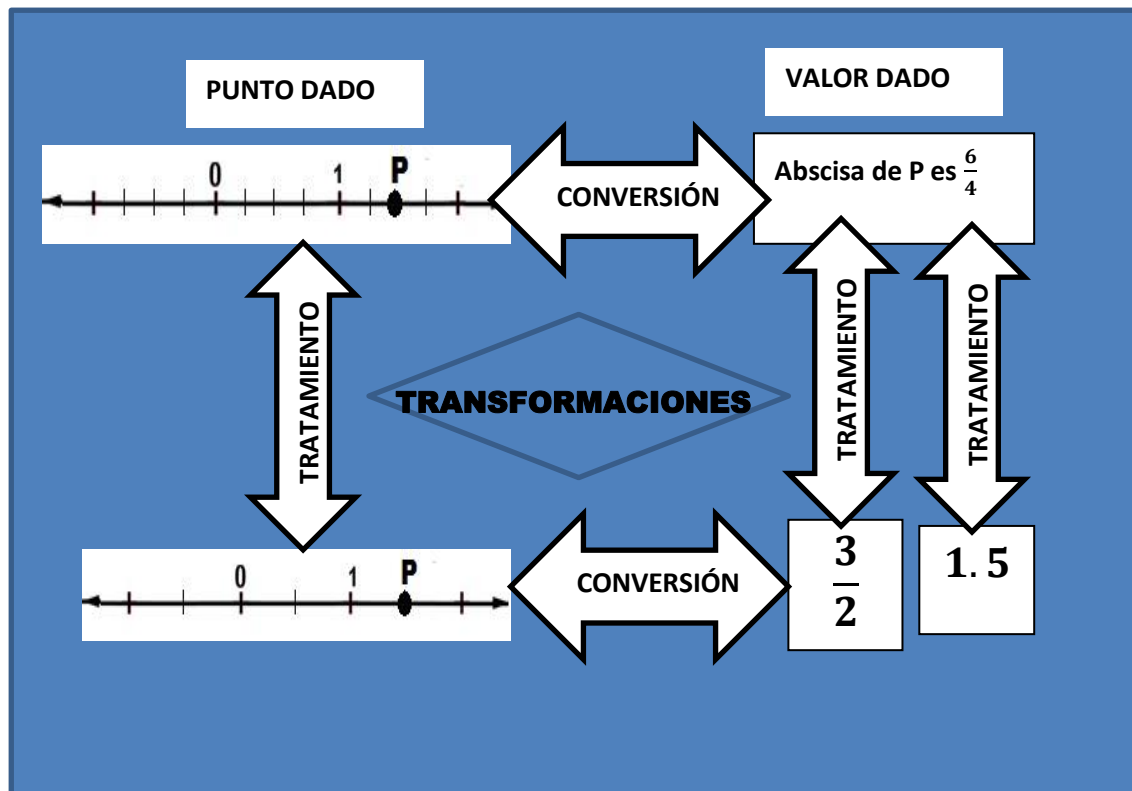


Figura 2.5: Transformaciones en los registros de representación semiótica

El tratamiento en un mismo registro se dio, en especial, en el registro simbólico, con respecto a las notaciones decimal y fraccionaria. Por ejemplo, algunos estudiantes se apoyaron en la notación decimal para representar valores dados en notación fraccionaria.

En Duval, cuando se habla de “registro de representación semiótica” se refiere a “a un sistema de signos que permite llevar a cabo las funciones de comunicación, tratamiento y objetivación” (D’Amore, 2009, p. 153). La función de comunicación o representación permite dar a conocer, dentro a algunas reglas personales y sociales,

las ideas matemáticas estudiadas. Por su parte, la función de transformación de la información permite que se generen nuevas ideas y conocimientos, como respuesta a un cuestionamiento o problema planteado. Finalmente, la función de objetivación o conceptualización se refiere a la aprehensión del sujeto hacia el objeto que quiere comprender. Esto conlleva la producción de nuevos registros que le permitan visualizar sus ideas. La creación de representaciones, tratamientos y conversiones, generan lo que Duval menciona como *comprensión integradora*.

Considerando las anteriores ideas, se muestra la importancia de conectar diferentes registros de representación. Al respecto Duval (1999, p. 12) manifiesta que *“Estas conexiones entre registros constituyen la estructura cognitiva por la que los estudiantes pueden reconocer el mismo objeto a través de sus diferentes representaciones”*. Además, para desarrollar un trabajo matemático se hace necesario considerar el tipo y el uso de los objetos matemáticos que se utilizan, conocer sus propiedades, saber su manejo y la relación entre ellos (Martínez, 2009). También se concluye que la comprensión de un concepto matemático implica ser capaz de conocerlo y representarlo en más de un registro semiótico realizando las conversiones correspondientes para lograr su aprehensión conceptual.

En esta investigación se utilizan dos tipos de objetos: simbólico (números con signo en notación entera, decimal y fraccionaria) y gráfico, mediante la recta numérica como herramienta gráfica. Ésta última varía la graduación de su escala en cada ejercicio propuesto.

Para resolver actividades que requieran la identificación o representación de valores en una recta numérica se debe:

- Reconocer la escala de graduación de la recta.
- Determinar la unidad de medida en esa recta con la ayuda de valores de referencia dados.
- En las actividades de identificación de valores racionales en una recta numérica se debe: determinar el valor representado por la abscisa del punto dado en la recta, y escribirlo en una notación simbólica adecuada.

- En las actividades de representación es necesario dibujar el punto en la recta, con la mayor precisión posible, y poner una etiqueta que represente al valor correspondiente (símbolo) al lado del punto graficado.

Para realizar lo anterior, el estudiante debe encontrar estrategias más eficaces, más seguras y más económicas para realizar las actividades correspondientes.

2.4 Uso de las TIC en el diseño de un medio didáctico para la enseñanza

La incorporación de la computadora en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática junto con las diferentes representaciones, posibilitan la implementación de ambientes de aprendizaje interactivos que ayudan al estudiante a estudiar conceptos matemáticos mientras valida sus respuestas o ideas que va generando. Las TIC proporcionan gran cantidad de opciones para llevar a cabo la graficación y cálculo de gran cantidad de funciones y datos, así como muchos otros usos. De acuerdo con UNESCO (2012), las TIC pueden desempeñar un rol importante para alcanzar una enseñanza y aprendizaje de calidad. Si se aprovecha su potencial, tienen la capacidad de innovar dentro de los espacios de educación formal, sin limitaciones de tiempo o espacio, debido a que se adapta a quien los utiliza, sin restringirse al tiempo y lugar de la enseñanza tradicional presencial (Bustos y Coll, 2010; Ferro, Martínez y Otero, 2009).

En la didáctica fundamental se estudia las *evoluciones* de un individuo trabajando sobre un saber matemático concreto en un “medio didáctico” específico. El término *medio didáctico* se toma de la *Teoría de Situaciones Didácticas*, en el sentido que el aprendizaje se obtiene por enfrentamiento a un *medio*. La manera cómo se estructura el *medio didáctico* determina un nivel objetivo (Lacasta & Rodríguez, c.a. 1999, p. 1), de modo que en la preparación de su clase el profesor organiza un *medio material*. Según Fregona (1995), en su estudio teórico muestra cómo se produce la ilusión de lo obvio: el profesor “ve” el objeto que quiere enseñar, por lo que el estudiante colocado frente al “mismo mundo”, “ve” la misma cosa.

2.4.1 La computadora como una herramienta cognitiva.

Las computadoras son clásicamente consideradas como amplificadores de la cognición. También se da una conceptualización alternativa del ordenador como un reorganizador del funcionamiento mental (Pea 1985). Una construcción teórica alternativa, que busca explicar cómo la tecnología influye en el aprendizaje de las personas, se logra a través de los instrumentos psicológicos de Vigotsky en conjunto con la teoría de la instrumentación desarrollada por Verillon y Rabardel. Esta teoría de la instrumentación o actividad instrumentada cuenta con bases que permiten analizar el apoyo de la tecnología a la enseñanza y el aprendizaje (Ballesteros, 2007). Se puede considerar que la teoría de la instrumentación es una teoría actual neo-Vygotskyana; y ha sido retroalimentada por otros autores (Artigue (2002), Pea (1985)).

Yáñez (2003) plantea que

“el uso de la tecnología de modo cognitivo, permite como lo menciona Heid (1997) que el proceso educativo se centre en el estudiante, y que el estudiante pueda actuar como matemático, ya que la tecnología le facilitará realizar y explorar conjeturas, variar parámetros para realizar generalizaciones, confirmar y rechazar ejemplos, redefinir la autoridad epistemológica que sin la tecnología, recae en la figura del profesor y promover e incrementar la reflexión de los resultados observados.”

Según la teoría sociocultural del desarrollo cognitivo formulada por Vygotsky, la realización de la actividad humana *“requiere una serie de factores intermediarios, como son los instrumentos psicológicos simbólicos y los medios de comunicación interpersonal”* (Ballesteros, 2007, p. 127). De modo que los procesos mentales superiores son funciones de la actividad mediada, donde se proponen tres tipos de mediadores: Instrumentos materiales, instrumentos psicológicos y mediación de otra persona. Los instrumentos materiales y los instrumentos psicológicos son formaciones artificiales, de modo que los primeros se dirigen a objetos de la naturaleza, mientras, los segundos median entre los propios procesos psicológicos

de los seres humanos (percepción, atención, memoria y voluntad). Así, el concepto de instrumentos psicológicos trata de recursos culturales simbólicos (signos, textos, fórmulas, fundamentalmente el lenguaje) que nos permiten dominar procesos psicológicos como la memoria, la percepción y la atención para que sean adecuadas en nuestras culturas. Están dirigidos a dominar los procesos cognitivos y conductuales naturales del individuo y se orientan hacia la transformación de los procesos psicológicos naturales internos en funciones mentales superiores (funciones psicológicas culturales) (Kozulin, 2000) citado por Ballesteros (2007). De modo que si un instrumento material ayuda a controlar los procesos internos de la mente como las funciones psicológicas superiores, el instrumento se considera psicológico. Este se determina desde el individuo hacia el instrumento. En cambio, el instrumento material se determina desde el instrumento en sí mismo.

Las funciones psicológicas naturales o inferiores son transformadas e incorporadas a las funciones psicológicas culturales o superiores, que aparecen bajo la influencia de los instrumentos simbólicos. Para Vygotsky los instrumentos psicológicos son los recursos simbólicos (signos, símbolos, textos, fórmulas, medio gráfico-simbólico) que permiten al individuo dominar sus propias funciones psicológicas naturales. De acuerdo con esto, la teoría de Vygotsky no considera a la computadora como un mediador debido a la época en que se desarrolló su teoría. Sin embargo, el papel que puede jugar la computadora se adapta a la descripción de los instrumentos psicológicos. Por ello, investigadores recientes han retomado la teoría de los instrumentos psicológicos de Vygotsky como base para una teoría educativa que se refiere al uso de la tecnología en el proceso de enseñanza y el aprendizaje: Teoría de la Instrumentación o Teoría de la actividad instrumentada (Verillon y Rabardel, 1995).

La teoría de la instrumentación define dos conceptos: artefacto e instrumento, los cuales son equivalentes con los instrumentos materiales e instrumentos psicológicos definidos por Vygotsky, respectivamente. El artefacto puede verse como un objeto material creado por el hombre, mientras que el instrumento es un constructo psicológico:

...el instrumento no existe en sí mismo. Una máquina o un sistema técnico no constituyen inmediatamente una herramienta para el sujeto. Así un instrumento resulta desde el establecimiento, por el sujeto, de una relación instrumental con un artefacto, ya sea material o no, producido por otros o por sí mismo (Verillon y Rabardel, 1995).

Por su parte, Artigue (2002), plantea que el instrumento, como artefacto, posee una realidad mixta: parte “artefacto”, parte esquemas cognitivos que lo convierten en un instrumento fundamentado sobre un objeto material o simbólico que lo diferencia. Verillon y Rabardel (1995) explican la funcionalidad del instrumento, así como el proceso en el que un artefacto se transforma en instrumento, mediante el modelo de Situaciones de la Actividad Instrumentada (IAS). Según la figura 2.6, bajo cualquier tipo de actividad, se pueden dar relaciones directas entre: Sujeto-Instrumento, Instrumento- Objeto y Sujeto-Objeto.

Modelo de IAS

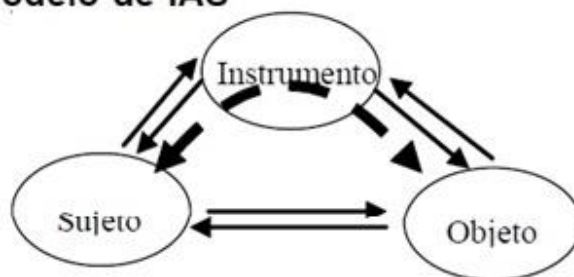


Figura 2.6: Modelo de Situaciones de la Actividad Instrumentada

Fuente: Ballesterro (2007)

Lo que aporta la teoría de la actividad instrumentada se representa por la línea punteada que intenta explicar cómo el sujeto se apodera del objeto a partir de la mediación del instrumento. El valor instrumental de un artefacto se logra mediante un proceso, al cual Artigue (2002) denomina Génesis Instrumental. La Génesis instrumental comprende la construcción de esquemas personales o la apropiación de los esquemas sociales pre-existentes, y trabaja en dos líneas: la instrumentalización y la instrumentación. La instrumentalización se refiere al conocimiento de las potencialidades del artefacto en sí, de modo que pueda utilizarse, desde el punto de vista operativo y funcional. Es un proceso externo, implica aprender a utilizar el artefacto. Por su parte, la instrumentación está orientada más hacia lo interno.

Artigue (2002), explica que en la instrumentación, la génesis instrumental se dirige hacia el sujeto, llevándolo al desarrollo o la adquisición de los esquemas de la acción instrumentada, la cual progresivamente toma forma de técnicas que permiten una respuesta segura hacia las tareas consignadas. La instrumentación está condicionada por el nivel de logro que tenga el individuo en la fase de instrumentalización.

Para realizar un análisis de una IAS, se deben considerar algunos conceptos.

- 1) Limitaciones de la actividad instrumentada inherentes a los artefactos: se pueden presentar en el uso mismo del artefacto, o porque el sujeto psicológico, requiere una pre-estructuración que le dé las condiciones para utilizar ese artefacto.
- 2) Los recursos de los artefactos producidos por la acción: el artefacto puede facilitar al usuario la producción de nuevas posibilidades de acción.
- 3) La acción de los esquemas vinculados con el uso de los artefactos: la reorganización de la actividad induce a nuevos esquemas de utilización del instrumento.

El uso de los esquemas tiene dos dimensiones, una privada que se refiere a los esquemas de un sujeto; y una social donde participan los usuarios y el artefacto. Al respecto, Pea (1985) dice que desde antes de que aparecieran las computadoras, la inteligencia humana tuvo una notable extensión o desarrollo a partir del uso de instrumentos técnicos. De modo que la inteligencia no involucra sólo a la mente del sujeto, que implica la relación entre estructuras mentales y las herramientas del intelecto que provee la cultura. Estas herramientas del intelecto son denominadas por Pea como Tecnologías Cognitivas. Pea agrega que una tecnología cognitiva la provee algún medio que ayuda a trascender las limitaciones de la mente, tales como la memoria, en actividades de pensamiento, aprendizaje y resolución de problemas. Con lo que se puede decir que las tecnologías cognitivas corresponden con los instrumentos psicológicos. Por tanto, la computadora, como máquina para guardar y dinamizar el uso de símbolos puede ser considerada como tecnología cognitiva. El ordenador puede transformarse en un sistema colectivo artificial con sus propias representaciones semióticas; las cuales transforma, y convierte en representaciones que el alumno le solicita; ampliándole así el ámbito de problemas que podría intentar resolver (Pea, 1986).

Finalmente, Salomon, Perkins y Globerson (1992) citado por Ballesteros (2007), al referirse al uso de la tecnología, mencionan dos efectos cognitivos sobre la inteligencia: “El efecto “con” tecnología obtenido durante la participación intelectual de la sociedad con ella, y el efecto “de” en términos de la transferencia de residuos cognitivos que la sociedad deja atrás en términos de un mejor dominio de las habilidades y estrategias”. De acuerdo con estos autores, el aprendizaje y el funcionamiento intelectual se benefician con el uso de la computadora. La interacción de la inteligencia con una herramienta computacional, expande sus posibilidades de acción. De manera que la mente del sujeto puede incorporar algunos de los procedimientos efectuados con la computadora. A nivel cognitivo sobresalen dos efectos. El primero se refiere a la mejora del rendimiento del estudiante, al realizar trabajo intelectual con la máquina, sobrepasando sus propias limitaciones de conocimiento. El segundo, es de índole residual, se refiere al conocimiento adicional, adquirido por el sujeto, que le genera habilidades y estrategias aprovechables en situaciones nuevas. Para que estos efectos sean posibles, se debe cuidar el diseño de la tecnología dentro de los ámbitos educativos, teóricos y culturales.

A modo de conclusión, se puede mencionar que las representaciones que se dan en la computadora, “*Son representaciones ejecutables, es decir, son portadoras de la potencialidad de simular acciones cognitivas con independencia del usuario*” (Lupiañez y Moreno, 2001, p.295).

2.4.2 Objetos de Aprendizaje (OA).

Para la preparación de un *medio didáctico*, es importante considerar los objetos de aprendizaje (OA). Este término posee variadas definiciones; entre ellas, la que más ha sido aceptada en variados trabajos es la del *Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc* (IEEE): “*Un objeto es cualquier entidad digital o no digital que puede ser usada, re-usada o referenciada para el aprendizaje soportado en tecnología”.* Otras definiciones, de interés para este estudio son:

- *Entidad digital con características de diseño instruccional, que puede ser usada, reutilizada o referenciada durante el aprendizaje soportado en computadora con el objetivo de generar conocimientos, habilidades y actitudes en función de las necesidades del alumno* (Galeana, 2004).

- *Se define entonces un objeto de aprendizaje como una entidad digital, auto contenible y reutilizable, con un claro propósito educativo, constituido por al menos tres componentes internos editables: contenidos, actividades de aprendizaje y elementos de contextualización (Chiappe, 2006).*
- *Son materiales digitales concebidos para que alumnos y maestros se acerquen a los contenidos de los programas de estudio de Educación Básica, para promover la interacción y el desarrollo de las habilidades digitales, el aprendizaje continuo y logre autonomía como estudiante (SEP, 2011, p. 69).*

Las anteriores definiciones coinciden en algunos aspectos como: entidad digital (o no digital), reutilizable, con propósito educativo, referenciable para aprendizaje soportado por tecnología, con contenidos, actividades de aprendizaje y elementos de contextualización editables.

El término OA fue dado por Wayne Hodgins en 1992. Un objeto de aprendizaje se forma mediante un conjunto de características que dotan de capacidad y funcionalidad a los sistemas de gestión del aprendizaje. Tres aspectos que lo caracterizan son: la organización, la reutilización y la referencia de los recursos.

Otro término que interesa destacar es el de “*objeto de información (OI)*”. Los objetos de aprendizaje requieren OI, además de bases teóricas del conocimiento en estudio. Esto permite crear actividades de diseño instruccional necesarias para su construcción. Chiappe (2006), plantea que

“...el diseñador instruccional debe centrar su atención en diseñar una actividad de aprendizaje central con características problémicas, la cual debe articular y dar sentido a los contenidos (objetos informativos). Dicha actividad de aprendizaje requiere de una previa formulación de objetivos de aprendizaje o competencias a lograr por el estudiante y podría estar acompañada por un esquema opcional de evaluación. De manera complementaria, deberá construir unos elementos llamados de “contextualización”, los cuales han de permitir la correcta identificación del objeto de aprendizaje como un todo integrado por quien lo revisa e interactúa con él. Elementos tan sencillos como un título o un logo institucional o más complejos como textos introductorios, de bienvenida, referencias bibliográficas o aspectos metodológicos son considerados elementos de contextualización.”

Como ya se mencionó, un objeto matemático sólo puede aprenderse por medio de sus representaciones semióticas. Por lo tanto, las representaciones del OM en estudio son las que se deben transponer como OA. De ahí que se hace necesario recurrir a las TIC para el diseño y desarrollo de los OA en un ambiente dinámico.

2.4.3 Transposición de un objeto matemático (OM) en un objeto de aprendizaje (OA), en el sentido computacional.

De acuerdo con la Teoría de las representaciones semióticas, un objeto matemático sólo puede aprenderse por medio de sus representaciones semióticas, las cuales requieren ser simuladas mediante objetos digitales. También se debe lograr que el estudiante realice la conversión entre diferentes registros, así como tratamiento dentro de un mismo registro.

Se puede realizar la transposición de un objeto matemático en un objeto de aprendizaje computacional, generando actividades didácticas que permitan mejorar su comprensión en un ambiente virtual, mediante el uso de las TIC. El OA debe cumplir las características de etiquetado y reusabilidad; además de situarse en un repositorio para formular la administración de cursos. Por ejemplo, se puede hallar un repositorio de material didáctico en <https://www.geogebra.org/materials/>.

En esta propuesta se ha creado un recurso web interactivo para apoyar a los estudiantes de secundaria que aún presentan dificultades para representar números racionales en la recta numérica. Este recurso se ha situado en el repositorio mencionado anteriormente; y puede ser ubicado específicamente en la siguiente dirección: <https://www.geogebra.org/m/hpjBZfeW>.

El trabajo desarrollado consistió en transformar ejercicios variados de identificación y representación de valores en la recta en objetos de aprendizaje, de manera que tanto los valores abordados en cada ejercicio como las escalas variaran de modo aleatorio, se dieran sugerencias para identificar la escala o para mejorar la precisión en la representación del valor dado, se diera la posibilidad de retroalimentar sobre la respuesta dada, en caso de error; y finalmente, se recibiera una evaluación inmediata sobre la actividad realizada. Para ello, los elementos que debieron

transponerse fueron: la recta numérica y su escala, los puntos dados sobre la recta para ser identificados, y los valores dados en las diferentes notaciones y el punto con el cual se les representaría.

Para el proceso de desarrollo de los objetos de aprendizaje, se crearon diferentes OI, mediante ciertos códigos de programación, en el programa GeoGebra. Esto se logró mediante la edición de las propiedades avanzadas de los elementos que interactúan en la interfaz desarrollada (recta, puntos, valores aleatorios, mensajes, botones, fórmulas, etc.), mediante un diseño didáctico.

Cuando se aplica cualquier proceso de enseñanza tradicional, se espera que el estudiante logre un aprendizaje sobre el contenido estudiado. Sin embargo, en este proceso se hace necesario un refuerzo o apoyo que permita a los estudiantes una mayor comprensión. El uso de recursos web aplicados de modo conveniente puede permitir algunas mejoras en este aspecto. El maestro puede valerse de estos recursos disponibles en la web como medio de dotar al estudiante de una herramienta que le permita ejercitar autónomamente los contenidos estudiados y lograr una mejora en su comprensión sobre ellos. La metodología tradicional que va en la dirección maestro-estudiante, para los contenidos que utilizan la recta numérica como herramienta didáctica, requiere dos fases separadas para su realización: la enseñanza y evaluación, donde el estudiante depende en gran medida de la opinión del docente, y se vuelve un espectador pasivo que mecaniza o imita el proceso estudiado, sin cuestionar su desempeño. Por ejemplo, si el estudiante resuelve ejercicios de representación o identificación de valores en la recta numérica, depende de las correcciones de su maestro, lo cual no siempre es posible de manera inmediata. Esto retarda el proceso de aprendizaje debido a factores como la desmotivación, olvido, falta de retroalimentación, etc.

La tecnología abre la oportunidad de transformar los objetos matemáticos, referidos a la representación o identificación en la recta, en objetos de aprendizaje que brindan al estudiante o estudiantes la posibilidad de realizar un trabajo autónomo, con o sin apoyo del docente, donde la enseñanza y la evaluación se pueden dar al mismo tiempo. Según García, Jaén, y Tapia (2006) la enseñanza y la

evaluación se deben realizar de forma simultánea y no como se realiza en la enseñanza tradicional.

Se puede visualizar la relación que se da entre los contenidos y el estudiante cuando son mediados por el uso de la tecnología digital mediante el recurso web mencionado; o mediante la enseñanza tradicional (ver figura 2.7).

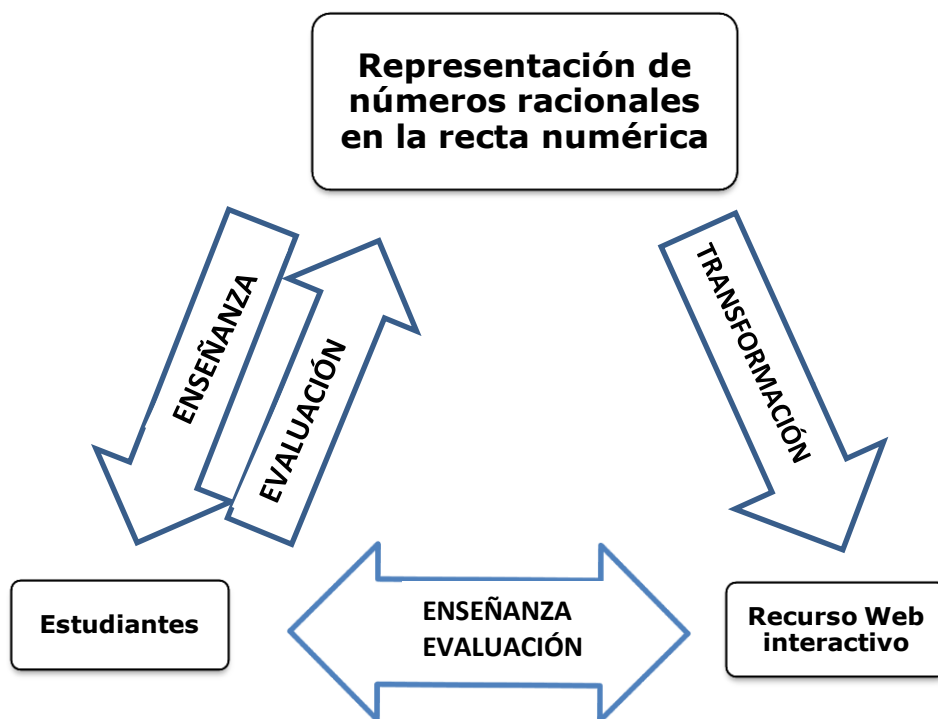


Figura 2.7: Proceso de enseñanza

Los OA poseen ciertas características esenciales. De acuerdo con Gutiérrez (2008), tenemos las siguientes:

- Pequeños: El tamaño del código de los objetos deben ser pequeños para que puedan ser reutilizados en diferentes contextos.
- Independientes: los objetos de aprendizaje deben ser independientes, es decir, que no estén ligados con otros para que por sí solos puedan facilitar el aprendizaje.
- Combinables: sin contradecir la característica anterior, los objetos de aprendizaje deben tener la capacidad de actuar conjuntamente y crear nuevas combinaciones entre ellos.

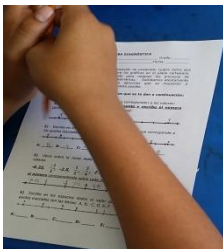
Las anteriores características brindan:

- **Interactividad:** Se permite la comunicación en ambas direcciones entre el usuario y el sistema.
- **Durabilidad:** El tiempo de vida debe ser de un lapso de tiempo aceptable, las instrucciones deben seguir siendo válidas y utilizables aun cuando cambien la tecnología o se den las actualizaciones.
- **Accesibilidad:** El contenido puede estar disponible donde sea y en cualquier momento

Considerando las anteriores características, se describen algunos de los OA correspondientes con esta investigación en las figuras 2.8, 2.9 y 2.10.

Transformación de OM a OA.

**Objetos matemáticos
(OM) →
Hoja de trabajo**



**Objetos de aprendizaje
(OA)
Hojas dinámicas**

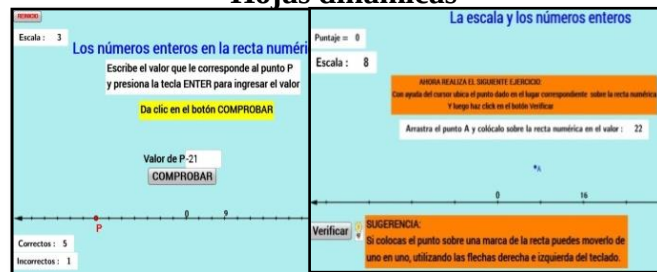


Figura 2.8: Transposición de objetos matemáticos a objetos de aprendizaje

Los objetos matemáticos (OM) propuestos al estudiante mediante una hoja de trabajo, práctica o examen escrito, se han transpuesto como objetos de aprendizaje (OA) presentados mediante hojas dinámicas (ver figura 2.8) que pueden ser trabajadas en un navegador web. Las figuras 2.9 y 2.10, indican los elementos correspondientes con los OA y los OI en las hojas de trabajo dinámicas.

Ítem de identificación en hoja de trabajo

4) Escribe en los espacios dados el valor que corresponde a los puntos marcados con las letras: A, B, C, D, E, F

A: _____ B: _____ C: _____ D: _____ E: _____ F: _____

TRANSPOSICIÓN

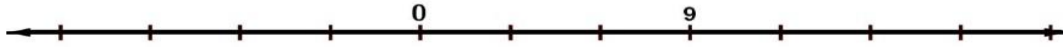


Figura 2.9: Transposición de objetos matemáticos a objetos de aprendizaje

Ítems de representación en hoja de trabajo

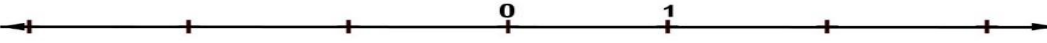
1) Ubica sobre la recta los puntos que corresponden a los valores:

13, 15, 19, -4, -9, -12, (Marca el punto y escribe el número correspondiente sobre cada punto que traces).



3) Ubica sobre la recta dada los puntos que corresponden a los valores:

-0.25, $-\frac{3}{2}$, -2.5, $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{4}$, 2.75 (Marca el punto y escribe el número correspondiente sobre cada punto que traces).



TRANSPOSICIÓN

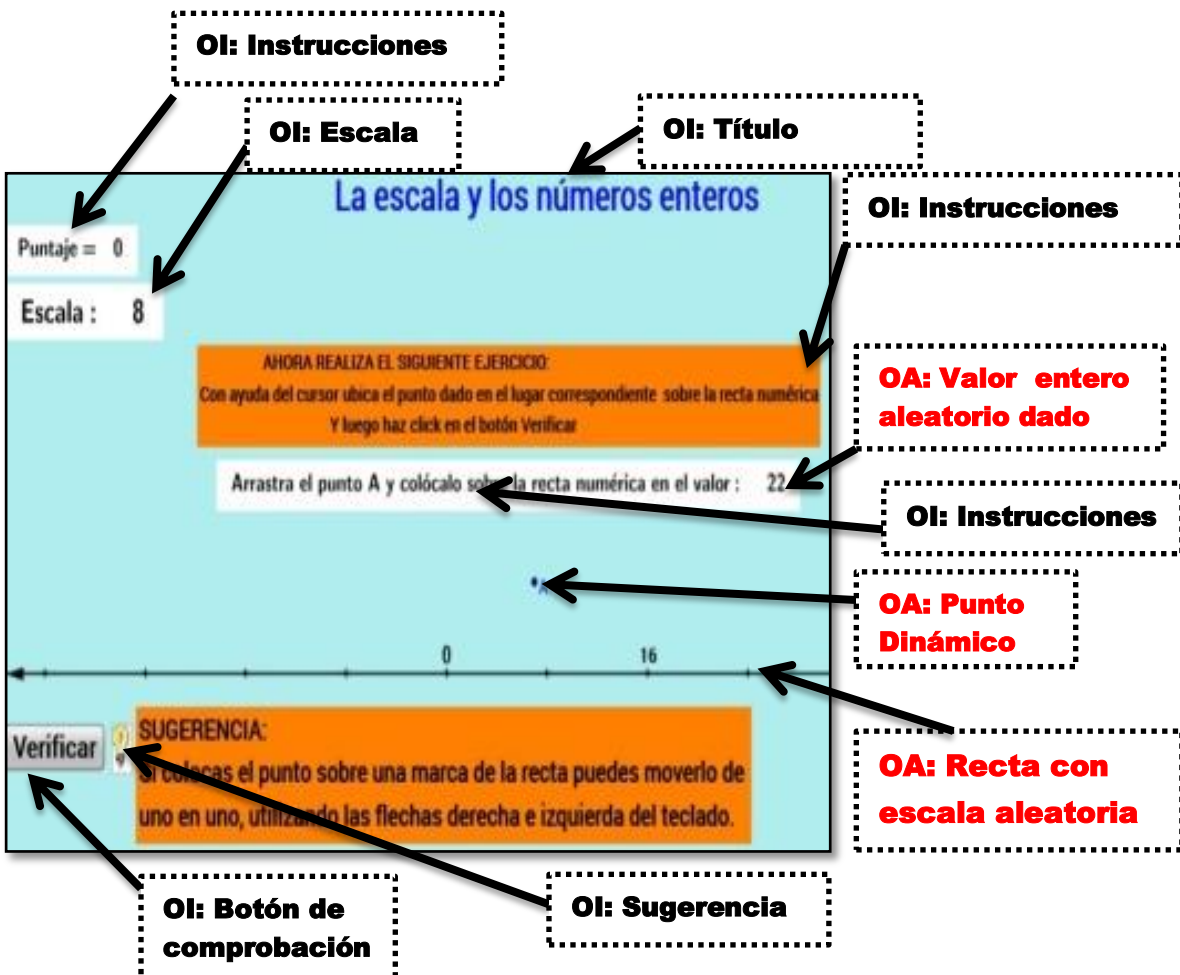


Figura 2.10: Transposición de objetos matemáticos a objetos de aprendizaje.

2.4.4 Criterios para el diseño de un material didáctico web

De acuerdo con Area (2003), los sitios web educativos pueden tener una naturaleza informativa o una naturaleza formativa. Estos pueden tener una finalidad pedagógica o didáctica. Pueden clasificarse en dos tipos: los entornos de teleformación e intranets educativas y el material didáctico en formato web. El segundo tipo corresponde con webs de naturaleza didáctica, donde se ofrece un material creado específicamente para utilizarse en un proceso de enseñanza y aprendizaje. Pueden ser materiales curriculares en formato digital que utilizan el internet como una estrategia de difusión y acceso al mismo. En estos sitios el usuario interacciona con un recurso, medio o material pedagógico diseñado y desarrollado para crear algún proceso de aprendizaje. Sus características los diferencian de otros sitios web, pero los asemeja al resto de materiales didácticos creados en otros formatos como el audiovisual o el impreso. Las características se resumen en la figura 2.5



Figura 2.11: Algunos criterios pedagógicos para la elaboración de materiales didácticos en la web

- La finalidad formativa es una característica que distingue a un material multimedia de naturaleza didáctica respecto a otros sitios web, ya que ha sido creado con la intencionalidad de producir algunos aprendizajes en sujetos con ciertas demandas y necesidades educativas. Lo cual implica que un material didáctico digital debe servir como un recurso para lograr ciertos objetivos educativos.

- La información conectada hipertextualmente, se refiere a la posibilidad de que el alumno navegue de una parte del material a otra según su propio criterio, sin un orden prefijado. Lo cual brinda una mayor flexibilidad pedagógica en el estudio del material web.
- El formato multimedia implica la integración de textos, gráficos, imágenes fijas, imágenes en movimiento, sonidos, etc. según sea posible. Lo cual puede ser más atrayente y motivante para los estudiantes, de modo que facilite el proceso de aprendizaje.
- El acceso a una variada cantidad de información puede lograrse mediante el enlace a otros recursos en la red, para que el alumno pueda ver datos e informaciones de utilidad en el estudio del material didáctico presentado.
- Los materiales didácticos web deben brindar flexibilidad para su estudio, acceso a otros materiales, realización de actividades, etc. de manera que puedan adaptarse a las características e intereses individuales de los alumnos.
- Para que la interface sea atractiva y de fácil uso, se debe considerar su diseño gráfico y la manera en que se presenta la información. El diseño gráfico debe considerar aspectos como el color, distribución espacial, etc., de modo que sea motivante y atractivo para el alumno, mientras que el acceso a la información debe estar al alcance del mismo.
- La demanda de realización de actividades en conjunto con la información estimula el aprendizaje activo, basado en su propia experiencia con la información brindada.
- La comunicación entre sus usuarios es una de las potencialidades más interesantes de este tipo de materiales web. Así, en la medida de lo posible, este material debe facilitar la comunicación telemática entre docente y alumnos, y entre ellos mismos.

2.5 Errores en el aprendizaje de las matemáticas

Según Rico (1995), *“el error es una actividad permanente en adquisición y consolidación del conocimiento y puede llegar a formar parte del conocimiento científico que emplean las personas o los colectivos”* (p. 70). Este autor resalta

algunas bases epistemológicas del error, de acuerdo con lo expuesto por varias fuentes como Popper, Bachelard, el constructivismo y Lakatos. Por ejemplo, expone que a pesar de la experiencia, las creencias se mantienen ejerciendo su influencia; por lo que es necesario “*detectar y eliminar el error*” antes de buscar las fuentes del conocimiento (p.71). Entre algunas de las tesis propuestas menciona que se debe cuestionar si una afirmación hecha es verdadera, que el conocimiento no puede partir de nada, que no hay criterio que permita reconocer la verdad, pero sí hay criterios que pueden reconocer el error y la falsedad. En general, señala que no hay fuentes últimas del conocimiento, que el conocimiento es humano y se mezcla con nuestros errores y prejuicios. Es decir, el error se considera como parte constituyente de nuestra adquisición de conocimiento y la búsqueda crítica del error es necesaria. Por otra parte, explica que la aparición inevitable de errores se debe a obstáculos epistemológicos. Explica que en el acto de conocer aparecen “*entorpecimientos y confusiones*”, provocando estancamientos y retrocesos, que visualizará “*causas de inercia*” llamadas “*obstáculos epistemológicos.*” (p.73); y que en educación, esta noción, se desconoce; por lo que se ha reflexionado poco sobre la psicología del error, de la ignorancia y de la irreflexión. El constructivismo expone que el conocimiento es construido y existen estructuras cognitivas que se activan en los procesos de construcción, las cuales están en desarrollo continuo. De acuerdo con lo cual, considerando los errores como elementos usuales presentes en la adquisición del conocimiento, entonces, el proceso de construcción del conocimiento debe incluir su diagnóstico, detección, corrección y superación mediante actividades críticas hacia las propias producciones. La verdad objetiva pasa a ser una verdad relativa a unos conocimientos, unos esquemas de interpretación y unas reglas metodológicas que llevan a ese conocimiento.

Rico (1995) concluye que los errores pueden contribuir positivamente en el proceso de aprendizaje, que no aparecen por azar, sino dentro de un marco conceptual de conocimientos previos. Además, argumenta la necesidad de que cualquier teoría de la instrucción debe prever los errores y su consideración en el proceso de aprendizaje. Porque todo proceso de instrucción es potencialmente

generador de errores. Además, a partir de sus errores se puede aprender distintas propiedades de un concepto, de las que no se es consciente previamente.

En matemáticas siempre es posible clasificar las respuestas de los alumnos, en sus diferentes niveles, como correctas o incorrectas. Los errores forman parte de las producciones de los alumnos mientras aprenden matemáticas. Sin embargo, su correcto aprendizaje es un objetivo permanente en la enseñanza. Por ello, el estudio de los errores en este campo ha sido una cuestión de permanente interés en Educación Matemática.

Por otro lado, en la investigación sobre los errores se propone que la tarea principal del trabajo del profesor consiste en dirigir y guiar el desarrollo de ideas en las mentes de sus estudiantes y no limitarse a hacer suposiciones sobre esas ideas. Por ejemplo, algunos autores describen detalles que hallan los docentes al observar el trabajo de los alumnos. Dicen que se puede hallar un patrón en los errores que cometen los alumnos al utilizar confiadamente procedimientos sistemáticos imperfectos; y que los estudiantes inventan sus propios métodos, aun obviando el método dado por su profesor. Aunque también, se deben reconocer otras variables en el proceso educativo como causa de los errores: profesor, currículo, entorno social, cultura local, e interacciones entre esas variables. Rico (1995, pp. 85-86) señala las principales líneas de investigación de los errores:

1. Estudios relativos al análisis de errores, sus causas o elementos que los explican, taxonomías y clasificaciones de errores detectados. Ejemplo: trabajos sobre obstáculos.
2. Tratamiento curricular de los errores del aprendizaje en las matemáticas. Una línea de trabajo es la enseñanza por diagnóstico que trata de prever los errores, detectarlos y proponer los medios para su corrección.
3. Estudios relativos a la formación del profesorado y al papel que tienen, en esta formación, la observación, análisis interpretación y tratamiento de los errores de los alumnos.
4. Estudios de carácter técnico que implementan y sostienen una determinada clase de análisis sobre errores.

En un análisis de los errores se propone que es evidente en el hecho de que hay patrones consistentes en los errores tanto a nivel individual como grupal; y que la realización exitosa de una tarea matemática se halla mayormente en los esquemas que el estudiante posee.

Para el tratamiento curricular de los errores, se propone la enseñanza diagnóstica, la cual se basa en tareas críticas que exponen las ideas, correctas y equivocadas, de los alumnos y proporcionan material para lecciones basadas en el conflicto cognitivo y la discusión. Mientras que para el estudio de los errores y su evaluación se plantea la necesidad de nuevos procedimientos de valoración, de modo que se reoriente la comprensión de los estudiantes, superando las concepciones deficientes para suprimir los errores. Que el estudiante debe ser capaz de valorar las limitaciones e incomodidades que supone un saber; y debe ser estimulado y motivado a continuar e interrogar respecto de su tarea. Por su parte, el profesor no puede predecir completamente el sistema del conocimiento previo del estudiante en un nuevo entorno. Hace ver que las concepciones deficientes forman parte de un sistema de conceptos y creencias ya adquiridos aplicados equivocadamente a un dominio. Por otra parte, las concepciones deficientes no sólo están en realizaciones erróneas, ya que pueden hallarse también ocultas en ejecuciones correctas. Además, los ítems diagnóstico que discriminan entre concepciones adecuadas y deficientes no necesariamente están en pruebas y ejercicios escolares.

Finalmente, se presentan cuatro en las técnicas de análisis:

1. Conteo simple de soluciones incorrectas a una variedad de problemas.
2. Análisis de los tipos de errores cometidos.
3. Análisis de los patrones de error.
4. Construcción de problemas que provoque errores.

Capítulo 3

MARCO METODOLÓGICO

Introducción

En este capítulo se describe el marco metodológico que se siguió en el desarrollo de la investigación. La cual se ha basado en un enfoque mixto. Cualitativamente el estudio se desarrolla bajo un diseño fenomenológico, mientras que cuantitativamente, su alcance se encuentra a nivel exploratorio y descriptivo. De manera que se estudia la eficacia de una propuesta didáctica, creada por la investigadora, basada en un recurso web, diseñado con base en los aportes en didáctica de las matemáticas, dados por algunos autores; y por datos recogidos durante la primera fase de la investigación. También se intenta describir cambios en el desempeño de los estudiantes al trabajar bajo la propuesta didáctica, luego de su puesta en práctica.

Interesa destacar que son de especial interés los errores que se evidencian en las respuestas, a nivel cualitativo. Estos errores orientaron el diseño del recurso web, de manera que sirvió para implementar el comportamiento del sistema al interactuar con el estudiante. Sin embargo, el interés en los datos cuantitativos radica en que permitieron constatar que esos ítems representaban una fuerte dificultad para un gran número de estudiantes.

Esta investigación se ha desarrollado en cinco grandes fases. La primera consistió en recabar información de 80 estudiantes y 19 docentes sobre las dificultades para introducir al concepto función mediante las gráficas cartesianas (Ver anexos 1 y 2). En la segunda fase, considerando las dificultades detectadas, se seleccionan algunas referentes a la representación de números enteros, decimales, fraccionarios, positivos y negativos; para realizar una propuesta didáctica basada en un recurso web diseñado por la investigadora. En esta fase se elaboraron el recurso web, una prueba diagnóstica y una prueba final. Esta etapa incluye las pruebas realizadas al recurso web, con el fin de mejorarlo, antes de su aplicación. La tercera fase consiste en validar la prueba diagnóstica específica. Se aplica la prueba diagnóstica a 70 individuos de la población estudiada en la prueba diagnóstica preliminar, para corroborar la persistencia del tipo de dificultades halladas en la primera prueba. En la cuarta fase se pretende validar la propuesta didáctica diseñada. Por lo que, primero se pide el acceso a una institución secundaria técnica

de Puebla, para aplicar la prueba diagnóstica específica. Luego, se solicita la participación de algunos estudiantes para realizar una prueba de laboratorio con la propuesta didáctica, además de otros instrumentos. Por lo que se aplica un diferencial semántico, se realiza la prueba del recurso web, se les entrega un cuestionario para evaluar el recurso web y se les administra una prueba final.

Durante el laboratorio se recolecta el aprovechamiento de los estudiantes mediante un registro fotográfico (previamente se les ha indicado que avisen cuando hayan finalizado cada uno de los seis niveles del recurso web).

La quinta fase corresponde con el análisis de los resultados obtenidos, y llegar a un conjunto de conclusiones de lo logrado.

3.1 Nivel de investigación

Esta investigación se basa en un enfoque mixto. Según Hernández-Sampieri, Fernández-Collado y Baptista-Lucio, (2014), los métodos mixtos se han ido consolidando como un tercer enfoque de investigación en todos los campos. Bajo este enfoque se pueden utilizar variadas fuentes de información y tipos de datos; de manera que, se puede realizar una interpretación derivada de los datos cualitativos y cuantitativos recabados, así como de su análisis. Con lo que el proceso de investigación y las estrategias utilizadas se pueden adaptar a las necesidades, contexto, circunstancias, recursos y al planteamiento del problema.

Los métodos mixtos representan un conjunto de procesos sistemáticos, empíricos y críticos de investigación e implican la recolección y el análisis de datos cuantitativos y cualitativos, así como su integración y discusión conjunta, para realizar inferencias producto de toda la información recabada y lograr un mayor entendimiento del fenómeno bajo estudio (p. 534).

Aunque se mezclan ambos enfoques, esta investigación se centra principalmente en el enfoque cuantitativo; y en un menor grado, se utiliza el enfoque cualitativo. La necesidad de utilizar un enfoque mixto se debe a que esta investigación requiere analizar datos tanto a nivel objetivo como subjetivo. Por ejemplo, durante la primera fase, en el cuestionario aplicado a los docentes (ver anexo 1), cada afirmación sobre

la percepción del logro observado en los estudiantes, requería ser calificada con una escala del 1 al 4; esta información, a nivel cuantitativo permitió clasificar la frecuencia con que los docentes seleccionaron una determinada escala; así como determinar qué temas son más complicados para los estudiantes, según la percepción del docente. Además, el instrumento aplicado a los docentes, incluía dos preguntas abiertas que permitieron obtener aspectos adicionales para describir, en un nivel subjetivo, la opinión de cada docente. Esto fue importante para evidenciar la necesidad de la creación de la propuesta didáctica. Luego, en las pruebas aplicadas a los estudiantes, durante las diferentes fases, sus respuestas requerían ser estudiadas a nivel cuantitativo y cualitativo. En este sentido, interesaba la información referente a la frecuencia de sus respuestas correctas e incorrectas, la descripción del tipo de errores evidenciados, entre otros aspectos. Además, las respuestas dadas por los estudiantes en los demás instrumentos aplicados, también requirieron un estudio tanto a nivel cualitativo como cuantitativo, para su análisis.

De acuerdo con el enfoque cuantitativo, este trabajo es de nivel exploratorio y descriptivo. Busca ser un antecedente, para una investigación posterior, que explique si la aplicación de una propuesta didáctica basada en un recurso web interactivo tiene un efecto positivo en el rendimiento de estudiantes de secundaria, inclusive desde el cuarto ciclo del primer año, para que puedan desarrollar una mejor comprensión sobre la representación gráfica de números enteros, decimales, fraccionarios, positivos y negativos en una recta graduada, independientemente de la escala utilizada.

Previo a la aplicación de la propuesta, este estudio ha explorado y ha realizado una descripción de los errores cometidos por los estudiantes en la representación e identificación de valores numéricos en diferentes notaciones en la recta numérica. Luego, se buscó determinar, en una prueba final, si algunos de estos errores se minimizaron, y si hubo mejora en su rendimiento, después de someter al estudiante a un tratamiento didáctico basado en un recurso web interactivo.

Por el momento, esta investigación trata de brindar una alternativa para que los estudiantes de secundaria, mejoren su comprensión y minimicen las dificultades que se han detectado en la representación gráfica de números enteros, fraccionarios y

decimales en una recta graduada con una escala determinada. Básicamente, se estudian los efectos de la aplicación de una estrategia de enseñanza, mediante el uso de un recurso web dinámico e interactivo, sobre la mejora de los estudiantes en la representación de valores enteros, decimales y fraccionarios sobre una recta graduada. Incluyendo la disminución de errores detectados en la exploración previa.

3.2 Diseño de la investigación

Hernández-Sampieri, et al. (2014) explican que una investigación mixta “implica un trabajo único y un diseño propio, por lo que resulta una tarea más artesanal que los propios diseños cualitativos” (p. 545). No obstante, en los estudios mixtos se han descrito modelos generales que combinan ambos enfoques; y que orientan la creación de un diseño particular. “Así el investigador elige un diseño mixto general y luego desarrolla un diseño específico para su estudio” (p. 545).

El diseño mixto específico utilizado es el “*Diseño anidado concurrente de modelo dominante*” (Hernández-Sampieri, et al., 2014, p. 559). En esta investigación tiene mayor prioridad el enfoque cuantitativo. Los datos cuantitativos y cualitativos recogidos, en varios de los instrumentos aplicados durante las cuatro primeras fases, fueron analizados desde la primera hasta la quinta fase. El propósito central de integrar los datos cuantitativos y cualitativos es el diseño de una propuesta didáctica basada en un recurso web que apoye a los estudiantes en el aprendizaje de la representación de números enteros, fraccionarios y decimales en una recta graduada con una escala determinada. Ambos enfoques se integraron desde el momento en que se inició la recolección de los datos durante la primera fase.

A nivel cuantitativo, esta investigación se corresponde con un diseño pre-experimental denominado “diseño de preprueba/posprueba con un solo grupo” (Hernández-Sampieri, et al., 2014, p. 141). Este estudio, básicamente, constituye un preámbulo para un experimento con un mayor número de participantes y un mayor control.

El experimento consistió en aplicar un tratamiento didáctico, a una muestra de 16 estudiantes de un grupo de tercer año de secundaria, mediante un recurso web interactivo. Pero, antes de aplicar este tratamiento, se administró una prueba

diagnóstica (ver anexo 3 y anexo 5 y apartado 5.4) escrita a 35 estudiantes del grupo del cual se tomó la muestra mencionada. Luego, de efectuar la prueba en el laboratorio que pone en práctica la propuesta didáctica (ver Capítulo 4 y anexo 8) mediada por un recurso web dinámico, se realiza una prueba final (ver anexo 9) escrita similar a la prueba diagnóstica, a los estudiantes que realizaron la prueba de laboratorio. La prueba diagnóstica se aplicó un máximo de dos días antes de la prueba de laboratorio y la prueba final.

Como parte de esta investigación, se comparó los rendimientos del estudiante antes y después de realizar el tratamiento didáctico en el laboratorio. Además, se quiso determinar y describir algunas de las dificultades que se han podido minimizar con respecto a la representación de números enteros, decimales, fraccionarios, positivos y negativos en la recta numérica con una escala determinada.

3.2.1 Primera fase

Específicamente, esta investigación se inició de modo inductivo y exploratorio. Durante la primera fase del estudio, se aplicó una prueba diagnóstica preliminar (ver anexo 2 y sección 5.1) a una muestra de 80 estudiantes de tercer año de secundaria, con el fin de explorar las dificultades que se evidencian en los errores de sus respuestas a los ítems de la prueba aplicada. Estos ítems se referían a contenidos relativos al estudio de las gráficas cartesianas. Entre los ítems de la prueba se encontraban cuatro preguntas referidas a la recta numérica. La intención en esta fase exploratoria fue seleccionar algunos contenidos, previos al estudio de las gráficas cartesianas, en los cuales se evidenció dificultad por parte de los estudiantes.

Se detectaron varios tipos de errores en las soluciones dadas por los estudiantes a estos ítems. Además, en esta misma fase, mediante un instrumento aplicado a 19 docentes de matemáticas, se corroboró que los maestros percibían dificultades en los estudiantes, en algunos aspectos relacionados con el estudio del plano cartesiano.

Las respuestas de los estudiantes en esta prueba fueron analizadas desde ambos enfoques. A nivel cuantitativo se tabularon los resultados obtenidos por los estudiantes en la prueba total; luego se compararon con los resultados obtenidos por

cada estudiante en los ítems relacionados con la recta numérica. Para determinar si había una posible relación entre el porcentaje de acierto en los ítems que involucraban el uso de la recta numérica y su calificación obtenida en la prueba en general. También se compararon el número de aciertos entre grupos de valores positivos o negativos que debían ser representados o identificados en la recta numérica. Posteriormente, a nivel cualitativo, se procedió a realizar una descripción de algunos de los errores observados en los ítems que involucraron exclusivamente el uso de la recta numérica graduada con diferentes escalas.

3.2.2 Segunda Fase

Los resultados obtenidos en la primera fase, y las descripciones de los errores permitieron orientar la investigación hacia la creación de una propuesta didáctica mediante tecnología digital en la web, que ayude a disminuir algunas de las dificultades ya presentadas, y promueva el aprendizaje de la representación gráfica de los números enteros, en notación fraccionaria y notación decimal sobre una recta graduada. Considerando los errores evidenciados durante la primera fase, guiado por un soporte didáctico, se diseñó un recurso web interactivo, disponible en línea, que permite practicar ejercicios de identificación y representación de valores numéricos en la recta numérica de acuerdo con los contenidos planteados en el problema de investigación. Este recurso consta de varios niveles de dificultad, en cada uno de los cuales realiza una valoración sobre el aprovechamiento de los estudiantes conforme llevaron a cabo cada nivel, y fue puesto a prueba con algunos estudiantes con el fin de realizarle ajustes antes de la puesta en práctica, según los propósitos de esta investigación.

Además, se diseñó una prueba diagnóstica específica con cuatro ítems que involucraban el uso de la recta numérica para la representación e identificación de valores numéricos en diferentes notaciones. Esta prueba fue creada para ser resuelta por los estudiantes antes de realizar las actividades de la propuesta didáctica en el laboratorio. En esta misma fase se definieron otros instrumentos que serían utilizados durante la investigación para la recolección de los datos. Los instrumentos referidos son el diferencial semántico, el cuestionario para los

estudiantes, la prueba final y la hoja de observaciones para el investigador. El diferencial semántico y el cuestionario para los estudiantes permitieron obtener datos que mostraron el punto de vista de los estudiantes antes y después del trabajo en el laboratorio, sobre el uso de la computadora como apoyo al aprendizaje de la matemática, y su percepción del recurso web con el que interactuaron. La prueba final permitió obtener las calificaciones de los estudiantes, así como la evidencia de mejoras en las dificultades detectadas en la prueba diagnóstica. A nivel cualitativo, este instrumento permitía realizar una descripción de las soluciones dadas por los estudiantes en los diferentes ítems. Esta descripción sería comparada con las soluciones brindadas por los estudiantes en el diagnóstico, en la última fase.

Finalmente, la calificación lograda por los estudiantes en la ejecución del recurso web fue capturada en un registro fotográfico con el fin de realizar una comparación, a nivel cuantitativo, en conjunto con los datos del diagnóstico y la prueba final, durante la quinta fase.

3.2.3 Tercera fase

Durante esta fase se aplicó la prueba diagnóstica diseñada en la segunda fase. La muestra correspondió con 70 estudiantes de los mismos grupos evaluados durante la primera fase. Esto se realizó meses después de que fuera administrada la primera prueba. Los resultados de esta prueba se compararon a nivel cuantitativo con los resultados obtenidos en la prueba de la primera fase para los primeros cuatro ítems. Específicamente, se compararon los resultados a quienes habían realizado ambas pruebas; por lo que se contó con 57 estudiantes para realizar dicha comparación. Esta prueba permitió constatar la persistencia de las dificultades de los estudiantes para solucionar este tipo de ejercicios, aún después de abordar contenidos relacionados con las gráficas cartesianas. Básicamente, se determinó el porcentaje de estudiantes que obtuvo una calificación igual o mayor que 6 en la prueba aplicada. También se comparó el porcentaje de aciertos con respecto a ítems positivos o negativos, relativos a la recta numérica. A su vez, se analizó la distribución del puntaje obtenido en cada grupo de valores (positivos o negativos) de cada uno de los ítems de la prueba.

3.2.4 Cuarta fase

Esta fase corresponde con la puesta en práctica de la propuesta didáctica. Sin embargo, previamente se procedió a la aplicación del instrumento diagnóstico a 35 estudiantes del grupo en el que se probaría la propuesta. Cuantitativamente se determinó el porcentaje de estudiantes que obtuvo un porcentaje igual o mayor que 60%. Luego, se comparó el porcentaje de aciertos con respecto a grupos de valores positivos o negativos, en cada uno de los ítems. Además, se obtuvo la distribución del puntaje logrado en cada grupo de valores (positivos o negativos) de los ítems de la prueba. Cualitativamente se procedió a identificar y describir algunos de los errores presentados por los participantes en la prueba.

La propuesta didáctica se llevó a cabo en un ambiente de laboratorio de computadoras, en el que participaron 16 estudiantes en total. Como parte de la introducción, se aplicó un diferencial semántico antes de interactuar con el recurso web. Este instrumento proveyó de datos que permitieron calcular la media aritmética para ocho pares de adjetivos bipolares, que permitiera clasificar la actitud previa de los participantes hacia el uso de la computadora como apoyo al aprendizaje de la matemática. También se calculó la media de los ocho pares de adjetivos, que permita obtener una valoración general de su actitud hacia el aprendizaje de la matemática asistida por computadora. Esto permitió hacer una descripción sobre la motivación inicial de los participantes hacia la actividad que se les proponía realizar, mediante la clasificación de la actitud de los participantes de acuerdo con una escala de valoración.

Seguidamente, la interacción de los estudiantes con cada uno de los niveles del recurso web brindó un porcentaje de aprovechamiento que fue capturado mediante fotografía. Con esta información se calculó el aprovechamiento de cada estudiante, en el resultado general obtenido en el recurso web. De ahí se calculó el porcentaje de estudiantes que obtuvo una calificación mayor o igual que 6, en una escala del 0 al 10. La prueba final aportó evidencia del aprovechamiento de los estudiantes después de realizadas las actividades de la propuesta didáctica. Cuantitativamente, se obtuvo su calificación de la prueba en los ítems de interés en esta investigación. A

nivel cualitativo, este instrumento permitió describir las soluciones dadas por algunos estudiantes, para que fueran comparadas en la fase final.

Como cierre de la actividad los estudiantes completaron el cuestionario que les permitió explicar su percepción del recurso web y su desempeño durante el laboratorio.

El instrumento para la observación de la dinámica de trabajo, de los estudiantes, durante el laboratorio, permitió obtener una serie de aspectos, a nivel cualitativo, que ayudaron a explicar el desempeño de los estudiantes durante su trabajo de laboratorio.

3.2.5 Quinta fase

En esta fase se procedió a realizar la comparación del desempeño de los estudiantes entre la prueba diagnóstica y la prueba final, a nivel cuantitativo. Así como algunas posibles explicaciones de los errores presentados por los estudiantes en la prueba diagnóstica y la prueba final. También se contabilizó el número de veces que se presentan algunos de los errores más frecuentes. Finalmente, se comparó gráficamente el desempeño de los estudiantes entre la prueba diagnóstica, los resultados del recurso web y la prueba final. La muestra considerada, en esta fase correspondió con 12 estudiantes que coincidieron en la realización de la prueba diagnóstica, la prueba de laboratorio y la prueba final.

