BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Aplicación de una secuencia de actividades didácticas para la expresión cuadrática basadas en el modelo 3UV en bachillerato

TESIS
PARA OBTENER EL TÍTULO DE
MAESTRO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

PRESENTA
Lic. Felipe Olvera Cruz

DIRECTOR DE TESIS
DR. Lidia Aurora Hernández Rebollar
CO-DIRECTOR DE TESIS
DR. María Araceli Juárez Ramírez

PUEBLA, PUE. Octubre 2018

Índice

Resumen

Este trabajo muestra los resultados obtenidos al aplicar una serie de actividades para el entendimiento de los distintos usos de la variable a un grupo de primer año de nivel bachillerato, de un colegio particular en el subsistema bachillerato general, en la ciudad de Puebla. La investigación consiste en una serie de prácticas llevadas a cabo durante el periodo de un mes, las cuales estaban enfocadas a la comprensión del concepto de variable. Consta de actividades, dos diferenciadoras y las restantes, son para el desarrollo de la comprensión de la variable como número general, variable como incógnita específica y variable como relación funcional. Para la elaboración del pre test así como el análisis de los resultados se utilizó el modelo 3UV (los tres usos de la variable) como marco teórico.

Introducción

Las variables se usan generalmente en textos escolares sin proporcionar una experiencia introductoria que pudiera servir como base para desarrollarse en sus diferentes significados (Ursini, 1993). En matemáticas se usan generalmente los símbolos literales para representar a las variables, y éstas pueden tomar diferentes significados según el contexto.

En un estudio sobre libros de texto, Tonnenssen (1981) encontró que casi en todos ellos se define de una manera explícita o implícita el concepto de variable como un símbolo fijo, así también como un referente para un conjunto de al menos dos elementos. Matz citado en Ruiz. B (2006) menciona: los mismos símbolos son utilizados para denotar diferentes caracterizaciones de la variable. Por ejemplo en $y = 3x + 2$ la x puede tomar cualquier valor, pero en $2x + 7 = 9$ sólo puede tomar el valor de 1. También ocurre que, diferentes símbolos son empleados para representar la misma caracterización de la variable. Por ejemplo, $y = x^2 + 6$ y $f(x) = x^2 + 6$. Esto contribuye a opacar las diferencias entre las distintas caracterizaciones de la variable y ocultar las condiciones que determinan dónde y cómo puede variar su valor. Más aún, es muy frecuente que para poder resolver un problema se requiera la capacidad de interpretar un mismo símbolo literal de maneras distintas.

Küchemann (1981) reportó en su estudio que la mayoría de los alumnos trataban las letras en expresiones y ecuaciones como incógnitas específicas o "número desconocido" más que como números generalizados o como variables. Este autor menciona que el 55% de los niños de 13 años encuestados afirmaron que la igualdad $L + M + N = L + P + N$ nunca es cierta. Booth (1982, 1983) encontró una fuerte resistencia de los alumnos para asimilar la noción de letra como número generalizado. Kieran (1989) evidenció que algunos alumnos no pueden asignar significado alguno a "a" en la expresión $a + 3$ porque la expresión carece de un signo igual y de un miembro a la derecha.

Küchemann (1981) identificó seis diferentes maneras de interpretar los símbolos literales, a saber:

Letra evaluada: A la letra se le asigna un valor numérico

Letra no utilizada: La letra es ignorada o su existencia es reconocida pero no se le atribuye ningún significado

Letra como objeto: Se considera la letra como una abreviación del nombre de un objeto o como a un objeto en sí.

Letra como incógnita específica: La letra representa un número particular pero desconocido y los alumnos son capaces de operar directamente sobre ella.

Letra como número generalizado: Se considera que la letra representa o es capaz de asumir distintos valores.

Letra como variable: Se considera que la letra representa un rango de valores no especificado y que existe una relación sistemática entre dos conjuntos de valores de este tipo.

Objetivo general. Mejorar el manejo de la expresión cuadrática, mediante una secuencia didática, empleando los diferentes usos de la variable en el nivel bachillerato.

La tesis está dividida en 4 capítulos. En el capítulo primero se comentan las razones del por qué se realizó esta investigación y un análisis de la evolución de la variable como número general, como incógnita específica y como relación funcional, así como la historia de los estudios sobre el concepto de variable.

En el segundo capítulo se describe el modelo 3UV que es el marco teórico en el cual se trabajará, se describen los distintos usos de la variable, así como sus caracterizaciones.

En el tercer capítulo se trata de la metodología utilizada. Aplicando el modelo 3UV se analizan las preguntas del pre test, así como las actividades diseñadas para el entendimiento en espiral de los distintos usos de la variable.

En el capítulo 4 se hace un análisis de los resultados obtenidos en las actividades, y el pos test, así como una conclusión sobre lo observado en los resultados cuantitativos y cualitativos del pos test.

Capítulo I. Motivación y Justificación del Estudio

1.1 Justificación del estudio

Los profesores de nivel básico y medio superior reconocen que muchos estudiantes tienen dificultades en sus cursos de álgebra, las investigaciones coinciden en señalar que la variable se presenta en una diversidad de formas cuando se resuelven problemas algebraicos y que en su carácter multifacético está el origen de muchas de las dificultades de los alumnos (Ursini 2008). Por ello considero importante que el estudiante mejore el dominio de los tres diferentes usos de la variable en la expresión cuadrática y así, tendrá herramientas para aplicarla en otro tipo de expresiones, facilitándole la resolución de problemas.

1.2 Motivación

Al trabajar con alumnos de bachillerato de quinto y sexto semestre observé que se tienen muchos problemas con las funciones, se les dificulta el cálculo de sus dominios, el rango, su gráfica, los ceros de la función, obtener máximos y mínimos, las dificultades no solo surgen en el concepto de función, o en el procedimiento para obtener ceros o máximos y mínimos. Existen otras dificultades, como por ejemplo, para hallar los ceros de la función hay que resolver la ecuación $f(x) = 0$, para hallar los puntos críticos hay que resolver la ecuación $f'(x) = 0$, ya en la resolución de las ecuaciones si se utiliza el teorema del "factor cero" se necesita realizar la factorización de $f(x)$. En el momento que se quiere expresar una función dado un problema verbal, se necesita pensar en la variable como número general. En sí, los problemas que tienen los alumnos en estos niveles o más avanzados no solo son el entendimiento de un concepto, o la aplicación de un procedimiento algorítmico sino que además existe un problema extra aunado a los antes mencionados que es el del manejo de la variable. Y el uso multifacético de la variable genera que los estudiantes tengan mucha dificultad en la resolución de problemas de cálculo por ejemplo:

Dada la siguiente función $y = x^2 + 2x - 8$.

a) ¿Qué ocurre con los valores de y cuando los valores de x crecen?
b) ¿Para qué valores de x los valores de y son positivos?
c) ¿Para qué valores de x los valores de y son negativos?
d) ¿Para qué valor de x el valor de y es mínimo?

Para resolver el problema es necesario ver a x como una relación funcional respecto de y, además, para encontrar los puntos de intersección con los ejes, así como el valor mínimo, se necesitan resolver ecuaciones (variable como incógnita). Para hallar las intersecciones con el eje X se debe resolver la ecuación $x^2 + 2x - 8 = 0$ en la cual el miembro izquierdo, si se logra factorizar (variable como número general), se podrá aplicar el teorema del factor cero para hallar las soluciones.

Este manejo de la variable no lo tiene el alumno del último año de bachillerato debido, en gran medida, a que no se trabaja con los diferentes usos de la variable en grados anteriores, de manera que el estudiante los distinga y pueda integrarlos en la resolución de un problema que los incluya. Es por esta razón que me llamá la atención realizar una secuencia de actividades que ayudaran al manejo de los tres usos de la variable.

En particular me llamó la atención la función cuadrática, no porque la función lineal no fuese interesante, sino porque, pensando en los tres usos de la variable, la función cuadrática tiene muchos más elementos que se pueden explotar y transpolar, ya sea a la función lineal o funciones más “complejas”. En cuanto a los elementos que tiene la función cuadrática respecto a la lineal se pueden resaltar: distintas formas de factorización (variable como número general) distintos métodos en la resolución de la ecuación (variable como incógnita específica). Dada la gráfica de una parábola no es inmediato obtener la expresión analítica que la genera, o dada una tabla de la relación del tipo cuadrático, tampoco es sencillo obtener la expresión analítica que la genera (variable como relación funcional). En contraste, para la gráfica de la función lineal solo hay que observar su pendiente y el punto de intersección con el eje Y. Para conocer su expresión analítica, dada la tabla, con dos puntos podemos calcular su pendiente $\left(m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)$ para posteriormente, usando la ecuación punto pendiente, conocer la función que genera dicha tabla.

En un principio se pretendía trabajar la secuencia con estudiantes del último año de bachillerato, sin embargo, se consideró más productivo trabajar una secuencia en el primer año, debido a que en el primer año los programas de estudio en México se enfocan al álgebra. Esperando que al trabajar con una función en especial, que es la expresión cuadrática, se logre que posteriormente el alumno extrapole a otro tipo de funciones.

1.3 Antecedentes históricos

El aprendizaje de un concepto matemático no es un producto que se obtenga de manera simple solo por el hecho de que haya gente que ahora lo plasme en libros como un producto ya terminado; por el contrario, dicho aprendizaje tiene que enfocarse en las concepciones y obstáculos que lo originaron y consolidaron a través de la historia. Sierpinska (1989, 1992), Cotret (1985, 1989) y Sfard (1991) citados por Posada y Villa (2006) coinciden en que la historia es una herramienta para la actividad educativa en la medida en que le sirve al educador fuentes de reflexión a la hora de diseñar actividades de aprendizaje de las matemáticas; además de ser una herramienta para identificar las dificultades o, incluso los obstáculos, que aparecieron en un concepto y pueden reaparecer en el aula (Tzanakis y Arcavi, 2000).

Así que no solo hay que pensar en los tres usos de la variable de una forma conjunta sino también sobre la historia que tuvo cada uno de ellos.

En la historia de la función cuadrática comenzaremos con lo que se conocía sobre la función cuadrática antes de Galileo.

Antes de Galileo.

Prácticamente las primeras nociones cuadráticas estuvieron asociadas a conceptos de la geometría. Particularmente en los Elementos de Euclides, el cuadrado se define de la siguiente manera "… entre las figuras cuadriláteras, cuadrado es la que es equilátera y rectangular" posteriormente esta acepción cuadrática la retomarían los árabes como una aproximación al álgebra y que para la época de Galilei permanecía vigente, para ampliar la relación entre la geometría y el álgebra.

Aunque desde Platón se evidencia el interés por el estudio de los cuerpos en movimiento (Kline 1972). Es Galilei en 1638 quien unifica lo construido por Apolonio con fenómenos naturales, con el fin de obtener una mayor comprensión del mundo que les rodea en la medida en que elabora una matematización de ese fenómeno. Con Galilei se consolida un gran momento para edificar el concepto de función cuadrática estableciendo la ruptura en la concepción de parábola como figura, que tenía la siguiente propiedad: "… de que para todo punto tomado sobre la curva, el cuadrado construido sobre su ordenada y es exactamente igual al rectángulo construido sobre la abscisa x y el latus rectum l". A ser considerada como el resultado del comportamiento de fenómenos de variación. Las cónicas y en particular la parábola se consideran en la actualidad como referentes importantes para el estudio de las relaciones cuadráticas, sin embargo se observa que históricamente surgieron de forma independiente a las nociones relativas al concepto de función. Con base en esta aseveración es importante generar las reflexiones pertinentes sobre las implicaciones que tendría en el aula de clase, continuar replicando esta parte de la historia abordando dichos conceptos de manera independiente o por el contrario evaluar las implicaciones que tendría para la comprensión de ambos conceptos es de manera conjunta. Pero como menciona Ursini (2008) en el modelo 3UV una de las caracterizaciones de la variable como relación funcional es:

F1. Reconocer la correspondencia entre variables relacionadas, independientemente de la representación utilizada (tablas, gráficas, problemas verbales, expresiones analíticas). Así que nos quedaremos con la comprensión de ambos conceptos de manera conjunta.