3.3 Población y muestra

Para Hernández-Sampieri et al. (2014) “la realidad es que en diversas ocasiones se toman las decisiones de muestreo con base en los recursos disponibles, la oportunidad y el tiempo” (p. 567). Específicamente, el planteamiento del problema orienta hacia cierta muestra y su tamaño. “En la parte cuantitativa, las muestras pequeñas reducen nuestro poder para establecer inferencias estadísticas, entonces se limita el número de relaciones y diferencias significativas que pueden identificarse [...] en la fase cualitativa, una muestra inadecuada restringe el grado en que pueden generarse metainferencias apropiadas (basadas en la mezcla de resultados cuantitativos y cualitativos)” (pp. 567-568).

Se toma en cuenta que el diseño de la investigación es concurrente y que el enfoque cuantitativo es prioritario.

En la primera fase se toma una muestra de 80 estudiantes de tercer año de secundaria. Además, en esta fase, también se obtiene información de una muestra de 19 docentes de matemáticas. La primera fase cumplió un propósito exploratorio, que permitió dirigir las siguientes fases del estudio. Por ejemplo, la elaboración de la prueba diagnóstica específica que se aplicó en la tercera y cuarta fase fue elaborada con algunos ítems que implicaban conocimientos previos necesarios para el estudio de las gráficas cartesianas, en los que un gran porcentaje de estudiantes mostró dificultades para su solución.

La segunda fase se dedicó al diseño de la propuesta didáctica, así como a la elaboración de los instrumentos que se aplicaron en las siguientes fases.

Durante la tercera fase se utilizó una muestra de 70 alumnos que correspondía a un subconjunto de la muestra estudiada en la primera fase. Esta fase sirvió para corroborar la persistencia de las dificultades de interés en esta investigación.

En la cuarta fase, debido a razones de tiempo, oportunidad y recursos, se tomó una muestra de 35 estudiantes de tercer año de secundaria provenientes de una institución ubicada cerca de la BUAP. Debido a que se contaba con la disponibilidad del laboratorio de Probabilidad y Estadística en la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la BUAP, así como la disponibilidad de la institución para el traslado de algunos de sus estudiantes hasta el laboratorio.

La quinta fase corresponde con el análisis de los datos obtenidos durante la cuarta fase del estudio.

3.3.1 Características de la institución

Básicamente se realizaron estudios en dos instituciones de secundaria pública. La primera ubicada en Tlaxcala, y la segunda institución tiene su sede en Puebla.

3.3.1.1. Escuela Secundaria Agustín Melgar

Entidad: Tlaxcala.

Municipio: Papalotla de Xicohtécatl.

Turno matutino.

Nivel: Secundaria Pública

Dirección: Calle: Industrias Oriente No.5

3.3.1.2. Escuela Secundaria Técnica N° 60

Entidad: Puebla

Municipio: Heroica Puebla De Zaragoza

Turno matutino y vespertino

Nivel: Secundaria pública

Dirección: Calle: Rio Cazones No.6122

La población corresponde con los alumnos de Tercer año de una escuela Secundaria Técnica de Puebla.

Hay tres grupos de Tercero, de ellos se selecciona el grupo con un número mayor de casos que presentan un bajo rendimiento académico. A 35 estudiantes de este grupo se les aplica una prueba diagnóstica para determinar las dificultades que presentan los estudiantes al resolver algunos ejercicios sobre la representación gráfica de los números enteros, en notación fraccionaria y notación decimal sobre una recta graduada.

De este grupo, que realizó el diagnóstico, se seleccionan al azar 20 estudiantes para realizar la prueba de laboratorio con el recurso web, más una prueba final similar a la prueba diagnóstica. De los 20 estudiantes sólo ocho presentan los permisos firmados por sus padres para salir de la institución educativa. Por lo cual se procede a invitar libremente a los que quisieran asistir, del mismo grupo evaluado con la prueba diagnóstica. Ocho estudiantes adicionales aceptaron asistir al laboratorio de la BUAP. En total, se presentaron 16 alumnos a realizar el laboratorio, de los cuales sólo 12 habían realizado la prueba diagnóstica. Por lo tanto, 12 estudiantes realizaron las tres pruebas que conforman esta investigación: la prueba diagnóstica, la interacción con el recurso web y la prueba final.

3.3.2 Razones de la selección

En primer lugar, el motivo por el que se seleccionó el tercer año de secundaria fue explorar qué conceptos relacionados con la representación de números enteros, decimales, fraccionarios, positivos y negativos sobre una recta graduada, aún

presentan dificultades para los estudiantes que se supone ya han abordado estos conocimientos.

La Escuela Secundaria Agustín Melgar se eligió por contar con el apoyo de un docente de la misma. Mediante el cual se tuvo acceso a los estudiantes de tercer año para aplicarles las pruebas diagnósticas a tres grupos. Esto permitió disposición por parte de la Dirección de la escuela para colaborar con el proyecto. Además, la Dirección mostró interés por implementar la propuesta en uno de sus laboratorios.

En esta institución se aplicó el diagnóstico preliminar a 80 estudiantes, los días 14 y 15 de enero del 2016. Luego, se aplicó la prueba diagnóstica específica a 70 estudiantes de los mismos grupos, en mayo del mismo año. Esto se realizó con la intención de continuar la investigación en dicha escuela. Sin embargo, no se pudo realizar la implementación de la propuesta, debido a ciertas características del software del laboratorio que impidieron poner en práctica el recurso didáctico diseñado. En sí, la investigación requería de un laboratorio de microcomputadoras para trabajar con una muestra de al menos 10 estudiantes en cada sesión.

La Escuela Secundaria Técnica N° 60 fue contactada directamente por la investigadora y el Director de la Tesis. Para ello se presentó un escrito formal donde se solicitaba el acceso al trabajo con los estudiantes de la institución. La propuesta fue bien acogida, por lo que se procedió a realizar la prueba diagnóstica a un grupo de tercer año de esa institución, el 23 de mayo de 2016. Luego, por medio de la Coordinación académica se trasladaron 16 estudiantes del mismo grupo los días 24 y 25 de mayo, al laboratorio de Estadística de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, con el fin de poner en práctica la propuesta didáctica. Asimismo, se procedió a realizar la prueba final, como cierre de las actividades del laboratorio. Además, se aplicaron algunos instrumentos adicionales a los estudiantes que asistieron al laboratorio. Finalmente, un aspecto que influyó para seleccionar esta institución fue su cercanía con la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas. Lo cual permitió el traslado de los estudiantes en un corto tiempo hacia el laboratorio.

3.3.3 Participantes del estudio

En la primera fase de la investigación participaron 80 estudiantes de los tres grupos de tercer año en la Escuela Secundaria Agustín Melgar. En esta fase los estudiantes resolvieron una prueba preliminar que sirvió para indagar sobre dificultades que presentan los estudiantes en el estudio de gráficas cartesianas de funciones. Hay que destacar que los estudiantes en este nivel, al momento de realizar la prueba, ya han abordado durante primero y segundo año conceptos relacionados con la recta numérica, plano cartesiano, pares ordenados, lectura de gráficas de funciones, números enteros, decimales y fraccionarios positivos y negativos. En esta fase, también se contó con 19 docentes de matemáticas de distintas instituciones educativas. Quienes llenaron un instrumento en el cual dieron a conocer su opinión sobre el logro de los estudiantes en algunos aspectos relacionados con el estudio de los gráficos cartesianos de funciones.

Durante la tercera fase, participaron nuevamente 70 estudiantes de los tres grupos de tercer año en la Escuela Secundaria Agustín Melgar, y 35 estudiantes de la escuela Secundaria Técnica N° 60. En esta fase se aplicó una prueba diagnóstica específica sobre los conceptos abordados en la propuesta didáctica.

En la cuarta fase se contó con 16 estudiantes de tercer año que estuvieron dispuestos a trasladarse, con el Coordinador Académico de la Secundaria Técnica n° 60, hacia el laboratorio de Estadística. Cabe subrayar que 12 de estos estudiantes también realizaron la prueba de laboratorio mencionada anteriormente. En esta fase se llevó a cabo tanto una prueba de la propuesta didáctica utilizando el recurso web diseñado por la investigadora, como la prueba final escrita, similar a la prueba diagnóstica específica sobre la representación de números enteros, decimales, fraccionarios, positivos y negativos sobre una recta graduada. Además, los estudiantes participantes del laboratorio realizaron otros instrumentos aplicados con el fin de recabar información adicional. Por otra parte, en esta etapa se contó con la participación de tres estudiantes universitarios y tres alumnos de preparatoria que realizaron varias pruebas del recurso web, para realizar mejoras, antes de ser llevada a cabo la prueba con estudiantes de tercer año de secundaria en el laboratorio de Estadística.

Consideraciones sobre los participantes que realizaron tanto la prueba diagnóstica como el laboratorio y la prueba final:

- a. **Género:** el grupo fue integrado por seis hombres y seis mujeres.
- b. **Porcentaje obtenido en la prueba diagnóstica:** cinco de los participantes obtuvieron un aprovechamiento menor que 60%, y siete obtuvieron un porcentaje mayor o igual que 60%.
- c. Los estudiantes participaron de manera voluntaria en la investigación.

3.3.4 Negociación de la entrada al campo

Para Hernández-Sampieri et al. (2014, p. 534) la primera tarea para ingresar al campo de estudio es *“explorar el contexto que se ha seleccionado inicialmente, lo que significa visitarlo y evaluarlo para cerciorarnos que es el adecuado”*.

Para negociar el acceso a la institución Agustín Melgar se aprovechó la circunstancia de que se contó con el apoyo de un docente de la misma para solicitar formalmente una cita con el Director con el fin de exponerle las características de la investigación, y los alcances del proyecto, y solicitarle su autorización para acceder a los estudiantes de la institución.

Para la negociación de acceso al campo, en la Secundaria Técnica N° 60 con el fin de realizar la investigación, se procedió a visitar la oficina del Director para exponerle el proyecto y, a la vez, entregarle una carta de parte de la Dirección de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas (ver anexo 12), donde se solicitó su apoyo a la investigación. Durante esta visita se establecieron las fechas para aplicar tanto la prueba diagnóstica como para programar la visita de los estudiantes al laboratorio de Estadística de la BUAP.

3.4 Técnicas e instrumentos de Recolección de datos

Los instrumentos son los medios materiales que se emplean para recoger y almacenar la información. *“El investigador debe decidir los tipos específicos de datos cuantitativos o cualitativos que habrán de ser recolectados [...] tratándose de datos cualitativos no puede precisarse de antemano cuántos casos y datos se recabarán”* (Hernández-Sampieri et al. 2014, p. 569). En este apartado se indicarán las técnicas e instrumentos que fueron utilizados en la investigación.

3.4.1. Instrumentos para la recolección de información.

Los instrumentos que se aplican en la investigación son los siguientes:

3.4.1.1. Cuestionario dirigido a docentes de secundaria:

El cuestionario presentaba una serie de afirmaciones con respecto al uso de la escala, reconocimiento y representación de puntos con coordenadas en diferentes notaciones (positivas y negativas) sobre el plano cartesiano (ver anexo 1). Las preguntas se clasificaron de acuerdo a los temas: escalas de los ejes, orden de las coordenadas cartesianas, coordenadas en notación de números enteros, coordenadas en notación decimal o fraccionarias, y reconocimiento o comprensión de los conceptos presentados en los libros de texto. Las respuestas al cuestionario muestran que la mayoría de docentes encuestados consideran que hay más dificultad en contenidos que involucran las escalas de los ejes del gráfico cartesiano, el uso de notación fraccionaria y decimal en las coordenadas y en la comprensión de los conceptos hallados en los ejercicios presentes en los textos de matemáticas escolar.

3.4.1.2. Prueba diagnóstica preliminar

Dirigida a los estudiantes para determinar dificultades, con respecto a contenidos relacionados al estudio de las gráficas en el plano cartesiano. La prueba se creó con base en la propuesta didáctica de Azcárate y Deulofeu (1996) para iniciar el estudio de las gráficas cartesianas; para ello se realizó la adaptación de algunos ítems de Hernández (2014). Esta prueba se elaboró con la intención de explorar y describir errores de los estudiantes con respecto a la representación de puntos e identificación valores enteros, decimales y fraccionarios, positivos y negativos sobre una recta graduada. Otro tipo de ejercicio evaluado fue la identificación y representación de pares ordenados en el plano cartesiano. Además, se incluyó la lectura e interpretación de gráficos cartesianos. Los errores hallados en esta prueba diagnóstica preliminar sirvieron como base para la selección de conceptos que se desarrollaron en la propuesta didáctica.

3.4.1.3. Prueba diagnóstica específica

Se elaboró para ser aplicada como un pre-test. Los ítems presentados en esta prueba son cuatro. Incluyen ejercicios sobre representación e identificación de valores enteros, decimales y fraccionarios sobre una recta graduada con una escala determinada. Cada ítem presenta una recta con una determinada escala. Los ítems 1 y 2 son para representar e identificar valores enteros positivos y negativos en una recta con escala mayor que la unidad. Los ítems 3 y 4 son para representar e identificar valores decimales y fraccionarios positivos y negativos en una recta con escala menor que la unidad.

Por otra parte, se desea saber si los datos que se obtienen con esta prueba son confiables. Para evaluar la confiabilidad interna de este instrumento, se aplicó previamente a 70 estudiantes de una secundaria pública en Tlaxcala. Para estimar la confiabilidad de la prueba, se calculó el alfa de Cronbach (ver anexo 14) con la siguiente fórmula:

$$\alpha = \frac{k}{k-1} \left(\frac{\sum_{i=1}^k s_i^2}{s_t^2} \right)$$

Se obtuvo un $\alpha = 0.8982$, donde $k = 8$, dado que la prueba consta de cuatro ítems divididos en dos grupos cada uno; según sean negativos o positivos. En total hay ocho grupos de datos que pueden obtener un puntaje desde 0 hasta 3, de acuerdo con los aciertos realizados.

3.4.1.4. Recurso web interactivo

Este recurso sirvió como instrumento de recolección de la información debido a que realiza una valoración del logro de cada estudiante al final de cada uno de los niveles trabajados. Se dieron instrucciones a los participantes para que llamaran a la investigadora cuando finalizaran cada nivel, con el fin de capturar la valoración dada por el sistema al estudiante. Además, cada equipo fue etiquetado en un lugar visible de modo que se pudiera identificar qué estudiante trabajó en cada estación. Esta aplicación dinámica fue creada con GeoGebra, y ensamblada dentro de un Libro de Geogebra diseñado por la investigadora. Luego fue subido al portal GeogebraTube,

como un recurso abierto al público en <http://ggbm.at/hpjBZfeW>. El recurso consiste en seis niveles que presentan ejercicios de identificación y representación (ubicación) gráfica de valores numéricos en diferentes notaciones sobre una recta numérica graduada con diferentes escalas. Los niveles o momentos de aprendizaje son los siguientes:

Nivel 1: Identificación de números enteros en la recta numérica

Nivel 2: Representación de números enteros en la recta Numérica

Nivel 3: Identificación de números en notación decimal sobre la recta numérica

Nivel 4: Representación de números en notación decimal sobre la recta numérica

Nivel 5: Identificación de números en notación fraccionaria sobre la recta numérica

Nivel 6: Representación de números en notación fraccionaria sobre la recta numérica

3.4.1.5. Prueba final

Esta prueba presenta ítems similares a la prueba diagnóstica. Su aplicación se realizó al finalizar el trabajo en el laboratorio.

3.4.1.6. Otros instrumentos

Además, se aplicaron algunos instrumentos para recabar información antes, durante y después de realizado el trabajo con el recurso web. Estos instrumentos son los siguientes:

3.4.1.6.1. Diferencial semántico

El diferencial semántico sirve para explorar las dimensiones del significado. “*Consiste en una serie de adjetivos extremos que califican al objeto de actitud, ante los cuales se solicita la reacción del participante*” (Hernández-Sampieri, Fernández-Collado y Baptista, 2014, p. 247). El participante califica el objeto de actitud a partir de un conjunto de adjetivos bipolares. Este instrumento se aplicó para determinar opinión de los estudiantes sobre el uso de las computadoras como apoyo en el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas. En la prueba aplicada, entre cada pareja de adjetivos se presentan siete opciones de respuesta que se acerca a uno u otro adjetivo, para que el estudiante elija el que refleje mejor su actitud. Las parejas de adjetivos incluidos se muestran en la tabla 3.1.

Tabla 3.1: **Adjetivos bipolares del diferencial semántico**

Adjetivos bipolares	
aburrido	divertido
ineficaz	eficaz
sin valor	con valor
feo	bonito
complicado	sencillo
innecesario	necesario
desagradable	agradable
irrelevante	relevante

Su aplicación se realizó antes de iniciar el trabajo individual de laboratorio.

3.4.1.6.2. Una guía de observación del trabajo de los estudiantes en el laboratorio

Se dispone al momento de realizar el laboratorio de una guía de observación para recabar información sobre aspectos relacionados con el trabajo de los estudiantes en el laboratorio mientras resolvían los seis niveles del recurso web. Los aspectos considerados se agruparon en dos tipos: Aspectos relacionados con los estudiantes y aspectos relacionados con el recurso web.

Aspectos relacionados con los estudiantes

1. Lectura de la hoja de instrucciones
2. Realización de cada nivel con cuidado y dedicación.
3. Si siguen las indicaciones dadas en las instrucciones escritas
4. Presentan dificultades que impiden avanzar en cada nivel (escala, precisión, errores por distracción, manejo de la aplicación, otros).
5. Errores debidos al recurso web.
6. Percepción de motivación en los estudiantes hacia el uso del recurso web.
7. Solicitud de ayuda al investigador.
8. Tiempo empleado por cada estudiante para completar cada nivel.

Aspectos relacionados con el recurso web.

1. Lenguaje confuso para los estudiantes
2. Ambigüedad en las preguntas

3. Errores detectados en su funcionamiento
4. Otros (Especifique)

3.4.1.6.3. Cuestionario para recabar la opinión de los estudiantes al finalizar el laboratorio

Se enfatizó a los estudiantes sobre la necesidad de conocer y evaluar las dificultades, problemas y errores del proceso de enseñanza aprendizaje. Por lo que se solicitó que respondiera al cuestionario con el fin de ayudar a mejorar este material de enseñanza-aprendizaje. Algunas preguntas del instrumento son:

1. Escribe dos aspectos del material que NO te agradaron
2. Escribe dos aspectos del material que fueron de tu agrado.
3. ¿Cuál de los niveles te fue más difícil de realizar? ¿Por qué?
4. ¿Cuál de los niveles te fue más fácil de realizar? ¿Por qué?
5. ¿Cómo evalúas el material de trabajo del laboratorio? En una escala del 0 al 10
6. La ubicación de puntos sobre una recta numérica propuestos en los 6 niveles, comparado con los ejercicios que realizaste en la prueba diagnóstica, fueron:
 Más difíciles Más fáciles Muy parecidos
7. ¿Qué opinas con respecto al uso de las aplicaciones dinámicas para resolver las situaciones propuestas?
8. La realización de las actividades en los diferentes niveles ¿Te ha ayudado a mejorar tu habilidad para identificar el valor que le corresponde a un punto dado sobre una recta numérica con lápiz y papel? Explica.
9. La realización de las actividades en los diferentes niveles ¿Te ha ayudado a mejorar tu habilidad para ubicar puntos con mayor precisión sobre una recta numérica con lápiz y papel? Explica.
10. ¿Requeriste ayuda para resolver las actividades en la computadora? ¿Qué tipo de ayuda?
11. ¿Has aprendido algo nuevo con la realización de las actividades propuestas en el recurso web? ¿Qué aprendiste?

Se puede observar que algunas preguntas son cerradas y otras no.

3.4.1.6.4. Creación de registro fotográfico del desempeño en laboratorio

Además, mediante una cámara digital se elaboró un registro fotográfico y de video sobre el aprovechamiento de los estudiantes en cada uno de los seis niveles del recurso web interactivo.

3.4.2. Técnicas para la recolección de la información

Considerando que las técnicas de recolección de datos son las distintas formas o maneras de obtener la información, en esta investigación se han utilizado las encuestas en la modalidad de cuestionario, la observación directa y el análisis de contenido.

En el caso del presente estudio, las pruebas diagnósticas y la prueba final producen datos cuantitativos y cualitativos. Los datos cuantitativos se refieren a los puntajes obtenidos en cada uno de los ítems, además de la calificación obtenida en las pruebas. Los datos cualitativos corresponden con la descripción de tipos de errores presentes en cada ítem analizado. Con los datos derivados de las pruebas escritas se puede realizar un análisis de contenido. De los cuestionarios aplicados a los docentes y estudiantes se derivan datos provenientes de preguntas abiertas y cerradas, los cuales permiten realizar tanto un estudio cualitativo como cuantitativo.

La guía de observación utilizada durante el desarrollo del laboratorio constituye especialmente una fuente de datos cualitativos. Mediante la guía de observación para el investigador se logró tomar apuntes sobre la interacción de los estudiantes con el recurso web y con el investigador. Además, mediante una cámara de celular se pudo crear un registro fotográfico de los resultados obtenidos por cada estudiante en cada uno de los seis niveles del recurso. Dado que del trabajo del estudiante con el recurso web se desprende un porcentaje logrado por el estudiante en la ejecución de cada nivel, estos corresponden a datos cuantitativos.

Los datos resultados obtenidos en la prueba diagnóstica específica, la calificación general obtenida en cada nivel del recurso web y la calificación obtenida en la prueba final se comparan con el fin de determinar si hubo una mejoría en el rendimiento del estudiante.

3.5 Técnicas, Procesamiento y Análisis de datos

Según Hernández-Sampieri y otros (2014), “en los métodos mixtos el investigador confía en los procedimientos estandarizados y cuantitativos (estadística descriptiva e inferencial) así como en los cualitativos (codificación y evaluación temática), además de análisis combinados” (p. 574). Algunos ejemplos de procedimientos de análisis e interpretación de los datos para diseños concurrentes (triangulación, anidados, transformativos) son:

- Cuantificar datos cualitativos mediante la codificación y asignación de números a dichos datos para realizar un análisis estadístico descriptivo de frecuencias.
- Cualificar datos cuantitativos mediante el examen del significado y sentido de los mismos. Estos significados pueden convertirse en categorías.
- Comparar directamente resultados provenientes de la recolección de datos cuantitativos con resultados de la recolección de datos cualitativos.
- Consolidar datos combinando datos cuantitativos y cualitativos para formar nuevas variables y conjuntos de datos.
- Crear una matriz donde se combinen los datos cuantitativos y los cualitativos.

En la investigación, el análisis de los datos se consideró desde el inicio de la misma y no solo una parte final. En la revisión de la prueba diagnóstica preliminar se realizó un análisis de errores, el cual permitió delimitar los conceptos abordados en la propuesta didáctica. Para este propósito, también se consideraron los datos arrojados por el cuestionario aplicado a los docentes.

Los datos derivados del diagnóstico específico, el trabajo de laboratorio y la prueba final han sido comparados y analizados en distintas formas.

En el siguiente apartado se especifica el tratamiento dado a los datos en cada una de las fases del estudio.

3.5.1 Aporte de cada instrumento de acuerdo con cada uno de los enfoques de la investigación

En la tabla 3.2 se describe brevemente el aporte, de los instrumentos descritos anteriormente, a cada uno de los enfoques del estudio.

Tabla 3.2: Instrumentos utilizados en la investigación

Instrumento	Cualitativo	Cuantitativo
Fase 1 Cuestionario docentes	Explicar o describir detalles en que coincidían los docentes sobre las dificultades que presentan los estudiantes en aspectos relacionados al estudio del plano cartesiano.	Determinar en cuáles aspectos mostraban mayor dificultad los estudiantes, según los maestros, para el estudio del plano cartesiano.
Fase 1 Diagnóstico exploratorio (preliminar) (Tlaxcala)	Determinar los contenidos específicos que se abordarían en la investigación, durante las siguientes fases. Describir algunos errores frecuentes en las respuestas, que evidencian las dificultades que presentan los estudiantes en los ítems relativos a la recta numérica.	Determinar el porcentaje de estudiantes que obtuvo un porcentaje de al menos un 60% en la prueba aplicada; en comparación con el porcentaje de estudiantes que obtuvo al menos el 60% en los ítems correspondientes a la recta numérica. Comparar rendimiento de los estudiantes de acuerdo al género, tanto en el total de la prueba, como en los ítems correspondientes a la recta numérica. Comparar porcentaje de aciertos con respecto a ítems positivos o negativos, relativos a la recta numérica.
Fase 2	Elaboración de propuesta didáctica e instrumentos para el estudio.	
Fase 3 Diagnóstico específico (Tlaxcala)		Establecer los valores frecuenciales alcanzados por los estudiantes siendo de mucha importancia los que hayan logrado una calificación mayor o igual que 60% en la prueba aplicada. Comparar resultados obtenidos, en los ítems relacionados con la recta numérica, por estudiantes que ejecutaron la prueba exploratoria mencionada en la primera fase. Comparar porcentaje de aciertos con respecto a ítems positivos o negativos, relativos a la recta numérica.

Instrumento	Cualitativo	Cuantitativo
Fase 4 Diagnóstico específico (Puebla)		Establecer los valores frecuenciales alcanzados por los estudiantes siendo de mucha importancia los que hayan logrado una calificación mayor o igual que 60% en la prueba aplicada. Comparar porcentaje de aciertos con respecto a ítems positivos o negativos, relativos a la recta numérica. Comparar la distribución del puntaje obtenido en cada grupo de valores (positivos o negativos) de los ítems de la prueba.
Fase 4 Diferencial semántico	Conocer la motivación inicial de los participantes hacia la actividad que se les proponía realizar. Clasificar la actitud de los participantes de acuerdo con una escala de valoración.	Calcular la media aritmética para ocho pares de adjetivos bipolares, que permitiera clasificar la actitud previa de los participantes hacia el uso de la computadora como apoyo al aprendizaje de la matemática. Calcular la media de los ocho pares de adjetivos, que permita obtener una valoración general de su actitud hacia el aprendizaje de la matemática asistida por computadora.
Fase 4 Resultados en el Recurso web		Determinar los valores frecuentistas de los estudiantes respecto al trabajo interactivo, teniendo mucha importancia los que hayan logrado una calificación mayor o igual que 60% en los resultados obtenidos en el recurso web.
Fase 4 Prueba final		Determinar el porcentaje de estudiantes que obtuvo un porcentaje mayor o igual que 60% en la prueba final.
Fase 4 Cuestionario estudiantes	Realizar una descripción sobre la opinión de los estudiantes, que refleja su percepción sobre el trabajo durante el laboratorio, basado en 10 preguntas abiertas.	

Instrumento	Cualitativo	Cuantitativo
Fase 4 Observación participante	Describir la dinámica de trabajo, de los estudiantes, observada por la investigadora, durante el laboratorio.	
Fase 5 Prueba Diagnóstica versus Prueba final	Describir algunos de los errores hallados en las respuestas de la prueba diagnóstica. Mostrar ejemplos de algunos de los errores hallados en las respuestas de la prueba diagnóstica. Describir algunos de los errores hallados en las respuestas de la prueba final.	Comparar desempeño de los estudiantes entre la prueba diagnóstica y la prueba final. Contabilizar número de veces que se presentan algunos de los errores más frecuentes.
Fase 5 Comparación Pruebas		Comparar desempeño de los estudiantes entre la prueba diagnóstica, los resultados del recurso web y la prueba final.

3.5.2 Resultados e inferencias

“Una vez que se obtienen los resultados de los análisis cuantitativos, cualitativos y mixtos, los investigadores o investigadoras proceden a desarrollar las inferencias, comentarios y conclusiones en la discusión” (Hernández-Sampieri et al. 2014, p. 577). Comúnmente se tienen tres tipos de inferencias: las cualitativas, las cuantitativas y las mixtas. Las inferencias mixtas se consideran metainferencias. El reporte del diseño concurrente puede presentar primero las inferencias cualitativas o cuantitativas de acuerdo con el enfoque que predomina, o de acuerdo con el criterio del investigador. También el orden del reporte puede realizarse por áreas, ya sea por pregunta de investigación, por importancia de los descubrimientos o cualquier otro criterio. De modo que “las inferencias deben alcanzar consistencia interpretativa: congruencia entre sí y entre estas y los resultados del análisis de los datos” (p. 577). Finalmente, las inferencias deben ser coherentes con el tipo de evidencia presentado, y “el nivel de intensidad reportado debe corresponder con la magnitud de los eventos o los efectos descubiertos”. También, las inferencias y metainferencias

deben tener consistencia con descubrimientos de otros estudios, es decir, ser congruentes.

3.5.3 Retos de los diseños mixtos

Algunos retos de los diseños mixtos pueden ser resultados contradictorios entre los dos enfoques, la introducción de sesgos de un método a otro, diferencias entre los tamaños de la muestra en ambas ramas, la decisión de cuáles resultados de una etapa guiarán a otra (p. 578).

Capítulo 4

PROPUESTA DIDÁCTICA

4.1 Presentación

Este capítulo describe una propuesta didáctica que tiene como intención dar un soporte al aprendizaje de la representación de números enteros, decimales, fraccionarios, positivos y negativos en una recta numérica, mediante un recurso web interactivo.

Específicamente, se ha desarrollado una propuesta didáctica, mediante la creación de un material didáctico web como recurso didáctico fundamental. Esta propuesta está enmarcada en el programa de secundaria de la SEP y se fundamenta en la revisión bibliográfica, de algunas ideas didácticas, uso de las TIC para la enseñanza, e investigaciones relacionadas con la problemática abordada en este estudio. Además, se han considerado las observaciones realizadas al inicio de esta investigación, en la prueba diagnóstica preliminar.

Se espera, mediante la interacción con este material, lograr un efecto positivo en el rendimiento de estudiantes de secundaria, inclusive desde el cuarto ciclo del primer año, de manera que puedan desarrollar una mejor comprensión sobre la representación gráfica de números enteros, decimales, fraccionarios, positivos y negativos en la recta graduada, independientemente de la escala utilizada. Además, se posibilita al estudiante y/o docente de matemática acceder a este recurso en un navegador web tanto dentro como fuera de línea. El recurso diseñado para realizar esta propuesta, se ha generado como un material libre para facilitar el proceso de enseñanza y aprendizaje de la representación gráfica de valores numéricos de las notaciones señaladas.

Antes de presentar la propuesta didáctica es importante conocer y aclarar aspectos que se tuvieron en cuenta para diseñarla. Se mencionan a continuación.

4.1.1 Aspectos que motivaron la creación de la propuesta

Tomando algunos aspectos recogidos en la investigación previa realizada, que motivaron el desarrollo de la propuesta, se pueden resumir los siguientes puntos:

1. Azcárate y Deulofeu (1996), en su libro Funciones y gráficas, mencionan que la introducción del concepto función a través del estudio de las gráficas cartesianas de funciones debe tener en cuenta que es importante abordar, previamente,

numerosos conceptos y habilidades que presentan todavía variadas dificultades, como son los de número racional, fracciones y decimales.

2. De acuerdo con la SEP (2011), uno de los contenidos del programa, que es de interés para el presente estudio es la representación de números fraccionarios y decimales en la recta numérica a partir de distintas informaciones.
3. En el programa de matemáticas de secundaria (SEP, 2011) los números con signo son abordados desde el cuarto bloque del primer año.
4. En el libro para el maestro (SEP, 2001) se plantea que los alumnos se han habituado a manejar los números naturales, por lo que el trabajo con números negativos y la forma de operar con ellos les implica cierta dificultad.
5. Los números fraccionarios y sus diferentes representaciones presentan dificultades que tardan en dominar los estudiantes (SEP, 2001).
6. Parte de la importancia sobre abordar los números racionales en diferentes notaciones sobre la recta numérica radica en el uso posterior para la lectura e interpretación de la gráfica cartesiana de funciones (SEP, 2001).
7. Hernández (2008) recomienda que se haga más énfasis en la graduación de los ejes, la escala y al ubicación de puntos en el eje cartesiano.
8. Pruzzo (2012) en un estudio realizado con 433 estudiantes de primer año de secundaria en Argentina, encuentra que el 66% no ha construido los aprendizajes sobre números fraccionarios que son prioritarios desde la primaria.
9. Durante un diálogo suscitado en el aula de matemática con estudiantes de primer año de profesorado se observa la necesidad de los estudiantes hacia el trabajo con números en notación decimal, dado que no consideran el mismo valor en notación fraccionaria como un resultado válido. (Crespo, 2009).
10. Kieran y Filloy (1989) mencionan que de acuerdo con varias investigaciones se ha observado que “muchos estudiantes tienen problemas en establecer la conexión entre los datos numéricos y los datos gráficos que involucra el plano cartesiano. Se han identificado dificultades similares con respecto a la recta numérica, especialmente al tratar con escalas” (p. 233).

11. En una muestra de 776 alumnos que realizaron una prueba diagnóstica para ingresar a la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura (FACENA) en la Universidad Nacional del Nordeste en Argentina, uno de los ejercicios trató sobre los conjuntos numéricos, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$ y $\mathbb{R}$, donde se incluía, entre otros, la representación de números en la recta real. Los errores en la representación en la recta real de la población denotan deficiencias y en muchos casos, ausencia de conocimientos acerca de la representación de números reales, en particular, de números fraccionarios y radicales (Rodríguez & Porcel, 2006).
12. Finalmente, se consideraron los errores que se hallaron en las soluciones dadas por los estudiantes, de tercer año de secundaria, en la prueba diagnóstica preliminar (ver apartado 5.1) para los ítems considerados en este estudio. Estos errores evidenciaron fuertes dificultades en la representación gráfica de números enteros, decimales y fraccionarios en la recta.

4.2 Fundamentación teórica de la propuesta didáctica

El producto desarrollado en esta investigación corresponde con una introducción a otros aplicativos dinámicos destinados a un estudio enfocado en la lectura e interpretación de gráficas cartesianas. Por lo tanto, se propone una forma de reforzar los conocimientos sobre la representación de números, la identificación de puntos sobre una recta graduada, así como la representación de situaciones sobre un único eje.

Las actividades elaboradas con la recta y el plano cartesiano están ligadas al estudio de los distintos tipos de números, y presentan ciertas dificultades cuando los números son enteros negativos, pero sobre todo resulta compleja para fracciones y decimales especialmente si son negativos. Es importante variar las graduaciones de la recta, porque inicialmente los alumnos tienden a considerar que cada graduación corresponde a una unidad (Azcárate & Deulofeu, 1996).

4.2.1 La recta numérica como medio didáctico

La recta numérica se toma en esta propuesta como un medio didáctico y medio material con el que interactúa el estudiante para tratar de comprender la representación de números racionales en la recta numérica. El concepto medio se

toma de Brousseau (1999), haciendo referencia a la interacción que se da entre el alumno y el medio. Sin embargo, el interés de esta investigación es dotar al estudiante y maestro, de un apoyo para promover la comprensión de los contenidos ya referidos. En este medio se prevé las acciones del estudiante (sujeto objetivo) con este medio material (ver figura 4.1). En este punto, el alumno “se convierte” en un sujeto simbólico: el *sujeto objetivo*; es decir, un “estudiante objetivo” que se enfrentará a un medio material ideado por el docente, dentro de un sistema objetivo, que corresponde al recurso web desarrollado dentro de esta investigación. Esta pareja “medio material”-“sujeto objetivo” corresponde a la situación objetiva, creada dentro de un sistema objetivo, la cual es finalmente presentada al alumno real o sujeto activo para que interactúe. La acción que desarrolla el “estudiante real” con el recurso web se da dentro de un sistema de referencia que corresponde al ambiente de laboratorio. El recurso web, por tanto, constituye para el alumno el “medio” preparado por el profesor en torno al aprendizaje de la representación de los números enteros, decimales y fraccionarios, positivos y negativos, en la recta numérica.

Fregona (1995) menciona la idea de un “medio” común donde el profesor y el alumno “hablan el mismo idioma”. De lo cual se puede suponer que la recta numérica puede corresponder con un “medio” común en el que tanto el maestro como el alumno pueden ver lo mismo.

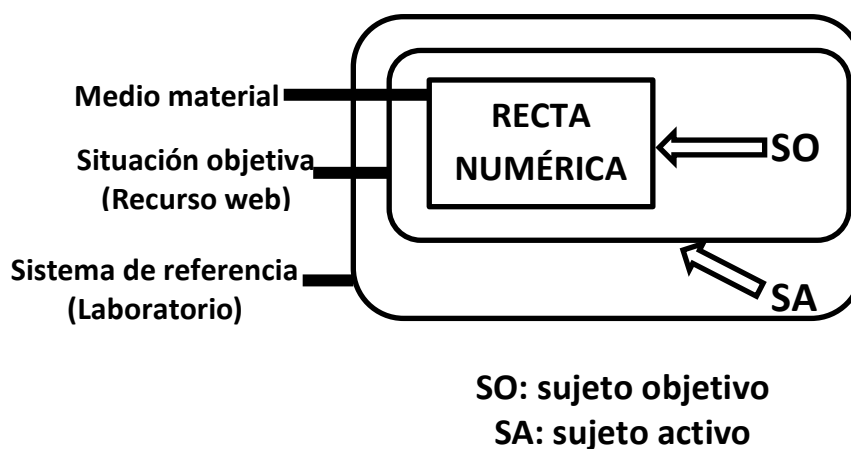


Figura 4.1: La recta numérica como “medio” didáctico

En este sentido, se proponen ejercicios que involucran la recta numérica, la cual se considera como un medio material que “responde al sujeto objetivo” de acuerdo con algunas reglas. Este medio se ha diseñado tomando en cuenta las posibles respuestas dadas por el estudiante. Es importante encontrar qué acción o acciones debe realizar el sujeto para tener necesidad del conocimiento en cuestión. En cada nivel el estudiante debe escribir un valor o arrastrar un punto gráfico hacia una posición determinada de la recta. En ambos casos existe cierta flexibilidad para lograrlo. Por ejemplo, al escribir el valor que corresponde con un punto dado, existen varias formas de escribir el mismo valor. En los ejercicios de representación, se puede arrastrar el punto hasta un punto aproximado, en la recta; sin embargo, si la ubicación del punto difiere notablemente del sitio donde le corresponde ser colocado, entonces se muestra el mensaje de error. En general, el medio diseñado en esta investigación presenta cierto nivel de autonomía mientras interactúa con el estudiante. Además, este medio, le permite validar sus respuestas conforme avanza en cada uno de los niveles del recurso, independientemente de la respuesta del docente. No obstante, se sanciona o muestra que hay error en caso necesario; además de mostrar sugerencias para superar algunas de las dificultades.

Por lo tanto, esta investigación propone una situación didáctica, mediante un recurso web, que funciona como un material didáctico acorde con Area (2003), en varias de sus características. En ese sentido, se ha diseñado un entorno didáctico que incluye ciertas acciones que promueven en el estudiante el aprendizaje de la representación de los valores mencionados, usando como recurso gráfico o medio didáctico una recta numérica graduada. La interacción del estudiante con este recurso es autónoma, por lo que es el estudiante quien toma las decisiones necesarias para completar cada uno de los niveles, y obtener el mayor porcentaje de aprovechamiento en cada uno, como muestra de que se ha adaptado al medio de forma eficiente.

En esta propuesta el estudiante se encuentra ante una interfaz que le solicita realizar ciertas acciones para avanzar en cada uno de los niveles, de acuerdo con algunas reglas. Por ejemplo, una regla dispuesta para la representación de un valor dado, en la recta, consiste en que el punto dinámico debe arrastrarse hasta un punto

perteneciente a la recta dada; si queda fuera de la recta, el estudiante recibe un mensaje que le indica que el punto se halla “fuera de la recta” (Estas acciones se describirán más adelante). De acuerdo con lo que el estudiante vaya realizando, irá avanzando y recibiendo mensajes o sugerencias que le ayuden a modificar o mejorar sus acciones para lograr su adaptación al medio, que corresponde con la recta numérica. El estudiante podrá corroborar el aumento de sus aciertos en la interfaz y además recibirá un mensaje al final de cada nivel que le permitirá saber su aprovechamiento en cada nivel. La adaptación al medio implica la obtención del mayor puntaje posible y la flexibilidad o agilidad con que interactúe con este medio en cada uno de los niveles.

El rol del docente consiste en poner a disposición del estudiante este recurso para que trabaje de manera autónoma en la mejora de su proceso de aprendizaje mediante el logro de cada uno de los niveles, de manera más segura, eficiente y con un mayor aprovechamiento en cada uno. Además de realizar una evaluación formativa posterior, que determine la mejora que haya logrado el estudiante.

De acuerdo con la teoría de las representaciones semióticas, de Duval, el alumno debe relacionar adecuadamente los valores numéricos, en su forma simbólica, con su representación gráfica en una recta real. Esta interacción con el recurso dinámico se da con cierta flexibilidad para el usuario. Se crea un recurso web que cumple con características de un material didáctico web, el cual permite al usuario trabajar con actividades que utilizan como herramienta a la recta numérica. El alumno interactúa autónomamente con el recurso web. El rol del investigador-maestro, en esta propuesta, consistió en la elaboración del recurso web que se ha puesto a disposición del estudiante. La representación de números enteros, decimales o fraccionarios, positivos y negativos corresponde con el saber.

Algunas variables didácticas que pueden identificarse en las situaciones propuestas son la escala de la recta, la notación del valor numérico, el signo del número dado, la acción que debe ejecutar (representar o identificar). La escala varía de una actividad a otra, de manera que el estudiante requiere considerar la relación de ésta con la forma en que debe representar o identificar a determinados valores, dados mediante su representación gráfica en la recta, o dados en forma simbólica.

En los niveles 1, 3 y 5, se le da como información el valor de la escala en cada ejercicio, como apoyo didáctico, y como una forma permitirle enfocarse en la escritura del símbolo numérico que corresponde con el punto dado. En los niveles 2, 4 y 6, se le solicita identificar la escala antes de presentarle las actividades de representación de un grupo de cinco valores dados. Esto, con el fin de descartar errores de representación debidos al desconocimiento de la escala. La notación entera, decimal o fraccionaria permiten variar el nivel de dificultad en los ejercicios propuestos. De modo que se han dedicado los dos primeros niveles para la notación de número enteros, luego se han dispuesto dos niveles para la notación fraccionaria; y por último, se presentan dos niveles que abordan la representación fraccionaria, la cual ha mostrado mayor dificultad para los estudiantes. El signo positivo o negativo varía constantemente en cualquiera de las notaciones. Esto también genera alguna dificultad, como ya se ha visto en las respuestas de los estudiantes. Finalmente, el estudiante debe realizar dos distintos tipos de actividad, que consisten en identificar o representar. La identificación se ha precedido a la representación, en cada una de las notaciones, dado que ha presentado menor dificultad a los estudiantes en los ejercicios resueltos previamente.

El saber que se desea que obtenga el estudiante, mediante este recurso, es la comprensión de la relación entre los valores numéricos citados y su representación en una gráfica lineal. El dominio que el estudiante muestre en la realización de las actividades propuestas en cada nivel, determinará su comprensión en ese aspecto citado.

Entre los conocimientos pertinentes, algunos son adecuados para realizar una elección válida en cada momento con el fin de obtener, en el medio, el estado final deseado. Se indica que algunos conocimientos poseen más eficacia, fiabilidad y son más económicos que otros. Se trata de identificar conocimientos que se manifiestan en los comportamientos de los sujetos, que promueven ciertas estrategias.

4.2.2 Ejercitación y repetición

La propuesta dentro del recurso web dinámico tiene como uno de sus fundamentos didácticos una forma de aprendizaje elemental, propuesta por Aebli

(2001, pp. 280-300). Según el autor, “[...] No existe saber alguno que se pueda sin más ofrecer al alumno, sino que éste lo ha de ir adquiriendo de manera activa” (p. 28). En este sentido, se alude a una tercera de dimensión en la competencia didáctica. La cual se refiere al saber práctico que será adquirido por el estudiante gracias a un proceso de aprendizaje compuesto por cuatro etapas: formación, elaboración, ejercitación/repetición y aplicación. Aebli explica que “a la formación de un método o un concepto ha de seguir su elaboración, que han de consolidarse mediante el ejercicio y la repetición, y que hay que dar al alumno ocasión de aplicarlos a otros casos...” (p. 29). Esta propuesta se centra en la etapa de ejercitación/repetición. A continuación se describen brevemente algunos aspectos que se aplican en la propuesta didáctica, acorde con los planteamientos de Aebli.

De acuerdo con el autor, ejercitar y repetir es una forma de aprendizaje básica, que permite consolidar lo aprendido previamente, de modo que los conocimientos queden grabados en la mente del que aprende para que pueda acceder a ellos posteriormente, de manera más fácil y segura. Esto implica, en esta investigación, que los estudiantes han trabajado previamente con los números enteros, decimales, fraccionarios, positivos y negativos; y que además conocen y han utilizado la recta numérica. De manera que lo que se busca es automatizar y consolidar su aprendizaje sobre la representación e identificación de estos valores en una recta graduada. Específicamente, interesan aspectos tales como el número de repeticiones de los ejercicios, la motivación al realizarlos y la posibilidad de éxito que experimenten los estudiantes con respecto a tal ejercitación.

De acuerdo con el programa de matemáticas de educación secundaria de la SEP (2011), esta propuesta puede utilizarse a partir del cuarto bloque del primer año de secundaria, luego del abordaje de los números con signo. A estas alturas del proceso de enseñanza, los estudiantes ya han estudiado contenidos y habilidades con respecto a la representación de valores decimales y fraccionarios en la recta numérica. Esto, “asegura” la disponibilidad de los conceptos que se pretenden consolidar mediante la interacción del estudiante con el recurso web. Se desea lograr que, mediante la realización de los ejercicios propuestos en cada nivel, el estudiante

adquiera mayor claridad y seguridad en la representación/lectura de los valores numéricos abordados.

Uno de los aspectos, de la teoría de Aebli, presentes en el recurso es la ejercitación llevada a cabo mediante la repetición de ejercicios. En el primero, tercero y quinto nivel, el estudiante debe completar un mínimo de diez ejercicios de identificación de valores correspondientes con puntos dados en la recta. La presentación de cada nuevo ejercicio se da en forma automática cuando el estudiante verifica su respuesta. Tanto los valores que debe identificar como la escala de la recta varían en cada uno de los ejercicios presentados dentro de estos niveles. Además, cada estudiante tiene la posibilidad de realizar más de diez ejercicios antes de finalizar su práctica. También, con respecto, a la repetición de ejercicios, el segundo, cuarto y sexto nivel, requieren la realización de 15 ejercicios de representación de valores dados, agrupados en tres ciclos de cinco ejercicios cada uno, para diferentes escalas. Los valores presentados en cada nivel varían cada vez que se ejecuta la aplicación, de modo que la secuencia de ejercicios de un mismo nivel del recurso web será distinta en cada ocasión que se ejecute. Esto implica una secuencia diferente de valores y escalas para el conjunto de ejercicios presentados a cada estudiante.

Otro aspecto considerado en la puesta en práctica de esta forma básica de enseñar es la gradualidad con que se incrementa el nivel de dificultad de los ejercicios. Este aumento de dificultad se puede observar entre los pares de niveles: a) primero y segundo, b) tercero y cuarto, y c) quinto y sexto. Los números enteros se practican en los dos primeros niveles; luego, en el tercer y cuarto nivel se abordan los números en notación decimal; y finalmente, en el quinto y sexto nivel se trabaja con números en notación fraccionaria, la cual implica una mayor dificultad, debido a la simbología que emplea. Además, en cada uno de los pares de niveles, se puede observar un incremento del nivel de dificultad de tres maneras:

- a) Representación de valores dados: primero se tiene como objetivo el identificar; luego, se trabaja el objetivo de representar, que implica mayor dificultad para muchos estudiantes.

- b) Identificación de la escala: primero se muestra la escala presente en la recta en cada ejercicio de identificación. Luego, en el siguiente nivel, se solicita la identificación de la escala como condición necesaria para acceder a los ejercicios de representación.
- c) Incluye valores situados en el intervalo entre las marcas consecutivas señaladas en la recta: primero se solicita identificar valores correspondientes con las marcas dadas en la recta. Mientras que en el siguiente nivel se solicita representar valores que deben aproximarse en medio de las marcas consecutivas dadas.

Por otra parte, los niveles dos, cuatro y seis, permiten retroalimentar la respuesta emitida cuando se produce un error por parte del estudiante.

Cada estudiante puede interactuar individualmente con el recurso y obtener una calificación del aprovechamiento logrado. Así como ejecutar varias veces cada nivel, durante una misma sesión o en otro momento, hasta mejorar su rendimiento en el mismo. Esto es posible debido a la disponibilidad del recurso en línea y su posibilidad de descarga para trabajarlo fuera de la red. También, es posible, debido a que los ejercicios que se generan varían cada vez que se ejecuta un nivel específico. Esto permite que pueda ejercitarse brevemente en diferentes momentos, hasta que se logre un mayor dominio de los ejercicios propuestos, lo cual permite, según el autor, retener más los conocimientos adquiridos.

Un segundo aspecto planteado por Aebli se refiere a que se debe motivar la realización del ejercicio, de manera que el alumno se esfuerce por progresar. Esto puede lograrse como consecuencia del uso de la tecnología interactiva, la variedad de ejercicios, la calificación que se brinda al finalizar cada nivel, la posibilidad de mejorar su ejecución tras practicar repetidas veces un determinado nivel, la inserción de esta actividad como parte de un plan de clase propuesto por el docente. También, puede generarse motivación a través de la posibilidad de éxito lograda en los primeros niveles. Aebli menciona que, a pesar de que se haya cometido errores, es necesario que el estudiante perciba la posibilidad de superarlo en un próximo intento. Por ello se enfatiza que es un truco didáctico, en los ejercicios propuestos,

que el estudiante vea el resultado de su trabajo. Conforme, se realiza cada ejercicio, el estudiante puede darse cuenta de sus aciertos y sus fallos; además de tener la posibilidad de retroalimentar reubicando el punto dado sobre la recta en diferentes puntos, mientras observa el valor correspondiente con su selección.

4.2.3 Representación y comprensión en la recta numérica

Visualmente el estudiante debe ser capaz de identificar qué distancia en la recta corresponde con una cierta longitud, de manera que con esta información pueda calcular los posibles valores representables en la recta dada con la mayor precisión posible. Por ejemplo, en la recta de la figura 4.2 pueden observarse una serie de marcas distribuidas de modo que la recta queda dividida en segmentos congruentes.

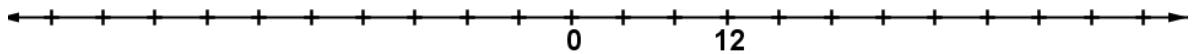


Figura 4.2: Recta numérica con escala cuatro

La escala se refiere a la graduación de la recta, es decir, se deben observar las marcas ubicadas sobre la recta (“rayitas”) y determinar a qué distancia se hallan dos marcas consecutivas. Para lograrlo, en los ejercicios referidos a números enteros basta con observar los dos valores numéricos que se dan sobre la recta y con base en estos valores, calcular la distancia entre dos marcas consecutivas. Por ejemplo, el segmento representado entre el 0 y el 12, se ha subdividido en tres segmentos de igual medida, eso nos indica que entre cada par de marcas consecutivas de la recta hay una distancia de 4 unidades. Con esa información podemos calcular el valor numérico en cualquier marca sobre la recta con sólo determinar cuántos segmentos hay entre el cero y el valor requerido. Los valores correspondientes con las marcas dibujadas en la recta a iguales distancias, hacia la derecha del cero son 4, 8, 12, 16, etc.; hacia la izquierda del cero las marcas representan -4, -8, -12, etc. Sin embargo, hay otros valores enteros que no se hallan representados por las marcas dadas en la recta. De hecho, se pueden calcular con cierta precisión los valores enteros ubicados entre dos marcas consecutivas de la recta. Por ejemplo, en la recta anterior, entre el 0 y el 12 se ubican los valores enteros 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 y 11, pero

solamente el 0, 4, 8 y 12 están representados con las marcas dibujadas en el intervalo de 0 a 12. De manera que entre el 0 y la marca a su derecha que representa al número 4, se encuentran el 1, 2 y 3 (ver figura 4.3), los cuales deben ser distribuidos aproximadamente a iguales distancias entre ambas marcas para ser representados.



Figura 4.3: Representación de números en la recta numérica

Es importante que el estudiante sea capaz de identificar cuál es la escala presente en cada ejercicio, de modo que pueda utilizar esa información para calcular el valor que debe identificar o representar en cada momento.

La precisión esperada en este ejemplo, para los valores que van entre cada par de marcas consecutivas (por ejemplo, 1, 2, 3), supone que el estudiante visualmente sea capaz de situar dentro de cierto margen de error el punto de la recta que corresponda al valor que se ha de representar. En este caso, si trata de representar el número “3” debe tratar de precisar su ubicación y arrastrar el punto hacia allí. Pero, si lo pone muy cercano al lugar que corresponde al “2” o al “4”, entonces se detecta como error. Por otra parte, si tiene cierta dificultad para ubicar los valores ubicados entre dos marcas consecutivas, puede hacer uso de la recomendación dada por los mensajes que aparecen al hacer clic en el icono de ayuda presente en la interfaz; el cual recomienda utilizar las marcas dibujadas en la recta como punto base para moverse, con ayuda del teclado hacia la ubicación requerida.

4.2.4 Criterios para el diseño del material didáctico web diseñado durante esta investigación.

El recurso web diseñado para esta investigación cumple con algunas de los criterios mencionados por Area (2003). Se puede mencionar lo siguiente:

Posee una finalidad formativa porque se ha diseñado con la intencionalidad de consolidar el aprendizaje de la representación gráfica de valores numéricos. El material permite navegar entre sus distintos niveles de ejecución, lo cual permite que

el estudiante realice sus prácticas de acuerdo a sus necesidades. Integra textos (instrucciones, mensajes de ayuda, etc.), gráficos fijos y móviles, comunicación con el usuario (casilla de respuesta). Cabe aclarar que este recurso forma parte de lo que se denomina un “libro de Geogebra”, el cual cuenta con otros recursos adicionales para mejorar la experiencia de aprendizaje del estudiante. Además, puede ser enlazado a otros recursos similares, mientras sea ejecutado en línea. Por el momento, sólo se describe la parte correspondiente al capítulo denominado “La recta numérica” en los seis niveles que presentan actividades para ejercitar la representación e identificación de valores en la recta.

Parte de esta investigación requirió la opinión de los estudiantes, de la muestra que trabajó en el laboratorio, con respecto a su percepción del recurso web con el que interactuaron. Esto servirá de apoyo para una mejora posterior de su interfaz, en cuanto a colores, distribución espacial y facilidad de uso. También se espera mejorar la aplicación para lograr un mayor aprendizaje activo. En cuanto a la comunicación telemática entre diferentes usuarios y con el docente, aún no se ha implementado esta característica.

4.3 Propuesta didáctica mediante tecnología interactiva como apoyo al aprendizaje de la representación de números enteros, fraccionarios y decimales en la recta numérica.

Para dar respuesta a la pregunta de investigación que se planteó en el primer capítulo, se propuso como objetivo general el diseño de una propuesta didáctica mediante tecnología digital en la web, que minimizara algunas dificultades y diera apoyo al aprendizaje de la representación gráfica de los números enteros, en notación fraccionaria y notación decimal sobre una recta graduada. Como parte de las acciones para conseguir este objetivo se ha realizado lo siguiente:

- Se pusieron en evidencia algunas dificultades que obstaculizan la representación gráfica de números enteros, fraccionarios y decimales en una recta graduada con una escala determinada, para estudiantes de secundaria, mediante el análisis de las respuestas dadas por estudiantes de tercer año de secundaria.
- Se propuso una secuencia de actividades, mediante la creación de un recurso web dinámico, como recurso didáctico principal, que permite al estudiante de

secundaria ejercitar gradualmente, en seis niveles de dificultad, la representación gráfica de los números enteros, en notación fraccionaria y notación decimal sobre una recta graduada.

- Se llevó a cabo una actividad en un ambiente de laboratorio con una muestra de estudiantes de tercero de secundaria.

4.3.1 Propuesta didáctica que utiliza un material didáctico web como recurso principal

En este material web trabajaremos con la recta numérica. En las actividades los alumnos identificarán puntos dados en una recta numérica, correspondientes a valores en notación decimal, fraccionarios y enteros, tanto positivos como negativos; y representarán gráficamente sobre una recta graduada, valores numéricos dados, utilizando el un recurso web, diseñado con el programa GeoGebra, ubicado en la plataforma GeogebraTube. Este recurso puede ser descargado para trabajarlo fuera de línea. Para su utilización sólo son necesarios conocimientos básicos de uso de navegadores web.

Se recomienda su realización después de que hayan sido abordados los números con signo. Dado que hasta ese momento los estudiantes han adquirido los conocimientos que se busca ejercitar mediante este material. Su utilización se justifica en las dificultades observadas en los estudiantes al llegar al tercer año de secundaria, con la representación gráfica de valores enteros, fraccionarios y decimales. La idea es que los estudiantes puedan interactuar con este material, como una forma de apoyo para ejercitar y consolidar sus conocimientos en los contenidos abordados.

4.3.1.1 Objetivos de la propuesta

Objetivo General de la propuesta

Dar un soporte al aprendizaje de la representación de números enteros, decimales, fraccionarios, positivos y negativos en una recta numérica, mediante un recurso web interactivo.

Objetivos específicos del recurso web

1. Identificar números enteros en la recta numérica

2. Representar números enteros en la recta numérica
3. Identificar números en notación decimal en la recta numérica
4. Representar números en notación decimal en la recta numérica
5. Identificar números en notación fraccionaria en la recta numérica
6. Representar números en notación fraccionaria en la recta numérica

4.3.1.2 Contenidos del currículo de secundaria de la SEP

Los contenidos del programa de secundaria de la SEP en los que se enmarca este recurso web son los siguientes:

Contenido: 7.1.2 Representación de números fraccionarios y decimales en la recta numérica a partir de distintas informaciones, analizando las convenciones de esta representación.

Contenido: 7.4.1 Planteamiento y resolución de problemas que impliquen la utilización de números enteros, fraccionarios o decimales positivos y negativos.

4.3.1.3 Intenciones didácticas

Nivel 1

- Que los alumnos reflexionen sobre el orden, la escala, el signo y la relación de los números enteros y su representación gráfica en una recta graduada.
- Que los alumnos identifiquen el valor entero correspondiente a un punto dado, teniendo como recurso gráfico a la recta numérica.

Nivel 2

- Que los alumnos reflexionen sobre el orden, la escala, el signo y la relación de los números enteros y su representación gráfica en una recta graduada.
- Que los alumnos identifiquen la escala utilizada en una recta numérica dada.
- Que los alumnos representen gráficamente el punto correspondiente a un valor entero dado, teniendo como recurso gráfico a la recta numérica.

Nivel 3

- Que los alumnos reflexionen sobre el orden, la escala, el signo y la relación de los números en notación decimal, positivos o negativos, y su representación gráfica en una recta graduada.

- Que los alumnos identifiquen el valor en notación decimal, positivo o negativo, correspondiente a un punto dado, teniendo como recurso gráfico a la recta numérica.

Nivel 4

- Que los alumnos reflexionen sobre el orden, la escala, el signo y la relación de los números notación decimal, positivos o negativos, y su representación gráfica en una recta graduada.
- Que los alumnos identifiquen la escala utilizada en una recta numérica dada.
- Que los alumnos representen gráficamente el punto correspondiente a un valor notación decimal, positivo o negativo, dado, teniendo como recurso gráfico a la recta numérica.

Nivel 5

- Que los alumnos reflexionen sobre el orden, la escala, el signo y la relación de los números en notación fraccionaria, positivos o negativos, y su representación gráfica en una recta graduada.
- Que los alumnos identifiquen el valor en notación fraccionaria, positivo o negativo, correspondiente a un punto dado, teniendo como recurso gráfico a la recta numérica.

Nivel 6

- Que los alumnos reflexionen sobre el orden, la escala, el signo y la relación de los números notación fraccionaria, positivos o negativos, y su representación gráfica en una recta graduada.
- Que los alumnos identifiquen la escala utilizada en una recta numérica dada.
- Que los alumnos representen gráficamente el punto correspondiente a un valor notación fraccionaria, positivo o negativo, dado, teniendo como recurso gráfico a la recta numérica.

4.3.1.4 Consideraciones previas sobre el recurso web

La recta numérica está presente en cada uno de los niveles del recurso diseñado. Además, se han incluido dos valores de referencia, y algunas marcas en la recta que permiten al estudiante ubicar de modo aproximado los valores solicitados en cada

ejercicio, ya sea de identificación o de representación. El cero se ha incluido como uno de los valores de referencia, en todos los ejercicios, debido a que esta propuesta está dirigida a ser una introducción al estudio de las gráficas cartesianas; por lo que se considera la presencia del elemento que corresponde con el origen de las coordenadas cartesianas. Básicamente interesa utilizar la recta numérica como recurso gráfico para la representación o identificación de valores numéricos.

Interesan aspectos como el orden, el reconocimiento de la escala, el correcto uso de la escala, la precisión al representar cada valor dado, la relación de cada valor con respecto a su ubicación aproximada en la recta, la lectura de cada valor correspondiente a un punto dado.

Pueden presentarse variadas situaciones que evidencien dificultades de los estudiantes con respecto a los contenidos tratados en este material. Por ejemplo, algunos estudiantes pueden tratar de ubicar los números sin tomar en cuenta los valores de referencia dados, otros pueden situar valores negativos a la derecha del cero o valores positivos a la izquierda, otros ubican los valores sin tomar en cuenta el signo “-”, entre otros. Los estudiantes ubicarán los valores como creen que es correcto, pero el sistema responderá de diferentes formas, permitiendo al estudiante la retroalimentación y cierto grado de autonomía durante su ejercitación.

En cuanto a la forma de trabajo, se propone que de manera individual, los estudiantes accedan al recurso web y realicen las actividades propuestas en cada nivel. Sin embargo, puede realizarse una presentación rápida del recurso a los estudiantes, más una práctica en grupos de dos o tres estudiantes, con el fin de familiarizarlos con el funcionamiento de cada nivel.

4.3.1.5 Descripción general del recurso didáctico

Se puede acceder a este recurso en línea, mediante el siguiente enlace <https://ggbm.at/hpjBZfeW>. Se presenta una pantalla de acuerdo con la figura 4.4 con el título “Representación gráfica de valores numéricos racionales”.

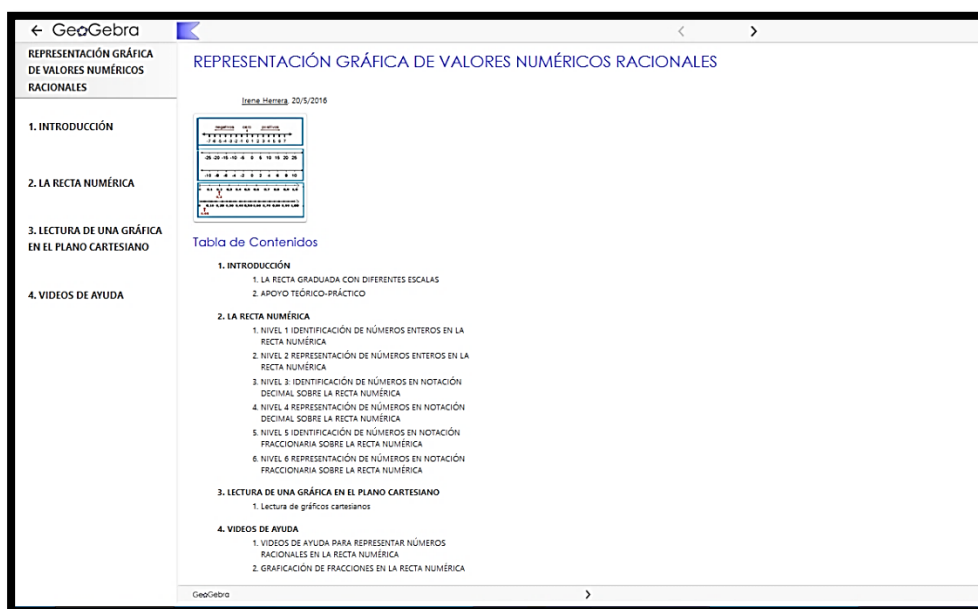


Figura 4.4: Recurso WEB. Inicio.

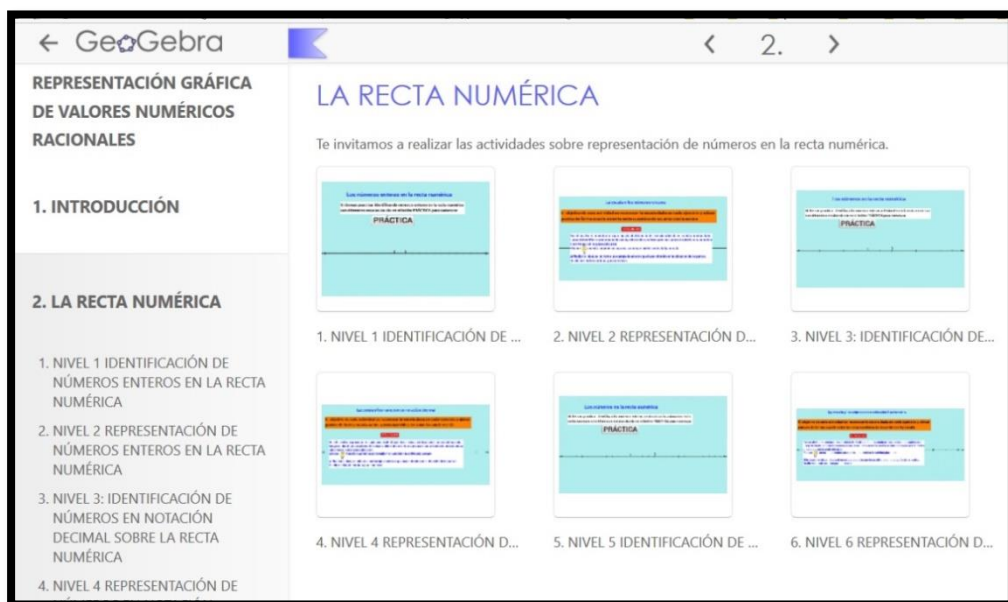


Figura 4.5: Recurso WEB. Capítulo “LA RECTA NUMÉRICA”

Se debe seleccionar el capítulo denominado “La Recta Numérica” (Ver figura 4.4). Se presentan seis niveles que pueden ser trabajados por los estudiantes a modo de juego con el fin de interiorizar más el concepto de número a través de la visualización de su representación gráfica (ver figura 4.5).

4.3.1.5.1 El grado de dificultad aumenta

La propuesta presenta dos tipos de actividades que corresponden con

- Identificar valores correspondientes con puntos graficados en una recta graduada con una determinada escala: Nivel 1, Nivel 3 y Nivel 5.
- Representar gráficamente en una recta graduada algunos valores dados: Nivel 2, Nivel 4 y Nivel 6.

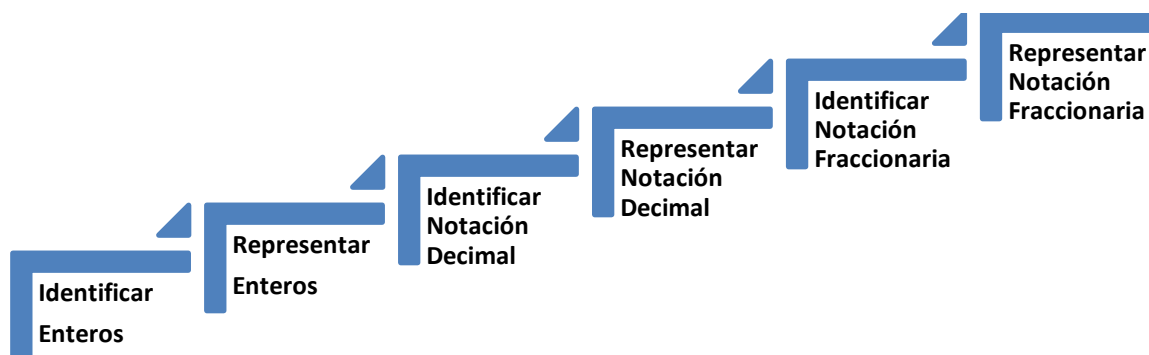


Figura 4.6: Presentación gradual de los ejercicios

Como se muestra en la figura 4.6 se abordan los números en notaciones entera, decimal y fraccionaria, positivos y negativos, de forma gradual, de acuerdo con su nivel de dificultad. Primero se trabajan valores enteros positivos y negativos. Estos son abordados en los niveles 1 y 2. Luego, se abordan los números en notación decimal, incluyendo valores enteros, positivos y negativos, en los niveles 3 y 4. Finalmente, se incluyen los valores positivos y negativos, en notación fraccionaria, tomando en cuenta su representación decimal como apoyo para su identificación y/o representación, en los niveles 5 y 6. Es decir, cada ejercicio de representación es precedido por un ejercicio de identificación, como una práctica previa que le permita familiarizarse con las escalas utilizadas y la ubicación de los valores en la recta graduada. Finalmente, es importante mencionar que en todos los niveles, el estudiante debe ser capaz de realizar una lectura gráfica de la recta dada, la cual mostrará al valor cero y otro valor de referencia, que permitan al estudiante realizar una correcta interpretación de los valores que puede contener.

4.3.1.5.2 Acciones que deben realizar los estudiantes

- Los niveles 1 y 2 abordan la identificación y representación de números enteros respectivamente.
- Los niveles 3 y 4 abordan la identificación y representación de números en notación decimal y entera.
- Los niveles 5 y 6 abordan la identificación y representación de números en notación fraccionaria, decimal y entera.
- En cada ejercicio la recta puede estar graduada con una escala diferente. En los niveles 1, 3 y 5 la escala se muestra en cada ejercicio, pero en los niveles 2, 4 y 6 es necesario que el estudiante identifique la escala antes de comenzar la práctica.
- Para que el estudiante identifique la escala, se dan dos valores de referencia en la recta representada, el “0” y otro valor situado en alguna de las marcas que gradúan la recta. En la tabla 4.1 pueden verse los valores que se presentan en la recta para cada escala representada. El valor cero siempre se muestra debido a que, como ya se mencionó anteriormente, una de las intenciones con las que se ha generado este recurso web, ha sido proponerlo como una ayuda para las dificultades que arrastran los estudiantes con respecto a la identificación y representación de valores racionales sobre la recta.

Tabla 4.1: Escala dada y valor de referencia mostrado en cada recta representada

Escala	Valores mostrados
2	0 y 6
3	0 y 9
4	0 y 12
5	0 y 10
8	0 y 16
0.1	0 y 1
0.2	0 y 1
0.25	0 y 1
0.5	0 y 1
1	0 y 1

- Los valores que deben identificarse o representarse se generan aleatoriamente, de manera que cada vez que se ejecuta un nivel se propone un conjunto diferente de valores numéricos.
- El estudiante puede elegir con qué nivel desea trabajar dependiendo de lo que requiera practicar.

4.3.1.5.3 Ejercicios de identificación: niveles 1, 3 y 5

La identificación de puntos dados corresponde con los niveles 1, 3 y 5. Su intención es permitir al estudiante familiarizarse con las escalas que presentarán las rectas en los niveles 2, 4 y 6. Se han incluido en esta propuesta como una práctica previa a la representación de valores en notación entera, decimal y fraccionaria. También se pretende familiarizar al estudiante con la actividad que realizará en el siguiente nivel. Esto es, con la representación gráfica de valores numéricos dados en rectas numéricas cuya escala puede variar. Para ello se le presentan, uno a uno, ejercicios en los que debe identificar el valor representado por un punto ubicado en una recta numérica, en la que la escala se muestra en cada ejercicio. Se quiere que conozca, de manera ágil, los posibles valores de las escalas utilizadas en los ejercicios de representación del nivel que les precede.

Por otra parte, se intenta motivar o alertar al estudiante, mediante la rápida comprobación de sus respuestas. En caso de presentar un alto número de aciertos, puede mostrarle que tiene cierto dominio en la identificación de valores representados en una recta, conociendo la escala. Pero, en caso de errar en variadas ocasiones, puede ser una muestra de que tiene dificultades para identificar valores que corresponde con puntos en una recta, lo cual puede incidir en la representación gráfica de este tipo de valores, necesario para el siguiente nivel. Esto puede evidenciar posibles dificultades para la comprensión de la relación entre valores numéricos y su representación en una recta graduada.

Finalmente, se muestra una evaluación general que determina el porcentaje de aprovechamiento logrado en la práctica realizada. Básicamente, se componen de una interfaz de inicio, una interfaz de práctica, en la que debe realizar 10 ejercicios como mínimo, y una pantalla de evaluación general (ver figura 4.7).

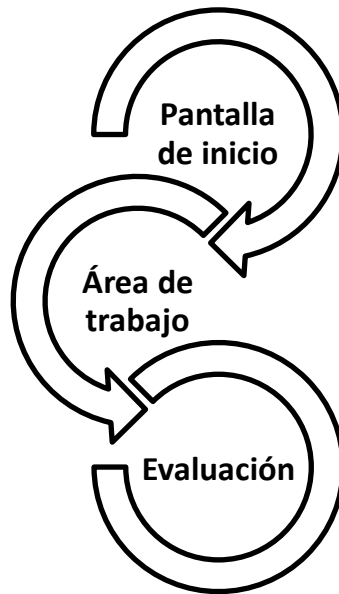


Figura 4.7: Pantallas básicas de Niveles 1°, 3° y 5°

4.3.1.5.3.1 Elementos comunes de la pantalla de inicio

En la pantalla de inicio se indica el propósito de la actividad y un botón “PRÁCTICA” que permite dar comienzo a la ejercitación.

Básicamente, la pantalla de inicio contiene tres objetos: el título, un mensaje que invita a realizar la práctica y un botón “PRÁCTICA” para iniciar la ejercitación.

- **El Título:** se corresponde con los valores que se pretende ejercitar. Se mantiene durante toda la ejecución del nivel.
- **Una breve introducción:** Se menciona el tipo de números que se van a identificar.
- **El botón PRÁCTICA:** permite comenzar la actividad.

La figura 4.8 muestra la forma en que se lleva a cabo la ejercitación en estos niveles.



Figura 4.8: Ejercitación mediante identificación

4.3.1.5.3.2 Elementos comunes del área de trabajo

Luego de dar clic en el botón PRÁCTICA, la interfaz muestra los siguientes elementos:

- El título:
- Botón reinicio: permite reiniciar la actividad en cualquier momento.
- Texto indicador de la escala dada en la recta.
- Unas breves indicaciones: “Escribe el valor que le corresponde al punto P y presiona la tecla ENTER para ingresar el valor”
- Un icono de ayuda (?) que muestra una sugerencia para continuar la actividad.
- Una casilla de entrada: “Valor de P”, seguida de un espacio para responder, donde el estudiante debe escribir el valor correspondiente con la abscisa del punto P.
- Respuesta de la interfaz: al comprobar la respuesta del estudiante, la interfaz mostrará el mensaje “Muy Bien” o “Lo siento”, en caso de que la respuesta dada sea equivalente o no con el valor esperado. A continuación mostrará la respuesta correcta en la notación correspondiente.
- Una recta graduada con una escala aleatoria. La recta muestra dos valores de referencia para que el estudiante pueda comprobar la escala indicada en la interfaz.
- Un punto P ubicado sobre la recta: cuyo valor debe ser identificado.
- Texto dinámico que indica el número de resultados correctos e incorrectos.

En la pantalla de práctica o área de trabajo se irá presentando un punto P ubicado en distintas partes de una recta, para que sea identificado el valor que representa el punto. Esta recta mostrará una escala que variará conforme cambia de ubicación el punto P. Al estudiante le corresponde escribir en la casilla de respuesta el valor que ha identificado, luego debe presionar la tecla ENTER para que aparezca el botón “COMPROBAR”, el cual le permitirá evaluar su respuesta. El sistema le indicará si su respuesta fue correcta o incorrecta, además mostrará cuál era la respuesta esperada, y presentará una nueva ubicación de P para continuar la práctica.

En estos niveles, el punto P se ubica específicamente sobre valores correspondientes a las marcas dibujadas en la recta. Por ejemplo, si la graduación de la recta corresponde a la escala “2”, entonces los valores sobre los que se ubicará P podrían ser 2, 4, 26, -30, -8, etc. o cualquier valor divisible entre 2. Si la escala corresponde a 0.2 o $\frac{1}{5}$, el punto P se ubicará en valores como $2.2=\frac{11}{5}$, $3.8=\frac{19}{5}$, $-1.6=-\frac{8}{5}$, $-0.4=-\frac{2}{5}$, etc. Cuando el estudiante haya realizado al menos 10 ejercicios de identificación, aparecerá un botón “Terminar práctica” el cual permitirá dar por terminada la práctica y obtener una evaluación de los ejercicios realizados en una escala del 1 al 100. Si a criterio del estudiante, se desea realizar más de 10 ejercicios antes de finalizar la práctica, podrá continuar hasta que decida hacer clic en el botón “Terminar práctica”. El sistema calculará el porcentaje de respuestas correctas dadas por el estudiante con respecto al total de ejercicios realizados.

Estas actividades de identificación poseen un nivel de dificultad menor que las actividades de representación en la notación correspondiente. Por ejemplo, en los dos primeros niveles, se trabaja con valores en notación entera; pero en el nivel 1 solamente se requiere que el estudiante identifique valores correspondientes a la abscisa de un punto ubicado en una recta sobre las marcas correspondientes a la graduación de la misma. Cabe mencionar que la escala de la recta se indica en la parte superior izquierda de la pantalla de práctica, con la intención de que sirva de apoyo para el estudiante al identificar el valor que corresponde al punto dado, de acuerdo con la graduación de la recta. Se debe considerar que la escala también puede ser determinada con los valores de referencia mostrados en cada recta. Sin

embargo, en estos niveles interesa familiarizar al estudiante con la relación entre puntos de la recta y valores numéricos en diferentes notaciones.

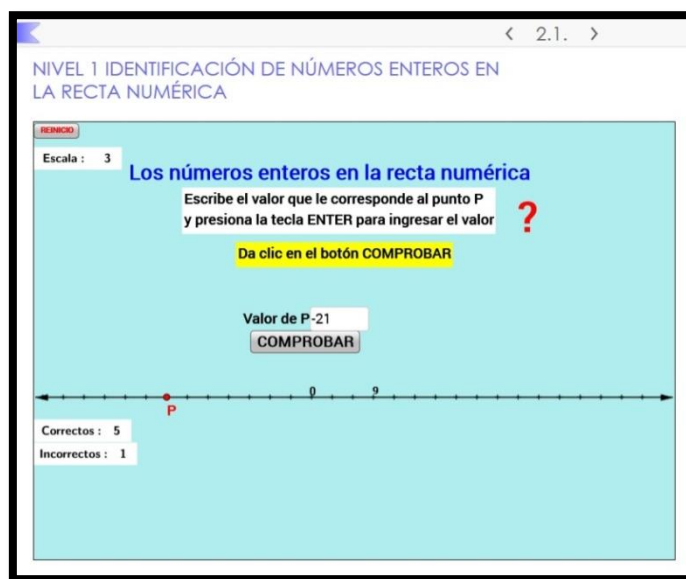


Figura 4.9: Ejercicio de identificación

Estrategias: para calcular el valor que corresponde con la ubicación del punto P, se puede recurrir a la escala mostrada en la parte superior izquierda de la pantalla. Por ejemplo, la figura 4.9 presenta uno de los ejercicios donde la recta tiene una graduación de tres unidades. Los valores de referencia dados son “0” y “9”, de manera que el intervalo desde cero hasta el nueve se haya dividido en tres segmentos congruentes. Esta información hace posible corroborar que la distancia entre cada par de marcas consecutivas es de tres unidades. Se puede observar que el punto P se halla siete veces “3 unidades” hacia la izquierda del cero, lo cual permite calcular que el valor correspondiente con P es el número 21. Otra manera más “económica” para determinar la respuesta consiste en observar que cada tres segmentos equivalen a nueve unidades, considerando los valores de referencia de la figura 4.6; lo cual permite visualizar la distancia correspondiente a nueve unidades y utilizarla para determinar el valor buscado.

4.3.1.5.3.3 Elementos comunes de la pantalla de evaluación

En la pantalla de evaluación de los niveles 1, 3 y 5 se muestran los siguientes objetos:

Botón REINICIO: da la opción de comenzar la práctica nuevamente una secuencia de ejercicios diferentes.

Porcentaje de aprovechamiento: Un mensaje con el porcentaje obtenido en la práctica. Este porcentaje se calcula dividiendo el número de aciertos el número de ejercicios realizados en la práctica.

El objetivo de esta pantalla es dar al estudiante un resultado general, que le permita tener consciencia, sobre su habilidad para identificar valores en la recta. Un bajo aprovechamiento en este nivel, puede ser un indicador de ciertas dificultades en la comprensión del estudiante acerca de la representación de valores en la recta.

4.3.1.5.4 Ejercicios de representación: niveles 2, 4 y 6

La representación de valores dados corresponde con los niveles 2, 4 y 6. Se presenta una construcción dinámica que permite al estudiante arrastrar un punto hasta una ubicación específica de la recta dada de manera que aproxime lo más exactamente posible el valor designado. La figura 4.10 muestra de manera simplificada la forma en que se presentan las actividades en estos niveles.

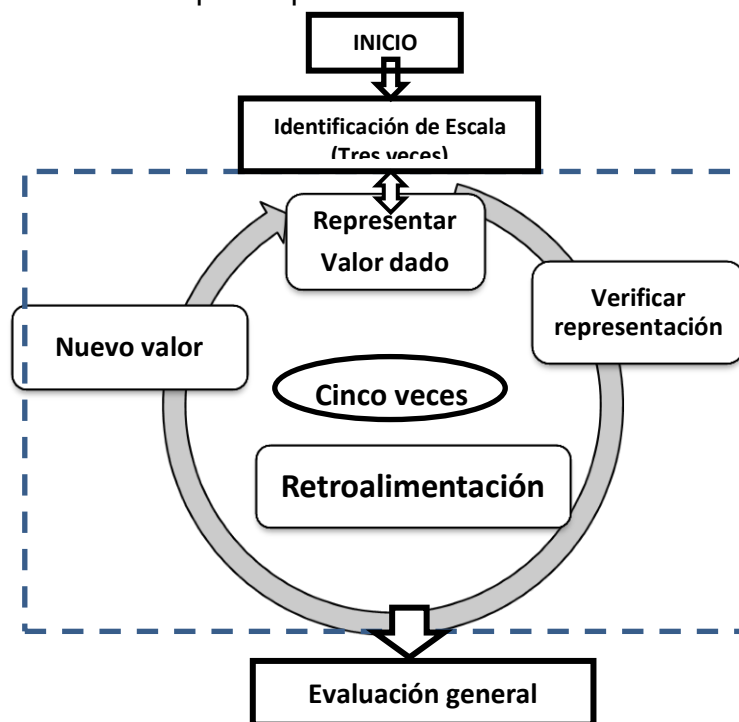


Figura 4.10: Esquema básico de los ejercicios de representación

4.3.1.5.4.1 Elementos comunes de la pantalla de inicio (ver figura 4.11)

La pantalla de inicio muestra básicamente cuatro elementos: Un título, el objetivo general de la actividad, un botón para iniciar la ejercitación y unas instrucciones básicas.

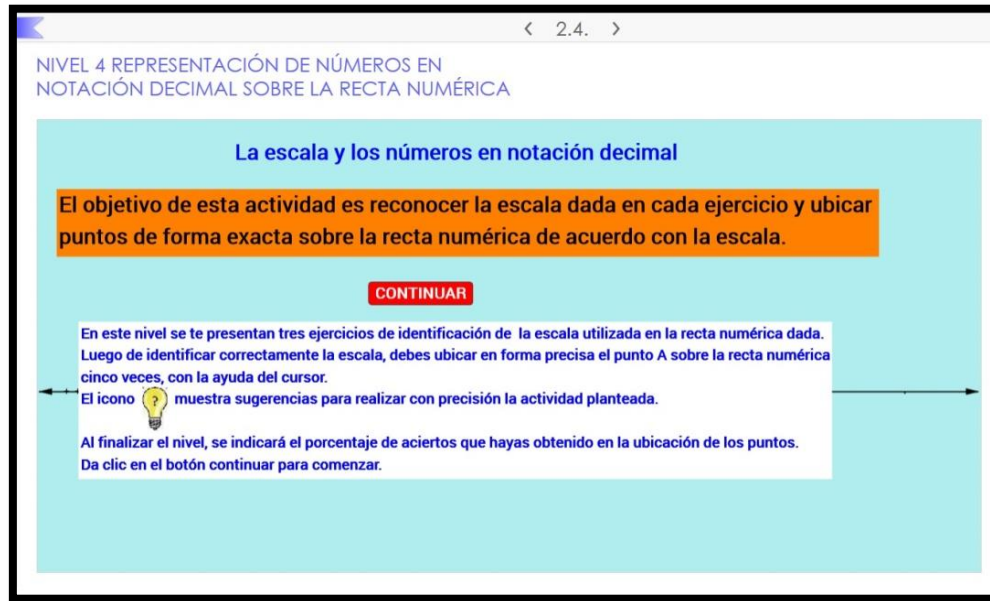


Figura 4.11: Pantalla de inicio

Un título: corresponde con el tipo de notación abordada.

El objetivo de la actividad: “El objetivo de esta actividad es reconocer la escala dada en cada ejercicio y ubicar puntos en forma exacta sobre la recta numérica de acuerdo con la escala”. Este mismo texto se muestra en los tres niveles.

El botón CONTINUAR: Inicia las actividades correspondientes a la identificación de la escala y la representación gráfica de valores en notación decimal.

Indicaciones generales:

“En este nivel se te presentan tres ejercicios de identificación de la escala utilizada en la recta numérica dada. Luego de identificar correctamente la escala, debes ubicar en forma precisa el punto A sobre la recta numérica cinco veces con la ayuda del cursor”, “El icono  muestra sugerencias para realizar con precisión la actividad planteada”, “Al finalizar el nivel, se indicará el porcentaje de aciertos que

hayas obtenido en la ubicación de los puntos”, “Da clic en el botón continuar para comenzar”

4.3.1.5.4.2 Elementos comunes de la pantalla de identificación de la escala

Cuando se hace clic en el botón CONTINUAR se pasa a una pantalla de identificación de la escala, cuyos elementos son:

El título

Botón Reiniciar: Ubicado en la esquina superior izquierda de la pantalla. Permite reiniciar el nivel en el momento que se quiera.

Ejercicio de identificación: se debe seleccionar una escala entre varias opciones, considerando la recta dada y sus valores de referencia.

Un mensaje de ayuda: *“¡Observa bien! ¿Qué escala tiene la recta dada? Marca la opción correspondiente y da clic sobre el botón Verificar”*

El botón Verificar: evalúa si ha sido seleccionada alguna de las opciones y si es correcta, permite avanzar en el nivel.

Un icono de ayuda con una sugerencia que puede apoyar la elección realizada.

4.3.1.5.4.3 Elementos comunes de la pantalla para representar valores en la recta

Se mantienen el título y el botón REINICIAR hasta el final del nivel.

Control del puntaje obtenido: corresponde a los aciertos en la ubicación del punto A sobre la recta.

Texto que indica la escala de la recta. Ubicado en la parte superior izquierda de la pantalla.

Unas breves indicaciones. “AHORA REALIZA EL SIGUIENTE EJERCICIO. Con ayuda del cursor ubica el punto dado en el lugar correspondiente sobre la recta numérica y luego haz clic en el botón Verificar” y “Arrastra el punto A y colócalo sobre la recta numérica en el valor:...”

El punto A: que puede ser arrastrado hasta cualquier punto en la recta.

La recta graduada: con marcas ubicadas de acuerdo a la escala que se acaba de identificar.

Botón verificar: evalúa si el punto A se ha ubicado en la recta o se halla fuera de ella. Luego determina aproximadamente el valor correspondiente a la ubicación del punto A. Finalmente, evalúa si la representación del punto es correcta de acuerdo con el valor dado.

Icono de ayuda: con una sugerencia de acuerdo con la notación abordada.

Para completar el nivel, se deben realizar tres ciclos de actividades. Cada ciclo conlleva la identificación de una escala seguida de cinco ejercicios de representación de valores dados en la recta graduada con esa escala. La figura 4.12 muestra la forma en que se interactúa con estos niveles.

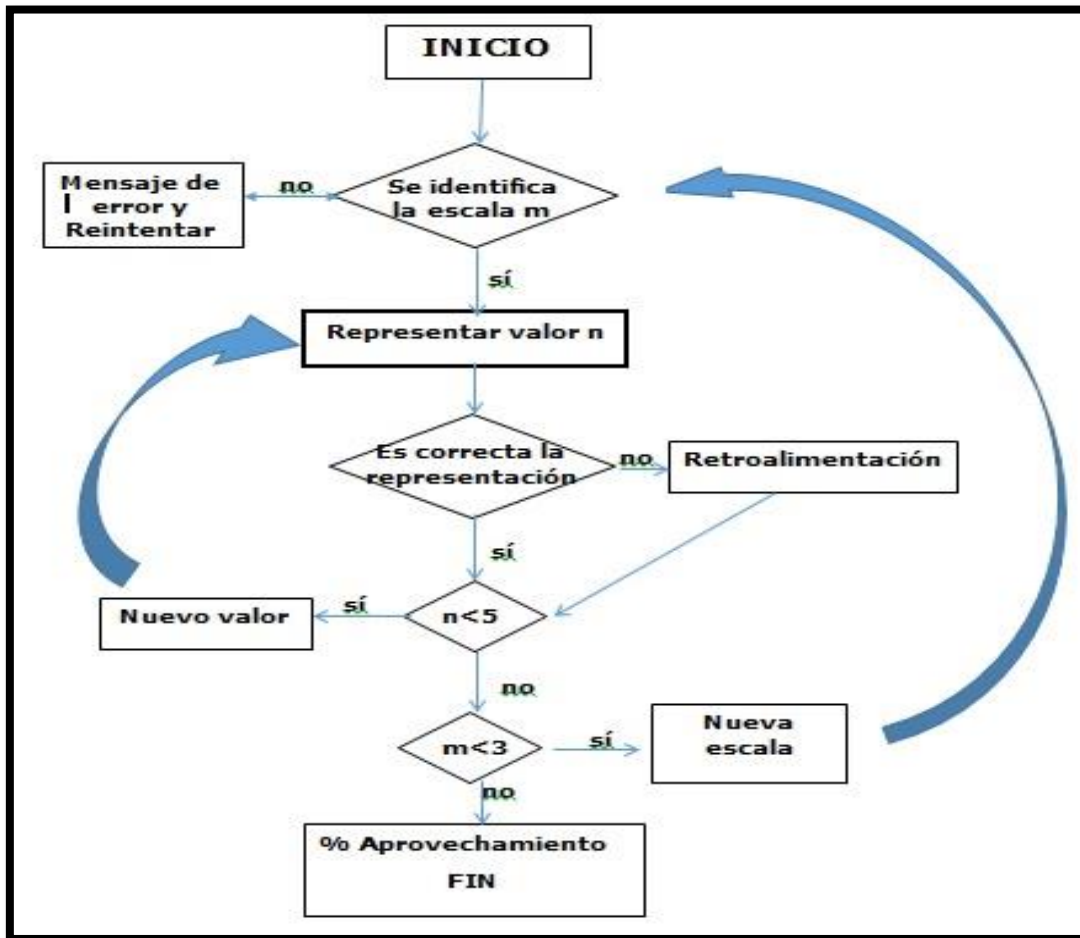


Figura 4.12: Ciclo de los ejercicios de representación

4.3.1.5.4.4 Elementos comunes de la pantalla final

En esta pantalla se indica que se ha finalizado el nivel y se da el porcentaje de aciertos. Si su porcentaje es igual o mayor que 50%, se le mostrará un mensaje con el texto “Bien”, “Muy Bien” o “Excelente”, según el aprovechamiento logrado. Si el estudiante ha obtenido un porcentaje menor que 50%, aparecerá la siguiente sugerencia: “Es recomendable que ejecute nuevamente la aplicación para mejorar tu precisión en la ubicación de puntos sobre la recta numérica”

Primero se presenta una pantalla de inicio. Luego, se solicita la identificación de la escala de la recta mostrada, una vez identificada ésta, se pide representar un valor, mediante el arrastre de un punto dinámico hacia el sitio que le corresponde en la recta. Luego, el estudiante debe verificar su respuesta, si es correcta, podrá continuar haciendo clic en el botón Nuevo valor, para que se genere un nuevo ejercicio para representar un nuevo número. Si su representación es incorrecta tiene la opción de retroalimentar su respuesta mediante la visualización de un mensaje dinámico que le permite observar el valor aproximado donde ubicó el punto A y el posible motivo de su error. De modo que puede mover el punto mientras observa cómo cambia su valor en la recta. Cuando desee continuar con un nuevo número, podrá hacer clic en el botón Nuevo valor y continuar la práctica, hasta completar la representación de cinco valores, con la escala identificada previamente. Después del quinto valor, aparecerá el botón nueva escala para iniciar el segundo ciclo. Finalmente, cuando haya completado los tres ciclos, se le indicará el porcentaje alcanzado en la representación de los valores dados. En total, se deberán representar 15 valores numéricos.

Estos niveles presentan un tipo de complejidad mayor que los niveles 1, 3 y 5, en cuanto que es el estudiante quien debe determinar la escala con la que se ha graduado la recta; y además, en este nivel, debe representar valores que pueden corresponder a puntos ubicados en el intervalo entre pares de marcas consecutivas con las que se ha graduado la recta. Por ejemplo, si la recta tiene una escala de cinco unidades y se requiere representar el número ocho, este valor se debe ubicar entre las marcas correspondientes a cinco y diez, exactamente dos unidades a la izquierda de diez o tres unidades hacia la derecha del cinco. Ubicarlo de manera

directa conlleva una dificultad en la precisión para muchos estudiantes, especialmente si se halla fuera de las marcas dibujadas en la recta.

4.3.2 Descripción de cada nivel

A continuación se presenta cada uno de los niveles y una breve descripción de su pantalla de inicio y su área de trabajo. Se describen algunos aspectos que diferencian cada uno de los niveles del recurso didáctico web. En especial, la graduación de la recta, las escalas que se trabajan en ese nivel, los posibles valores que el estudiante debe identificar o representar, las instrucciones o sugerencias dadas, la respuesta que se espera del estudiante, y el tipo de retroalimentación que da la interfaz.

Los niveles 1 y 2 se describirán de manera más amplia que el resto de los niveles, debido a que, como ya se indicó en el apartado 4.3.1.5, hay una serie de características comunes con las descritas en los dos primeros niveles. Por ello, se procederá a destacar aquellos aspectos que representen diferencias específicas para los niveles restantes.

4.3.2.1 Nivel 1: Identificación de números enteros en la recta numérica

La idea del primer nivel es que los estudiantes se familiaricen con escalas enteras mayores que la unidad, mientras identifican los valores enteros correspondientes a la abscisa del punto P.

4.3.2.1.1 Elementos de la pantalla de inicio del primer nivel: figura 4.13

- **El Título:** Los Números enteros en la recta numérica.
- **Una breve introducción:** *“Si deseas practicar identificando números enteros en la recta numérica con diferentes escalas da clic en el botón PRÁCTICA para continuar”*
- **El botón PRÁCTICA:** permite comenzar la actividad.

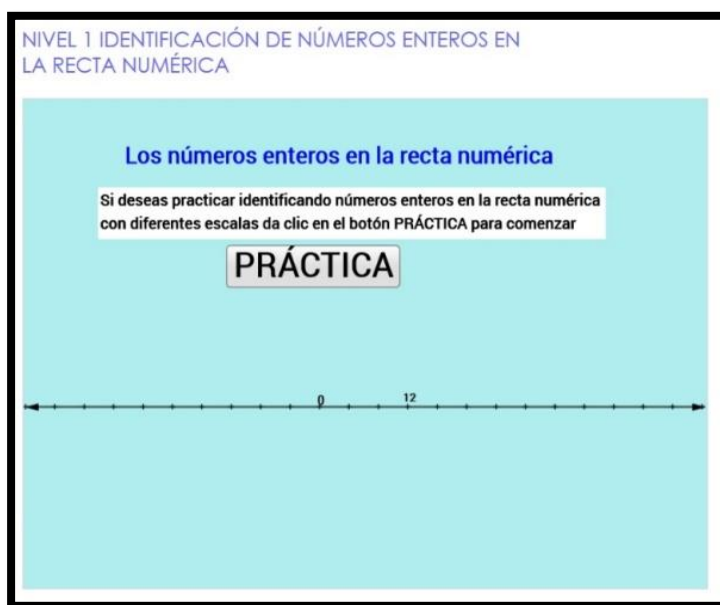


Figura 4.13: Pantalla de inicio: Nivel 1

4.3.2.1.2 Elementos del área de trabajo del primer nivel: figura 4.14

Luego de dar clic en el botón PRÁCTICA, la interfaz ingresa al área de trabajo. Seguidamente se describen los elementos de esta pantalla.

Graduación de la recta: la recta se divide de acuerdo con una escala mayor que la unidad, la cual se presenta de forma aleatoria entre las siguientes: 2, 3, 4, 5 y 8.

Valores de referencia: la recta dada en cada ejercicio, la interfaz muestra dos valores de referencia de acuerdo con la escala de la recta (ver tabla 4.1, mostrada en el apartado 4.3.1.5.).

Instrucción general: “Escribe el valor que le corresponde al punto P y presiona la tecla ENTER para ingresar el valor”.

Valores posibles: el punto P se ubica aleatoriamente en valores enteros, que van desde -32 hasta 42. Estos valores serán divisibles por la escala correspondiente, en cada ejercicio, de manera que el punto se sitúa específicamente sobre las marcas dibujadas en la recta. Por ejemplo, si la escala representada en la recta es “2”, entonces el punto P se ubicará en valores como 2, 6, 10, 40, 0, -10, -16, -30, dentro del rango definido en la recta. En la figura 4.14 se muestra un ejemplo donde las marcas consecutivas se hallan cada dos unidades de distancia, mientras que el punto P se halla situado en la marca correspondiente con -14.

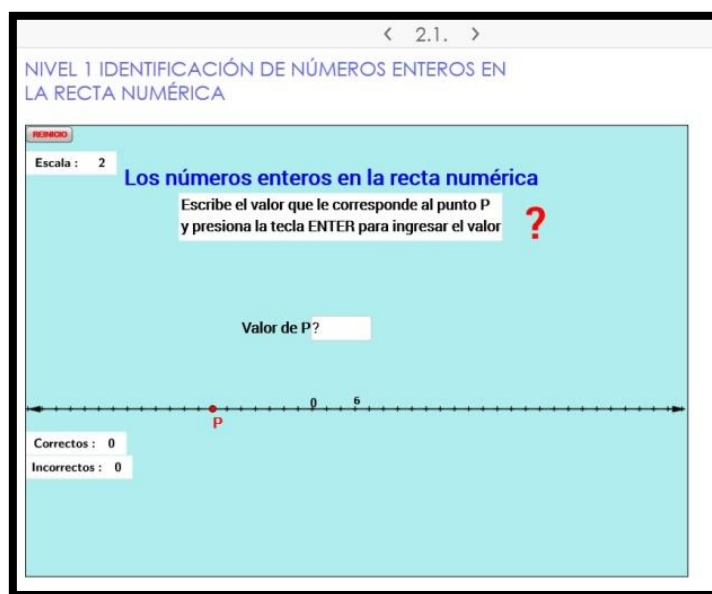


Figura 4.14: Pantalla de práctica: Nivel 1

Sugerencia disponible: Si hace clic en el icono de ayuda (?), se muestra una sugerencia: “Para identificar el punto P con mayor precisión determina cuántas unidades hay entre cada par de marcas consecutivas de la recta dada” (ver figura 4.15).

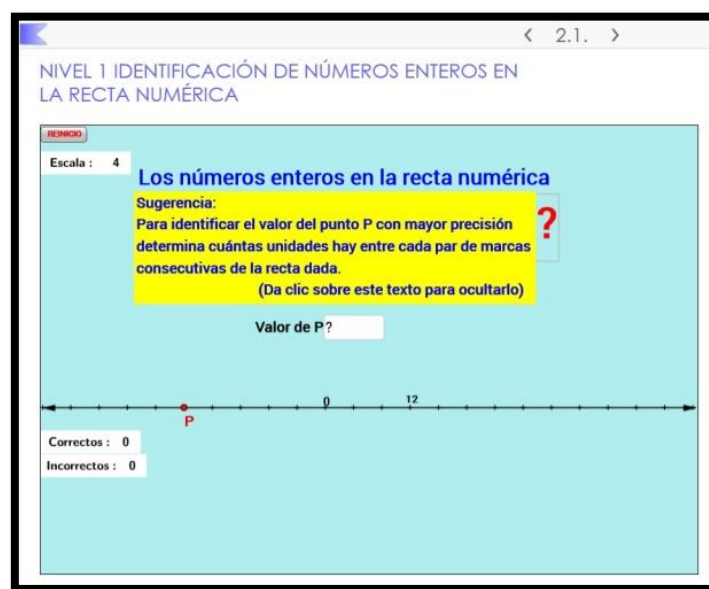


Figura 4.15: Sugerencia en la pantalla de práctica: Nivel 1

Respuesta esperada: dentro de la casilla de respuesta, se espera un número entero. La respuesta puede darse en cualquier forma equivalente con el valor de la abscisa del punto P cuando se halla ubicado en la recta; por ejemplo, si el valor esperado es 4, puede escribirse $8/2$, 4.0, $7-3$, etc.

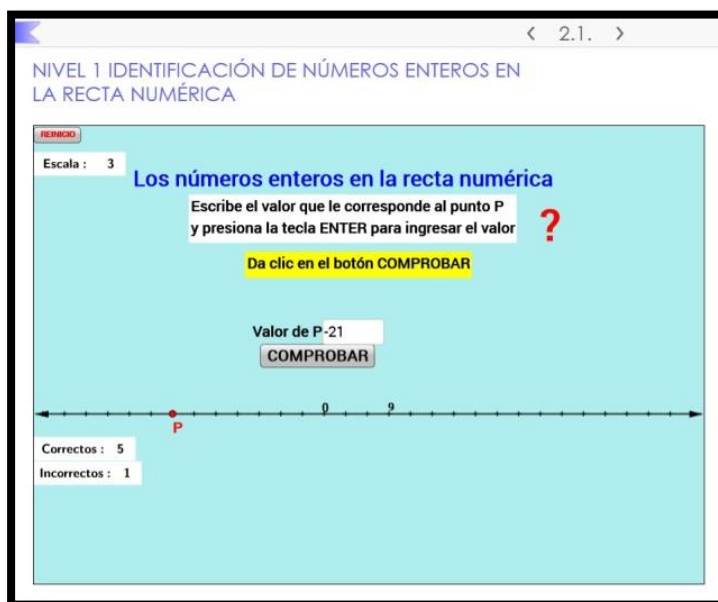


Figura 4.16: Pantalla de práctica: Nivel 1

Respuesta de la interfaz: En la figura 4.16, luego de escribir el valor que se ha identificado y presionar la tecla ENTER aparece el botón COMPROBAR. El botón COMPROBAR determina si el valor identificado es correcto o incorrecto. Luego de mostrar el mensaje “Muy Bien” o “Lo siento”, se presentará la respuesta correcta en notación entera. Al mismo tiempo, el punto P se reubica en un nuevo punto de la recta para continuar con la práctica (ver figura 4.17).



Figura 4.17: Comprobación de respuesta: Nivel 1

Una vez comprobado el valor escrito por el estudiante, el punto P se reubica automáticamente en una nueva posición para que el estudiante escriba el nuevo resultado en la casilla de entrada. Durante toda la práctica se presenta un control de respuestas correctas e incorrectas, visibles al estudiante. Para finalizar el nivel se deben realizar un mínimo de 10 ejercicios de identificación de valores en una recta graduada cuya escala puede variar en cada uno de los ejercicios.

También el estudiante puede realizar más ejercicios para mejorar el porcentaje de su aprovechamiento final en caso de haber cometido algún error y quiera mejorar su calificación. Al finalizar los diez primeros ejercicios, aparece en la parte superior izquierda de la pantalla, un botón “TERMINAR PRÁCTICA”; y un mensaje “Si deseas finalizar la práctica dale clic al botón TERMINAR PRÁCTICA” (ver figura 4.18).

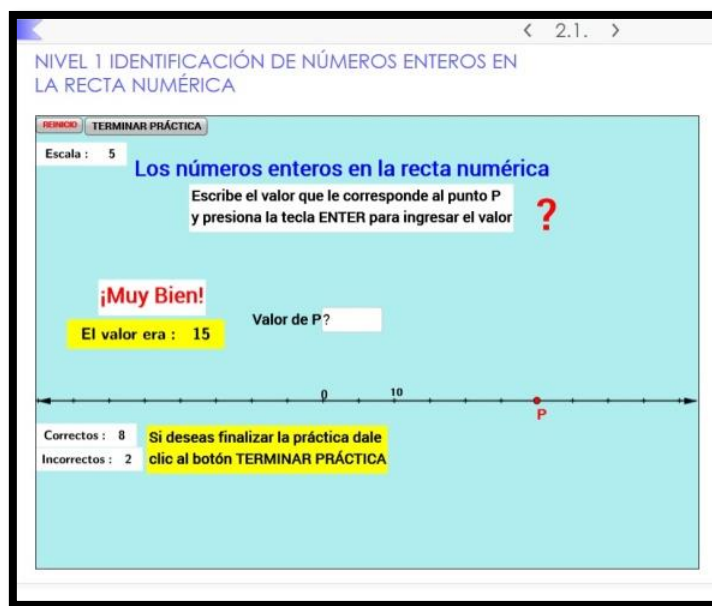


Figura 4.18: Fin de la práctica: Nivel 1

Al dar clic en este botón se calcula el porcentaje de aciertos obtenidos por el estudiante, con respecto al total de ejercicios que haya realizado durante la práctica (ver figura 4.19). Con esto se da por terminado el nivel 1.

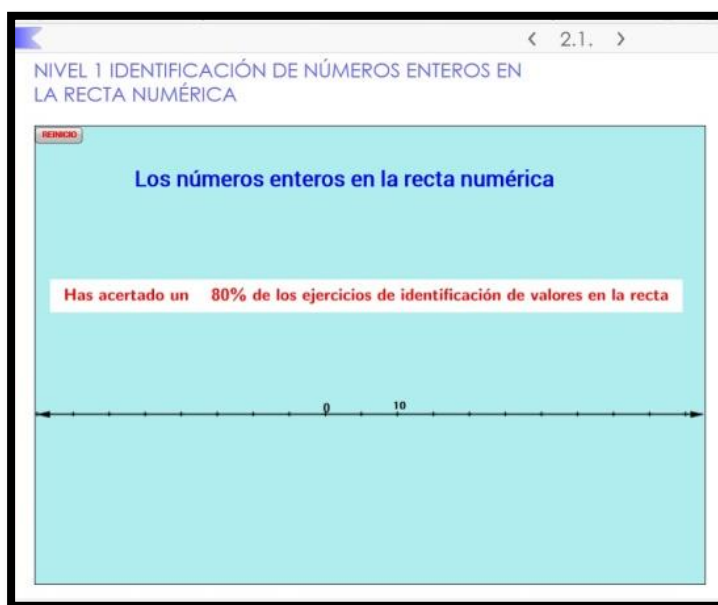


Figura 4.19: Aprovechamiento de la práctica: Nivel 1

4.3.2.2 Nivel 2: Representación de números enteros en la recta numérica

La actividad tiene como título: “La escala y los números enteros”. El objetivo principal de este nivel es que los estudiantes representen gráficamente los valores enteros que se le soliciten, mediante el arrastre de un punto (A) hasta su ubicación aproximada en una recta graduada.

La pantalla de inicio fue descrita anteriormente en 4.3.1.5, dado que contiene básicamente la misma información en los tres niveles.

La figura 4.20 muestra la pantalla de inicio del segundo nivel. En esta pantalla se pretende brindar algunas indicaciones básicas que den una idea general sobre la interacción que se llevará a cabo con el segundo nivel.

Al dar clic en “CONTINUAR” aparece un ejercicio de identificación en el que se debe seleccionar la escala que corresponda con la graduación de la recta dada, y luego dar clic al botón Verificar (ver figura 4.21). Las opciones para seleccionar la escala son 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8. Si la escala es seleccionada correctamente, se permitirá pasar al primer ejercicio para ubicar valores dados en la recta.

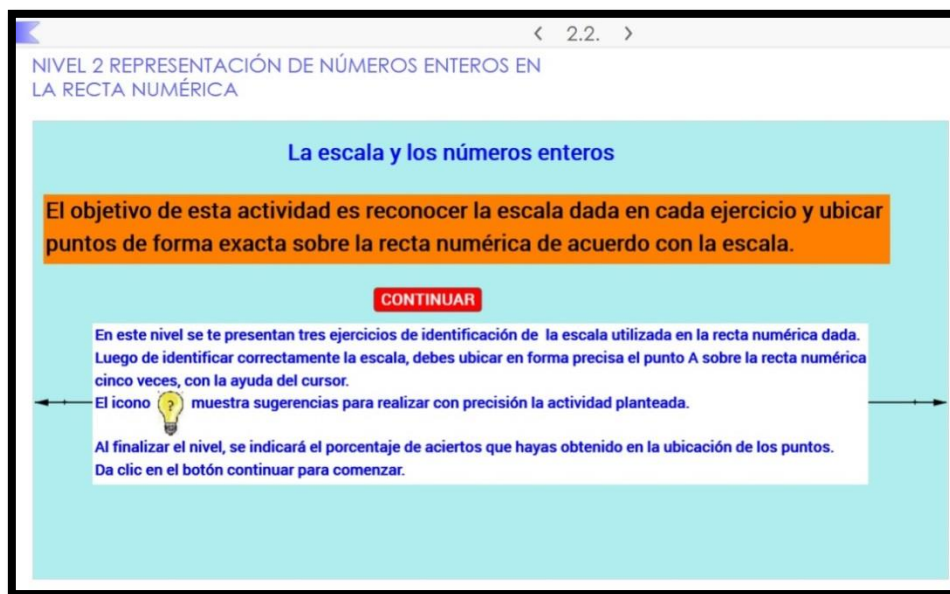


Figura 4.20: Pantalla de inicio: Nivel 2

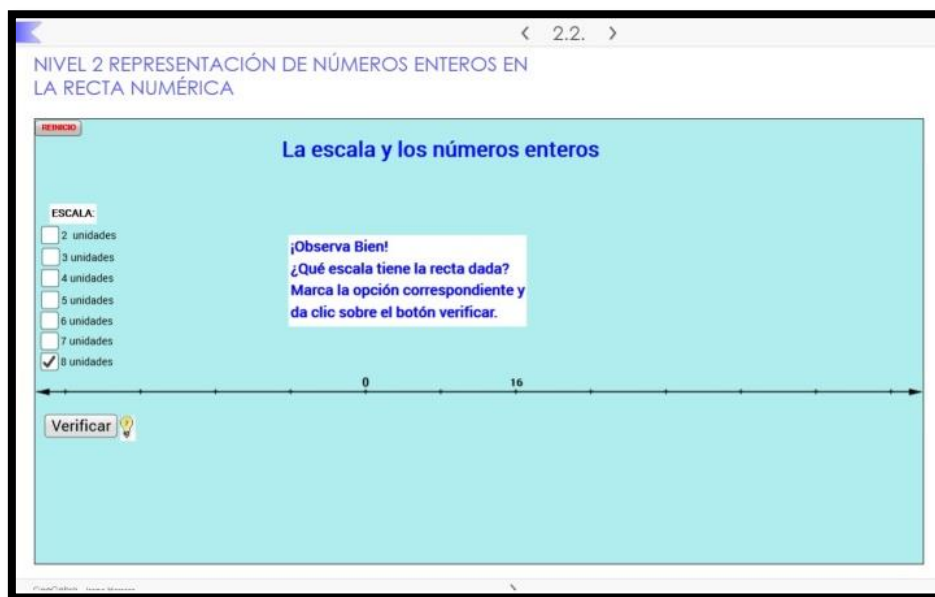


Figura 4.21: Identificación de la escala: Nivel 2

4.3.2.2.1 Elementos de la pantalla de identificación de la escala en el nivel 2

El botón de reinicio, la indicación dada y el botón Verificar corresponden con la descripción realizada en 4.3.1.5.

Texto “ESCALA” y Ocho opciones etiquetadas como “2 unidades”, “tres unidades”, hasta “ocho unidades”, para realizar la identificación de la escala.

- Una advertencia “! *Observa bien ¿Qué escala tiene la recta dada? Marca la opción correspondiente y da clic sobre el botón Verificar*”
- El botón Verificar: evalúa si ha sido seleccionada alguna de las opciones y si es correcta, permite avanzar en el nivel.
- Un icono de ayuda con una sugerencia. “*Calcula cuantas unidades hay entre cada par de marcas consecutivas en la recta dada*”

Al dar clic en “Verificar” se indica si la escala ha sido seleccionada correctamente. Para iniciar la práctica de ubicación de puntos el estudiante previamente debe identificar cuál es la escala que tiene la recta. Si el estudiante no selecciona ninguna escala o selecciona una escala incorrecta, se le muestra el mensaje “¡Aún NO has seleccionado ninguna escala!” (Ver figura 4.22) o “¡Lo siento! Esa no es la escala. Intenta de nuevo” (ver figura 4.23), respectivamente.

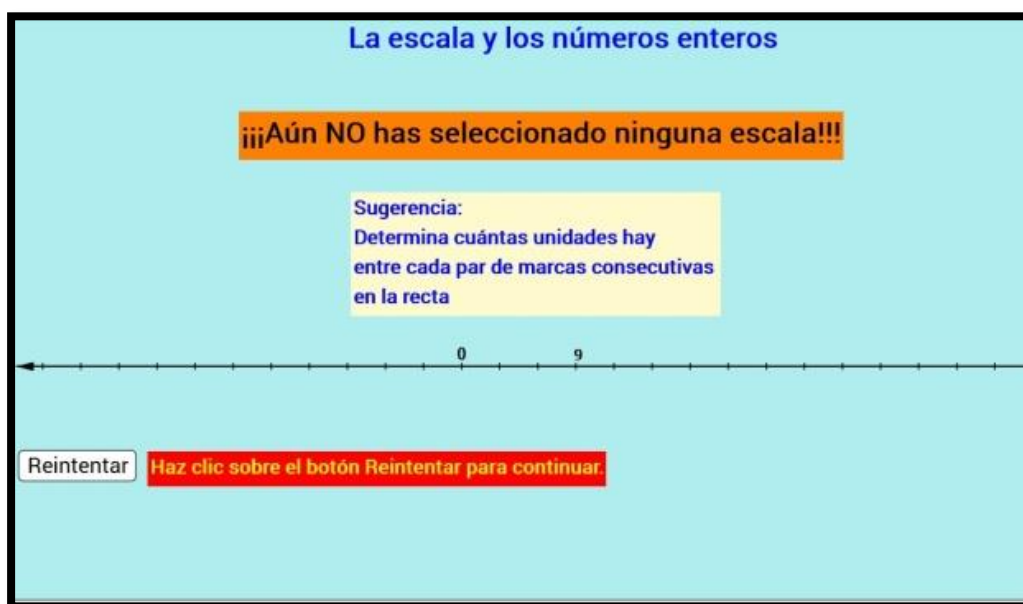


Figura 4.22: Ninguna opción ha sido seleccionada

En ambos casos se da la sugerencia: “Determina cuántas unidades hay entre cada par de marcas consecutivas en la recta” y se le muestra un botón “Reintentar” y

un mensaje “Haz clic sobre el botón Reintentar para continuar”, para que prosiga con la actividad. Durante todo el segundo nivel se trabajan dos o tres escalas diferentes. Si la opción seleccionada es correcta aparece una pantalla para iniciar con los ejercicios de representación gráfica de valores sobre la recta. Entonces, cuando haya seleccionado la opción correspondiente con la escala dada, aparecerá el primero de cinco valores que debe representar en la recta.

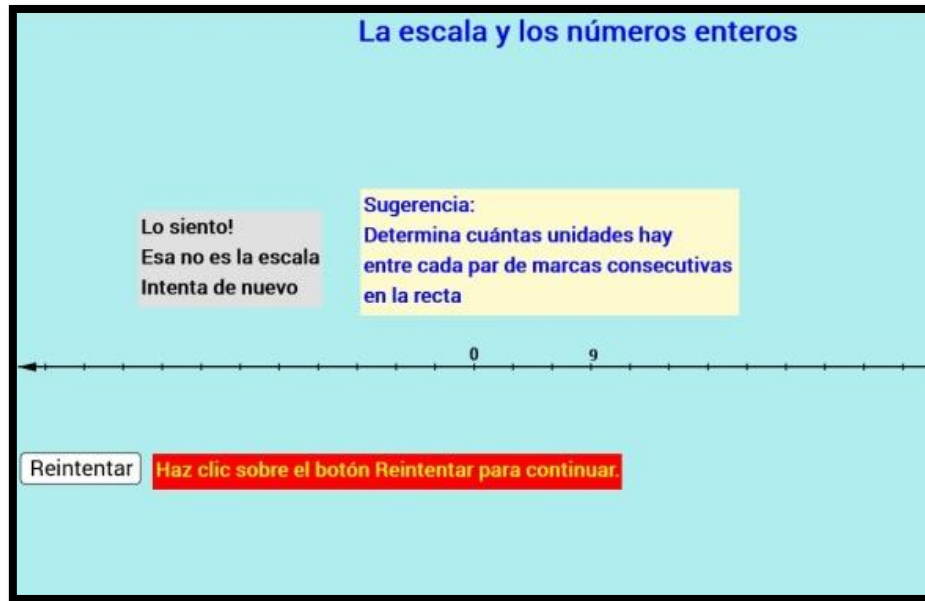


Figura 4.23: La escala seleccionada es incorrecta

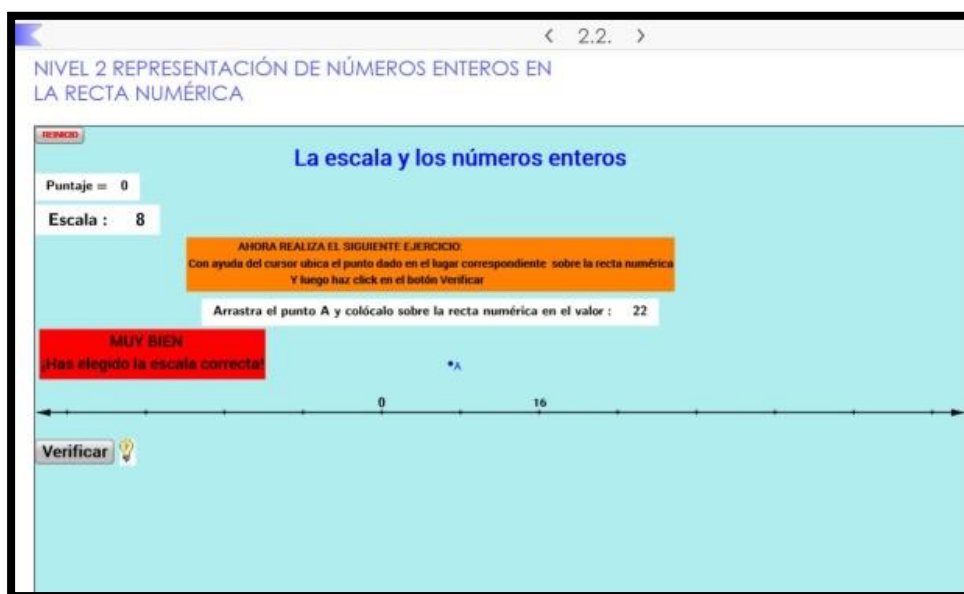


Figura 4.24: Pantalla de representación de valores dados: Nivel 2

En la figura 4.24 se muestra el inicio de la pantalla de representación de valores dados. Esta pantalla muestra el punto A, el cual debe ser arrastrado y ubicado en la recta de la manera más precisa posible, de acuerdo con un valor dado en la pantalla.