Los aportes de Galilei, se observa la forma en que recurre a sistemas de representación a partir de gráficas rectangulares, es una demanda además de la comprensión geométrica del gnómon, como dirían los griegos clásicos, o el concepto de perpendicular y ángulo recto, que representa distancia, altura, etc. Esta comprensión a su vez relaciona este segmento con la media proporcional o la raíz cuadrada, por lo que le da un valor agregado a las consideraciones de Oresme respecto a la perpendicular. Aunque según Mason citado en Posada y Villa (2006) la expresión de la generalidad es una de las bases del pensamiento algebraico, es posible pensar en un inicio de este pensamiento, tanto así que posteriormente esta generalidad sirve para el planteamiento del álgebra, pero no puede garantizarse la existencia de este pensamiento en los griegos, dado que sus razonamientos se basaban en las figuras geométricas más que en la relación cuadrática de la magnitud área con respecto a la longitud del lado. En este sentido se observa que las relaciones cuadráticas estaban firmemente ligadas a una interpretación geométrica y como punto central áreas de figuras planas.

Diofanto

El punto culminante del álgebra, greco-alejandrina, se alcanzó con Diofanto que no se basa en significados geométricos si no en las relaciones geométricas. Siendo esta última una relación entre las propiedades permitiendo verlas desde un punto de vista algebraico. Diofanto plantea y resuelve ecuaciones indeterminadas de segundo grado, es decir, con varias soluciones, con lo que se podría observar en Diofanto la idea de variable. Plantea ecuaciones cuadráticas de la forma:

$$ax^2 = 0$$

$$ax^2 + bx = c$$

$$ax^2 = bx$$

Diofanto resuelve ecuaciones cuadráticas cuya forma más general en nuestra notación actual es:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Sin embargo solo consideraba las raíces positivas, a diferencia de los indios (de la India) que sabían que las ecuaciones cuadráticas tenían dos raíces e incluían las negativas y las racionales, en expresiones como $ax^2 + bx = c$ usaban el método de completar cuadrados Kline (1970).

Las funciones.

Los acercamientos a la construcción del concepto de función los proporcionan Descartes y Fermat con la geometría analítica al estar más interesados en la resolución geométrica de las ecuaciones algebraicas con dos variables, y al hecho de asociar a cada curva una ecuación analítica. (Mankiewicz 2005) anota que: "Descartes también rompió con la tradición al tratar las potencias como números y no como objetos geométricos, x^2 ya no era un área sino un número surgido de la segunda potencia; su equivalente Geométrico era la parábola; no el cuadrado". Una ruptura importante en esta concepción de cuadratura para lo que significaría la construcción del concepto función cuadrática. Como señala Del Río, (1996) "[Descartes] encontró métodos para construir geométricamente los valores de una variable fijados los de la otra". Por esto ya tiene dos propiedades de la definición de función: la primera, el considerar dos cantidades variables y la segunda, una cierta relación de dependencia. En el modelo 3UV se refiere a (F1) Dirichelt dio la definición de función que es la más empleada hoy en día: " y es una función de x cuando al valor de x en un intervalo dado le corresponde un número y ". Cauchy (1821), citado por (Kline 1972), dice que: " Cuando se relacionan cantidades variables entre ellas de modo que, estando dado el valor de una de estas, se puede determinar los valores de todas las otras, ordinariamente se considera a estas cantidades diversas expresadas por medio de la que está entre ellas, la cual entonces toma el nombre de variable independiente y las otras cantidades expresadas por medio de la variable independiente son aquellas a las que uno llama funciones de esa variable". La relación de dependencia entre estas variables facilita la relación en el plano cartesiano por medio de la expresión analítica (ecuación), y según Euler toda función es una expresión analítica. Creemos que de esta forma es posible considerar un hecho que pudiera marcar el paso las formas cónicas a las funciones. Todo lo anterior evidencia cómo los diferentes protagonistas en la construcción de este concepto, se valieron de un conocimiento empírico, inicialmente, con el fin de someterlo a un sistema racional para posteriormente ser fuente de elementos generadores de nuevos conceptos, sin obedecer a una estructura lineal de dependencia, pero que permite concluir acerca de la importancia de los saberes previos para considerar nuevos conceptos, ya sea para ser mejorarlos o replantearlos.

1.4 Antecedentes de investigación.

Las variables se usan generalmente en textos escolares sin proporcionar una experiencia introductoria que pudiera servir como base para desarrollarse en sus diferentes significados (Ursini, 1993). En matemáticas se usan generalmente los símbolos literales para representar a las variables, y éstas pueden tomar diferentes significados según el contexto.

Existe un estudio realizado en la universidad de Sonora (Morales 2003). A estudiantes de primer semestre del nivel universitario. Las conclusiones que llegaron en un examen diagnóstico fueron:

- Se esperaba que fuera clara la diferencia entre variables y constantes, pero no fue así.
- Se refleja un pobre manejo del concepto de variable, aún visto como relación funcional.
- Se observa dificultad para redactar en oración verbal algunas proposiciones: no se hace patente el orden en que se realizan las operaciones ni es clara la separación entre unas y otras.
- No se tiene habilidad para interpretación de problemas y su representación mediante una expresión.
- Se cometen errores injustificados para el nivel de preparación matemática de los estudiantes.
- Se percibe bastante dificultad para la generalización de resultados en un proceso, al igual que para representar como relación funcional una cierta situación.

El estudio muestra que el mal manejo de la variable se tiene hasta el nivel inicial universitario, lo que sugiere se siga trabajando en niveles anteriores, como lo es media superior y educación básica.

En un estudio sobre libros de texto, Tonnenssen (1981) encontró que casi en todos ellos se define de una manera explícita o implícita el concepto de variable como un símbolo fijo, así también como un referente para un conjunto de al menos dos elementos. Matz (1982) menciona: los mismos símbolos son utilizados para denotar diferentes caracterizaciones de la variable. Por ejemplo en $y = 3x + 2$ la x puede tomar cualquier valor, pero en $2x + 7 = 9$ sólo puede tomar el valor de 1. También ocurre que, diferentes símbolos son empleados para representar la misma caracterización de la variable. Por ejemplo, $y = x^2 + 6$ y $f(x) = x^2 + 6$. Esto contribuye a opacar las diferencias entre las distintas caracterizaciones de la variable y ocultar las condiciones que determinan dónde y cómo puede variar su valor. Más aún, es muy frecuente que para poder resolver un problema se requiera la capacidad de interpretar un mismo símbolo literal de maneras distintas.

Küchemann (1981) reportó en su estudio que la mayoría de los alumnos trataban las letras en expresiones y ecuaciones como incógnitas específicas o "número desconocido" más que como números generalizados o como variables. Este autor menciona que el 55% de los niños de 13 años encuestados afirmaron que la igualdad $L + M + N = L + P + N$ nunca es cierta. Booth (1982, 1983) encontró una fuerte resistencia de los alumnos para asimilar la noción de letra como número generalizado. Kieran (1989) evidenció que algunos alumnos no pueden asignar significado alguno a "a" en la expresión $a + 3$ porque la expresión carece de un signo igual y de un miembro a la derecha.

Küchemann (1981) identificó seis diferentes maneras de interpretar los símbolos literales, a saber:

Letra evaluada: A la letra se le asigna un valor numérico

Letra no utilizada: La letra es ignorada o su existencia es reconocida pero no se le atribuye ningún significado

Letra como objeto: Se considera la letra como una abreviación del nombre de un objeto o como a un objeto en sí.

Letra como incógnita específica: La letra representa un número particular pero desconocido y los alumnos son capaces de operar directamente sobre ella.

Letra como número generalizado: Se considera que la letra representa o es capaz de asumir distintos valores.

Letra como variable: Se considera que la letra representa un rango de valores no especificado y que existe una relación sistemática entre dos conjuntos de valores de este tipo.

Küchemann (1981) clasificó seis diferentes interpretaciones de la letra, que se resumen en la Tabla 1.1

Tabla 1.1 Diferentes interpretaciones de la letra (Küchemann, 1981)

Categoría	Interpretación	Ejemplo de pregunta y comentarios
Letra evaluada	La letra se le asigna un valor específico desde el principio	Encuentra "a" en $a + 5 = 8$. No se requiere la manipulación de la variable
Letra no usada	Los niños ignoran la letra, o reconocen su existencia, pero sin darle un significado.	Dado $a + b = 43$ encuentra. $a + b + 2$. Un método es hacer coincidir independiente de las letras comunes. La única operación es añadir el número dos.
Letra usada como un objeto	La letra es considerada como forma abreviada de un objeto o como un objeto en sí mismo.	La longitud de cada lado de un triángulo equilátero es l, encontrar el perímetro. Al reducir el objeto abstracto a algo concreto, como una etiqueta para un objeto, por ejemplo, la dificultad del problema se reduce significativamente.

Letra usada como incógnita específica	Los niños consideran la letra como un número específico, pero desconocido, y pueden operar sobre ella directamente.	Si $e + f = 8$, de una expresión para $e + f + g$. Mientras "$e + f$" puede ser cambiada por 8, la respuesta requiere la manipulación de la incógnita
Letra usada como número general	La letra es vista como la representación, o al menos como ser capaz de tener varios valores, en lugar de sólo uno.	¿Qué puedes decir acerca de c si $c + d = 10$ y c es menor que d?. El objetivo es ver si los estudiantes darán varios valores de c, en lugar de percibir c como un número específico que se encuentra.
Letra usada como una variable	La letra es vista como que representa un rango de valores especificados, y una relación sistemática que existe entre dos de tales conjuntos de valores.	¿Qué es más grande, $2n$ o $n + 2$? Explicar. Una forma de abordar esto es mirar cómo $2n$ y $n + 2$ cambian cuando n cambia; y luego comparar las razones de cambio. Así, el método requiere la construcción de relaciones 'primer nivel' y luego compararlas, por lo tanto, la formación de una segunda relación de orden.

En resumen se observaron las siguientes tendencias:

1. las letras eran considerados como "objetos" en lugar de posición para los números.

2. A las letras les fueron asignados valores numéricos desde el principio, en lugar de ser visto como incógnitas para ser manipuladas.

3. Una letra representa un número específico; tenían diferentes letras para representar números diferentes.

4. Una letra fue vista como una incógnita específica en lugar de una variable general.

5. Una letra fue percibida como de posición por unos pocos valores posibles,

tal vez restringido a los discretos valores positivos, posiblemente extendiéndose hasta decimales, fracciones o / y los números negativos. A veces no había evidencia de que el estudiante reconoce otras posibilidades como pensaban a través de cada conjunto de resultados y consideró las implicaciones.

6. Interpretación dependía del contexto percibido, por ejemplo, una fórmula como contra una ecuación.

7. Las cartas estaban asociados con roles particulares; frecuencia x e y se introdujeron si el estudiante sentía eran necesarios dos incógnitas.

8. más de una interpretación podría ser utilizado en una sola pregunta.

También hubo pruebas de que algunos estudiantes concebidos de una letra como la representación de un objeto único al mismo tiempo que ser considerado como un número generalizado, lo que sugiere que la 'letra como objeto "puede existir en varios niveles del pensamiento formal, no sólo en el pensamiento concreto.

El "símbolo de un elemento de un conjunto de reemplazo" la concepción de la variable parece hoy tan natural que rara vez se cuestionó. Sin embargo, no es la única visión posible para las variables. En la primera parte de este siglo, la escuela formalista de matemáticas se consideran a las variables y a todos los demás símbolos de matemáticas simplemente como marcas en el papel relacionados entre sí por las propiedades asumidas o derivados que son también marcas en el papel (Kramer 1981)

Muchos estudiantes piensan que todas las variables son letras que representan números. Sin embargo, los valores que una variable toma no siempre son números, incluso en las matemáticas de secundaria. En geometría, las variables a menudo representan solo puntos, como se ve por el uso de las variables A, B y C cuando escribimos "si AB = BC, a continuación, ‣ ABC es isósceles." En la lógica, la p variables, y q a menudo definen proposiciones; en el análisis, la variable f a menudo significa una función; en álgebra lineal, la variable A puede representar una matriz o la variable v para un vector; y en álgebra superior la variable * puede representar una operación. El último de ellos demuestra que las variables no necesitan ser representados por las letras.

Usinski (1988) menciona: el concepto de la variable en sí es multifacética. Considere estas ecuaciones, todas las cuales tienen la misma forma, el producto de dos números iguales a un tercero:

1. $A = LW$
2. $40 = 5x$
3. $sen\ x = cosx \cdot tanx$
4. $1 = n({}^{1}/_{n})$
5. $y = kx$

Sin embargo, cada uno de ellos tiene una interpretación diferente: (1) una fórmula, (2) una ecuación, (3) una identidad, (4) una propiedad, y (5) una función. Estos nombres diferentes reflejan diferentes usos a los que se opone la idea de variable. Sólo en (5) existe la sensación de "variabilidad".

El alumno tiene dificultades con el manejo de un sólo uso de la variable (como incógnita, por ejemplo), luego, al pasar a temas donde la misma letra tiene otro uso, puede tener confusión. Un problema mayor se genera cuando en un mismo problema aparece una letra con tres significados. Es por esto que Ursini (2008) recomienda que para mejorar el aprendizaje del álgebra, se realicen actividades diferenciadoras e integradoras de tres usos de la variable (como incógnita, número general y en relación funcional), para que, en un desarrollo en espiral y de lo sencillo a lo complejo, el estudiante los distinga y los integre. A esta propuesta se le conoce como el Modelo 3UV.

Hernández (1998) Investiga las deficiencias en los alumnos de nuevo ingreso a la universidad en el concepto de variable, entre una de las causas que lo originan, el menciona que los métodos de enseñanza de los profesores para el concepto de variable es una de las causas. El propone actividades que involucran el uso de la computadora. Y concluye que logra un avance en la comprensión del concepto de variable. Los problemas con los usos de la variable no solo surgen desde secundaria, si no llegan hasta nivel licenciatura, debido en gran medida a que no se trabajan con sus tres características que menciona Ursini.

(Juárez 2002) Investiga el concepto de variable que poseen los profesores de nivel secundaria en activo. Mediante un cuestionario y entrevistas clínicas. Algunos resultados que arrojo él estudio son:

- El porcentaje promedio de respuestas correctas a las preguntas del cuestionario fue de 52.7% lo que indica que la mayoría de los profesores tienen una pobre comprensión del concepto de variable.
- El 65% de los profesores contestó correctamente menos del 60% de las preguntas
- Ninguno de los profesores contestó correctamente el 100% de las preguntas del cuestionario.

Así que es difícil que el estudiante de secundaria domine de manera efectiva los distintos usos de la variable, cuando sus profesores tienen dificultades para distinguir y manipular los distintos usos de la variable.

En secundaria la variable se trabaja de la siguiente manera:

1.5 La función, ecuación y expresión cuadrática en secundaria.

Bloque I. Sentido numérico y pensamiento algebraico.

Resolución de problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas sencillas, utilizando procedimientos personales u operaciones inversas. Desarrollo de la (Variable como incógnita) I1, I2, I3, I4 e I5

Bloque I. Manejo de la información.

Representación tabular y algebraica de relaciones de variación cuadrática, identificadas en diferentes situaciones y fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas.

Bloque II. Sentido numérico y pensamiento algebraico.

Identificación y búsqueda de expresiones algebraicas equivalentes a partir del empleo de modelos geométricos.

Bloque II. Sentido numérico y pensamiento algebraico.

Uso de ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la factorización.

Bloque III. Sentido numérico y pensamiento algebraico

Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones cuadráticas. Aplicación de la fórmula general para resolver dichas ecuaciones.

Bloque III. Manejo de la información

Lectura y construcción de gráficas de funciones cuadráticas para modelar diversas situaciones o fenómenos.

Bloque IV. Sentido numérico y pensamiento algebraico.

Obtención de una expresión general cuadrática para definir el enésimo término de una sucesión.

Bloque V. Sentido numérico y pensamiento algebraico.

Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones lineales, cuadráticas o sistemas de ecuaciones. Formulación de problemas a partir de una ecuación dada.

Bloque V. Manejo de la información

Análisis de situaciones problemáticas asociadas a fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas, en las que existe variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades.

Capítulo 2. Marco Teórico

La mayoría de los alumnos aprende a resolver las ecuaciones de segundo grado, pero esto no implica que no tengan problemas con la interpretación de las variables y su manipulación, sino que recurren a la memorización de los métodos (Ursini 2008).

A pesar que desde la secundaria se trabaja con la variable como incógnita específica al resolver ecuaciones, como variable general al generalizar mediante una fórmula una expresión general de una sucesión, en el desarrollo de los productos notables y en el proceso de factorización. Como relación funcional en el análisis de la función lineal y de la cuadrática, así como en el tema de segundas diferencias. Sin embargo, por lo general, en el aula no se pone énfasis en que es lo que hace diferentes a estos tres usos de la variable y, en consecuencia, cuales son las acciones apropiadas que hay que tomar en cada caso (Ursini 2008).

Generalmente el estudiante al momento de aparecer una expresión algebraica la asocia a una ecuación, limitando lo tres usos que puede tener la variable y solo identifica cada uso por separado en el momento en que es parte de un tema y le es difícil integrarlos en un problema. Es debido a esto que se usará como marco teórico el modelo 3UV. Mediante la enseñanza en espiral se espera que el estudiante diferencie entre una ecuación cuadrática, una expresión cuadrática y una función cuadrática, pero además, que las integre en la resolución de problemas que las involucren.

2.1 Diagrama de enseñanza en espiral

En base a la complejidad del uso multifacético de la variable se espera que para que el estudiante logre la comprensión de la variable y disminuyan sus problemas de aprendizaje de conceptos algebraicos, se necesita que el conocimiento de la variable logre la distinción entre los diferentes tres usos y permita el paso entre cada uno de ellos (Ursini y Trigeros, 2002).

2.2 El modelo 3UV

En el bachillerato se desea que el alumno identifique y resuelva problemas que involucren distintos tipos de funciones, nos centraremos en la función cuadrática y mediante el uso de actividades que diferencien e integren los distintos uso de la variable en la función cuadrática esta sea manejada tanto como lo es la función lineal.

Aspectos que caracterizan a cada uno de los tres usos de la variable y que conforman el modelo 3UV.

1. Variable como incógnita específica.

   Para entender el uso de la variable como incógnita específica, se tiene que pensar en que existe una cantidad desconocida a la cual se le puede dar un valor específico según la información de un problema o situación planteado. Es necesario en un principio simbolizar mediante una variable ese valor que se quiere hallar, para después usando la información del problema se plantee una ecuación. Posteriormente el estudiante buscara mediante sus conocimientos algebraicos determinar el valor de la variable. Adueñarse del concepto de la variable como incógnita nos lleva a lo siguiente.

   I1. Reconocer e identificar, en una situación problemática, la presencia de algo desconocido que puede ser determinado considerando las restricciones del problema.

   I2. Interpretar la variable simbólica que aparece en una ecuación, como la representación de valores específicos.

   I3. Sustituir la variable por el valor o valores que hacen de la ecuación un enunciado verdadero.

   I4. Determinar la cantidad desconocida que aparece en ecuaciones o problemas, realizando operaciones algebraicas. Aritméticas o de ambos tipos.

   I5. Simbolizar las cantidades desconocidas identificadas en una situación específica y utilizarlas para plantear ecuaciones.

2. Variable como número general.

   En la comprensión de la variable como número general, se tiene que desarrollar la capacidad de identificar patrones, deducir reglas o generalizaciones y describirlos, hay que distinguir lo que cambia y lo que no, se usan símbolos para representar las cantidades indeterminadas las cuales no necesariamente es importante el determinarlas, esas cantidades se pueden manipular, usando el desarrollo de las expresiones, o factorizando o simplificando las expresión sin preocuparnos por la asignación de valores específicos a la variable y si pensar en que puede tomar diferentes valores e inclusive generalmente una infinidad. Adueñarse del concepto de la variable como número general nos lleva a lo siguiente.

G1. Reconocer patrones y percibir reglas y métodos, en secuencias y en familias de problemas.

G2. Interpretar la variable simbólica como la representación de una entidad general, indeterminada, que puede asumir cualquier valor.

G3. Deducir reglas y métodos generales, en secuencias y en familias de problemas.

G4. Manipular (simplificar, desarrollar) la variable. Simbólica.

G5. Simbolizar enunciados, reglas o métodos generales.

3. Variable como relación funcional.

En la comprensión de la variable como relación funcional, hay que distinguir cantidades cuyos valores están en una relación, los cuales son afectados de manera que una de las cantidades afecta a la otra. Hay que conocer y dominar que la relación entre las cantidades tiene diferentes representaciones, podría aparecer como una tabla, parejas ordenadas de puntos, mediante una gráfica, o mediante una ecuación que explicité la variación entre las cantidades, además de identificar lo anterior, es importante distinguir los intervalos de variación y la forma de variación por ejemplo (creciente o decreciente).

Adueñarse del concepto de la variable como relación funcional nos lleva a lo siguiente.

F1. Reconocer la correspondencia entre variables relacionadas, independiente de la representación utilizada (tablas gráficas, problemas verbales, expresiones analíticas).

F2. Determinar los valores de la variable dependiente, dados los valores de la independiente.

F3. Determinar los valores de la variable independiente, dados los valores de la dependiente.

F4. Reconocer la variación conjunta de las variables involucradas en una relación funcional, independiente de la representación utilizada (tablas gráficas, problemas verbales, expresiones analíticas).

F5. Determinar los intervalos de variación de una de las variables, dado el intervalo de variación de la otra.

F6. Simbolizar una relación funcional, con base en el análisis de los datos de un problema.

El modelo 3UV muestra, de manera explícita, los aspectos que caracterizan a cada uno de los usos de la variable con los que se trabajan en los cursos de algebra elemental (Ursini, Escareño, Montes y Trigueros 2005). Por tanto aplicarlo a la investigación que se llevará acabo es de gran utilidad.

El alumno tiene dificultades con el manejo de un sólo uso de la variable (como incógnita, por ejemplo), luego, al pasar a temas donde la misma letra tiene otro uso, puede tener confusión. Un problema mayor se genera cuando en un mismo problema aparece una letra con tres significados. Es por esto que (Ursini 2008) recomienda que para mejorar el aprendizaje del álgebra, se realicen actividades diferenciadoras e integradoras de tres usos de la variable (como incógnita, número general y en relación funcional), para que, en un desarrollo en espiral y de lo sencillo a lo complejo, el estudiante los distinga y los integre. A esta propuesta se le conoce como el Modelo 3UV.

El modelo 3UV se puede usar como un auxiliar para planificar y estructurar el trabajo de las actividades que se realizarán en el salón de clases, también es útil para el diseño de instrumentos diagnóstico (Ursini 2008) y lo ocuparemos también, para el análisis final de los resultados. Por ejemplo en el análisis de resultados Ursini (2008) muestra lo siguiente para una pregunta en específico, vea Tabla 2.1.

Tabla 2.1 Análisis de la respuesta de un estudiante basada en el Modelo 3UV (Ursini, 2008)

Pregunta	Análisis de la pregunta	Respuesta de un estudiante	Análisis de la respuesta del estudiante
¿Cuántos valores puede tomar la letra x en la expresión. $4 + x^2 = x(x+1)^2$	Nótese que la pregunta no requiere la solución de la ecuación, pero sí su análisis. Los estudiantes suelen considerar que una ecuación en la que la variable aparece al cuadrado tiene automáticamente dos soluciones **(I2)** Un análisis simple pero cuidadoso de la expresión hace notar que la ecuación tiene únicamente una solución. Pero para ello es necesario manipular la variable de hecho o mentalmente (**G4**)	dos	El estudiante identifica la expresión como una ecuación y reconoce el papel que la variable desempeña en ella; sin embargo, reacciona automáticamente a una señal externa: la incógnita aparece al cuadrado; luego se trata de una ecuación cuadrática y debe tener dos soluciones. Aun cuando este estudiante reconoce la expresión y la incógnita en ella, su interpretación de la variable como incógnita está limitada por su falta de análisis. Este hecho evidencia que este estudiante requiere orientación para que, al realizar actividades como ésta, analice cuidadosamente la situación

El modelo nos apoyará, desde el análisis del examen diagnóstico, pasando por las actividades, hasta el análisis de los resultados.