Básicamente, para completar el nivel 2, el estudiante debe ubicar en 15 ocasiones al punto A en un punto específico de la recta correspondiente con el valor dado en las indicaciones (aproximado con un rango de tolerancia o margen de error de 0.24 unidades). Los ejercicios se agrupan en tres ciclos de cinco valores cada uno, previa identificación de la escala que será mostrada para cada grupo de valores.

4.3.2.2.2 Características de los elementos de la pantalla del nivel 2

Luego de dar clic en el botón CONTINUAR, se ingresa al área de trabajo. Seguidamente se describen algunos aspectos relevantes de esta pantalla.

Graduación de la recta: la recta se divide de acuerdo con una escala mayor que la unidad, la cual se presenta de forma aleatoria entre las siguientes: 2, 3, 4, 5 y 8.

Valores de referencia: en la recta dada en cada ejercicio, se muestran dos valores de referencia de acuerdo con la escala de la recta (ver tabla 4.1, mostrada en el

apartado 4.3.1.5.). Estos valores se dan con la intención de que el estudiante los utilice para determinar la escala de la graduación de la recta.

Indicaciones generales: se le indica que debe arrastrar el punto A, con la ayuda del cursor, hacia su lugar correspondiente en la recta, de acuerdo con el valor dado.

Valores posibles: el punto P se ubica aleatoriamente en valores enteros, que van desde -32 hasta 42. El punto se sitúa sobre cualquier valor entero en ese intervalo. Por ejemplo, en la figura 4.24 el valor dado es el 22, y la escala de la recta es ocho. El estudiante puede determinar, mediante las marcas dibujadas, dónde se ubican exactamente los valores 8, 16, 24, etc., pero el número 22 debe representarse dos unidades a la izquierda de la marca que representa al valor 24. Para ubicarlo puede aproximarlos directamente con el cursor o ubicarlo en la marca más próxima a ese valor, y luego trasladar el punto con ayuda del teclado, según se ha explicado.

Sugerencias disponibles: se dan dos sugerencias en esta pantalla. Si hace clic en el icono de ayuda, situado al lado del botón Verificar, se muestra una sugerencia: *“Si colocas el punto sobre una marca de la recta puedes moverlo de uno en uno, utilizando las flechas derecha e izquierda del teclado.”* (Ver figura 4.20). La otra sugerencia aparece mediante un icono que se muestra al lado del mensaje que indica el error en la ubicación del punto. Esta sugerencia dice que *“Prueba colocar el punto sobre una marca de la recta y muévelo hacia la derecha e izquierda con ayuda de las flechas del teclado”* (Ver figura 4.25).

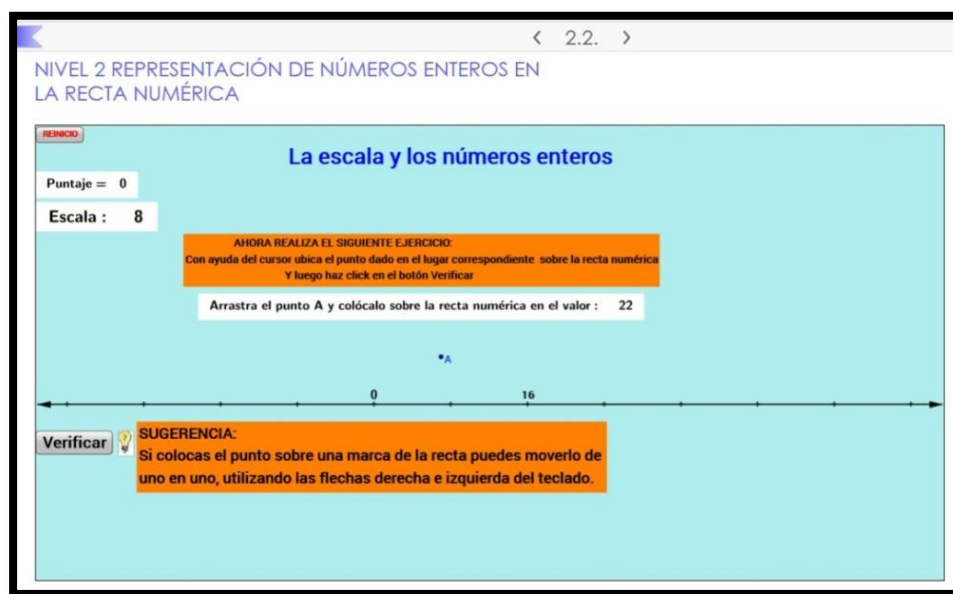


Figura 4.25: Icono de ayuda y texto de sugerencia: Nivel 2

Acción esperada: el estudiante debe arrastrar el punto A hasta la recta dada en el valor que se le indica. En la figura 4.25, el punto A debe ser ubicado aproximadamente en el lugar que corresponde al número 22 en la recta.

Respuesta de la interfaz: El botón Verificar determina si la ubicación del punto es correcta o incorrecta. En cuanto a la acción ejecutada por el estudiante, pueden ocurrir tres situaciones. Una es que se ubique el punto fuera de la recta, otra es que se ubique el punto incorrectamente en la recta o que se ubique correctamente en la recta (figuras 4.26, 4.27 y 4.28).

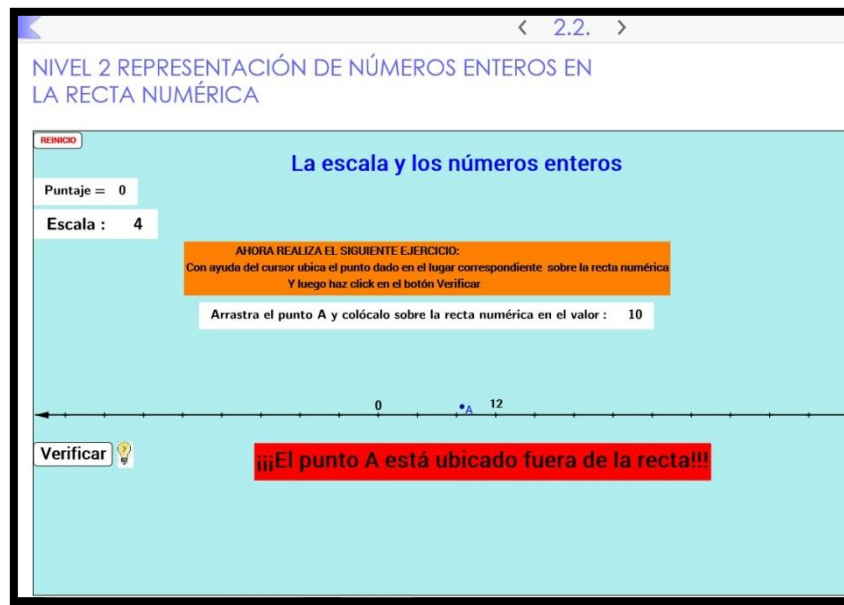


Figura 4.26: Punto ubicado fuera de la recta: Nivel 2

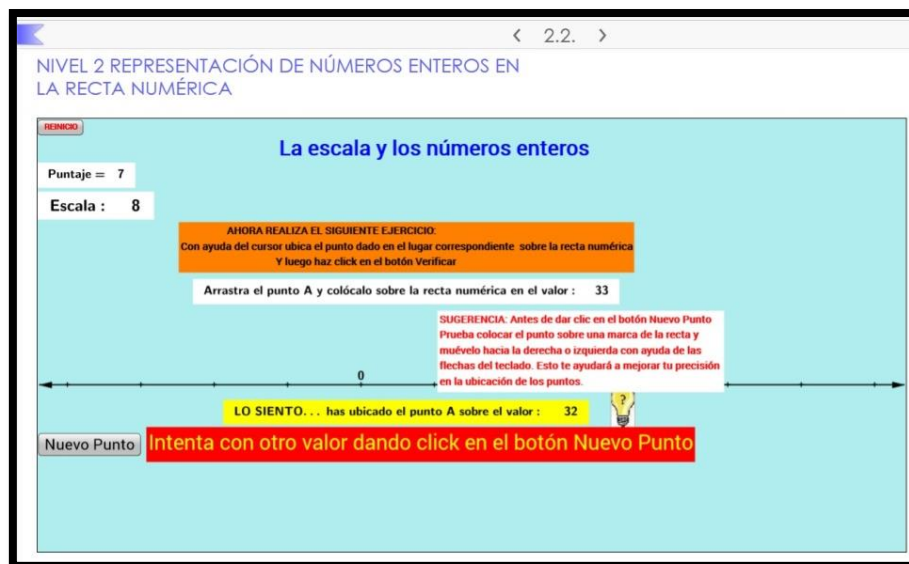


Figura 4.27: Valor representado incorrectamente: Nivel 2

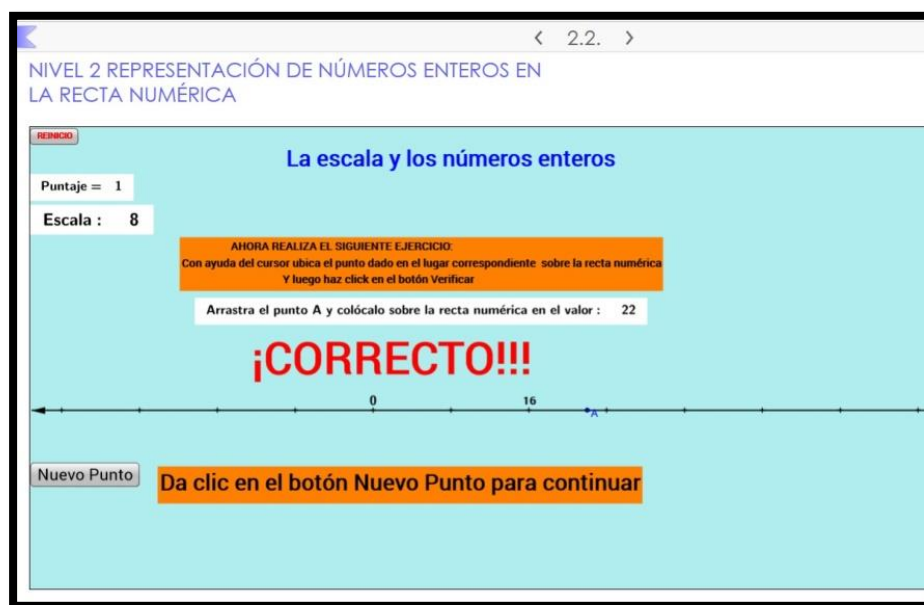


Figura 4.28: Valor representado correctamente con el punto A: Nivel 2

Si el punto se ha ubicado correctamente en la recta se indicará que está “CORRECTO” y aparecerá el botón “Nuevo Punto” y un mensaje que le indica que debe hacer clic en el botón para continuar (ver figura 4. 28).

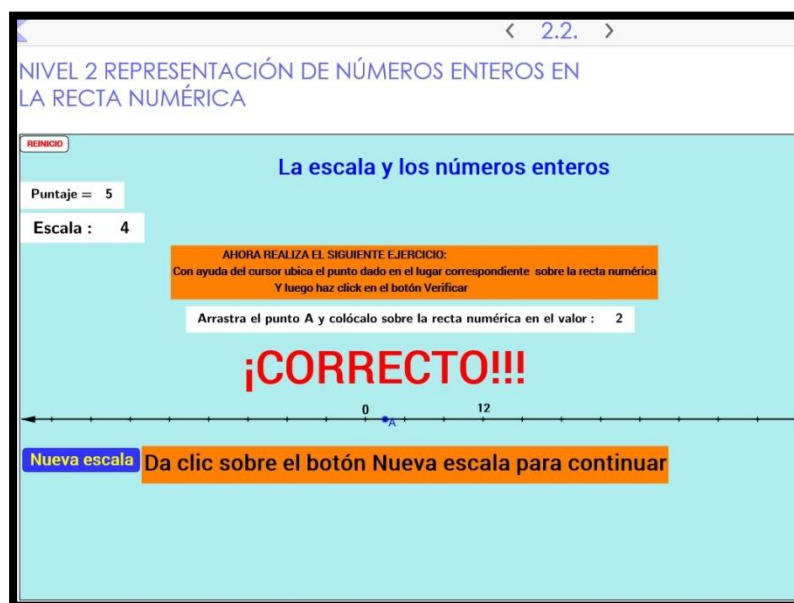


Figura 4.29: Fin del primer ciclo de representación: Nivel 2

Al finalizar el primer ciclo aparecerá el botón Nueva Escala (ver figura 4.29). Una vez que se hace clic en el botón Nueva Escala, si aún no se han finalizado los tres ciclos de ejercitación propuestos en el nivel, se mostrará nuevamente una pantalla para identificar la escala con que se trabajará el nuevo grupo de valores que serán representados en la recta.

Control de aciertos: Conforme avanza en el nivel, el puntaje permite visualizar el número de respuestas correctas. El puntaje visible lleva un conteo de los valores ubicados correctamente sobre la recta. Este puntaje será dividido por 15 para determinar el aprovechamiento obtenido en el segundo nivel.

Al llegar al final del nivel 2, se muestra la una pantalla similar a la figura 4.30. Se muestra el botón “Continuar” y el mensaje “Da clic sobre el botón Continuar para ver tu porcentaje de aciertos”.

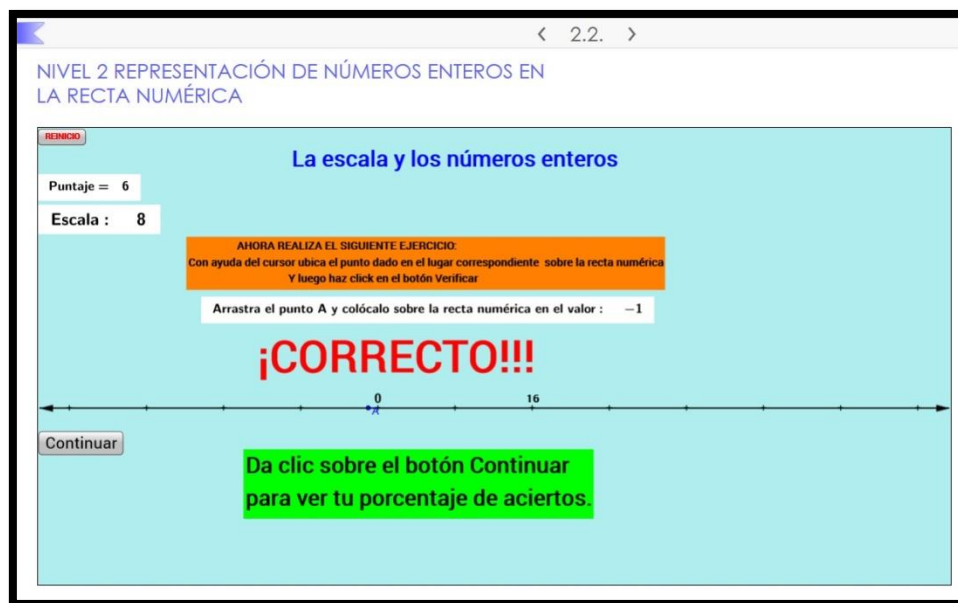


Figura 4.30: Fin de la práctica: Nivel 2

Cuando se da clic en el botón “Continuar” aparece la pantalla final (Ver figura 4.31).

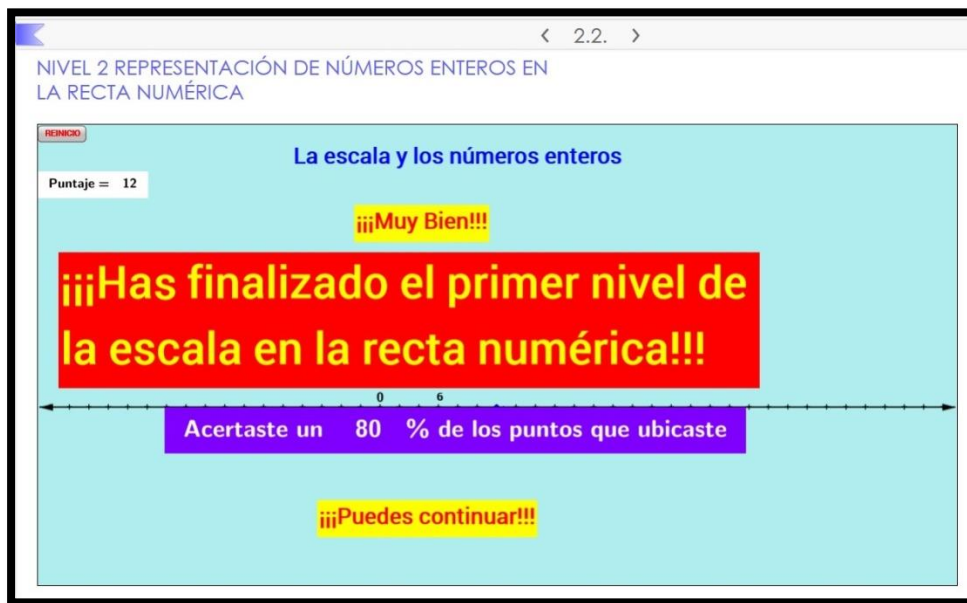


Figura 4.31: Pantalla final: Nivel 2

Cuando se han completado los tres ciclos de cinco ejercicios del nivel 2, el estudiante puede ver el porcentaje de aprovechamiento que ha obtenido. En esta pantalla se indica que se ha finalizado el nivel y se da el porcentaje de aciertos. Si su porcentaje es igual o mayor que 50%, se le mostrará un mensaje con el texto “Bien”, “Muy Bien” o “Excelente”, según el aprovechamiento logrado (ver figura 4.31). Si éste es menor que 50%, entonces se le recomienda ejecutar nuevamente el nivel: “Es recomendable que ejecutes nuevamente la aplicación para mejorar tu precisión en la ubicación de puntos sobre la recta numérica” (ver figura 4.32). Si obtiene desde 50% hasta un 65%, recibirá el mensaje “Bien”. Si su aprovechamiento es mayor o igual que 65% y menor que 85% recibirá el mensaje “Muy Bien”. Finalmente, si obtiene un 85% o más, recibirá el mensaje “Excelente”.

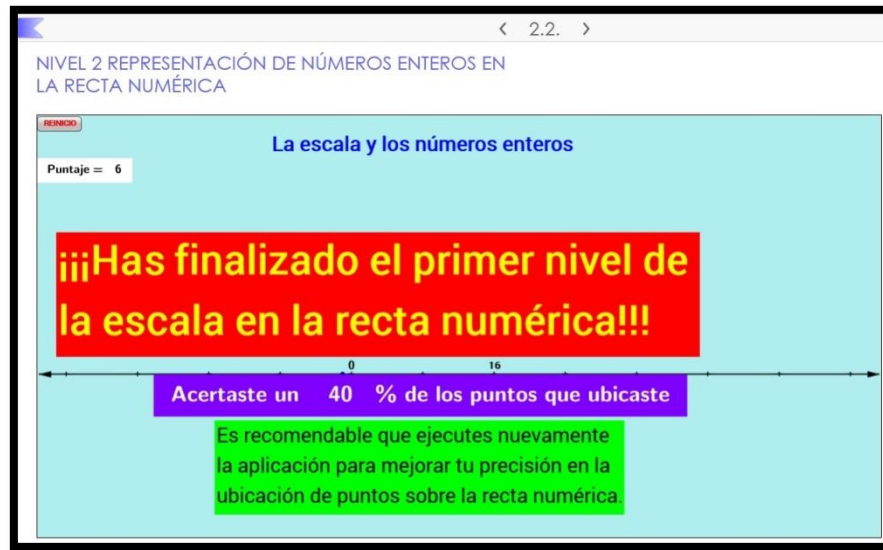


Figura 4.32: Pantalla final: Nivel 2

Ayuda del teclado: En el caso del nivel 2, las flechas del teclado permiten al punto moverse de uno en uno, hacia la derecha o izquierda, en la recta numérica. Es decir, para mejorar su precisión, si el estudiante se ubica en una marca dada en la recta, la cual ha identificado de acuerdo a la escala, el sistema le permite moverse con las flechas del teclado, “> o <”, en distancias de una unidad hacia la izquierda o derecha del valor en que ubicó al punto A.

Precisión de la representación del punto: en este nivel existe un rango de tolerancia de 0.24 unidades. Por ejemplo, si se requiere representar al valor “18” en una escala de cuatro unidades, puede ubicarse al punto A en un intervalo desde 17.76 hasta 18.24, y se reconocerá como “CORRECTA” la representación del punto. Esta distancia es visualmente aceptable y didácticamente conveniente, pues se trata de reconocer que el estudiante ha realizado una buena aproximación de la representación del valor dado. También se trata de evitar que factores como la habilidad para el manejo del teclado, condiciones del equipo, resolución de pantalla, etc. sean factores que condicionen el logro de la actividad propuesta. A su vez, este rango de “tolerancia” permite ubicar directamente el punto en el valor que se solicita representar en caso de que el estudiante posea la suficiente precisión para ello.

4.3.2.2.3 Consideraciones didácticas sobre el nivel 2

Hay mensajes que guían el avance durante el nivel. Se presentan mensajes de acuerdo con la respuesta del estudiante. Esto le permite interactuar con el medio sin la intervención directa del maestro.

Hay cinco posibilidades para las escalas que pueden graduar la recta mostrada. Las escalas son 2, 3, 4, 5 y 8. Se trabaja una misma escala con cinco ejercicios de representación sobre la recta. Cada ejercicio da un valor entero que debe ser representado por el estudiante. Los valores dados son números enteros entre -32 y 42, inclusive. Esta característica brinda variedad en la ejercitación propuesta al estudiante en este nivel.

La identificación previa de la escala en cada ciclo es importante para verificar que el estudiante al menos sea consciente de la escala que se usará para graduar la recta en los siguientes ejercicios. La idea es descartar el desconocimiento de la escala como un factor que influya en los posibles errores al representar los valores dados. Si equivoca la selección de la escala se le muestra un mensaje de error y se le permite reintentar hasta que identifique correctamente la escala.

Si se ubica el punto fuera de la recta, se le envía un mensaje “El punto A está ubicado fuera de la recta”, pero no se le considera como un error. La intención de este mensaje es hacer ver al estudiante que es importante realizar la representación del punto justo en de la recta. Luego, se le permite ubicar al punto nuevamente. Cuando ya se ha verificado su respuesta, si se ha equivocado en su representación del valor dado, el estudiante tiene la opción de practicar con el punto A, antes de ejecutar un nuevo ejercicio. La presencia del mensaje dinámico: “*Lo siento, has ubicado el punto A sobre el valor* (valor representado por el estudiante)”, hace posible que el estudiante visualice en forma dinámica cualquier valor en el que ubique al punto A, mientras este mensaje esté presente. Esto le permite retroalimentar sobre la representación de valores en la recta dada. Esta práctica le puede ayudar a relacionar mejor las distancias dadas en la recta y la longitud que representan, de modo que pueda comprender geométricamente la ubicación de valores numéricos en la misma.

Una estrategia que puede utilizar el estudiante para mejorar su precisión al representar el valor dado, es tomar como referencia una de las marcas correspondientes a la graduación de la recta, y ubicar allí el punto, para luego moverse con ayuda de las teclas de flecha “>” o “<”. Esto le permitirá avanzar de unidad en unidad hacia la derecha o izquierda hasta llegar al valor deseado. Lo ideal es que el estudiante sea capaz de ubicar la marca en la recta que se halle lo más cercana al valor solicitado, y que a partir de ese valor utilice la ayuda del teclado. Sin embargo, puede darse el caso de que el estudiante realice este movimiento o conteo desde el cero. Lo cual sería una estrategia poco económica. Se espera que el estudiante sea capaz de utilizar un punto cercano al valor solicitado, el cual sea capaz de identificar más fácilmente, y moverlo a partir de esa ubicación, con las flechas del teclado hasta su valor correspondiente. Esta corresponde con una estrategia usual en este tipo de ejercicios con papel y lápiz.

El botón de reinicio, cuyo propósito es dar la opción de explorar previamente la aplicación, y luego, reiniciar para ejecutar completamente el nivel 2. Es decir, sirve para que el estudiante practique y se familiarice con el nivel 2, antes de ejecutarlo formalmente.

4.3.2.3 Nivel 3: Identificación de números en notación decimal sobre la recta numérica

Este nivel muestra una estructura y un funcionamiento similar a los del primer nivel. El alumno interactúa con tres interfaces: inicio, práctica y evaluación. Cada ejercicio puede presentar una diferente escala.

4.3.2.3.1 Elementos de la pantalla de inicio del tercer nivel: Figura 4.33

- **El Título:** Los números en la recta numérica.
- **Una breve introducción:** *“Si deseas practicar identificando números enteros y decimales en la recta numérica con diferentes escalas da clic en el botón PRÁCTICA para comenzar”*
- **El botón PRÁCTICA:** permite comenzar la actividad.

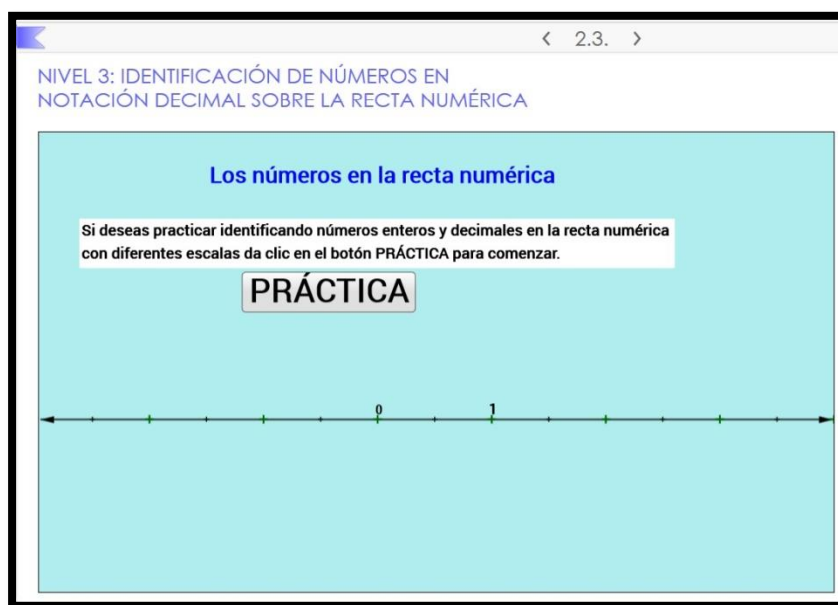


Figura 4.33: Pantalla de inicio: Nivel 3

4.3.2.3.2 Elementos del área de trabajo del tercer nivel

Luego de dar clic en el botón PRÁCTICA, la interfaz ingresa al área de trabajo. Seguidamente se describen los elementos de esta pantalla.

Graduación de la recta: En la pantalla de ejercitación o área de trabajo, a partir del tercer nivel y hasta el sexto nivel, las opciones de escala son menores o igual que la unidad. Las posibles escalas son 0.1, 0.2, 0.25, 0.5 y 1. Estas escalas corresponden con $1/10$, $1/5$, $1/4$, $1/2$ y 1, respectivamente. Interesa, particularmente, la escala 0.25 debido a que permite al estudiante poner en evidencia si tiene dificultades con respecto a la creencia de que $0.25 > 0.5$, entre otras (uno de los errores de los estudiantes es creer que es 0.25 es mayor que el 0.5). Hay confusión en la comprensión de valores con más de una cifra decimal.

Valores de referencia: la recta dada en cada ejercicio, la interfaz muestra como valores de referencia al valor 0 y al 1 en todos los ejercicios (ver tabla 4.1, mostrada en el apartado 4.3.1.5).

Instrucción general: “Escribe el valor que le corresponde al punto P y presiona la tecla ENTER para ingresar el valor”.

Valores posibles: el punto P se ubica aleatoriamente en puntos que pueden corresponder con valores enteros o decimales, dentro de un rango que va desde -2.5 hasta 3.5. Del mismo modo que en el primer nivel, la ubicación del punto P corresponderá con alguna de las marcas dibujadas en la recta. Los valores que deben ser identificados corresponden con marcas en la recta, y se han propuesto como una manera de que el estudiante se familiarice con cada escala. Por ejemplo, si la escala es $\frac{1}{2}$ o 0.5, la distancia entre cada par de marcas consecutivas es de 0.5 unidades como se muestra en la figura 4.28. Por lo tanto, el punto P puede ubicarse en valores como 0.5, 1, 1.5, -2.5, etc. El valor correspondiente con las marcas dadas en la graduación de la recta puede ser determinado en forma exacta, pues se conoce la escala utilizada en el ejercicio presentado en ese momento. Se muestran las marcas en la recta correspondiente con las escalas en notación decimal con el fin de que el estudiante pueda utilizar estas marcas dadas para identificar el punto P, el cual se ubica en alguna de dichas marcas, durante cada ejercicio de identificación.

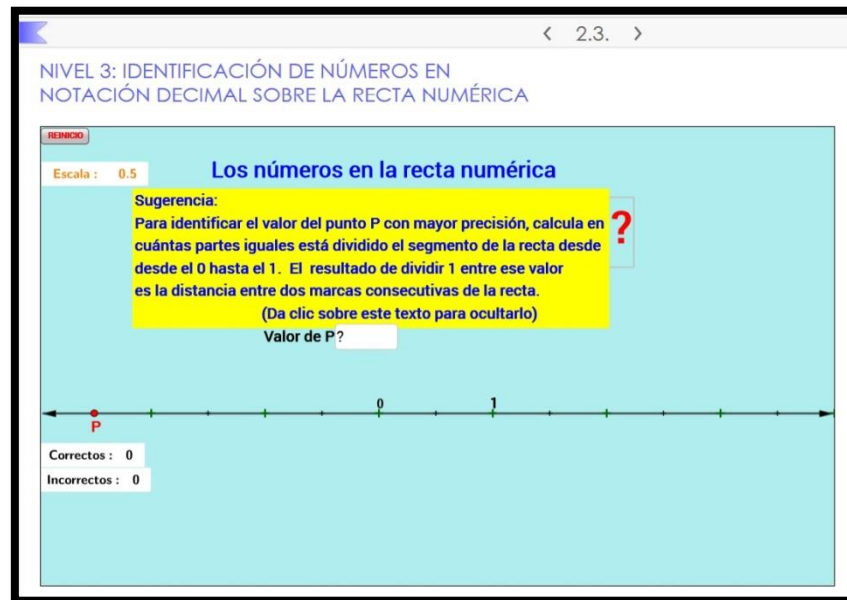


Figura 4.34: Sugerencia: Nivel 3

Sugerencia disponible: Si hace clic en el icono de ayuda (?), se muestra una sugerencia: “Para identificar el valor del punto P con mayor precisión, calcula en

cuántas partes iguales está dividido el segmento de la recta desde el 0 hasta el 1. El resultado de dividir 1 entre ese valor es la distancia entre dos marcas consecutivas de la recta” (Ver figura 4.34).

Respuesta esperada: dentro de la casilla de respuesta, se espera un número en notación decimal. Sin embargo, la respuesta puede darse en cualquier forma equivalente con el valor de la abscisa del punto P cuando se halla ubicado en la recta. Por ejemplo, en la figura 4.34, el valor de la escala es 0.5, y el punto P se halla ubicado en la marca correspondiente con -2.5; pero pueden escribirse respuestas como $-5/2$, $-10/4$, -2.50, etc.

Respuesta de la interfaz: cuando se verifique la respuesta dada por el estudiante, se mostrará la respuesta esperada por el sistema en notación entera o decimal. Cada vez que verifique el resultado (respuesta escrita por el estudiante) genera automáticamente un nuevo ejercicio.

Una estrategia que puede seguir el estudiante, aunque poco común, es multiplicar la escala dada por el número de intervalos que hay desde cero hasta el punto P.

4.3.2.4 Nivel 4: Representación de números en notación decimal sobre la recta numérica

En este nivel se interactúa en forma similar al segundo nivel. De manera que se procede a explicar algunos aspectos que caracterizan específicamente al cuarto nivel.

Pantalla de inicio: La actividad tiene como título: “La escala y los números en notación decimal”. El objetivo principal de este nivel es que los estudiantes representen gráficamente los valores dados en notación decimal, mediante el arrastre de un punto (A) hasta su ubicación aproximada en una recta graduada.

La pantalla de inicio es similar a la correspondiente al segundo nivel. En esta pantalla se pretende brindar algunas indicaciones básicas que den una idea general sobre la interacción que se llevará a cabo con el cuarto nivel.

4.3.2.4.1 Elementos de la pantalla de identificación de la escala en el nivel 4

Básicamente, la interacción con la pantalla de identificación de la escala es análoga al segundo nivel.

Ejercicio de identificación de la escala: Al dar clic en “CONTINUAR” aparece un ejercicio de identificación en el que se debe seleccionar la escala que corresponda con la graduación de la recta dada, antes de dar clic al botón Verificar. Se presentan siete opciones etiquetadas como “1”, “ $0.5 = 1/2$ ”, “ $0.4 = 2/5$ ”, “ $0.3 = 3/10$ ”, “ $0.25 = 1/4$ ”, “ $0.2 = 1/5$ ” y “ $0.1 = 1/10$ ”, para realizar la identificación de la escala. Si la escala es seleccionada correctamente, el sistema permitirá pasar al primer ejercicio para ubicar valores dados en la recta.

The screenshot shows a software interface for a math exercise. At the top, it says "NIVEL 4 REPRESENTACIÓN DE NÚMEROS EN NOTACIÓN DECIMAL SOBRE LA RECTA NUMÉRICA". Below this, the title "La escala y los números en notación decimal" is displayed. On the left, under the heading "ESCALA:", there is a list of options with checkboxes: "1 unidad", " $0.5 = 1/2$ ", " $0.4 = 2/5$ ", " $0.3 = 3/10$ ", " $0.25 = 1/4$ ", "☒ $0.2 = 1/5$ ", and " $0.1 = 1/10$ ". In the center, a box contains the text: "¡Observa Bien! ¿Qué escala tiene la recta dada? Marca la opción correspondiente y da clic sobre el botón verificar." Below the options, there is a horizontal number line with tick marks from 0 to 1, with major ticks at 0 and 1. At the bottom left is a "Verificar" button. To its right, a suggestion box says: "Sugerencia: Calcula en cuántas partes iguales está dividida la recta desde el 0 hasta el 1. Ese número te permitirá calcular la fracción que representa la escala."

Figura 4.35: Identificación de la escala: Nivel 4

En las opciones para identificar la escala se muestra en notación decimal y notación fraccionaria con el fin de que los estudiantes se familiaricen desde este nivel con ambas formas de representación (ver figura 4.35).

Sugerencias dadas en la identificación de la escala: se dispone de dos sugerencias. La primera se muestra al hacer clic en el icono que se ubica a la derecha del botón Verificar: “Calcula en cuántas partes iguales está dividida la recta

desde el cero hasta el 1. Ese número te permitirá calcular la fracción que representa la escala” (ver figura 4.35). La segunda aparece por defecto cuando se da clic en el botón Verificar, sin haber seleccionado alguna escala o si se ha identificado incorrectamente la escala.

4.3.2.4.2 Elementos de la pantalla para representar valores en la recta en el nivel 4

Una vez que se ha marcado la opción que corresponde con la escala y se haga clic en el botón Verificar, aparecerá el primer ejercicio de representación de valores decimales en la recta. La interacción es similar al nivel 2. Se diferencia en que, los valores que deben ser representados en la recta poseen hasta dos cifras decimales con una precisión de 0.05 o $1/20$.

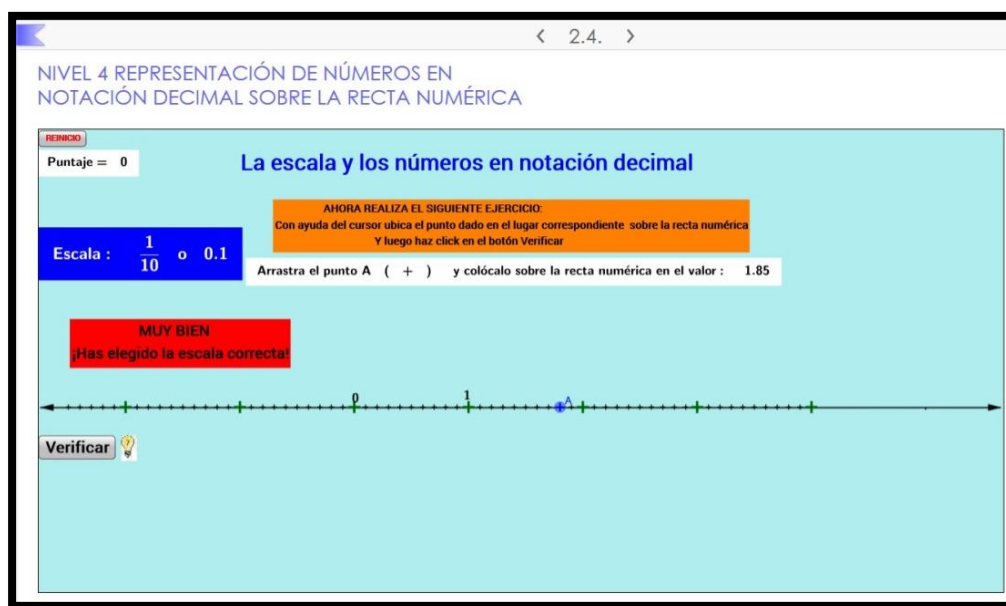


Figura 4.36: Área de trabajo: Nivel 4

Los valores que se deben representar, pueden corresponder exactamente con el punto ubicado en alguna marca de la escala o en algún punto entre dos marcas consecutivas. Por ejemplo, en la figura 4.36 se solicita ubicar el punto A en el valor correspondiente a 1.85, en una escala de 0.1. Este número debe ubicarse aproximadamente en medio de las marcas que corresponden a 1.8 y 1.9. Para

lograrlo, puede realizarlo directamente, es decir aproximando visualmente el centro del intervalo entre 1.8 y 1.9. También puede realizarlo con ayuda del teclado.

Ayuda del teclado: Para mejorar su precisión, si el estudiante se ubica en una marca dada en la recta, la cual ha identificado de acuerdo a la escala, se le permite moverse con las flechas del teclado a intervalos de 0.05 unidades de distancia hacia la izquierda o derecha del valor en que ubicó al punto A. Es decir, la interfaz permite que el punto ubicado en la recta pueda moverse, hacia la derecha o izquierda, una distancia de 0.05 o $1/20$ de unidad, con las flechas del teclado “> o <”, en los niveles 4 y 6. En el caso del nivel 2, las flechas del teclado permiten al punto moverse de uno en uno, hacia la derecha o izquierda, en la recta numérica. En el caso de la figura 4.36, si el estudiante ubica el punto en 1.8, puede utilizar la tecla “>” para moverse 0.05 unidades hacia la derecha y reubicar el punto en 1.85.

Precisión de la representación del punto: en este nivel existe un rango de tolerancia de 0.02 unidades. Por ejemplo, si, en el caso anterior se ubica al punto A en los valores 1.83, 1.84, 1.86 o 1.87, se considerará correcta la ubicación del punto. El sistema permite ubicar directamente el punto en el valor que se solicita representar, en caso de que el estudiante posea la suficiente precisión para ello.

Sugerencias en la pantalla de representación de valores del nivel 4: se dispone de dos sugerencias en la pantalla de representación de valores en la recta. La primera se visualiza al hacer clic en el icono situado a la derecha del botón Verificar, en esta pantalla. “Si colocas el punto exactamente sobre una marca de la recta, puedes moverlo en intervalos de 0.05 o $1/20$ unidades de distancia, utilizando las flechas derecha e izquierda del teclado. La segunda sugerencia puede verse al hacer clic sobre el icono que se ubica a la derecha del mensaje que aparece cuando se ha representado incorrectamente el punto: “Sugerencia: antes de dar clic en el botón nuevo punto: prueba colocar el punto sobre diferentes marcas de la recta y muévelo hacia la derecha o izquierda con ayuda de las flechas del teclado. Observa cómo se modifica el valor del punto en la recta numérica. Esto te ayudará a mejorar tu precisión en la ubicación de los puntos” (Ver figura 4.37).

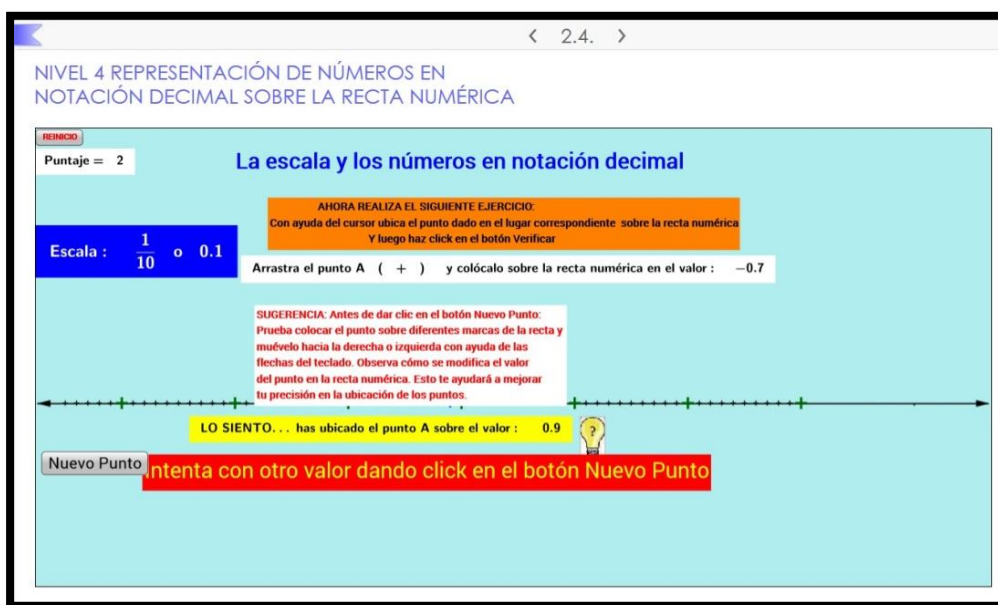


Figura 4.37: Sugerencia: Nivel 4

4.3.2.4.3 Consideraciones didácticas sobre el nivel 4

El uso de la notación decimal posee mayor dificultad para los estudiantes que el uso de la notación entera. Algunas escalas pueden resultar más sencillas para realizar la representación de los valores decimales dados. Este nivel propone valores de hasta dos cifras decimales con una precisión de 0.05 unidades. La ubicación del punto puede realizar tanto de manera directa, sin recurrir a la ayuda del teclado, como utilizando las flechas derecha e izquierda del teclado para su traslado de 0.05 unidades de distancia en la recta.

Algunas dificultades debidas a la escala utilizada

Escala 0.1: esta escala es la que más facilita la representación de valores con dos cifras decimales en los ejercicios que se proponen en el recurso. Por ejemplo, si se quiere representar el valor 2.7, basta con ubicar el punto en la séptima marca hacia la derecha del número dos. Si el valor es 2.75, simplemente se ubica el punto entre las marcas correspondientes a 2.7 y 2.8. Otra forma, implica el uso de las flechas derecha o izquierda del teclado, ubicando primero el punto en 2.7 y trasladarlo hacia la derecha una distancia de 0.05 unidades.

Escala 0.2: se puede facilitar la representación en esta escala si se tiene en cuenta que la mitad de 0.2 es 0.1. Lo cual ayudaría a visualizar con mayor exactitud el sitio donde se debe ubicar cada valor dado. Por ejemplo, para ubicar 2.7, se tendría disponibles las marcas correspondientes a 2.6 y 2.8, de manera que en el centro del segmento entre ambos valores debe ubicarse el punto que lo representa. Mientras que para representar 2.75, puede resultar más sencillo situarse en 2.8 y trasladar, con la flecha izquierda del teclado, al punto 0.05 unidades hacia la izquierda de ese valor.

Escala 0.25: una manera sencilla de representar el valor 2.7, en esta escala, es ubicando primero la marca correspondientes con 2.75, ubicar el punto en esa marca, y después utilizar la flecha izquierda del teclado para moverse una distancia de 0.05 hacia la izquierda de esa marca en la recta.

Escala 0.5: la ubicación del valor 2.7, en esta escala, puede resultar más imprecisa si se realiza sin la ayuda del teclado. En este caso, se tienen las marcas correspondientes con 2.5 y 3.0, por lo que se puede ubicar el punto en 2.5 y luego presionar la flecha derecha cuatro veces para trasladarlo 0.2 unidades hasta el valor 2.7.

Escala 1: esta escala es la que presenta mayor dificultad para representar la mayoría de valores dados con dos cifras decimales. Sin embargo, se puede recurrir al teclado para obtener una mayor precisión en la ubicación del punto, del mismo modo que se hizo en el ejemplo de la escala anterior.

En general, existen muchas posibles estrategias a la que podrían recurrir los estudiantes para ejecutar cada una de las representaciones solicitadas en los ejercicios.

4.3.2.5 Nivel 5: Identificación de números en notación fraccionaria sobre la recta numérica

Este nivel muestra una estructura y un funcionamiento similar a los del primer y tercer nivel. El alumno interactúa con tres interfaces: inicio, práctica y evaluación. Cada ejercicio puede presentar una diferente escala mostrada en notación fraccionaria. Se indica que se trabajará con números enteros decimales o fraccionarios.

4.3.2.5.1 Elementos de la pantalla de inicio del quinto nivel: Figura 4.38

- **El Título:** Los números en la recta numérica.
- **Una breve introducción:** “Si deseas practicar identificando números enteros decimales y fraccionarios en la recta numérica con diferentes escalas da clic en el botón PRÁCTICA para comenzar”
- **El botón PRÁCTICA:** permite comenzar la actividad.

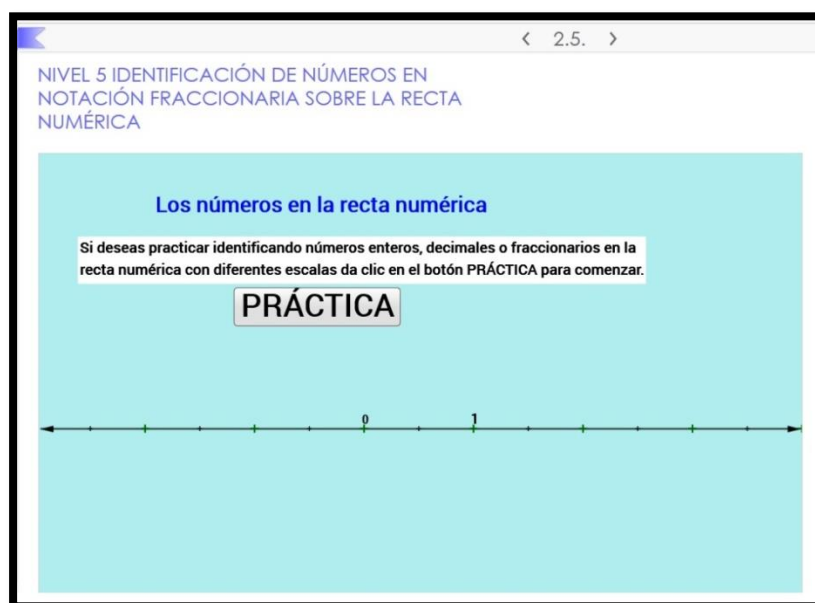


Figura 4.38: Pantalla de inicio: Nivel 5

4.3.2.5.2 Elementos del área de trabajo del quinto nivel:

Luego de dar clic en el botón PRÁCTICA, la interfaz ingresa al área de trabajo. Seguidamente se describe el área de trabajo de práctica.

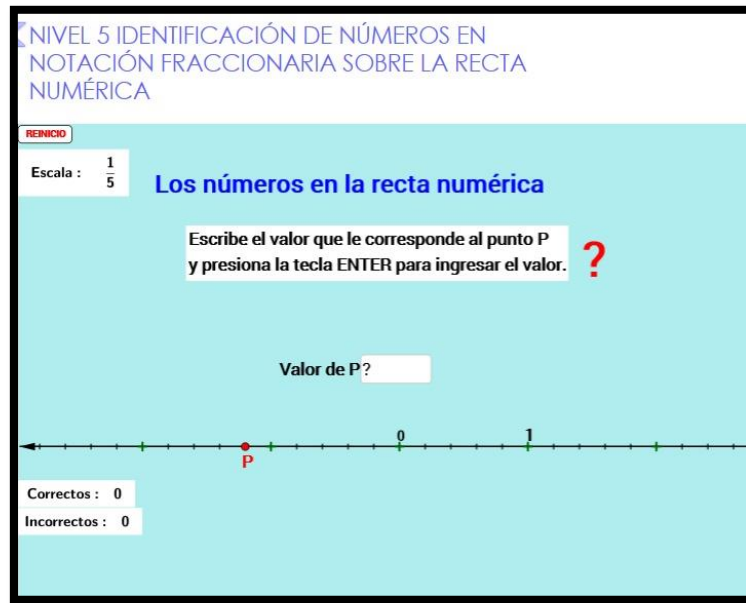


Figura 4.39: Área de trabajo: Nivel 5

Graduación de la recta: En la pantalla de ejercitación o área de trabajo las opciones de escala son menores o igual que la unidad. Las posibles escalas que se muestran son $1/10$, $1/5$, $1/4$, $1/2$ y 1 . La forma en que se presenta la recta y las marcas de la escala, corresponden con las presentadas en los niveles 3 y 4. En la figura 4.39 el valor de la escala mostrado a la izquierda de la pantalla es $1/5$, y además se puede observar que el segmento que va desde el 0 hasta el 1, se divide en cinco segmentos congruentes.

Valores de referencia: en la recta dada en cada ejercicio, la interfaz muestra como valores de referencia al valor 0 y al 1 en todos los ejercicios.

Instrucción general: “Escribe el valor que le corresponde al punto P y presiona la tecla ENTER para ingresar el valor”.

Valores posibles: el punto P se ubica aleatoriamente en puntos que pueden corresponder con valores enteros o fraccionarios, dentro de un rango que va desde -2.5 hasta 3.5. Del mismo modo que en el tercer nivel, la ubicación del punto P corresponderá con alguna de las marcas dibujadas en la recta. Por ejemplo, en la figura 4.39 la escala es $1/5$ o 0.2 unidades. Por lo tanto, el punto P puede ubicarse en valores como $2/5=0.4$, $3/5=0.6$, $5/5=1$, $-1/5= -0.2$, $-12/5= -2.4$, etc. En este

ejemplo, el punto P se halla hacia la izquierda del cero, en $-6/5$. También puede recurrirse a una estrategia usual entre los estudiantes, que consiste en calcular y escribir el valor en forma decimal, el cual corresponde con el valor -1.2 .

Sugerencia disponible: Si hace clic en el icono de ayuda (?), se muestra una sugerencia: “Sugerencia: para identificar el valor del punto P con mayor precisión, calcula en cuántas partes está dividida la recta desde cero hasta el uno. Ese número es el denominador de la fracción que necesitas representar. El numerador lo puedes obtener observando cuántas partes hay entre el cero y el punto P (Ver figura 4.40).

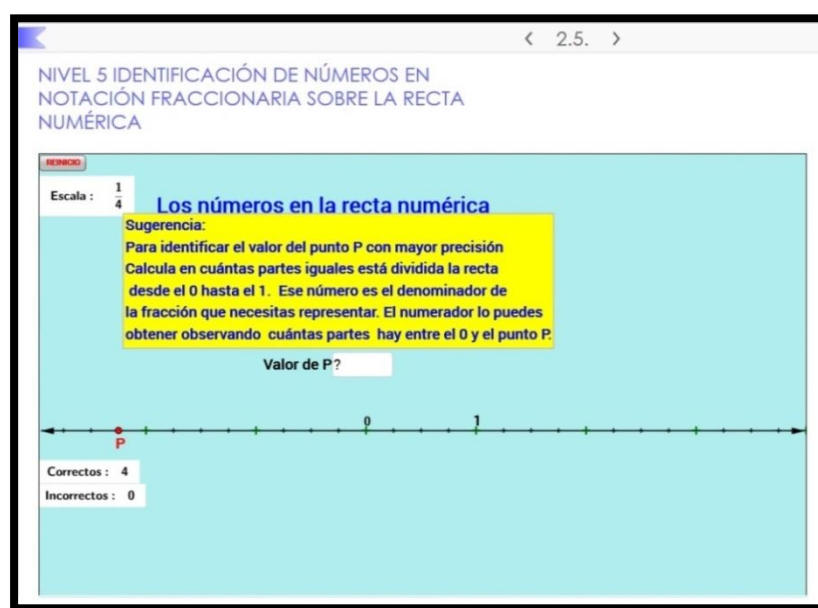


Figura 4.40: Sugerencia: Nivel 5

Respuesta esperada: dentro de la casilla de respuesta, se espera un número en notación fraccionaria. Sin embargo, la respuesta puede darse en cualquier forma equivalente con el valor de la abscisa del punto P. Por ejemplo, en la figura 4.40, el valor de la escala es $\frac{1}{4}$ o 0.25, y el punto P se halla ubicado en la marca correspondiente con $-9/4$; pero pueden escribirse respuestas de manera equivalente como -2.250 , $18/8$, -2.25 , etc. En la casilla de respuesta el valor fraccionario será convertido a notación decimal. Esto permitirá al estudiante corregir o reescribir su respuesta en caso de que ese valor sea muy diferente al que pretendía escribir en notación fraccionaria. Una estrategia que puede seguir el estudiante, aunque poco

común, es multiplicar la escala dada por el número de intervalos que hay desde cero hasta el punto P. Se puede dar el caso de que el estudiante identifique todos los valores en notación decimal, con la cual se encuentra más familiarizado y deje de lado el objetivo que es ejercitar de interiorizar la escritura en notación fraccionaria evitando inclusive observar los valores escritos en notación fraccionaria dados por el sistema.

Algunos valores se pueden repetir o ser muy triviales como el cero, uno, o cualquier valor que esté escrito explícitamente sobre la recta.

Respuesta de la interfaz: cuando se verifique la respuesta dada por el estudiante, se mostrará la respuesta esperada por el sistema en notación entera o fraccionaria; a la vez que se presenta un nuevo ejercicio.

4.3.2.6 Nivel 6: Representación de números en notación fraccionaria sobre la recta numérica

En este nivel se interactúa en forma similar al segundo y cuarto nivel. De manera que se procede a explicar algunos aspectos que caracterizan específicamente al sexto nivel.

Pantalla de inicio: La actividad tiene como título: “La escala y los números en notación fraccionaria”. La intención de este nivel es que los estudiantes representen gráficamente los valores dados en notación fraccionaria, mediante el arrastre de un punto (A) hasta su ubicación aproximada en una recta graduada.

La pantalla de inicio es similar a la correspondiente al cuarto nivel. En esta pantalla se pretende brindar algunas indicaciones básicas que den una idea general sobre la interacción que se llevará a cabo con el sexto nivel (ver figura 4.41).

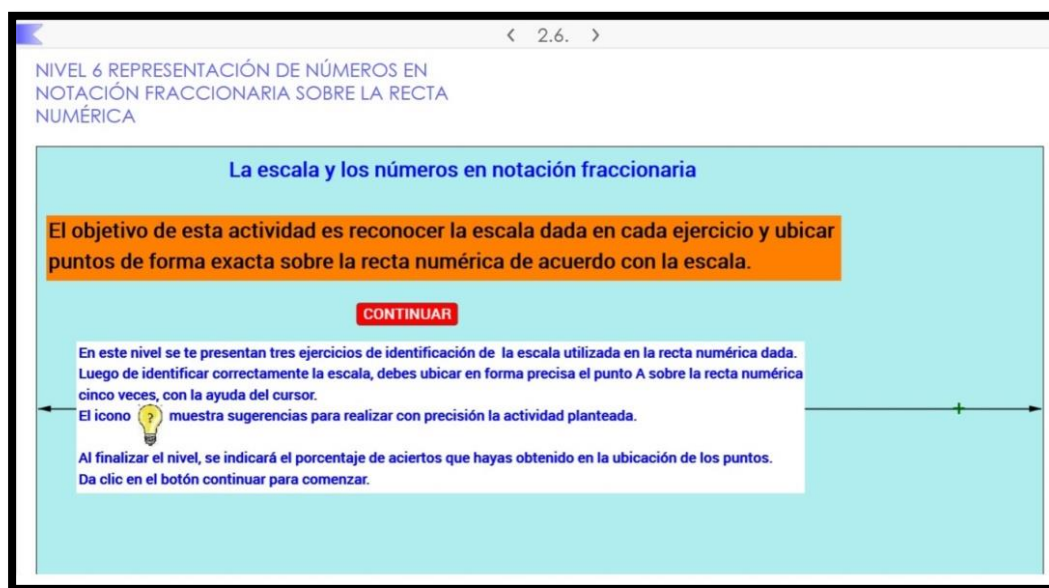


Figura 4.41: Pantalla de inicio: Nivel 6

4.3.2.6.1 Elementos de la pantalla de identificación de la escala en el nivel 6

De nuevo se pide al alumno identificar la escala antes de continuar avanzando. Al dar clic en “CONTINUAR” aparece un ejercicio de identificación en el que se debe seleccionar la escala que corresponda con la graduación de la recta dada, antes de dar clic al botón Verificar. Básicamente, la interacción con la pantalla de identificación de la escala es análoga al segundo y cuarto nivel. En esta pantalla se interactúa del mismo modo que en el nivel 4.

4.3.2.6.2 Elementos de la pantalla para representar valores en la recta en el nivel 6

Una vez que se ha marcado la opción que corresponde con la escala y se haga clic en el botón Verificar, aparecerá el primer ejercicio de representación de valores decimales en la recta. La interacción es similar al nivel 4. Se diferencia en que, los valores que deben ser representados en la recta se dan al alumno en notación fraccionaria. Además, se incluye una ayuda que permite convertir la fracción dada a notación decimal. Las fracciones dadas tienen denominadores 1, 2, 4, 5 y 10, por lo que en su expresión decimal poseen hasta dos cifras decimales con una precisión de 0.05 o $\frac{1}{20}$. De esta manera los valores que pueden ser representados en la recta

pueden ser expresados como un valor con notación fraccionaria cuyo denominador es 20.

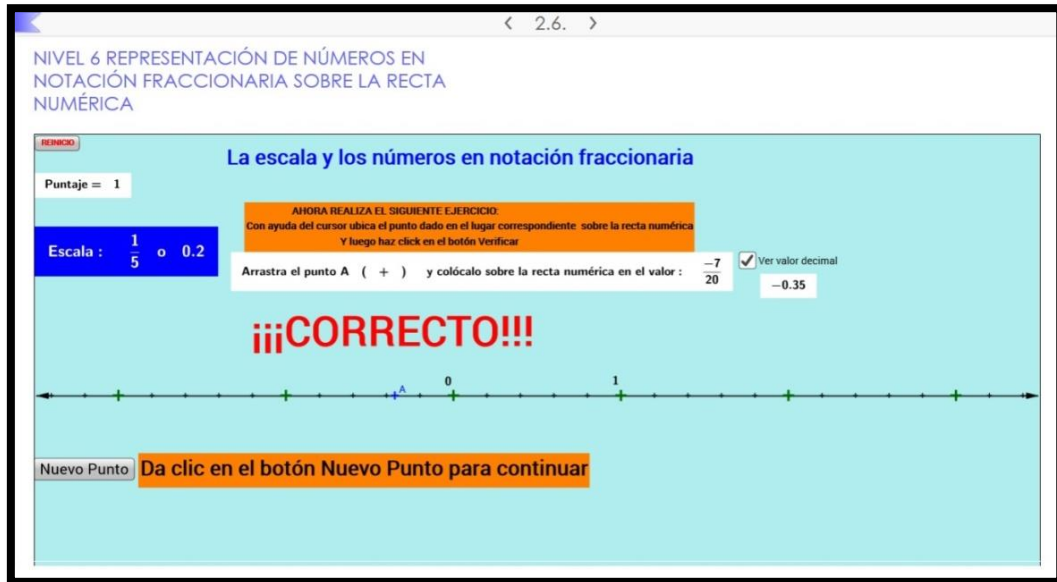


Figura 4.42: Área de trabajo: Nivel 6

Los valores para representar pueden corresponder exactamente con puntos ubicados en alguna marca de la escala o en algún punto ubicado entre dos marcas consecutivas. Por ejemplo, en la figura 4.42 se da el valor $-7/20$, para ubicar el punto A, en una recta con escala $1/5$ o 0.2 unidades.

Ayuda del teclado: Para mejorar su precisión, si el estudiante se ubica en una marca dada en la recta, la cual ha identificado de acuerdo a la escala, el sistema le permite moverse con las flechas del teclado en intervalos de $1/20$ de la unidad hacia la izquierda o derecha del valor en que ubicó al punto A. Es decir, la interfaz permite que el punto ubicado en la recta pueda moverse, hacia la derecha o izquierda, una distancia de 0.05 o $1/20$ de unidad, con las flechas del teclado “> o <”, en los niveles 4 y 6.

Precisión de la representación del punto: en este nivel existe un rango de tolerancia de $1/50=0.02$ unidades. Por ejemplo, si, en el caso del valor $-7/20$ o -0.35 , se ubica al punto A en un rango desde -0.37 hasta -0.33 , se considerará

visualmente correcta la ubicación del punto. Esto ayuda a que se ubique directamente el punto en el valor solicitado, en caso de que el estudiante posea la suficiente precisión para ello.

4.3.2.6.3 Consideraciones didácticas sobre el nivel 6

Algunas posibles estrategias en el sexto nivel

Siguiendo el ejemplo de la figura 4.42, se suponen algunas estrategias que pueden ser utilizadas por los estudiantes al realizar las actividades propuestas en el nivel 6.

Estrategia 1: Aproximar visualmente la ubicación del punto. Puede tratar de arrastrar el punto A directamente al sitio que le corresponde al valor $-7/20$ en la recta. Esto es posible si es capaz de determinar visualmente qué porción de la recta equivale a $1/20$. En este caso, como la recta tiene escala $1/5$, se puede calcular que esa escala corresponde con $4/20$; lo cual permite saber qué parte del intervalo equivale a $1/20$ de distancia. Finalmente, tendría que determinar visualmente la ubicación del valor dado.

Estrategia 2: Utilizando la ayuda del teclado. Es posible convertir la fracción $1/5$ de la escala a la fracción $4/20$. Luego, cada par de marcas consecutivas se hallan a $4/20=1/5$ de distancia. Con esta información puede determinarse en cuál marca se ubica $-8/20= -2/5$. Finalmente, se puede ubicar el punto en la marca que corresponde con $-8/20$ y, luego, con el teclado avanzar un espacio ($1/20$) hacia la derecha de la recta, con el fin de reubicar el punto en el valor $-7/20$

Estrategia 3: Utilizando la ayuda del teclado y el valor decimal. Se puede utilizar la ayuda “ver valor decimal” para saber que $-7/20$ corresponde con -0.35 en una escala de 0.2 unidades. Las marcas de la recta más cercanas a este valor son -0.20 y -0.40 , de manera que se halla más cerca del valor -0.4 por lo que se puede ubicar en -0.40 y retroceder con ayuda del teclado 0.05 unidades.

Estrategia 4: Con ayuda del teclado. Una estrategia poco económica pero que es factible de utilizar consiste en utilizar exclusivamente la ayuda del teclado, que se mueve en intervalos de $1/20$; de manera que ubicado el punto en el valor Cero, se dé clic siete veces hacia la izquierda del cero, para alcanzar el valor $-7/20$.

Las anteriores son sólo algunas de las posibles estrategias a las que podría recurrirse para representar los valores dados en la recta.

Casillas “Ver valor decimal” y “valor decimal”: dos elementos adicionales que presenta este nivel son las casillas "ver valor decimal" y “valor decimal”, las cuales se pueden activar al lado derecho de la pantalla, al lado del valor fraccionario correspondiente (ver en la figura 4.43).

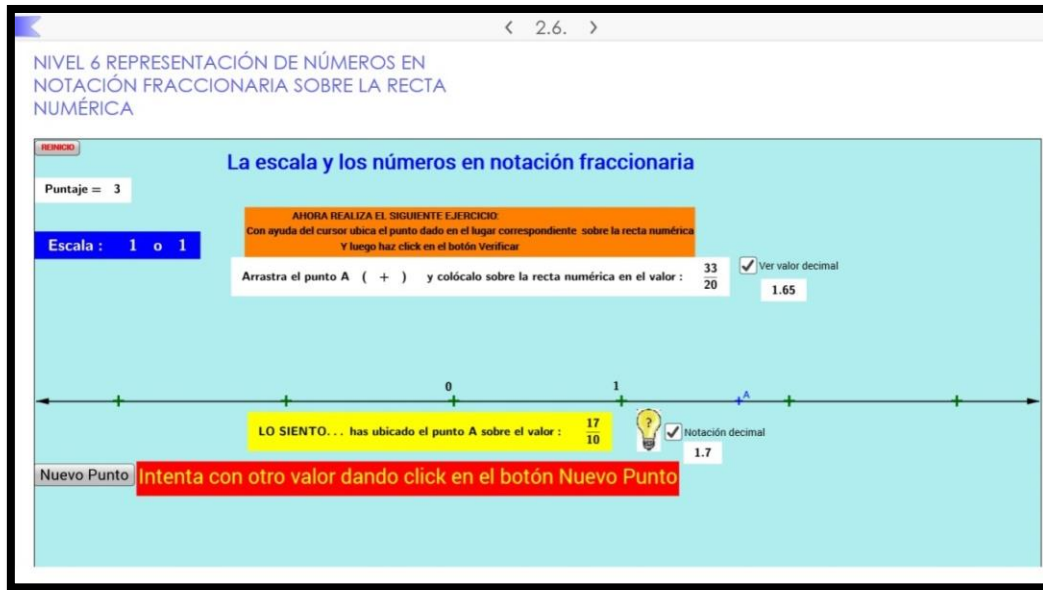


Figura 4.43: Visualización notación fraccionaria y decimal: Nivel 6

El valor que se debe representar es dado en notación fraccionaria, pero al marcar la casilla "ver valor decimal", se puede utilizar como ayuda para determinar su valor decimal y ubicar el punto A con mayor seguridad en la recta. Luego, si se falla en la ubicación del valor dado, aparece un mensaje en un recuadro amarillo que indica el valor representado por el estudiante en notación fraccionaria. De nuevo, se muestra a la derecha de este mensaje, una casilla para convertir este valor a su notación decimal. Esto permite obtener una retroalimentación sobre la representación del valor solicitado, y más. De manera que se tiene la opción de reubicar el punto sobre la recta, al mismo tiempo que se observa en el recuadro amarillo cómo varía el valor del punto. Para esto se puede utilizar el mouse o el teclado, según se ha mencionado anteriormente.

Se supone que se dan ambas notaciones para ayudarle al estudiante a relacionar los valores en notación decimal y fraccionaria. Sin embargo, existe la posibilidad de que algunos estudiantes eviten la notación fraccionaria y se limiten a observar el valor en notación decimal, con el fin de evitar realizar una interpretación de la fracción como tal. No obstante, la presencia de esta ayuda se ha implementado debido a que el uso de la notación decimal ha constituido un apoyo para una mejor comprensión de la notación fraccionaria y su representación en una recta numérica.

Consideraciones generales sobre la representación de valores en notación fraccionaria en el sexto nivel

Algunos valores fraccionarios pueden resultar complejos para los estudiantes, en el momento de representarlo en una recta graduada, sobre todo cuando el denominador del valor para representar es diferente al valor de la fracción que representa la escala de la recta.

Dado que este nivel se ha limitado a las escalas $1/10$, $1/5$, $1/4$, $1/2$ y 1 , para representar valores con denominadores 20, 10, 5, 4, 2 y 1, es posible solventar esta dificultad convirtiendo las fracciones, correspondientes al valor dado y la escala, a denominador 20. Por ejemplo, la tabla 4.2 muestra las fracciones que aparecen representadas en las escalas dadas en el sexto nivel, y su conversión a fracciones con denominador igual a 20.

Tabla 4.2: Escalas menores o igual que la unidad

Fracción	Decimal	Denominador “20”
$1/10$	0.1	$2/20$
$1/5$	0.2	$4/20$
$1/4$	0.25	$5/20$
$1/2$	0.5	$10/20$
1	1	$20/20$

Ejemplo 1: Si se debe representar el valor $5/4$ en una recta con escala $1/5$, se puede proceder a calcular que $5/4 = 25/20$; luego, de acuerdo con la tabla 4.2, la distancia entre cada par de marcas consecutivas en la recta es de $4/20$, lo cual permite determinar que la sexta marca hacia la derecha del cero corresponde con

24/20. A partir de este valor sólo basta moverse con la flecha derecha del teclado 1/20, para llegar al 25/20 o 5/4.

Ejemplo 2: Para determinar la ubicación de $-13/20$ se puede observar previamente, que debe estar un poco más a la izquierda de la mitad de la distancia que hay entre el 0 y -1 . Considerando que -0.5 es equivalente a $-10/20$ y $-20/20$ corresponde a -1 . Sin embargo, resulta un poco complejo para el estudiante y posiblemente no analice el valor en notación fraccionaria y prefiere apoyarse en el valor decimal que brinda el sistema.

Ejemplo 3: Para ubicar un valor dado en notación fraccionaria en el nivel seis existe una doble dificultad: El valor dado puede tener un denominador distinto que el denominador de la escala señalada en la recta. Por ejemplo, se pide ubicar $13/10$ mientras la recta tiene una escala de $\frac{1}{4}$. En ese caso puede apoyarse de la notación decimal para ubicar el 1.25 que corresponde con el quinto intervalo desde cero hacia la derecha, luego con el teclado moverse 1/20 hacia la derecha y así ubicar exactamente el 1.30.

Ejemplo 4: Para ubicar el $19/20$, basta con colocar el punto a sobre uno y moverse con la flecha izquierda del teclado una vez hacia la izquierda.

Ejemplo 5: Para ubicar el $-7/5$ igual a -1.4 en una recta con escala 0.25 o un cuarto, primero se puede ubicar el -1.5 o $-3/2$ iguala $-6/4$ y avanzar dos movimientos hacia la derecha con el teclado.

Otra situación compleja para los estudiantes se da cuando la recta está con escala unitaria o sea uno y debe representar valores fraccionarios o con diferentes denominadores aquí la precisión puede fallar. Aunque este ejercicio se presenta de manera usual en los libros de texto.

El nivel seis es particularmente difícil si se trabaja sin apoyo de la notación decimal. Sin embargo es necesario idear estrategias para que los estudiantes se ejerciten en el uso de la notación fraccionaria como forma de representación de los datos en una gráfica.

4.3.3 Prueba final

Una vez realizado el trabajo en el laboratorio, el estudiante realiza una prueba final para evaluar su aprovechamiento en ejercicios de representación e identificación de valores en la recta numérica.

4.3.4 Recomendaciones para el docente

Si se utiliza este recurso como un refuerzo posterior al abordaje en clase de situaciones contextualizadas que aborden el concepto y utilice los números en distintas notaciones, puede ser útil para que los estudiantes interioricen mayormente el número a través de su representación gráfica. Es decir, se puede utilizar como un complemento para apoyar el aprendizaje de la relación entre valores numéricos enteros, decimales y fraccionarios con la recta numérica. Dado que ayuda a la visualización, lo cual favorece la representación mental que tiene el alumno de este concepto. Además, sirve como parte de una introducción a la representación de valores en el plano cartesiano.

Es recomendable que el docente se familiarice con el recurso web y adquiera seguridad en su uso, antes de proponerlo a los estudiantes. Luego, puede mostrar brevemente la herramienta, y permitir a los estudiantes explorar cada nivel.

Es probable que deban realizarse una inducción (práctica previa con el recurso web) para luego dejar al estudiante trabajar cada nivel con una mayor confianza. La idea es realizar una actividad que permita a los estudiantes familiarizarse con el recurso, antes de utilizarlo de una manera más formal, para la captura del nivel de aprovechamiento de cada estudiante. Por ejemplo, puede ser trabajado en parejas para propiciar el intercambio de ideas, aclaración de dudas, familiarización con el recurso. Se debe considerar la disponibilidad de equipo y el número de estudiantes del grupo.

Se puede utilizar para efecto de una evaluación formativa. También para generar discusión grupal sobre posibles estrategias que se pueden llevar a cabo para realizar la representación del modo más exacto posible.

Es importante que el estudiante pueda interactuar con el recurso como parte de una práctica extra clase.

Se debe tomar en cuenta que algunos estudiantes tienen dificultades para relacionar valores numéricos con puntos en la recta.

Algunos estudiantes pueden presentar dificultades con el manejo del equipo (Mouse, tamaño de la pantalla, teclado), lo cual puede afectar su precisión en algunas actividades.

Algunas estrategias para mejorar la precisión en los niveles 2, 4 y 6 consisten en:

- En el segundo nivel, el punto ubicado en la recta puede ser movido mediante las teclas direccionales, hacia la derecha o izquierda (“>” o “<”) en distancias de uno en uno. Esto permite sugerirles ubicar el punto en una marca dada en la recta, que esté situada cerca del valor que requieren representar, de manera que puedan utilizar las teclas derecha e izquierda para trasladar el punto hasta su ubicación aproximada.
- De manera similar al punto anterior, en el cuarto y sexto nivel es posible mover el punto hacia la derecha e izquierda en una distancia de 0.05 unidades o $\frac{1}{20}$ de la unidad.
- Para ubicar un punto, existe una tolerancia de 0.24 unidades hacia la derecha e izquierda del punto “exacto”. De manera que si el punto se arrastra dentro de ese margen de error, entonces se interpreta como correcta esa representación realizada.
- El estudiante puede arrastrar el punto y posicionarlo de forma directa en la recta en un punto cercano al punto que corresponde con el valor dado. Sin embargo, con algunas de las escalas puede haber mayor dificultad para hacerlo de esa manera.
- Es aconsejable indagar sobre las ideas de los estudiantes en cuanto a la interpretación de valores escritos en las diferentes notaciones, especialmente, en notación fraccionaria, y la forma de representarlos en una recta de manera lo más exacta posible.
- Es importante observar e instar a los estudiantes a usar la notación fraccionaria en sus respuestas de los niveles quinto y sexto.

- Puede sugerirse a los estudiantes aprovechar para reforzar su práctica cuando han errado la ubicación de un punto, hasta determinar cuál fue el posible motivo de su error. Esta retroalimentación se puede realizar gracias al recuadro amarillo que aparece bajo la recta indicando la posición del punto en la recta. Mientras se muestra este recuadro, el estudiante tiene la opción de ubicar puntos en diferentes posiciones de la recta, mientras visualiza sus selecciones. Esta opción permite relacionar diferentes puntos de la recta con el valor que representan. Este recuadro desaparece una vez que se ha dado clic en el botón “Nuevo Punto” o en el botón “Nueva escala”.
- El docente puede utilizar este recurso en un ambiente de laboratorio en parejas como una manera de acercamiento inicial del recurso a los estudiantes.
- Aplicar este material como forma de ejercitación y repetición (Aebli) sobre el tema de representación de valores en notación entera, decimal y fraccionaria en la recta real. De modo que los estudiantes identifiquen y representen valores numéricos como forma de evidenciar su representación y comprensión sobre la relación de los números y su representación en una gráfica lineal.
- Los estudiantes interactúan con un medio que les llama la atención y actúa como fuente de motivación para realizar la tarea propuesta.

También se deben considerar las dificultades conceptuales para llevar a cabo la representación de los valores en la recta, por ejemplo, algunas de las dificultades detectadas en las pruebas realizadas a estudiantes de tercer año de secundaria son:

- Orden de los valores enteros en la recta.
- Signo de los valores numéricos.
- Lectura de valores decimales con una o dos cifras decimales.
- Interpretación de números en notación fraccionaria.
- Lectura de las distancias en la recta.
- Reconocimiento de la escala.
- Ubicar un valor en notación fraccionaria con un valor del denominador diferente al número de partes en que se halla dividida la unidad en la recta.

Una estrategia mayormente utilizada por los estudiantes fue pasar las fracciones a notación decimal. El uso de la notación decimal es muy utilizado por los estudiantes para la lectura e identificación de valores en la recta. La conversión de la notación fraccionaria a la notación decimal es frecuente, pero fallan en la conversión en muchos de los casos.

Capítulo 5

ANÁLISIS DE LOS DATOS

En este capítulo se realiza el análisis de los datos obtenidos mediante la aplicación de las distintas fases planteadas en el marco metodológico.

De la primera fase se derivan las calificaciones obtenidas por 80 estudiantes en una prueba que aborda contenidos relacionados al estudio de las gráficas en el plano cartesiano. El instrumento aplicado a los estudiantes, permite observar que los alumnos presentan variadas dificultades en la realización de actividades relacionadas con representación o identificación de puntos sobre la recta con una escala dada. También, en la primera fase se analizan las afirmaciones de 19 docentes sobre el logro de los estudiantes en contenidos relacionados con el estudio de los gráficos cartesianos de funciones. Para ello, se incluyó un instrumento aplicado a docentes relacionados con la educación secundaria. Las valoraciones dadas por los docentes, a las afirmaciones del cuestionario, mostraron que la mayoría cree que hay más dificultad en contenidos que involucran las escalas de los ejes del gráfico cartesiano, el uso de notación fraccionaria y decimal en las coordenadas y en la comprensión de los conceptos hallados en los ejercicios presentes en los textos de matemáticas escolar.

En la segunda fase de la investigación se delimitaron los conceptos que se abordarían en la propuesta didáctica. Con base en estos conceptos, se procedió a elaborar una prueba diagnóstica específica con ejercicios sobre la identificación y representación gráfica de valores enteros, decimales, fraccionarios, positivos o negativos sobre la recta numérica. Además, se procede a diseñar, desarrollar y probar un recurso web que sirva de instrumento en la aplicación de la propuesta didáctica. También se diseña una prueba final similar a la prueba diagnóstica específica y algunos otros instrumentos que serán aplicados durante la ejecución de la propuesta.

Esta prueba fue aplicada, durante la tercera fase, a 70 estudiantes de la misma población en que se administró la primera prueba. Se procedió a analizar los datos y también se realizó una comparación de los resultados obtenidos antes y después por estudiantes que realizaron las pruebas referidas en la primera y tercera fase.

Se analizan los resultados de los instrumentos administrados durante la cuarta fase. Esta etapa correspondió con la puesta en práctica de la propuesta didáctica, en

un laboratorio, en una muestra de estudiantes de tercero de secundaria de una institución pública de Puebla. Primero se realiza un análisis de las pruebas tanto a nivel cualitativo como cuantitativo. Luego, se revisan las observaciones realizadas por la investigadora para determinar situaciones que hayan influenciado el desempeño de los estudiantes en el laboratorio. Se presentan y se analizan los resultados obtenidos en el diferencial semántico, las calificaciones del registro fotográfico de los resultados logrados por los estudiantes mediante su interacción con el recurso web, la información proveniente de la prueba final y el registro de las opiniones expresadas por los estudiantes en un cuestionario aplicado al finalizar el laboratorio.

Finalmente, se realiza una comparación tanto de la calificación, como de las soluciones de los estudiantes, entre otros aspectos, de la prueba diagnóstica y la prueba final. Esta comparación se hace a nivel cualitativo principalmente. También se incluye una comparación cuantitativa del aprovechamiento de los estudiantes que realizaron la prueba diagnóstica, la prueba de laboratorio y la prueba final.

5.1 Información recolectada en la prueba diagnóstica preliminar

5.1.1 Resultados obtenidos por los estudiantes

Se realiza un análisis de la información recolectada en la prueba diagnóstica preliminar aplicada a 80 estudiantes de una escuela secundaria pública en Tlaxcala (ver anexo 2).

Esta prueba se aplicó a tres grupos de tercer año de secundaria con el fin de identificar errores que presentan los estudiantes al resolver actividades relacionadas con el estudio del plano cartesiano y las gráficas de funciones. La prueba aplicada constaba de 41 puntos en total. Se ha considerado una escala del 0 al 10, en correspondencia con la SEP, con respecto a la calificación obtenida por cada estudiante en cada una de las pruebas realizadas en esta investigación. Según el gráfico 5.1, sólo un 15% del total de estudiantes obtuvieron una calificación mayor o igual que seis en el total de la prueba.

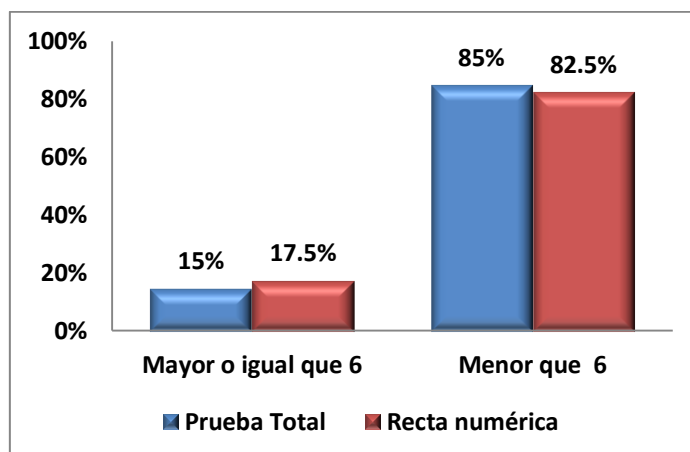


Gráfico 5.1: Calificación obtenida en la prueba diagnóstica preliminar

La prueba diagnóstica constaba de ocho ejercicios. Los primeros cuatro ejercicios se referían a la identificación y representación gráfica de valores enteros, decimales, fraccionarios, positivos o negativos sobre la recta numérica. En estos ejercicios los estudiantes presentan variados errores con respecto a la ubicación de puntos en la recta numérica, especialmente cuando es necesario tener en cuenta una escala para la ubicación de estos. Estos ejercicios comprendían 23 puntos del total de la prueba. La recta numérica dada en cada ejercicio presentaba una determinada graduación y dos valores de referencia, el cero y otro valor, con el fin de que sirvieran de base para calcular la escala dada. Se observó que sólo un 17.5% de los estudiantes obtuvo una calificación mayor o igual que seis en estos ejercicios. Lo cual muestra una posible relación entre la calificación obtenida en la prueba total y la calificación obtenida considerando sólo los ejercicios que abordaban específicamente la representación de valores numéricos en una recta graduada, de la misma prueba. Es decir, si hay dificultades para realizar los ejercicios #1, #2, #3 y #4, que se refieren a la recta numérica, entonces esto también puede afectar el desempeño general para el resto de ejercicios de la prueba aplicada.

En la figura 5.1 se muestra la aplicación de la prueba preliminar a estudiantes de la secundaria en Tlaxcala.

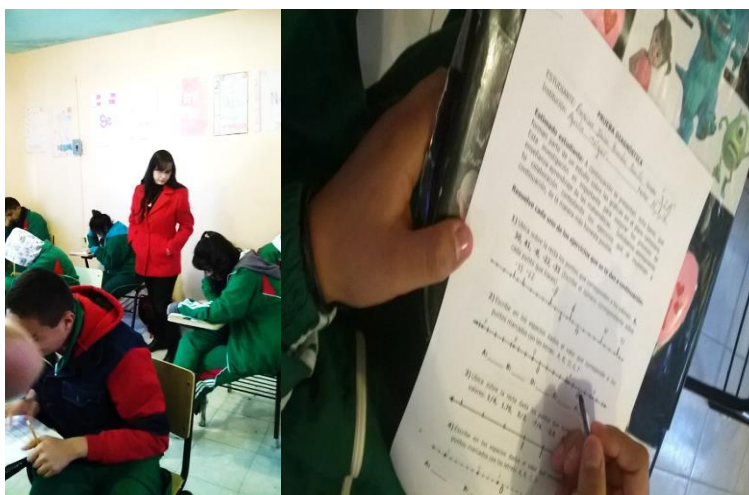


Figura 5.1: Estudiantes realizan la prueba diagnóstica preliminar

Por otra parte, se hizo una correlación entre las calificaciones obtenidas por los estudiantes en la prueba total y la calificación obtenida, considerando sólo los ítems relacionados con la recta numérica. Se obtuvo un coeficiente de correlación de **0.9451**, al comparar las calificaciones de los 80 estudiantes, lo cual corresponde con una correlación positiva muy fuerte. Además, se indica que hay un 99% de confianza de que la correlación sea verdadera. Esto nos indica que la calificación obtenida por cada estudiante en las primeras cuatro preguntas puede estar relacionada, de modo directo, fuertemente con la calificación obtenida en el total de la prueba (ver anexo 13).

Tabla 5.1: Calificación obtenida en la prueba diagnóstica preliminar

Estudiantes/calificación	Mayor o igual que 6	Menor que 6
Hombres	18%	82%
Mujeres	13%	87%

En cuanto al género, en esta fase participó un 57% de mujeres y un 43% de hombres. En la tabla 5.1 se puede ver que el porcentaje de mujeres con calificación igual o superior a seis es muy cercano al de los hombres con este mismo aprovechamiento en la prueba total. Una relación similar se observa, considerando sólo los ítems relativos a la recta numérica, en la tabla 5.2. Esto muestra que las dificultades se presentan indistintamente del género.

Tabla 5.2: Calificación obtenida en la prueba diagnóstica, considerando sólo los ítems relativos a la recta numérica.

Estudiantes/calificación	Mayor o igual que 6	Menor que 6
Hombres	21%	79%
Mujeres	15%	85%

5.1.2 Algunos tipos de errores hallados en las respuestas de los estudiantes

Como ya se mencionó, en los ítems #1, #2, #3 y #4, los estudiantes presentaron errores con respecto a la ubicación de puntos en la recta numérica, especialmente cuando era necesario tener en cuenta una escala para la ubicación de éstos. Los ejercicios #1 y #3 tenían como objetivo representar gráficamente valores enteros, decimales, fraccionarios, positivos o negativos sobre la recta numérica. En el ejercicio #1 debían representar gráficamente tres números enteros positivos y tres números enteros negativos dados. Esto implica que realizaran una marca o punto en la recta, junto con una etiqueta que indicara el valor representado. En el ejercicio #3 debían realizar la misma acción con valores en notación fraccionaria decimal positivo o negativo. Los ejercicios #2 y #4 tenían como objetivo identificar valores enteros, decimales, fraccionarios, positivos o negativos, correspondientes a puntos dados en la recta numérica. Los errores no se concentran en un solo tipo, sino que se presentan de variadas formas. En general, podría decirse que los estudiantes presentan dificultades para identificar y representar gráficamente valores numéricos en notación entera, decimal o fraccionaria, positivos y negativos sobre una recta numérica; además de una “lectura incorrecta de la escala”; y esto puede deberse a múltiples factores. Algunos errores pueden deberse a dificultades en la lectura de valores negativos, otros pueden deberse a creer que la escala siempre es unitaria, también pueden tener dificultades para comprender cómo representar el orden de los números en la recta, no saber utilizar los valores de referencia representados en una recta numérica para calcular las distancias en la misma, etc. Algunos errores

observados en las respuestas dadas en la prueba diagnóstica preliminar, en los ejercicios sobre representación e identificación de valores en la recta, se describen a continuación:

T1: Omisión del signo “-” en los valores negativos. En la figura 5.2 se observa que el estudiante C10 ubica correctamente los valores dados, en la pregunta N° 1, sin embargo, omite escribir los signos negativos en las etiquetas correspondientes a los valores ubicados a la izquierda del cero.

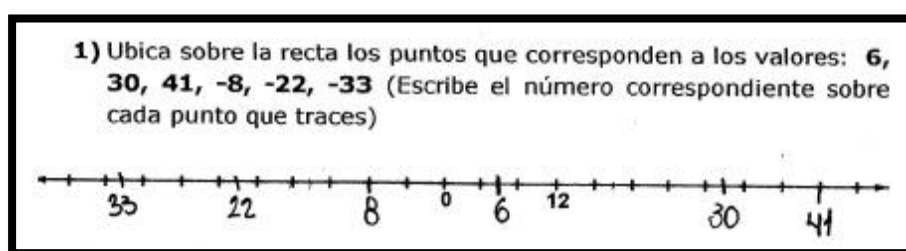


Figura 5.2: Respuesta de estudiante C10 en la pregunta N° 1

Este mismo error se presenta cuando omiten poner el signo “-” en uno o varios valores ubicados a la izquierda del cero al representarlos o al identificarlos en la recta numérica; por ejemplo, en la pregunta N°4 (ver figura 5.3), el estudiante C10 no escribe el signo “-” en los valores correspondientes con A, B y C. Este error aparece en combinación con otros errores en la identificación o representación de valores numéricos sobre la recta (ver figuras 5.3 y 5.4).

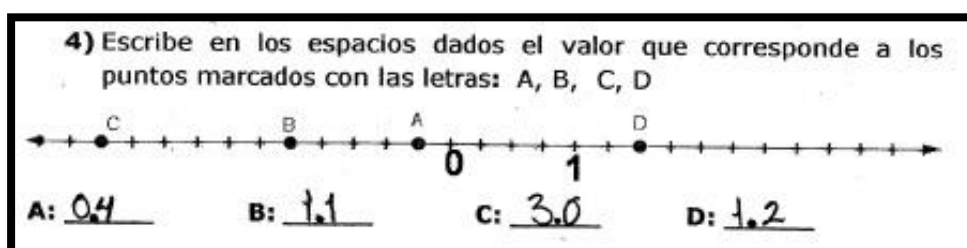


Figura 5.3: Respuesta del estudiante C10 en la pregunta N° 4

En la figura 5.4 se observa, además, que el estudiante C4 no hace distinción entre valores negativos y positivos, al representarlos a la derecha o izquierda del cero de la recta. En este caso, parece que su intención fue colocarlos “de menor a mayor”, sin considerar el significado del símbolo “-”.

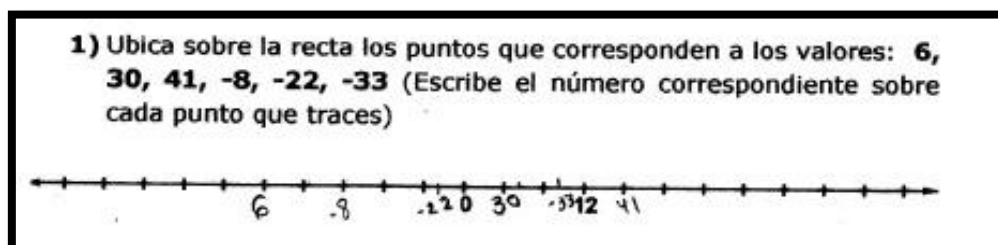


Figura 5.4: Respuesta del estudiante C4 en la pregunta N° 1

T2: Orden. Una muestra de este error se observa cuando representan, a la izquierda del cero, los valores dados de mayor a menor en dirección de izquierda a derecha, sobre la recta numérica, o cuando “identifican” valores correspondientes a puntos dados, en esa misma forma. En algunos casos, sólo presentan este error cuando se trata de valores negativos (ver figura 5.5 y figura 5.6). El estudiante C16 ubica los valores -22 y -33 en orden inverso, sobre la recta, en la pregunta N°1. Mientras que el estudiante B6 “representa” los valores -8, -22 y -33 en un orden invertido, en la pregunta N° 1.

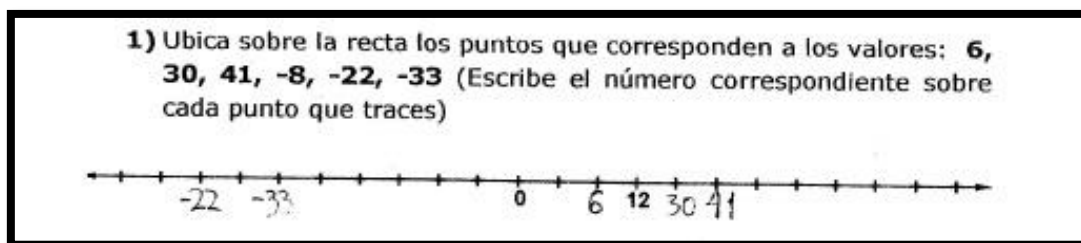


Figura 5.5: Respuesta del estudiante C16 en la pregunta N° 1

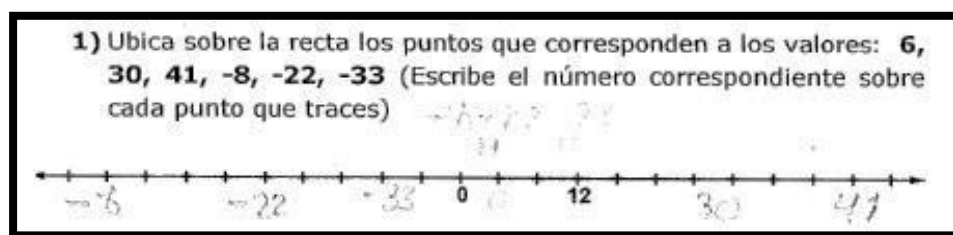


Figura 5.6: Respuesta del estudiante B6 en la pregunta N° 1

Lo anterior coincide con el libro para el maestro (SEP, 2001, p. 107), donde se plantea que los alumnos se han habituado a manejar los números naturales, lo cual incide en que el trabajo con números negativos y la forma de operar con ellos les implique cierta dificultad.

T3: Omisión de la marca gráfica: En muchos casos los estudiantes escriben el valor dado sobre la recta sin dibujar alguna marca que ubique con mayor precisión el valor que deben representar, para señalar el lugar donde se ubica aproximadamente el valor dado. Es importante considerar que según Scaglia y Coriat (2000), la representación de un valor en la recta numérica, requiere de una etiqueta, o símbolo del valor a representar y una marca que indique, de la manera más aproximada posible, la ubicación de ese valor en la recta. En las figuras 5.7 y 5.8 se observa que los estudiantes simplemente escriben los valores bajo la recta, sin indicar algún lugar específico fuera de las marcas o graduación que presenta la recta. También se ha observado, en las pruebas revisadas, que algunos estudiantes consideran que deben ubicar valores específicamente en las marcas que representan la graduación de la recta. Por lo cual, creen que cada valor debe coincidir exactamente con una de las marcas dadas en la recta. Por ejemplo, el estudiante B10 escribe todos los valores dados cerca de alguna marca dada en la recta, aunque no coincida ni se aproxime a los valores dados. Por ejemplo, escribe el valor 6 cerca de la marca que representa al número 4, escribe al número -8 justo al lado de la marca que representa al valor -4, etc.

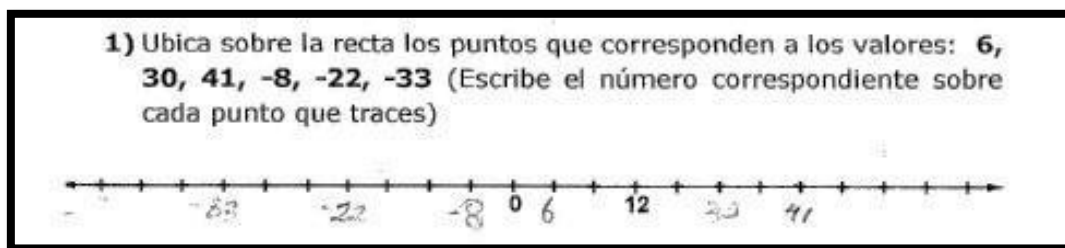


Figura 5.7: Respuesta del estudiante B10 en la pregunta N° 1

En la figura 5.8 se observa que el estudiante B3 escribe los números -33, -22, 30 y 41 bastante cerca de la ubicación que les corresponde en la recta; sin embargo, no pone ninguna marca (punto, raya, etc.) en el lugar específico que le corresponde.

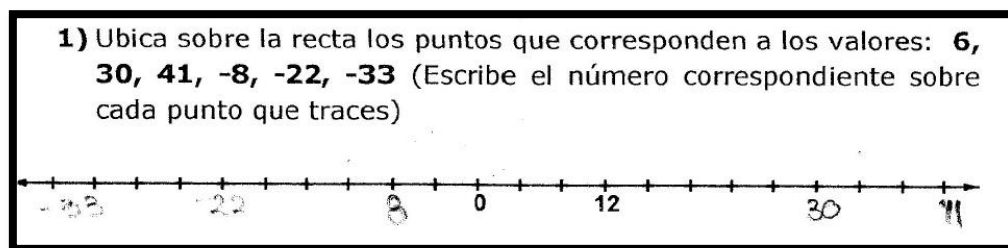


Figura 5.8: Respuesta del estudiante B3 en la pregunta N° 1

T4: Ubicar valores negativos a la derecha del cero o ubicar valores positivos a la izquierda del cero. Se puede ver en la figura 5.9 como el estudiante B24 ubica los valores negativos a la derecha del cero, y los positivos, hacia la izquierda.

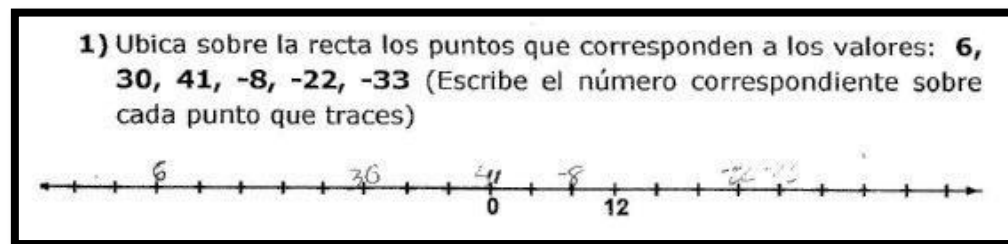


Figura 5.9: Respuesta del estudiante B24 en la pregunta N° 1

T5: Considerar que la escala es unitaria. En la figura 5.10 el estudiante C17 cuenta de uno en uno a partir del 12. De manera que escribe los números 13, 14, 15, etc. haciéndolos corresponder con una marca dada en la recta.

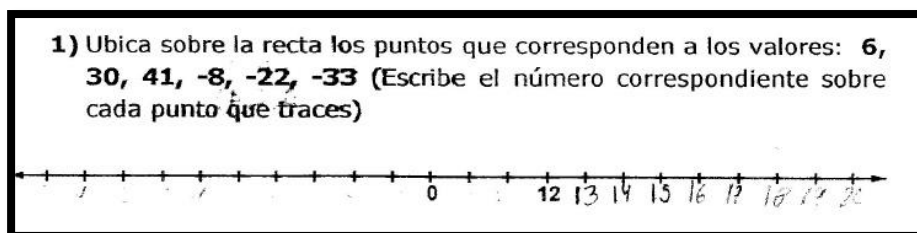


Figura 5.10: Respuesta del estudiante C17 en la pregunta N° 1

En la figura 5.11, B20 parece que cuenta de uno en uno a partir del cero, por eso escribe D=6, B= -5, A=1 y C= 11.

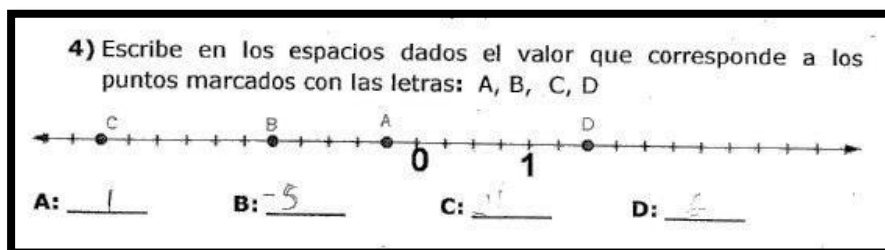


Figura 5.11: B20 realiza una lectura con escala uno, en la pregunta N° 4

También puede verse, en la figura 5.12, que B19 además de realizar una lectura de la escala de uno en uno, a su vez, no considera la presencia de valores negativos a la izquierda del cero. Además, reconoce la presencia del “1” en la recta, y cuenta con escala uno hacia la derecha del “1”, de modo que escribe D=3.

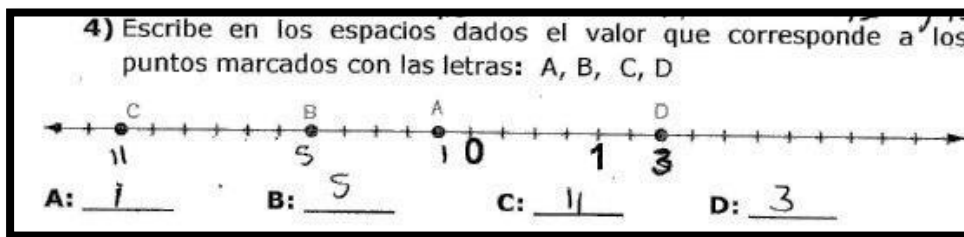


Figura 5.12: Respuesta del estudiante B19 en la pregunta N° 4

T6: Escala no definida. En la figura 5.13, el estudiante B1 ubica los valores dados utilizando diferentes escalas. Parece que ubica el “-8” realizando una lectura de la escala de dos en dos a partir del cero. Luego para ubicar el “6” se supone que usa una escala de tres en tres a partir del cero. Los demás valores están representados sin considerar una distancia específica con respecto a la cual se haya calculado su ubicación. Esto también puede deberse a que no consideran los valores de referencia dados en la recta, para identificar el valor correspondiente a un punto dado o para representar gráficamente un valor dado.

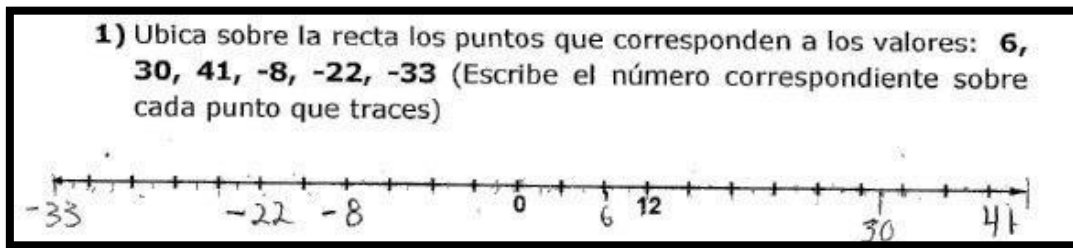


Figura 5.13: Respuesta del estudiante B1 en la pregunta N° 1

T7: Reconocimiento de notación fraccionaria o decimal. En algunos casos confunden la notación fraccionaria con la escritura decimal: por ejemplo, leer $\frac{1}{4}$ como 1.4; también, se observa cuando se interpreta $\frac{3}{2}$ como 3 y $\frac{1}{2}$. En la figura 5.14 el estudiante B13, en la pregunta N°3 confunde -1.05 con -1.5; y -2.5 lo escribe como -2.05, también falla la ubicación de $\frac{5}{2}$ y $-\frac{7}{4}$.

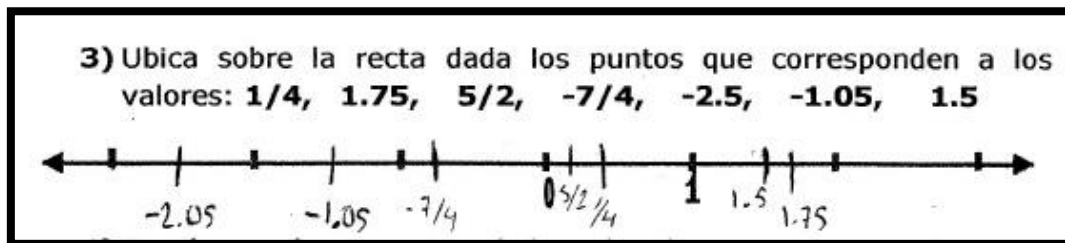


Figura 5.14: Respuesta del estudiante B13 en la pregunta N° 3

5.1.3 Puntajes obtenidos con mayor frecuencia por los estudiantes

Se realizó una clasificación de las cuatro primeras preguntas en valores positivos y negativos, de modo que P1 (+) se refiere a los valores positivos de la pregunta N°1, P1 (-) se refiere a los valores negativos de la pregunta N°2, etc. Luego se determinó cuántos estudiantes obtuvieron “uno o cero puntos” o “2 o más puntos” en cada uno de los casos señalados, con excepción de P4 (+) donde sólo había un valor positivo. Para este ítem se clasificó en “0” o “1” puntos.

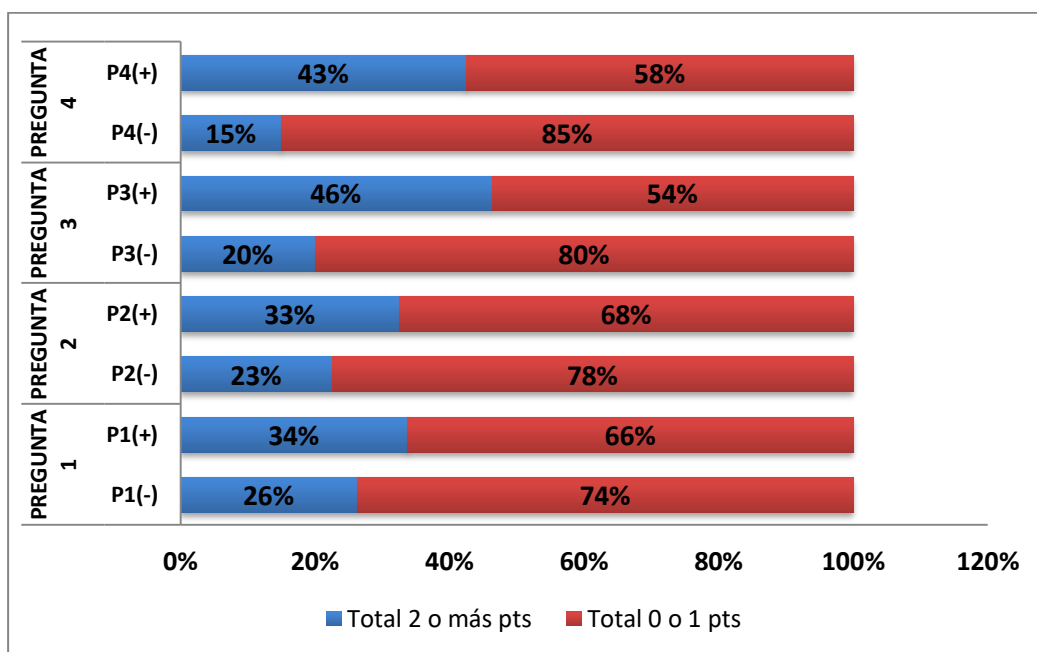


Gráfico 5.2: Puntaje obtenido en los valores positivos o negativos de cada pregunta

El gráfico 5.2 muestra que los alumnos que obtienen dos o más puntos en cada caso, van desde 1% al 46% de los estudiantes. Se observa que hay un mejor puntaje cuando los valores son positivos. Sin embargo, hay evidencia que la mayoría de estudiantes obtienen un bajo puntaje en todos los ejercicios propuestos, ya sean de representación o de identificación de un valor dado.

5.2 Análisis de la información proporcionada por docentes de Secundaria

Se aplicó un cuestionario (ver anexo 1) que presentaba doce afirmaciones con respecto al logro de los estudiantes en conceptos relacionados con el estudio del plano cartesiano. Las afirmaciones se daban con respecto al uso de la escala, reconocimiento y representación de puntos con coordenadas en diferentes

notaciones (positivas y negativas) sobre el plano cartesiano; y otros aspectos relacionados. Las preguntas se clasificaron de acuerdo a los temas: escalas de los ejes, orden de las coordenadas cartesianas, coordenadas en notación de números enteros, coordenadas en notación decimal o fraccionarias, y reconocimiento o comprensión de los conceptos presentados en los libros de texto. Básicamente, el instrumento muestra 12 afirmaciones con respecto al logro percibido por los docentes con respecto al desempeño de los estudiantes al trabajar con el plano cartesiano. Para ello cuentan con una escala del 1 al 4, donde 1 significa “Nunca” y 4 corresponde a la valoración “Siempre”.

Este cuestionario se aplicó a una muestra de 19 docentes de matemáticas, con conocimientos en educación secundaria, procedentes de diferentes instituciones educativas. El cuestionario se respondía con base a una escala de Likert con valoraciones de 1 al 4. Las afirmaciones se clasificaron en cinco tipos, de acuerdo a los temas: escala de los ejes, orden de las coordenadas cartesianas, coordenadas en notación de números enteros, coordenada en notación decimal o fraccionaria, y reconocimiento o comprensión de los conceptos presentados en los libros de texto.

Las preguntas se han agrupado en 5 categorías

- **Escala:** Afirmaciones 1, 2 y 3
- **Orden de coordenadas:** Afirmaciones 4 y 5
- **Números enteros:** Afirmaciones 6 y 9
- **Números en notación fraccionaria y decimal:** Afirmaciones 7, 8 y 10
- **Comprensión de ejercicios en libro de texto:** Afirmaciones 11 y 12

El gráfico 5.3 agrupa el porcentaje de los criterios, de las respuestas dadas por los docentes, en dos tipos:

1. **Frecuente:** Siempre y Muchas veces
2. **Poco frecuente:** Pocas veces y Nunca

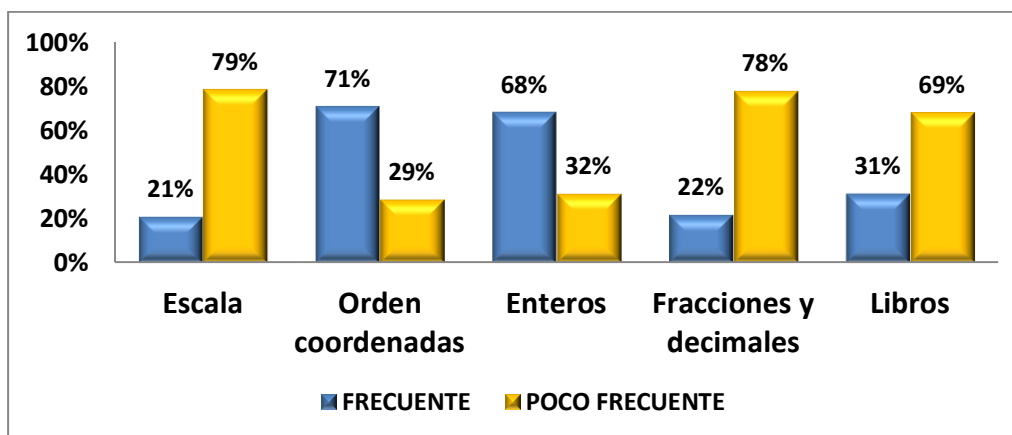


Gráfico 5.3: Respuestas al cuestionario sobre dificultades en el uso del plano cartesiano

En la gráfica 5.3 se observa que la mayoría de docentes encuestados considera que hay más dificultad en contenidos que involucran las escalas de los ejes del gráfico cartesiano, el uso de notación fraccionaria y decimal en las coordenadas y en la comprensión de los conceptos hallados en los ejercicios presentes en los textos de matemáticas escolar. Mientras que consideran que con mayor frecuencia los estudiantes logran mejores resultados en temas que involucran el trabajo con números enteros y con el orden de las coordenadas de los pares ordenados.

Por otra parte, al final del cuadro de afirmaciones se propuso dos preguntas abiertas a los docentes:

1. ¿Qué otras dificultades ha observado en el desempeño de los estudiantes al abordar temas que requieren el uso o construcción de gráficas sobre el plano cartesiano?
2. ¿A qué factores atribuye usted las dificultades que presentan los estudiantes en el trabajo con el plano cartesiano?

En cuanto a las dificultades observadas, algunos docentes dan las siguientes respuestas:

- “Que los alumnos no saben distinguir bien los signos de los cuadrantes”.
- “Que a pesar de que los alumnos vieron este tema en primaria, aún no identifican el nombre de cada eje que conforma el plano cartesiano. Además,

otra dificultad es la no interpretación de datos que se expresan en un plano cartesiano, también al utilizar tanto decimales como fracciones no saben equivalencias”.

- *“Que tiene dificultad en ubicar los puntos con coordenadas que contienen valores enteros, fraccionarios o decimales negativos”.*

En cuanto a los factores que ocasionan las dificultades, algunos docentes expresan lo siguiente:

- *“Algunas veces ellos no saben reconocer negativos y positivos; y sobre todo los decimales y fracciones no las pueden ubicar”.*
- *“Al manejo de números negativos y al uso de fracciones en el plano cartesiano”.*
- *“A que no saben ubicar bien el plano cartesiano los ejes x e y negativos”.*

Algunas de las respuestas o comentarios de los docentes destacan la referencia a las dificultades que muestran los estudiantes cuando realizan actividades o ejercicios que involucran valores negativos, fraccionarios o decimales.

5.3 Análisis de la información recolectada en la prueba diagnóstica específica aplicada en Tlaxcala.

5.3.1 Resultados obtenidos por los estudiantes

Con base en las dificultades observadas en la prueba diagnóstica preliminar y en las afirmaciones de los docentes, se determinó que la propuesta didáctica se realizaría con ejercicios sobre la identificación y representación gráfica de valores enteros, decimales, fraccionarios, positivos o negativos sobre la recta numérica. Para lo cual se elaboró una prueba diagnóstica específica (Ver anexo 3), la cual se aplicó a 70 estudiantes de la población estudiada en la primera fase (ver figura 5.15) (ver anexo 4). Cabe destacar que esta prueba fue aplicada después de que los estudiantes abordaron el tema de función cuadrática, lo cual suponía, que habían realizado un repaso sobre temas relacionados con los gráficos cartesianos. Mientras

que la prueba diagnóstica preliminar fue aplicada al iniciar el curso lectivo, antes de ver el tema mencionado.

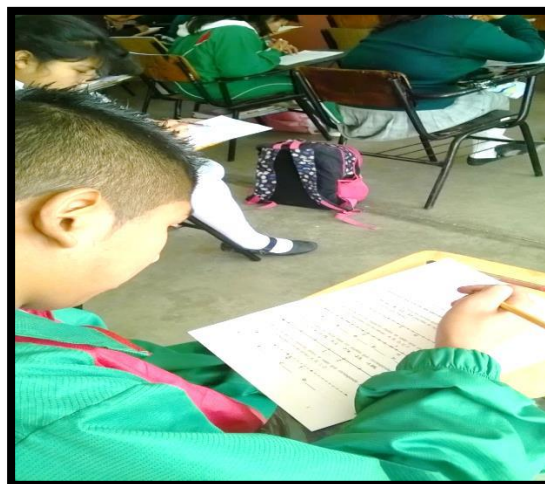


Figura 5.15: Estudiantes de Tlaxcala realizan la prueba diagnóstica específica

Una de las características que se buscaba en la población estudiada era que fueran estudiantes de tercer año de secundaria, porque se supone que éstos ya han abordado en variadas ocasiones, desde primero de secundaria, contenidos referidos a los conceptos que interesan en esta investigación. No obstante, los errores en las respuestas que dan a los ejercicios sobre los temas en cuestión se repiten de manera evidente, aún después de terminar este ciclo.

La prueba se elaboró con cuatro preguntas similares a los cuatro primeros ítems de la primera prueba que se aplicó. Las preguntas #1 y #2 abordaron la representación e identificación de números enteros positivos y negativos en la recta numérica. Las preguntas #3 y #4 abordaron la representación e identificación de números en notación decimal y fraccionaria, positivos y negativos en la recta numérica. Cada pregunta constaba de seis valores que debían representarse o identificarse en la recta dada, de acuerdo con una escala determinada y dos valores de referencia. En todas las rectas representadas en la prueba, se utilizó como uno de los valores de referencia al número "0", dada la relación de la investigación con el estudio de los gráficos cartesianos. Además, se mostraba otro valor diferente de cero que permitiera al alumno calcular la escala de la graduación de la recta, de

modo que pudiera ubicar o identificar los valores en cada caso. Otro detalle de la prueba diagnóstica fue que en cada pregunta se proponían tres valores negativos y tres valores positivos para el correspondiente ejercicio de identificación o representación gráfica.

Considerando una escala del 0 al 10, se han clasificado las calificaciones obtenidas en calificaciones mayores o iguales que seis; y menores que seis. En el gráfico 5.4 se observa que sólo el 21% de los estudiantes obtiene al menos una calificación de seis. Dado que se trata de estudiantes de la misma población estudiada en la primera fase, se pueden comparar los porcentajes de estudiantes que obtuvieron un aprovechamiento de al menos seis, con respecto a los ítems abordados en esta segunda prueba.

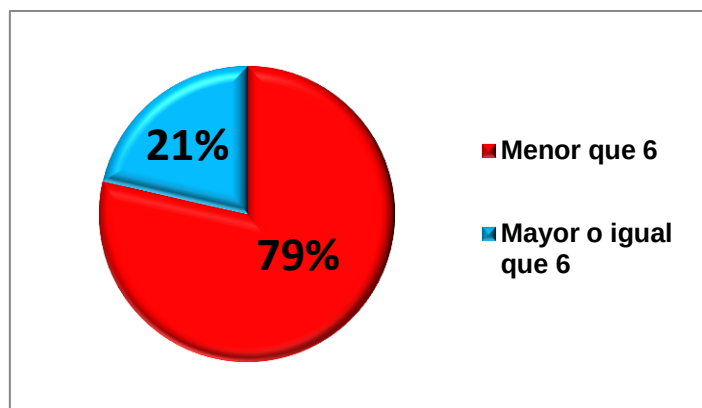


Gráfico 5.4: Calificación obtenida, en la prueba diagnóstica específica.

Entonces, el porcentaje de estudiantes que obtuvieron 6 o más en los primeras cuatro preguntas de la prueba diagnóstica preliminar fue de un 17.5%, lo cual dista muy poco del 21% de los estudiantes que obtuvieron una calificación mayor o igual que seis en esta prueba.

Otra consideración importante es que 57 estudiantes coincidieron en la realización de ambas pruebas. Por lo cual se procedió a realizar la comparación de sus resultados, considerando sólo los ítems relacionados con la recta numérica.

En el gráfico 5.5 se observa que el porcentaje de estudiantes que obtiene una calificación igual o mayor que seis es muy bajo en ambas pruebas. Se puede considerar que el aumento de un 11% en el porcentaje de estudiantes que obtiene una calificación de seis o mayor, se debe a factores como la maduración, dado que la primera prueba fue aplicada casi al inicio del semestre, mientras la segunda prueba se aplicó casi al finalizar el mismo. En este momento, los estudiantes habían abordado contenidos relativos a gráficos de la función cuadrática.

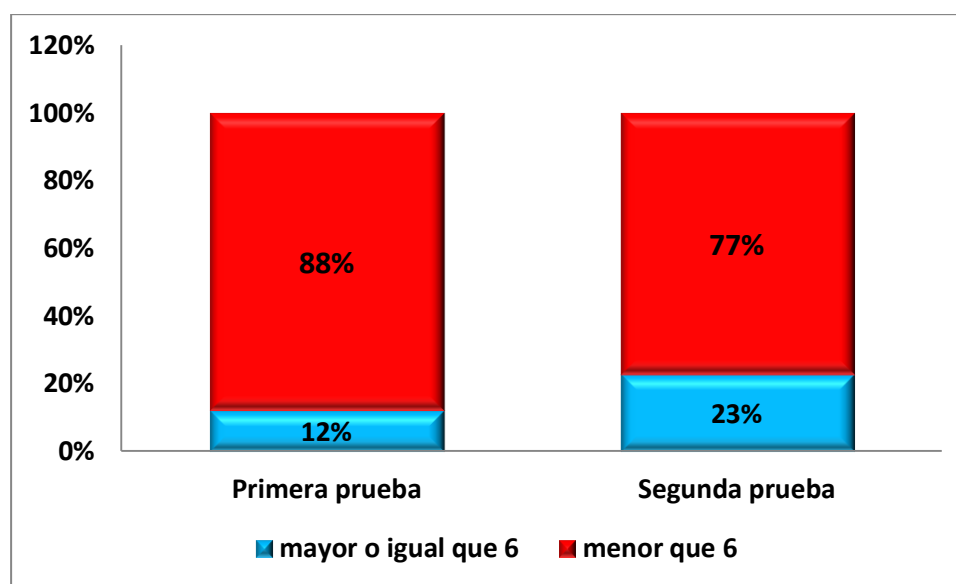


Gráfico 5.5: Resultados obtenidos en dos pruebas aplicadas a 57 alumnos en una escuela secundaria pública.