Capítulo 3. Metodología

La población estuvo conformada por alumnos de primer año de bachillerato familiarizados con el álgebra de secundaria. Se aplicaron 8 prácticas, tres por semana, en las cuales se dejaron tareas, en algunas de ellas se hizo uso de geogebra. Las tareas en casa se retroalimentaron en la sesión siguiente entre estudiantes y el profesor. Las prácticas eran en gran medida las propuestas por Ursini, Escareño, Montes y Trigueros (2005) en las que se involucran a la expresión cuadrática, y otras que se consideran adecuadas para alcanzar los objetivos y resolver los problemas que nos arrojó el pre-test. Al final se aplicó el pos test para evaluar los efectos de la intervención didáctica.

Los alumnos se separaron en equipos bien definidos (3 integrantes en cada equipo) con un capitán del equipo (el de mejor calificación en el examen diagnóstico). Se les asignó un número para facilitar su seguimiento, ya que aparte de verificar su avance al final de la secuencia se verificó el avance por equipo.

3.1 PRE TEST.

El test que se aplicó se tomó de dos cuestionarios realizados por Ursini, se escogieron 7 preguntas donde la última pregunta involucra cuatro incisos, el test tuvo algunas modificaciones para que todas las preguntas fueran enfocadas a la expresión cuadrática. Se procuró que las preguntas involucraran los tres usos de la variable buscando delimitar con prescisión las formas en que el estudiante entiende el concepto de variable.

Test

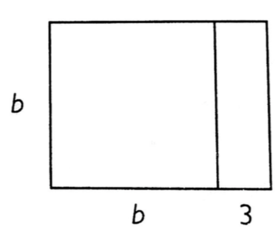
1. ¿Cuántos valores puede tomar la letra x en la expresión $x^2 = x(x+1)$

2. Dada la expresión $y = x^2$, si queremos que los valores de y estén entre 256 y 10000, ¿entre qué valores debe estar x?

3. ¿Cuántos valores puede tomar la letra en la expresión $x^2 + 2 = 2 + x^2$?

4. En la expresión $40 - 5x^2 - 3y = 17y - 2x^2$, que valor de y corresponde a $x = 4$

5. El área de la siguiente figura es 27 cm^2, ¿Cuál es el área del cuadrado de lado b, si la base del rectángulo de la derecha mide 3 cm?



6. Dada la ecuación de la parábola $y = 2x^2 + 1$, ¿están los puntos $(3,19)$ y $(2,8)$ en la parábola?

7. Los datos de la tabla representan el precio de una pizza en relación al tamaño de su diámetro

Diámetro (x)	Precio en pesos (y)
10	25
20	100
30	225
40	400
50	625

a) Realiza la gráfica que describe la relación entre el radio de la pizza y su precio.
b) Describe con tus propias palabras qué pasa con el precio cuando compras una pizza de diámetro más grande.
c) ¿Cuánto costaría comprar una pizza de 15 cm de diámetro?
d) Escribe una ecuación que represente cuánto tienes que pagar

3.2 Actividades.

Se aplicaron 7 actividades, 5 diferenciadoras y 2 integradoras en 13 sesiones de 50 minutos cada una .

- Binomio al cuadrado (Variable general)
- Factorización (diferencia de cuadrados) (Variable general)
- Ecuación cuadrática (Variable incógnita específica)
- Caída libre (Relación funcional)
- Rectángulos presentación dinámica (Integradora)
- Parábola (Relación funcional)
- Llenado de recipientes (Integradora).

El desarrollo de actividades fue bastante ameno, es decir los equipos participaron de manera entusiasta.

- Se tuvo un problema con un equipo con relación a una integrante la cual sufrió varios problemas de salud lo que le impidió estar de manera continua en las sesiones
- Las actividades de relación funcional se trabajaron buscando tres representaciones de la función. (gráfica, tabla y su expresión analítica).
- Las actividades se buscaron realizar en "Una enseñanza en espiral" Ursini (2005)

3.2.1 Actividad 1 (Variable como número general)

Productos notables

El uso de la variable como número general nos lleva a la manipulación de la variable, comenzaremos con los productos notables de la forma:

1. $(x+a)^2$
2. $(x+a)(x+b)$
3. $(ax+b)(cx+d)$

Para posteriormente trabajar la factorización. De acuerdo a Rees (2001) "Productos especiales, deberán aprenderse a fin de ahorrar tiempo en las multiplicaciones, y también como preparativo para la factorización". Algo similar menciona Bello (2004): "En el capítulo anterior aprendimos a multiplicar polinomios. Ahora aprenderemos como deshacer la multiplicación mediante la factorización".

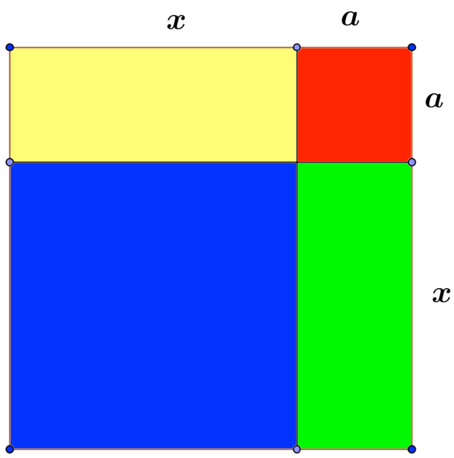
Actividad 1

1. Objetivo: El alumno identificará el producto notable de la forma $(x+a)^2$ (binomio al cuadrado) como el resultado del cálculo de áreas,

Inicio

En la siguiente figura se tiene un cuadrado formado por 4 rectángulos.

Consigna: de manera individual el estudiante contesta las siguientes preguntas



1. ¿Cuál es el lado del cuadrado grande? (G2)
2. ¿Cuál es el área del cuadrado grande? (G2)
3. ¿Cuáles son los lados de los rectángulos azul, rojo, verde y amarillo? (G2)
4. ¿Cuáles son las áreas de los cuadrados azul, rojo, amarillo, y verde? (G4)
5. ¿Qué relación existe entre el área del cuadrado grande y la suma de las áreas de los rectángulos azul, rojo, verde y amarillo? (F1)

Desarrollo

a) En equipo se comentan las soluciones obtenidas en el inicio. El alumno compara las soluciones y elige la que crea correcta.
b) Pasan al pizarrón por equipo y socializan sus respuestas.

Cierre

1. El profesor desarrolló el binomio de la forma $(x+a)^2$

siguiente manera:

$$(x+a)^2 = (x+a)(x+a)$$

$(x+a)(x+a) = x^2 + ax + xa + a^2$ (Propiedad distributiva)

$x^2 + ax + xa + a^2 = x^2 + 2ax + a^2$ (simplificación de términos)

$(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$. (Propiedad transitiva de la igualdad)

El profesor relacionó cada término obtenido en la expresión algebraica con la situación geométrica, y enfoca el hecho de que este producto aparecerá de manera regular en los cálculos que llevará acabo durante toda su matemática escolar, por lo que el aprenderse el último resultado les facilitará los cálculos. Y en el caso de olvidar la "fórmula" siempre podrá recurrir a la situación geométrica para deducirla por el mismo, o también puede deducirla mediante el producto $(x+a)^2 = (x+a)(x+a)$

Se deja de tarea la siguiente actividad

Realizar geométricamente y algebraicamente las siguientes operaciones

1. $(x+2)^2$
2. $(x+3)^2$

3.2.2 Actividad 2 **Factorización. *(Variable como número general)***

Material un cuadrado de lado 13 a 16 cm, tijeras y pegamento

Al cuadrado de área x^2 se le corta en una de sus esquinas un cuadrado de área a^2, tal como se muestra en la figura 1

Inicio. (individualmente)

La figura 1 se cortó por la línea punteada roja y con las dos piezas se formó el rectángulo de la figura 2. El nuevo rectángulo se pega en la libreta.

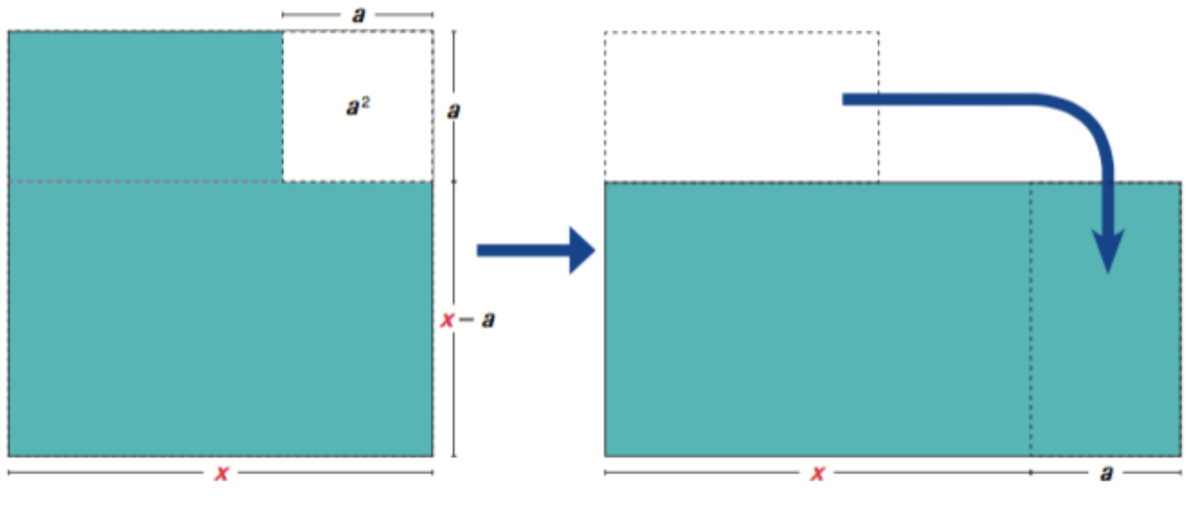


Figura 1 Figura 2

Contestar las siguientes preguntas.

a) ¿Cuál es le área de la superficie verde en la figura 1? (G2)

b) ¿Cuál es la base del rectángulo de la figura 2? (G2)

c) ¿Cuál es la altura del rectángulo de la figura 2?(G2)

d) Por construcción ¿Cómo deben ser las áreas verdes de ambas figuras?

e) ¿Qué expresión algebraica resulta en la comparación de áreas en ambas figuras? (G5)

Desarrollo.

a) En equipo se comentan las soluciones obtenidas en la fase de inicio. El alumno compara las soluciones y elige la que crea correcta.
b) Pasa al pizarrón por equipo y socializan sus respuestas.

Cierre.

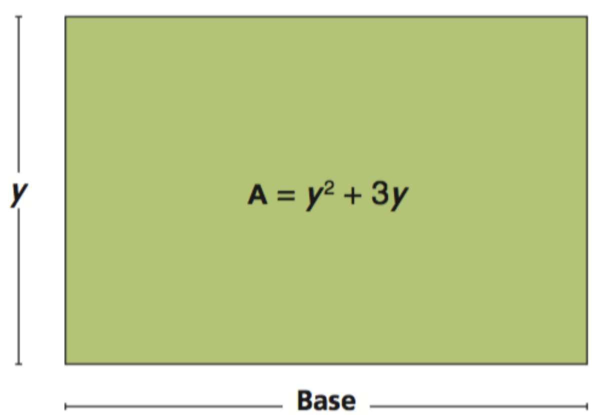
El profesor define:

Dos binomios que solo difieren en el signo en uno de sus términos se denominan binomios conjugados.

La factorización de una diferencia de cuadrados es el producto de binomios conjugados, los cuales se obtienen al sacar raíz cuadrada a ambos términos de la diferencia de cuadrados.

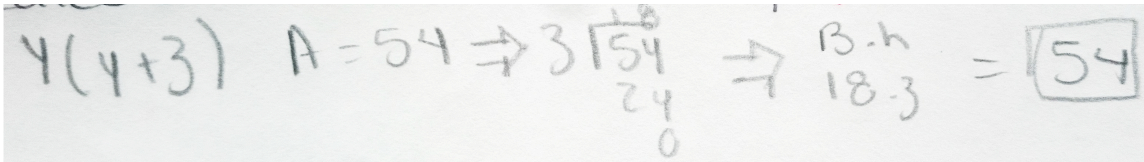
3.2.3 Actividad 3 *(Variable como incógnita específica)*

La siguiente figura representa un rectángulo el área del rectángulo de 54 cm^2



Cuestionario

a) ¿Cuál es la expresión algebraica que corresponde a la base del rectángulo? (I1)
un estudiante logra factorizar la expresión y deduce lo siguiente:



a pesar de factorizar la expresión, al ver un 3 en una de las dos expresiones deduce que hay que dividir por 3, es decir la ecuación no logra plantearla (I5)

b) ¿Qué ecuación puede plantearse para calcular el valor de y? (I5)

c) En está ecuación, y puede tomar cualquier valor o un valor específico?

d) ¿Cuántos valores podría obtener y?

e) ¿Cuáles son los valores de y?(I4)

f) ¿Todas las soluciones resuelven el problema?