Finalmente, al realizar un análisis de datos comparando los resultados obtenidos por esta muestra de 57 estudiantes en ambas pruebas, se obtuvo un coeficiente de correlación de **0.812**, la cual se clasifica como una correlación positiva considerable. Además, se indica que hay un 99% de confianza de que la correlación sea verdadera.

5.3.2 Puntajes obtenidos con mayor frecuencia por los estudiantes

De nuevo, tomando en consideración los 70 estudiantes que realizaron la segunda prueba, donde cada pregunta aborda tres valores positivos y tres valores negativos, se muestra en el gráfico 5.6 una relación del porcentaje de estudiantes que obtienen “0 o 1” puntos o “2 o 3” puntos en cada grupo de valores. Se aclara

que P1 (+) se refiere al grupo de valores positivos de la pregunta #1, P1 (-) se refiere al grupo de valores negativos de la pregunta #1, etc.

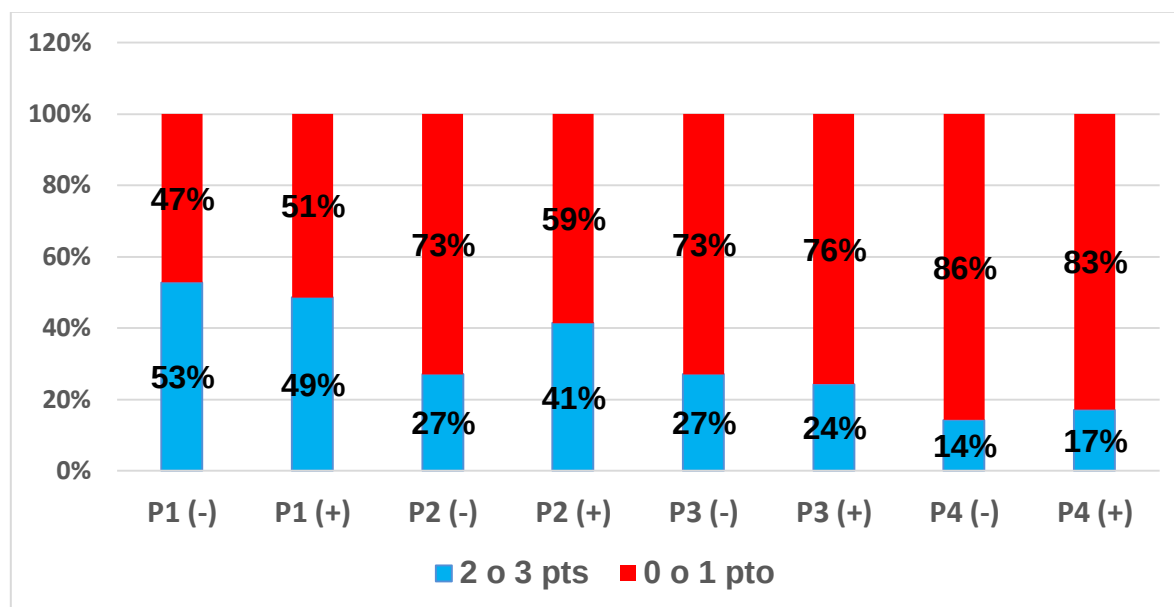


Gráfico 5.6: Porcentaje de aciertos en prueba diagnóstica específica

La pregunta #1 solicitaba que se representaran tres valores enteros negativos y tres enteros positivos. Se observa que en esta pregunta hubo cerca del 50% de estudiantes que lograron 2 o más puntos en el grupo de valores tanto positivos como negativos. En la pregunta #2 se debían identificar tres valores enteros positivos y tres enteros negativos. Se muestra una mayor dificultad para identificar los enteros negativos (27%). Las preguntas #3 y #4 solicitaban representar e identificar, respectivamente, tres valores en notación fraccionaria o decimales negativos y tres positivos. En ambas preguntas se observa que un bajo porcentaje de estudiantes logra obtener puntajes iguales o superiores a dos; siendo la pregunta #4, la que muestra una menor cantidad de aciertos, tanto en los valores negativos como en los positivos.

Los resultados obtenidos en esta prueba permiten darse cuenta de que las dificultades para el trabajo con los números enteros, decimales y fraccionarios aún representan un fuerte motivo para poner la propuesta en ejecución.

5.3.3 Calificaciones obtenidas por los estudiantes en una escala del 0 al 10

En el gráfico 5.7 es posible observar que las calificaciones alcanzadas por los 70 estudiantes en la prueba diagnóstica denotan un bajo desempeño en las actividades resueltas. Obsérvese que las calificaciones más bajas son las más frecuentes, en comparación con las calificaciones cercanas a diez. Cabe resaltar que los estudiantes que efectuaron esta prueba pertenecen a la población que realizó la primera prueba diagnóstica (exploratoria).

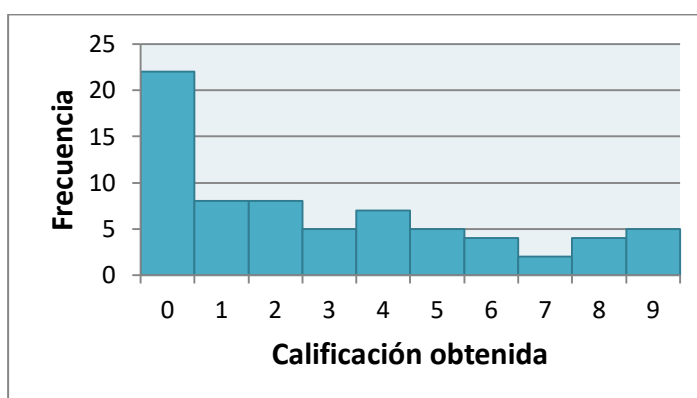


Gráfico 5.7: Frecuencia de las calificaciones obtenidas por los 70 estudiantes

El gráfico 5.8 muestra que los estudiantes que habían realizado la prueba diagnóstica anterior presentan un desempeño similar que el total de estudiantes que la resolvieron. Esto llama la atención, en cuanto a que, en el momento que se realizó esta segunda prueba, los estudiantes estaban a punto de concluir el ciclo lectivo. De manera que, probablemente muchos de ellos pasaría a preparatoria el siguiente curso escolar.

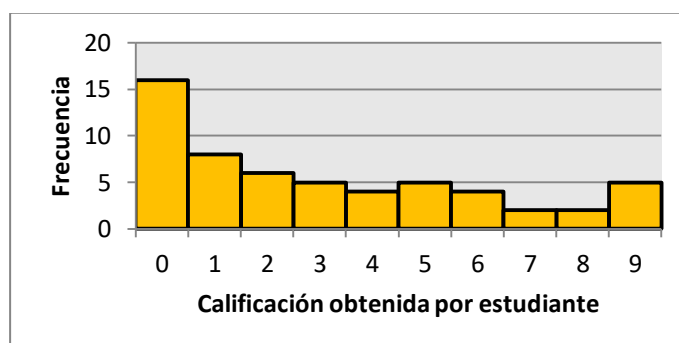


Gráfico 5.8: Frecuencia de las calificaciones obtenidas por los 57 estudiantes que realizaron la dos pruebas aplicadas en Tlaxcala

5.4 Análisis de la información recolectada en la prueba diagnóstica específica aplicada a estudiantes secundaria en Puebla

Previo a la aplicación de la propuesta se procedió a realizar la misma prueba diagnóstica, especificada en el apartado anterior, a una muestra de 35 estudiantes de tercer año de secundaria en una escuela secundaria pública en el estado de Puebla. Esta prueba se administró dos días antes de la aplicación de la propuesta didáctica (ver anexo 5).

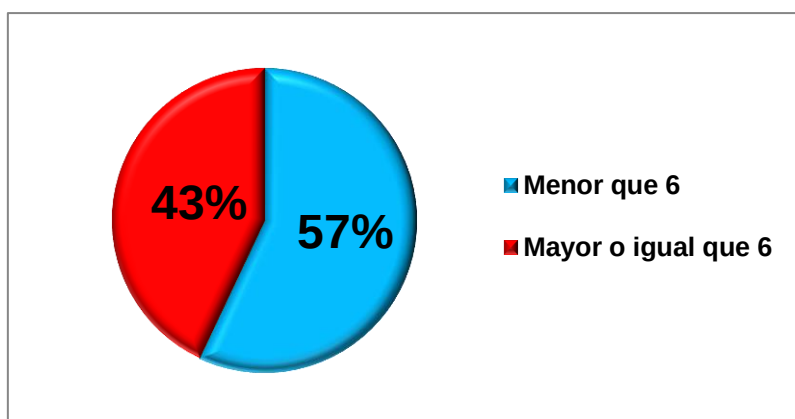


Gráfico 5.9: Calificación obtenida por estudiantes de secundaria en Puebla.

Considerando una escala del 0 al 10, se determinó que un 43% de los estudiantes obtuvo una calificación de seis o mayor en la prueba (Gráfico 5.9). Este resultado aún denota dificultades en la realización de la prueba aplicada.

Además, como cada pregunta consta de seis valores, tres positivos y tres negativos, ha interesado conocer la distribución del puntaje obtenido por porcentaje de estudiantes. Es decir, interesa saber qué porcentaje de estudiantes ha obtenido un puntaje en el intervalo $[0, 1]$ y qué porcentaje ha logrado un puntaje en $[2,3]$ en cada grupo de valores. “P1 (+)” representa los tres valores positivos de la pregunta #1, “P1 (-)” representa los tres valores negativos de la pregunta #1, etc.

De acuerdo con el gráfico 5.10, se determina que en la pregunta #1 correspondiente a la representación de valores enteros positivos y negativos, se halla que un 60% y un 66% de los estudiantes obtienen dos o tres puntos tanto en el grupo de valores positivos, como en los negativos. De este dato se puede interpretar que un alto

porcentaje de estudiantes en este grupo muestran cierto dominio en la representación de valores enteros positivos y negativos, sobre una recta numérica.

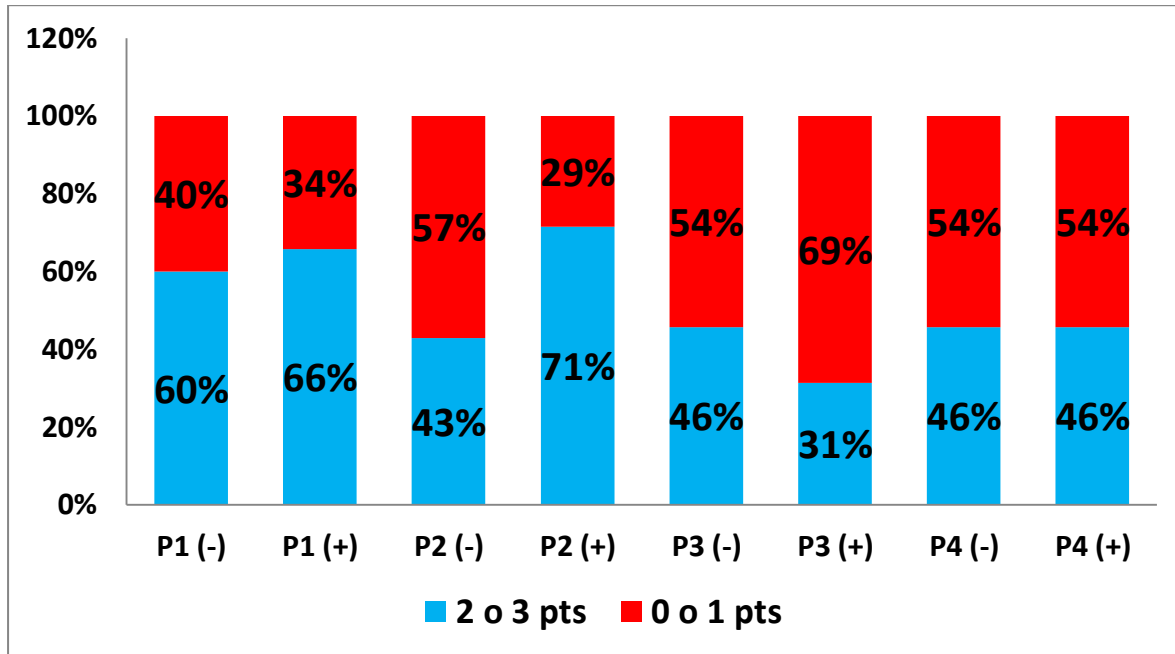


Gráfico 5.10 : Porcentaje de aciertos por puntaje obtenido en la prueba diagnóstica específica aplicada en Puebla.

En la pregunta #2, se observa que un 57% de estudiantes muestran dificultades en la identificación de valores enteros negativos correspondientes con puntos dados sobre una recta graduada. Mientras que sólo un 29% tiene dificultades para identificar valores enteros positivos. En las preguntas #3 y #4, que abordan la representación e identificación, respectivamente, de valores en notación decimal y fraccionaria, positivos y negativos, se observa una dificultad mayor para más del 50% de los estudiantes.

Por otra parte, considerando que cada grupo de valores (P1 (+), P1 (-), P2 (+), etc.) puede obtener desde 0 hasta 3 puntos, se puede determinar en qué puntajes se concentran mayor número de estudiantes. Por ejemplo, en el gráfico 5.11 puede verse qué porcentaje de estudiantes se concentra en cada puntuación. En la pregunta #1, en la representación de valores enteros negativos, la mayoría de estudiantes obtiene 0 o 3 puntos. También, parece ser que en la pregunta #4 un porcentaje alto de estudiantes se concentra en 0 o en 3 puntos. En la pregunta #1,

en el grupo P1 (+), el mayor porcentaje lo obtienen los estudiantes que logran acertar 3 valores. En el grupo P2 (-) se observa un porcentaje bastante cercano entre los estudiantes que aciertan 0 o 3 valores. En el grupo P2(+), se ve que más de un 50% de los alumnos acierta tres puntos.

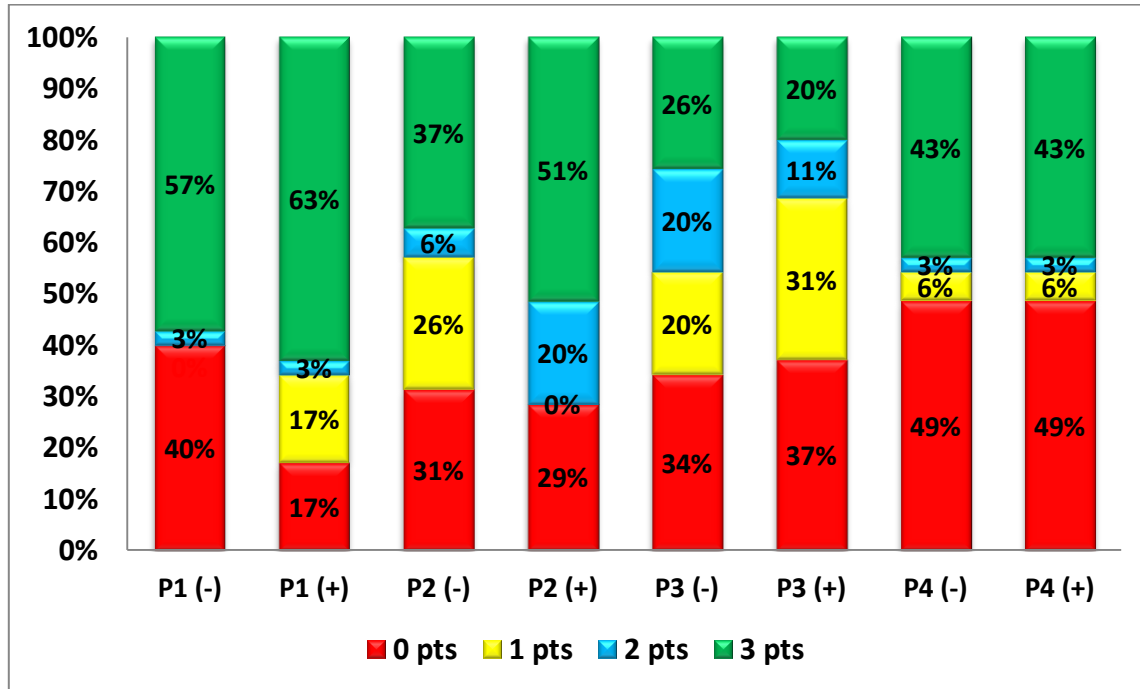


Gráfico 5.11: Porcentaje de aciertos, desde 0 hasta 3 puntos, en prueba diagnóstica específica aplicada en Puebla

El gráfico 5.12 muestra que las calificaciones obtenidas, en una escala del 0 al 10, se concentran en los valores que van desde el cero hasta el 5. Sin embargo, existe un alto número de estudiantes que obtiene calificaciones mayores que seis. Esto corresponde con los porcentajes de estudiantes que han obtenido calificaciones menores que seis; o mayores o igual a seis del gráfico 5.9.

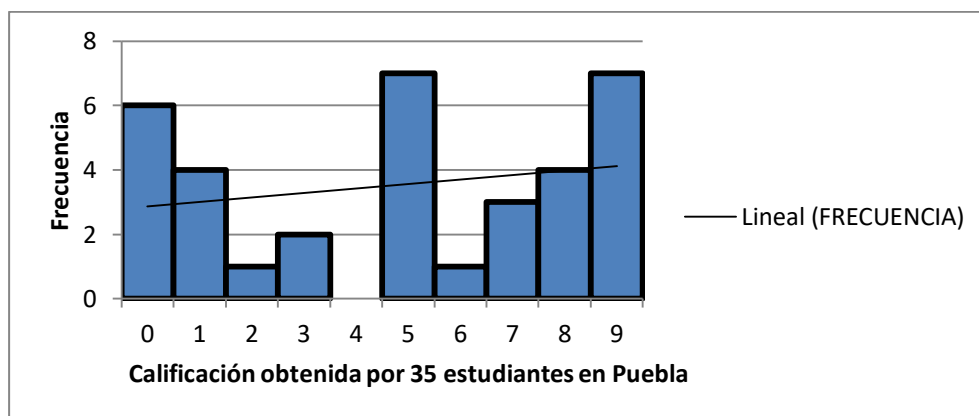


Gráfico 5.12: Frecuencia de las calificaciones obtenidas por 35 estudiantes que realizaron el diagnóstico en Puebla

5.5 Análisis de la información recolectada durante el laboratorio

Para organizar el trabajo en el laboratorio, se prepararon 11 equipos, los cuales se etiquetaron con E1, E2, etc. La distribución de las máquinas se presenta en la figura 5.16

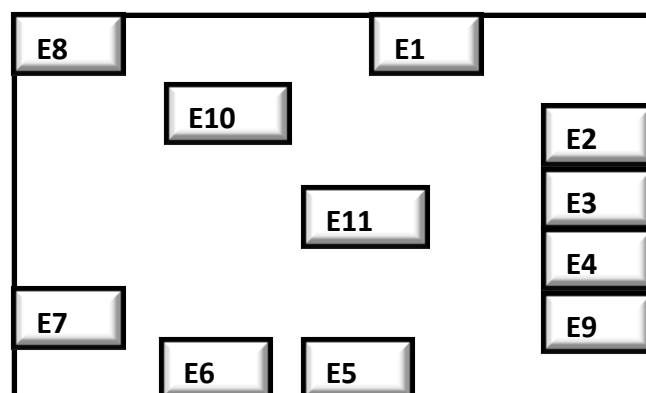


Figura 5.16: Distribución de estaciones de trabajo/CROQUIS

Se realizaron dos sesiones de laboratorio, en las que participaron 16 estudiantes en total. Los estudiantes participantes se representaron como B1, B2,..., B12, B36, B37, B38, B39. En total participaron 16 estudiantes de una escuela secundaria pública en Puebla, durante el laboratorio. Los estudiantes B1, B2, ..., B12 también realizaron la prueba diagnóstica, mientras que los estudiantes B36, B37, B38 y B39 sólo realizaron la prueba de laboratorio y la prueba final.

El laboratorio incluyó una serie de instrumentos para recolectar la información, entre ellos, un diferencial semántico, un recurso web interactivo, una guía de observación para el investigador, un cuestionario para el estudiante sobre su

experiencia con el recurso web, y una prueba final sobre el contenido curricular investigado. A continuación se analizará la información recopilada en cada uno de estos instrumentos.

5.5.1. Información introductoria a la actividad en el laboratorio

Antes de iniciar el trabajo de los estudiantes con el recurso web, se procedió a dar algunas indicaciones básicas sobre la forma en que se iba a interaccionar durante la sesión de laboratorio.

Se les indicó a los participantes que se iba a trabajar con algunas aplicaciones web divididas en siete niveles o momentos de aprendizaje.

Nivel 1: Identificación de números enteros en la recta numérica

Nivel 2: Representación de números enteros en la recta Numérica

Nivel 3: Identificación de números en notación decimal sobre la recta numérica

Nivel 4: Representación de números en notación decimal sobre la recta numérica

Nivel 5: Identificación de números en notación fraccionaria sobre la recta numérica

Nivel 6: Representación de números en notación fraccionaria sobre la recta numérica

Nivel 7: Lectura de una gráfica en el plano cartesiano (En este análisis no se incluyen los resultados obtenidos en el nivel 7 del recurso web).

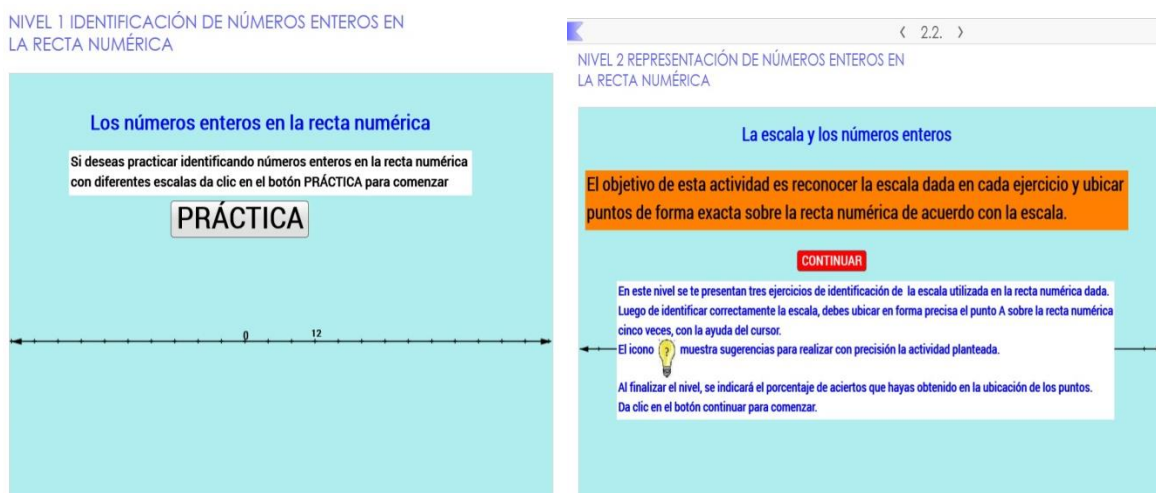


Figura 5.17: Pantallas de inicio de los niveles 1 y 2

Se mostró con el proyector parte de los algunos niveles, y además se dieron indicaciones que ayudaran a facilitar la interacción de cada estudiante con recurso web. Especialmente se realizó una breve demostración del nivel 1 y el nivel 2 (ver figura 5.17).

Además, se mencionó a los participantes que el propósito de la actividad era probar los materiales web desarrollados para capacitar a los estudiantes de nivel secundaria en las habilidades de identificar y representar (ubicar) gráficamente valores numéricos en diferentes notaciones sobre una recta numérica graduada con diferentes escalas. Asimismo, se mencionó que el recurso web se encuentra en etapa de desarrollo, y se encuentra en proceso de mejora. Se les animó a realizar comentarios que ayudaran a mejorar este material.

Se dieron algunas instrucciones generales sobre la interacción con el recurso (ver anexo 6), y se ejemplificó sobre lo siguiente:

- 1) Se le explicó que en los niveles 1, 3 y 5 se espera que el estudiante identifique y escriba el valor numérico representado sobre la recta. Para ello debe borrar el símbolo “?” y escribir el valor numérico correspondiente. Luego, debe presionar la tecla ENTER y por último, dar clic en el botón COMPROBAR (se debe dar un tiempo de espera). El mínimo de ejercicios que debe realizar para finalizar el nivel es de 10 ejercicios. Puede checar la ayuda que se presenta en un icono “?”
- 2) En los niveles 2, 4 y 6 se debe arrastrar y ubicar un punto hasta la posición que le corresponda sobre la recta de acuerdo con el valor dado en el ejercicio. Cuando haya ubicado el punto sobre la recta, debe dar clic en el botón Verificar. Puede checar la ayuda que se presenta en un icono  .
- 3) Los niveles 1 y 2 incluyen números enteros positivos y negativos en diferentes escalas, los niveles 3 y 4 se incluyen valores en notación decimal, y en los niveles 5 y 6 se incluyen, además, valores en notación fraccionaria positiva y negativa. Finalmente, en el último nivel se presenta un gráfico cartesiano que representa la relación entre el tiempo transcurrido y la distancia que recorre un individuo al salir y regresar a su casa.

- 4) Es importante que el estudiante sea capaz de identificar cuál es la escala presente en cada ejercicio, de modo que pueda utilizar esa información para calcular el valor que debe identificar o representar en cada momento.
- 5) La escala se refiere a la graduación de la recta, es decir, se deben observar las marcas ubicadas sobre la recta (“rayitas”) y determinar a qué distancia se hallan dos marcas consecutivas. Para lograrlo, en los ejercicios referidos a números enteros basta con observar los dos valores numéricos que se dan sobre la recta y con base en estos valores, calcular la distancia entre dos marcas consecutivas.
- 6) Se les indicó que llamaran al investigador cuando finalizaran cada nivel para capturar en fotografía la última pantalla.
- 7) Se les informó que al final del trabajo con la computadora, se les entregaría una prueba escrita y un cuestionario de opinión.



Figura 5.18: Los estudiantes reciben una introducción al trabajo que realizarían durante el laboratorio

En la figura 5.18 se observa los estudiantes de la segunda sesión sentados en plenaria, para recibir una introducción al laboratorio.

5.5.2. Observaciones generales realizadas por la investigadora durante el trabajo de laboratorio

A continuación, se muestra una síntesis de las observaciones realizadas durante la aplicación del laboratorio. En estas observaciones se analiza la interacción de los estudiantes durante el laboratorio. Para referirse a un estudiante específico, se escribe el código que representa al estudiante y entre paréntesis se escribe el código

del equipo en el que se ubicó durante el laboratorio. Por ejemplo, B1 (E1), indica que se trata del estudiante B1, ubicado en la computadoraE1.

Primera sesión.

Los estudiantes fueron citados a las 12 m.d., de acuerdo con la disponibilidad del laboratorio. Durante esta sesión participaron los estudiantes B1, B2, B3, B4 y B5. Estos fueron los únicos que contaban con permisos firmados por sus padres para salir de la institución educativa y trasladarse al laboratorio de estadística de la BUAP. Todos ellos realizaron previamente la prueba diagnóstica y además, asistieron de manera voluntaria a la universidad junto con el coordinador académico de la secundaria. Se procede a dar la introducción respectiva. Luego, antes de pasar a su respectiva estación de trabajo, cada estudiante firma la hoja de asistencia y completa el diferencial semántico.

Al principio, algunos presentan dificultades en la precisión para ubicar valores en la recta. En general, con relación a los participantes, se observa que van ejecutando cada nivel con cuidado y dedicación. Por otra parte, se observa que no hacen uso de la hoja de instrucciones que se les ha entregado al llegar al laboratorio, de tal forma que no recurren a algunas sugerencias citadas en este instrumento. Más bien, se guían por indicaciones dadas en la introducción realizada por la investigadora. A su vez, se percibe motivación general. Inclusive, quieren subir el porcentaje de aprovechamiento, para lo cual ejecutan nuevamente algunos niveles. Cuatro de los estudiantes solicitan muy poca o ninguna ayuda de la investigadora, excepto el estudiante B4. Sólo llaman cuando han finalizado cada nivel, para que capture la foto del porcentaje obtenido. Algunos aspectos específicos observados fueron:

- B1 (E1). Le fue bien. Obtuvo 100% en varios de los niveles ejecutados.
- B2 (E2). No leía las sugerencias, al comienzo dejó incompleto el primer nivel, creía que sólo debía realizar un ejercicio (identificar la ubicación gráfica de un punto).
- B3 (E7). Mostró habilidad en la ejecución de los niveles. Realizó las actividades con mucha seguridad.

- B4 (E8). Preguntaba ante cualquier duda.
- B5 (E9). No leía sugerencias. Al principio creyó que sólo debía realizar un ejercicio de identificación gráfica en el nivel 1. También, presenta problemas de precisión en la ubicación de un valor entero negativo.

Con respecto al recurso web, se observó que dos estudiantes, al inicio, se confundieron pensando que el nivel uno sólo consistía en realizar un ejercicio. Esto hizo necesario incluir en las instrucciones iniciales algunas observaciones adicionales sobre la interacción con el recurso web. Por ejemplo, especificar que al finalizar el primer nivel aparecería un botón denominado “Terminar práctica” que podría activarse cuando habían realizado un mínimo de 10 ejercicios, el cual daba opción de finalizar la práctica, si lo deseaban. También se aclaró que podían realizar más práctica antes de presionar este botón, para concluir el nivel uno.

También se observó que algunas sugerencias dadas en la interfaz (iconos de ayuda) no fueron tomadas en cuenta. Estas sugerencias pretendían facilitar una ubicación más precisa de los puntos en los niveles 2, 4 y 6. La actividad finaliza a las 2 p.m.

Segunda sesión.

Se convoca un nuevo grupo de estudiantes para las 10 a.m. En esta sesión participaron los estudiantes B6, B7, B8, B9, B10, B11, B12, B36, B37, B38 y B39. Sólo los estudiantes B6, B7, B8, B9, B10, B11 y B12 habían realizaron previamente la prueba diagnóstica. En general, los once estudiantes asistieron de manera voluntaria a la universidad junto con el coordinador académico de su institución. La sesión se inicia puntualmente a las 10 a.m. Por lo que se procede a dar las instrucciones. Se toman en cuenta dificultades presentadas en la sesión anterior al realizar la introducción en la plenaria. Se procede a demostrar brevemente la dinámica de trabajo que deberán seguir en cada nivel. Especialmente, en el momento de introducir su respuesta en los niveles 1, 3 y 5. Sobre el arrastre de los puntos y la precisión. Además, se les indicó que debían llamar a la investigadora para tomar foto en la última pantalla de cada nivel. Antes de pasar a trabajar en su respectiva estación, cada estudiante firma la hoja de asistencia y completa el diferencial semántico.

Se les hace entrega de la hoja de instrucciones, la cual revisan para dar inicio al trabajo con el recurso web. En general, se observa mucho entusiasmo en el trabajo con el recurso web. Al inicio, algunos estudiantes tuvieron duda de cómo pasar al siguiente nivel. Luego, trabajaron fluidamente el resto de niveles. De modo que siguen indicaciones dadas en la introducción, por lo que se realizan adecuadamente los niveles 1, 3 y 5. Sólo se presentan dificultades en la precisión para ubicar el punto sobre el lugar correspondiente de la recta en los niveles 2, 4 y 6 del recurso web. Algunos aspectos específicos observados para cada estudiante fueron:

- B6 (E5) Se motivaba al tener respuestas correctas.
- B7 (E7) Trabajó muy concentrada en todo momento. No realizó preguntas. En general, trabajó muy bien. Obtuvo excelentes puntajes. Como le sobró mucho tiempo, ejecutó nuevamente el nivel 4 para mejorarlo de 64% al 100%.
- B8 (E8) Muy participativo. Dio muchas sugerencias, verbalmente y por escrito, para mejorar el recurso web. Además, el estudiante E8 hizo varias sugerencias.
- B9 (E6) Muy atento y concentrado en la actividad que realizaba.
- B9 (E9) y B39 (E11). Solicitaron ayuda con bastante frecuencia.
- B10 (E1) Presentó muchas dificultades en la precisión.
- B11 (E2) Se distraía un poco, pero trataba de mejorar su puntaje.
- B12 (E9) Le costó entender el manejo del recurso, y presentaba problemas para reconocer la escala, se distraía mucho con B37 (E4), por lo cual avanzaba lentamente.
- B36 (E3) Se distraía, y le hablaba o preguntaba mucho a B11 (E2), pues ambas máquinas eran contiguas.
- B37 (E4) Se distraía bastante. No estaba segura de cuándo o cómo finalizar el nivel. Hablaba mucho con B12 (E9), pues ambas máquinas eran contiguas.
- B38 (E10) Mostró habilidad en general. No tuvo dudas para trabajar en el recurso web.
- B39 (E11) Tuvo muchas dificultades con el equipo en el que trabajó, lo cual le dificultó el manejo del recurso. También presentaba problemas en la

comprensión de la escala. Se equivocó mucho en lo relacionado con decimales y fraccionarios. (La computadora en la que trabajó era una laptop y al principio no se disponía de un mouse.)

Comentarios de B8 (E8)

El estudiante B8 aportó algunos comentarios que consideró pertinentes para posibles mejoras del recurso web:

- *Dar una opción de repaso para el alumnado en dado caso de requerir mayor conocimiento.*
- *Tomen en cuenta que el valor que se quiere ubicar céntrenlo y la medida en que se divide la recta no sea tan llamativa.*
- *Cambiar los colores se llegan a marear (colores más vivos no oscuros) “Para llamar el interés o atención”*
- *Un punto de vista importante es que automáticamente te deje en 0.5, ya que si lo colocas mal con el ratón da variaciones como 0.58, 0.68.... les recomiendo que se centre automáticamente.*
- *Para que el alumno se acostumbre a decimales y fracciones pongan ejercicios de igualaciones.*
- *Otro punto importante sería el ver por qué tuvieron error y explicarlo o dar a entender el razonamiento*

En general, el trabajo de laboratorio se realizó de manera individual como puede observarse en la figura 5.19.

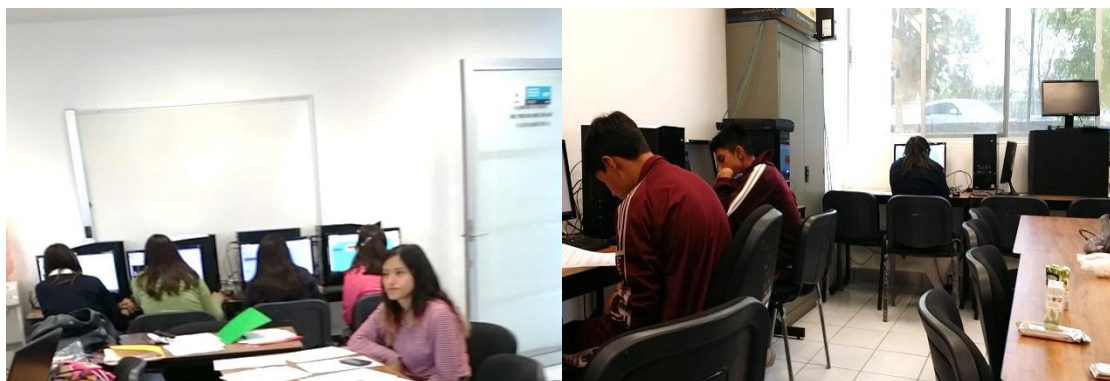


Figura 5.19: Los estudiantes trabajan individualmente durante el laboratorio

5.5.3. Diferencial semántico

Antes de iniciar la interacción de los estudiantes con el recurso web se aplicó un instrumento denominado diferencial semántico para conocer la percepción de los estudiantes sobre el uso de la computadora como recurso de apoyo al aprendizaje de la matemática (ver anexo 11). Este instrumento se ha aplicado a los estudiantes participantes en el estudio, como una prueba del instrumento, la cual se espera que pueda ser administrada para un estudio posterior con un mayor número de participantes. La intención fue conocer la motivación inicial de los participantes hacia la actividad que se les proponía realizar.

El diferencial semántico es un procedimiento destinado a explorar las dimensiones del significado. Hernández-Sampieri et al. (2014, p. 247) lo describe como una serie de adjetivos extremos que califican un objeto de actitud. De manera que el participante debe calificar al objeto de acuerdo con un conjunto de adjetivos bipolares. Este instrumento fue adaptado del diferencial semántico aplicado en un trabajo de investigación referente a la aplicación de una propuesta, desarrollada mediante guías didácticas apoyadas en el uso del geogebra (Brenes y Gutiérrez, 2010). El instrumento fue diseñado tomando como criterios: la pertinencia de los adjetivos bipolares con el tema de la investigación y facilidad de comprensión de los términos por parte de los sujetos participantes en la investigación. El instrumento, que se muestra en el anexo 11, contó con ocho parejas de adjetivos bipolares, con siete opciones de respuesta cada una, distribuidas desde 1 hasta el 7. De acuerdo con esta valoración, el 1 constituye una actitud muy negativa y el 7 una actitud muy positiva. El valor 4 se asocia con una posición indiferente.

Se han realizado algunos cálculos para el análisis de los datos con ayuda de la hoja electrónica Excel. Estos cálculos incluyen la media obtenida en cada par de adjetivos para la muestra de 16 estudiantes. Las categorías estaban definidas de acuerdo con el valor p de la media en cada pareja de adjetivos bipolares (ver tabla 5.3).

Tabla 5.3: Cálculo de la valoración de la media p en cada pareja de adjetivos

Media	Valoración
$1 \leq p < 2$:	actitud muy negativa
$2 \leq p < 3$:	actitud negativa moderada
$3 \leq p < 4$:	actitud negativa baja
$4 \leq p < 5$:	actitud positiva baja
$5 \leq p < 6$:	actitud positiva moderada
$6 \leq p < 7$:	actitud muy positiva

De acuerdo con estos resultados, y utilizando las categorías previamente definidas, se obtiene la siguiente clasificación, reflejada en la tabla 5.4.

Tabla 5.4: Valoración de las parejas de adjetivos bipolares

Parejas de adjetivos bipolares	Media	Valoración (Actitud)
Aburrido – Divertido	5.44	positiva moderada
Ineficaz – Eficaz	6.20	muy positiva
Sin valor – Valioso	5.94	positiva moderada
Feo – Bonito	4.94	positiva baja
Complicado – Sencillo	5.53	positiva moderada
Innecesario – Necesario	5.94	positiva moderada
Desagradable – Agradable	5.56	positiva moderada
Irrelevante – Relevante	6.00	muy positiva

Se observa en la tabla 5.4 que la actitud de los estudiantes sobre el uso de la computadora como recurso de apoyo al aprendizaje de la matemática es, en general, positiva con algunas variantes. Su actitud es muy positiva en cuanto a opinar que “el uso de la computadora como recurso de apoyo al aprendizaje de la matemática es relevante y eficaz”. Luego, su actitud es moderadamente positiva para considerar que es “divertida”, “valiosa”, “sencilla”, “necesaria” y “agradable”. Por otra parte, su actitud es positiva baja al considerar que el uso de la computadora como recurso de apoyo al aprendizaje de la matemática es “bonito”.

Finalmente, se calcula el promedio general dado por los estudiantes al uso de la computadora como recurso de apoyo al aprendizaje de la matemática. Esto se puede realizar de dos maneras. La primera, se logra calculando la valoración promedio dada por cada estudiante; y luego, calculando la media dada entre todos los participantes. La segunda forma corresponde con calcular el promedio de las valoraciones obtenidas por cada pareja de adjetivos bipolares. En ambos casos se obtiene una media de **5.69**. Porcentualmente, esta media corresponde a un 81% de valoración en la actitud de los estudiantes hacia el uso de la computadora como recurso de apoyo al aprendizaje de la matemática. Esto nos revela una buena disposición para el trabajo de laboratorio empleando la computadora como apoyo.

5.5.4. Análisis de las calificaciones obtenidas por los estudiantes en los seis primeros niveles del recurso web.

Con las imágenes capturadas en cada nivel ejecutado por los participantes en el laboratorio, se procede a calcular su calificación general en una escala del 0 al 10 (ver anexo 8). La tabla 5.5 muestra la calificación lograda por cada uno de los 16 participantes.

Tabla 5.5: Calificación general obtenida por los estudiantes, mediante el recurso web.

Estudiante	ESCALA
B1	9.8
B2	8.4
B3	9.5
B4	5.8
B5	8.0
B6	8.8
B7	10.0
B8	9.4
B9	7.5
B10	6.6
B11	7.1
B12	6.4
B36	7.8
B37	5.7
B38	9.3
B39	6.1

De las calificaciones mostradas en la tabla 5.5 se observa que sólo dos estudiantes no logran alcanzar un seis en su calificación, aunque se hallan muy cerca de dicha calificación. Estos estudiantes, B37 y B4, mostraron bastante distracción durante la prueba del recurso web. Sin embargo, a pesar de no haber logrado la calificación de seis en su promedio de aprovechamiento del recurso, estos estudiantes cuestionaban sobre los ejercicios que debían realizar en cada nivel, lo cual les permitió entender algunos aspectos que no comprendían previamente.

En el gráfico 5.13 se puede ver que un 87.5% de los estudiantes logra una calificación promedio mayor que seis, durante su interacción con los seis niveles del recurso web sobre la representación e identificación de números enteros, fraccionarios y decimales, positivos y negativos en la recta numérica, con una escala dada.

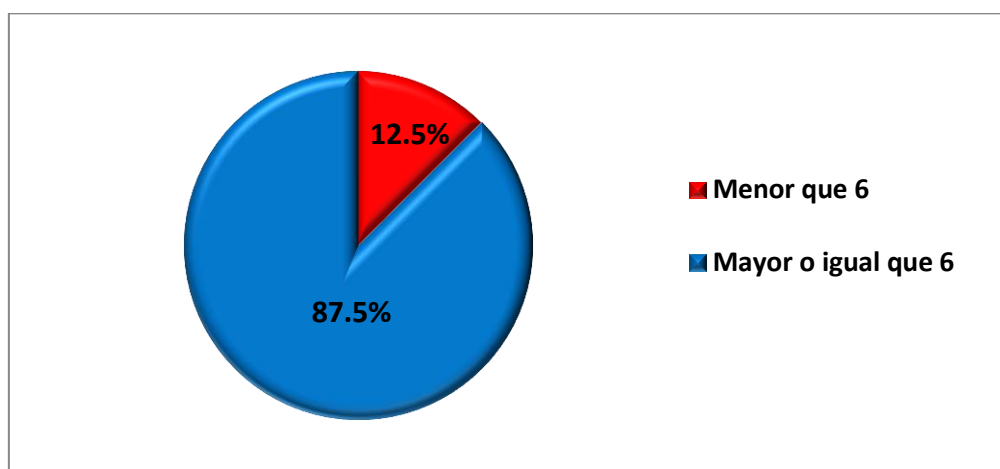


Gráfico 5.13: Calificación promedio obtenida por los estudiantes en los seis primeros niveles del recurso web

En la figura 5.20 se observa al estudiante B9, quien obtiene un 73% en el cuarto nivel, donde representa valores dados en notación decimal sobre una recta graduada.

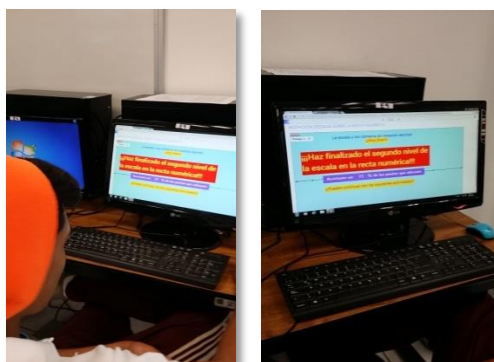


Figura 5.20: El estudiante B9 resolviendo el cuarto nivel.

5.5.5. Información de la prueba final

Al finalizar el trabajo de los estudiantes con el recurso web, se les entregó una prueba final (Ver anexo 9) que constaba de cuatro preguntas. Esta prueba era equivalente a la prueba diagnóstica específica aplicada antes de la sesión de laboratorio. En la prueba final participaron 16 estudiantes en total. De ellos, sólo 12 alumnos habían realizado la prueba diagnóstica. Para calificar esta prueba se utilizó una escala de 0 al 10.

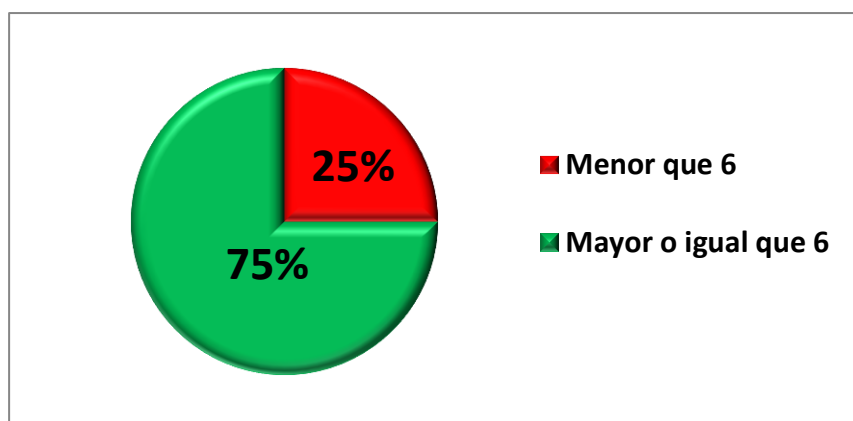


Gráfico 5.14: Calificación promedio obtenida en la prueba final, por los 16 estudiantes que participaron en el laboratorio

En el gráfico 5. 14 se muestra que 75% de los participantes en el laboratorio obtuvo una calificación mayor o igual que seis en la prueba final. De estos estudiantes interesa analizar aquellos que realizaron también la prueba diagnóstica específica, con el fin comparar su evolución en el desempeño de los contenidos

correspondientes a la identificación y representación gráfica de valores enteros, decimales, fraccionarios, positivos o negativos sobre la recta numérica.

Un aspecto que es importante mencionar, sobre la realización de esta prueba, es que por haber sido respondida al finalizar la sesión de laboratorio, pueden haber influido en los resultados factores como el cansancio y la limitación de tiempo para completarla adecuadamente. Por ejemplo, las estudiantes B12 y B37 (equipos E4 y E9) se hallaban ubicadas en estaciones contiguas, su avance por los diferentes niveles se dio de manera muy lenta debido a que platicaron de manera casi continua, de modo que se dificultó su concentración en la ejecución de las actividades que presentaba el recurso web, lo cual llevó a que realizaran de manera apresurada la prueba final. En el caso de la estudiante B39, su avance también fue muy lento durante la ejecución de cada nivel, debido a dificultades en el manejo del equipo que utilizó. Lo cual afectó su desempeño tanto en sus resultados logrados en cada nivel del recurso, así como en el poco tiempo con el que resolvió la prueba final. Pero en general, se observó un desempeño aceptable por el grupo.

Tabla 5.6: Calificación obtenida por los estudiantes en la prueba final.

Estudiante	Prueba final
B1	9.6
B2	7.9
B3	10.0
B4	7.5
B5	8.8
B6	8.8
B7	9.6
B8	9.6
B9	5.8
B10	6.3
B11	8.3
B12	3.8
B36	8.3
B37	2.5
B38	7.9
B39	2.9

La tabla 5.6 muestra la calificación promedio de cada estudiante que participó en el laboratorio. De las calificaciones mostradas en la tabla 5.6 se observa que cuatro estudiantes alcanzan calificaciones por debajo de seis. Estos estudiantes, B9, B12, B37 y B39. En el caso del estudiante B9, se observó, en general un buen desempeño de su parte en los ítems 2, 3 y 4; sin embargo, omitió la respuesta a la pregunta #1 (en blanco); lo cual influyó en su calificación. En el caso de los estudiantes B12, B37 y B39, su bajo desempeño en la prueba final pudo ser influenciado por las situaciones comentadas anteriormente.

5.5.6. Opinión de los estudiantes sobre el trabajo realizado en el laboratorio

Al concluir la prueba final, se solicitó a los participantes que respondieran a un cuestionario (ver anexo 7) con el fin de ayudar a mejorar este material de enseñanza-aprendizaje.

Pregunta 1: Escribe dos aspectos del material que NO te agradaron.

Aunque el recurso permitía cierto grado de tolerancia en la precisión para representar los valores dados, ocho estudiantes mencionan “la exactitud” como un factor que no fue de su agrado. Otras opiniones mencionan aspectos del formato como los colores utilizados en la interface y el tamaño de las rectas dadas.

Pregunta 2: Escribe dos aspectos del material que fueron de tu agrado

Las opiniones giran sobre aspectos que agradaron. Siete estudiantes hacen referencia a “la facilidad de manejo” del recurso. Por ejemplo, B10 menciona que “*La forma de ingresar los resultados y la forma de ubicar los números es muy cómodo*”, B5 dice que “Su facilidad para manipular”. Otros estudiantes hacen referencia a “la comprobación de las respuestas”, “las sugerencias” que estaban a disposición en la interface. Algunos mencionan la posibilidad de ensayar y mejorar el puntaje mediante el botón de reinicio.

El recurso interactivo en los niveles 1, 3 y 5, esperaba que los estudiantes identificaran el valor correspondiente a un punto P dado sobre la recta, de manera que en estos niveles ellos debían escribir en un lugar específico el valor

correspondiente. A su vez, en los niveles 2, 4 y 6, la tarea que debían ejecutar consistía en arrastrar un punto A hasta un lugar en la recta que representara lo más preciso posible el valor dado en el ejercicio.

Pregunta 3: ¿Cuál de los niveles te fue más difícil de realizar? ¿Por qué?

En cuanto a dificultad, la mayoría hace referencia a las fracciones y a los números en notación decimal, por ejemplo, B9 menciona que *“El nivel 3 porque no me sé todas las décimas e igual la 4”*, B11 dice que *“2.4 y 2.6 Porque no encontraba el valor o los valores en la recta”*. Cabe mencionar que algunos estudiantes hacían referencia a que *“no encontraban el valor en la recta”*, debido posiblemente a que su dificultad consistía en una deficiente interpretación de los valores fraccionarios. Por ejemplo, interpretaban $\frac{3}{2}$ como 3.5, en unos casos; y lo interpretaban como $3\frac{1}{2}$ en otros. De manera que no comprendían que se podía calcular como el cociente de 3 dividido entre dos, o como tres veces $\frac{1}{2}$, entre otras formas.

Pregunta 4: ¿Cuál de los niveles te fue más fácil de realizar? ¿Por qué?

Algunos se refirieron a los niveles 1, 2 y 3 debido a que el punto P ya estaba dado; y sólo debían identificar y escribir el valor. Otros, se referían al nivel 1 por tratarse de números enteros. En general, la mayoría coincide en NO mencionar el nivel 6. Esto puede deberse a que en este nivel los estudiantes debían representar los valores dados en notación fraccionaria sobre la recta numérica. Esto implicaba un nivel de dificultad mayor que los primeros cinco niveles debido a que el denominador del valor fraccionario dado No coincidía en la mayoría de casos con la graduación de la recta dada. Aquí se pone en evidencia el temor que tienen los estudiantes hacia esta notación fraccionaria.

Pregunta 5: ¿Cómo evalúas el material de trabajo del laboratorio? En una escala del 0 al 10

Los estudiantes valoraron el recurso con puntajes que iban desde el 7 hasta el 10. Considerando que la valoración máxima es 10, se ha obtenido aproximadamente un 91% de valor asignado al recurso por los estudiantes. Esta calificación parece mostrar que los estudiantes tuvieron una actitud bastante positiva con respecto al

recurso web, a pesar de las dificultades que pudieron experimentar durante el laboratorio.

Pregunta 6: La ubicación de puntos, sobre una recta numérica, propuestos en los 6 niveles, comparado con los ejercicios que realizaste en la prueba diagnóstica, fueron: Más difíciles (MD), Más fáciles (MF) o Muy parecidos (MP).

Se observa que diez estudiantes consideran los ejercicios propuestos como “Muy Parecidos” a los que realizan en clase de matemáticas, mientras que cuatro de ellos los consideran “Más Fáciles”, y dos estudiantes los catalogan como “Más difíciles”. Estas respuestas evidencian que los estudiantes se sintieron familiarizados con las actividades que se les solicitaba realizar para completar cada nivel. Esto es de gran ayuda, sobre todo porque probablemente fue un factor que evitó la resistencia de los estudiantes hacia la ejecución de las tareas solicitadas en cada nivel.

Pregunta 7: ¿Qué opinas con respecto al uso de las aplicaciones dinámicas para resolver las situaciones propuestas?

Once estudiantes opinaron que las aplicaciones dinámicas facilitan el aprender. Los estudiantes hicieron alusión en su mayoría a la “facilidad de uso” o “facilidad para aprender”. Por ejemplo, estas son algunas respuestas:

B1: *“Estas son más fáciles para estudiar”*

B4: *“Que lo vuelve fácil y sencillo”*

B7: *“Considero que es un apoyo muy importante, un refuerzo cuando la comprensión de un tema similar no es más complicado”.*

B11: *“Que las aplicaciones nos ayudan a resolver situaciones de manera práctica. Fácil.”*

Pregunta 8: La realización de las actividades en los diferentes niveles ¿Te ha ayudado a mejorar tu habilidad para identificar el valor que le corresponde a un punto dado sobre una recta numérica con lápiz y papel? Explica.

Esta pregunta hace referencia a los niveles 1, 3 y 5, donde los estudiantes deben identificar el valor correspondiente a un punto dado en la recta. 14 estudiantes responden que sí es más fácil identificar el valor que corresponde a un punto dado.

Algunos coinciden en que les sirve de repaso general porque les ayuda a practicar.

Por ejemplo:

B2: *“Sí, yo creo que con esta práctica de identificar este tipo de números ha mejorado, ya que no siempre lo retomo en la escuela”.*

B5: *“Sí, porque al ir resolviendo más problemas fue más sencillo”*

Pregunta 9: La realización de las actividades en los diferentes niveles ¿Te ha ayudado a mejorar tu habilidad para ubicar puntos con mayor precisión sobre una recta numérica con lápiz y papel? Explica.

Esta pregunta se refiere a los niveles 2, 4 y 6 que solicitan ubicar un punto en la recta, de acuerdo con un valor dado. También 14 estudiantes responden que sí se mejora la habilidad para ubicar puntos con mayor precisión, en una prueba escrita. Sin embargo, las respuestas dadas parecen referirse más a las actividades realizadas durante el laboratorio en el recurso interactivo, que a una prueba escrita. Por ejemplo:

B1: *“Sí, ya que se puede distinguir más fácil de manera visual”*

B8: *“Sí, pero hay que acostumbrarse ya que es diferente manual a una pc”*

B9: *“Sí, porque te mostraba su valor en decimal y fracción”*

B36: *“Sí, porque te mostraba su valor”*

Pregunta 10: ¿Requeriste ayuda para resolver las actividades en la computadora? ¿Qué tipo de ayuda?

Se espera que el recurso web brinde un poco de autonomía al estudiante mientras efectúa las actividades. De manera que su interacción con el recurso le ayude a rectificar sus respuestas y a encontrar modos más sencillos de llevar a cabo las actividades. En las respuestas dadas, nueve estudiantes manifiestan que no han requerido ninguna ayuda. Seis de ellos expresaron que requirieron ayuda sólo en alguna situación específica. Por ejemplo, B5 responde “Sí, para afirmar mis respuestas en el ejercicio 5” y B39 expresa que “Si, un poco de orientación”.

Pregunta 11: ¿Has aprendido algo nuevo con la realización de las actividades propuestas en el recurso web? ¿Qué aprendiste?

Se encuentran 14 respuestas afirmativas sobre el considerar que “han aprendido algo nuevo” con la realización de las actividades propuestas en los niveles ejecutados. Algunas respuestas fueron:

B2: “Sí, aprendí a cómo usar la computadora para este tipo de problemas”

B3: “Como ubicar puntos en las rectas”

B5: “Sí, a ubicar mejor y a ser más veloz”

B7: “Sí, con respecto al sistema, las ventajas que ha de tener este materia y cual tema, aprendí qué es y cómo identificar la escala”

B11: “Sí, a ubicar correctamente las fracciones”.

B36: “Sí, mejore y ubiqué correctamente las fracciones”

5.5.7. Análisis comparativo del desempeño de algunos estudiantes en la prueba diagnóstica (PD) y la prueba final (PF). Descripción de errores.

En este apartado fueron considerados sólo los estudiantes que realizaron la prueba diagnóstica y la prueba final. Los estudiantes que participaron en ambas pruebas fueron B1, B2, B3,....., B12.

En especial, se analizan algunos casos en los que se hayan dado cambios que puedan atribuirse a la participación en el laboratorio llevado a cabo bajo la propuesta didáctica.

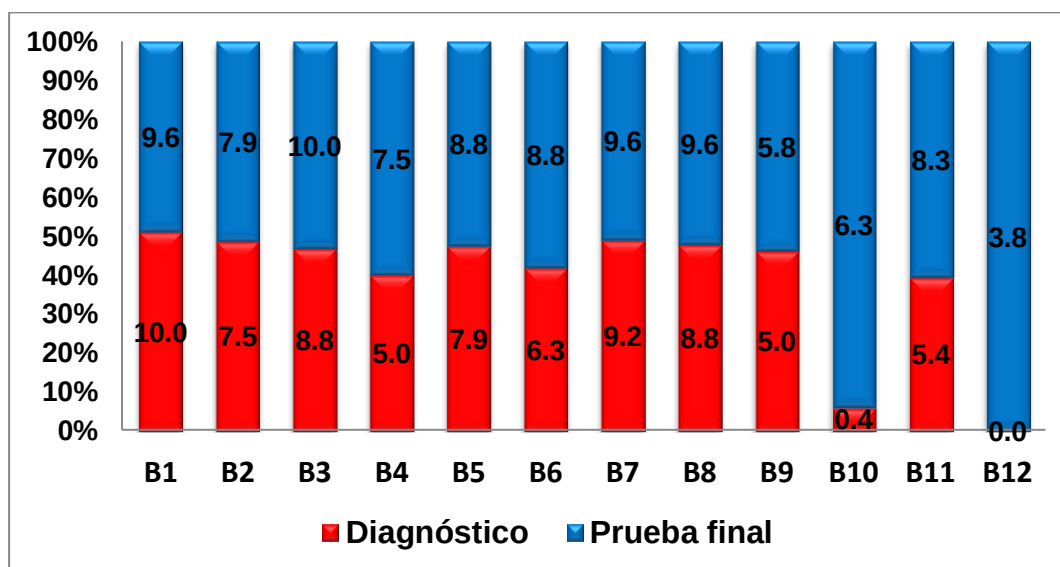


Gráfico 5.15: Calificación promedio obtenida en la prueba final, por los 16 estudiantes que participaron en el laboratorio

En el gráfico 5.16 se observa que los estudiantes B1, B2, B7 y B9 mantuvieron calificaciones muy cercanas en ambas pruebas. En este análisis interesa describir algunas características de los casos que presentan una mejoría notable en la calificación obtenida durante la prueba final. Se consideran los estudiantes B4, B6, B10, B11 y B12.

5.5.8. Errores identificados en las respuestas dadas por los estudiantes

Antes de realizar una descripción detallada de estos cinco estudiantes, se presenta una breve descripción de los errores encontrados en la prueba diagnóstica realizada por el grupo de 35 estudiantes de la secundaria técnica N° 60 (ver anexo 5 y anexo 10).

En la prueba diagnóstica (PD) aplicada en la secundaria pública de Puebla, se encuentran los siguientes detalles:

- 20 estudiantes utilizan exclusivamente notación decimal al identificar los valores correspondientes a los puntos dados en la pregunta #4. Aunque esto no constituye un error en sí mismo, puede ser una evidencia del poco dominio de los estudiantes para trabajar en la notación fraccionaria.
- 17 estudiantes presentan errores en la representación y/o identificación de valores en notación fraccionaria y/o decimal.
- 9 estudiantes presentan errores en el uso del signo negativo “-”.
- 5 estudiantes fallan ubicación de valores negativos por “saltar” algún valor en su lectura de la escala.
- 12 estudiantes no dibujan alguna marca gráfica al representar valores dados en la recta. De manera que escriben la etiqueta del valor representado, pero no indican con una marca, que puede ser un punto, flecha o raya, entre otras, el lugar aproximado donde se ubica dicho valor.
- 8 estudiantes dejan preguntas “en blanco”. Puede ser desde una pregunta hasta toda la prueba.
- 6 estudiantes escriben valores en la recta, de modo que no se logra identificar algún criterio específico para su ubicación.