3.2.4 Actividad 4. *(Variable como relación funcional)*

Al soltar un objeto en caída libre desde una altura de 150m. La altura a través del tiempo es:

tiempo (t) (en segundos)	*altura (h)* (en metros)
0	150
1	145
2	130
3	105
4	

Inicio.

La actividad comienza preguntando en plenaria las preguntas del cuestionario e ir llevando las respuestas de los estudiantes hacia una respuesta correcta.

Cuestionario

1. ¿Qué altura tendrá el objeto a los 2 segundos?

2. ¿Qué altura tendrá el objeto a los 4 segundos?

3. 7 segundos a partir de que se suelta el objeto. ¿Éste ya estará en el suelo?

4. ¿Cómo se puede saber a que altura está el objeto en cualquier tiempo t?

5. ¿De qué depende la altura a la que se encuentra el objeto?

6. Si representamos con h la altura y con t el tiempo. ¿Cómo se simboliza la relación que hay entre el tiempo y la altura en la que está el objeto?

7. Si t es mayor qué 1 pero menor que 4 ¿Qué valores puede tomar la altura?

8. ¿Qué distancia recorre el objeto entre el segundo 1 y el segundo 4?

Cierre.

Se pregunta sobre la importancia que tiene el conocer una expresión la cual nos dice la posición del objeto en cualquier tiempo t. Se enfatiza en dos de las formas en las cuales se puede representar una función. Y se deja de tarea una tercera forma. Se pide de tarea que se grafique la función usando el software Geogebra y se pide contestar las preguntas 1,2,3 y 7 basado en el grafico.

De esta actividad se muestra la evolución del diálogo del estudiante y el profesor.

Profesor: ¿Qué altura tendrá el objeto a los 2 segundos?

E3. 130

Profesor: ¿cómo le hicieron?

E14: Pues ahí está, y señala la tabla

Profesor: ¿Qué altura tendrá el objeto a los 4 segundos?

Estudiantes: 70 metros

E4: 80

Profesor: ¿80?

Profesor: Las respuestas son: 80, 70, ¿qué más?

E: 75

E13: 90

Profesor: Hay muchas soluciones. ¿A quien les salió 70?

E14: A la primera cantidad le resto 5 a la segunda 15 a la tercera 25 y a la otra seria 35

Profesor: ¿Alguien hizo algo distinto?

E2: 150 le reste 5, 145 le resto 10, después le resto 25, después deduje que le tenia que restar 30.

Profesor: La respuesta correcta es 70, y se mostrara más adelante que está es la solución.

Profesor: 7 segundos a partir de que se suelta el objeto. ¿Éste ya estará en el suelo?

E4: Si, porque entre el minuto 5 y 6 el objeto ya toca el piso

Profesor: ¿Cómo se puede saber a que altura está el objeto en cualquier tiempo?

E9. No hay una forma en que se pueda saber a que altura está porque no varia de forma regular, primero disminuye 5 luego 15.

E5. Al valor obtenido restarle 10 en la segunda diferencia

Profesor: aplicamos la idea del alumno, pero solo funciona para números enteros, hay que recordar que el tiempo toma valores del tipo real, y su solución de alguna manera solo es particular.

E4. Usar la fórmula de caída libre.

Profesor: Describe la fórmula de caída libre y menciona que en este ejercicio el valor de la aceleración de la gravedad es de 10 m/s2.

Profesor: ¿De qué depende la altura a la que se encuentra el objeto?

Estudiantes: Del tiempo

Si representamos con h *la altura y con* t *el tiempo. ¿Cómo se simboliza la relación que hay entre el tiempo y la altura en la que está el objeto?*

E5: $n - 10$

Profesor: si n = 1 tenemos que la altura seria -9*, utilizando la fórmula de caída libre para el valor de la aceleración de la gravedad de 10, se tiene que la distancia recorrida por unidad de tiempo es:* $5t^2$ *pero esto hay que restarlo a 150, por lo tanto la relación seria:*

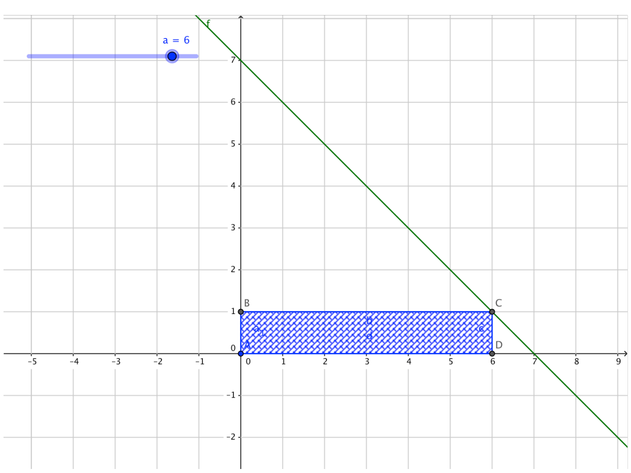
$$h(t) = 150 - 5t^2$$

y se puede comprobar con los valores de la tabla. Noten que esta relación toma valores reales, no solo enteros como antes se pensaba.

3.2.5 Actividad 5 *(Actividad integradora)*

Inicio.

1. Se les proyecta a los estudiantes una presentación dinámica en la cual se toma un punto C en la recta $y = 7 - x$ el cual recorre toda la recta generando distintos rectángulos con uno de sus vértices en el origen.
2. En base a la presentación dinámica llene la siguiente tabla.



Las primeras tres preguntas se refiere a la variable como número general

1. ¿Cuál es el área del rectángulo cuando la base mide 3cm?

2. Si el valor de la base es x. ¿Cuál es el valor de la altura?

3. ¿Cómo puede expresarse simbólicamente el área del rectángulo si el valor de la base es x?

Las 4 preguntas siguientes se refiere a la variable como incógnita específica

4. Si el área del rectángulo es 13 cm^2. ¿Podría saberse su altura y su base?

5. ¿Qué ecuación se puede plantear a partir del área del rectángulo (11.25 cm^2.) y sus dimensiones?

7. ¿Cuáles son los valores de sus dimensiones para que el área sea de 11.25 cm^2?

8. ¿Cómo se representa el área del rectángulo para cualquier valor de x?

Las restantes preguntas se refiere a la variable en sus tres distintas formas (número general, incógnita específica y relación funcional)

9. Si queremos que el área se mayor de 8 pero menor de 12. ¿Qué valores puede tomar x?

10. Realiza una tabla para algunos valores de x y el área correspondiente.

x	$A(x)$

11. Realiza la gráfica correspondiente a el área de los rectángulos.

12. ¿Cuál es el valor máximo que puede alcanzar el área de los rectángulos?

13. ¿Cuál es el valor mínimo que puede alcanzar el área de los rectángulos?

14. ¿Para qué valor o valores de x se alcanza el área mínima de los rectángulos?

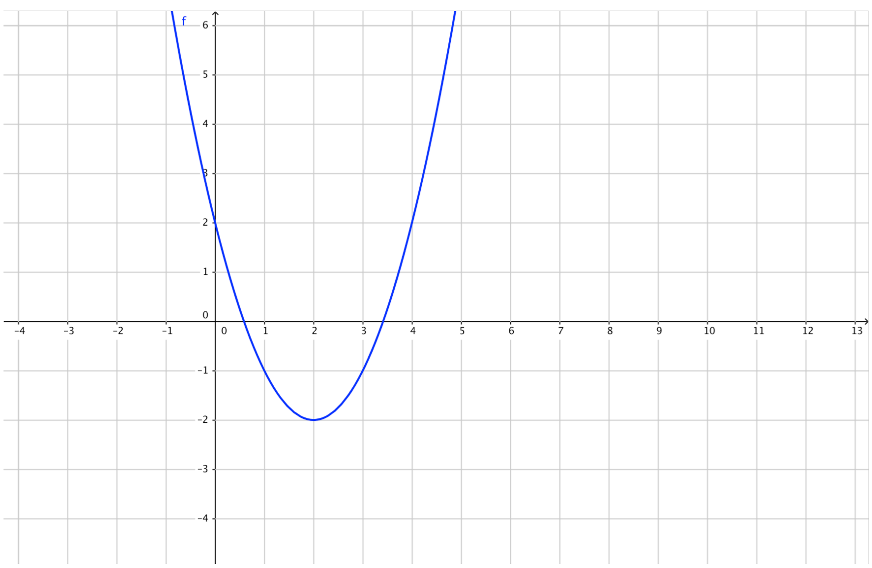
15. ¿Para qué valor o valores de x se alcanza el área máxima de los rectángulos?

Las actividades de integración siempre son más complicadas en cuestión de hallar las soluciones, ya que es la parte donde se involucran los distintos usos de la variable, sin embargo el conocimiento en espiral que propone Ursini (2008) es el de reconocer sus distintos usos de la variable en un mismo problema, generando un aprendizaje significativo de los distintos usos de la variable

3.2.6 Actividad 6 (Variable como relación funcional)

Dada la gráfica siguiente.

Realizar: 1. llenar la tabla con 6 valores de x y $f(x)$ que estén en la gráfica (F1)



x	$f(x)$

2. Trazar el eje de simetría de la parábola Dada la función $f(x) = 6x - x^2 - 1$

II. realizar lo siguiente:

1. llenar la tabla siguiente para 5 valores distintos de x (F1)

x	$f(x)$

2. ¿Cuál es el valor de (x) cuando $x = 7$?

3. El punto (8, -18) está en la gráfica de $f(x)$?

4. ¿Cuál es el punto de intersección con el eje Y?

5. ¿En cuantos puntos intersecta al eje X?

6. Si tiene intersección con el eje X. ¿En qué punto o puntos lo intersecta?

7. ¿Cuál es el valor de x si $f(x) = -17$

8. Si x está entre 2 y 5. ¿Entre qué valores está $f(x)$?

9. Si $f(x)$ esta entre 4 y 7. ¿Entre que valores está x?

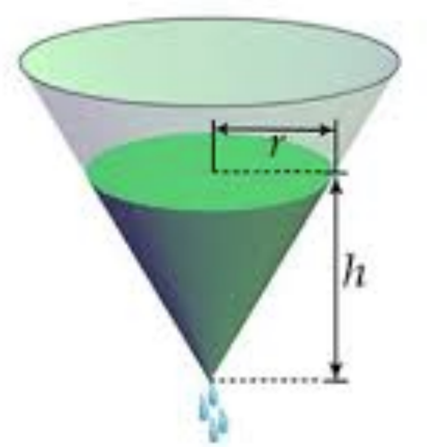
10. ¿Cuál es el valor mínimo que toma $f(x)$?

La actividad se tornó complicada para los estudiantes en cuanto a la solución, debido que había que visualizar la relación de cambio entre el área y la altura, lo que nos indica un *dominio menor en la variable como relación funcional, aunque se esperaba este resultado, puesto que en secundaria se trabaja muy poco la variable como relación funcional para la función cuadrática, ya que la función lineal es la que se ve más a detalle.*

3.2.7 Actividad 7 (Integradora)

Material Un cono de plástico de 23 cm de altura, una pipeta, una regla, un compás, agua, hojas milimétricas

Desarrollo. Vierte agua en el cono como lo muestra la figura a una altura de 4cm.



Cuestionario

1. ¿Qué figura se forma en la superficie del agua?

2. Dibuja la figura que se forma en la superficie utilizando las medidas reales lo más exacto posibles.

3. ¿Cuál es el área de la superficie del agua. (redondear a decimas)?

4. Repite la acción para alturas de 8, 12, 16 y 20 cm y completa la tabla siguiente.

Altura h (cm)	Área A (en cm^2)
4	
8	
12	
16	
20	

5. En la hoja milimétrica realizar la gráfica $A(h)$

6. ¿Cómo es la gráfica?

7. ¿Cuándo la altura está entre los valores 8 y 12 cm. ¿entre que valores está el área de la superficie del agua?

8. ¿Existe un valor de la altura para el cuál su área sea de 78.5 cm^2? ¿Por qué?

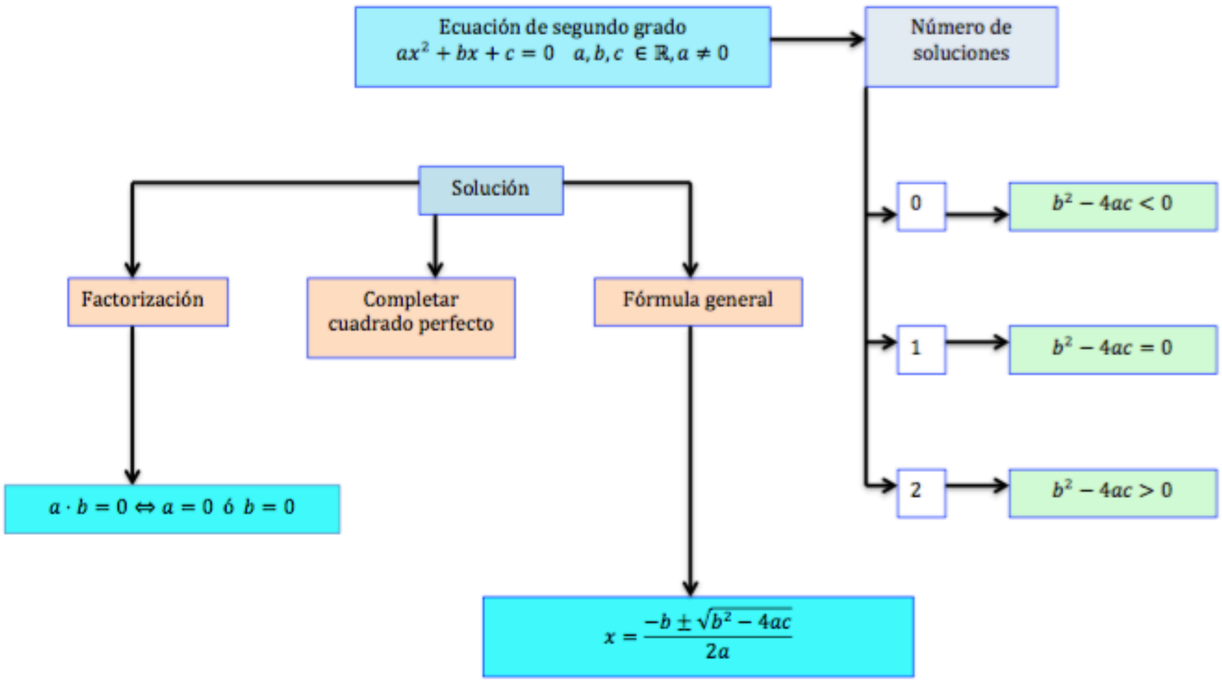
9. Si existe el valor para el área de la pregunta anterior. ¿cuál es ese valor?

10. Si el cono tuviese una altura de 30 cm. ¿Cuál es el área de la superficie del agua a una altura de 28 cm?

Se tuvo un problema para realizar la actividad debido a los tiempos, es decir los estudiantes estuvieron muy participativos, pero debió hacerse en dos módulos seguidos, debido a que con un módulo no fue suficiente, aunque la actividad se terminó en base a los datos recabados, sería más provechoso que se hubiera terminado en el laboratorio.

Los distintos usos de la variable se cerraban con un esquema correspondiente, para número general se presentó el esquema de factorización, para incógnita específica el de ecuaciones cuadráticas y para el de relación funcional el de parábola.

3.2.8 Diagramas



Factorización

Factor común

$x^2 - a^2$

$x^2 - a^2 = (x-a)(x+a)$

$x^2 + bx + c$

$x^2 + bx + c = (x-\alpha)(x+\beta)$
$\alpha \cdot \beta = c$
$\alpha + \beta = b$

$ax^2 + bx + c$

$ax^2 + bx + c = (\alpha x + \beta)(\gamma x + \delta)$
$\alpha \cdot \gamma = a$
$\beta \cdot \delta = c$
$\alpha \cdot \delta + \beta \cdot \gamma = b$

Función cuadrática
$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$

Gráfica

Parábola

$$Concavidad \begin{cases} a > 0 \Rightarrow concava \\ \quad hacia\ arriba \\ a < 0 \Rightarrow concava \\ \quad hacia\ abajo \end{cases}$$

Vértice
V(α,β) donde
$\alpha = \frac{-b}{2a}$
$\beta = f(\alpha)$

Dominio: $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$

$$\text{Rango: } \begin{cases} a > 0, & [\beta, \infty) \\ a < 0, & (-\infty, \beta] \end{cases}$$

Ecuación del Eje de simetría:
$x = \alpha$

Capítulo 4. Análisis de Resultados

En la tabla 4.1 se muestra el análisis cuantitativo de los resultados del pre test y pos test.

Tabla 4.1Respuestas correctas (1) e incorrectas (0) del pre y pos test.

Alumno	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7A	P7B	P7C	P7D	Total	Total Equipo
1A	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	3	
2A	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	2	2
3A	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	
1B	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	3	
2B	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1.666666667
3B	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	
1C	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	2	
2C	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1.333333333
3C	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	
1D	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	
2D	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.333333333
3D	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
Total	1	0	2	0	0	0	2	10	1	0	16	1.333333333

Alumno	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7A	P7B	P7C	P7D	Total	Total Equipo
1A	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	3	
2A	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	2	2

3A	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	
1B	1	0	1	0	0	1	1	1	0	0	5	
2B	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	2.333333333
3B	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	
1C	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	2	
2C	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	2	2.333333333
3C	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	3	
1D	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	
2D	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	2	1.333333333
3D	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	
Total	1	0	3	0	0	1	6	12	1	0	24	2

Diferencia	0	0	1	0	0	1	4	2	0	0	8

4.1 Análisis Cuantitativo

Cuantitativamente se puede observar un avance “mínimo” en el promedio por equipos, solo hubo mejoras en las preguntas 3 y 6 con una respuesta correcta más, en la pregunta 8 con dos respuestas correctas más, y donde hubo mejores resultados fue en la pregunta 7 con 4 respuestas correctas más. El alumno con mejor avance logró 2 respuestas correctas más y obtuvo 5 respuestas correctas. El promedio general solo mejoró en 7 decimas.

4.2 **Análisis Cualitativo**

Se realizó una retroalimentación con el grupo para revisar más a detalle sus respuestas y se obtuvo la siguiente información

El sentir de los alumnos es el de que pudieron hacer un mejor examen, ellos al final de las sesiones hablaban con un mejor vocabulario algebraico, mencionaban que si se trataba de una ecuación expresaban a la variable como un valor específico. Y comentaban los casos en cuando la variable podía tomar una infinidad de valores. Algunas respuestas que no fueron correctas, tenían un procedimiento correcto. Se observa que el manejo inadecuado de la variable como número general afectó en el resultado, sin embargo, se mostró un avance en cuanto a la variable como relación funcional ya que la gráfica fue trazada correctamente por 10 de las 12 alumnos, los otros dos alumnos obtuvieron una línea recta, y no la parábola, debido a un error en la escala de los ejes.

4.3 Análisis por pregunta

Pregunta 1

1. ¿Cuántos valores puede tomar la letra x en la expresión $x^2 = x(x+1)$

Uno de los estudiantes recordó haber sido entrevistada por la respuesta que había dado en el pos test y mencionó que a pesar de tener este referente no entendía el porqué había contestado de la misma manera. El estudiante 2D menciona que puede tomar dos valores por ser una ecuación de segundo grado (I2). Los estudiantes suelen considerar que una ecuación en la que la variable aparece al cuadrado, tiene automáticamente dos soluciones (Ursini 2008) La respuesta dada nos indica que el estudiante omitió la manipulación de la variable (G4) para evidenciar la clase de ecuación que está en mira de resolverse.

Pregunta 2

Dada la expresión $y = x^2$, si queremos que los valores de y estén entre 256 y 10000, ¿entre qué valores debe estar x?

En el pretest se obtuvo:

La solución parte de identificar a la variable como una relación funcional, sin embargo 4 estudiantes se centran en resolver la ecuación para $y = 256$ *y* $y = 10{,}000$ *y en la solución de la ecuación tres estudiantes resuelven para valores positivos de la raíz cuadrada. La pregunta era difícil de resolver, debido que en secundaria no se trabaja con* *la resolución de inecuaciones, sin embargo si el alumno se centrara en la gráfica de la relación funcional se podría hallar la solución, en base a estas situaciones, se esperaba que huviese un bajo porcentaje de respuestas correctas, en este caso todos tuvieron la respuesta incorrecta, la solución implica el entendimiento de la variable en la situación (F1 y F5). Otro estudiante identifica de manera correcta la relación entre las cantidades, pero la relación de las variables de manera conjunta no las maneja de manera correcta, pues solamente se centra en los valores extremos y en el momento de resolver omite otra solución ya que solamente considera la raíz positiva y omite la raíz negativa. Si usara que, la parábola* $y = x^2$ *es simétrica respecto al origen, identificaría su error.*

Tabla 4.2 Clasificación de las respuestas en el pos test

Respuestas	Frecuencia
$16\ y\ 100$	3
$16 < x < 100$	1
$A\ 256\ y\ D\ 10000$	2
de 10 a 1000	2
menor que 256	1
sin contestar	1
$x = 39$	1

Los estudiantes no identifican la relación funcional entre x *y* y *por lo consiguiente algunos de ellos buscan resolver una ecuación, o buscan valores que tengan que ver con el cuadrado y los números que aparecen en el enunciado, por ejemplo el alumno 3C lo que hace es elevar al cuadrado los valores de* y*, sin embargo los valores de* x *son los que están* *al cuadrado. El alumno 2D menciona que los valores de* x *deben estar entre todos los números reales de 256 y 10,000, este alumno tiene una noción de intervalo, pero al no identificar la relación funcional no llega a visualizar que habría que hacer cálculos para lograr el intervalo en* x *y no solo observar el intervalo en* y*. Dos alumnos que logran visualizar la relación funcional buscan números tales que su cuadrado sea 256 y 10,000 al encontrarlos su respuesta es entre 16 y 100, en este caso lo que falla es visualizar el tipo de relación funcional que se tiene, para este caso se habla de una función cuadrática por consiguiente cualquier punto en* y *de la gráfica que no sea el vértice proviene de dos valores distintos de* x*, debido a la simetría de la función cuadrática. A pesar de que nadie obtiene correctamente la respuesta en el post test que involucraba la manipulación de la variable como relación funcional en sus cracteristicas (F1 y F5) 4 estudiantes reconocen la correspondencia entre las variables relacionadas (F1) pero ya no logran determinar el intervalo de variación de la variable independiente (F5)*

Pregunta 3

¿Cuántos valores puede tomar la letra en la expresión $x^2 + 2 = 2 + x^2$?

En el pre test:

Dos estudiantes logran visualizar que se tiene una identidad y dan la solución correcta al mencionar que puede tomar una infinidad de valores, hay que hacer notar que dos alumnos buscan resolver la ecuación y al eliminarse la variable en ambos miembros deducen que la solución es ningún valor

Tabla 4.3 Clasificación de las respuestas en el pos test

Respuestas	Frecuencia
cualquier valor	3
dos valores	4

números enteros	2
un solo valor	1
un valor	1

En esta se obtuvo una variedad de respuestas, es decir desde la alumna que en la pregunta 1 repite el mismo procedimiento para responder la pregunta 3 (observar el número de veces que aparece x y el exponente a la que está elevada) como quien al manipular la variable no acepta que la x^2 *desaparezca y realiza lo siguiente:*

$$x^2 + 2 = 2 + x^2$$

$$2x^2 + 4 = 0$$

$$2x^2 = -4$$

Otro estudiante que manipula de manera correcta la variable.

$$x^2 + 2 = 2 + x^2$$

$$x^2 - x^2 = 2 - 2$$

$$0 = 0$$

menciona que por dar cero igual a cero no puede tomar ningún valor, asocia el número cero con ningún valor, no logra interpretar el resultado.