- 10 estudiantes representan o identifican valores utilizando una escala distinta a la correspondiente con la recta dada.
- 3 estudiantes invierten el orden de algunos de los valores representados.

En el anexo 10 se realiza una breve descripción sobre algunas de las dificultades observadas, tanto en la prueba diagnóstica (PD) como en la prueba final (PF), en los doce estudiantes que realizaron ambas pruebas. Estos detalles permiten determinar y comparar algunas mejoras alcanzadas por los estudiantes en la ejecución de la prueba final.

Estudiante B4

En la pregunta #3 de la prueba final, ubica cinco valores fracciones o decimales correctamente, mientras que en la prueba diagnóstica dejó los ítems #3 y #4 sin respuesta (figura 5.21).

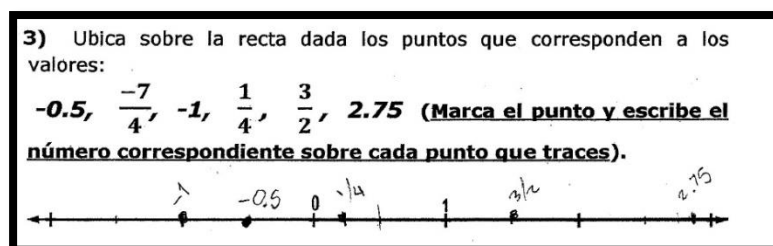


Figura 5.21: Respuesta del estudiante B4 en la pregunta N° 3

Estudiante B6

En la pregunta #3 de la prueba diagnóstica sólo acierta la ubicación de 2.75 y -0.25, pero falla al ubicar -2.5 aproximadamente en -1.5. También falla la ubicación de $-3/2$, $5/4$ y $1/2$ (figura 5.22). En general, se evidencia un desconocimiento del orden en que deben ser ubicados los valores en la recta. Este estudiante logra mejorar el puntaje en las preguntas #2, #3 y #4. Sólo muestra un error del signo “-” en un valor del ítem #2. En la #3 realiza una mejor aproximación gráfica de la representación de los valores $1/4$ y $3/2$. En la #4 aproxima muy bien los valores, y utiliza signo “-” correctamente.

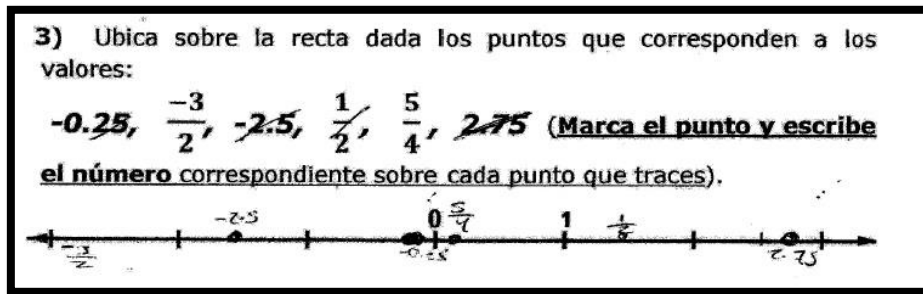


Figura 5.22: Respuesta del estudiante B6 en la pregunta N° 3

En la pregunta #3 de la prueba final aproxima con precisión cuatro valores. Sólo falla precisión para ubicar $\frac{1}{4}$ y $\frac{3}{2}$ (figura 5.23). Sin embargo, muestra un orden correcto en la ubicación de todos los valores en la recta.

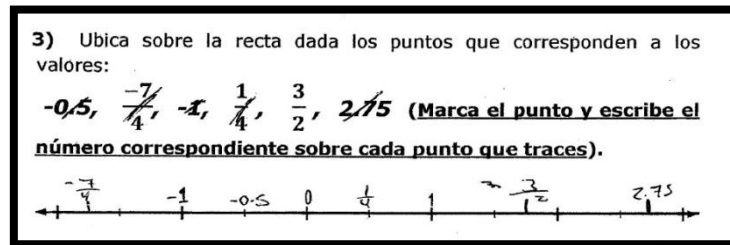


Figura 5.23: Respuesta del estudiante B6 en la pregunta N° 3

En la pregunta #4 de la prueba diagnóstica falla el signo “-” en los valores correspondientes con E y F (figura 5.24).

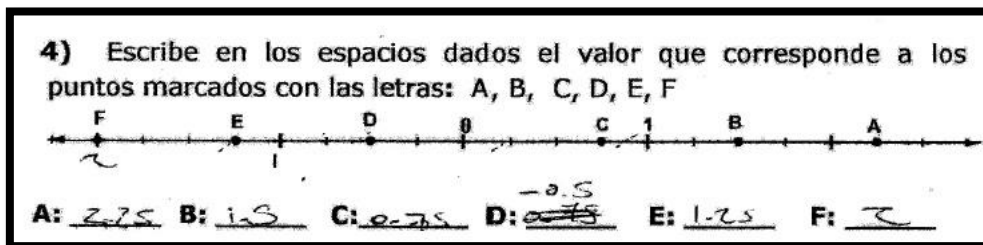


Figura 5.24: Respuesta del estudiante B6 en la pregunta N° 4

En la pregunta #4 de la prueba final, aproxima los valores usando redondeo, y utiliza el signo “-” correctamente.

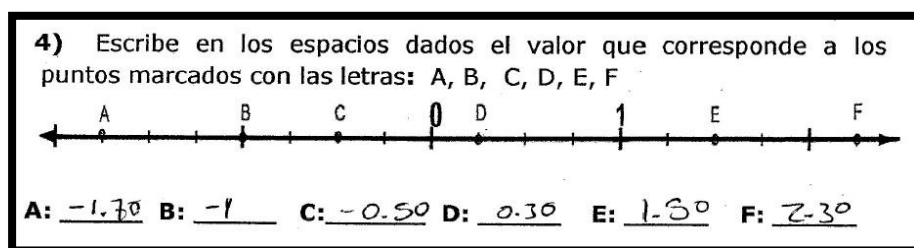


Figura 5.25: Respuesta del estudiante B6 en la pregunta N° 4

Estudiante B10

Estudiante B10: En la pregunta #1 de la prueba diagnóstica, ubica los valores negativos a la izquierda del cero; y los positivos a la derecha del cero. Sin embargo, en ambos casos, falla el orden al escribir valores de mayor a menor de izquierda a derecha a cada lado del cero (figura 5.26).

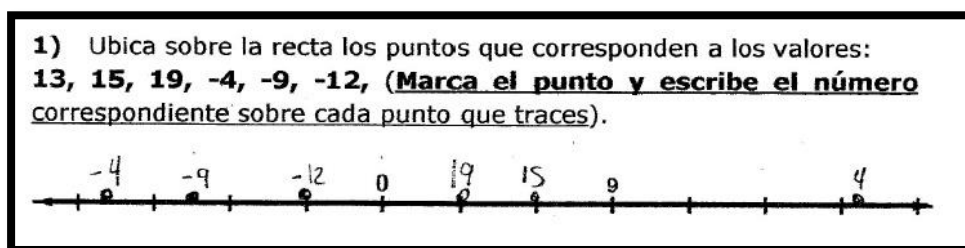


Figura 5.26: Respuesta del estudiante B10 en la pregunta N° 1

En la pregunta #1 de la prueba final, escribe los valores en orden. Aunque sólo representa bien el valor 8, ahora ubica los valores en orden correcto de menor a mayor. Aún no sabe utilizar la escala como herramienta para representar gráficamente un valor en la recta. Utiliza escala cinco en eje negativo (figura 5.27).

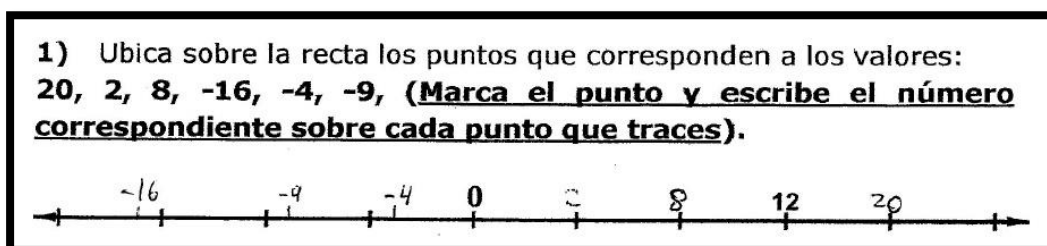


Figura 5.27: Respuesta del estudiante B10 en la pregunta N° 1

En la pregunta #2 de la prueba diagnóstica, se puede observar que para los valores positivos correspondientes con D, E y F escribe algunos números con el orden invertido, de acuerdo con la ubicación en la recta (figura 5.28).

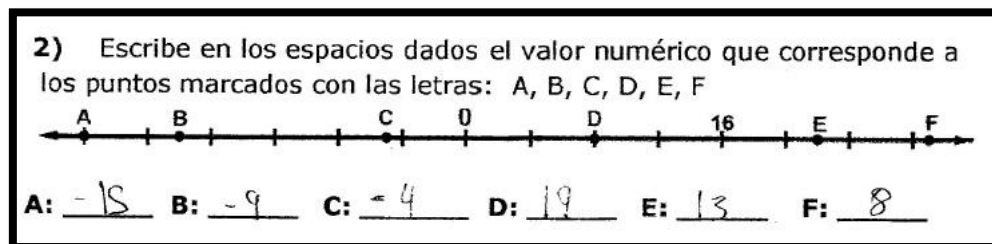


Figura 5.28: Respuesta del estudiante B10 en la pregunta N° 2

En la pregunta #2 de la prueba final identifica los valores con mayor precisión (figura 5.29).

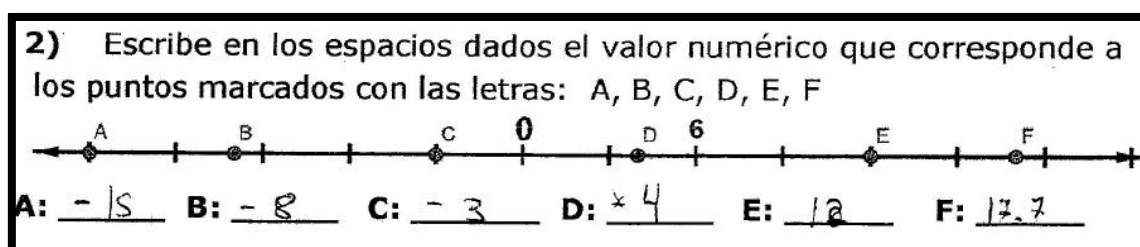


Figura 5.29: Respuesta del estudiante B10 en la pregunta N° 2

En la pregunta #3 de la prueba diagnóstica se observa que la ubicación de los valores decimales y fraccionarios se halla de forma aleatoria (figura 5.30).

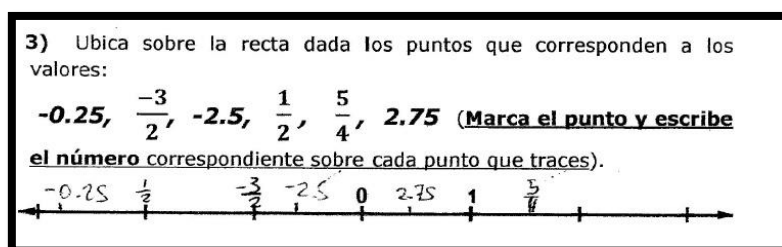


Figura 5.30: Respuesta del estudiante B10 en la pregunta N° 3

En la pregunta #3 de la prueba final aproxima mejor la ubicación de los valores en notación fraccionaria y decimal (figura 5.31).

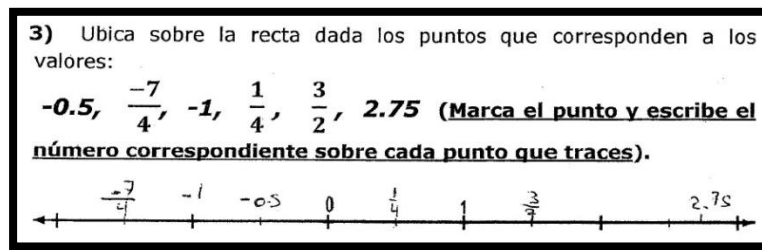


Figura 5.31: Respuesta del estudiante B10 en la pregunta N° 3

En la pregunta #4 de la prueba diagnóstica utiliza escalas diferentes a la derecha e izquierda del 0 (figura 5.32).

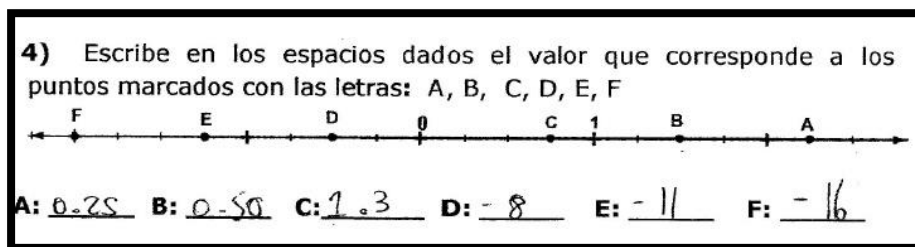


Figura 5.32: Respuesta del estudiante B10 en la pregunta N° 4

En la pregunta #4 de la prueba final identifica correctamente la mayoría de valores (figura 5.33).

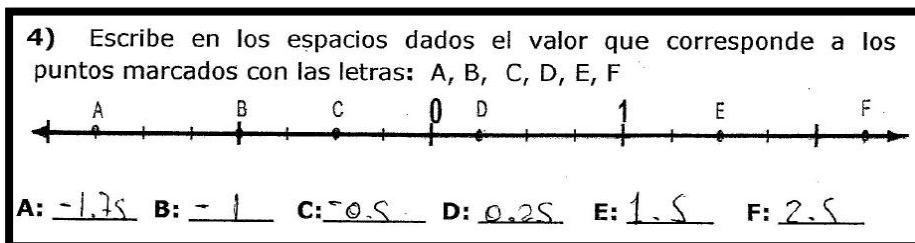


Figura 5.33: Respuesta del estudiante B10 en la pregunta N° 4

Estudiante B11

En la pregunta #3 de la prueba diagnóstica omite el signo de -0.25 , ubica $\frac{1}{2}$ aproximadamente en 1.5, la fracción $\frac{5}{4}$ la sitúa a la derecha del tres (figura 5.34).

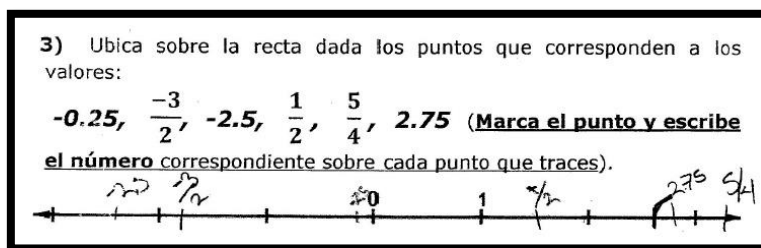


Figura 5.34: Respuesta del estudiante B11 en la pregunta N° 3

En la pregunta #3 de la prueba final acierta la ubicación de cuatro de los valores dados. Pero ubica $-7/4 = -1.75$ entre -1 y -1.5 . El valor $3/2$ lo escribe después del 3 (para representar esta fracción busca $3 \frac{1}{2}$ parece que está representando 3.5) (figura 35).

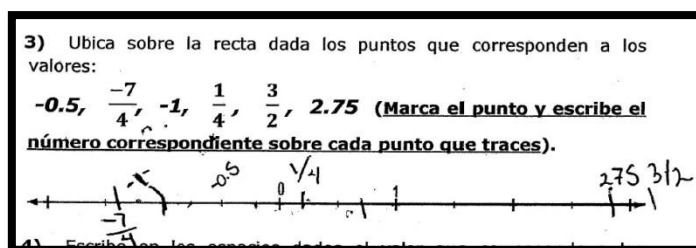


Figura 5.35: Respuesta del estudiante B11 en la pregunta N° 3

En la pregunta #4 de la prueba diagnóstica sólo acierta el valor de C; el resto los identifica con valores enteros. Realiza una lectura “de uno en uno” hacia la izquierda del cero (figura 5.36).

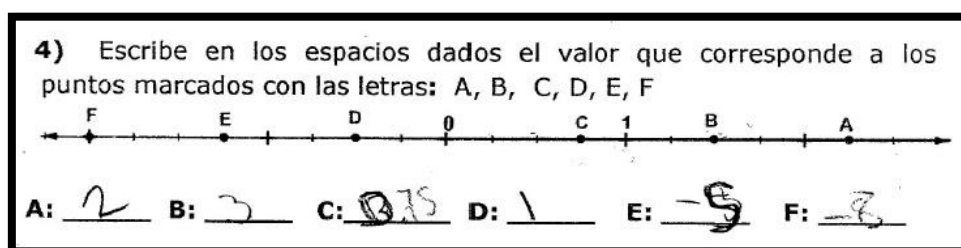


Figura 5.36: Respuesta del estudiante B11 en la pregunta N° 4

En la pregunta #4 de la prueba final identifica correctamente cuatro valores en notación fraccionaria. Logra determinar que está dividida la recta cada $\frac{1}{4}$ de unidad, por lo que acierta C, D E, F ($-2/4$, $\frac{1}{4}$, $6/4$ y $9/4$ respectivamente) mediante conteo (cuántas veces hay $\frac{1}{4}$ desde 0 hasta el punto gráfico). Pero falla A y B: parece que

en el eje negativo divide la escala a conveniencia de modo que asigna $C = -1$, $B = -2$ (confunde $-3/4$ con $-3 \frac{1}{4}$) (figura 5.37).

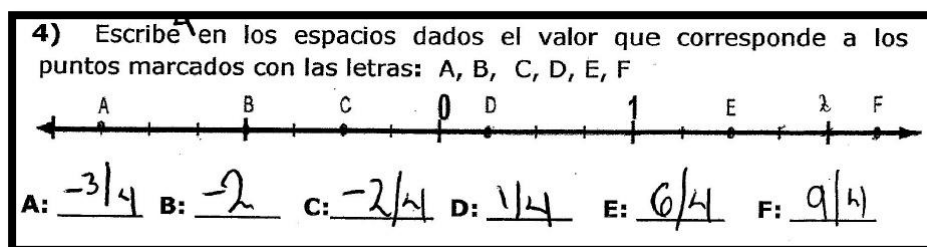


Figura 5.37: Respuesta del estudiante B11 en la pregunta N° 4

Estudiante B12

Del estudiante B12 cabe señalar que no responde ningún ítem de la prueba diagnóstica, aunque intenta escribir algunos valores enteros sobre la recta de la pregunta #3. Sin embargo, a pesar de obtener una calificación baja en la prueba final, se toma en cuenta para este análisis el hecho de que realiza la prueba final en su totalidad logrando ubicar correctamente cinco valores enteros, lo cual muestra una adecuada lectura de la escala. Además, utiliza valores decimales y enteros en sus respuestas.

En la pregunta #1 de prueba final, este estudiante representa correctamente cinco de los valores dados de la pregunta #1, sólo se confunde al representar en la recta al valor “-16” (figura 5.38).

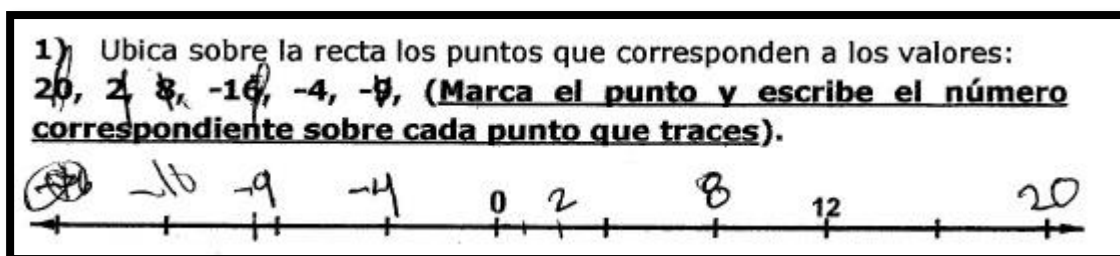


Figura 5.38: Respuesta del estudiante B12 en la pregunta N° 1

Algunos errores aún se deben a confusión del estudiante en el momento de identificar el valor correspondiente a un punto, por ejemplo, en el ítem 2, donde la

escala es 3, si el estudiante para identificar el punto E, leyera 3, 6, 9, 15 (se “brinca” el valor 12), e identifica el punto E con el valor 15, luego el punto F lo identificaría como 20 y no como 17. En este caso se ha corrido 3 unidades hacia la derecha.

Este error se podría corregir con el hábito de verificar los resultados en distintas formas. En lugar de leer desde el 0 de “3 en 3”, se podría observar que la distancia de 0 a 6 es visualmente equivalente con la distancia desde 6 hasta el punto E. Esta observación habría ayudado a identificar el valor 12 en el punto E.

5.5.9. Comparación de resultados obtenidos por los estudiantes que realizaron la prueba diagnóstica, el laboratorio y la prueba final.

La tabla 5.7 muestra los resultados obtenidos en la prueba diagnóstica, la prueba de laboratorio y la prueba final. Los estudiantes B36, B37, B38 y B39 estuvieron ausentes durante la aplicación de la prueba diagnóstica, por lo que no cuentan con una calificación en esta prueba.

Tabla 5.7: Comparación de calificaciones obtenidas por los estudiantes en la prueba diagnóstica y la prueba final, utilizando una escala del 0 al 10.

Estudiante	Diagnóstico	Prueba final	Diferencia	Porcentaje
B1	10.0	9.6	-0.4	-4%
B2	7.5	7.9	0.4	4%
B3	8.8	10.0	1.3	13%
(*)B4	5.0	7.5	2.5	25%
B5	7.9	8.8	0.8	8%
(*)B6	6.3	8.8	2.5	25%
B7	9.2	9.6	0.4	4%
B8	8.8	9.6	0.8	8%
B9	5.0	5.8	0.8	8%
(*)B10	0.4	6.3	5.8	58%
(*)B11	5.4	8.3	2.9	29%
(*)B12	0.0	3.8	3.8	38%
B36	NA	8.3	NA	NA
B37	NA	2.5	NA	NA
B38	NA	7.9	NA	NA
B39	NA	2.9	NA	NA

La tabla 5.7 muestra la calificación promedio obtenida en la prueba diagnóstica y la prueba final, por cada estudiante que participó en el laboratorio. También se observa la diferencia entre ambas calificaciones. Sólo los primeros doce estudiantes de la tabla participaron en ambas pruebas. Puede determinarse con base en la información de la tabla que, excepto por el estudiante B1 que siempre mostró un buen conocimiento estable, todos han logrado mejorar en mayor o menor porcentaje su aprovechamiento en la prueba. Son de especial importancia los estudiantes B4, B6, B10, B11 Y B12; quienes mejoraron notoriamente su desempeño en la resolución de los ítems de la prueba final. Se observa que el porcentaje de mejora entre ambas pruebas, de estos estudiantes, estuvo entre un 25% y un 58%.

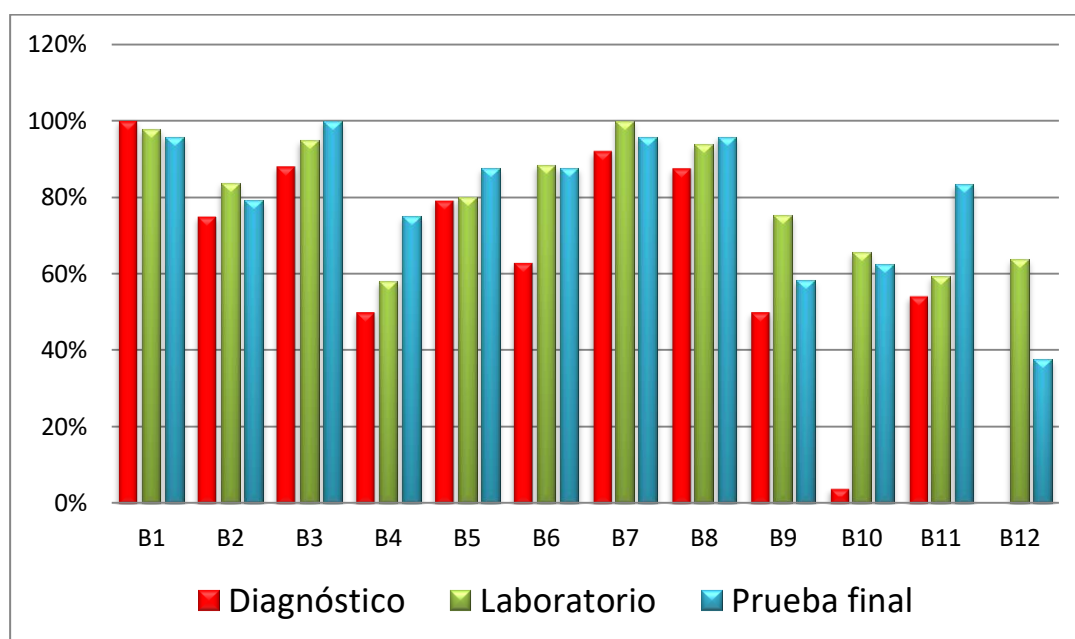


Gráfico 5.16: Comparación de porcentajes obtenidos por una muestra de 12 estudiantes en una escuela secundaria pública en Puebla.

En el gráfico 5.17 se puede visualizar la comparación de los resultados generales obtenidos por 12 estudiantes del grupo de tercero de la Secundaria Técnica N° 60, de Puebla, en la prueba diagnóstica, la prueba de laboratorio y la prueba final. En general, se da una mejora en el aprovechamiento de la prueba final, con respecto a la prueba diagnóstica. Se observa que los estudiantes B4, B6, B10, B11 y B12 logran aumentar su aprovechamiento en la prueba final.

En la mayoría de los participantes del laboratorio (B1, B2, B6, B7, B9, B10 y B12) se observa una calificación más alta en sus resultados obtenidos con el recurso web. Esto puede deberse a que los estudiantes ejecutaron algunos de los niveles más de una vez, dado que el recurso permite que el estudiante realice varias veces cada actividad. Esto demostró una muy buena motivación por tratar de mostrar un mejor desempeño en la resolución de este tipo de ítems, mediante el apoyo de la computadora.

En cuanto a los estudiantes que mostraron una notable mejora entre el pre-test y el post-test (B4, B6, B10, B11 y B12) véase los apartados 5.5.7 y 5.5.8, donde se muestran ejemplos de sus respuestas y algunos comentarios.

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

A continuación se presentan las conclusiones, recomendaciones, limitaciones o implicaciones derivadas del presente estudio. Primeramente se muestran algunas conclusiones con respecto al logro de los objetivos propuestos y la respuesta a la pregunta de investigación planteada en el problema.

Luego, se sugieren algunas recomendaciones derivadas del estudio realizado. Algunas recomendaciones están orientadas a una ampliación (orientación) de futuras investigaciones derivadas de este trabajo. Otras, se dirigen a docentes que deseen utilizar el recurso web creado dentro de la propuesta dada. Finalmente, se exponen algunas limitaciones que se presentaron durante la investigación.

6.1 Conclusiones

Tomando en cuenta el proceso de investigación desarrollado, se dan a conocer las siguientes conclusiones:

6.1.1 Cumplimiento de los objetivos de investigación

En general, se planteó la posibilidad de diseñar una propuesta didáctica para apoyar el aprendizaje de la representación gráfica de los números enteros, en notación fraccionaria y notación decimal sobre una recta graduada, en estudiantes de secundaria; mediante tecnología digital en la web, como recurso didáctico principal. Se considera que este objetivo se ha logrado mediante la realización de las siguientes acciones:

Para el diseño de la propuesta fue necesario evidenciar, en los estudiantes de secundaria de tercer año, la presencia de algunas dificultades que obstaculizan la representación gráfica de números enteros, fraccionarios y decimales en una recta graduada con una escala determinada. Estas dificultades se observaron en tres momentos distintos:

Prueba preliminar: Esta prueba contenía ejercicios relacionados con el estudio del plano cartesiano y las gráficas de funciones. Se encontró que sólo un 17.5% de 80 estudiantes obtuvo un aprovechamiento mayor o igual que 6, en una escala del 0 al 10, en los ítems correspondientes con ejercicios de identificación y representación de valores enteros, decimales y fraccionarios en la recta numérica. Por otra parte, se encuentra una correlación positiva muy fuerte entre la calificación obtenida por cada

estudiante en estas preguntas, con respecto a la calificación obtenida en el total de la prueba, dado que se encontró un coeficiente de correlación de **0.9451** al comparar las calificaciones de los 80 estudiantes.

Prueba diagnóstica Tlaxcala (apartado 5.3): Esta prueba se diseñó específicamente para evaluar ítems sobre de identificación y representación de valores enteros, decimales y fraccionarios en la recta numérica. Fue aplicada cuatro meses después de haberse administrado la prueba preliminar a 70 estudiantes de la misma población anterior. Se observó que sólo el 21% de los estudiantes obtuvo un aprovechamiento igual o mayor que seis. Con respecto a esta prueba llamó la atención que los estudiantes durante este tiempo tuvieron un repaso sobre temas relacionados con los gráficos cartesianos. Además, se realizó una comparación en los resultados obtenidos por 57 estudiantes que coincidieron en la realización de ambas pruebas. En la primera prueba, 88% obtuvieron una calificación inferior a seis, mientras que en la segunda prueba, el 77% obtuvo calificaciones inferiores a seis. Haciendo una correlación de los datos se obtuvo un **0.8103** como valor. Lo cual indica una correlación positiva considerable entre las calificaciones obtenidas, por los 57 estudiantes, en ambas pruebas.

Prueba diagnóstica en Puebla (apartado 5.4): Esta prueba mostró que un 57% de estudiantes obtuvo una calificación menor que seis. Sin embargo, evidencia dificultades en la mayoría de estudiantes que realizó la prueba.

Por otra parte, algunos docentes de matemáticas encuestados confirmaron la percepción de las dificultades en los estudiantes de secundaria. La mayoría de los docentes considera que hay más dificultad en contenidos que involucran las escalas en los ejes del gráfico cartesiano, el uso de notación fraccionaria y decimal en las coordenadas.

Además de mostrar la necesidad de crear alguna herramienta para apoyar el aprendizaje sobre la representación gráfica de valores numéricos, la aplicación de las pruebas anteriores también permitió determinar algunos de los errores que se cometen en este tipo de ítem, que utiliza la recta numérica como herramienta gráfica. Paralelamente, a la información obtenida mediante la Duval y Aebli, entre otros, para el diseño de una propuesta didáctica que apoye el aprendizaje de la representación

gráfica de los números enteros, fraccionarios y decimales sobre una recta graduada, en secundaria; mediante tecnología digital en la web, como recurso didáctico principal. Esta información hizo viable la creación de un recurso web dinámico, dirigido a estudiantes de secundaria, que permite disminuir algunas dificultades en torno a la comprensión de la representación gráfica de tipos de valores numéricos ya mencionados, sobre una recta graduada. Específicamente se consideraron una serie de aspectos en cuanto a la interacción que debía generarse entre los estudiantes con el recurso didáctico web.

También fue posible la realización de una prueba piloto de la propuesta didáctica diseñada en un ambiente de laboratorio con una muestra de estudiantes de tercero de secundaria. Esta actividad permitió probar la propuesta con algunos estudiantes que previamente realizaron una prueba diagnóstica y una prueba final posterior al trabajo de laboratorio. En general, se obtuvo una mejora importante en el aprovechamiento de la prueba final, con respecto a la prueba diagnóstica, en algunos de los estudiantes.

6.1.2 Relación de los resultados con la literatura revisada

Los antecedentes bibliográficos revisados dejan ver que los estudiantes presentan dificultades, que tardan en dominar, con respecto a los números fraccionarios y decimales. Esta información coincide con la opinión dada por los docentes encuestados, quienes consideran que los estudiantes presentan dificultades en contenidos que involucran las escalas de los ejes y el uso de la notación fraccionaria y decimal. Asimismo, las pruebas aplicadas evidencian variados errores en el uso de la notación fraccionaria, y la preferencia en el uso de la notación decimal, en la cual se presentan también errores de interpretación.

También se han encontrado antecedentes que hacen referencia a problemas debido al uso de diferentes escalas. Donde manifiestan que muchos estudiantes tienen problemas en establecer la conexión entre los datos numéricos y los datos gráficos con respecto a la recta numérica, especialmente al tratar con escalas.

Luego, la literatura consultada hace referencia a la dificultad de los alumnos para el trabajo con números negativos. Lo cual coincide con errores encontrados en el presente estudio.

6.2 Recomendaciones

Se dan a continuación algunas recomendaciones que sirven para el aprovechamiento del recurso web diseñado dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje en el contexto mexicano. Además, se realizan algunas sugerencias que pueden servir a futuras investigaciones sobre este tema u otros relacionados con el mismo. Finalmente, se indican algunos detalles sobre lo que sigue a la realización del presente estudio, así como lo que debe hacerse.

6.2.1 Recomendaciones para futuros estudios

Es deseable que la propuesta diseñada pueda ser aplicada a una muestra más grande de estudiantes; así como ser aplicada en los diferentes niveles de la educación secundaria. Además de probarla en diferentes poblaciones estudiantiles, tanto de instituciones públicas como privadas, debido a que mientras el tamaño de muestra sea más grande, el uso de este prototipo sería confiable y podría terminar de depurarse, con el propósito de ofrecer su uso a un nivel más amplio.

Por otra parte, en futuras investigaciones, los aplicativos que deben seguir a los propuestos en este estudio, se requiere incluir actividades de identificación y representación de puntos en el plano cartesiano y la lectura e interpretación de gráficas cartesianas en situaciones variadas, con el fin de brindar una adecuada introducción al estudio de las gráficas cartesianas.

6.2.2 Recomendaciones de mejora al recurso didáctico

Parte de esta investigación requirió la opinión de los estudiantes, de la muestra que trabajó en el laboratorio, con respecto a su percepción del recurso web con el que interactuaron. Esto servirá de apoyo para una mejora posterior de su interfaz, en cuanto a colores, distribución espacial y facilidad de uso. También se espera mejorar la aplicación para lograr un mayor aprendizaje activo. En cuanto a la comunicación telemática entre diferentes usuarios y con el docente, aún no se ha implementado esta característica.

Entre las mejoras que pueden realizarse al recurso web se incluye variar los valores de referencia mostrados en cada escala.

Es necesario y deseable generar al final de cada nivel una tabla de aciertos y errores. Donde se indique el valor que se debía identificar y el valor que el estudiante escribió en cada caso, de manera que pueda retroalimentarse tanto el docente como el estudiante que ejecuta el nivel. El docente podrá determinar el tipo de errores más frecuentes que cometen sus estudiantes y así elaborar algún plan de acción al respecto.

Sería deseable que entre los valores que solicite el sistema, ya sea para identificar o para representar, según sea el nivel, no se encuentre valores triviales como el cero (que ya se representa por defecto) y los valores de referencia, mostrados en cada una de las escalas, según el ejercicio.

Sugerir algún recurso para que sea consultado por los estudiantes que muestren ciertas dificultades o un nivel de aprovechamiento bajo al finalizar cada nivel.

6.2.3 Uso de este recurso web dentro de la planeación escolar

El recurso creado en esta investigación puede ser utilizado como un complemento al proceso de aprendizaje de la representación gráfica de valores enteros, decimales y fraccionarios en la recta numérica. De manera que puede ser presentado a los estudiantes como una herramienta útil para mejorar su capacidad de relacionar los valores numéricos referidos y su representación gráfica en una recta graduada.

6.3 Limitaciones o implicaciones

En este estudio aún no es posible generalizar cuantitativamente los resultados de las observaciones realizadas, sobre las mejoras en el aprovechamiento de los estudiantes, luego de la interacción de éstos con el recurso didáctico web, debido al tamaño de la muestra que realizó el trabajo de laboratorio.

El uso de este recurso dentro de un ambiente de laboratorio, de forma individual, requiere la disponibilidad de equipo para un cierto número de estudiantes que el maestro desee observar. En caso de no disponerse del equipo necesario para el número de estudiantes, el maestro puede asignarlo como práctica extra clase, dada la facilidad con que puede ser hallado este recurso en la web.

BIBLIOGRAFÍA.

- Aebli, H. (1988). *12 formas básicas de enseñar: una didáctica basada en la psicología*. (Alberto Guera, trad.) 7ª ed. (Vol. 50). Madrid: Narcea.
- Area, M. (2003). De los webs educativos al material didáctico web. *Revista Comunicación y Pedagogía*. N° 188. pp. 32-38. Universidad de La Laguna
- Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: the genesis of a reflection about instrumentation and dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of computer for Mathematical Learning*, 7, 245- 274.
- Azcárate, C. & Deulofeu, J. (1996). *Funciones y gráficas*. Madrid: Síntesis.
- Ballesteros, E. (2007). Instrumentos psicológicos y la teoría de la actividad instrumentada: Fundamento teórico para el estudio del papel de los recursos tecnológicos en los procesos educativos. *Cuadernos de investigación y formación matemática*. Universidad Nacional de Costa Rica. Año 3, Número 4, pp. 125-137
- Brenes, M. & Gutiérrez, M. (2010). Integrando la computadora en la Enseñanza de la Matemática: Enseñanza de la geometría en undécimo año de la educación media con aplicaciones del programa "Geogebra". Universidad Nacional de Costa Rica. (Tesis)
- Brousseau, G. (octubre y noviembre, 1999): "Educación y Didáctica de las matemáticas". (David BLOCK y Patricia Martínez, traduc.), V Congreso Nacional de Investigación Educativa. Congreso llevado a cabo en Aguascalientes, México. Recuperado el 13 de septiembre de 2015, de www.matetam.com/sites/default/files/discurso_ag.s.doc
- Bruno, A. (1997). La enseñanza de los números negativos: aportaciones de una investigación. *Números*. *Revista de didáctica de las matemáticas*, (29), 5-18.
- Bustos, A., y Coll, C. (2010). Los entornos virtuales como espacios de enseñanza y aprendizaje. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 15(44), 163-184. Recuperado el 5 de marzo de 2012 de: <http://redalyc.uaemex.mx/pdf/140/14012513009.pdf>
- Cabrera, N. & Bruno, A. (2006). La recta numérica en los libros de texto en España. *Educación Matemática*, diciembre, 125-149.

- Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria. Luis Rico Romero (coord.) Editores: Horsori: Universidad de Barcelona, Instituto de Ciencias de la Educación.
- Chiappe, A. (2006). "Modelo de Diseño Instruccional basado en objetos de aprendizaje (MDIBOA): Aspectos relevantes." Universidad de La Sabana, Área de Informática para la docencia. Recuperado el 6 de junio de 2009, de <http://oas.unisabana.edu.co/files/MDIBOA.pdf>
- Coriat, M., & Scaglia, S. (2000). Representación de los números reales en la recta. Enseñanza de las Ciencias, 18(1), 25-34.
- Crespo, C. (2009). Acerca de la comprensión y significado de los números irracionales en el aula de matemática. Revista Premisa, 11(41), 21-30.
- Cuevas, C. A. (2005). Curso Seminario de Didáctica de las Matemáticas. Publicación interna del Cinvestav IPN.
- D'Amore B. (2006). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. In: Radford L., D'Amore B. (eds.) (2006). Semiotics, Culture and Mathematical Thinking. Numero speciale della rivista Relime (Cinvestav, México DF., México). 177-196.
- D'Amore, B. (2009). Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: Interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución. Revista Científica, (11). BOGOTA, D.C. pp 150-164
- Deulofeu, J. (1991). El lenguaje de las gráficas cartesianas y su interpretación en la representación de situaciones discretas. Comunicación, Lenguaje y Educación, 3(11-12), 77-86.
- Díaz, J. (2013). El Concepto de Función: Ideas pedagógicas a partir de su historia e investigaciones. El Cálculo y su Enseñanza, Cinvestav-IPN, México, D.F. 4, 13-25. Recuperado el 05 de junio de 2014 de http://mattec.matedu.cinvestav.mx/el_calculo/
- Duval, R. (1988). Graphiques et Equations: L'Articulation de deux registres, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, IREM de Strasbourg France.
- Duval, R. (1993). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento, Investigaciones en Matemática Educativa II. Université Louis Pasteur de Strasbourg, France Ed. Hitt F., 1998. Editorial Iberoamericana, 173-201.

- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuel*, Peter lang, Suisse.
- Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. p.p 3-26. *Memorias pmena xxi México*.
- Ferro, C., Martínez, A. I. y Otero, M. C. (2009) Ventajas del uso de las tics en el proceso de enseñanza- aprendizaje desde la óptica de los docentes universitarios españoles. *EDUTEC, Revista Electrónica de Tecnología Educativa*, 29. Recuperado el 12 de mayo de 2012 de: <http://edutec.rediris.es/revelec2/revelec29/>.
- Fregona, D. (1995), *Les figures planes comme "milieu" dans l'enseignement de la géométrie: interactions, contrats et transpositions didactiques*, (Tesis de doctorado) Université Bordeaux I, Francia. Recuperado el 13 de septiembre del 2015, de <http://repositori.uji.es/xmlui/handle/10234/93550>
- Galeana, L. (2004) *Objetos de Aprendizaje*. Corporación Universitaria para el Desarrollo de Internet (CUDI). Reunión de Primavera 2004. Recuperado el 1 de junio de 2009 de http://www.cudi.edu.mx/primavera_2004/presentaciones/Lourdes_Galeana.pdf
- Gallardo, Aurora; Santos, Nuno; Hernández, J. A. (2010). *La aparición simultánea de los sentidos de uso de los números negativos y el cero en alumnos de secundaria: un estudio de caso*. En Moreno, Mar; Carrillo, José; Estrada, Assumpta (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 303-314). Lleida: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.
- Gallardo, Aurora; Saavedra, Gil (2011). *Significados de los números negativos fraccionarios en estudiantes de secundaria*. En Marín, Margarita; Fernández, Gabriel; Blanco, Lorenzo J.; Palarea, María Mercedes (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 361-370). Ciudad Real: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.
- García, A. R., Jaén, J. A. y Tapia, S (2006). La autoevaluación como actividad docente en entornos virtuales de aprendizaje/enseñanza. *RED. Revista de Educación a Distancia*, septiembre. Recuperado el 1 de junio de 2012 de: <http://redalyc.uaemex.mx/redalyc/src/inicio/ArtPdfRed.jsp?iCve=54709903>
- Gutiérrez, I. (2008). Usando objetos de aprendizaje en enseñanza Secundaria obligatoria. *Eduotec, Revista Electrónica de Tecnología Educativa*, 27. Recuperado el 8 de junio de 2012 de:

- http://edutec.rediris.es/Revelec2/revelec27/articulos_n27_PDF/Edutec-E_Igutierrez_n27.pdf
- Heid, M. K. (1997). The technological revolution and the reform of school mathematics. *American Journal of Education*, 106, 5-61.
- Hernández, Y. (2008). Propuesta hacia la noción de función desde su interpretación y representación gráfica. Universidad Pedagógica y Tecnológica De Colombia.
- Hernández, Y. (2014). Interpretación del cambio de funciones de variable real a partir de las formas de representación con el uso de Moodle. Universidad Pedagógica y Tecnológica De Colombia
- Hernández-Sampieri, R., Fernández-Collado, C., & Baptista-Lucio, P. (2014). Metodología de la investigación. 6° Edición. México: Editorial Mc Graw Hill.
- Kaput, J. J. (1991). Notations and representations as mediators of constructive processes. E. Von Glasersfeld (ed.), *Radical Constructivism in Mathematics Education*, 53-74.
- Kieran, C., & Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. (Traducción castellana de Luis Puig). *Enseñanza de las Ciencias*, 7(3), 229-240.
- Lacasta, E., & Rodríguez, M. (c.a. 1999) El gráfico cartesiano de funciones como “medio” material: el paso de la representación gráfica a la analítica, con especial interés en el problema de las escalas. Recuperado el 13 de septiembre del 2015, de:
http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/almeria/Grafico_cartesiano.PDF
- Leinhardt, G, Zaslavsky, O., Stein, M. (1990). Functions, Graphs, and Graphing: Tasks, Learning, and Teaching. *Review of Educational Research*, Vol. 60, No. 1 (Spring, 1990), pp. 1-64
- Lupiañez, J. L., y Moreno, L. (2001). Tecnología y representaciones semióticas en el aprendizaje de las matemáticas. En Gómez, P., y Rico, L. (Eds.) *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática*. Homenaje al profesor Mauricio Castro. Granada: Editorial Universidad de Granada. Recuperado el 16 de septiembre de 2009, de <http://cumbia.ath.cx/ugr/phmc/publicacion.htm>
- Martínez, J. (2009). *Objetos de Aprendizaje*. N.C.T.M. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA; N.C.T.M. Recuperado el 30 Junio 2012 de: <http://standards.nctm.org/>

- Moreno, L. (1999). On representations and Situated Tools. Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Cuernavaca, Morelos, México.
- Pea, R. (1985). Beyond amplification: Using computers to reorganize mental functioning. *Educational Psychologist*, 20, 167-182.
- Pea, R. D. (1986). Cognitive Technologies for Mathematics Education. Technical Report No. 37. Annual Meeting of the American Educational Research Association. Chicago, IL. Recuperado el 15 de noviembre de 2009, de http://www.eric.ed.gov/ERICWebPortal/custom/portlets/recordDetails/detailmini.jsp?_nfpb=true&_ERICExtSearch_SearchValue_0=ED295791&ERICExtSearch_SearchType_0=no&accno=ED295791
- Pruzzo, V., (2012). Las fracciones: ¿problema de aprendizaje o problemas de la enseñanza? *Pilquen-Sección Psicopedagogía*, Año XIV, (8), 6.
- Ramírez, M & Porcel, E. (2006). Tipos de representación en la recta real y visualización de errores frecuentes de alumnos ingresantes a FACENA. Universidad Nacional del Nordeste. Comunicaciones científicas y tecnológicas. Argentina.
- Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *PNA*, 4(1), 1-14.
- Rico, L. (1995). Errores en el aprendizaje de las matemáticas. En: *Educación Matemática*. (Kilpatrick, J., Rico, L. y Gómez, P. (Eds)). “una empresa docente” & Grupo editorial Iberoamérica. Colombia. pp. 69-108
- Scaglia, S. (2001). Estudio previo al diseño de un cuestionario. En Gómez, P., & Rico, L. (Eds.). (2001). *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro*. Granada. (pp. 195-206) Editorial Universidad de Granada.
- Secretaría de Educación Pública. (2001). Libro para el Maestro. Matemáticas. Secundaria. 2da Edición. SEP. México. D.F.
- Secretaría de Educación Pública. (2011). Programas de estudio. Guía para el maestro. Educación Básica Secundaria. Matemáticas. México.
- Soto, E. (2011). *Diccionario Ilustrado de Conceptos Matemáticos*. Tercera Edición. México. Recuperado el 05 de junio del 2016, desde: <http://www.aprendematematicas.org.mx/obras/DICM.pdf>
- UNESCO (2012). Las TIC en la Educación. Recuperado el 20 de mayo de 2012 de: <http://www.unesco.org/new/es/unesco/themes/icts/> UNESCO-

- Valdivé, C. (2006). Una experiencia en investigación-acción técnica: “el paso del infinito potencial al infinito ‘como un todo’ para comprender la construcción de los conjuntos infinitos”.
- Verillon, P., & Rabardel, P. (1995). Cognition and Artifacts: A Contribution to the Study of Thought in Relation to Instrumented Activity. *European Journal of Psychology of Education*, 10(1), 77–101. Retrieved from <http://www.jstor.org/stable/23420087>
- Vergnaud, G. (1987). Conclusion; Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics. Ed. by C. Janvier. Lawrence Erlbaum Associates, Canada.
- Yáñez, G. (2003). Estudios sobre el papel de la simulación computacional en la comprensión de las secuencias aleatorias, la probabilidad y la probabilidad condicional. Tesis de maestría. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav.

ANEXOS

**ANEXO 1: CUESTIONARIO APLICADO A DOCENTES DE DIFERENTES
INSTITUCIONES EDUCATIVAS: INSTRUMENTO Y RESUMEN DE LAS
RESPUESTAS**

CUESTIONARIO SOBRE DIFICULTADES EN EL USO DEL PLANO CARTESIANO

Este cuestionario está dirigido a docentes de matemática de secundaria.

Para abordar adecuadamente los contenidos referidos a la lectura, interpretación y construcción de gráficas en el plano cartesiano, es necesario que los estudiantes conozcan y sepan utilizar algunos conceptos previos y habilidades referidos a la elección, uso y construcción de diferentes escalas en la recta numérica, así como también el reconocimiento y ubicación de números en diferentes notaciones (enteros, fraccionarios, decimales, etc.) sobre una recta numérica con una escala dada. La poca comprensión de estos conocimientos y habilidades referidos a la recta numérica, pueden causar dificultades posteriores en el abordaje de contenidos que requieren el uso del plano cartesiano como, por ejemplo, la introducción al concepto de función.

Este cuestionario forma parte de un proyecto de investigación que busca determinar las dificultades que presentan los estudiantes al abordar contenidos que requieren el uso del plano cartesiano. Uno de los objetivos del proyecto es desarrollar una propuesta didáctica que facilite a los docentes en matemáticas, recursos didácticos, sustentados en el uso de las TIC, como apoyo a sus estrategias de enseñanza.

Por tal motivo, se solicita su colaboración al contestar el siguiente cuestionario. Su aporte será muy valioso para el desarrollo del presente trabajo.

A continuación se presentan una serie de afirmaciones con respecto al uso de la escala, reconocimiento y representación de puntos con coordenadas en diferentes notaciones (positivas y negativas) sobre el plano cartesiano. Ponga una marca (x) en la casilla que corresponda al valor que más se acerque a su criterio:

(1: Nunca, 2: Algunas veces, 3: Muchas veces, 4: Siempre)

Nº	Los estudiantes logran:	1	2	3	4
1	Trazar una escala uniformemente sobre los ejes para representar valores positivos y negativos.				
2	Seleccionar una escala apropiada para ubicar coordenadas con valores muy grandes sobre alguno de los ejes del plano cartesiano.				
3	Seleccionar una escala apropiada para ubicar todos los valores, dados en una tabla, sobre cada uno de los ejes del plano cartesiano.				
4	Representar puntos en el plano cartesiano reconociendo el orden de las coordenadas.				
5	Representar puntos sobre los ejes "x" e "y" (por ejemplo (0,5), (-4,0), (3.2, 0), etc.)				
6	Representar adecuadamente puntos con coordenadas enteras positivas y negativas sobre el plano cartesiano				
7	Representar adecuadamente puntos con coordenadas fraccionarias positivas y negativas sobre el plano cartesiano				
8	Representar adecuadamente puntos con coordenadas decimales positivas y negativas sobre el plano cartesiano				
9	Reconocer puntos ubicados sobre el plano cuyas coordenadas contienen valores enteros positivos y negativos				
10	Reconocer puntos ubicados sobre el plano cuyas coordenadas contienen valores fraccionarios o decimales positivos o negativos				
11	Realizar satisfactoriamente los ejercicios propuestos en los libros de secundaria?				
12	Reconocer los conceptos involucrados en los ejercicios propuestos en los libros de secundaria?				

¿Qué otras dificultades ha observado en el desempeño de los estudiantes al abordar temas que requieren el uso o construcción de gráficas sobre el plano cartesiano? _____

¿A qué factores atribuye usted las dificultades que presentan los estudiantes en el trabajo con el plano cartesiano? _____

Al finalizar este trabajo se le podría compartir los resultados de este estudio. En tal caso, ¿le gustaría recibir información sobre dichos resultados? SÍ _____ NO _____

Email: _____

Años de experiencia: _____ **Nivel (es) que imparte:** Primero _____ Segundo _____ Tercero _____

RESPUESTAS: CUESTIONARIO SOBRE DIFICULTADES EN EL USO DEL PLANO CARTESIANO

N° Pregunta	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10	P11	P12
1	3	2	3	3	3	3	2	2	3	1	2	2
2	2	2	2	3	4	4	2	2	3	2	2	2
3	2	2	2	3	2	4	3	3	4	2	3	1
4	2	2	3	4	4	3	4	2	4	3	3	3
5	2	2	2	3	4	2	2	3	2	2	2	2
6	4	2	1	3	4	4	1	2	4	2	2	2
7	2	2	2	2	3	4	3	3	3	3	2	3
8	2	2	2	3	3	3	1	2	3	2	2	2
9	3	2	3	3	4	3	2	2	3	2	3	2
10	2	2	2	2	2	2	1	1	3	1	2	2
11	2	3	3	2	2	2	4	4	2	4	2	2
12	2	2	2	3	3	3	1	1	3	1	*	*
13	2	2	2	3	3	3	3	2	2	2	3	2
14	3	2	2	3	3	3	2	2	3	2	3	3
15	2	3	2	3	2	3	*	2	3	*	2	3
16	2	2	2	3	3	3	2	2	2	2	*	2
17	4	3	2	2	2	3	2	2	2	2	3	3
18	2	1	2	3	2	2	1	2	2	1	2	2
19	2	2	2	2	3	2	2	1	2	1	1	2
Siempre	2	0	0	1	5	4	2	1	3	1	0	0
Muchas veces	3	3	4	13	8	10	3	3	9	2	6	5
Algunas veces	14	15	14	5	6	5	8	12	7	10	10	12
Nunca	0	1	1	0	0	0	5	3	0	5	1	1

* No aparece valoración por parte del docente hacia esta afirmación.

Criterio	valor
Siempre	4
Muchas veces	3
Algunas veces	2
Nunca	1

Este cuestionario se aplicó a una muestra de 19 docentes de matemáticas, en educación secundaria, procedentes de diferentes instituciones educativas. El cuestionario se respondía con base a una escala de Likert con valoraciones de 1 al 4.

Las preguntas se clasificaron de acuerdo a los temas: escala de los ejes, orden de las coordenadas cartesianas, coordenadas en notación de números enteros, coordenada en notación decimal o fraccionaria, y reconocimiento o comprensión de los conceptos presentados en los libros de texto.

Las preguntas se han agrupado en 5 categorías

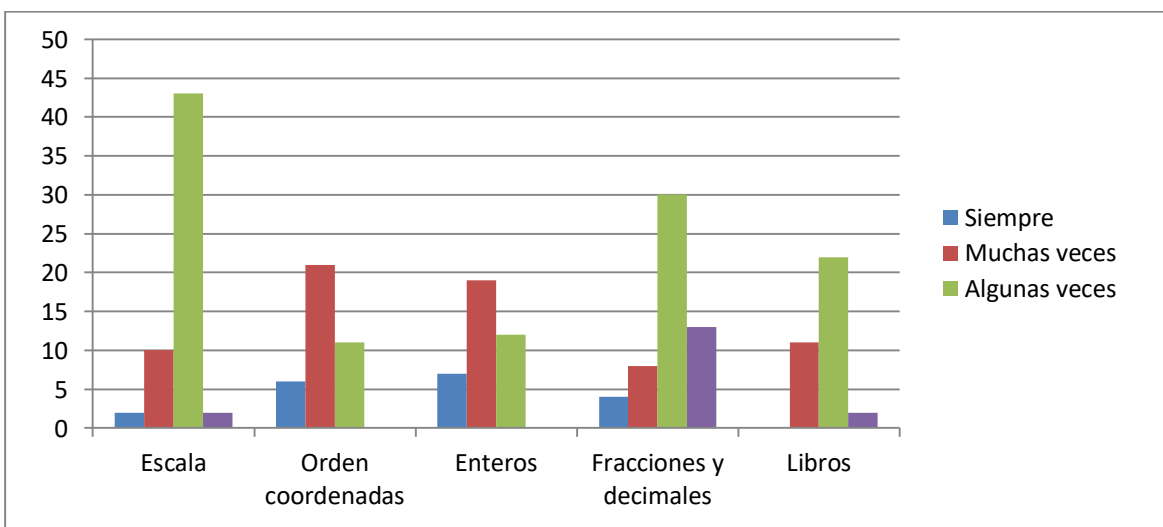
- **Escala:** Afirmaciones 1, 2 y 3
- **Orden de coordenadas:** Afirmaciones 4 y 5
- **Números enteros:** Afirmaciones 6 y 9
- **Números en notación fraccionaria y decimal:** Afirmaciones 7, 8 y 10
- **Comprensión de ejercicios en libro de texto:** Afirmaciones 11 y 12

Valoraciones dadas por los docentes a las afirmaciones dadas sobre el desempeño de los estudiantes en el uso del plano cartesiano

Tipo de pregunta/CRITERIO	Escala	Orden coordenadas	Enteros	Fracciones y decimales	Libros
Siempre	2	6	7	4	0
Muchas veces	10	21	19	8	11
Algunas veces	43	11	12	30	22
Nunca	2	0	0	13	2

Gráfico #1

Valoraciones dadas por los docentes a las afirmaciones dadas sobre el desempeño de los estudiantes en el uso del plano cartesiano



En la siguiente tabla se agrupan el porcentaje de los criterios, de las respuestas dadas por los docentes, en dos tipos:

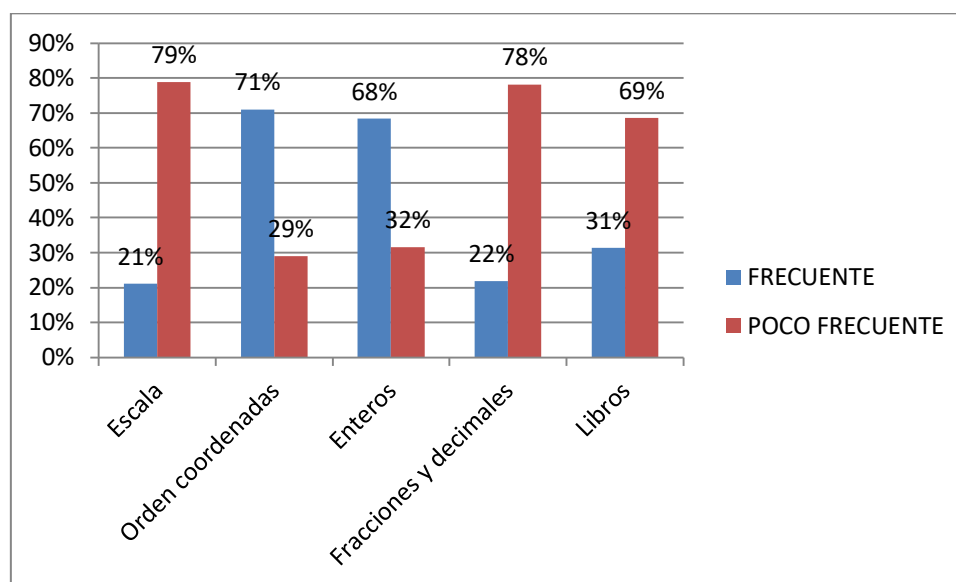
3. **Frecuente:** Siempre y Muchas veces
4. **Poco frecuente:** Pocas veces y Nunca

RESPUESTAS AL CUESTIONARIO SOBRE DIFICULTADES EN EL USO DEL PLANO CARTESIANO

Tipo de pregunta	Escala	Orden coordenadas	Enteros	Fracciones y decimales	Libros
FRECUENTE	21%	71%	68%	22%	31%
POCO FRECUENTE	79%	29%	32%	78%	69%

Gráfico #2

RESPUESTAS AL CUESTIONARIO SOBRE DIFICULTADES EN EL USO DEL PLANO CARTESIANO



En la gráfica se observa que la mayoría de docentes encuestados considera que hay más dificultad en contenidos que involucran las escalas de los ejes del gráfico cartesiano, el uso de notación fraccionaria y decimal en las coordenadas y en la comprensión de los conceptos hallados en los ejercicios presentes en los textos de matemáticas escolar. Mientras que consideran que con mayor frecuencia los estudiantes logran mejores resultados en temas que involucran el trabajo con números enteros y con el orden de las coordenadas de un par ordenado.