Otro estudiante que no manipula la variable y al ver que aparece x^2 *menciona que dos valores por ser una ecuación de segundo grado.*

El estudiante 2A menciona que 0,1 y 2 valores está pensando en las posibles raíces reales *de una ecuación de segundo grado.*

El estudiante 1B identifica inmediatamente que es una identidad y contesta cualquier número.

El estudiante 1A manipula la variable y observa que queda $0 = 0$ *identifica que es una identidad y menciona que puede haber una infinidad de valores.*

5 alumnos intentan manipular la variable sin tomar en ningún momento el valor de $x = 4$*, obviamente la manipulación de 2 variables* x *y* y *los lleva a más confusiones sobre el cómo hallar la solución.*

Pregunta 4

En la expresión $40 - 5x^2 - 3y = 17y - 2x^2$, qué valor de y corresponde a $x = 4$

En el pre test:

Cuatro estudiantes busca resolver en el sentido correcto, es decir sustituye el valor de x *y busca despejar* y *(I1), o buscan despejar* y *para posteriormente sustituir* x*, sin embargo hay error de manipulación de la variable (G4) y en dos casos errores aritméticos lo que genera cero respuestas correctas.*

Tabla 4.4 Respuestas a la pregunta 4 en el pos test

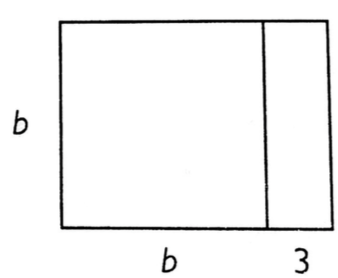
Respuestas	Frecuencia
$-72 = 20y$	1
busca resolver una ecuación	1
error al sustituir	1

realiza operaciones incorrectas	1
sin contestar	3
$x = 40$	1
$y = 2.86$	1
$y = 20/8$	2

La pregunta mantiene el hecho de que nadie logre resolverla de manera correcta, aunque tres estudiantes cometen error en la manipulación de la variable y esto les causa tener el resultado incorrecto.

Pregunta 5

El área de la siguiente figura es $27\ cm^2$, ¿Cuál es el área del cuadrado de lado b, si la base del rectángulo de la derecha mide 3 cm?



En el pre test:

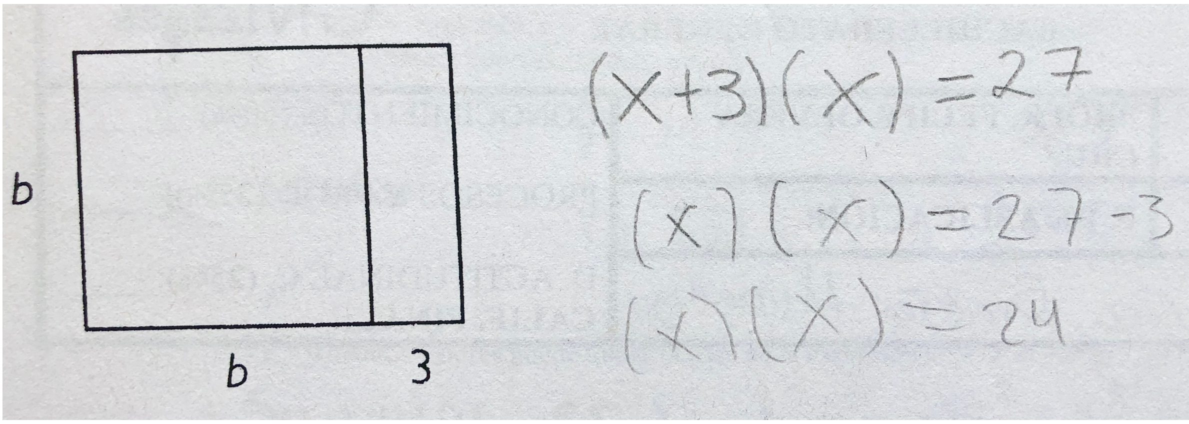
La solución de este problema, es de gran dificultad debido a que tienen que hacer uso de la variable, tanto como número general (G2) y (G4), como incógnita específica. (I5), (I1) e (I4). Sin embargo todos los estudiantes buscan resolver el ejercicio, la razón es que todos los estudiantes, buscan encontrar la solución por acierto y error, tratan de encontrar una solución aritmética, buscando valores enteros que satisfagan lo que el problema pide, pero la solución del problema no es entera, ni siquiera racional, así que la probabilidad de que este método de solución tuviese éxito, es cero. Solo dos alumnos buscan una solución *algebraica, uno de ellos logra generar la ecuación pero no logra la manipulación adecuada de la variable para escribir la ecuación de la forma* $ax^2 + bx + c = 0$ *y de ahí partir para lograr la solución de la ecuación cuadrática por alguno de los métodos conocidos.*

Tabla 4.5 Respuestas a la pregunta 5 en el pos test

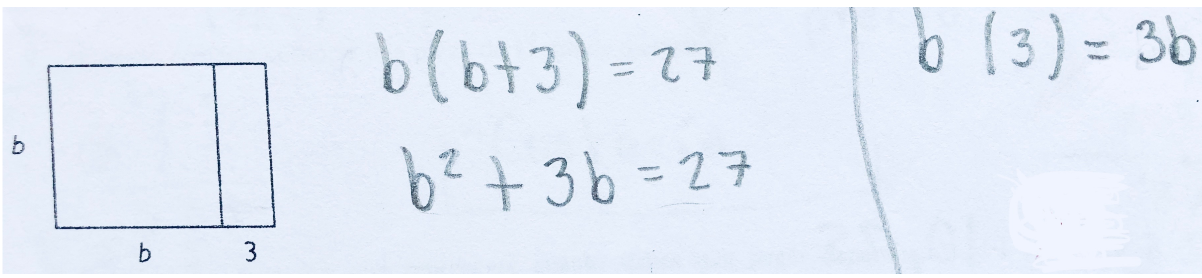
Respuestas y errores en las respuestas, logros en los tipos de usos de las variables	Frecuencia
36	1
9	1
aritmético	2
G2,G4,I5	1
G2,G4,I5,I1,I4	1
sin contestar	5

Vuelve a ser un reactivo que se busca resolver por ensayo y error, parece ser que el hecho de que los maestros generalmente pongamos problemas con soluciones enteras hace que el estudiante intente buscar los valores de a y b que satisfagan las condiciones del problema probando con valores enteros. Sin embargo como ya se mencionó, el valor de b es irracional, por lo que seria imposible hallarlo por inspección. Sin embargo hay dos estudiantes que no logran el resultado correcto debido a un error aritmético, es decir si hay avance con relación al pre test, pero el error aritmético genera que dicho avance no se muestre estadísticamente, ademas de que otros dos estudiantes cometen error en la manipulación de la variable.

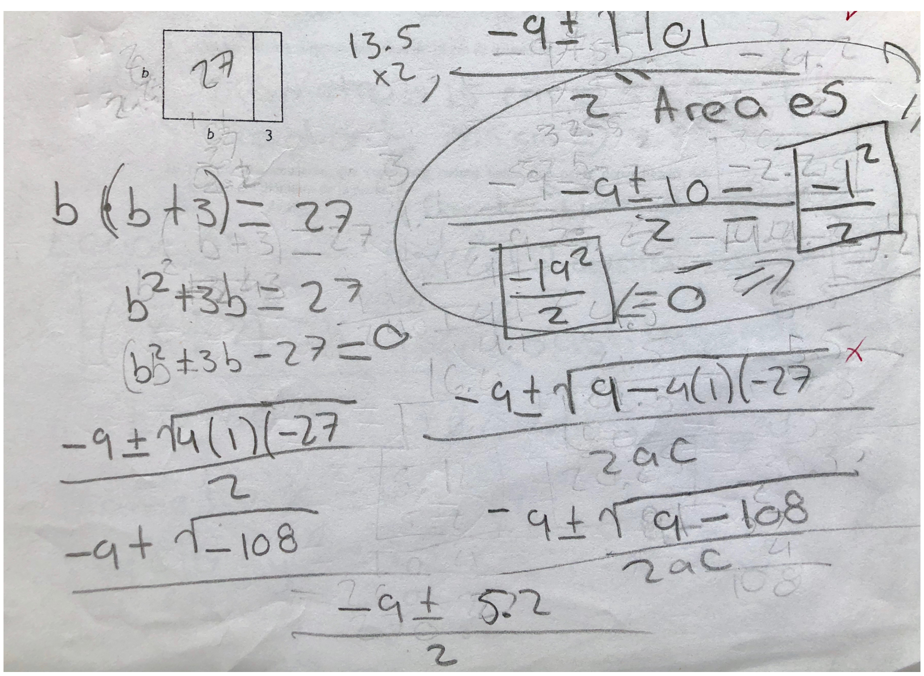
Error en manipulación de la variable



Faltó determinar el valor específico de la variable (I4)



Error aritmético



Pregunta 6

Dada la ecuación de la parábola $y = 2x^2 + 1$, ¿están los puntos $(3{,}19)$ y $(2{,}8)$ en la parábola? El valor de y de un punto de esa recta es $\frac{11}{2}$. ¿Cuál es el correspondiente a x?

En el pre test:

Ningún estudiante intenta resolver este reactivo, a diferencia del anterior que todos intentaron, éste lo dejan en blanco. En está pregunta es necesario considerar, que las variables x y y están relacionadas en correspondencia (F1). Además para encontrar si los puntos dados pertenecen a la parábola el estudiante debe verificar la igualdad al sustituir los valores. (F2, F3). El hecho de poder vislumbrar que las variables están en correspondencia. No garantiza que después logren realizar (F2, F3) ya que las tres representaciones de la función (Tablas, Gráficas o expresión analítica) no siempre están presentes a la hora de resolver problemas de funciones, lo que complica llegar a realizar el proceso de solución.

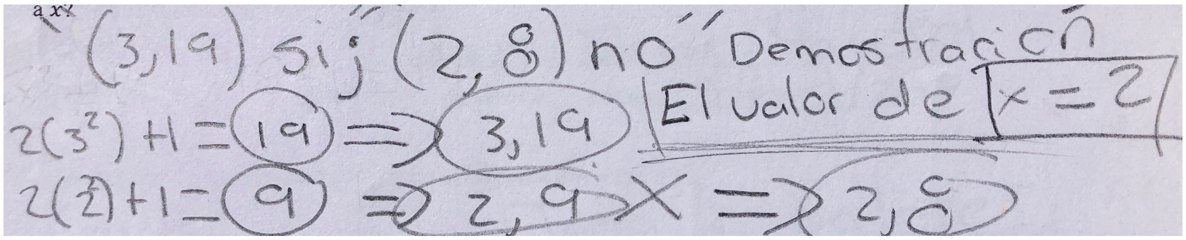
En el pos test

Tabla 4.6 Respuestas a la pregunta 6 en el pos test

Respuestas	Frecuencia
un medio	1
61.5	1
sin contestar	8
$x = 1/2$	1

El estudiante que logra contestar de manera correcta, visualiza la variable en relación funcional, pero además usa una de las tres representaciones de la función (la de tabla) para encontrar la solución acorde.

Solución correcta



Pregunta 7

Los datos de la tabla representan el precio de una pizza en relación al tamaño de su diámetro

Diámetro (x)	Precio en pesos (y)
10	25
20	100
30	225
40	400
50	625

7a) Realiza la gráfica que describe la relación entre el radio de la pizza y su precio.

En el pre test:

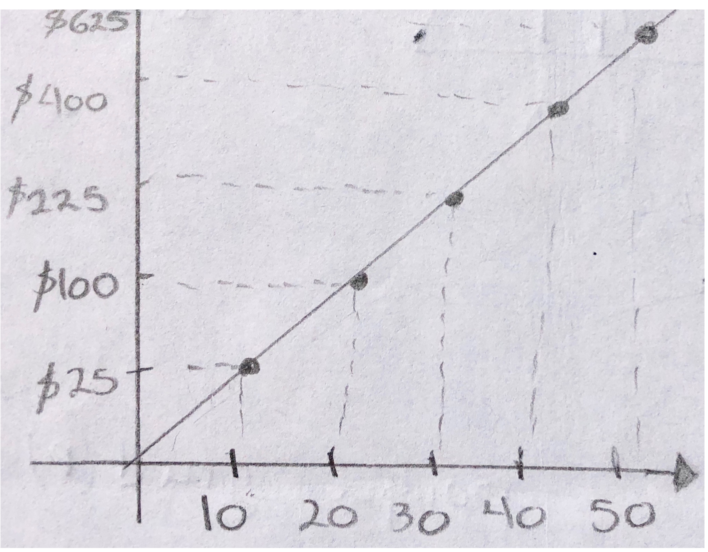
A pesar de que la representación gráfica de tablas (F1) son ejercicios que los estudiantes ven inclusive desde primaria, solo dos estudiantes logran realizarla correctamente, hay *errores reiterativos, como son: errores de escala y errores de ejes, en los errores de escala la gráfica resultante es una recta y no la parábola que debiera resultar (F4).*

En el pos test:

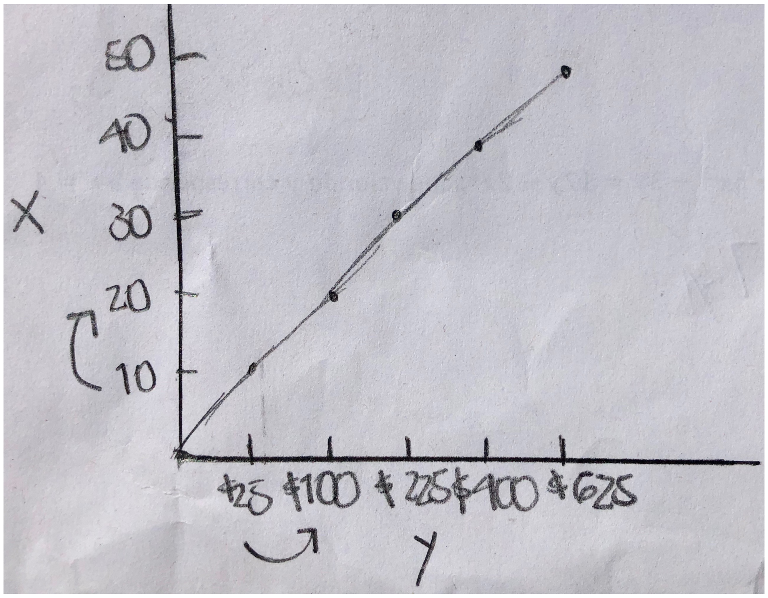
Tabla 4.7 Respuestas de la pregunta 7 del pos test

Respuestas	Frecuencia
correcta	6
error de escala	1
gráfica de barras	1
invierte ejes	4
sin contestar	2

Idea de linealidad en la gráfica



Idea de linealidad e inversión de ejes



7b) Describe con tus propias palabras qué pasa con el precio cuando compras una pizza de diámetro más grande.

En el pre test:

Es la respuesta con mayor puntaje, 10 aciertos, aunque las respuestas indican que no son deducidas de los valores que da la tabla (F4), sino de su vida cotidiana, es decir, si compro una pizza más grande (diámetro más grande) me debe costar más.

En el pos test:

Tabla 4.8 Respuestas a la pregunta 7 inciso b del pos test

Respuestas	Frecuencia
aumenta	6
aumenta (ingredientes)	1
la de menor precio aumenta 50	1
sin contestar	3

Vuelve a ser la respuesta con mayor puntaje de respuestas correctas, sin embargo a diferencia del pre test, esta vez 3 estudiantes, hacen referencia a la relación entre las variables para contestar.

Relación entre variables

r	Diámetro (x)	Precio en pesos (y)
5	10	25
10	20	100
15	30	225
20	40	400
25	50	625

El precio es la raiz cuadrada del radio

$5^2 = 25$ \$ / $\sqrt{\$25} = 5$ y 5 es el

25 — 100 — 225 — 400 — 625

75 125 175 225

50 50 50

La mitad del diametro al cuadrado sera el precio

$\left(\frac{1}{2}x\right)^2 = y$ x = diametro

y = precio

7c) ¿Cuánto costaría comprar una pizza de 15 cm de diámetro?

En el pre test

Un estudiante logra visualizar el comportamiento de las variables y encuentra la respuesta correcta, sin embargo no logra formular una expresión matemática para deducir la *relación funcional entre las variables (F6).*

En el pos test:

Tabla 4.9 Respuestas a la pregunta 7 inciso c del pos test

Respuestas	Frecuencia
375	1
50	3
56.25	1
62.5	1
sin contestar	5

Todos los estudiantes buscan encontrar una relación entre las variables (**F2**), sin embargo, solamente uno de ellos encuentra la relación entre la mitad del radio y su cuadrado (**F3**).

7.5
x 7.5
+ 375
525
5625

7d) Escribe una ecuación que represente cuánto tienes que pagar dependiendo del tamaño del diámetro de la pizza

En el pre test:

A pesar de que un estudiante puede deducir el precio de una pizza de 15 cm de diámetro, no logra expresar esa relación mediante una fórmula matemática que relaciona las *variables. (F6)*

En el pos test:

Tabla 4.10 Respuestas de la pregunta 7 inciso d del pos test

Respuestas	Frecuencia
$(y_1 - y_2) + 50$	1
$D + 50$	2
sin contestar	4
$x + 50$	2
$\left(\frac{1}{2}x\right)^2$	1
$x = y + 50$	1

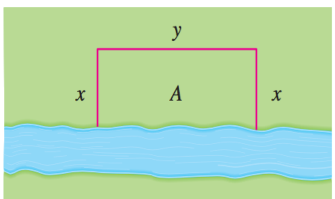
*A pesar de que 4 estudiantes no contestaron nada, los restantes buscaron encontrar una fórmula vía el análisis de las ordenadas resultantes, tratando de encontrar una sucesión que pueda definir mediante una fórmula (**G1**), hacen diferencias entre las ordenadas y en base a la tabla deducen la fórmula adecuada.*

$$\left(1/2\, x\right)^2 = y$$

Afortunadamente se realizó una actividad extra, posterior al post test, con los estudiantes involucrados, la cual consistió en una exposición ante padres de familia y profesores, en la que debían de exponer la solución a un problema, en el que estaba involucrada la expresión cuadrática. En está actividad los alumnos estaban sujetos a preguntas por parte de los padres y profesores. Además en particular hubo un estudiante al cual se le pudo aplicar por tercera vez el examen, posteriormente evidenciaremos los resultados.

La actividad constaba de exponer la solución al siguiente problema:

Un agricultor tiene 800 m lineales de cerca y quiere construir una barda para cercar un campo rectangular que bordea un río recto, de modo que no necesita barda a lo largo del río. ¿Cuáles son las dimensiones que debe tener el campo para encerrar el área más grande? (Stewart 2005)



La presentación de la solución del problema consistió en que realizaran una maqueta en la que se mostraba la cerca del terreno, la cual era movible, lo que permitía visualizar distintos rectángulos con el mismo tamaño de cerca. La presentación del equipo fue fluida y tuvieron preguntas de parte de padres e inclusive de profesores, lo interesante es que las preguntas las contestaban mencionando en su vocabulario de manera adecuada los distintos usos de la variable.

Es probable que la actividad hubiese redondeado de mejor manera el entendimiento de los distintos usos de la variable, pero habría que realizar una investigación completa para probar esta hipótesis.

Conclusiones

Los resultados del pos-test muestran un avance del 7% con respecto al pre test, pero el promedio de respuestas correctas en el grupo aún fue menor al 50%, lo que indica que si nos centramos en los resultados vistos como respuesta correcta o incorrecta, las actividades no muestran un avance significativo.

El cuestionario aplicado ya ha sido probado en varias investigaciones y confirmamos que es adecuado para medir el dominio de los distintos usos de la variable, puesto que los resultados obtenidos son semejantes a los de otros estudios.

Los estudiantes que participaron en esta investigación lograron tener en su vocabulario los distintos significados de la variable en las actividades finales, aunque esto no se manifestó en los resultados numéricos de la prueba. Ellos se expresaban, hablando de la variable, como: “lo que se busca es un valor específico”, “hay que hallar una relación entre las variables”, “puede tomar cualquier valor la variable”.

El análisis por pregunta mostrado en la sección 4.2 evidencia que hay mejora en los distintos usos de la variable, pero que errores aritméticos y algebraicos les impidió llegar a la respuesta correcta.

Los resultados arrojan una mejora en la comprensión de la variable en cada pregunta, en especial se nota un avance en la 5, donde 3 estudiantes logran plantear la ecuación, que de alguna manera es la parte más dificil que corresponde a modelar un problema, aunque ya no logran hallar la solución de la ecuación.

Salvo las dos primeras preguntas, en las restantes hubo avance de manera significativa en cuanto al manejo de la variable. Como lo muestra la Tabla 5.

		número de alumnos que logran manejar la caracterización de la variable	
Pregunta	Aspectos de la variable	pre test	pos test
3	G2	2	3
	G5	2	5
4	I1	4	7
	F2	2	7
5	G2	11	11
	G4	2	4
	I5	2	4
	I1	1	4
	I4	1	4
6	F1	0	1
	F2	0	1
	F3	0	1
7	F3	2	4
	F6	7	10
	I1	0	1

Tabla 5. Relación del pos test y pre test en los distintos usos de la variable

En los nuevos programas de la SEP del nivel bachillerato ya se propone el aprendizaje del álgebra mediante los tres usos de la variable, en el currículo se pide abordar los tres usos de la variable, como número general en un principio, continúa con el uso como relación funcional y cierra con el uso como incógnita específica. Así que, las actividades que se propusieron en este trabajo podrían apoyar al profesor para implementar el programa de SEP en el nuevo currículo del primer año de bachillerato. Estas actividades y la forma de trabajo es la principal aportación de esta tesis.

Referencias

Hernández, P. (1998) *El concepto de variable matemática y su enseñanza a estudiantes universitarios*. Tesis de Licenciatura no publicada, ITAM, México

Juárez, J. (marzo 2011). Dificultades en la interpretación del concepto de variable en profesores de matemáticas de secundaria: un análisis mediante el modelo 3UV. *Números*, 76, pp.83-103.

Kieran, C. & Filloy, E. (1989). *El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. Enseñanza de las Ciencias*, 7 (3), pp. 229-240.

Kline, M. (1992). *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días. I y II.* Madrid: Alianza editorial.

Kramer, E. (1981) *The Nature and Growth of Modern Mathematics*. Princeton, N.J. Princeton University Press.

Küchemann, D.E. (1981). *The Understanding of Generalized Arithmetic (Algebra) by Secondary School Children.* PhD Thesis, University of London.

Mankiewicz, R. (2005) *Historia de las matemáticas*. Editorial Paidós.

Ruiz, B. (2006). *Un Acercamiento Cognitivo y Epistemológico a la Didáctica del Concepto de Variable Aleatoria* (Maestría). Instituto Politécnico Nacional.

Morales, P & Díaz L. (2003) *Concepto de variable: Dificultades de su uso a nivel universitario*. En: Mosaicos Matemáticos. Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora. No 11.

Posada, F. & Villa, J. (2006). *Propuesta didáctica de aproximación al concepto de función lineal desde una perspectiva variacional*. Tesis de Maestría no publicada. Medellín: Universidad de Antioquia.

Ruiz, L. (1998). La noción de función: análisis epistemológico y didáctico. Jaén: Universidad de Jaén.

Socas, M (Julio de 2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones de la investigación. *Números*, 77, pp. 5-34.

Stewart, J. (2005). *Cálculo Conceptos y contextos- 3a ed.* México: Cengage Learning

Tonnensen, L. (1980). *Measurement of the levels of attainment by college mathematics students of the concept variable*. PhD Thesis, University of Wisconsin.

Tzanakis, C. & Arcavi, A. (2000). *Integrating history of mathematics in the classroom: an analytic survey. En J. Fauvel y J. Van Maanen (Eds.), History in mathematics education: the ICMI study* (pp. 201-240). Dordrecht: Kluwer.

Ursini, S.,Escareño, F.,Montes, D.&Trigueros, M. (2008). *Enseñanza del álgebra elemental una propuesta alternativa*. México: Trillas.

Ursini, S. (1993). *Pupils' approaches to different characterizations of variable in Logo.* PhD Thesis, University of London.

Usiskin, Z. (1988). *Conceptions of School Algebra and Uses of Variables. En A. Coxford (Ed.), The Ideas of Algebra K–12* (pp. 8-19). Reston, Virginia: NCTM.