Con respecto a las preguntas ubicadas al final del cuadro de afirmaciones, se obtuvieron las siguientes respuestas de los docentes:

Consideraciones finales aportadas por los docentes sobre las preguntas abiertas del cuestionario

N°	Años de experiencia	¿Qué otras dificultades ha observado en el desempeño de los estudiantes al abordar temas que requieren el uso o construcción de gráficas sobre el plano cartesiano?	¿A qué factores atribuye usted las dificultades que presentan los estudiantes en el trabajo con el plano cartesiano?
1	4	NR	<u>Algunas veces ellos no saben reconocer negativos y positivos; y sobre todo los decimales y fracciones</u> no las pueden ubicar en el plano
2	4*	En la evaluación de funciones y a veces identificar cuál es la variable dependiente e independiente	Al manejo de números negativos y al uso de fracciones en el plano cartesiano
3	25	Representan el (0, 0) no en la intersección de los ejes	No identifican la convención (x, y) para ubicar un punto. Confunden los ejes "x" e "y". aún más cuando se incluyen los cuatro cuadrantes
4	1	Ubicar puntos cuando es una coordenada con las dos entradas negativas (ejemplo: (-1, -2), (-5, -3))	Poco interés y además poder hacer la relación funcional.
5	1	Que los alumnos no saben distinguir bien los signos de los cuadrantes	El tener que relacionar dos coordenadas los pierde y ya no saben cómo representarlo
6	5	<u>Primero que no relacionan datos en una tabla con una gráfica, y al final no la interpretan adecuadamente.</u>	A su percepción espacial, (acciones (operaciones y percepción))
7		<u>Se complica realizar la escala en los valores a los ejes de las ordenadas y abscisas para representar la función dada.</u>	Falta de análisis de las instrucciones o del problema que los alumnos no hayan realizado ejercicios con anterioridad (conocimientos previos)
8	4	Que a pesar de que los alumnos vieron este tema en primaria, aún no identifican el nombre de cada eje que conforma el plano cartesiano. Además, otra dificultad es <u>la no interpretación de datos que se expresan en un plano cartesiano</u> , también al utilizar tanto decimales como fracciones no saben equivalencias.	Me parece que es <u>debido a las deficiencias en conocimientos básicos</u> , es lo que lleva a los estudiantes a que la dificultad sea mayor, pues como lo mencioné, en primaria se ven varios temas que son previos y necesarios al de plano cartesiano, por lo tanto si los alumnos no los conocen, llegarán con rezago al nivel de secundaria.
9		Que tiene <u>dificultad en ubicar los puntos con coordenadas que contienen valores enteros, fraccionarios o decimales negativos.</u>	A que no saben ubicar bien el plano cartesiano los ejes x e y negativos.
10	10	No consideran que el eje vertical y horizontal representen variables y dependiendo de lo que representan es	<u>A que se dan por sentado muchas cosas, se obvia la "facilidad" de ubicar en el plano.</u>

		la interpretación que corresponde.	
11	10	Determinar la escala apropiada, ubicar puntos, algunas veces localizan primero la ordenada, otros no ponen el "0" en el cruce de los ejes	Mala introducción del tema, poco uso.
12	36*	Conocer la importancia de la ubicación en el plano cartesiano	A la <u>falta de práctica en la localización</u> y el concepto de escala y plano cartesiano
13	8	Que los alumnos les falta analizar más y practicar más	<u>Se equivocan los alumnos en colocar los puntos en el plano cartesiano</u>
14	26		Operaciones con fracciones dada la función
15	8	<u>Se les dificulta ubicar los puntos (números positivos y negativos)</u>	No tienen interés, se les dificulta colocar los puntos. <u>Algunos alumnos no saben medir.</u>
16	25	Sobre números negativos	De ubicación
17	20	Pasar de un conjunto finito de pares $(x, f(x))$ a una gráfica uniendo los puntos	Pasar de $(x, f(x))$ a la gráfica, pues consideran que la función consiste en tabular es decir dado $x=a$ "calculamos" $f(a)$
18	42	Muchas veces los docentes no abordan a profundidad el tema	La falta de aplicación de las TIC (uso de geogebra)
19	12	NR	NR

Varios docentes coinciden en la dificultad para ubicar puntos en el plano cartesiano.

**ANEXO 2: PRUEBA DIAGNÓSTICA PRELIMINAR APLICADA EN TLAXCALA
EN LA ESCUELA SECUNDARIA AGUSTÍN MELGAR (14 Y 15 DE ENERO DEL
2016)**

(INSTRUMENTO APLICADO Y RESULTADOS)

PRUEBA DIAGNÓSTICA

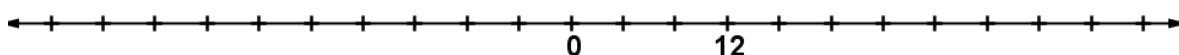
ESTUDIANTE: _____ Grado: _____

Institución: _____ Fecha: _____

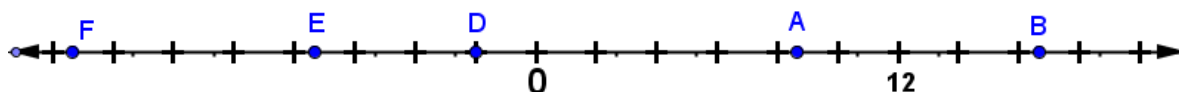
Estimado estudiante: A continuación se presentan ocho ítems que forman parte de un estudio sobre las gráficas en el plano cartesiano. Esta investigación es importante para mejorar los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Solicitamos atentamente tu colaboración contestando los ejercicios que se muestran a continuación, de la manera más honesta posible.

Resuelve cada uno de los ejercicios que se te dan a continuación:

- 1) Ubica sobre la recta los puntos que corresponden a los valores: **6, 30, 41, -8, -22, -33** (Escribe el número correspondiente sobre cada punto que traces)

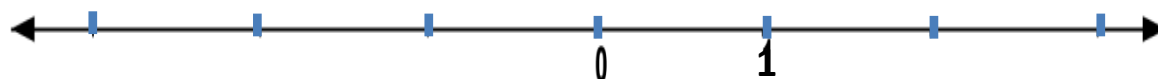


- 2) Escribe en los espacios dados el valor que corresponde a los puntos marcados con las letras: A, B, D, E, F

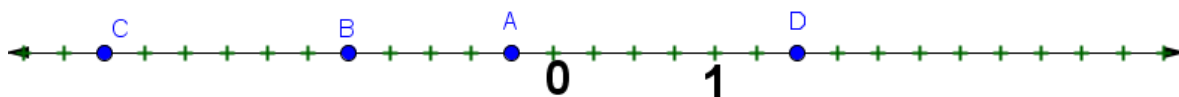


A: _____ B: _____ D: _____ E: _____ F: _____

- 3) Ubica sobre la recta dada los puntos que corresponden a los valores: **$1/4$, 1.75, $5/2$, $-7/4$, -2.5, -1.05, 1.5**

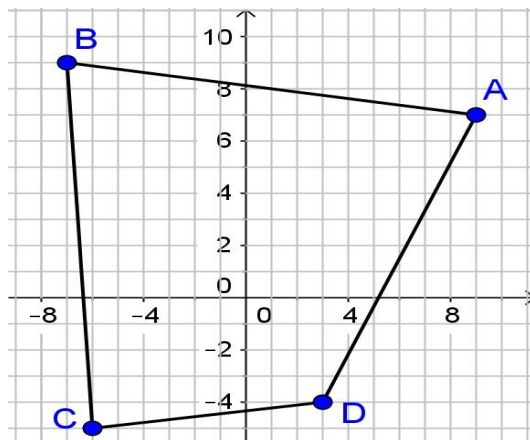


- 4) Escribe en los espacios dados el valor que corresponde a los puntos marcados con las letras: A, B, C, D



A: _____ B: _____ C: _____ D: _____

5) Escribe las coordenadas de los vértices de la siguiente figura:



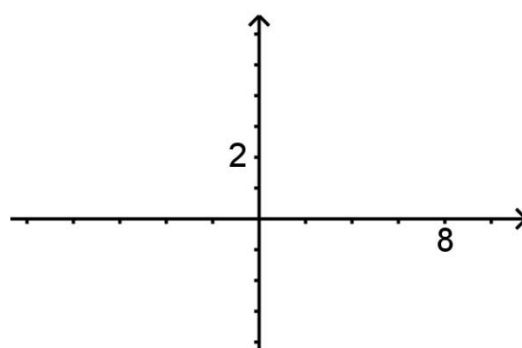
$$A = (\quad , \quad)$$

$$B = (\quad , \quad)$$

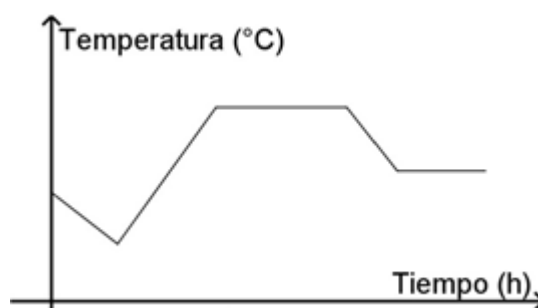
$$C = (\quad , \quad)$$

$$D = (\quad , \quad)$$

6) En el sistema de coordenadas cartesianas que se presenta a continuación ubica los puntos: **A(-2,1)**, **B(2,4)** y **C(3,-4)**



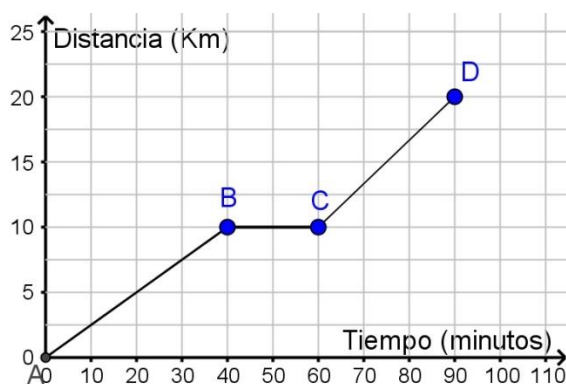
7) La gráfica muestra cómo varió la temperatura de una cierta ciudad, a lo largo de un día, a partir de la medianoche



- Indica sobre la gráfica los intervalos en los que aumentó la temperatura.
- Marca sobre la gráfica en qué intervalos del día bajó la temperatura.
- ¿En qué intervalos, la temperatura se mantuvo constante?

- d) Explica o describe la variación de la temperatura a lo largo del día. ¿te parece un comportamiento habitual de la temperatura en Puebla?
- e) ¿Qué puedes decir de las temperaturas inicial y final del día que describe la gráfica?
- f) Observa los intervalos en que la temperatura bajó y describe las diferencias entre ellos.

8) Un ciclista sale de su casa y recorre 30 km. La siguiente gráfica representa la relación entre el tiempo transcurrido desde que salió y la distancia recorrida en ese tiempo.

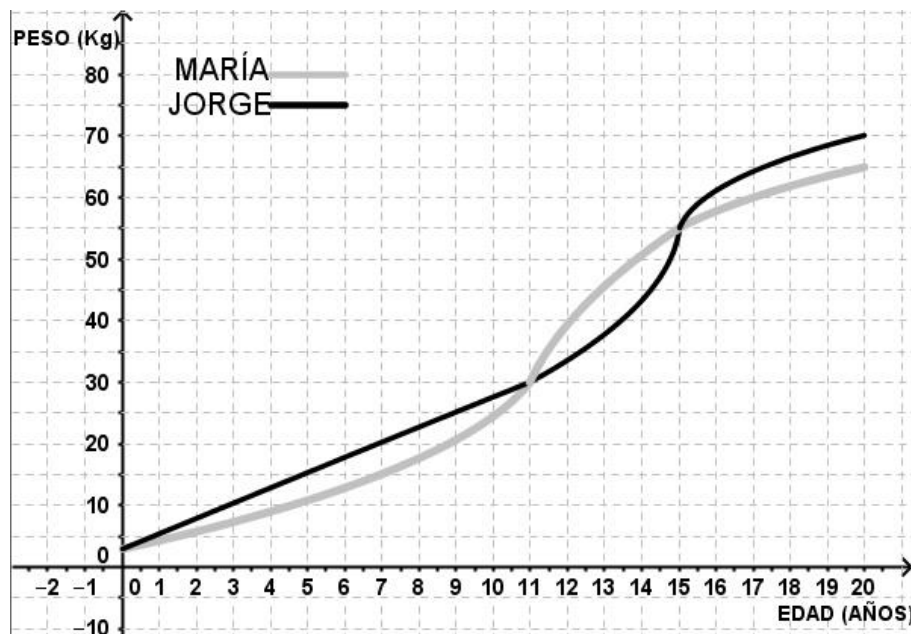


- a) Al transcurrir media hora desde que salió de su casa ¿Cuántos kilómetros ha recorrido?
- b) De los tres tramos que señala la gráfica: ¿Cómo interpretas el tramo BC?
- c) ¿Crees que el ciclista fue más aprisa en alguno de los tres tramos? ¿Cuál? ¿Por qué?

OPCIONAL:

Si ya terminaste y deseas contestar este ejercicio: **¡ADELANTE!**

- 9) En las siguientes gráficas se representan los pesos de María y Jorge, dos personas con un desarrollo normal, en sus primeros 20 años:



- Cuánto pesaba Jorge a los 8 años?, ¿y cuánto María a los 12? ¿A qué edad superó Jorge los 45 kg?
- ¿A qué edades tenían los dos el mismo peso? ¿En qué período pesaba Jorge más que María?, y ¿María más que Jorge?
- ¿Cuál fue el aumento promedio (kg/año) de peso de María entre los 11 y los 15 años? ¿Cuál el de Jorge? Compara estos promedios.
- ¿En qué periodo creció cada uno de ellos más rápidamente?

¡GRACIAS POR SU COLABORACIÓN!

**Calificación obtenida en preguntas referidas a la representación gráfica de valores numéricos en diferentes notaciones sobre una recta graduada
(Cuatro primeras preguntas de la prueba)**

Tercero A	Tercero B	Tercero C
30%	13%	0%
83%	0%	26%
43%	17%	0%
48%	65%	4%
57%	17%	0%
74%	0%	0%
70%	0%	65%
78%	4%	61%
78%	61%	13%
74%	0%	52%
48%	17%	35%
30%	26%	0%
83%	26%	0%
39%	22%	13%
9%	13%	13%
4%	17%	0%
13%	0%	0%
13%	26%	48%
17%	0%	0%
52%	13%	78%
0%	26%	22%
26%	4%	83%
13%	48%	65%
0%	0%	43%
39%	30%	48%
13%	0%	
0%		
39%		
4%		

ITEMES SOBRE REPRESENTACIÓN GRÁFICA Y LA ESCALA		
Menor que 60%:	66	82.5%
Mayor o igual que 60%:	14	17.5%

**ANEXO 3: SEGUNDA PRUEBA APLICADA EN TLAXCALA: ESCUELA
SECUNDARIA AGUSTÍN MELGAR (04 DE MAYO DEL 2016)**

PRUEBA DIAGNÓSTICA

ESTUDIANTE: _____ Grado: _____

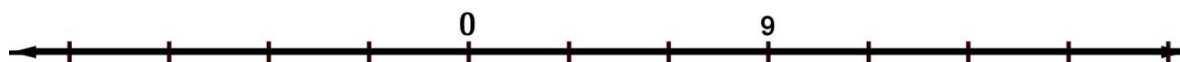
Institución: _____ Fecha: _____

Estimado estudiante: A continuación se presentan cuatro ítems que forman parte de un estudio sobre las gráficas en el plano cartesiano. Esta investigación es importante para mejorar los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Solicitamos atentamente tu colaboración contestando los ejercicios que se muestran a continuación, de la manera más honesta posible.

Resuelve cada uno de los ejercicios que se te dan a continuación:

1) Ubica sobre la recta los puntos que corresponden a los valores:

13, 15, 19, -4, -9, -12, (Marca el punto y escribe el número correspondiente sobre cada punto que traces).



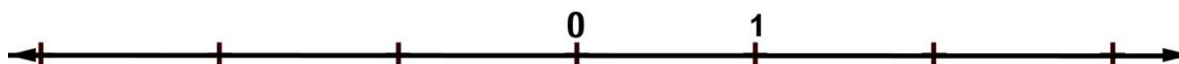
2) Escribe en los espacios dados el valor numérico que corresponde a los puntos marcados con las letras: A, B, C, D, E, F



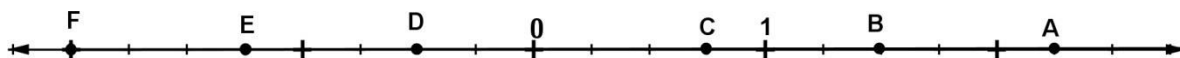
A: _____ B: _____ C: _____ D: _____ E: _____ F: _____

3) Ubica sobre la recta dada los puntos que corresponden a los valores:

-0.25, $-\frac{3}{2}$, -2.5, $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{4}$, 2.75 (Marca el punto y escribe el número correspondiente sobre cada punto que traces).



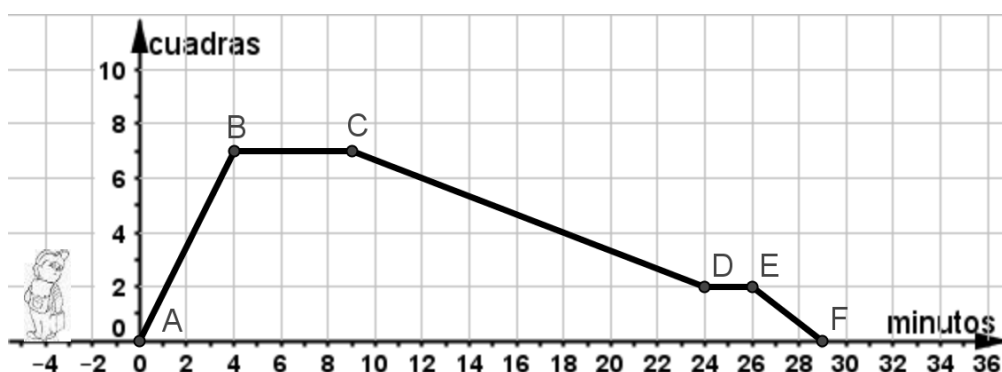
4) Escribe en los espacios dados el valor que corresponde a los puntos marcados con las letras: A, B, C, D, E, F



A: _____ B: _____ C: _____ D: _____ E: _____ F: _____

5) Pedro salió de su casa hacia la tienda a comprar un encargo de su mamá, y luego regresó a su casa por el mismo camino. Cuando

regresaba, se detuvo en la dulcería para comprar un chocolate. La siguiente gráfica representa la relación entre el tiempo transcurrido desde que salió de su casa y la distancia recorrida en ese tiempo hasta regresar a su casa.



Observa la gráfica y contesta las siguientes preguntas:

- 1) ¿A cuántas cuadras se encuentra la tienda de su casa?.....
- 2) ¿Cuántos minutos tardó en la tienda?
- 3) ¿Cuánto tiempo tardó en llegar desde su casa a la tienda?.....
- 4) ¿A cuántas cuadras se encuentra la tienda de la dulcería?.....
- 5) ¿Cuánto tiempo tardó desde la tienda hasta la dulcería?.....
- 6) ¿Cuántos minutos se detuvo a comprar su chocolate?..
- 7) ¿Cuánto tiempo tardó desde que salió de la tienda hasta llegar a su casa?.....
- 8) ¿Cuánto tiempo en total estuvo fuera de su casa?.....
- 9) ¿Cuántas cuadras hay de su casa hasta la dulcería?...
- 10) ¿Cuánto tiempo tardó desde que salió de la dulcería hasta llegar a su casa ?.....

¡GRACIAS POR SU COLABORACIÓN!

**ANEXO 4: CUADRO DE RESULTADOS OBTENIDOS POR ESTUDIANTES EN EL
DIAGNÓSTICO TLAXCALA (SEGUNDA PRUEBA): ESCUELA SECUNDARIA
AGUSTÍN MELGAR (04 DE MAYO DEL 2016)**

Calificación obtenida en preguntas referidas a la representación gráfica de valores numéricos en diferentes notaciones sobre una recta graduada

GRUPO		
Tercero A	Tercero B	Tercero C
92%	88%	96%
92%	75%	96%
58%	63%	92%
46%	46%	63%
42%	50%	88%
42%	46%	83%
54%	50%	88%
46%	13%	75%
38%	21%	67%
58%	29%	67%
38%	13%	38%
13%	17%	42%
4%	8%	8%
4%	0%	25%
4%	0%	25%
	21%	33%
	8%	4%
	13%	21%
	25%	4%
	0%	0%
	13%	0%
	8%	0%
	33%	0%
	0%	25%
	4%	4%
	4%	13%
	13%	4%
		4%

ITEMS SOBRE REPRESENTACIÓN GRÁFICA Y LA ESCALA		
Menor que 60%:	55 estudiantes	79%
Mayor o igual que 60%:	15 estudiantes	21%

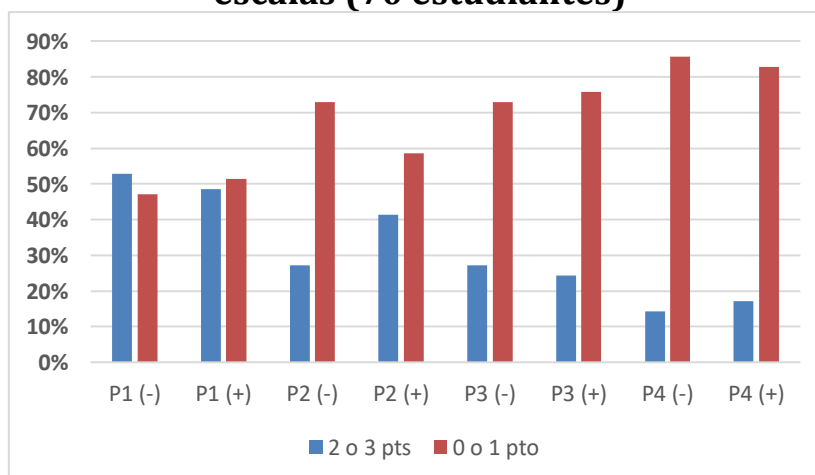
Número de aciertos en preguntas referentes a la representación gráfica de valores numéricos sobre rectas graduadas con diferentes escalas (70 estudiantes)

GRUPO	Puntaje	P1 (-)	P1 (+)	P2 (-)	P2 (+)	P3 (-)	P3 (+)	P4 (-)	P4 (+)
Tercero A	2 o 3 pts	12	10	7	9	3	3	2	2
	0 o 1 pto	3	5	8	6	12	12	13	13
Tercero B	2 o 3 pts	11	10	5	9	7	3	2	3
	0 o 1 pto	16	17	22	18	20	24	25	24
Tercero C	2 o 3 pts	15	15	8	12	9	12	7	8
	0 o 1 pto	13	13	20	16	19	16	21	20
	Puntaje	P1 (-)	P1 (+)	P2 (-)	P2 (+)	P3 (-)	P3 (+)	P4 (-)	P4 (+)
	2 o 3 pts	37	34	19	29	19	17	10	12
	0 o 1 pto	33	36	51	41	51	53	60	58
	total	70	70	70	70	70	70	70	70

	P1 (-)	P1 (+)	P2 (-)	P2 (+)	P3 (-)	P3 (+)	P4 (-)	P4 (+)
2 o 3 pts	53%	49%	27%	41%	27%	24%	14%	17%
0 o 1 pto	47%	51%	73%	59%	73%	76%	86%	83%

Item	(+) o (-)	Tipo	Escala	Notación
Pregunta 1	P1 (-)	Representación	Escala 3	Enteros negativos
	P1 (+)	Representación	Escala 3	Enteros positivos
Pregunta 2	P2 (-)	Identificación	Escala 4	Enteros negativos
	P2 (+)	Identificación	Escala 4	Enteros positivos
Pregunta 3	P3 (-)	Representación	Escala unitaria	notación decimal o fraccionaria (negativos)
	P3 (+)	Representación	Escala unitaria	notación decimal o fraccionaria (positivos)
Pregunta 4	P4 (-)	Identificación	Escala 0.25	notación decimal o fraccionaria (negativos)
	P4 (+)	Identificación	Escala 0.25	notación decimal o fraccionaria (positivos)

Porcentaje de aciertos en preguntas referentes a la representación gráfica de valores numéricos sobre rectas graduadas con diferentes escalas (70 estudiantes)



**ANEXO 5: CUADRO DE RESULTADOS OBTENIDOS POR ESTUDIANTES EN EL
DIAGNÓSTICO APLICADO EN PUEBLA A 35 ESTUDIANTES DE TERCERO DE
SECUNDARIA: ESCUELA SECUNDARIA TÉCNICA N° 60**

Cuadro de resultados en diagnóstico obtenidos por estudiantes: Secundaria Técnica #60, Pue

Estudiante	pregunta 1		pregunta 2		pregunta 3		pregunta 4		DIAGNÓSTICO
	neg	pos	neg	pos	neg	pos	neg	pos	Escala
B1	3	3	3	3	3	3	3	3	100%
B2	3	3	0	3	2	1	3	3	75%
B3	3	3	2	3	2	2	3	3	88%
B4	3	3	3	3	0	0	0	0	50%
B5	3	3	3	2	1	1	3	3	79%
B6	3	3	1	2	1	1	1	3	63%
B7	3	3	1	3	3	3	3	3	92%
B8	3	3	1	2	3	3	3	3	88%
B9	3	3	0	3	2	1	0	0	50%
B10	0	0	0	0	0	1	0	0	4%
B11	3	3	1	3	1	1	0	1	54%
B12	0	0	0	0	0	0	0	0	0%
B13	3	3	3	3	3	2	3	3	96%
B14	3	2	3	3	3	3	3	3	96%
B15	3	3	3	3	2	3	3	3	96%
B16	3	3	3	3	2	2	3	3	92%
B17	3	3	3	3	3	3	3	3	100%
B18	3	3	1	2	3	3	3	3	88%
B19	3	3	1	2	3	2	3	3	83%
B20	3	3	0	3	2	0	1	0	50%
B21	3	3	3	3	0	0	0	0	50%
B22	3	3	3	3	0	0	0	0	50%
B23	0	3	3	3	1	1	3	3	71%
B24	0	3	0	2	0	0	2	1	33%
B25	0	1	3	3	0	0	0	0	29%
B26	0	0	3	3	1	1	0	0	33%
B27	2	0	2	0	0	0	0	0	17%
B28	0	1	1	0	0	0	0	0	8%
B29	0	0	0	0	3	1	0	0	17%
B30	0	1	0	0	0	0	0	0	4%
B31	0	1	0	0	0	0	0	0	4%
B32	0	1	1	0	1	1	0	0	17%
B33	0	1	0	0	0	0	0	0	4%
B34	0	0	1	0	2	0	0	0	13%
B35	0	3	0	2	1	1	3	2	50%
B36	Estos estudiantes NO realizaron el diagnóstico aplicado el día lunes 23 de mayo del 2016. Sólo realizaron el laboratorio y la prueba final.								
B37									
B38									
B39									

El 57% de los estudiantes obtuvo una calificación menor que 60% en los ítems que evaluaban la representación gráfica de valores numéricos en diferentes notaciones.

El promedio mínimo de seis para pasar de año se mantiene en la secundaria:

<http://www.proceso.com.mx/353260/publica-la-sep-criterios-para-evaluar-a-estudiantes-de-educacion-basica>

**ANEXO 6: INSTRUCCIONES GENERALES E INSTRUMENTOS PARA
OBSERVAR EL TRABAJO REALIZADO POR LOS ESTUDIANTES EN EL
LABORATORIO**

Taller: “Representación Gráfica de Valores Numéricos Racionales”

El propósito de la actividad es probar los materiales web desarrollados para capacitar a los estudiantes de nivel secundaria en las habilidades de identificar y representar (ubicar) gráficamente valores numéricos en diferentes notaciones sobre una recta numérica graduada con diferentes escalas.

Vamos a trabajar algunas aplicaciones web divididas en siete niveles o momentos de aprendizaje.

Nivel 1: Identificación de números enteros en la recta numérica

Nivel 2: Representación de números enteros en la recta Numérica

Nivel 3: Identificación de números en notación decimal sobre la recta numérica

Nivel 4: Representación de números en notación decimal sobre la recta numérica

Nivel 5: Identificación de números en notación fraccionaria sobre la recta numérica

Nivel 6: Representación de números en notación fraccionaria sobre la recta numérica

Nivel 7: Lectura de una gráfica en el plano cartesiano

En los niveles 1, 3 y 5 se espera que el estudiante identifique y escriba el valor numérico representado sobre la recta. Para ello debe borrar el símbolo “?” y escribir el valor numérico correspondiente. Luego, debe presionar la tecla ENTER y por último, dar clic en el botón COMPROBAR (se debe dar un tiempo de espera). El mínimo de ejercicios que debe realizar para finalizar el nivel es de 10 ejercicios. Puede checar la ayuda que se presenta en un icono “?”

En los niveles 2, 4 y 6 se debe arrastrar y ubicar un punto hasta la posición que le corresponda sobre la recta de acuerdo con el valor dado en el ejercicio. Cuando haya ubicado el punto sobre la recta, debe dar clic en el botón Verificar. Puede checar la ayuda que se presenta en un icono  .

Los niveles 1 y 2 incluyen números enteros positivos y negativos en diferentes escalas, los niveles 3 y 4 se incluyen valores en notación decimal, y en los niveles 5 y 6 se incluyen, además, valores en notación fraccionaria positiva y negativa. Finalmente, en el último nivel se presenta un gráfico cartesiano que representa la relación entre el tiempo transcurrido y la distancia que recorre un individuo al salir y regresar a su casa.

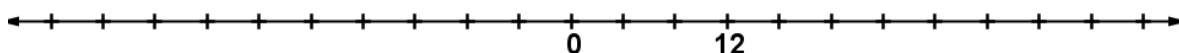
OBSERVACIONES ADICIONALES

Este recurso web se está desarrollando y se encuentra en proceso de mejora.

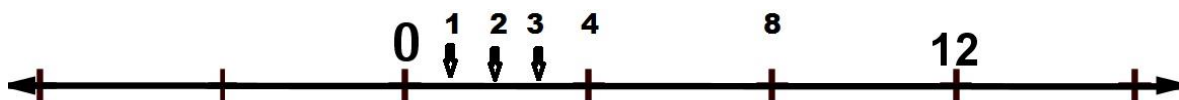
Los comentarios que puedas realizar para mejorar este software serán analizados para enriquecerlo.

Es importante que el estudiante sea capaz de identificar cuál es la escala presente en cada ejercicio, de modo que pueda utilizar esa información para calcular el valor que debe identificar o representar en cada momento.

La escala se refiere a la graduación de la recta, es decir, se deben observar las marcas ubicadas sobre la recta (“rayitas”) y determinar a qué distancia se hallan dos marcas consecutivas. Para lograrlo, en los ejercicios referidos a números enteros basta con observar los dos valores numéricos que se dan sobre la recta y con base en estos valores, calcular la distancia entre dos marcas consecutivas. Por ejemplo, entre el 0 y el 12 hay tres segmentos de igual medida, eso nos indica que entre cada par de marcas consecutivas de la recta hay una distancia de 4 unidades. Con esa información podemos calcular el valor numérico en cualquier marca sobre la recta con sólo determinar cuántos segmentos hay entre el cero y el valor requerido.



Además, se pueden calcular con cierta precisión los valores enteros ubicados entre dos marcas consecutivas de la recta. Por ejemplo, en la recta anterior, entre el 0 y el 12 se ubican los valores enteros 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 y 11, pero solamente el 4 y el 8 están sobre las marcas dadas entre 0 y 12. De manera que entre el 0 y la primera marca a su derecha (el número 4), se encuentran el 1, 2 y 3, los cuales deben ser distribuidos aproximadamente a iguales distancias entre ambas marcas.



Se espera que llamen al investigador cuando finalicen cada nivel para capturar en fotografía la última pantalla.

Al final del trabajo con la computadora, se les entregará una prueba escrita y un cuestionario de opinión.

ASISTENCIA LABORATORIO

Estudiante	NOMBRE Y FIRMA
B1	
B2	
B3	
B4	
B5	
B6	
B7	
B8	
B9	
B10	
B11	
B12	
B13	
B14	
B15	
B16	

A) Registro de observaciones sobre los estudiantes

9. Los estudiantes leen la hoja de instrucciones
10. Realizan cada aplicación con cuidado y dedicación
11. Siguen indicaciones dadas en las instrucciones escritas
12. Presentan dificultades que impiden avanzar en cada nivel ¿Qué tipo de dificultades?

____ escala ____ precisión ____ errores por distracción ____ manejo de la aplicación

____ otros Especifique: _____
13. ¿Qué errores se presentan debidos al recurso web? ¿Se lograron solucionar? ¿De qué manera?
14. ¿Se percibe motivación por parte de los estudiantes con respecto al uso del recurso web?
15. Solicitan ayuda del investigador (Poca) ____ 1 ____ 2 ____ 3 ____ 4 ____ 5 (Mucha) (tabla)
16. Tiempo empleado por cada estudiante para completar cada nivel (tabla)

B) Aspectos relacionados con el software

5. Lenguaje confuso para los estudiantes
6. Ambigüedad en las preguntas
7. Errores detectados en su funcionamiento
8. Otros (Especifique)

C) Tiempo requerido por el estudiante para completar cada nivel (minutos)

Estudiante	NIVEL 1	NIVEL 2	NIVEL 3	NIVEL 4	NIVEL 5	NIVEL 6	NIVEL 7
B1							
B2							
B3							
B4							
B5							
B6							
B7							
B8							
B9							
B10							
B11							
B12							
B13							
B14							
B15							
B16							

D) El estudiante ¿Solicitan ayuda del investigador ¿
(Poca) ___ 1 ___ 2 ___ 3 ___ 4 ___ 5 (Mucha)

Estudiante	1	2	3	4	5
B1					
B2					
B3					
B4					
B5					
B6					
B7					
B8					
B9					
B10					
B11					
B12					
B13					
B14					
B15					
B16					

E) Observaciones particulares presentadas por cada estudiante (dificultades, errores observados, etc.)

Estudiante/ Tiempo	DESCRIPCIÓN DE LA SITUACIÓN
B1	
B2	
B3	
B4	
B5	
B6	
B7	
B8	
B9	
B10	
B11	
B12	
B13	
B14	
B15	
B16	

**ANEXO 7: CUESTIONARIO APLICADO A ESTUDIANTES QUE REALIZARON
LOS LABORATORIOS**

Estimado (a) estudiante:

Ya hemos terminado la prueba del material web denominado “Representación Gráfica de Valores Numéricos Racionales” dividido en siete momentos de aprendizaje:

Nivel 1: identificación de números enteros en la recta numérica

Nivel 2: representación de números enteros en la recta Numérica

Nivel 3: identificación de números en notación decimal sobre la recta numérica

Nivel 4: representación de números en notación decimal sobre la recta numérica

Nivel 5: identificación de números en notación fraccionaria sobre la recta numérica

Nivel 6: representación de números en notación fraccionaria sobre la recta numérica

Nivel 7: Lectura de una gráfica en el plano cartesiano

Es necesario conocer y evaluar las dificultades, problemas y errores del proceso de enseñanza aprendizaje. Por lo tanto, te solicitamos que respondas al siguiente cuestionario. Tu aporte será de mucha ayuda para mejorar este material de enseñanza-aprendizaje.

Escribe dos aspectos del material que NO te agradaron:

Escribe dos aspectos del material que fueron de tu agrado:

¿Cuál de los niveles te fue más difícil de realizar? ¿Por qué?

¿Cuál de los niveles te fue más fácil de realizar? ¿Por qué?

¿Cómo evalúas el material de trabajo del laboratorio? En una escala del 0 al 10

___1 ___2 ___3 ___4 ___5 ___6 ___7 ___8 ___9 ___10

La ubicación de puntos sobre una recta numérica propuestos en los 6 niveles, comparado con los ejercicios que realizaste en la prueba diagnóstica, fueron:

_____ Más difíciles _____ Más fáciles _____ Muy parecidos

¿Qué opinas con respecto al uso de las aplicaciones dinámicas para resolver las situaciones propuestas?

La realización de las actividades en los diferentes niveles ¿Te ha ayudado a mejorar tu habilidad para identificar el valor que le corresponde a un punto dado sobre una recta numérica con lápiz y papel? Explica.

La realización de las actividades en los diferentes niveles ¿Te ha ayudado a mejorar tu habilidad para ubicar puntos con mayor precisión sobre una recta numérica con lápiz y papel? Explica.

¿Requeriste ayuda para resolver las actividades en la computadora? ¿Qué tipo de ayuda?

¿Has aprendido algo nuevo con la realización de las actividades propuestas en el recurso web?
¿Qué aprendiste?

**ANEXO 8: RESULTADOS DE LABORATORIOS SECUNDARIA TÉCNICA #60
PUEBLA, PUE**

Estudiante	CALIFICACIÓN OBTENIDA (%)						PLANO CARTESIANO										ESCALA	PLANO
	NIVEL1	NIVEL2	NIVEL3	NIVEL4	NIVEL5	NIVEL6	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10		
B1	100	87	100	100	100	100	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	98%	90%
B2	92.86	67	92.86	87.9	88.89	73	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	84%	90%
B3	90	100	100	93	100	87	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	95%	20%
B4	70	53	100	33	58.33	33	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	58%	30%
B5	95	80	100	73	85.7	47	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	80%	50%
B6	100	100	90	67	80	93	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	88%	80%
B7	100	100	100	100	100	100	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	100%	100%
B8	100	100	100	87	88.24	87	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	94%	100%
B9	61.54	87	90.91	60	78.57	73	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	75%	70%
B10	80	53	80	27	60	93	1	0	0	0	1	0	1	1	1	0	66%	50%
B11	100	73	60		70	53	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	71%	40%
B12	72.73	73	61.76	67	54.55	53	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	64%	0%
B36	90.91	100	73.33	*	*	47	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0	78%	50%
B37	90.91	67	65.85	53	37.5	27	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	57%	0%
B38	100	100	100	67	100	93	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	93%	70%
B39	100	47	90	50	40	40	1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	61%	40%
Los estudiantes B36, B37, B38 Y B39 NO realizaron la prueba diagnóstica																		

13% Calificación inferior a 60%

88% Calificación superior a 60%

No hay registro de calificación de B11 en el nivel 4. Tampoco hay registro de calificación de B36 en los niveles 4 y 5. Por lo tanto su porcentaje de aprovechamiento se calculó con base en los datos de los que existe constancia fotográfica.

ANEXO 9: PRUEBA FINAL APLICADA A ESTUDIANTES DE SECUNDARIA
TÉCNICA #60 PUEBLA, PUE
Instrumento y resultados

PRUEBA FINAL

ESTUDIANTE: _____ Grado: _____

Institución: _____ Fecha: _____

Estimado estudiante: A continuación se presentan cinco ítems que forman parte de un estudio sobre las gráficas en el plano cartesiano. Esta investigación es importante para mejorar los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Solicitamos atentamente tu colaboración contestando los ejercicios que se muestran a continuación, de la manera más honesta posible.

Resuelve cada uno de los ejercicios que se te dan a continuación:

1) Ubica sobre la recta los puntos que corresponden a los valores:

20, 2, 8, -16, -4, -9, (Marca el punto y escribe el número correspondiente sobre cada punto que traces).



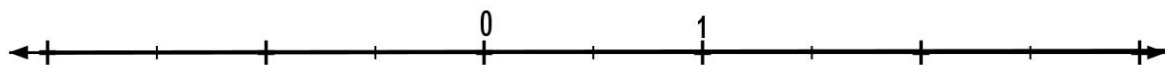
2) Escribe en los espacios dados el valor numérico que corresponde a los puntos marcados con las letras: A, B, C, D, E, F



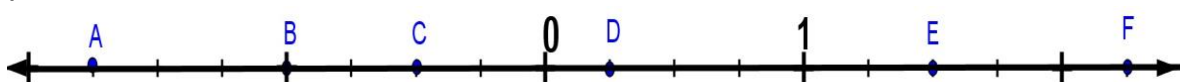
A: _____ B: _____ C: _____ D: _____ E: _____ F: _____

3) Ubica sobre la recta dada los puntos que corresponden a los valores:

-0.5, $-\frac{7}{4}$, -1, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{2}$, 2.75 (Marca el punto y escribe el número correspondiente sobre cada punto que traces).



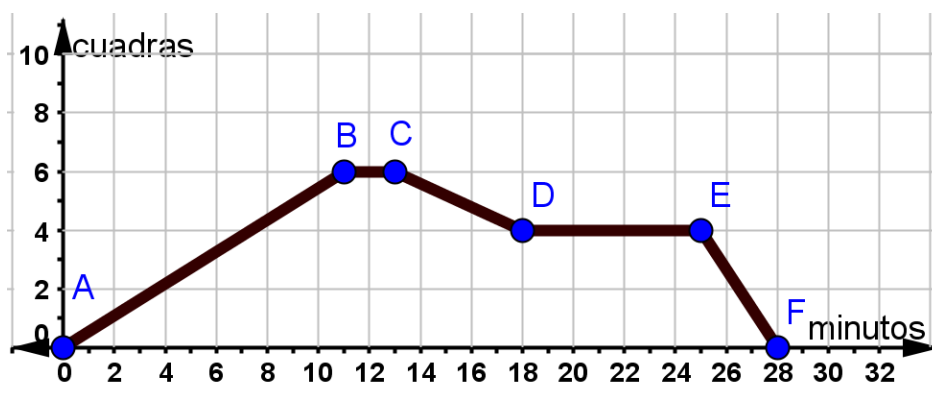
4) Escribe en los espacios dados el valor que corresponde a los puntos marcados con las letras: A, B, C, D, E, F



A: _____ B: _____ C: _____ D: _____ E: _____ F: _____

5) Pedro salió de su casa hacia la tienda a comprar un encargo de su mamá, y luego regresó a su casa por el mismo camino. Cuando regresaba, se detuvo en la dulcería para comprar un chocolate. **La siguiente gráfica representa la relación entre el tiempo**

transcurrido desde que salió de su casa y la distancia recorrida en ese tiempo hasta regresar a su casa.



Observa la gráfica y contesta las siguientes preguntas:

1. ¿A cuántas cuadras se encuentra la tienda de su casa?.....
2. ¿Cuántos minutos tardó en la tienda?
3. ¿Cuánto tiempo tardó en llegar desde su casa a la tienda?.....
4. ¿A cuántas cuadras se encuentra la tienda de la dulcería?.....
5. ¿Cuánto tiempo tardó desde la tienda hasta la dulcería?.....
6. ¿Cuántos minutos se detuvo a comprar su chocolate?
7. ¿Cuánto tiempo tardó desde que salió de la tienda hasta llegar a su casa?.....
8. ¿Cuánto tiempo en total estuvo fuera de su casa?.....
9. ¿Cuántas cuadras hay de su casa hasta la dulcería?...
10. ¿Cuánto tiempo tardó desde que salió de la dulcería hasta llegar a su casa ?.....

¡GRACIAS POR SU COLABORACIÓN!

Estudiante	pregunta 1		pregunta 2		pregunta 3		pregunta 4		Plano										PRUEBA FINAL		Diferencia con resultados laboratorio			
	neg	pos	neg	pos	neg	pos	neg	pos	p1	p2	p3	p4	p5	p6	p7	p8	p9	p10	Escala	Plano	Escala		Plano	
B1	3	3	2	3	3	3	3	3	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	96%	90%	MAYOR	0%	MAYOR	20%
B2	3	3	2	3	1	1	3	3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	79%	100%	MAYOR	4%	MAYOR	50%
B3	3	3	3	2	3	3	3	3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	96%	10%	MAYOR	4%	MAYOR	10%
B4	3	3	3	3	0	3	1	0	1	0	1	1	0	0	0	1	1	0	67%	50%	MAYOR	21%	MAYOR	30%
B5	3	3	3	3	0	1	3	3	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	79%	80%	MAYOR	0%	MAYOR	40%
B6	3	3	2	3	3	1	3	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	79%	80%	MAYOR	42%	MAYOR	60%
B7	3	3	3	3	3	3	3	2	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	96%	90%	MAYOR	8%	MAYOR	0%
B8	3	3	3	3	2	3	3	3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	96%	100%	MAYOR	8%	MAYOR	30%
B9	0	0	3	1	2	2	3	3	1	0	1	1	0	0	0	1	1	0	58%	50%	MAYOR	8%	MAYOR	50%
B10	0	1	2	3	2	2	3	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	63%	0%	MAYOR	54%	MAYOR	0%
B11	3	3	3	3	2	2	1	3	1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	83%	40%	MAYOR	25%	MAYOR	40%
B12	2	3	0	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	38%	10%	MAYOR	38%	MAYOR	10%
B36	3	3	3	3	2	2	1	3	1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	83%	40%	Estos estudiantes NO realizaron la prueba diagnóstica			
B37	1	3	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	25%	10%				
B38	1	3	2	3	2	3	3	2	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	79%	70%				
B39	2	2	0	1	0	2	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	29%	20%				
2 o 3	12	14	13	12	10	11	10	11	13	5	11	12	6	6	5	12	9	5						
0 o 1	4	2	3	4	6	5	6	5																

25% Calificación inferior a 60%

75% Calificación superior a 60%

**ANEXO 10: BREVE DESCRIPCIÓN COMPARATIVA: DIAGNÓSTICO-PRUEBA
FINAL**

Estudiante	Descripción
B1	En general mantiene un desempeño similar en ambas pruebas.
B2	En general mantiene un desempeño similar en ambas pruebas.
B3	PD: Ubica $-3/2$ en -1 y $5/4$ en 1 . PF: Ubica correctamente las fracciones con mayor precisión ($-7/4$, $3/2$ y $1/4$).
B4*	PD: No realiza las preguntas #3 y #4. PF: En #3 Ubica cinco valores fracciones o decimales correctamente.
B5	Mejora en algunos aspectos: uso del "-"
B6*	En la PF mejora puntaje en preguntas #2, #3 y #4. Sólo omite signo "-" en un valor de #2. En la #3 realiza una mejor aproximación gráfica de la representación de los valores $1/4$ y $3/2$. En la #4 aproxima muy bien los valores, y utiliza signo "-" correctamente.
B7	En general mantiene un desempeño similar en ambas pruebas.
B8	En general mantiene un desempeño similar en ambas pruebas. En la PF utiliza sólo fracciones en la pregunta #4
B9	En general mantiene un desempeño similar en ambas pruebas.
B10*	En PD En #1 escribe valores de mayor a menor de izquierda a derecha. En PF En #1 escribe los valores en orden. Aunque sólo representa bien el valor 8, ahora ubica los valores en orden correcto de menor a mayor. Aún no sabe utilizar la escala como herramienta para representar gráficamente un valor en la recta. Utiliza escala 5 en eje negativo. En #2: identifica los valores con mayor precisión. PF: En #3: Aproxima mejor la ubicación de los valores en notación fraccionaria y decimal PD: En #4 Utiliza escalas diferentes a la derecha e izquierda del 0. PF: En #4 identifica correctamente la mayoría de valores
B11*	PF: En #2 Mejora lectura de la escala PD: En #3 ubica $-7/4 = -1.75$ entre -1 y -1.5 , $3/2$ lo escribe después del 3 (para representar esta fracción busca $3 \frac{1}{2}$... parece que está representando 3.5) PF: En #4 Identifica correctamente cuatro valores en notación fraccionaria. Logra determinar que está dividida la recta cada $1/4$ de unidad, por lo que acierta C, D E, F ($-2/4$, $1/4$, $6/4$ y $9/4$ respectivamente) mediante conteo (cuántas veces hay $1/4$ desde 0 hasta el punto gráfico). Pero falla A y B: parece que en el eje negativo divide la escala a conveniencia de modo que asigna C= -1 , B= -2 (confunde $-3/4$ con $-3 \frac{1}{4}$)
B12*	PD: Deja respuestas en blanco, aunque intenta escribir algunos valores en una de las rectas dadas. PF: En #1 ubica correctamente cinco valores enteros. Realiza una buena lectura de la escala. Sólo se confunde al ubicar a -16 En #2 Lee la escala sin considerar las distancias entre las marcas de la recta. Sólo acierta el D=4. En #3 y #4 aunque obtiene pocos aciertos se puede considerar el hecho de que realiza la prueba final en su totalidad. E intenta utilizar valores decimales y enteros en sus respuestas.

ANEXO 11: DIFERENCIAL SEMÁNTICO

INSTRUMENTO APLICADO Y RESPUESTAS

Diferencial semántico

Un diferencial semántico es un método utilizado para medir por escalas las variables que constituyen actitudes. Este método fue diseñado para explorar las dimensiones del significado; y consiste en un conjunto de adjetivos extremos que califican al objeto de actitud. De manera que el participante califica un objeto de actitud a partir de un conjunto de adjetivos bipolares. Entre cada par de adjetivos se hallan varias opciones, de las cuales, el participante debe seleccionar la que mejor refleje su opinión sobre el objeto valorado (Hernández-Sampieri, Fernández-Collado & Baptista-Lucio, 2014).

Presentación

Estimada(o) estudiante:

- Agradecemos la colaboración que nos brinda proporcionando la información que se le solicita en esta ocasión.
- Se trata de un instrumento denominado “Diferencial semántico”, el cual sirve para medir el nivel general de percepción que usted tiene sobre el aprendizaje de la Matemática con apoyo de la computadora.
- Esta actividad forma parte de un proyecto de Tesis de la Maestría en Educación Matemática que estamos desarrollando en la Facultad de Físico-Matemática de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.
- La información que nos proporcione será totalmente confidencial y los resultados del estudio que sean publicados, serán presentados de manera general, de modo que no se pueda identificar qué persona o grupo de personas dieron determinada información.

DIFERENCIAL SEMÁNTICO

GÉNERO: M _____ F _____

Instrucciones: PARA CADA PAREJA DE PALABRAS, CUENTA CON SIETE POSICIONES DISTINTAS, TOMANDO EN CUENTA QUE LA POSICIÓN 1 CORRESPONDE A LA VALORACIÓN MÁS CERCANA A LA PALABRA DE LA IZQUIERDA Y LA POSICIÓN 7 CORRESPONDE A LA VALORACIÓN MÁS CERCANA A LA PALABRA DE LA DERECHA.

MARQUE UNA EQUIS (X) EN EL ESPACIO EN BLANCO QUE MÁS SE APROXIME A SU VALORACIÓN.

“PARA MÍ EL APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA CON APOYO DE LA COMPUTADORA ES...”

	1	2	3	4	5	6	7	
ABURRIDO								DIVERTIDO
INEFICAZ								EFICAZ
SIN VALOR								CON VALOR
FEO								BONITO
COMPLICADO								SENCILLO
INNECESARIO								NECESARIO
DESAGRADABLE								AGRADABLE
IRRELEVANTE								RELEVANTE

Estudiante	A-->D	I-->E	SV-->CV	F-->B	C-->S	I-->N	D-->A	I-->R		PROMEDIO	PREG5	PREG6
											ValorSoftware	PC--papel
B1	4	7	5	6	7	4	6	3		5.25	8	MP
B2	6	5	6	7	6	6	7	6		6.13	9	MP
B3	6	5	6	6	6	6	6	7		6.00	10	MP
B4	5	6	5	5	4	6	5	6		5.25	8	MP
B5	6	7	4	4	7	7	5			5.71	9	MF
B6	4	6	6	4	4	5	4	5		4.75	9	MP
B7	4	6	6	5	4	6	4	7		5.25	9	MF
B8	4	6	6	4	6	4	6	7		5.38	9	MCOMPLEJO
B9	6	7	7	6	5	6	6	6		6.13	10	MP
B10	5	7	6	4	6	7	6	7		6.00	9	MF
B11	6	7	7	6	7	7	6	6		6.50	10	MP
B12	4	3	6	5	5	4	2	5		4.25	7	MP
B36	6	7	7	5	4	7	6	6		6.00	10	MP
B37	7		4	5		7	7	6		6.00	8	MD
B38	7	7	7	5	6	6	6	6		6.25	10	MP
B39	7	7	7	2	6	7	7	7		6.25	10	MF
									PROMEDIO--	5.69	9.0625	
1	A-->D	Aburrido-Divertido										
2	I-->E	Ineficaz-Eficaz										
3	SV-->CV	Sin Valor-Con Valor										
4	F-->B	Feo-Bonito										
5	C-->S	Complicado-Sencillo										
6	I-->N	Innecesario-Necesario										
7	D-->A	Desagradable-Agradable										
8	I-->R	Irrelevante-Relevante										

ANEXO 12: CARTA DE NEGOCIACIÓN DE ACCESO A LA INSTITUCIÓN



BUAP

Mayo 16, 2016

A QUIEN CORRESPONDA

A través del presente le envío un cordial saludo, el que suscribe Director de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, me permito presentar a su fina consideración a la portadora del presente, Lic. Irene María Herrera Zamora alumna de la Maestría en Educación Matemática de esta Facultad, para solicitarle de la manera más atenta brinde las facilidades necesarias, para determinar algunas dificultades que presentan los estudiantes en la lectura de las gráficas cartesianas de funciones, y proponer algunos materiales elaborados con el software de geometría dinámica Geogebra, corregir dichas dificultades en los estudiantes de la institución a su digno cargo. Cabe señalar que esta actividad forma parte de su proyecto de investigación de la Maestría bajo la asesoría y supervisión del Dr. José Dionicio Zacarías Flores, profesor investigador de esta Unidad Académica.

Consciente de su compromiso con la educación mexicana, estamos seguros de poder contar con su apoyo para fortalecer los procesos de enseñanza aprendizaje de la matemática mediante el uso de la tecnología.

Sin más que el particular, quedo de usted.

ATENTAMENTE
"PENSAR BIEN, PARA VIVIR MEJOR"

DR. JOSÉ RAMÓN ENRIQUE ARRAZOLA RAMÍREZ
DIRECTOR

JREAR/JFLC/mcvg
 C. c. p. Archivo



60
AÑOS DE
AUTONOMÍA
 UNIVERSITARIA

Facultad
 de Ciencias
 Físico Matemáticas

Av. San Claudio y 18 sur, edif. 111 A,
 Ciudad Universitaria, Col. San
 Manuel, Puebla, Pue. C.P. 72570
 01 (222) 229 55 00 Ext: 7550 y 7552

ANEXO 13: COEFICIENTE DE CORRELACIÓN DE PEARSON

Según Hernández-Sampieri, Fernández-Collado y Baptista-Lucio, (2014, pp. 304-305) el coeficiente de correlación de Pearson “es una prueba estadística para analizar la relación entre dos variables medidas en un nivel por intervalos o de razón” (p. 304). Se prueba una hipótesis correlacional del tipo “a mayor X, mayor Y”, “a mayor X, menor Y”. Cuenta con dos variables, de manera que no se considera como independiente, una de ellas, y dependiente, la otra, debido a que no se evalúa la causalidad. Su cálculo se realiza a partir de las puntuaciones obtenidas en una muestra en dos variables. Se relacionan las puntuaciones recolectadas de una variable con las puntuaciones obtenidas en la otra, con los mismos participantes o casos. Para interpretarlo, el coeficiente r de Pearson puede variar de -1 a +1, donde:

-1.00 = Correlación negativa perfecta.

-0.90 = Correlación negativa muy fuerte.

-0.75 = Correlación negativa considerable.

-0.50 = Correlación negativa media.

-0.25 = Correlación negativa débil.

-0.10 = Correlación negativa muy débil.

0.00 = No existe correlación alguna entre las variables.

+0.10 = Correlación positiva muy débil.

+0.25 = Correlación positiva débil.

+0.50 = Correlación positiva media.

+0.75 = Correlación positiva considerable.

+0.90 = Correlación positiva muy fuerte.

+1.00 = Correlación positiva perfecta.

El signo indica la dirección de la correlación (negativa o positiva), y el valor numérico, la magnitud de la correlación. En el programa de análisis estadístico SPSS15 se presentan los coeficientes de correlación en una tabla, donde las filas o columnas son variables asociadas y se señala con asterisco el nivel de significancia: un asterisco (*) implica que el coeficiente es significativo al nivel del 0.05 (95% de confianza de que la correlación sea verdadera, y 5% de probabilidad de error) y dos asteriscos (**) que es significativo al nivel del 0.01 (99% de confianza de que la correlación sea verdadera, y 1% de probabilidad de error).

Las siguientes tablas se obtuvieron con SPSS15:

Con respecto a la prueba diagnóstica preliminar, se correlacionan las calificaciones de 80 estudiantes, considerando el puntaje total de la prueba y el puntaje obtenido en los cuatro ítems sobre la recta numérica. Se obtiene un valor de 0.945, lo cual corresponde con una correlación positiva muy fuerte. Además, se indica que hay un 99% de confianza de que la correlación sea verdadera.

Correlación entre las calificaciones obtenidas en la prueba total con respecto a los ítems relativos a la recta numérica

		Prueba Total	Ítem Recta
Prueba Total	Correlación de Pearson	1	.945(**)
	Sig. (bilateral)		.000
	N	80	80
Ítem Recta	Correlación de Pearson	.945(**)	1
	Sig. (bilateral)	.000	
	N	80	80

** La correlación es significativa al nivel 0,01 (bilateral).

En los diagnósticos aplicados en Tlaxcala en enero y mayo, se tienen 57 estudiantes que realizaron ambas pruebas. La correlación entre las calificaciones obtenidas es de 0.812, la cual se clasifica como una correlación positiva considerable. Además, se indica que hay un 99% de confianza de que la correlación sea verdadera.

Correlación entre las calificaciones obtenidas en las pruebas de enero y mayo en Tlaxcala

		Prueba Enero	Prueba Mayo
Prueba Enero	Correlación de Pearson	1	.812(**)
	Sig. (bilateral)		.000
	N	57	57
Prueba Mayo	Correlación de Pearson	.812(**)	1
	Sig. (bilateral)	.000	
	N	57	57

** La correlación es significativa al nivel 0,01 (bilateral).

Coefficiente de correlación obtenido al comparar los porcentajes obtenidos en las pruebas diagnóstica, laboratorio y prueba final.

		Diagnóstico	Laboratorio	Prueba Final
Diagnóstico	Correlación de Pearson	1	.796(**)	.901(**)
	Sig. (bilateral)		.002	.000
	N	12	12	12
Laboratorio	Correlación de Pearson	.796(**)	1	.710(**)
	Sig. (bilateral)	.002		.010
	N	12	12	12
Prueba Final	Correlación de Pearson	.901(**)	.710(**)	1
	Sig. (bilateral)	.000	.010	
	N	12	12	12

** La correlación es significativa al nivel 0,01 (bilateral).

ANEXO 14: ALFA DE CRONBACH

El coeficiente α de Cronbach puede ser calculado por medio de dos formas:

- a) Mediante la varianza de los ítems y la varianza del puntaje total.

$$\alpha = \left[\frac{K}{K-1} \right] \left[1 - \frac{\sum_{i=1}^K S_i^2}{S_t^2} \right]$$

Donde:

$\sum_{i=1}^K S_i^2$: Es la suma de varianzas de cada ítem.

S_t^2 : Es la varianza del total de filas

K : Es el número de preguntas o ítems.

TOTAL columna	112.00	107.00	65.00	84.00	60.00	54.00	41.00	41.00	564.00
Promedio	1.60	1.53	0.93	1.20	0.86	0.77	0.59	0.59	8.06
Desv. Estándar	1.30	1.30	1.28	1.34	1.09	1.13	1.04	1.01	7.30
varianza	1.69	1.70	1.63	1.79	1.20	1.28	1.09	1.03	53.27
	suma de varianzas	11.41							

$$\alpha = (8/7) * (1 - 11.41/53.27) \quad 0.8981749$$

k	8
k-1	7
k/k-1	1.14
Suma varianzas	11.41
vartotal	53.27
alfa	0.898174921